GeoGebra como Instrumento de la Práctica del Profesor

Gavilán Izquierdo, José María[1] gavilan@us.es
Barroso Campos, Ricardo[1] rbarroso@us.es

Resumen

En este trabajo hacemos un análisis del potencial de *GeoGebra* como instrumento de la práctica del profesor, utilizando como referente ideas teóricas sobre los instrumentos provenientes de las investigaciones en educación matemática. Desde la educación matemática los instrumentos de la práctica del profesor se caracterizan no solo por el artefacto en sí, sino que es necesario considerar el uso y analizar los propósitos que se han tenido para justificarlo. (Llinares, 2000). Se hace un análisis del instrumento GeoGebra. Proponemos una tarea que se apoya en el uso de GeoGebra para mostrar el análisis teórico propuesto sobre los instrumentos de la práctica del profesor y las posibilidades que ofrece GeoGebra.

1. El instrumento GeoGebra

Comenzaremos esta comunicación reflexionando sobre el “artefacto” o instrumento de la práctica: GeoGebra. GeoGebra integra, por un lado elementos/capacidades de los programas de geometría dinámica, y por otro lado integra elementos/capacidades de los programas de cálculo simbólico. Además, GeoGebra permite el uso simultáneo de los sistemas de representación simbólico (algebraico/numérico) y gráfico, en tres ventanas simultáneas (algebraica, gráfica y hoja de cálculo). Las manipulaciones o modificaciones de objetos matemáticos (por ejemplo, mediante tironeo/arrastre) en una de las ventanas (algebraica, gráfica, o bien, en hoja de cálculo) tiene de forma inmediata repercusión en las restantes ventanas. Si a estas dos características añadimos que dispone de un interface “amigable” que facilita su uso, podemos decir que “en potencia” es un artefacto que puede ser relevante para la educación (tanto universitaria como no universitaria).

Otra característica de GeoGebra, y general en los programas de geometría dinámica, es la diferenciación entre *dibujo* y *figura*. Esta diferenciación ha sido introducida por Laborde (1994), que señala que los programas de geometría dinámica proporcionan un interface cuyos dibujos son figuras que conservan las propiedades pertinentes para la construcción pero que al manipular la figura de manera directa descarta relaciones no válidas, las figuras que se construyen con programas de geometría dinámica no son simples dibujos como los que se realizan con lápiz y papel. Las figuras pueden ser modificadas de manera continua mientras mantienen su descripción, las relaciones geométricas de la figura son visualizadas como invariantes bajo la manipulación (Laborde, 1993). A partir de esta idea y considerando GeoGebra como programa de matemáticas dinámicas, consideramos que, un dibujo es realizado de la misma manera que los realizados con lápiz y papel, es decir, realizados a mano alzada, por otro lado, una figura construida con Geogebra se realiza utilizando las propiedades euclídeas que el programa ofrece (o el usuario diseña y elabora). Por ejemplo, si creamos dos puntos A y B, el punto medio se construye con la herramienta Punto Medio o Centro, cuando se arrastre A o B, la relación de punto medio sigue conservándose.

Otras características de los programas de matemáticas dinámicas (que engloban geometría dinámica) que consideramos necesario señalar son:

- Necesidad de definición explícita de los objetos matemáticos: el programa reconoce un objeto matemático o geométrico como tal (y manipulable de forma directa) cuando “explícitamente” se construye con una herramienta de construcción.
- Las relaciones explícitas que se establecen entre el usuario y el programa. Cuando un usuario

[1] Didáctica de las Matemáticas (Universidad de Sevilla)

construye una figura, necesita hacer explícitas algunas relaciones de la figura a través de las herramientas del programa. Una vez que se realiza la construcción, el programa hace explícitas al usuario otras relaciones que están en la figura (que se deducen de las relaciones indicadas por el usuario).

2. Caracterizando los usos y justificaciones de los profesores

2.1 Usos de los instrumentos por el profesor. Desde nuestro punto de vista, el uso de programas como GeoGebra permite establecer entre el usuario y el software dos tipos de relaciones explícitas. *Relaciones explícitas dadas por el usuario*: para construir una determinada figura con GeoGebra el usuario necesita explicitar un conjunto de relaciones. Por ejemplo, para construir una recta perpendicular a un segmento, el usuario no selecciona la herramienta "Recta que pasa por Dos puntos" sino que es necesario utilizar la herramienta "Recta Perpendicular" y de esta forma hacemos explícita la relación de perpendicularidad de recta y segmento. Una manera de poner en juego estas relaciones en el aula es pidiendo a los estudiantes que construyan una figura con determinadas características, por ejemplo, construye un cuadrado, o bien, dada la función f(x) y el punto x=a construye la recta tangente a f(x) en el punto (a, f(a)).Y *relaciones explícitas dadas (devueltas) por el programa*: dada una figura construida con GeoGebra, además de las relaciones establecidas por el usuario (en su construcción), aparecen otras relaciones entre los objetos de la figura que se deducen de las anteriores. Por ejemplo, dado un triángulo y sus tres medianas (construidos como figura, mediante las herramientas pertinentes) se deduce que se cortan en un punto (baricentro). De esta manera GeoGebra hace explícita esa relación no conocida a priori por el usuario. El "tironeo/arrastre" de cualquier vértice del triángulo confirma que dicha relación (las tres medianas del triángulo se cortan en un punto) es válida para cualquier triángulo. Se convierte en esta situación GeoGebra en una herramienta de descubrimiento y comprobación empírica de relaciones. Si la figura no es construida por el usuario-alumno (por ejemplo, es proporcionada al estudiante por su profesor) todas las relaciones entre objetos de la figura son susceptibles de ser "descubiertas" por el usuario.

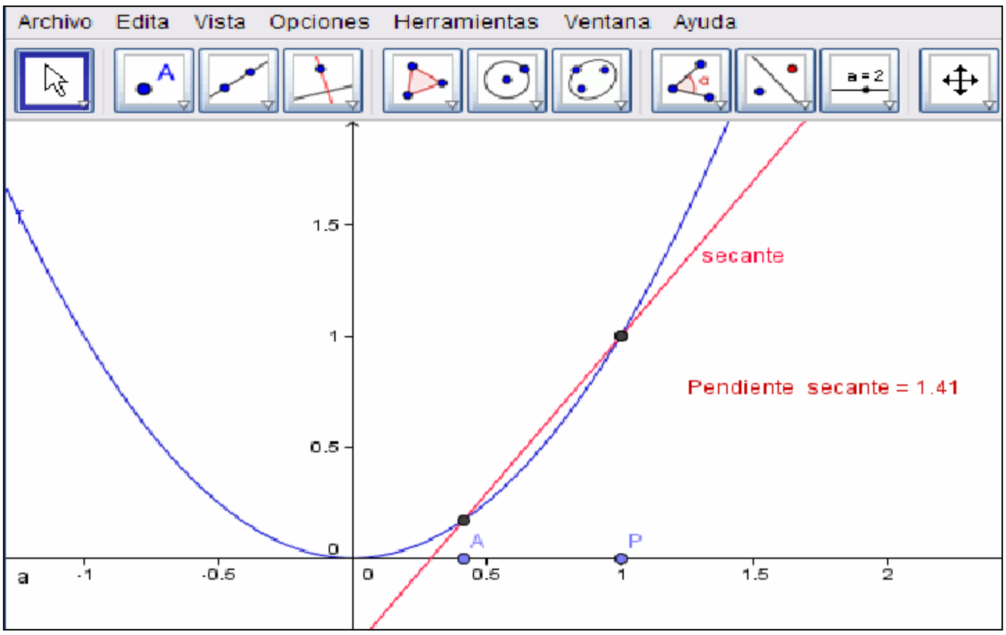
A partir de esta idea el profesor puede pedir a sus estudiantes que realicen una construcción o bien proporcionar él mismo la construcción, para que de esta manera los estudiantes indaguen/investiguen sobre las relaciones o propiedades de la figura. La diferencia entre ambas opciones está en el peso dado a las relaciones que explícitamente deba proporcionar el usuario y a la necesidad de conocer con mayor o menor profundidad el uso del artefacto. La sugerencia/cuestión que proponemos a los asistentes/lectores es relativa a caracterizar los usos de GeoGebra a partir de estas ideas sobre las relaciones: si el peso de explicitar relaciones cae sobre el usuario o sobre software.

2.2 Propósitos del profesor cuando usa los instrumentos. Para dar cuenta de los propósitos del profesor cuando utiliza un instrumento en el aula, partiremos de la consideración de que en los conceptos matemáticos como objetos de enseñanza y aprendizaje se pueden distinguir tres dimensiones:
- *dimensión semántica (significativa)***:** hace referencia a los significados que se vinculan al concepto, para este propósito, puede ser pertinente considerar situaciones no matemáticas en las que aparece el concepto.
- *dimensión sintáctica (representativa)***:** hace referencia a las representaciones del concepto (las maneras en que se "escribe" el concepto). En esta componente se incluyen los distintos modos de representar el concepto, y las posibles traducciones entre ellas (traslaciones). En García y Llinares (1994) se hace un análisis de este aspecto referido al concepto de función.
- *dimensión procedimental (algorítmica)***:** se incluyen en esta dimensión los algoritmos que se vinculan al concepto.

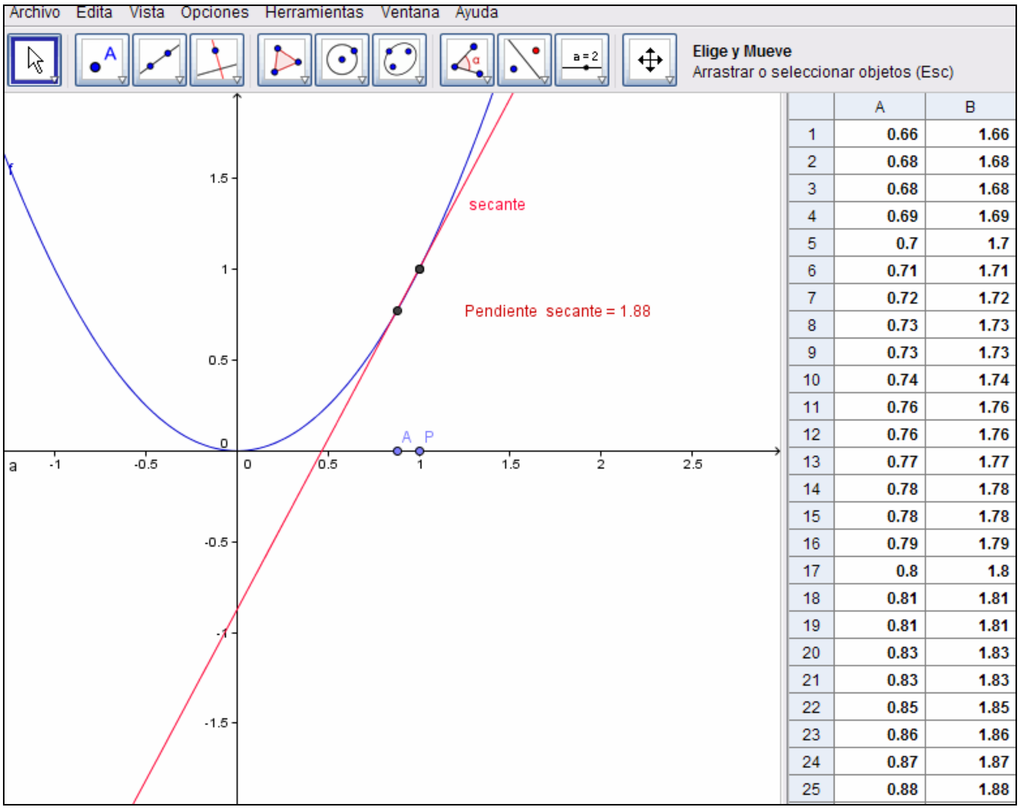
Las tres dimensiones consideradas están interrelacionadas, como por ejemplo, en los procesos de traducción entre modos de representación, en los que hay una traducción formal y una traducción de los significados entre las representaciones; o bien, en el aprendizaje de los algoritmos, éstos deben estar vinculados a los significados. A partir de esta forma de "ver" los conceptos matemáticos como objetos de enseñanza aprendizaje, podemos dar sentido a los propósitos del uso de los instrumentos por parte del profesor. En este trabajo hemos escogido como concepto la derivada para mostrar cómo articulamos las ideas de instrumento (GeoGebra), su uso y los propósitos de su uso.

3. Un ejemplo: la noción de derivada, derivada de una función en un punto

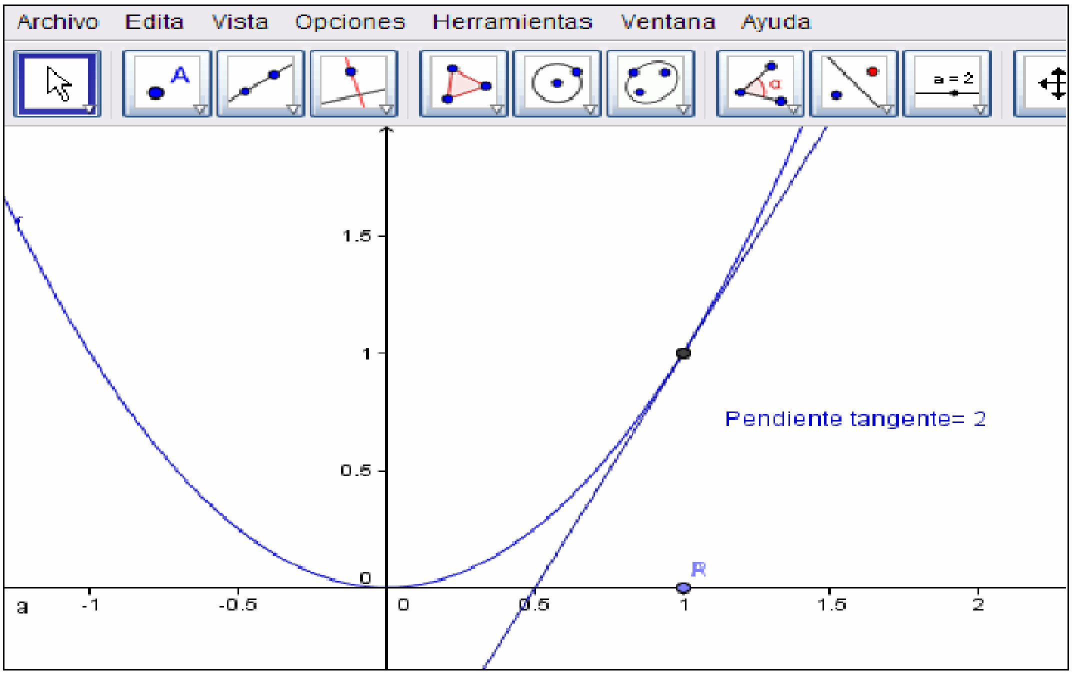
Utilizaremos GeoGebra de manera que el profesor proporciona a los estudiantes una figura (ver siguiente ilustración) y pide a los estudiantes que arrastren el punto A aproximándolo al punto P. La pregunta de partida es *¿qué ocurre con las pendientes de las rectas secantes? ¿Qué sucede con las rectas secantes?* Esta manera de proceder va a permitir que todas las relaciones sean "explicitadas" por el ordenador y el estudiante tenga que "descubrir" las relaciones pertinentes y favorecer la construcción del concepto vinculando significados y representaciones, que sientan las bases para un posterior desarrollo de la dimensión procedimental. La tarea que proponemos en este trabajo ha sido analizada, desde el punto de vista de la investigación, en Gavilán, García y Llinares (2007) utilizando ideas teóricas distintas a las aquí presentadas. El propósito del diseño y elaboración de la tarea en términos de las dimensiones y sus relaciones, es conseguir que se favorezca en el estudiante la construcción de un significado geométrico de la derivada: la recta tangente como límite de las rectas secantes, y la pendiente de la tangente, por tanto, como límite de las pendientes de las rectas secantes. Los modos de representación que aparecen en la tarea son el modo gráfico y el modo numérico.



Las representaciones que se utilizan son gráficas y numéricas, aparece la recta secante y su pendiente. La ventana gráfica de GeoGebra proporciona la figura para proceder al arrastre o tironeo de algún objeto (punto A) que se aproxima hacia el punto P. La figura, al proporcionar la recta secante y su pendiente permitirá a los estudiantes centrar la atención, al resolver la tarea, en la *variación, tanto de la recta secante como de su pendiente* y construir el significado de la recta tangente a una curva como límite de las rectas secantes y f´(a) como pendiente de la recta tangente (Gavilán et al., 2007). La hoja de cálculo de GeoGebra proporciona el soporte para el uso del modo de representación numérico. Podemos registrar en la hoja de cálculo, que funciona como tabla de valores, las diferentes pendientes de las rectas secantes a la curva cuando se arrastre el punto A hacia el punto P.



En la tarea diseñada, cuando el punto A coincide con el punto P la recta secante se convierte en la recta tangente. Haciendo "visible" la tangente como límite de las rectas secantes y la pendiente.



4. Conclusiones

En la tarea propuesta, con la figura proporcionada, hay dos objetos geométricos susceptibles de ser modificados (objetos independientes) el punto A y el punto P. Hemos arrastrado A hacia P (fijo) y analizado la variación. Podemos ahora variar el punto A (arrastrándolo) y estudiar de nuevo la variación cuando el punto P se aproxima al nuevo A. Esta manera de proceder permitiría construir *significativamente el concepto de función derivada a partir del concepto derivada de una función* en un punto, relacionando/vinculando los conceptos de f´(a) y de f´(x). La función f(x) también se puede modificar (por ejemplo, a través de un deslizador), pero este caso no lo analizamos aquí.

A modo de resumen, podemos decir que la tarea pone de manifiesto el potencial de GeoGebra para abordar dos dimensiones de los conceptos matemáticos, semántica y sintáctica, de manera conjunta (vinculándolas). Pensamos que estas dos dimensiones son relevantes en la configuración de los conceptos matemáticos. Además la tarea prepara a los estudiantes para abordar la dimensión procedimental de manera significativa. En relación a la dimensión procedimental, Geogebra dispone de una ventana algebraica que posibilita el uso simultáneo del modo de representación algebraico junto con los anteriores (gráfico y numérico). No hemos querido hacer uso de dicha ventana (y de la Barra de Entrada) para resaltar el papel que juegan los otros modos de representación en la construcción de los significados de los conceptos

Desde el punto de vista de GeoGebra, como instrumento se revela “eficiente”, el uso de figuras preconstruidas evita tener que dedicar tiempo al aprendizaje del programa y deja que los estudiantes puedan explorar e indagar en matemáticas. El análisis propuesto permite considerar el papel, al menos para empezar a intuir, que puede jugar la tecnología en la práctica del profesor y en la constitución de determinadas formas de hacer en el aula. Creemos que la formación de profesores de matemáticas de todos los niveles educativos en tecnología (como GeoGebra) debe incluir elementos teóricos que les ayuden a tomar decisiones. Estas ideas de naturaleza teórica pueden facilitarles la justificación para los “cambios” que conlleva el uso de software en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido apoyado por el Grupo de Investigación en Educación Matemática, FQM 226 de la Universidad de Sevilla. A los profesores Ramón Trigueros Reina (IES Triana, Sevilla) y Manuel Seda Allo (asesor de matemáticas del Cap Pamplona) por su colaboración.

Referencias

1. Mercedes García y Salvador Llinares (1994): *Algunos referentes para analizar tareas matemáticas*. Suma, 18, pp.13-23.

2. José María Gavilán, Mercedes García y Salvador Llinares (2007): *Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas*. Enseñanza de las Ciencias, vol. 25, núm. 2, pp. 157-170.

3. Colette Laborde (1.993): *The Computer as Part of the Learning Enviorenment: The Case of geometry*. En C. Keitel y K. Ruthven (eds.) *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*. Springer-Verlag.

4. Colette Laborde (1.994): *Les rapports entre visuel et géom?trique dans un EIAO*. En M. Artigue y otros (eds) *Vingt ans de didactique des Mathematiques en France*. La Pensée Sauvage, Editions.

5. Salvador Llinares (2000): *Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas*. En J. P. PONTE y L. Serrazina (eds.), *Educaçao matemática em Portugal, Espanha e Itália. Actas da Escoila de Verao -1999*. Secçao de Educaçao e Matemática. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educaçao.