UNIVERSIDAD de SEVILLA

Departamento de Geometría y Topología

Inmersiones de grafos en superficies y seudosuperficies con todos los vértices en una misma cara

Eugenio M. Fedriani Martel

Sevilla, 2001

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
NEGOCIADO DE TESIS

Queda registrado este Título de Doctor al folio 67 número 168 del libro correspondiente.
Sevilla, 23 ABR. 2001
El Jefe del Negociado.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Depositado en la Secretaría Dpto. de la Fac. Matemáticas de esta Universidad desde el día 25/4/2001 hasta el día 18/5/2001
Sevilla 19 de Mayo del 2001
EL DIRECTOR DEL DPTO. GEOM. Y TOP.

DPTO. DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

R.26046

i18321720

043/365

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Facultad de Matemáticas

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

INMERSIONES DE GRAFOS EN SUPERFICIES Y SEUDOSUPERFICIES CON TODOS LOS VÉRTICES EN UNA MISMA CARA

Memoria presentada por Eugenio Manuel Fedriani Martel para optar al grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Fdo.: Eugenio M. Fedriani Martel.

Vº. Bº. LOS DIRECTORES:

Fdo.: Luis Boza Prieto.
Profesor Titular de Universidad
del Departamento de Matemática
Aplicada I de la Universidad
de Sevilla.

Fdo.: Juan Núñez Valdés.
Profesor Titular de Universidad
del Departamento de Geometría
y Topología de la Universidad
de Sevilla.

Sevilla, abril de 2001.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

A ti.

Fe de erratas de "Inmersiones de grafos en superficies y seudosuperficies con todos los vértices en una misma cara":

Pág:	Línea:	Dice:	Debe decir:
xiv	15	...la periplanaridad en...	...la peri-representabilidad en...
2	10	...proyectivos.	...proyectivos. □
6	22	...y $G_{\mathbb{Z}_+} = (\mathbb{Z}, ...$	...y $G_{\mathbb{Z}_+} = (\mathbb{N}, ...$
10	5	...G salvo que...	...G salvo a y que...
10	11	...que es menor simultáneamente de ambos.	...del que ambos son subdivisión.
11	3	...ninguna arista o vértice de G...	...aristas o vértices de G...
12	última	...en superficies	...en otras superficies
26	6	y, si $x_i = v_j$, $x_{i+1} = \pi_j(x_i)$ cuando $i = 0, 1, \ldots, r-1$...	y, si $x_i = v_j$, $x_{i+1} = \pi_j(x_{i-1})$ cuando $i = 1, 2, \ldots, r-1$ y $x_1 = \pi_j(x_{r-1})$ cuando $x_0 = v_j$...
28	3	...de ella y de S'...	...de G y de S'...
28	26	...adyacente con todos los vértices de G excepto con	...incidente con aristas que pasan por todos los puntos singulares de S excepto por
29	18	...**Perigénero de un Grafo Cúbico (PGC)**.	...**Perigénero de un Grafo Cúbico (PGC')**.
43	cabecera	2.2. GRAFOS...	2.3. GRAFOS...
43	11	$\boxed{\Rightarrow}$...	$\boxed{\Leftarrow}$...
44	3	$\boxed{\Leftarrow}$...	$\boxed{\Rightarrow}$...
46	11 y 12	...en la unión por 2 puntos de S y S^2.	en S.
50	4	de $K_{2,3}$ ó K_4 hay...	de $K_{2,3}$ hay...
54	26	...que no es...	...que no lo es por no contener a...
60	2	...2 periplano...2 periplano...	...2-periplano...2-periplano...
70	28	...G es 4-periplano.	...$G + xy$ es 4-periplano.
71	10	...(antes del Ejemplo 3.1.10)...	(en la demostración de la Proposición 3.1.11)...
92	6	...($G_1 = G$).	...($G_1 = G$ ó $G_2 = G$).
95	20	grafos más...	grafo más...
108	19	...infinitos L_4 ó $L_{2,3}$, se	...infinitos A_1^1 ó B_1^1, se
131	cabecera	4.7. GRAFOS p-PERI-$S^2(n)$	4.6. GRAFOS c-PERI-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(n)$
131	21	...peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ prohibidos:...	...p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ prohibidos:...
131	25	...obterner nuevas	...obtener nuevas
133	cabecera	4.7. GRAFOS p-PERI-$S^2(n)$	4.6. GRAFOS c-PERI-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(n)$
136	penúltima	...rayos a un...	...rayos en un...
154	20	...Teorema 5.2.7	...Teorema 5.2.7.
161	17	...edge op a plane...	...edge of a plane...
172	2	PGC (del peri-género...	PGC' (del peri-género...

Agradecimientos

Tienes entre tus manos el fruto de varios años de trabajo, pero también el resultado de la reunión de sugerencias, ideas, colaboraciones, apoyos... de los que tú también formas parte. Sé que, durante este tiempo, no he estado solo (éste me permitís que lo escriba sin tilde sin que parezca una errata, ¿verdad?) y, en verdad, puedo afirmar lo que en otra página hubiese sonado a "farol":

"Cuius rei demostrationem mirabilem sane detexi hanc marginis exiguitas non caperet." [1]

Por eso, he decidido dedicarte esta memoria. Estoy seguro de que piensas que ya habrá tiempo para enunciar resultados generales y abstractos, así que me siento obligado a poner algunos ejemplos entre los que puede que te sientas identificado:

Los que asisten a la defensa de mi Tesis me confirman que hay a quien le importo y quien se felicita con mis alegrías. Muchos se entristecieron también con mis dificultades, como la mayoría de mis amigos, a los que he tenido que dar de lado en demasiadas ocasiones.

De entre los anteriores, me gustaría seguir destacando a algunos que han participado directamente de alguna fase de este proyecto:

Mis compañeros de profesión (en particular, mis "ex-Departamentos" de Álgebra, Computación, Geometría y Topología, de Matemática Aplicada I y de Economía Aplicada III de la Universidad de Sevilla y, especialmente, el Área de Métodos Cuantitativos de la Universidad Pablo de Olavide) me han comprendido cuando no he podido ayudarles ni todo lo que se merecen ni lo que me hubiese gustado, al menos. En pago, me han devuelto siempre lo que pensaban que me favorecería.

[1] "Poseo una prueba en verdad maravillosa para esta afirmación, a la que este margen viene demasiado estrecho" (Pierre de Fermat).

Algunos colaboradores concretos (como Alberto Márquez, Antonio Quintero, Rafael Moyano, Miguel Ángel Gutiérrez, María Pastora Revuelta, Manuel Emilio Gegúndez, etc.) han dotado de cimientos los resultados que firmo. Puede que no sea costumbre recordarlo, pero el comentario oportuno de un especialista puede suponer algo más fructífero que horas de dedicación. Algunos de ellos son miembros del Tribunal que ha de juzgar el resultado de este trabajo, lo cual me satisface significativamente.

Una parte muy importante de la culpa de que exista esta memoria es de mis Directores, Luis Boza y Juan Núñez, a los que nunca falló su interés, esfuerzo, paciencia y amistad.

Juan me ayudó a dar los primeros pasos en Teoría de Grafos. También ha sido fundamental para que la redacción de la Tesis se haya terminado (y de esta forma). Luis tiene el "terrible hábito" de olvidarse de lo suyo para compartir su enorme capacidad de trabajo y su imaginación con los grafos y con el que tenga a su lado. No he tenido más remedio que beneficiarme de esta especial forma de ser de ambos.

Creo que mi familia ha tenido que aguantarme más de lo que resulta razonable. Mi padre fue el que me metió en este mundo de las Matemáticas y, desde que falleció, mi madre y mis hermanos han hecho lo posible para que no me encontrara incómodo dentro. En particular, mi madre es a quien más tengo presente mientras escribo estas líneas, pues es quien me ha apoyado constantemente durante la elaboración de este trabajo de investigación.

¡Muchas gracias! ¡Gracias a todos!

Índice General

Índice General vii

Introducción xi

0 Preliminares 1

0.1 Superficies y seudosuperficies 2

0.1.1 Seudosuperficies 3

0.2 Grafos topológicos 6

0.3 Inmersiones: grafos planos y periplanos 11

0.3.1 Inmersiones peri 15

I Peri-representabilidad de grafos finitos 19

1 El problema de las inmersiones peri 21

1.1 Planteamiento de un problema algorítmico 22

1.1.1 Problemas NP-completos 22

1.1.2 El problema del género 24

1.1.3 Definición combinatoria de inmersión 25

1.1.4 El problema del peri-género 27

1.1.5 Inmersiones peri en superficies compactas 30

1.1.6 Algoritmos para la peri-S-representabilidad 30
1.2 Inmersiones peri en el toro estrangulado 32

2 Inmersiones peri en seudosuperficies esféricas simples 39
2.1 Seudosuperficies esféricas simples 40
2.2 Grafos 2-periplanos 41
2.3 Grafos peri-B_n 43
2.4 Grafos peri-L_n 47
2.5 Grafos peri en otras seudosuperficies esféricas 55
2.6 Multigrafos peri en seudosuperficies esféricas 58

3 Inmersiones peri en otras seudosuperficies 61
3.1 Seudosuperficies formadas por tres esferas 62
3.2 Dos esferas pegadas por más de dos puntos 77
3.3 Infinitos menores topológicos peri prohibidos 84
3.4 Inmersiones peri en superficies no conexas 86
3.5 Inmersiones peri en uniones por un punto 90
3.5.1 Inmersiones peri en uniones por segmentos 91
3.5.2 Inmersiones peri en uniones por un punto 91
3.6 Inmersiones peri en seudosuperficies arborescentes 96

II Peri-representabilidad de grafos infinitos 99

4 Inmersiones peri en superficies tubulares 101
4.1 Superficies tubulares 102
4.2 Conceptos previos a la coloración de finales 103

4.3 Coloración de los finales de un grafo 109
4.4 Caracterización de los grafos c-peri-$S(n)$ 112
4.5 Grafos c-peri-$S^2(n)$ 116
4.5.1 Grafos c-peri-$S^2(1)$ 116
4.5.2 Grafos c-peri-$S^2(2)$ 118
4.5.3 Grafos c-peri-$S^2(3)$ 121
4.5.4 Tipos de menores c-peri-$S^2(n)$ prohibidos 121
4.5.5 Grafos c-peri-$S^2(4)$ 123
4.5.6 Grafos c-peri-$S^2(n)$ 124
4.6 Grafos c-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(n)$ 130
4.6.1 Grafos p-peri en la banda de Möbius 130
4.7 Grafos p-peri-$S^2(n)$ 134
4.7.1 Grafos p-pericilíndricos 135

5 Inmersiones peri de grafos no numerables 143

5.1 Grafos no numerables 144
5.2 Inmersiones periplanas 146
5.3 Inmersiones peri en otras superficies compactas 153
5.4 Seudosuperficies y superficies no compactas 155

A Menores peri prohibidos en la banda de Möbius 159

A.1 Menores p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ prohibidos 159
A.2 Menores topológicos p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ prohibidos 160

Bibliografía 161

Lista de Símbolos 169

Índice de Materias **170**

Índice de Figuras **173**

Introducción

Los grandes problemas a estudiar por la Matemática pueden reducirse a tres tipos: los problemas de clasificación, los de análisis y los de síntesis. Según una opinión bastante generalizada, la Geometría se encarga de numerosos problemas correspondientes al primer tipo: clasifica lo que la experiencia proporciona a nuestros sentidos.

Desde esta experiencia, precisamente, surge el concepto de grafo. Los grafos permiten representar las relaciones binarias entre los elementos de un conjunto. Por eso, desde la primera mitad del siglo XVIII, los grafos han sido utilizados para modelizar casi cualquier tipo de problemas; en particular, son especialmente destacables en la actualidad las aplicaciones de la Teoría de Grafos en campos tan diferentes como el diseño de circuitos impresos, la Arquitectura y la Economía.

Sin embargo, no debe olvidarse que los grafos son objetos topológicos. Para muchos, la Topología tenía gran parte de Geometría y poco de Álgebra al principio y cada vez tiene menos de Geometría y más de Álgebra.

Ya en 1913, Jules Henri Poincaré relacionaba la Geometría y la Topología de un modo que resulta apropiado para motivar un estudio que participa de ambas ramas:

> "El Analysis Situs es una ciencia muy importante para el geómetra.[...] Es para favorecer la intuición geométrica, que el geómetra tiene la necesidad de dibujar figuras o, por lo menos, representárselas mentalmente. Ahora bien, si desprecia las propiedades métricas o proyectivas de estas figuras, si solo se atiene a sus propiedades puramente cualitativas, solamente entonces la intuición geométrica interviene verdaderamente."

La opinión de tan ilustre personaje puede servir para justificar las numerosas representaciones gráficas (imperfectas) que se presentarán y el que razonemos sobre figuras necesariamente "mal hechas". No debe olvidarse que el estudio que se presenta trata de esquemas en los que la longitud y forma de las líneas son arbitrarias.

Creemos que no debe comenzarse una reflexión sobre grafos como ésta, sin comentar, aunque sea brevemente, cómo se convirtieron en materia de estudio:

En 1736, Leonard Euler resolvió el célebre problema de los puentes de Königsberg, dando origen a la Teoría de Grafos. El momento más determinante para su desarrollo posterior llegó con el Teorema de caracterización de los grafos planos, dado por Kasimir Kuratowski [58] en 1930. Se trataba de dibujar "correctamente" los grafos en el plano.

Dentro de las variaciones de la planaridad que se han estudiado tras el Teorema de Kuratowski, tal vez la más importante resulte ser la periplanaridad (ver [52]). Gary Chartrand y Frank Harary [28] fueron los encargados de definir dicho concepto y de caracterizar los grafos periplanos (los que se pueden representar con todos los vértices en una misma cara).

Con posterioridad, han surgido diversas generalizaciones de los estudios de Chartrand y Harary. Oubiña y Zucchello caracterizaron los grafos W-periplanos, Sedláček analizó los periplanos generalizados, Bienstock y Monma los n-periplanos, Cáceres los periplanos por aristas, etcétera. Otros estudios acerca de la periplanaridad pueden consultarse en [65], como los que caracterizan los grafos con grafo de línea, medio o total periplano.

Interesantes generalizaciones del Teorema de Kuratowski se refieren a la posibilidad de representar grafos en otras superficies o seudosuperficies (como ocurre con los grafos periproyectivos). Éstas nos sugirieron dedicar nuestros esfuerzos al estudio de los grafos que admiten inmersiones en superficies o seudosuperficies con todos los vértices en una misma cara. De hecho, numerosas aplicaciones y caminos de investigación matemática abiertos avalan esta idea.

Situaciones completamente diferentes se modelizan utilizando la Teoría de Grafos. Economía, Química, Electrónica, Psicología, Física,... y, sobre todo, la Matemática Recreativa utilizan la Teoría de Grafos (se pueden consultar [39, 40, 41, 42], entre otros). El razonamiento sobre el grafo proporciona soluciones de los problemas modelizados; por eso, plantear y resolver cuestiones sobre grafos puede servir para solucionar simultáneamente múltiples problemas. En este sentido, actuamos motivados porque estamos presentando un estudio de "Matemática Aplicable".

Comentemos algunas de las aplicaciones más directas de los grafos periplanos y de sus generalizaciones:

Estos grafos, aunque constituyen una familia relativamente pequeña dentro de los grafos planos, poseen propiedades interesantes desde el punto de vista topológico. Por ejemplo, los periplanos maximales son la triangulación de algún polígono. Además ciertos problemas algorítmicos NP-completos pueden resolverse en tiempo polinomial para los grafos periplanos (por ejemplo, el cálculo de árboles de Steiner [85]).

Por otro lado, en Economía está siendo bastante habitual asumir que la representación de un modelo resulta más conveniente utilizando las llamadas *redes neuronales*. En este tipo de representaciones gráficas también puede resultar útil el conocimiento de las propiedades topológicas (como la periplanaridad) de grafos relacionados con aquéllas.

En ocasiones, la Teoría de Grafos también sirve para estudiar la complejidad de algunos algoritmos. Sin embargo, es más habitual lo contrario: que los grafos se sirvan de la algorítmica para diseñar procedimientos eficientes que permitan resolver con ordenador problemas que se modelizan mediante grafos. A lo largo de la memoria, se profundizará algo más en estos aspectos.

Otra de las aplicaciones más frecuentes de la periplanaridad es el estudio de redes de comunicaciones y su diseño (como en [37]).

En cuanto a la relación de los grafos periplanos con la Arquitectura, puede consultarse [73] para mayor información.

En la construcción de circuitos impresos (como en [81]), se suele representar cada terminal por un vértice, de modo que dos terminales conectadas se representan por dos vértices que pertenecen a una misma arista que los une. Si el circuito es parte de otro más complejo, es posible que sus terminales necesiten conectarse con otras partes del circuito, por lo que se debe conseguir que todas ellas queden en la periferia de la placa; es decir, se desea que el grafo que modeliza la situación tenga todos sus vértices en la cara exterior (periplanaridad).

De hecho, la aplicación anterior nos hace pensar en los grafos infinitos, que pueden surgir de grafos finitos que no se sabe cuánto van a crecer. Las aplicaciones más usuales de los estudios relativos a grafos infinitos, se refieren a la aparición de sistemas modelizados por una sucesión de grafos que crece de forma indefinida. Aunque éste es el principal motivo por el que se estudian los grafos numerables, también se relacionan con ciertos problemas de lógica formal.

En resumen, el principal interés por estudiar grafos infinitos surge de problemas en los que conviene conocer lo que ocurre en el límite de una sucesión de grafos

crecientes o, simplemente, tener la certeza de que ciertas propiedades interesantes no se pierden al aumentar el número de vértices o de aristas del grafo.

Estas razones son válidas para motivar en parte el estudio de los grafos no numerables. También resulta pertinente la predisposición de algunas ramas de la Ciencia a estudiar los sólidos como conjuntos incontables y la importancia de los conjuntos no numerables para la Lógica y el Cálculo de Probabilidades.

En cuanto a los problemas abiertos en Teoría de Grafos, hay numerosos resultados para inmersiones en superficies compactas que no se han generalizado aún para otro tipo de superficies o seudosuperficies:

El concepto de seudovariedad, por ejemplo, se remonta a los comienzos de la Topología y ha sido profundamente estudiado (se puede consultar [27, pág. 111] y [75, pág. 90]). En [21] incluso se trabaja con inmersiones de grafos en seudosuperficies, concepto que se generaliza en [10] al tratar inmersiones de grafos en seudovariedades (con una cantidad infinta de puntos singulares) que cumplen ciertos requisitos. Pero no se han completado análisis sobre la periplanaridad en seudosuperficies.

Los puntos singulares aún pueden tener aplicaciones no aprovechadas completamente en tareas como el diseño de circuitos; para nosotros, lo que resultará más productivo será la caracterización de los grafos que se pueden representar en dichas seudosuperficies bajo ciertas restricciones.

En cuanto al otro tipo de superficies estudiadas en esta memoria, las superficies tubulares se utilizan en el diseño de ciertos tipos de cúpulas, lo que relaciona la Arquitectura con el estudio de los grafos que admiten inmersiones en dichas superficies no compactas.

Los comentarios anteriores llevan la intención implícita de justificar cada uno de los temas que se abordarán en estas páginas. Para finalizar esta Introducción, comentaremos los contenidos que corresponden a la presente memoria. Ésta se divide en tres partes claramente diferenciadas: un primer capítulo de conceptos previos, una parte relativa a grafos finitos y otra que trata de grafos infinitos.

El Capítulo 0 servirá para recordar algunos conceptos topológicos básicos, enunciar resultados generales y fijar una notación adecuada para trabajar con grafos

peri-representables.

La primera parte se compone de 3 capítulos sobre grafos finitos:

En el primero de ellos, se plantean varios problemas de índole algorítmica y se introducen las principales dificultades comunes a casi todos los problemas de peri-representabilidad en seudosuperficies. En concreto, se prueba la NP-completitud del problema de la peri-representabilidad en seudosuperficies y se aportan resultados sobre los grafos peri en el toro estrangulado, que abren la posibilidad de obtener menores peri prohibidos en dicha seudosuperficie.

El segundo, se dedica al estudio de los grafos que admiten inmersiones peri en seudosuperficies formadas por esferas pegadas por puntos de modo que cada esfera tiene 2 puntos singulares. Según se explica al principio del capítulo, cualquier grafo admite una inmersión peri en una seudosuperficie de este tipo, por lo que no parece una familia excesivamente restringida. En particular, se consiguen listas finitas de menores peri prohibidos en seudosuperficies en las que las listas de menores topológicos prohibidos son infinitas y se obtienen varios resultados más que pueden llegar a sorprender por no resultar habituales en las inmersiones de grafos.

El último capítulo de la primera parte, trata de los grafos peri en otras seudosuperficies que se obtienen mediante la contracción a puntos de curvas de superficies compactas (tanto orientables como no orientables). En cada tipo de seudosuperficie se propone una forma distinta de caracterización, relacionando dichos grafos peri con otras familias de grafos o con los que se obtienen de la aplicación de ciertos algoritmos que se describen.

La segunda parte, que versa sobre las inmersiones peri de grafos infinitos, se divide en 2 capítulos:

En el Capítulo 4 se trabaja con grafos numerables, a los que se exige que posean inmersiones peri sin acumulación de vértices ni de aristas. Las superficies no compactas que se utilizan son tubulares con una cantidad finita de finales. Se parte de la coloración de finales como procedimiento para distinguir los finales tanto en grafos como en las superficies. Gracias a esta forma de proceder, se consigue generalizar la caracterización de los grafos p-periplanos a casos como el del cilindro y se resuelve el problema para la banda de Möbius.

En el último capítulo se explican las diferencias entre los resultados de capítulos anteriores y los que se obtienen para grafos no numerables. En algunos de ellos se enuncian explícitamente los teoremas de caracterización de los grafos peri. En otros,

como sucede a lo largo de toda la memoria, se proponen formas de actuar ante los nuevos problemas que se abren a la investigación en Teoría de Grafos.

Al final de la memoria, a modo de apéndice, se describen los algoritmos aplicados para obtener los menores peri prohibidos y los menores topológicos peri prohibidos en la banda de Möbius a partir de los menores peri-proyectivos prohibidos.

Capítulo 0

Preliminares

La parte de la Teoría de Grafos a la que nos referiremos es la que se conoce como Teoría de Grafos Topológicos, que trata de inmersiones de grafos en superficies y seudosuperficies (evitando que se corten las aristas). Un estudio bastante completo de los grafos, así como un análisis detallado de sus propiedades, puede obtenerse de textos generales como el de Harary [48] (para grafos finitos) o de artículos monográficos como el de Thomassen [78] (para grafos infinitos). Procuraremos utilizar notaciones compatibles con las de ellos en toda nuestra exposición.

En este Capítulo 0 se presentan las definiciones y resultados básicos de la Teoría de Grafos Topológicos que se utilizarán en el resto de la memoria. Algunos conceptos o propiedades serán utilizados de forma particular en alguno de los capítulos. En esos casos, se ha preferido postponer su exposición hasta el momento en que se necesite para agilizar la sucesión de conocimientos previos al estudio que nos proponemos.

Sí resulta necesario recordar algunas nociones topológicas sobre superficies para introducir el resto de los conceptos. Se refieren a cuestiones básicas que pueden consultarse en mayor profundidad en manuales específicos [36, 56, 75]. Con ellas comenzamos este rápido repaso.

0.1 Superficies y seudosuperficies

A las 2-variedades conexas se las suele llamar *superficies*. *Esfera* (S^2),[1] *toro* (B_0) y *plano proyectivo* ($\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$) son superficies. De hecho, a partir de estos tres ejemplos, podemos construir todas las superficies compactas mediante la *suma conexa* (cuya definición puede consultarse en los numerosos textos que se ocupan de explicar la clasificación de las 2-variedades conexas y compactas (como [36, 63]).

Dicho teorema de clasificación fue propuesto por Brahana en 1923 (en *Ann. of Math.*(2)23). El enunciado que utilizaremos será el siguiente:

Teorema 0.1.1 *Toda superficie compacta es homeomorfa exactamente*[2] *a una esfera, a una suma conexa de toros, o a una suma conexa de planos proyectivos.*

Según la notación que utilizaremos, es equivalente escribir que, si M es una superficie compacta, es homeomorfa a una de las siguientes:

1. $S^2\#B_0\# \overset{m}{\cdots} \#B_0$, con $m \geq 0$. En este caso, se dice que el *género orientable* de M es $g(M) = m$ (y M es *orientable*).

   En general, equivalentemente, se puede llamar *género* de una superficie cerrada orientable al número máximo de curvas cerradas de Jordan, disjuntas dos a dos, que pueden trazarse sobre la superficie sin dividirla [56, pág. 146].

2. $S^2\#\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\# \overset{n}{\cdots} \#\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, con $n \geq 0$. En este otro caso, se dice que el *género no orientable* de M es $g^*(M) = n$ y, si $n \neq 0$, M es *no orientable*.

   De hecho, una consecuencia inmediata de cualquier demostración del resultado anterior es que toda superficie no orientable es la suma conexa de una orientable bien con $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ bien con la *botella de Klein*, que es $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\#\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

También se van a utilizar superficies no compactas, para lo que resulta conveniente definir el concepto de *final de Freudenthal* [38]:

Considérese un espacio X no compacto, σ-compacto y localmente compacto. Se puede encontrar una sucesión creciente $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$ de conjuntos compactos tales

[1] En cuanto a la esfera, por ejemplo, conviene aclarar que algunos autores la llaman "superficie esférica" para distinguirla de la 3-variedad; en nuestro caso, no hay confusión posible.

[2] Debemos interpretar con esto que los tres casos son excluyentes.

que X_i esté contenido en el interior topológico de X_{i+1} para todo $i \geq 1$, $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ y que, para todo $i \geq 1$, las componentes de $X \setminus X_i$ no sean acotadas. Tal sucesión $\{X_i\}_{i\geq 1}$ se denomina *sucesión exhaustiva* del espacio X. Para cada $i \geq 1$, denotamos $\pi_0(X \setminus X_i)$ el conjunto de componentes conexas de $X \setminus X_i$. La inclusión $X_i \subseteq X_{i+1}$ nos da la sucesión inversa

$$\pi_0(X) = * \leftarrow \pi_0(X \setminus X_1) \leftarrow \ldots \leftarrow \pi_0(X \setminus X_i) \leftarrow \ldots$$

A cada elemento del límite inverso $F(X) = \varprojlim \pi_0(X \setminus X')$, donde X' toma valores en la familia de los conjuntos compactos de X, se llama un *final de Freudenthal* del espacio no compacto X. Conviene advertir que el conjunto $F(X)$ no depende de la sucesión exhaustiva $\{X_i\}_{i\geq 1}$ usada en su definición y que π_0 indica el número de componentes conexas no acotadas.

La recta euclídea $\mathbb{R}$ posee dos finales de Freudenthal; la semirrecta positiva y $\mathbb{R}^n$ poseen un único final $\forall\, n \geq 2$.

Si se suma conexamente un plano a una superficie (o si se elimina un punto de dicha superficie), el resultado es homeomorfo a una superficie con un final más que la de procedencia. Se puede consultar [70] para obtener una explicación detallada de que la eliminación de un punto en una superficie produce "algo" homeomorfo a la adición de un semicilindro.

También resulta intuitivo que la operación inversa a "pegar tubos a una superficie" es la compactificación por puntos (en principio, mediante la utilización de tantos puntos como finales se quieran eliminar).

0.1.1 Seudosuperficies

En cuanto a las seudosuperficies (caracterizadas ya en 1949 por Lu [60]), poseen puntos (llamados *puntos singulares*) en los que no existe un entorno homeomorfo a un disco abierto (ver [84]). De hecho, se suele considerar que cada seudosuperficie tiene una cantidad finita de puntos singulares (ver [21]).

Formalmente, una *seudosuperficie* es un espacio topológico de Haussdorf tal que cada punto suyo posee un entorno homeomorfo al disco abierto $\{x \in \mathbb{R}^2 : d(x,(0,0)) < 1\}$ o a la unión en ese punto de una cantidad finita de discos abiertos. Normalmente, se trabajará con seudosuperficies compactas.

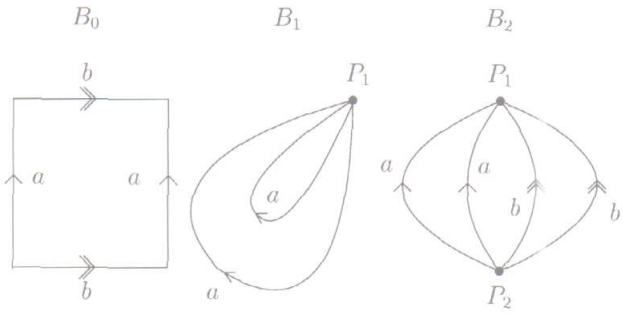

Figura 1: El toro y las seudosuperficies más sencillas.

Figura 2: Dos representaciones de B_1.

Así, las seudosuperficies son superficies salvo por "unos cuantos" puntos, que llamaremos *puntos singulares*. A modo de ejemplo de seudosuperficies, se exponen las siguientes, en las que se utiliza otra forma de definirlas, mediante contracción de curvas cerradas en superficies:

Definición 0.1.2 Si $n \in \mathbb{N}$, B_n es la seudosuperficie obtenida al contraer a puntos n meridianos distintos de un toro. En general, B_n posee n puntos singulares a los que se denotará en lo sucesivo por $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Ejemplo 0.1.3 B_0 es el toro, B_1 es el *toro estrangulado* y B_2 es el *biplátano* (que se puede obtener al unir dos esferas por dos puntos distintos). B_0, B_1, B_2 y B_3 están representados gráficamente en las Figuras 1, 2, 3 y 4. $\triangleleft$

Los lados que se identifican en la Figura 1 están indicados con la misma letra del alfabeto y con el mismo tipo de flecha; la identificación ha de hacerse de modo que coincidan los sentidos de las flechas. Nótese, además, que varios puntos podrían, en

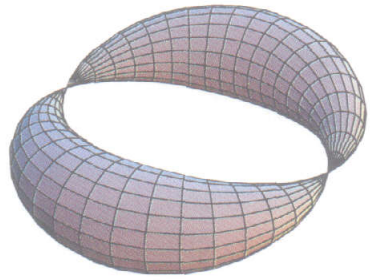

Figura 3: B_2.

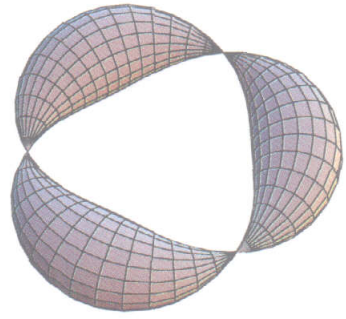

Figura 4: B_3.

este tipo de representaciones de una seudosuperficie, ir al mismo punto tras hacer la identificación.

Todas las seudosuperficies de la Definición 0.1.2 tienen en común que son conexas, que pueden conseguirse mediante la identificación de una cantidad finita de puntos de distintas esferas y, además, que de cada esfera se eligen 2 puntos distintos para identificar con los de otras esferas.

A estas seudosuperficies que se pueden obtener "pegando" esferas por puntos y de modo que cada esfera tenga solo 2 puntos singulares se les llamará en lo sucesivo *seudosuperficies esféricas simples*.

Cada una de las esferas que componen una seudosuperficie esférica simple se denotará *célula* de la seudosuperficie. Este concepto puede generalizarse, por supuesto, a seudosuperficies con 3 o más puntos singulares en alguna célula esférica y también a otro tipo de seudosuperficies que no se consiguen exclusivamente con el pegamiento de esferas, sino que se necesita de otras superficies (o seudosuperficies) compactas. Las *células* son subconjuntos de la seudosuperficie con la propiedad de que sus puntos no pueden pertenecer a distintas componentes conexas al eliminar cualquier

conjunto finito de puntos de la seudosuperficie.

Según la notación de [45], las seudosuperficies esféricas simples son 0-homogéneas (todas las células son de género 0) y 2-regulares (cada célula tiene 2 puntos singulares). Algunas de ellas son, además, uniformes: las B_n son 2-uniformes porque cada punto singular pertenece a 2 células (con lo que son $(2,2,0)$-perfectas) y las L_n, que se estudiarán más adelante, son n-uniformes (luego son $(n,2,0)$-perfectas).

0.2 Grafos topológicos

Un grafo G es un par (V,A), donde V es un conjunto y A es un conjunto de distintos pares no ordenados de distintos elementos de V. Los elementos de V se llaman *vértices* y los de A se llaman *aristas*. Cuando $G=(V,A)$, denotamos $V=V(G)$ y $A=A(G)$. Además, para simplificar la notación, se suele escribir v_1v_2 en lugar de la arista $\{v_1,v_2\}$.

Para cada $n \geq 1$ hay un grafo con n vértices y $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas. Tal grafo se llama *grafo completo de n vértices* y se denota K_n.

Normalmente, se exige que $V(G)$ sea finito, con lo que G se dice *grafo finito*. En adelante, diremos que un conjunto es numerable cuando o bien es finito o bien es infinito numerable. Así, si $V(G)$ es numerable, G es un *grafo numerable*. También se puede exigir que cada elemento de $V(G)$ solo aparezca en una cantidad finita de elementos de $A(G)$; a un tal G se le llama *grafo localmente finito*. Incluso es posible definir *grafo no numerable* como uno cuyo conjunto de vértices no sea numerable.

Más adelante se utilizarán grafos infinitos numerables como los dos siguientes: $G_{\mathbb{Z}}=(\mathbb{Z},\{\{n,n+1\} : n \in \mathbb{Z}\})$ y $G_{\mathbb{Z}_+}=(\mathbb{Z},\{\{n,n+1\} : n \in \mathbb{N}\})$; uno no numerable es $G_{\mathbb{R}}=(\mathbb{R},\emptyset)$.

Dos vértices de un grafo se dicen *adyacentes* si pertenecen a una misma arista del grafo; en ese caso, ambos vértices se dicen *extremos* de la arista a la que pertenecen. Por convenio, un vértice no se considera adyacente consigo mismo.

Una arista se dice que es *incidente* con cada uno de sus vértices; dos *aristas* se dicen *incidentes* cuando comparten un extremo.

Se llama *valencia* de un vértice v (y se escribe $\delta(v)$) al número de aristas del grafo que son incidentes con él; equivalentemente, se puede definir $\delta(v)$ como el número de vértices adyacentes con v.

En particular, se distinguen los dos siguientes tipos de vértices:

- Los vértices de valencia 0 se llaman *vértices aislados.*
- Los vértices de valencia 1 se llaman *hojas* del grafo.

Un grafo se dice *regular* cuando todos sus vértices tienen la misma valencia. K_n, por ejemplo, es el grafo regular de n vértices y valencia $n-1$. Más adelante se verán otros tipos de grafos regulares como los *ciclos* y los *grafos cúbicos.*

A continuación se describen algunas operaciones habituales en el conjunto de los grafos.

$G' = (V', A')$ se dice que es *subgrafo* de $G = (V, A)$ cuando $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$.

Sean $G = (V, A)$ un grafo y $V' \subseteq V$. El *subgrafo inducido* o *generado* por V' es el grafo $G' = (V', A')$ donde A' es el conjunto de las aristas de A cuyos extremos están ambos en V'.

Dados dos grafos $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$, se definen:

- El *grafo intersección* de dos grafos, $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, A_1 \cap A_2)$.
- El *grafo unión* (o unión disjunta) de dos grafos, $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, A_1 \cup A_2)$.

  En general, podemos referirnos a la unión de n copias de un mismo grafo G como a $nG = \bigcup_{i=1}^{n} G$.
- El *grafo suma*, $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, A_1 \cup A_2 \cup \{uv : u \in V_1, v \in V_2\})$.

  Evidentemente, según se ha definido, no es lo mismo $2G$ que $G + G$.
- El *grafo producto*, $G_1 \times G_2 = (V_1 \times V_2, A)$, con $A = \{(u_1, u_2)(v_1, v_2) : u_1, v_1 \in V_1, u_2, v_2 \in V_2, [u_1 = v_1 \text{ y } u_2v_2 \in A_2] \text{ ó } [u_2 = v_2 \text{ y } u_1v_1 \in A_1]\}$.

  Un ejemplo de producto es el *grafo cubo* $Q_3 = K_2 \times K_2 \times K_2$.

Con la misma intención de la definición de suma de grafos, se puede definir la suma de un grafo con un vértice u otras sumas:

Dados G un grafo y $v \notin V(G)$ un vértice, $G + v$ es el grafo $(V(G) \cup \{v\}, A(G) \cup \{uv : u \in V(G)\})$. Si $u_1, u_2 \in V(G)$ pero $u_1u_2 \notin A(G)$, $G + u_1u_2$ es el grafo que se obtiene añadiéndole a $A(G)$ la arista u_1u_2. Sin embargo, si alguno de los extremos de uv no es de $V(G)$, se entiende que $G + uv$ es la suma de dos grafos.

En cuanto a la *resta* de grafos, presenta diversas formas. Si $v \in V(G)$, $G - v$ es el subgrafo de G resultado de eliminar v y las aristas incidentes en v; también se le llama *borrado* del vértice v. Si $a \in A(G)$, $G - a$ es el subgrafo $(V(G), A(G) \setminus \{a\})$. Si, por el contrario, $v_1v_2 \notin A$, entendemos que $G - v_1v_2 = G$. Con esto, es posible restarle a un grafo un conjunto de aristas, un subgrafo, etcétera.

Un *grafo bipartito* es un grafo G en el que $V(G)$ se puede descomponer como unión disjunta $V(G) = V_1 \sqcup V_2$ de modo que $a \in A(G)$ implica que $a = uv$, con $u \in V_1$ y $v \in V_2$. En particular, el *grafo bipartito completo* $K_{n,m}$ es un grafo bipartito en el que $|V_1| = n$, $|V_2| = m$ y existen todas las aristas posibles. Según la notación anterior, $K_{n,m}$ es la suma de los grafos formados, respectivamente, por n y m vértices aislados.

Un *morfismo* entre dos grafos es una aplicación entre sus vértices respectivos que conserve la adyacencia. Un *isomorfismo* entre dos grafos es un morfismo biyectivo cuya aplicación inversa también es un morfismo. Dichos grafos entre los que existe un isomorfismo se dicen *equivalentes* o *isomorfos*. Por definición de isomorfismo, *ser isomorfos* es una relación de equivalencia en el conjunto de los grafos.

Teniendo en cuenta los orígenes de los grafos, resultan imprescindibles las siguientes nociones:

Un *camino* en un grafo es una sucesión finita de vértices y aristas alternados cuyo primer y último elementos son vértices y tal que dos elementos consecutivos son siempre incidentes. Esta definición anterior es más intuitiva que rigurosa o universal; en ciertos contextos, resulta conveniente definir *camino* como la sucesión finita de vértices adyacentes.

A partir del concepto anterior, se introducen otros para nombrar a subgrafos de un cierto grafo:

Un *recorrido* es un camino en el cual todas las aristas que lo forman son distintas. Un *arco* es un recorrido en el que todos los vértices son distintos. Un *ciclo* es un arco excepto porque su primer y último vértice coinciden.

La *longitud* de un camino en un grafo es el número de aristas que posee (uno menos que el número de vértices en un arco). Dados $u, v \in V(G)$ dos vértices que pertenecen a un mismo arco en G, se llama *distancia* entre u y v a la menor longitud de todas las de los arcos que unen u y v. Se denota por $d(u, v)$.

Utilizar sucesiones infinitas en las definiciones anteriores provoca la aparición de

nuevos objetos:

Un 1-*camino*, W_1, en un grafo infinito G es un subgrafo W_1 de G tal que existe un morfismo $\Phi_1 : G_{\mathbb{Z}_+} \to W_1$ que induce una inyección en las aristas. En un 2-*camino*, W_2, el morfismo debe ser $\Phi_2 : G_{\mathbb{Z}} \to W_2$. Llamaremos *rayo* a un 1-camino cuyos vértices son de valencia 2 en el grafo. También se puede hablar de *rayos finitos*; en éstos, el vértice final del rayo no es de valencia 2, sino 1.

Un grafo se dice *conexo* si dos cualesquiera de sus vértices pueden unirse mediante un camino. Intuitivamente, una *componente conexa* de un grafo G es cada uno de los subgrafos conexos de G que tengan el mayor número posible de vértices. Así, por ejemplo, un vértice aislado es una componente conexa. Pero la definición de componente conexa ha de ser combinatoria si se quiere mantener que la conexión sea un invariante topológico de los grafos infinitos no numerables. En el conjunto $V(G)$, se define la siguiente relación de equivalencia: dos vértices están relacionados si coinciden o si existe un arco del uno al otro. Cada una de las clases de equivalencia de $V(G)$ obtenida con esta relación, define una *componente conexa* del grafo G: los subgrafos inducidos por dichas clases de equivalencia.

Combinando los conceptos de caminos y conexión, se tienen una propiedad de los grafos infinitos y una definición más:

Por el Lema de Köning (véase [78]), un grafo conexo es infinito si y solo si contiene, como subgrafo, a uno de los siguientes 2 grafos:

- K_1 más el grafo formado por infinitos vértices aislados;
- un 1-camino.

La presencia de 1-caminos hace posible definir finales de un grafo infinito de modo análogo a como se definía finales de una superficie no acotada (la adaptación concreta de dicho concepto puede consultarse en [46]). En este caso, un *final* de Freudenthal de G se denomina *estable* si existe un H, subgrafo finito de G, de forma que la componente conexa de $G - H$ que define el final es un 1-camino.

Volviendo a considerar grafos no necesariamente finitos, se definen:

Se llama *ciclo* a todo grafo regular y conexo de valencia 2. El ciclo de n vértices se representa por C_n. De este modo, el ciclo con menos vértices es $C_3 = K_3$.

Se llama *grafo cúbico* a todo grafo regular de valencia 3. K_4 es el único grafo cúbico de 4 vértices.

Entroncadas con la necesidad de simplificar los problemas, surgen otras operaciones sobre los grafos:

Sean $G = (V, A)$, $a = uv \in A$ y $x \notin V$. El grafo que se obtiene de G por *contracción* de la arista a tiene por vértices los de G salvo porque se eliminan u y v y se introduce un nuevo vértice x; las aristas también son las de G salvo que los vértices adyacentes con u o con v tienen que ser los adyacentes con x.

En cierto sentido, puede definirse una operación inversa de la contracción de aristas: la subdivisión. La *subdivisión* de una arista de un grafo consiste en la sustitución de la arista por un arco. Así, una *subdivisión* de un grafo G es otro grafo que se obtiene de G mediante sucesivas subdivisiones de aristas y dos grafos se dicen *homeomorfos* si existe un grafo que es menor simultáneamente de ambos.

Un grafo G_1 es un *menor* de otro G_2, si se puede llegar desde G_2 hasta G_1 mediante el borrado de vértices o de aristas o contracciones de aristas.

Son muy habituales las siguientes familias infinitas de grafos:

- P_n es un grafo que solo consta de un arco de longitud $n-1$.
- La *rueda* W_n es $K_1 + C_{n-1}$, con $n \geq 4$. Llamaremos *aristas interiores* de la rueda a las $n-1$ aristas que no son del ciclo C_{n-1}.

Un grafo se dice *acíclico* si no contiene ciclos y se dice *árbol* si es conexo y acíclico.

Un grafo se dice *n-conexo* si se necesita borrar al menos n vértices para que sea K_1 o un grafo no conexo. Así, todo grafo es 0-conexo (incluso los no conexos). Los grafos 1-conexos son los conexos (salvo K_1) y todo grafo n-conexo es m-conexo si $m \leq n$.

v, vértice del grafo G, se llama *punto de corte* de G si la componente conexa de G a la que pertenece v deja de ser conexa al borrar v. Análogamente, dos vértices de G (adyacentes o no) forman una *pareja de corte* (o un *par de corte*) si G se desconecta al borrar ambos vértices.

El concepto correspondiente a desconectar grafos por la eliminación de aristas es el que sigue:

La arista a de G se llama *puente* si $G - a$ tiene más componentes conexas que G.

Se denomina *bloque* de G a todo subgrafo de G sin puntos de corte y maximal.

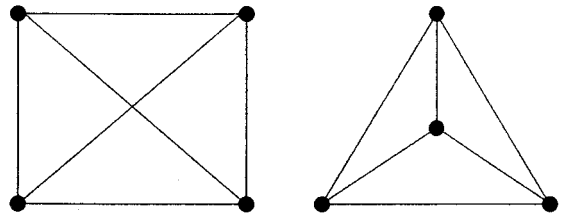

Figura 5: Dos representaciones de K_4 distintas.

También se puede definir 2-*bloque* (o bien 2-*componente*) como un subgrafo 2-conexo de G al que no se le puede añadir ninguna arista o vértice de G sin que deje de ser 2-conexo.

0.3 Inmersiones: grafos planos y periplanos

Aunque se han presentado los grafos como objetos combinatorios, resulta también útil trabajar con ellos comparándolos con otros objetos topológicos.

Otra forma (topológica) de definir un grafo es utilizar los complejos simpliciales: un 0-símplice es un punto, un 1-símplice es un segmento, un 2-símplice es un triángulo y su interior,... Los grafos son complejos formados por 0-símplices y 1-símplices y esto nos aporta una forma de representarlos.

Gráficamente, representaremos cada vértice por un punto y cada arista por una línea entre dichos puntos. Para que una representación gráfica de un grafo resulte "válida", se le exigirá que un mismo punto no pueda pertenecer a dos aristas distintas salvo que sean incidentes en dicho punto. En la Figura 5 se representa gráficamente K_4. De los 2 dibujos, solo el segundo resulta apropiado.

En adelante, se dirá que un punto pertenece a un grafo (y se escribe $P \in G$) cuando $P \in V(G)$ o P es un punto interior de una arista de G.

Una *inmesión plana* de un grafo no es más que una representación en el plano apropiada, en el sentido que se acaba de explicar. Un grafo se dice, por eso, *plano* cuando admite alguna inmersión plana. Conceptos análogos al de grafo plano pueden definirse para otras superficies compactas (e, incluso, para seudosuperficies). Formalmente, se tiene:

Dados un grafo G y una superficie S, una inmersión de G en S es una aplicación $\varphi : G \to S \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que sea homeomorfismo en su imagen considerando en S

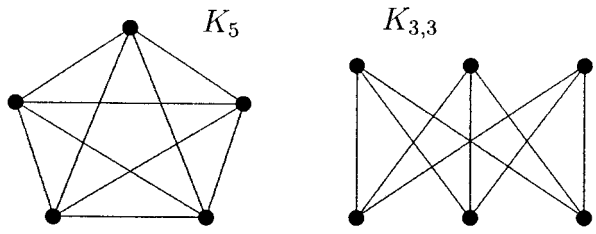

Figura 6: Grafos de Kuratowski.

la topología inducida por la euclídea de $\mathbb{R}^n$. Es decir, φ es biyectiva y bicontinua (continua y con φ^{-1} continua).

Según lo anterior, un grafo es *plano* cuando admite una inmersión en el plano, de manera que (por ser biyectiva y bicontinua) dos aristas solo se pueden cortar en vértices. Del mismo modo, se definen los grafos *esféricos*, *tóricos*,... y, en general, S-representables para cualquier superficie o seudosuperficie S. En todos los casos anteriores, se admiten inmersiones en las que se produzcan acumulación de vértices y aristas si el grafo es infinito; entendiendo por *acumulación* de vértices o de aristas que todo entorno de algún punto contenga infinitos vértices o puntos de infinitas aristas, respectivamente.

Como se ha podido comprobar en el dibujo de la Figura 5, que la representación de un grafo no sea plana no quiere decir que dicho grafo no sea plano. No todas las inmersiones son similares, aunque sí lo son todas las inmersiones planas de un grafo que sea una subdivisión de un 3-conexo (la demostración de este aserto puede consultarse en [83]). Sin embargo, hay grafos que no poseen ninguna representación plana. Precisamente, el resultado matemático más citado del pasado siglo XX es el Teorema de Kuratowski, que caracteriza los grafos planos:

Teorema 0.3.1 *[58] Un grafo finito es plano si y solo si no tiene un subgrafo homeomorfo a K_5 ó $K_{3,3}$.* □

Los teoremas de este tipo, se dirá que caracterizan cierta familia de grafos mediante una lista de *menores topológicos prohibidos* (en este caso, los grafos de la Figura 6, K_5 y $K_{3,3}$, forman dicha lista, que también puede llamarse "de subgrafos prohibidos"). Si el Teorema 0.3.1 se hubiera enunciado "un grafo es plano si y solo si no tiene como menor a K_5 ni a $K_{3,3}$", se hablaría de una lista de *menores prohibidos* (para los grafos planos, coincide con la lista de menores topológicos prohibidos [49, 82]).

Solo se conocen teoremas que caracterizan grafos con inmersiones en superficies

mediante menores (o menores topológicos) prohibidos, en el caso del plano proyectivo. Dicha caracterización fue dada por Archdeacon [4] en 1981 con una lista de 35 menores prohibidos y otra lista de 103 menores topológicos prohibidos.

Aunque no se han dado explícitamente otras listas de menores o de menores topológicos prohibidos, se conocen algunos resultados que consideramos conveniente recordar aquí:

Tiene sentido caracterizar por menores prohibidos toda familia de grafos definida por una propiedad *hereditaria* por menores; esto es, todo menor de un grafo que verifica la propiedad (por ejemplo, "admitir inmersión en una superficie S") también verifica la misma propiedad. Lo mismo puede decirse de los menores topológicos.

En el caso de los menores, además, Robertson y Seymour [71] demostraron en 1990 que las listas de menores prohibidos siempre estaban formadas por una cantidad finita de grafos.

Cuando es posible caracterizar por menores prohibidos, también se puede obtener una lista finita de subgrafos prohibidos. Una forma de obtener la lista de menores topológicos prohibidos a partir de la de menores prohibidos se presenta en [26]. Del análisis de este procedimiento se deduce que, cuando existen ambas listas, todo menor prohibido es también menor topológico prohibido.

Ya en 1980 se conocía (Archdeacon y Huneke [7]) que la caracterización de los grafos que admiten inmersión en una superficie no orientable se podía expresar mediante una lista finita de menores topológicos prohibidos. Pero debemos atribuir a Robertson y Seymour [71] el resultado para cualquier superficie compacta y para el toro estrangulado.

Sin embargo, Širáň y Gvozdjak [76] probaron en 1992 que la lista de subgrafos prohibidos es infinita para la seudosuperficie B_2, con lo que se plantea una cuestión para cada tipo de seudosuperficie, que retomaremos más adelante para cierto tipo de inmersiones.

A veces, cuando los grafos son infinitos, resulta interesante estudiar si es posible dar inmersiones en las que no exista acumulación de puntos que pertenecen a ellos. De ahí surgen los siguientes conceptos:

Un grafo es *VAP-plano* si tiene una inmersión plana sin acumulación de vértices. Un grafo es *EAP-plano* si tiene una inmersión plana sin acumulación de vértices ni de aristas.

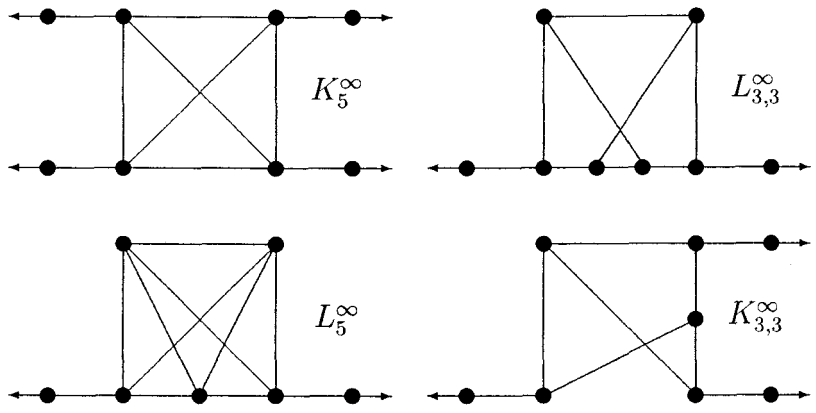

Figura 7: Menores VAP-planos prohibidos.

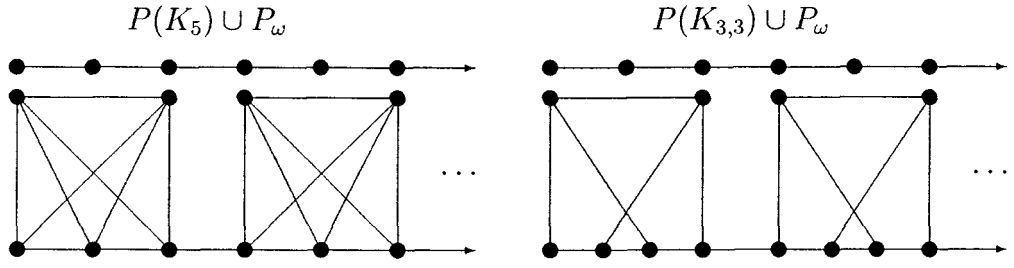

Figura 8: Menores EAP-planos prohibidos.

La caracterización de los grafos VAP-planos se debe a Halin, la de los EAP-planos fue obtenida por Ayala, Domínguez, Márquez y Quintero. Se indican en los dos siguientes resultados:

Teorema 0.3.2 *[47] Un grafo es VAP-plano si y solo si no contiene un subgrafo subdivisión de los grafos* K_5, $K_{3,3}$, K_5^∞, $K_{3,3}^\infty$, L_5^∞ *ó* $L_{3,3}^\infty$ *(grafos de la Figura 7, a los que se llama* grafos de Halin*).* □

Teorema 0.3.3 *[8] Un grafo VAP-plano es EAP-plano si y solo si no contiene un subgrafo subdivisión de* $P(K_5) \cup P_\omega$ *ó* $P(K_{3,3}) \cup P_\omega$ *(grafos de la Figura 8).* □

No obstante, también pueden caracterizarse los grafos infinitos planos sin tener en cuenta las acumulaciones. La generalización del Teorema de Kuratowski para grafos numerables (debida a Dirac y Schuster [32] en 1954) no requiere modificación de la condición del enunciado. La correspondiente a grafos no numerables (Wagner [82] en 1967) se verá como Teorema 5.1.3 y exige a los grafos para ser planos, condiciones adicionales.

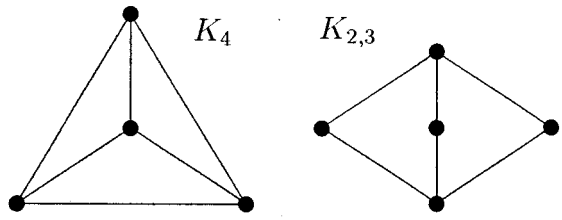

Figura 9: Menores periplanos prohibidos.

Las siguientes nociones se refieren a los conceptos que pueden relacionarse más estrechamente con la materia objeto de nuestro estudio.

0.3.1 Inmersiones peri

Una *cara* de un grafo G es cada una de las componentes conexas del complementario topológico de G, supuesto éste inmerso en una superficie o en una seudosuperficie. Cuando se trata de inmersiones planas de grafos finitos, además, puede distinguirse una cara del resto: la cara no acotada, que puede denotarse *cara exterior.*

A continuación se trata un caso especial de inmersión, la *inmersión peri*; es aquélla en que todos los vértices están en una misma cara. Surgen, así, los *grafos periplanos*, que son los que admiten una inmersión peri en el plano y que fueron caracterizados por Chartrand y Harary en 1967:

Teorema 0.3.4 *[28] Un grafo finito es periplano si y solo si no tiene un subgrafo que sea una subdivisión de* K_4 *ó* $K_{2,3}$. □

Es obvio que una cantidad numerable de componentes periplanas finitas dan lugar siempre a un grafo periplano y que se puede evitar la acumulación "cuadriculando" el plano y representando cada componente en una cuadrícula con todos los vértices en la cara exterior. Si las componentes no son finitas pero se permite acumulación de vértices, la unión numerable sigue siendo periplana según un razonamiento similar al anterior.

El concepto de grafo periplano se puede extender a otras superficies, con lo que un grafo es *peri-S-representable* (o *peri-S*) si admite una inmersión en S con todos sus vértices en una misma cara. Esta definición es válida también si S es una seudosuperficie.

Una vez conocida la caracterización mediante menores o menores topológicos

prohibidos de los grafos con inmersión en S, se puede obtener la caracterización para los grafos con inmersión peri en S como hace Cáceres [26].

De este modo se obtiene la caracterización de los grafos periproyectivos (peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$). Cáceres [26], Archdeacon et al [6] y Revuelta [70] la dieron en términos de 32 menores peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ prohibidos y 45 menores topológicos peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ prohibidos (ver las Figuras 10 y 11).

El concepto de grafo peri-representable admite múltiples generalizaciones relacionadas con nuestro estudio. Entre ellas, destacan las de grafo k-periplano, W-periplano y periplano generalizado (con sus correspondientes adaptaciones para inmersiones en otras superficies). Pasamos a describirlas someramente:

Si $k \in \mathbb{N}$, se conoce como *grafo k-periplano* a cualquier grafo que admita una inmersión plana con todos sus vértices en, a lo sumo, k caras.

Los grafos 2-periplanos fueron caracterizados por Cáceres [26], Archdeacon et al [5] y Revuelta [70] mediante 38 menores y mediante 56 menores topológicos prohibidos. Tanto el Teorema 2.2.1 (menores) como el Teorema 2.2.2 (menores topológicos), se utilizarán más adelante.

Sea G un grafo. Para cada $W \subseteq V(G)$, se dice que G es *W-periplano* (ver [68]) si posee alguna inmersión en la que todos los vértices de W están en una misma cara. Un grafo es *periplano generalizado* (según la definición dada en [74]) si tiene una inmersión plana de manera que todas las aristas tengan al menos un vértice en la cara exterior. Los grafos periplanos son k-periplanos para todo $k \geq 1$, son W-periplanos para cualquier subconjunto W de su conjunto de vértices y son periplanos generalizados.

Pero volvamos a los grafos que podemos representar con todos los vértices en una misma cara (en superficies no compactas, se puede suponer que es la cara exterior). En el caso del plano y para grafos infinitos, se tienen caracterizados los grafos que admiten inmersiones peri sin acumulación de vértices ni de aristas (*grafos p-periplanos*). Boza, Diánez y Márquez [24] enunciaron:

Teorema 0.3.5 *[24] Un grafo infinito es p-periplano si no contiene un subgrafo subdivisión de K_4, $K_{2,3}$, A_1^1 ó B_1^1, siendo A_1^1 y B_1^1 los grafos de la Figura 12.* □

Con esto concluye la exposición de conceptos previos y se da paso al estudio de las generalizaciones del concepto de periplanaridad a otras superficies o seudosuperficies.

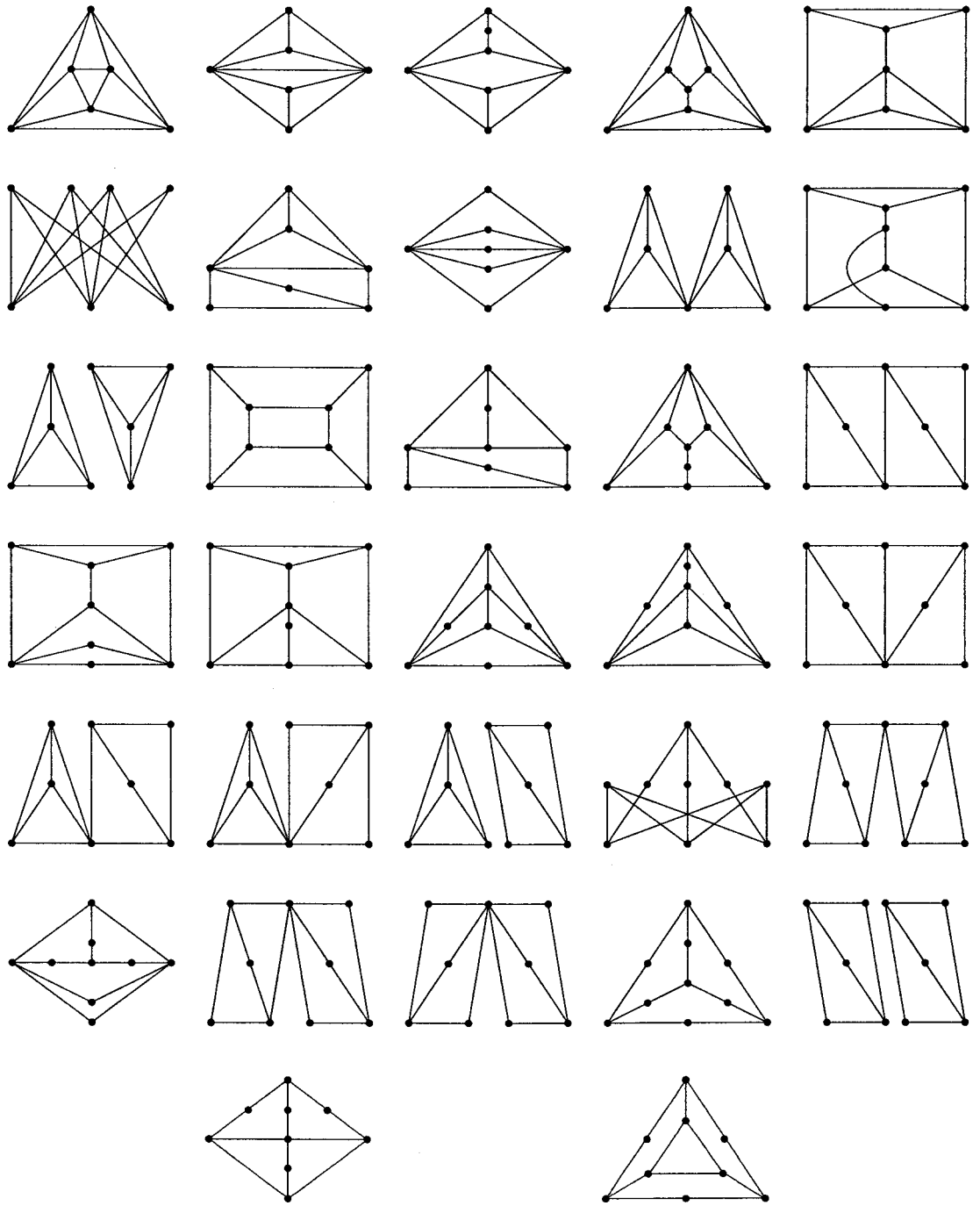

Figura 10: Menores peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ prohibidos.

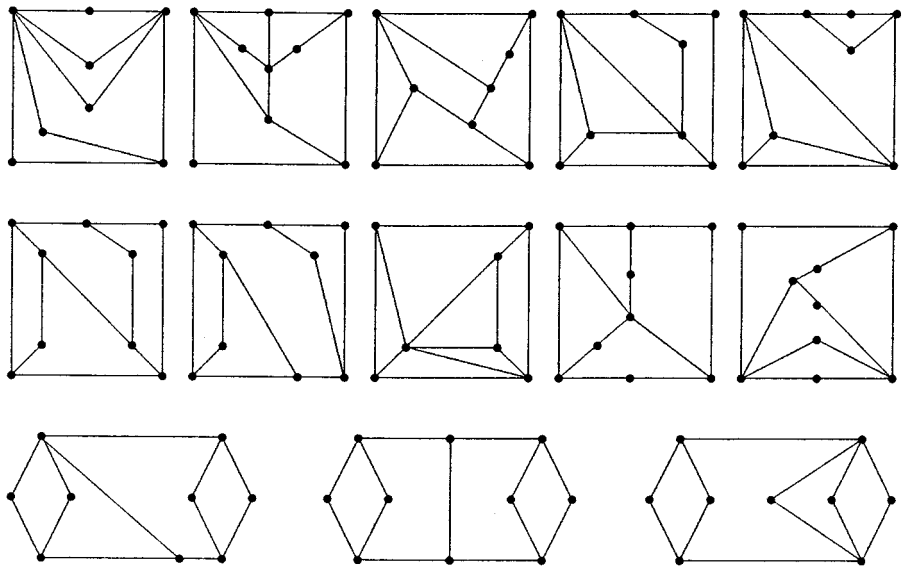

Figura 11: El resto de menores topológicos peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ prohibidos.

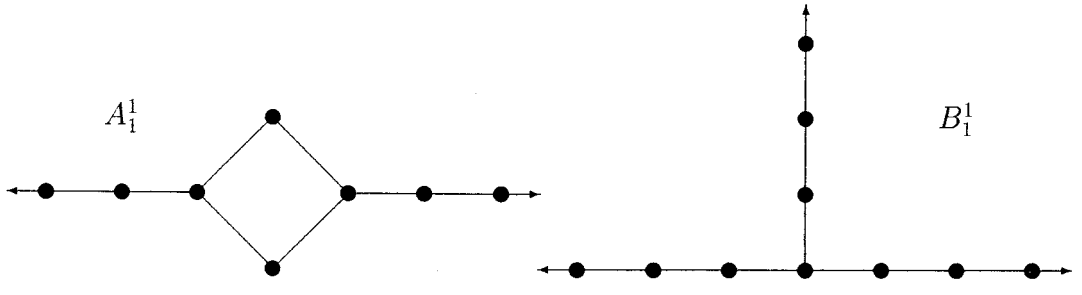

Figura 12: Menores p-periplanos prohibidos.

Parte I

Peri-representabilidad de grafos finitos

Capítulo 1

El problema de las inmersiones peri

La Algorítmica está íntimamente relacionada con la Teoría de Grafos. Una lectura superficial de textos como el clásico de Aho, Hopcroft y Ullman [1], el de Garey y Johnson [43] o el de Manber [62], nos llevará rápidamente a esta conclusión. No solo la Teoría de Grafos proporciona innumerables ejemplos y problemas que pueden colaborar al desarrollo de algoritmos eficientes para otras áreas, sino que otros muchos problemas de grafos se resuelven o se simplifican al ser tratados computacionalmente.

En particular, el problema de si un grafo admite o no una inmersión en una superficie de modo que todos los vértices estén en una misma cara, se puede abordar desde un punto de vista algorítmico.

También se puede expresar de un modo análogo el problema relativo a seudosuperficies. Estas observaciones, junto con los procedimientos que se describen a lo largo de la memoria, apoyan la intención de utilizar la computación simbólica para resolver problemas eminentemente topológicos.

En este capítulo se definen algunos conceptos (como el género de un grafo) que se utilizarán a menudo. Además, se presentan las diferentes formas de enfrentarse con el problema de las inmersiones peri tanto en superficies como en seudosuperficies. En particular, se describen algunas dificultades del caso del toro estrangulado que servirán de introducción del resto de las inmersiones que estudiaremos.

1.1 Planteamiento de un problema algorítmico

En Algorítmica, un *problema* es un conjunto de variables y las propiedades que éstas deben verificar y un *algoritmo* es un procedimiento "paso a paso" para resolver un problema. De hecho, todas las definiciones de esta sección se pueden dar *formalmente* (en términos de "lenguajes" y "máquinas de Turing") e *informalmente* (en términos solo de "problemas" y "algoritmos").

La descripción formal (y posterior resolución) de un problema implica la determinación de esquemas concisos y decodificables, el establecimiento de posibles transformaciones polinómicas y la realización de largas explicaciones que no aportan gran cosa al contenido global de esta memoria. Por eso, nos atendremos a varias simplificaciones que pueden "evitarse" utilizando las indicaciones de [1, 43, 62]:

La primera simplificación consiste en tratar solo *problemas de decisión* y describirlos informalmente a través de un nombre, unos datos de entrada y una pregunta a responder. Aunque éste es un caso particular de los problemas de búsqueda, la teoría de los problemas NP-completos se suele desarrollar solo para estos problemas de decisión porque casi cualquier problema puede reducirse a uno en que la respuesta es **SÍ** o **NO**; además, permiten, por ejemplo, resolver problemas de optimización.

La segunda se refiere a que centraremos el estudio de la eficiencia de los algoritmos a la NP-completitud y obviaremos tanto los recursos de memoria requeridos como el análisis de los tiempos de ejecución de los algoritmos; es decir, consideraremos *eficientes* los algoritmos polinomiales respecto al tamaño de los datos. Conviene recordar, no obstante, que a veces algoritmos *no eficientes* pueden comportarse en la práctica como si lo fueran por lo que es útil estudiar cuál es el comportamiento de un algoritmo utilizándolo sobre ejemplos (y, eventualmente, comparando lo que tarda con respecto a otros algoritmos).

1.1.1 Problemas NP-completos

Un problema se dice *NP* cuando existe un algoritmo no determinista que corre en tiempo polinomial respecto de los datos de entrada y *NP-completo* cuando, a partir de su resolución, todo problema NP se resuelve con un algoritmo eficiente. A pesar de que aún nadie ha conseguido demostrarlo, se cree que no existe ningún algoritmo eficiente que resuelva algún problema NP-completo.

Coloquialmente, podríamos decir que un problema NP-completo es equivalente

a problemas tan difíciles que nadie ha sido capaz de dar un algoritmo eficiente para ninguno.

Para probar que un problema es NP-completo, se suele reducir a él la resolución de otro que se sepa que es NP-completo. Por esto, se agrupa a todos los problemas NP-completos en una sola clase, cuyos problemas son todos equivalentes.

El primer problema del que se demostró su NP-completitud, fue el de la *satisfacibilidad*, SAT (demostración debida a Cook en [30]):

PROBLEMA: **Satisfacibilidad (SAT).** DATOS: Un conjunto U de variables y una colección C de cláusulas sobre U. PREGUNTA: ¿Existe una asignación de valores de verdad que satisfaga C?

Otro problema NP-completo[1], cuya naturaleza nos resultará de utilidad es el siguiente:

PROBLEMA: **Conjunto Independiente (CI).** DATOS: Un grafo $G = (V, A)$ y un entero positivo $k \leq \|V\|$. PREGUNTA: ¿Contiene G un *conjunto independiente* de al menos k vértices? Es decir, ¿existe algún subconjunto de V con k vértices no adyacentes entre sí?

Al mayor cardinal de los conjuntos independientes de G, lo denotaremos en lo sucesivo por $\alpha(G)$. $\alpha(G)$ guarda una estrecha relación con lo que se llamará género de G, según se verá. Incluso puede relacionarse con nuestro objetivo de estudiar inmersiones peri. A modo de ejemplo, se presenta la siguiente propiedad:

Proposición 1.1.1 *Sean un grafo $G = (V, A)$ y un entero positivo $k \leq |V|$. $\alpha(G) \geq k$ si y solo si $\alpha(G + K_1) \geq k$. De hecho, $\alpha(G) = \alpha(G + K_1)$.*

Demostración: Salvo cuando $k = 1$, el vértice que se le suma a G no puede estar en ningún conjunto independiente de k vértices. □

[1]El problema SAT se reduce al llamado 3-Satisfacibilidad (3SAT) y éste a CI, según se recoge en [43].

1.1.2 El problema del género

El problema del género de un grafo fue enunciado por Garey y Johnson [43] como un "problema abierto" que posiblemente sería NP-completo:

PROBLEMA: **Género de un Grafo (GG).**
DATOS: Un grafo G y un entero no negativo k.
PREGUNTA: ¿Admite G una inmersión en una superficie de género k sin que se corten aristas fuera de los vértices?

Se llama *género orientable* de un grafo G al menor número natural $\gamma = \gamma(G)$ tal que G admite una inmersión en la superficie orientable de género γ. Utilizando esta notación, la pregunta a formular en GG queda: $¿\gamma(G) \leq k?$

Análogamente, se define el *género no orientable* de G como el menor número natural $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(G)$ tal que G admite inmersión en la superficie no orientable de género $\tilde{\gamma}$.

Si $k = 0$, GG consiste en conocer si un grafo es plano. Hopcroft y Tarjan [53] describieron un algoritmo polinomial para dicho problema. Posteriormente, Filotti, Miller y Reif [35] construyeron algoritmos también polinomiales y válidos para cualquier k fijado de antemano. Otros algoritmos que determinan si un grafo es plano son el de Lempel, Even y Cederbaum [59] y el de Booth y Lueker [20]. El dado en 1985 por Chiba, Nishizeki, Abe y Ozawa [29], proporciona, además, una representación plana del grafo en caso de que fuera plano (una mayor información sobre estos algoritmos puede obtenerse en [67]).

En cuanto a los grafos periplanos, Mitchell [64] dio en 1979 un algoritmo lineal de reconocimiento basándose en que los grafos periplanos maximales (los que no admiten más aristas sin dejar de ser periplanos) son la triangulación de algún polígono.

Por otro lado, la NP-completitud de GG fue demostrada, en 1989, por Thomassen [79] que, incluso, llega a demostrar en [80] que también es NP-completo el problema análogo a GG para grafos cúbicos:

PROBLEMA: **Género de un Grafo Cúbico (GGC).**
DATOS: Un grafo cúbico G y $k \in \mathbb{N}$.
PREGUNTA: $¿\gamma(G) \leq k?$

Sin embargo, no siempre es posible reducir la NP-completitud de un problema para grafos cúbicos a partir de un problema NP-completo que involucre grafos sin ningún tipo de restricción. Así, Lucks probó [61] que el problema IGC que se describe a continuación se resuelve en tiempo polinomial.

PROBLEMA: **Isomorfismo entre Grafos Cúbicos (IGC).**
DATOS: Dos grafos cúbicos G_1 y G_2.
PREGUNTA: ¿Son isomorfos G_1 y G_2?

Pero aún no se sabe si el correspondiente IG es NP-completo.

PROBLEMA: **Isomorfismo entre Grafos (IG).**
DATOS: Dos grafos G_1 y G_2.
PREGUNTA: ¿Son isomorfos G_1 y G_2?

1.1.3 Definición combinatoria de inmersión

Como hasta ahora, trabajaremos casi exclusivamente con grafos, aunque lo que sigue es fácilmente generalizable, por ejemplo, a multigrafos (ver [79]). Se trata de representar grafos, inmersiones, caras, etc. de forma combinatoria. De este modo, se justifica la posibilidad de trabajar formalmente sobre los problemas que se irán planteando (y resolviendo) a lo largo de la memoria.

Sea un grafo conexo[2] $G = (V, A)$, con $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Un *sistema de rotación* sobre G es una colección $\Pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ en la que π_i es una *permutación cíclica* de los vértices de G adyacentes con v_i. Recordemos que el grupo simétrico con m elementos es S_m = {biyecciones del conjunto $\{1, 2, \ldots, m\}$ sobre sí mismo} y que sus elementos $\sigma \in S_m$ se llaman *permutaciones*. Cada permutación se puede descomponer, de manera única, como producto de ciclos disjuntos, siendo un *ciclo* de orden r una permutación σ tal que existe $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\} \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ verificando que $\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \ldots, \sigma(a_r) = a_1$. A las permutaciones que son ciclos se las llama *permutaciones cíclicas*.

A partir de este concepto de sistema de rotación, se obtiene la definición combinatoria de inmersión, en la que se omite nombrar explícitamente la superficie compacta en la que se realiza dicha inmersión:

[2] Algunas de las definiciones posteriores se complican si el grafo no es conexo, aunque las dificultades que se plantean son perfectamente salvables.

Una *inmersión* de un grafo conexo G es un par (G, Π) en el que Π es un sistema de rotación sobre G; por eso, en la situación anterior, se suele decir que Π es una inmersión de G y cada uno de los π_i representan la *orientación positiva* alrededor de v_i.

Una Π-*cara* es una sucesión finita $x_0, \ldots, x_r$ de vértices de G de modo que $x_r = x_0$ y, si $x_i = v_j$, $x_{i+1} = \pi_j(x_i)$ cuando $i = 0, 1, \ldots, r-1$. Reuniremos todas las posibles sucesiones en el conjunto $\mathcal{C}$ de las Π-caras de (G, Π).

Se define el Π-*género* de G (o género de la inmersión Π de G) como el $\gamma(G, \Pi)$ que verifica la *fórmula de Euler*:

$$|V| - |A| + |\mathcal{C}| = 2 - 2\gamma(G, \Pi).$$

El *género de* G, $\gamma(G)$, se define combinatoriamente como el mínimo de todos los $\gamma(G, \Pi)$ cuando Π varía entre todas las posibles inmersiones de G. Aquí es donde, implícitamente, se hace referencia a las superficies compactas en las que se puede estar dando una inmersión de G.

De un modo análogo, el grafo G estará *peri-representado* en (G, Π) si existe una Π-cara en $\mathcal{C}$ con todos los vértices de G.

Nótese que esta definición posibilita responder de una forma combinatoria a la pregunta de si G es peri-representable en una superficie compacta orientable S de género $g = g(S)$. Basta comprobar si alguna de las Π-caras de alguna de las inmersiones (G, Π), con género $\gamma(G, \Pi) \leq g(S)$, contiene todos los vértices de G. Más adelante se volverá sobre este aspecto para buscar el algoritmo y plantear el problema en seudosuperficies.

Conviene indicar que hay definiciones combinatorias para el género de un grafo con todos los vértices en una sola cara (o en varias). De las fórmulas dadas en [80] se puede deducir que corresponde a sumar $\gamma(G) + \frac{1}{2}$. Sin embargo, utilizaremos otras definiciones para plantear los problemas de peri-representabilidad.

Es más, las definiciones combinatorias anteriores no nos resultarán cómodas para obtener resultados relacionados con la peri-representabilidad, pero es conveniente generalizarlas con objeto de que sirvan para describir formalmente las inmersiones en seudosuperficies que se estudiarán más adelante:

Dado un grafo conexo $G = (V, A)$, con $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, un *seudosistema de rotación* sobre G es una colección $\Pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ en la que π_i es una permutación

de los vértices de G adyacentes con v_i. Como se comentó anteriormente, π_i se puede descomponer de manera única como producto de ciclos disjuntos. A dicho número de ciclos disjuntos lo llamaremos ζ_i.

Consecuentemente con las definiciones anteriores, una inmersión de G en una seudosuperficie es un par (G, Π) en el que Π es un seudosistema de rotación. Adviértase que este concepto incluye y generaliza el de inmersión en superficies y que también permite definir Π-cara y grafo peri-representable, aunque con algunas dificultades adicionales. La principal diferencia con las inmersiones en superficies radica en que ya no será posible determinar un "género", puesto que cada inmersión puede corresponder a distintas seudosuperficies y difícilmente se puede dar un orden total entre ellas.

Analicemos un poco más detalladamente el significado geométrico de estas inmersiones en seudosuperficies:

El ζ_i recién definido coincide con lo que, posteriormente y de una forma más intuitiva, se denotará como el número mínimo de células a las que pertenece el punto singular v_i. Equivalentemente, corresponde con el número de discos que se pegan por v_i para obtener un conjunto homeomorfo a un entorno del punto singular v_i en una seudosuperficie que admite la inmersión (G, Π). Gracias a esta observación, podemos comenzar a obtener resultados prescindiendo de las definiciones formales, como en los siguientes comentarios.

1.1.4 El problema del peri-género

En este punto, resulta natural plantear un problema que probaremos que es NP-completo:

PROBLEMA: **Peri-Seudogénero de un Grafo (PSG).**
DATOS: Un grafo G y una seudosuperficie S.
PREGUNTA: ¿Admite G una inmersión en S con todos los vértices en una misma cara?

La amplia variedad de seudosuperficies existentes hace posible que sea fácil de probar el siguiente resultado.

Teorema 1.1.2 *PSG es NP-completo.*

Demostración: Vamos a reducir la resolución de GG a PSG:

Sean un grafo finito $G = (V, A)$ y un entero no negativo k. Llamemos S' a la superficie orientable de género k. A partir de ella y de S', se construye una seudosuperficie S del modo que se describe a continuación.

Se eligen $|V|$ puntos de S' a los que llamaremos $P_1, \ldots, P_{|V|}$ y se pega una esfera a S' por cada punto elegido. Finalmente, se elige un punto de cada una de las esferas (distintos de los P_i anteriores) y se identifican todos ellos en un P_0. La 2-seudovariedad resultante se llama S.

Evidentemente, la construcción de S se realiza en tiempo polinomial a partir de los datos de entrada, aunque aquí no se describa con rigor cómo almacenar una seudosuperficie (consultar [45]).

Veamos, para concluir la prueba, que G admite una inmersión en S' si y solo si G es peri-S:

$\boxed{\Rightarrow}$ Dada una inmersión de G en S', se puede suponer que cada vértice de G pertenece a una de las esferas que se le han añadido a S' para generar S. P_0 está en la misma cara que todos los vértices de G, luego G es peri-S.

$\boxed{\Leftarrow}$ Llamaremos C a una cara de S en la que están todos los vértices de G y C' a la intersección de C con S'. Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que no hay componentes conexas ni bloques planos. Estudiaremos por separado las posibles inmersiones peri-S de G:

1. Si ningún P_i pertenece a G, G estaría inmerso en S'.

2. Si P_0 es punto interior de una arista de G, dicha arista es lo único que puede haber de G fuera de S' y dicha arista se puede representar en S' gracias a que, por peri-representabilidad, existe un arco de curva entre ambos puntos singulares dentro de C'. Así, se obtiene una inmersión de G en S'.

3. Si $P_0 \in V$, P_0 puede ser adyacente con todos los vértices de G excepto con uno (pues cada punto singular fuera de P_0 solo permite el paso de una arista y P_0 ha de estar en la misma cara que el resto de los vértices).

   De este modo, G está representado en S' con todos los vértices en una misma cara C' salvo por P_0 y las aristas de P_0 a vértices de G. Pero P_0 puede representarse en el interior de la cara C' y se puede dar una inmersión de G en S'. □

Según se deduce de la demostración anterior, es inmediata la reducción de GGC al siguiente problema PGC:

PROBLEMA: **Peri-seudogénero de un Grafo Cúbico (PGC).**
DATOS: Un grafo cúbico G y una seudosuperficie S.
PREGUNTA: ¿Admite G una inmersión en S con todos los vértices en una misma cara?

Teorema 1.1.3 *PGC es NP-completo.* □

Incluso podemos restringir PSG a ciertas seudosuperficies sin que el problema deje de ser NP-completo. Pero al prescindir de las seudosuperficies y plantearlo para superficies compactas no se tiene una respuesta sencilla. En este sentido, conjeturamos que el siguiente problema es NP-completo:

PROBLEMA: **Peri-género de un Grafo (PG).**
DATOS: Un grafo G y un entero no negativo k.
PREGUNTA: ¿Admite G una inmersión en una superficie de género k con todos los vértices en una misma cara?

En caso afirmativo, se pueden plantear otras conjeturas sobre la NP-completitud de otros 2 problemas:

PROBLEMA: **Peri-género de un Grafo Cúbico (PGC).**
DATOS: Un grafo cúbico G y un entero no negativo k.
PREGUNTA: ¿Admite G una inmersión en una superficie de género k con todos los vértices en una misma cara?

PROBLEMA: **Peri-género de un Grafo Sumergible (PGS).**
DATOS: Un entero no negativo k y grafo G de género $\gamma(G) \leq k$.
PREGUNTA: ¿Admite G una inmersión en una superficie de género k con todos los vértices en una misma cara?

Pese a no conocer la complejidad de los problemas anteriormente descritos, se puede avanzar hacia la resolución de casos particulares. En adelante, aportaremos procedimientos para estudiar grafos que admiten inmersiones peri.

1.1.5 Inmersiones peri en superficies compactas

La comprobación de si una inmersión (G, Π) es peri en una cierta superficie compacta pasa por encontrar una Π-cara en la que estén todos los vértices de G. Como el número de Π-caras es finito para cada inmersión y el número de inmersiones es finito para cada grafo, se puede plantear un algoritmo sencillo (aunque no eficiente) para responder a la cuestión de si G es peri-S, siendo S la superficie compacta orientable de género g: basta comprobar, para cada (G, Π) inmersión de G y para cada Π-cara C, si están todos los vértices de G en C, con $g \geq \gamma(G, \Pi)$.

Algo parecido se puede hacer con seudosuperficies, pues también aquí hay una cantidad finita de inmersiones y cada inmersión (G, Π) tiene una cantidad finita de Π-caras; el problema es que no se ha definido un "género" para seudosuperficies. De hecho, es bastante intuitivo aceptar que no todos los puntos singulares de una seudosuperficie deben ser puntos del grafo, por lo que el recuento de las caras es mucho más complejo.

Pero, como ya se ha dicho, para alcanzar resultados en un tiempo razonable, conviene dejar de trabajar con estas descripciones formales y adoptar un razonamiento basado en ideas más intuitivas.

1.1.6 Algoritmos para la peri-S-representabilidad

Para cada superficie compacta S, se puede dar un algoritmo polinomial, basado en el dado en [72], que responda sobre la peri-S-representabilidad de cada grafo. La prueba de esto se sustenta en que G admite inmersión peri-S si y solo si $G + K_1$ admite inmersión en S para cualquier superficie compacta. Justifiquemos este hecho:

Köning fue el primero en darse cuenta de que todo grafo G admite una inmersión en alguna superficie orientable. Partiendo de una representación de G en el plano (o la esfera) en la que se permiten cortes entre aristas fuera de los vértices, solo hay que añadir un asa por cada cruce que se quiera evitar.

Por supuesto, este método para dar una inmersión de G en una superficie compacta orientable suele utilizar más asas de las necesarias, por lo que no sirve para calcular $\gamma(G)$, aunque dé una cota superior.

Köning también demostró (ver [48, pág. 117]) que toda inmersión de un grafo en una superficie orientable de género $\gamma(G)$ tiene todas sus caras conexas. Con ello,

una cara en la que están todos los vértices permite sumar K_1 a G (al contrario de lo que sucede en seudosuperficies, en que hay discos pegados por puntos).

Por tanto, todo grafo admite una inmersión peri en alguna superficie orientable y, evidentemente, el número de asas a añadir será mayor o igual que $\gamma(G)$, pues $\gamma(G+K_1) \geq \gamma(G)$.

Motivados por lo expuesto, para toda superficie compacta S, se puede diseñar un algoritmo para comprobar si G es peri-S:

A partir de G se construye $G+K_1$ (en tiempo polinomial). Posteriormente, se comprueba si $G+K_1$ admite inmersión en S; la respuesta lo será también a la pregunta "¿es G peri-S?"

Pero el algoritmo anterior no resuelve completamente el problema de la peri-representabilidad:

Por una parte, puede no conocerse una caracterización de los grafos que admiten inmersión en la superficie o seudosuperficie S.

Por otro lado, la equivalencia entre la peri-S-representabilidad de $G+K_1$ y la S-representabilidad de G no es, en general, cierta para seudosuperficies que tengan más de un punto singular (como se verá en el Ejemplo 2.1.2), pero sí es válida cuando el punto singular es único, tal como se prueba en el siguiente:

Teorema 1.1.4 *Sea S una seudosuperficie con un único punto singular. G es peri-S si y solo si $G+K_1$ admite inmersión en S.*

Demostración: Sea P el único punto singular de S.

$[\Rightarrow]$ Considérese una inmersión peri-S de G. Distinguimos dos posibilidades:

1. Si $P \in G$, todas las caras de la inmersión son homeomorfas a un disco abierto, luego el resultado se tiene por el mismo motivo que para superficies compactas.

2. Si $P \notin G$, hay una cara no homeomorfa a un disco abierto. Si dicha cara fuese la única que contiene a todos los vértices (en caso contrario, no habría dificultad), basta elegir el punto P para sumar K_1. Desde que se sitúa un nuevo vértice en P, todas las caras del grafo son homeomorfas a un disco abierto y se puede proceder como antes.

En ambos casos anteriores, la inmersión peri-S de G induce otra de $G+K_1$ en S.

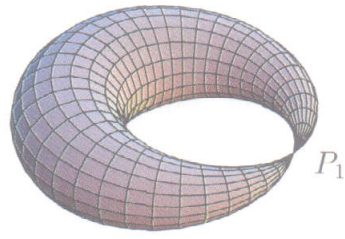

Figura 1.1: El toro estrangulado.

$\boxed{\Leftarrow}$ Dada una inmersión en S de $G + K_1$, la supresión de las aristas de K_1 a los vértices de G nos dan una inmersión de G en S en la que K_1 está en la misma cara que el resto de los vértices de G. La posibilidad de representar dichas aristas prueba este hecho. □

Analicemos más detalladamente, a continuación, el caso del toro estrangulado. Esta seudosuperficie aparentemente sencilla servirá de presentación de las que se estudiarán posteriormente. No solo puede servir para familiarizarse con las estrategias a seguir en los próximos capítulos de la memoria, sino que, además, este caso particular del toro estrangulado motivará el desarrollo posterior de nuestros análisis.

1.2 Inmersiones peri en el toro estrangulado

B_1 es el toro estrangulado por un punto. Es decir, se puede obtener de la contracción a un punto de un meridiano cualquiera del toro. No obstante, dicha seudosuperficie se puede conseguir también contrayendo a un punto ciertas curvas cerradas y simples de la botella de Klein. De estas observaciones se puede deducir inmediatamente que todo grafo que admite una inmersión en B_1, también la admite tanto en el toro como en la botella de Klein (ver [17]) y, por ende, que todo grafo peri-B_1 es peri tanto en el toro como en la botella de Klein.

A lo largo de esta sección, llamaremos P_1 al punto singular de B_1, como en la Figura 1.1.

El primer resultado que se enuncia es consecuencia de lo que ocurre para seudosuperficies con un único punto singular:

Corolario 1.2.1 *G es peri-B_1 si y solo si $G + K_1$ admite una inmersión en B_1.*

Demostración: B_1 tiene un único punto singular, por lo que es aplicable el Teorema 1.1.4. □

En 1990, Robertson y Seymour probaron en [71] que las listas de menores prohibidos para cualquier superficie compacta y para el toro estrangulado son finitas. Se han dedicado importantes esfuerzos a buscar tales listas de menores prohibidos. Actualmente, se conocen algunos de los menores prohibidos en el caso del toro estrangulado (como K_6 y $K_{1,3,3} = K_1 + K_{3,3}$, por ejemplo) [13, 17], pero no se ha determinado la lista completa. De todos modos, este hecho no es necesario para probar que la peri-B_1-representabilidad se puede caracterizar por menores prohibidos, pues todo menor de un grafo peri-B_1 es peri-B_1, luego la caracterización por menores prohibidos es posible. Según [71], tal lista de menores es finita.

Es más, para obtener los menores topológicos peri-B_1 prohibidos se puede partir de los menores topológicos prohibidos para la B_1-representabilidad u obtener la lista a partir de la de menores peri-B_1 prohibidos, de un modo análogo al utilizado por [6, 26] para superficies compactas.

Otra de las conclusiones de los estudios realizados sobre los grafos que admiten inmersión en B_1 es el siguiente resultado que garantiza la planaridad de cualquier grafo que sea peri-B_1:

Proposición 1.2.2 *Todo grafo peri-B_1 es plano.*

Demostración: Tanto K_6 como $K_{1,3,3}$ son menores prohibidos para la B_1-representabilidad, con lo que ni K_5 ni $K_{3,3}$ pueden ser peri-B_1, por el Corolario 1.2.1. Basta tener en cuenta el Teorema de Kuratowski para concluir la prueba. □

De hecho, solo hay dos menores (o menores topológicos) peri-B_1 prohibidos que no son planos: K_5 y $K_{3,3}$.

Examinando la seudosuperficie, es natural tratar de obtener propiedades de los grafos peri-B_1, como la que sigue:

Proposición 1.2.3 *Todo grafo 2-periplano es peri-B_1.*

Demostración: Considérese una inmersión 2-periplana de un grafo G. Gracias a la proyección estereográfica, por ejemplo, se puede obtener una inmersión de G en la esfera con todos los vértices en 2 caras. Elijamos un punto de cada una de esas caras e identifiquémoslos entre sí. El resultado será una inmersión peri-B_1 de G en la que P_1, el punto singular de B_1, no pertenece a G. □

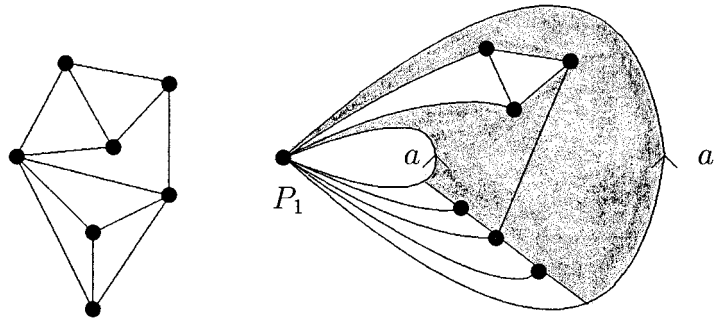

Figura 1.2: Un grafo no 2-periplano y una inmersión suya peri-B_1.

El problema de la caracterización de los grafos peri-B_1 no está cerrado aún, debido a que el recíproco de la Proposición 1.2.3 no es cierto en general, tal como se muestra:

Ejemplo 1.2.4 En el Teorema 2.2.1, se verá que el grafo de la Figura 1.2 (el E_{21} de la Figura 2.1) no es 2-periplano (aunque sí es plano). Sin embargo, en dicha Figura 1.2 se representa una inmersión peri-B_1 suya. ◁

Por otra parte, la demostración de la Proposición 1.2.3 hace pensar en si se pueden estudiar los grafos peri-B_1 en función de si utilizan o no el punto P_1. Los siguientes son resultados que surgen de un razonamiento en este sentido.

Lema 1.2.5 *Un grafo G es 2-periplano si y solo si admite una inmersión peri-B_1 en la que $P_1 \notin G$.*

Demostración:

$[\Rightarrow]$ Es una consecuencia directa de la demostración de la Proposición 1.2.3.

$[\Leftarrow]$ Ya que $P_1 \notin G$, se podría duplicar dicho punto singular obteniéndose una inmersión en la esfera con todos los vértices en dos caras (en el peor de los casos, una correspondiente a cada uno de los nuevos puntos). □

La cuestión no parece tan sencilla para caracterizar los grafos cuyas inmersiones peri-B_1 hacen uso del punto singular. Contrayendo parcialmente, si fuese preciso, alguna arista, se puede suponer que el punto singular está ocupado por un vértice. Pero la duplicación de tal vértice no siempre producirá la inmersión más deseable

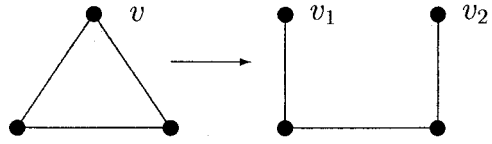

Figura 1.3: Un grafo y un corte suyo por un vértice.

para estudiar las propiedades del grafo, según se puede deducir del estudio de casos particulares. Antes de afrontar este problema, se necesita introducir un nuevo concepto:

Sea $G = (V, A)$ un grafo y $v \in V$. Cada uno de los grafos que resultan al duplicar v y repartir sus aristas incidentes entre los 2 nuevos vértices se llaman *corte* de G por v. A modo de ejemplo, en la Figura 1.3 se representa un grafo sencillo y un corte suyo por un vértice v.

Aunque enunciado de otro modo, el siguiente resultado es utilizado a menudo para estudiar los grafos que admiten inmersiones en B_1.

Teorema 1.2.6 *[17] Un grafo admite inmersión en B_1 si y solo si algún corte suyo es plano.* □

De forma natural, a este resultado debe sucederle una adaptación para grafos peri-B_1:

Teorema 1.2.7 *Un grafo es peri-B_1 si y solo si es 2-periplano o algún corte suyo es periplano salvo por un vértice de los dos creados al cortar.*

Demostración:

[⇒] Sea G un grafo peri-B_1. Si G se puede representar en B_1 con todos los vértices en la misma cara y de modo que $P_1 \notin G$, G es 2-periplano por el Lema 1.2.5. En caso contrario, por el Corolario 1.2.1 y el Teorema 1.2.6, $G + K_1$ tiene algún corte (por un vértice de G) plano. Pero a un corte de $G + K_1$ por un vértice de G le falta una arista para ser K_1 más un corte de G: precisamente la arista entre el K_1 y uno de los dos vértices que proceden de la duplicación. Este vértice está previsto convenientemente en el enunciado a demostrar.

[⇐] Si el grafo es 2-periplano, ya se ha visto que es peri-B_1. Si no lo es, el corte por un cierto v admite una inmersión en la esfera con todos los vértices una sola cara salvo, posiblemente, uno de los procedentes de v. Identificando los dos vértices

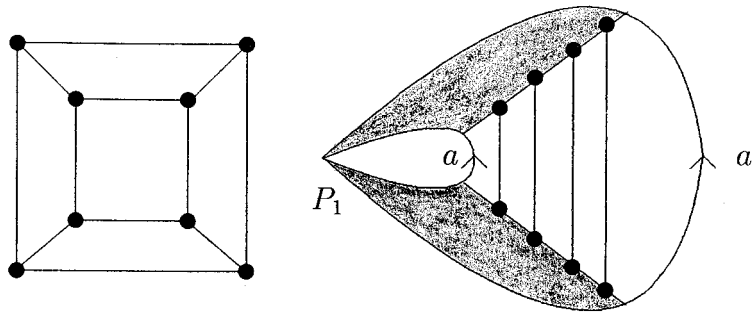

Figura 1.4: Inmersión peri-B_1 de un grafo sin cortes periplanos.

correspondientes a v, se obtiene una inmersión en B_1 con todos los vértices en una cara. □

Obsérvese que no se puede prescindir de la condición acerca de la 2-periplanaridad en el enunciado anterior. El siguiente ejemplo es muestra de esta afirmación:

Ejemplo 1.2.8 El grafo cubo de 8 vértices, $Q_3 = K_2 \times K_2 \times K_2$, de la Figura 1.4 es un ejemplo sencillo de grafo peri-B_1 que no tiene ningún corte periplano ni periplano salvo por un vértice. ◁

Una consecuencia directa del Teorema 1.2.7 es el siguiente:

Teorema 1.2.9 *Todo grafo peri-B_1 es 3-periplano.*

Demostración: Sea $G = (V, A)$ un grafo peri-B_1. Si G es 2-periplano, también es 3-periplano. En caso contrario, por el Teorema 1.2.7, existe $v \in V$ tal que el corte de G por v es periplano salvo, posiblemente, por uno de los 2 vértices que se generan por la duplicación de v. Llamemos v_1 y v_2 a esos 2 vértices (que desempeñan el mismo papel) y G' al corte de G por v.

Considérese una inmersión de G' periplana salvo por v_1 (es decir, puede suponerse que todos los vértices de G' salvo v_1 están en la cara exterior). Si v_1 y v_2 estuviesen en una misma cara, se podrían identificar ambos vértices y producir una inmersión que, en el peor de los casos, sería 2-periplana, luego también 3-periplana.

Por tanto, estudiemos una inmersión de G' en la que v_1 no comparte cara con v_2 y periplana salvo por v_1. Por el Teorema de la curva cerrada de Jordan, hay un

ciclo en G' en cuyo interior está v_1 y en cuyo exterior está v_2. El resto de vértices de G' puede estar en el ciclo o en el exterior de éste. Por periplanaridad, no existe ningún camino en G' fuera del ciclo y entre 2 vértices no consecutivos de dicho ciclo. Esto permite dar una inmersión de G' con v_1 y v_2 en una misma cara exterior al ciclo y el resto de vértices en esta misma cara o en otra interior. Identificando v_1 y v_2 se incrementa en 1 el número de caras en que están todos los vértices de G en una inmersión plana, luego es 3-periplana. □

Así, todo grafo 2-periplano es peri-B_1 y todo grafo peri-B_1 es 3-periplano.

Con todo lo anterior, es posible construir distintos algoritmos para comprobar si un grafo es peri-B_1. El primero consiste, simplemente, en comprobar si el $G + K_1$ admite una inmersión en B_1. El segundo (inspirado en el Teorema 1.2.7) podría estudiar la periplanaridad de todos los cortes de G.

A partir de conclusiones que se irán alcanzando a lo largo de la memoria, se podría intentar obtener la lista de menores peri-B_1 prohibidos y la de menores topológicos peri-B_1 prohibidos.

Para justificar la afirmación anterior, en el siguiente razonamiento se propone una vía más para el estudio de los grafos peri-B_1:

Sea $G = (V, A)$ un grafo peri-B_1. Si $P_1 \notin G$, ya se ha visto que G es 2-periplano. En caso contrario, contrayendo parcialmente una arista de G si fuera preciso, puede suponerse que $P_1 \in V(G)$. Por la definición de B_1, existen subconjuntos de B_1, $D_1, D_2 \subset B_1$ homeomorfos al disco abierto unidad, de modo que $D_1 \cap D_2 = \{P_1\}$.

Salvo en casos triviales en que G sería $V \setminus \{P_1\}$-periplano (y, por consiguiente, 2-periplano), hay unas aristas incidentes en P_1 que utilizan D_1 para su representación (pongamos que son δ_1, con $1 \leq \delta_1 < \delta(P_1)$) y otras que utilizan D_2 (hay $\delta_2 = \delta(P_1) - \delta_1$, luego $1 \leq \delta_2 < \delta(P_1)$).

Como D_1 y D_2 desempeñan el mismo papel, puede suponerse que la subdivisión sucesiva de las δ_1 aristas de D_1 produce un grafo infinito numerable que es peri-B_1 y que presenta acumulación de vértices en P_1. Si se repite la subdivisión para las otras δ_2 aristas, el grafo tiene todos los vértices en una misma cara salvo, posiblemente, los generados en estas últimas subdivisiones.

Para hacer desaparecer la acumulación de vértices podemos, intuitivamente, "llevar P_1 al infinito". Así, se obtendrá una inmersión de un grafo en un cilindro infinito sin acumulación de vértices y con todos los vértices en una misma cara

salvo, posiblemente, los vértices de δ_2 (en general, se trata de hasta $\delta(P_1) - 1$) subgrafos infinitos que, consecuentemente, llamaremos *rayos*.

Prosiguiendo el razonamiento en esta línea, puede llegarse a concluir que todo menor peri-B_1 prohibido tiene como menor, simultáneamente, algún menor 2-periplano prohibido y la compactificación por un punto de algún menor p-peri-$S^2(2)$ prohibido (según la notación que se utilizará en el capítulo dedicado a grafos infinitos numerables). El estudio de tales listas parciales de menores prohibidos y de la combinación de listas serán temas que se irán abordando a lo largo de la presente memoria.

Capítulo 2

Inmersiones peri en seudosuperficies esféricas simples

En este capítulo se trata el problema de caracterizar los grafos que admiten inmersiones en ciertas seudosuperficies con todos los vértices en la misma cara.

Para empezar, se da una caracterización original de los grafos con inmersiones peri en la seudosuperficie conocida como "biplátano", que surge de manera natural y que ha sido tratada en la literatura especializada (como en [19]). Esta seudosuperficie tiene una lista infinita de menores topológicos prohibidos como *Teorema de Kuratowski*, por lo que no posee lista de menores prohibidos (ver [76]).

El resultado obtenido lleva de forma consecuente al planteamiento de varios problemas (peri-representabilidad en otras seudosuperficies) cuyas resoluciones originales también se incluyen.

En concreto, las seudosuperficies estudiadas en este capítulo tienen en común que están formadas mediante pegamiento de esferas por puntos de modo que cada esfera tiene 2 de estos puntos singulares. Además, permiten extender resultados de peri-S-representabilidad a múltiples seudosuperficies.

Las inmersiones peri en estas seudosuperficies presentan sustanciales diferencias con los casos relativos a superficies. Algunos de los problemas que plantearemos serán, por eso, "imposibles" en cierto sentido, según se verá.

2.1 Seudosuperficies esféricas simples

Hasta la fecha no se han dado explícitamente listas de menores o de menores topológicos prohibidos para la propiedad "admitir una inmersión" en superficies distintas de la esfera o del plano proyectivo. En 1990, Robertson y Seymour [71] demuestran que estas listas serían finitas para cualquier superficie. Sin embargo, dos años más tarde, Širáň y Gvozdjak [76] prueban que la lista de menores topológicos prohibidos es infinita para el *biplátano* B_2 (ver la Definición 0.1.2), por lo que no tiene sentido hablar de una lista de menores prohibidos en B_2. Esto se debe a que una lista de menores prohibidos, si existe, es finita (ver [71]) y a que una cantidad finita de menores prohibidos implica una cantidad finita de menores topológicos prohibidos (según se demuestra en [12]).

Ya se ha visto que el concepto de grafo periplano se puede extender a otras superficies, con lo que un grafo es *peri-S-representable* (o *peri-S*) si admite una inmersión en S con todos sus vértices en una misma cara. Esta definición es válida también si S es una seudosuperficie, aunque debamos definir qué debe entenderse por una *seudosuperficie*. Recordemos, por eso, que las seudosuperficies son superficies salvo por *unos cuantos* puntos, que llamamos *puntos singulares*.

En el caso concreto del biplátano, resultados referentes a inmersiones pueden ser útiles a nuestro estudio. Por ejemplo, existen grafos peri-B_2 tales que la suma con K_1 no admite inmersión en B_2. Para dar un ejemplo, es preciso conocer algo más sobre los grafos B_2-representables:

Teorema 2.1.1 *[11, 76] Sea H un grafo finito y 3-conexo. Son equivalentes:*

1. *H no es B_2-representable.*
2. *Para todo $x \in A(H)$, $H - x$ no es plano.* □

Ejemplo 2.1.2 El grafo $Q_3 = K_2 \times K_2 \times K_2$ del Ejemplo 1.2.8, es peri-B_2 (se podrá comprobar tras el Teorema 2.3.2, pues es 2-periplano). $Q_3 + K_1$ es 3-conexo y, tanto si le eliminamos una arista de Q_3 como una que no era de Q_3, el grafo resultante contiene tanto a K_5 como a $K_{3,3}$. Luego $Q_3 + K_1$ no es B_2-representable en virtud del Teorema 2.1.1. ◁

La descripción de las seudosuperficies esféricas simples como seudosuperficies 0-homogéneas y 2-regulares puede inducir a pensar que se van a estudiar los grafos

peri en una familia demasiado reducida. Sin embargo, veremos a continuación que hay motivos para valorarlas de otra forma: todo grafo admite una inmersión peri en alguna seudosuperficie esférica simple.

Sea $G = (V, A)$ un grafo finito. Por cada arista de A, considérese una esfera en la que dicha arista va a ser representada. Los extremos de la arista serán, obviamente, los puntos que se utilizarán para pegar las esferas entre sí y formar una seudosuperficie en que G admite una inmersión con todos los vértices en puntos singulares. Para obtener una seudosuperficie esférica en la que G admita una inmersión peri, solo resta pegar una esfera por cada punto singular (esto es, por cada vértice de V) e identificar, en un único punto, un punto no singular de cada una de estas últimas esferas. El resultado de este procedimiento es la inmersión peri del grafo G en una seudosuperficie esférica simple con $|A| + |V|$ células y $|V| + 1$ puntos singulares.

2.2 Grafos 2-periplanos

Una vez se han presentado las nociones básicas para un primer estudio de la peri-representabilidad en seudosuperficies, en la siguiente sección se relacionan los grafos 2-periplanos con los grafos peri en ciertas seudosuperficies esféricas.

Los grafos 2-periplanos fueron caracterizados por Cáceres [26], Archdeacon, Bonnington, Dean, Hartsfield y Scott [5] y Revuelta [70]. Ellos dieron una lista de 38 menores prohibidos y otra de 56 menores topológicos prohibidos.

Como se puede extraer de los dos enunciados que siguen, los menores prohibidos son K_5, $K_{3,3}$ y los de la Figura 2.1, mientras que los 56 menores topológicos prohibidos son los 38 menores anteriores junto con los 18 grafos de la Figura 2.2.

Teorema 2.2.1 *[5, 26] Un grafo plano es 2-periplano si y solo si no tiene como menor a uno de los 36 grafos de la Figura 2.1.* □

Teorema 2.2.2 *[5, 70] Un grafo plano es 2-periplano si y solo si no tiene como menor topológico a uno de los 36 grafos de la Figura 2.1 o a uno de los 18 de la Figura 2.2.* □

El conocimiento de las listas de menores prohibidos (o de menores topológicos prohibidos) para la 2-periplanaridad resulta clave para caracterizar los grafos peri en seudosuperficies esféricas. Del mismo modo, la obtención de tales listas para la

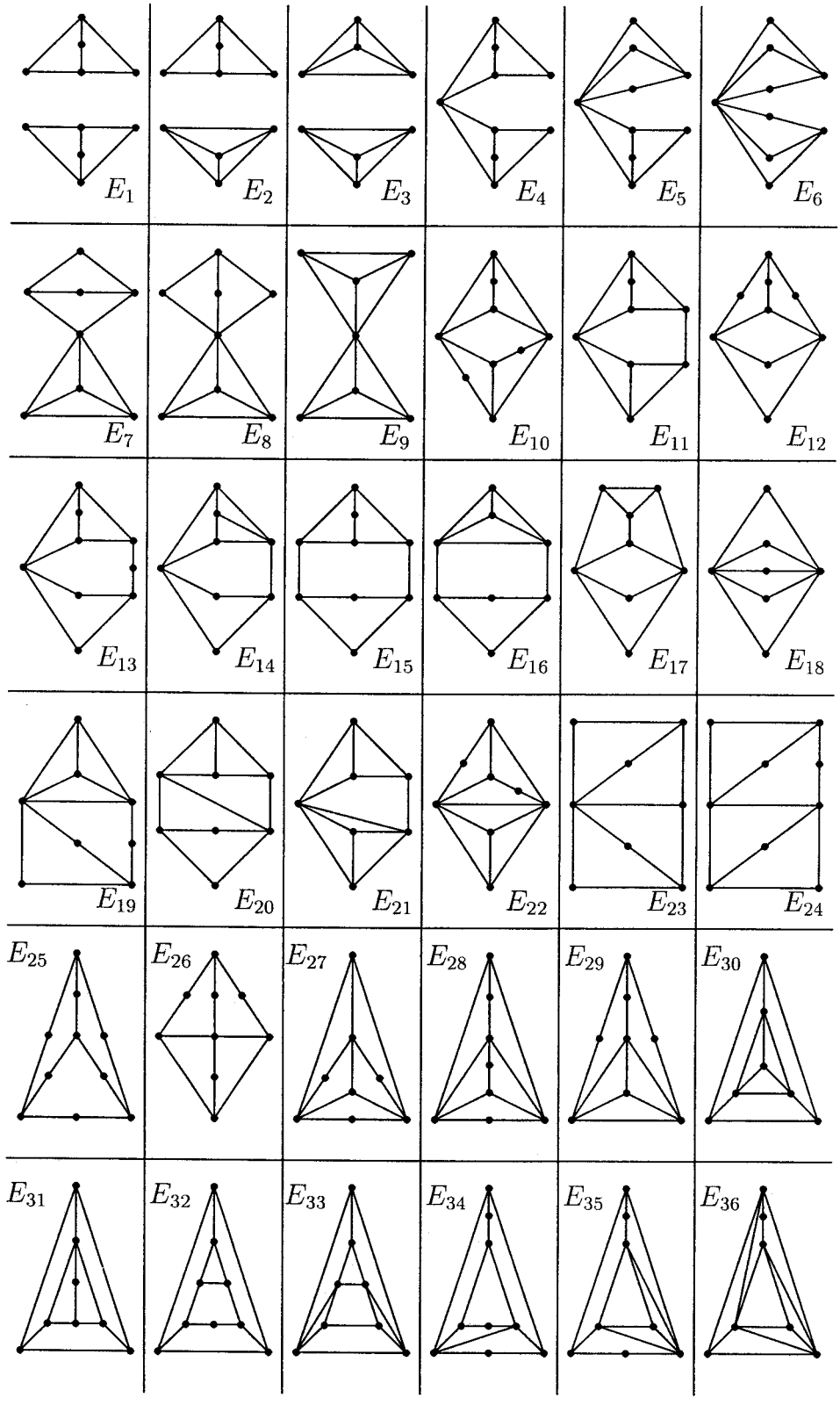

Figura 2.1: Menores planos prohibidos para la 2-periplanaridad.

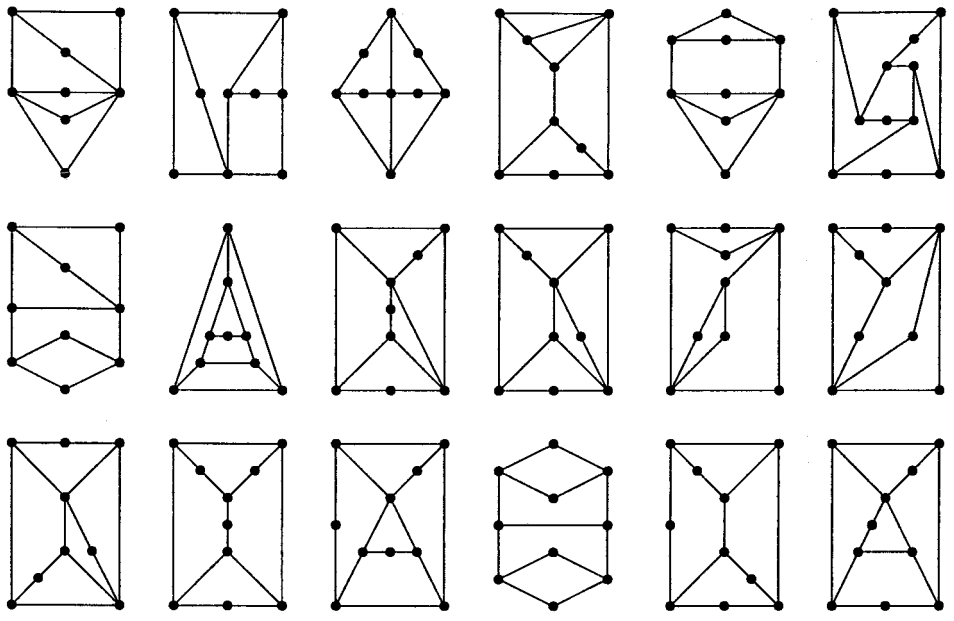

Figura 2.2: Menores topológicos 2-periplanos prohibidos no menores prohibidos.

3-periplanaridad resultaría muy interesante para extender la caracterización a los grafos peri en otras seudosuperficies (también formadas por esferas) que se estudiarán más adelante.

2.3 Grafos peri-B_n

Se prepara ahora el resultado principal de este capítulo, que caracteriza los grafos peri-B_2 (o peribiplatanares):

Proposición 2.3.1 *Sea G un grafo conexo. Entonces, G es peri-B_2 si y solo si G es 2-periplano.*

Demostración:

$[\Rightarrow]$ Comenzando con la condición suficiente para ser peri-B_2, sea G un grafo 2-periplano. Entonces existe una representación de G en la esfera con todos los vértices situados en una o dos caras (distinguidas).

Para que la representación sea una inmersión en B_2 solo hay que "pegarle" por dos puntos distintos una esfera a la que ya teníamos. Basta elegir dichos puntos en

el interior topológico de cada una de las caras distinguidas para que G esté inmerso en B_2 con todos sus vértices en la misma cara.

$[\Leftarrow]$ En cuanto a la condición necesaria, sea G un grafo del que se conoce una inmersión peri-B_2, sobre la que se harán las consideraciones siguientes:

Si P_1 y P_2 son los puntos singulares de B_2 y se llama C a la cara en la que están todos los vértices de G, se pueden distinguir los siguientes casos exhaustivos y mutuamente excluyentes:

1. Ni P_1 ni P_2 son de G. En este caso, G está representado en una sola célula con todos los vértices en una o en dos caras (depende de si ni P_1 ni P_2 son de C o si ambos son de C).

2. P_1 es de G y P_2 no (o recíprocamente). Así, en una de las dos células se tiene representado un grafo peri-esférico y en la otra uno que deja de ser peri-esférico, eventualmente, por un vértice en P_1. Si se unen ambos grafos identificando el P_1 de cada uno de ellos (se puede suponer que P_1 es vértice y no punto de una arista) se obtiene un grafo 2-periplano, pues todos los vértices están en las caras comunes a los vértices de los dos subgrafos considerados.

3. P_1 y P_2 son de G; sin pérdida de generalidad se pueden suponer vértices. Como ahora C está totalmente contenida en una de las dos células, en la otra no puede haber otros vértices que P_1 y P_2.

   Considérense aquí dos subcasos:

   (a) Si P_1 y P_2 no son adyacentes, se tiene representado G en una esfera con todos los vértices en una sola cara.

   (b) Si P_1 y P_2 son adyacentes, esta arista es lo único que puede estar fuera de la célula del resto de los vértices de G. Salvo el caso trivial en que G está en una sola esfera, P_1P_2 está en la célula en que no están el resto de vértices, por lo que C está en la célula en la que no esté P_1P_2. Pero, como tanto P_1 como P_2 están en C, existen arcos de curva en el interior topológico de C que van de P_1 a P_2 y cualquiera de ellos se puede utilizar para afirmar que G es representable en una esfera con todos los vértices en 2 caras (las que surgen de C al añadir ese arco como arista P_1P_2), según se hace en la Figura 2.3. □

Sigue el caso general:

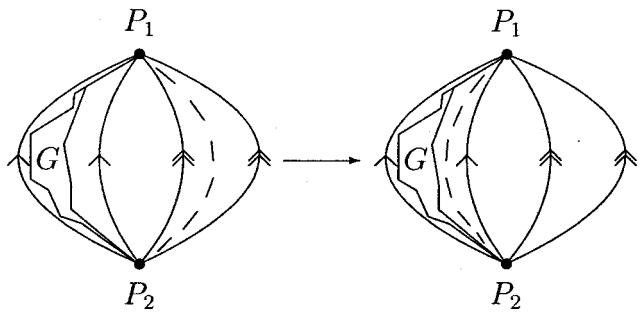

Figura 2.3: Caso clave para estudiar los grafos peri-B_2.

Teorema 2.3.2 *Sea G un grafo. Entonces, G es peri-B_2 si y solo si G es 2-periplano.*

Demostración: Se pueden eliminar las componentes conexas periplanas de G sin que eso altere el carácter de 2-periplano ni el de peri-B_2.

De este modo, solo resta notar que un grafo no puede ser 2-periplano ni peri-B_2 si posee más de una componente no periplana, con lo que la demostración de este Teorema 2.3.2 se reduce a la del caso en que solo existe una componente conexa, estudiado en la Proposición 2.3.1. □

Corolario 2.3.3 *Sea G un grafo. Son equivalentes:*

1. *G es peri-B_2.*
2. *G no tiene como menor a K_5, a $K_{3,3}$, ni a uno de los 36 menores relacionados en la Figura 2.1.*
3. *G no tiene ningún menor topológico de uno de los 38 grafos anteriores, ni de uno de los 18 subgrafos relacionados en la Figura 2.2.*

□

Como consecuencia inmediata del Teorema 2.3.2 se tiene que todo grafo peri-B_2 es plano, a pesar de que no todo grafo que admita una inmersión en B_2 admite otra plana.

Conviene hacer notar aquí también que, aunque la lista de menores topológicos prohibidos para la B_2-representabilidad es infinita (ver [76]), es finita para la peri-B_2-representabilidad y que, a diferencia de lo que ocurre para los grafos que admiten una inmersión en B_2, los que admiten una inmersión peri-B_2 pueden ser caracterizados en términos de menores prohibidos.

Otro hecho destacable es que el Teorema 2.3.2 admite ser generalizado para el estudio de los grafos peri en seudosuperficies no esféricas. Por ejemplo, considérese una superficie compacta S a la que se le pega una esfera por 2 puntos distintos. Como los grafos peri-S^2 son también peri-S, los grafos peri en la seudosuperficie resultante son los 2-peri-S-representables. Convendría repasar la demostración dada para el Teorema 2.3.2 y comprobar que sigue siendo válida en este caso si se realizan dos comentarios adicionales:

- Se puede suponer que todo el grafo peri está en S.
- Si un punto singular está en el grafo peri y el otro no, dicho grafo admite una inmersión peri-S salvo por los vértices de un bloque, con lo que se puede obtener inmediatamente una inmersión 2-peri en la unión por 2 puntos de S y S^2.

En particular, como se conocen los grafos peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, se podría intentar conseguir la lista de menores (o de menores topológicos) peri prohibidos en la seudosuperficie que se obtiene al pegar una esfera al plano proyectivo por 2 puntos distintos, aunque esta tarea no es objeto de estudio del presente capítulo.

La observación anterior no es generalizable para seudosuperficies a las que se le peguen una esfera por 2 puntos, debido a que no todos los puntos de una seudosuperficie son idénticos. Por esto, dedicaremos la sección siguiente a ésta al estudio de los grafos peri en lo que se llamará L_n.

Volviendo a las seudosuperficies $(2,2,0)$-perfectas, a partir de resultados anteriores, es fácil caracterizar los grafos peri-B_n:

Teorema 2.3.4 *Sea G un grafo. G es peri-B_n con $n \geq 2$ si y solo si G es 2-periplano.*

Demostración: Como antes, conviene considerar primero el caso conexo:

La primera implicación resulta fácil de probar por inducción en n a partir de la demostración de la Proposición 2.3.1.

En cuanto al recíproco, ahora hay que distinguir si ninguno de los puntos singulares es de G, si solo lo es uno o si 2 o más lo son. En cualquier caso, el proceso es el mismo que se siguió para probar 2.3.1.

Finalmente, si G no es conexo, se procede como en el Teorema 2.3.2. □

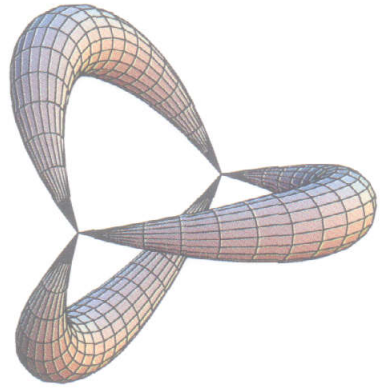

Figura 2.4: L_3.

2.4 Grafos peri-L_n

Trataremos a continuación acerca de la peri-representabilidad de grafos en otras seudosuperficies esféricas simples a las que llamaremos L_n.

Para cada $n > 1$, la seudosuperficie L_n se define pegando n esferas por 2 únicos puntos singulares (de modo que cada esfera sigue teniendo 2 puntos singulares). De esta forma, $L_2 = B_2$ y L_3 es la seudosuperficie de la Figura 2.4.

Evidentemente, todo grafo peri-B_2 es también peri-L_n para todo $n > 1$, pero el recíproco no es cierto. El ejemplo siguiente permite apreciar que el problema para L_n es sustancialmente distinto del resuelto para B_n.

Ejemplo 2.4.1 Considérense L_3 y el grafo $G = K_4 \cup K_1$ (unión disjunta). Este grafo no es 2-periplano, pues posee 2 componentes conexas y ninguna de ellas es periplana.

Sin embargo, es sencillo representar dicho grafo G en B_2 con todos los vértices en 2 caras y de manera que cada una de esas caras contenga uno de los puntos singulares de B_2. Utilizando esta representación, resulta evidente que el grafo es peri-L_3, como se puede ver en la Figura 2.5, a pesar de no ser 2-periplano. $\lhd$

Esta dificultad no impide que se puedan caracterizar los grafos peri-L_n. En un primer paso, vamos a analizar los 2-conexos y peri-L_n gracias a que se puede aprovechar la demostración del Teorema 2.3.2 para obtener un resultado parecido a

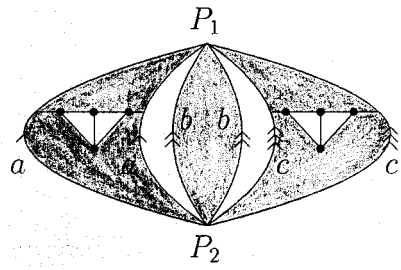

Figura 2.5: Inmersión peri-L_3 de $K_4 \cup K_4$.

aquél pero para las seudosuperficies L_n, con $n > 2$: la caracterización de los grafos 2-conexos y peri-L_n.

Lema 2.4.2 *Sea G un grafo 2-conexo. Para $n \geq 2$, G es peri-L_n si y solo si G es 2-periplano.*

Demostración: Si G es un grafo 2-conexo y admite una inmersión en L_n, dicha inmersión utiliza solo una célula, salvo, posiblemente, por una arista. Así, G es peri-L_n si y solo si G es peri-L_2, lo que, por el Teorema 2.3.2, equivale a que G es 2-periplano. □

Corolario 2.4.3 *Los grafos E_i de la Figura 2.1, con $10 \leq i \leq 36$, no son peri-L_n para $n \geq 2$.*

□

Pero este Lema 2.4.2 no cierra el problema de caracterizar ni siquiera los grafos peri-L_3, pues hay grafos no 2-periplanos que sí son peri-L_3. Aunque ya se ha descrito un ejemplo de esta posibilidad, resulta conveniente comentar otro:

Ejemplo 2.4.4 Considérese la unión por un vértice de dos K_4. Este grafo no es 2-periplano; de hecho es el E_9 de la lista de menores prohibidos dada en la Figura 2.1. Sin embargo, existe una representación en L_3 con todos los vértices en una sola cara, según se puede comprobar en la Figura 2.6. ◁

Los siguientes resultados se utilizarán para estudiar los grafos peri-L_3; después se generalizará a cualquier n lo realizado para 3 células.

Lema 2.4.5 *Para $n \geq 2$, si G es un grafo formado por $n-1$ componentes conexas 2-periplanas (y, eventualmente, otras componentes periplanas), entonces G es peri-L_n.*

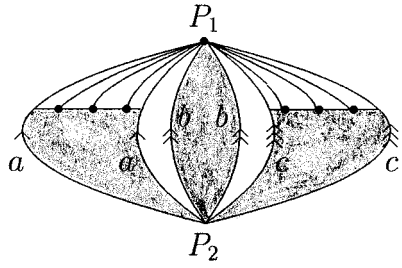

Figura 2.6: Inmersión peri-L_3 de 2 K_4 pegados por un punto.

Demostración: Las componentes periplanas no afectan a la peri-representabilidad, pues admiten inmersiones con todos los vértices en la cara exterior.

En cuanto a las 2-periplanas pero no periplanas, cada una de ellas se puede representar en una esfera distinta. Eligiendo e identificando convenientemente 2 puntos por esfera (uno en cada una de las caras con las que se cubren todos los vértices), se tiene una inmersión peri-L_n. □

Lema 2.4.6 *Para $n \geq 2$, todo grafo peri-L_n tiene, a lo sumo, $n-1$ componentes conexas no periplanas.*

Demostración: Para que G sea peri-L_n, la inmersión en cada célula tiene que tener todos los vértices en 1 ó 2 caras, pero esto no es posible si hay 2 componentes no periplanas en una misma célula.

Si cada célula tiene una única componente no periplana, tampoco es posible "comunicar" las 2 caras de cada célula.

Y si una componente conexa utiliza varias células para su representación, no se puede añadir ninguna componente no periplana a la anterior, pues solo queda un punto singular para "comunicar" caras de diferentes células. □

También será preciso recurrir a los siguientes resultados:

Lema 2.4.7 *Los grafos E_5, E_6 y E_8 de la Figura 2.1 no son peri-L_n para ningún $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Sea G uno de los tres grafos relacionados en el enunciado. G es conexo y no 2-periplano, luego no hay ninguna inmersión peri-L_n de G que utilice una única esfera para su representación.

Tampoco hay inmersiones peri-L_n de G en que los 2 puntos singulares sean puntos de G, porque G menos una arista no es periplano en ningún caso.

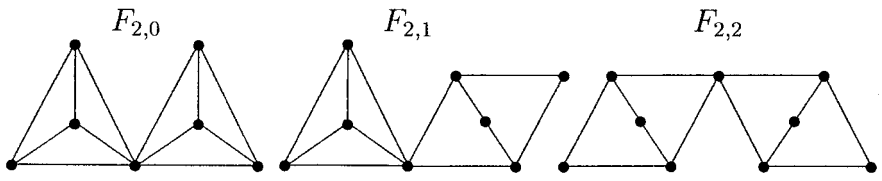

Figura 2.7: Grafos peri-L_3 pero no 2-periplanos.

Finalmente, el que tampoco existan inmersiones peri-L_n de G en que el vértice de corte de G sea un punto singular se debe al siguiente hecho: en ninguna inmersión de $K_{2,3}$ ó K_4 hay una cara en la que estén todos los vértices salvo uno de valencia 3. □

Lema 2.4.8 *Sea G un grafo conexo y peri-L_3. Si G no es 2-periplano, entonces tiene como subgrafo a uno de los 3 grafos conexos de la Figura 2.7.*

Demostración: Si G no es 2-periplano, tiene como subgrafo a alguno de la lista de prohibidos para la 2-periplanaridad, dada en las Figuras 2.1 y 2.2. Por los Lemas 2.4.2 y 2.4.7, solo E_1, E_2, E_3, $E_4 = F_{2,2}$, $E_7 = F_{2,1}$ y $E_9 = F_{2,0}$ de esa lista son peri-L_3. Pero es fácil comprobar que no hay ningún grafo conexo que contenga a E_1, E_2 o a E_3 como subgrafo y que sea peri-L_3. □

La notación utilizada en la Figura 2.7 se explica al definir la familia de grafos $\mathcal{F}_2 = \{F_{2,0}, F_{2,1}, F_{2,2}\}$, de modo que el grafo $F_{i,j}$ tiene i bloques (cada uno de ellos es un K_4 o un $K_{2,3}$ que llamaremos, también, *pétalos* del grafo) y $2j$ vértices no adyacentes con el vértice "central" (el de valencia > 3). Como se ha visto, la generalización de esta notación surge de forma natural: $\mathcal{F}_3$ es la familia formada por los 4 grafos $F_{3,i}$, con $0 \leq i \leq 3$ (el número de pétalos que son el grafo $K_{2,3}$), representada en la Figura 2.10, $\mathcal{F}_4$ son los 5 grafos de la Figura 2.11 y $\mathcal{F}_n$ tiene $n+1$ grafos para los sucesivos n.

Como consecuencia de los lemas precedentes, se tiene el siguiente Teorema de caracterización de los grafos peri-L_3:

Teorema 2.4.9 *Sea G un grafo. G es peri-L_3 si y solo si G no tiene como menor a ninguno de los grafos relacionados a continuación: K_5, $K_{3,3}$, $K_4 \cup F_{2,i}$, $K_{2,3} \cup F_{2,i}$, con $i \in \{0,1,2\}$, la unión disjunta de 3 grafos elegidos en $\{K_4, K_{2,3}\}$, E_5, E_6, E_8, E_j, con $10 \leq j \leq 36$ y, finalmente, los 7 menores ($F_{3,0}$, $F_{3,1}$, $F_{3,2}$, $F_{3,3}$, G_1, G_2 y G_3) dados en la Figura 2.8.*

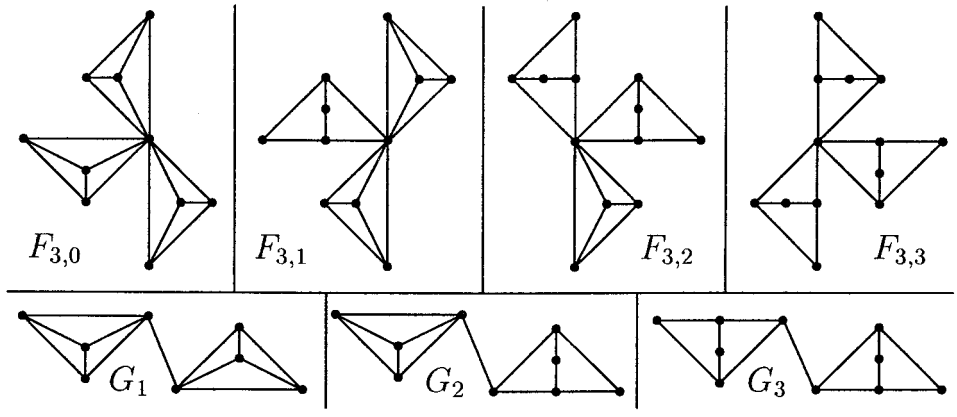

Figura 2.8: Grafos no peri-L_3.

Demostración: Para que un grafo G no sea peri-L_3, tiene que ocurrir alguno de los siguientes supuestos:

- G tiene más de dos componentes no periplanas, con lo que tiene como menor a alguno de los siguientes: $K_4 \cup K_4 \cup K_4$, $K_4 \cup K_4 \cup K_{2,3}$, $K_4 \cup K_{2,3} \cup K_{2,3}$, $K_{2,3} \cup K_{2,3} \cup K_{2,3}$.

- G tiene exactamente dos componentes no periplanas y una de ellas, al menos, no es 2-periplana. En este caso, un menor de G es un grafo con dos componentes conexas, una de las cuales tiene como menor a K_4 o a $K_{2,3}$ (por no ser periplana) y la otra tiene como menor alguno de la lista de grafos prohibidos para la 2-periplanaridad (K_5, $K_{3,3}$ y los otros 36 de la Figura 2.1). De este modo, G tiene un menor dentro de una lista de 72 "prohibidos" (aunque algunos resultarán redundantes con los que se obtengan posteriormente).

- G solo tiene una componente conexa no periplana. Ésta no puede ser 2-periplana, luego tiene como menor a alguno de la lista de prohibidos para la 2-periplanaridad. Si este menor es 2-conexo, es K_5, $K_{3,3}$ o uno de los E_j de la Figura 2.1 con $10 \leq j \leq 36$ y sigue siendo menor prohibido para la peri-L_3-representabilidad. Si no es 2-conexo, del Lema 2.4.8 se deduce que los únicos menores prohibidos que quedan por añadir son los 10 de la Figura 2.9, que son E_5, E_6, E_8, $F_{3,0}$, $F_{3,1}$, $F_{3,2}$, $F_{3,3}$ y los G_1, G_2 y G_3 de la Figura 2.8.

  E_5, E_6 y E_8 no son ni 2-periplanos ni peri-L_3, porque están en la Figura 2.1 pero no pertenecen a $\mathcal{F}_2$. Y, por otra parte, los grafos de la Figura 2.8 son el

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

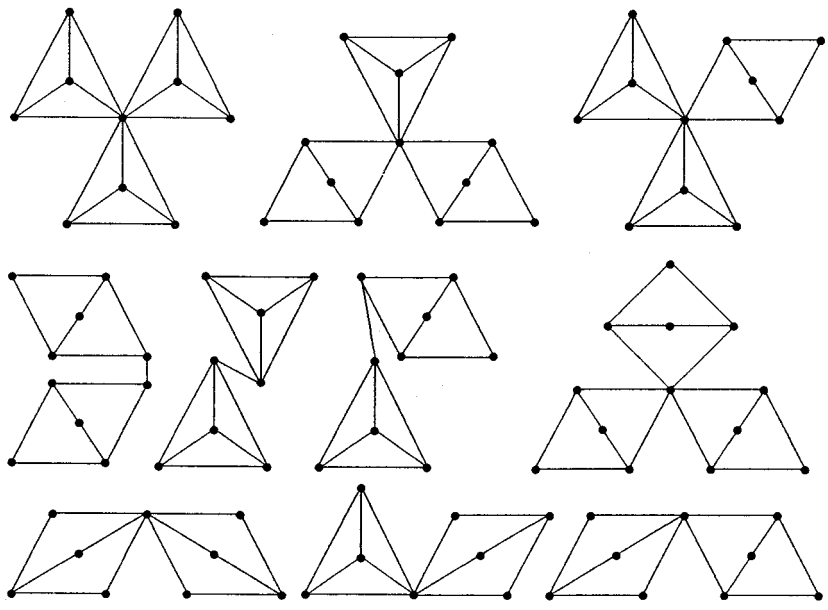

Figura 2.9: Algunos menores peri-L_3 prohibidos.

resultado de añadir lo menos posible a E_1, E_2, E_3, E_4, E_7 ó E_9 convirtiéndolos en grafos no peri-L_3.

Eliminando los menores redundantes, se sigue la tesis. □

Nota 2.4.10 Resulta curioso y novedoso que 3 de estos menores prohibidos presenten puentes que, por supuesto, no pueden contraerse sin convertir el grafo en uno peri-L_3-representable.

Por otra parte, más adelante podremos deducir un resultado más (el Lema 3.1.3) sobre los grafos peri-L_3.

De un modo muy parecido a como en el Lema 2.4.8, se puede enunciar un resultado válido para L_n, con $n \geq 4$. Por ejemplo, si $n = 4$, los grafos conexos y peri-L_n que no sean 2-periplanos, tendrán como menor a alguno de los 3 grafos conexos de entonces o a alguno de los 4 grafos conexos que constituyen la familia $\mathcal{F}_3$. Y, para $n = 5$, los menores a añadir tienen 4 pétalos y forman $\mathcal{F}_4$.

En general, para L_n se van añadiendo a los menores anteriores los que tienen $n-1$ pétalos; es decir, los de la familia $\mathcal{F}_{n-1}$, que está formada por bloques que son K_4 ó $K_{2,3}$, que comparten un único vértice y de modo que los $K_{2,3}$ se unen siempre por un vértice que tenía mínima valencia ($v \in A(K_{2,3})$ tal que $\delta(v) = 2$).

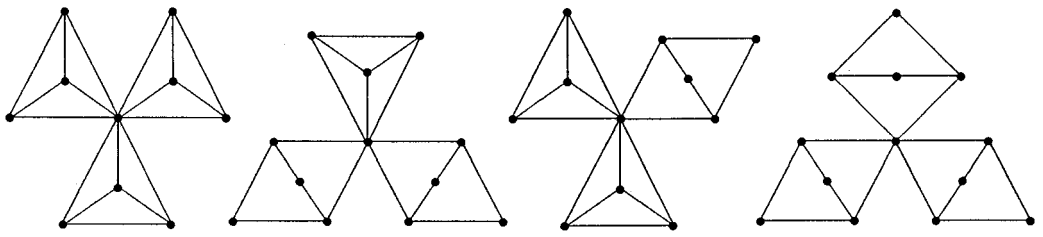

Figura 2.10: Grafos de la familia $\mathcal{F}_3$.

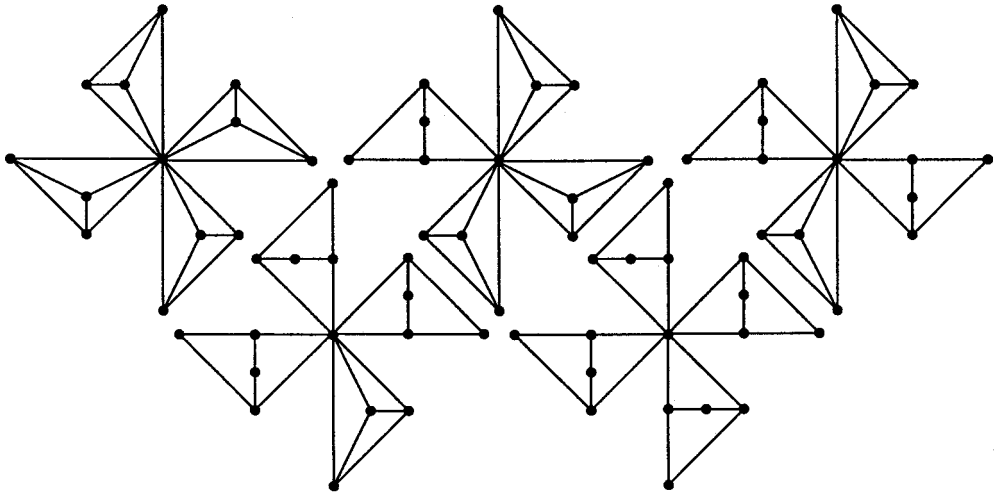

Figura 2.11: Grafos de la familia $\mathcal{F}_4$.

Así, se puede conocer la lista de menores prohibidos para la peri-L_n-representabilidad también cuando $n \geq 4$.

Teorema 2.4.11 *Sean G un grafo y $n \geq 3$. G es peri-L_n si y solo si no tiene como menor a ninguno de los siguientes:*

- K_5;
- $K_{3,3}$;
- *los $n+1$ menores de $\mathcal{F}_n$;*
- *los $n+1$ menores no conexos formados mediante la unión disjunta de n componentes elegidas en $\{K_4, K_{2,3}\}$;*
- *los 6 menores no conexos $K_4 \cup F_{2,i}$, $K_{2,3} \cup F_{2,i}$, con $i \in \{0,1,2\}$ (los $F_{2,i}$ son los dados en el Lema 2.4.8);*
- *los 33 menores conexos G_1, G_2, G_3 (de la Figura 2.8), E_5, E_6, E_8, E_j, con $10 \leq j \leq 36$ (de la Figura 2.1).*

Demostración: Sea G un grafo no peri-L_n. Tiene que ocurrir alguno de los 3 supuestos siguientes:

1. G tiene más de $n-1$ componentes conexas no periplanas, con lo que tiene como menor a alguno de los grafos que se pueden obtener mediante la unión disjunta de n componentes, elegidas cada una en $\{K_4, K_{2,3}\}$ (éstos son $n+1$ menores prohibidos).

2. G tiene, al menos, una componente no periplana y otra que no es 2-periplana. En este caso, G tiene como menor un grafo con dos componentes conexas, una de las cuales tiene como menor a K_4 o a $K_{2,3}$ y la otra tiene como menor a alguno de la lista de grafos prohibidos para la 2-representabilidad (son 76 menores prohibidos, la mayoría de los cuales serán redundantes con los que se obtendrán después).

3. G tiene una componente no 2-periplana que no es ninguno de los menores de hasta $n-1$ pétalos que se acaban de describir en las familias $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$,...,$\mathcal{F}_{n-1}$. Entonces, G tiene como menor a alguno de los menores 2-conexos prohibidos para la 2-periplanaridad o tiene como menor a algún grafo que se obtenga de

los de $\mathcal{F}_2$ añadiendo una arista entre sus pétalos o a algún grafo de la familia $\mathcal{F}_n$.

Finalmente, eliminando de la lista los grafos redundantes, permanecen como menores prohibidos para la peri-L_n-representabilidad los descritos en el enunciado a demostrar. □

Esto es, los grafos descritos en el Teorema 2.4.11 anterior hacen un total de $43+2n$ menores peri-L_n prohibidos cuando $n \geq 3$ (para el caso $n = 2$, solo había 38 menores prohibidos). Así, se ha demostrado que los grafos peri-L_n se pueden caracterizar por menores prohibidos y se han dado dichas listas de menores prohibidos.

En cuanto a la caracterización por menores topológicos prohibidos de los grafos peri-L_n, para $n \geq 3$ (para $n = 2$ son otra vez los 2-periplanos), se sabe que ésta existe en virtud de lo demostrado en [26]. Asimismo es posible su obtención a partir de los resultados logrados en el presente capítulo. Usando el procedimiento que se detalla en [70], se puede encontrar una lista de menores topológicos peri-L_n prohibidos para cualquier $n \geq 2$. De hecho, la aplicación de dicho procedimiento produce, en cada caso, una lista de menores topológicos prohibidos que consiste en la lista de menores peri-L_n prohibidos junto con los 18 grafos de la Figura 2.2.

Esto cierra el problema de caracterización de los grafos peri-L_n y motiva el estudio de los grafos peri en otras seudosuperficies esféricas.

2.5 Grafos peri en otras seudosuperficies esféricas

Utilizando el procedimiento que ofrecen las demostraciones anteriores, se pueden obtener teoremas similares a aquéllos para otras seudosuperficies que se obtengan combinando esferas *encadenadas* (como en B_n) con otras del tipo de las L_n. Por ejemplo, una reflexión superficial nos hará caer en la cuenta de que la sustitución de una célula de un L_n por una esfera estrangulada por varios "paralelos" (como en la Figura 2.12, que se obtiene de L_3) no afecta a la peri-representabilidad, de la misma forma que los grafos peri-B_n siguen siendo los mismos que los grafos peri-B_2, para todo $n > 2$. Pero no todas las seudosuperficies esféricas se pueden obtener de esa forma, como tampoco se comportan de la misma forma respecto de los grafos peri.

Es obvio que la peri-representabilidad en seudosuperficies es una propiedad hereditaria para subgrafos (de hecho, este aserto se ha utilizado implícitamente

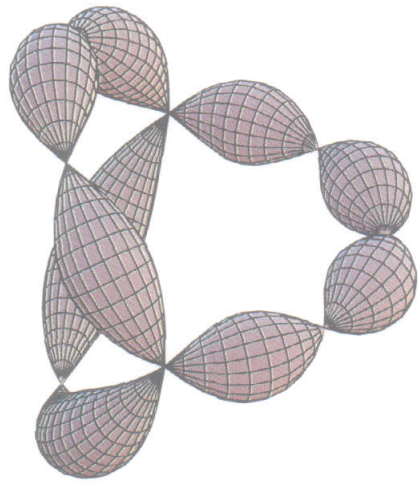

Figura 2.12: Una seudosuperfice formada por 9 esferas.

en algunas pruebas anteriores). Sin embargo, no lo es para menores, a pesar de que pudiera esperarse lo contrario.

Hasta ahora, las caracterizaciones dadas para grafos peri-S, siendo S una seudosuperficie esférica, justificaban la existencia de una lista de menores prohibidos en cada caso. Veamos que hay seudosuperficies esféricas en las que menores de grafos peri no son peri.

Ejemplo 2.5.1 Considérese la seudosuperficie S de la Figura 2.13, que se obtiene al conectar dos L_3 con sendas esferas de modo que cada uno de los 4 puntos singulares resultantes pertenezcan a 4 células.

El grafo conexo que se construye uniendo por una arista los vértices centrales de dos $F_{2,0}$ sí es peri-S, como se puede comprobar en la Figura 2.14. No obstante, si se contrae la arista puente del grafo anterior, se obtiene $F_{4,0}$, que no es peri-S. $\lhd$

Proseguir con el estudio para otras seudosuperficies esféricas, a priori, parece que requeriría de una extensa exposición que nos alejaría de otros resultados sobre seudosuperficies más sencillas. Por eso, en el siguiente capítulo se pasará a analizar los grafos peri en seudosuperficies distintas de las esféricas simples.

Antes, se presentará otro intento de trasladar los resultados anteriores a ámbitos más generales; el que nos lleva a considerar multigrafos, seudografos y digrafos por las múltiples aplicaciones que permiten. Esta idea puede verse reforzada por las caracterizaciones dadas para los grafos peri-B_n y por las consideraciones que se presentan en la siguiente sección.

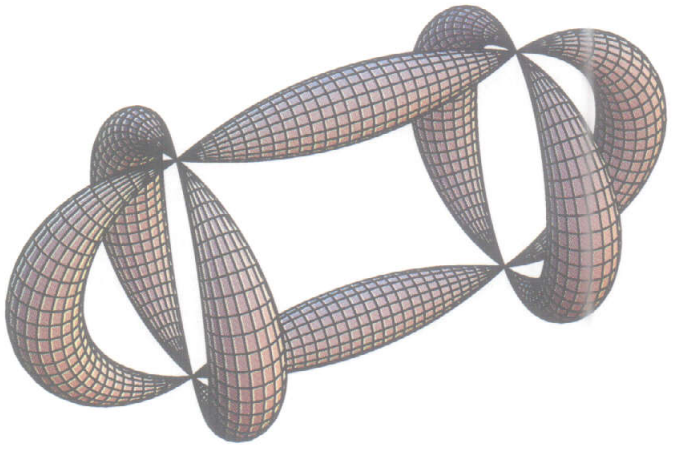

Figura 2.13: Una seudosuperficie formada por 8 esferas.

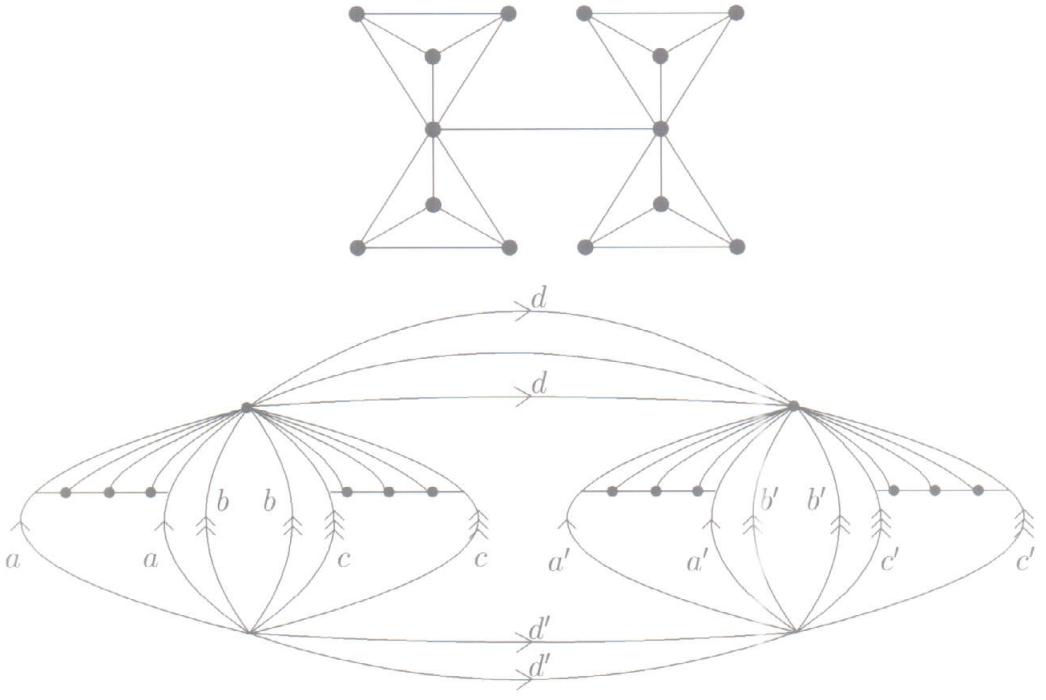

Figura 2.14: Inmersión peri no "hereditaria" para menores.

2.6 Multigrafos peri en seudosuperficies esféricas

Al modelizar problemas (en Economía u otras áreas) aparecen frecuentemente objetos íntimamente relacionados con los grafos, pero que responden a propiedades específicas:

Como en la definición de grafo, un *multigrafo* es un par (V, A), donde V es el conjunto de vértices y A es el conjunto de aristas, las cuales están formadas por dos vértices distintos entre sí. La diferencia está en que se permite que varias aristas distintas tengan los mismos vértices. Cuando entre dos vértices hay más de una arista, se dice que hay una *arista múltiple*.

Un *seudografo* es también un par (V, A), donde V es el conjunto de vértices y A es el conjunto de aristas, las cuales están formadas por dos vértices (o uno repetido). Cuando una arista solo tiene un vértice, se la llama *lazo*.

Finalmente, un *grafo dirigido* o *digrafo* es un par de conjuntos: un conjunto V de elementos que llamaremos vértices y un conjunto de pares ordenados A que llamaremos aristas dirigidas y que se suelen representar gráficamente por flechas.

Para aprovechar lo desarrollado hasta este punto, conviene definir coloquialmente el *grafo subyacente* de un grafo dirigido como el grafo que se obtiene de eliminar las flechas de las aristas. Si se acuerda que el grafo subyacente debe ser un grafo (y no un multigrafo o seudografo), se puede definir el concepto análogo para convertir multigrafos y seudografos en grafos.

La definición de grafo k-periplano puede extenderse sin modificación alguna a los grafos en los que se permiten aristas múltiples (*multigrafos*) y aristas con un solo vértice (*seudografos*). De hecho, un grafo k-periplano admite que se le añada cualquier número finito de aristas múltiples a una ya existente o una cantidad finita de lazos sin variar su carácter de k-periplano.

A pesar de que los lazos no modifican el caracter peri-representable de ningún grafo peri en una seudosuperficie esférica, los resultados que pudieran obtenerse sobre peri-representabilidad en seudosuperficies esféricas simples no son ciertos para multigrafos, como puede comprobarse en ejemplos como el siguiente:

Ejemplo 2.6.1 Si los dos L_3 de la Figura 2.13 se conectan por sendos pares de esferas unidas por un punto, se obtiene la seudosuperficie de la Figura 2.15. Resulta inmediato probar que el grafo peri-S del Ejemplo 2.5.1 sigue siendo peri en esta

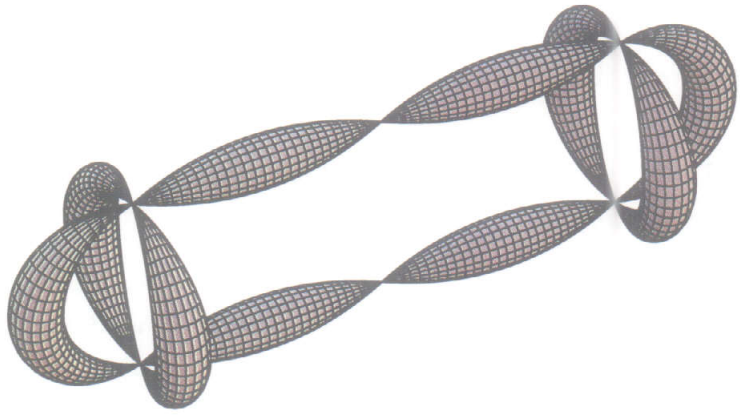

Figura 2.15: Una seudosuperfice formada por 10 esferas.

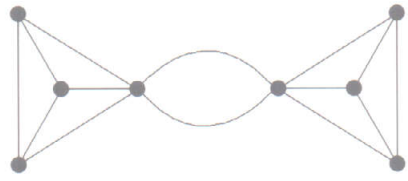

Figura 2.16: Multigrafo no peri de grafo subyacente peri.

nueva seudosuperficie y que también lo es el de la Figura 2.17, pese a que no lo es el grafo de la Figura 2.16 que se obtiene de éste al duplicar su arista puente. ◁

Sí es posible generalizar los resultados de la secciones precedentes al analizar los multigrafos peri-B_n o peri-L_n.

Es decir, sean una seudosuperficie esférica S y un grafo G peri-S. Llamaremos G^* a un multigrafo que se obtiene al duplicar una arista de G. A continuación, se trata de probar que G^* es también peri-S para ciertas S, con lo que también lo será cualquier multigrafo que tenga a G como grafo subyacente:

Proposición 2.6.2 *Para todo $n \geq 2$, el multigrafo que se obtiene al duplicar una arista de un grafo peri-B_n es también peri-B_n.*

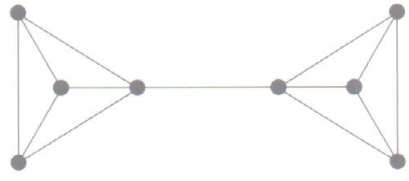

Figura 2.17: Grafo subyacente del multigrafo de la Figura 2.16.

Demostración: Utilizando la notación presentada justo antes del enunciado a probar, G es peri-$B_n \iff G$ es 2 periplano $\iff G^*$ es 2 periplano $\iff G^*$ es peri-B_n. □

Corolario 2.6.3 *Para todo $n \geq 2$, un multigrafo es peri-B_n si y solo si su grafo subyacente es 2-periplano.*

Demostración: La prueba es inmediata a partir del Teorema 2.3.4 y de la Proposición 2.6.2. □

Análogamente se procede para las seudosuperficies L_n:

Proposición 2.6.4 *Para todo $n \geq 2$, el multigrafo que se obtiene al duplicar una arista de un grafo peri-L_n es también peri-L_n.*

Demostración: Analizando por separado los casos según el número de puntos singulares de L_n que pertenecen a la inmersión peri-L_n, el resultado se obtiene inmediatamente. □

Corolario 2.6.5 *Para todo $n \geq 2$, un multigrafo es peri-L_n si y solo si su grafo subyacente es peri-L_n.*

□

Este resultado, junto con el Teorema 2.4.11, es una caracterización de los multigrafos peri-L_n.

Con esto, estudiando las consecuencias de las demostraciones de las 2 últimas proposiciones (2.6.2 y 2.6.4), se tiene además la equivalencia entre multigrafos peri y grafos subyacentes peri en las seudosuperficies que se obtienen al estrangular esferas de un L_n al modo de la Figura 2.12, por lo que se tienen caracterizados según se acaba de hacer notar.

Capítulo 3

Inmersiones peri en otras seudosuperficies

Además del toro estrangulado (B_1, de [14, 15, 16, 17]) y el biplátano [18, 19], existen seudosuperficies en las que a los grafos que admiten inmersiones en ellas se han dedicado artículos y trabajos como los de [23] y [57], entre otros.

Hasta ahora, las seudosuperficies tratadas en esta memoria (salvo B_1) tenían en común que se podían describir como esferas pegadas por una cantidad finita de puntos. Además, en cada esfera se situaban 2 y solo 2 de esos puntos singulares. Según esto, resulta lógico pensar en generalizar los resultados obtenidos para otras seudosuperficies formadas, como las anteriores, por esferas.

Pero también son dignas de estudio las seudosuperficies que no se puedan obtener de esa forma. Así, se considerarán en este capítulo otro tipo de seudosuperficies bastante más generales: unión disjunta de superficies (o superficies no conexas), seudosuperficies obtenidas mediante la unión por un punto de dos superficies, o por la aplicación sucesiva de dicha operación (seudosuperficies arborescentes como las de [57]), seudosuperficies en las que puede haber más de un punto singular por cada superficie que la forma (como las J_n estudiadas en [23]), etcétera.

Contrariamente a lo que pueda intuirse, los grafos peri en estas nuevas seudosuperficies presentan un comportamiento sustancialmente distinto del que podía observarse en las seudosuperficies anteriores. La exposición de resultados y sus pruebas suele resultar en estos casos más complicada que las de capítulos precedentes, según se verá.

3.1 Seudosuperficies formadas por tres esferas

Los grafos peri en la unión por un punto de una cantidad finita de esferas son los periplanos. Además, según se verá, si se pegan a una esfera otras dos por 1 punto distinto cada una, los grafos peri en la "cadena" que forman las 3 esferas siguen siendo los periplanos.

Consideremos ahora seudosuperficies que se obtienen al identificar pares de puntos de distintas esferas, permitiendo que se puedan unir distintas esferas, entre sí, por más de 2 puntos. Evidentemente, B_n y L_n son seudosuperficies de este tipo, pero no son las únicas.

En esta sección, se tratará con tres seudosuperficies (a las que llamaremos S_1, S_2 y S_3) formadas por solo 3 esferas. Para estudiar los grafos peri en ellas, utilizaremos los siguientes resultados:

Lema 3.1.1 *Sea $G = G_1 \cup G_2$ con G_1 y G_2 2-periplanos. Entonces G es 3-periplano.*

Demostración: Sea $i \in \{1, 2\}$. Se puede dar una inmersión de G_i en que todos los vértices estén en la cara exterior y en otra, lo que induce otra de G con todos los vértices, a lo sumo, en 3 caras. □

Lema 3.1.2 *La unión por un vértice de dos grafos 2-periplanos es 3-periplano.*

Demostración: Eligiendo inmersiones planas en que los vértices a identificar están en la cara exterior, se deduce el resultado. □

De estos resultados y de los obtenidos en el capítulo anterior sobre grafos peri en L_3, se puede deducir:

Lema 3.1.3 *Si G es peri-L_3, entonces G es 3-periplano.*

Demostración: Según se deduce del Teorema 2.4.9 de caracterización de los grafos peri-L_3, G es plano y, como mucho, tiene 2 componentes conexas no periplanas. Veamos que es 3-periplano en todos los casos posibles:

- Si los 2 puntos singulares de L_3 están en G, todos los vértices están en una célula y G menos la arista que puede estar en otra célula es periesférico, luego periplano. Por tanto, G es peri-B_2 (2-periplano) y, por ende, 3-periplano.

- Si solo uno de los puntos singulares de L_3 (supongamos que es P_1) está en G y G no es periplano, el otro punto singular (P_2) está en la cara en la que todos los vértices de G. Entonces en a lo más dos células hay bloques de G no periplanos, pero éstos son periplanos salvo, a lo sumo, por un vértice en P_1. En la otra célula solo puede haber otro bloque periplano. Por tanto, G es 3-periplano, según el Lema 3.1.2.

- Si ninguno de los puntos singulares de L_3 está en G, solo 2 de las células pueden tener componentes conexas no periplanas (porque solo hay 3 células) y tienen que ser 2-periplanas (porque solo hay 2 puntos singulares en cada célula). Luego, por el Lema 3.1.1, se tiene la tesis. □

Aún necesitaremos una propiedad más; ésta se refiere a grafos periplanos:

Lema 3.1.4 *Sea $G = (V, A)$ periplano. Si $x, y, z \in V$, entonces $(V, A \cup \{xy, xz\})$ es 3-periplano.*

Demostración: Como G es periplano, existe una inmersión en que x, y y z están en la misma cara. Si se añade la arista xy, resulta una inmersión 2-periplana en la que x pertenece a 2 caras entre las que se encuentran todos los vértices. Por eso, la inclusión de la arista xz es posible sin modificar la inmersión y manteniendo todos los vértices en 3 caras. □

A continuación se buscan caracterizaciones para los grafos que admiten una inmersión peri en seudosuperficies sencillas, formadas por solo 3 esferas.

Ya se han analizado dos seudosuperficies formadas por 3 células esféricas: B_3 y L_3; éstas tenían en común el número de puntos singulares por cada célula (2 en cada una). En el primer párrafo de esta sección también se han caracterizado, trivialmente, los grafos peri en la unión de 3 esferas por un punto y en una "cadena" de 3 esferas.

Sea S_1 la seudosuperficie de la Figura 3.1. S_1 está formada por 3 esferas pegadas por 3 puntos singulares, a los que llamaremos P_1, P_2 y P_3, de modo que de las 3 células, llamaremos *célula distinguida* a la que tiene 3 puntos singulares y *células no*

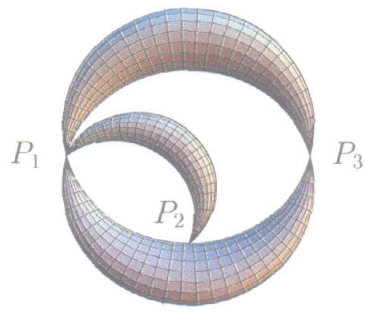

Figura 3.1: Seudosuperficie S_1 con 3 esferas y 3 puntos singulares.

distinguidas a las que tienen 2, que serán, respectivamente, P_1 y P_2 para una y P_1 y P_3 para la otra.

Teorema 3.1.5 *G es peri-S_1 si y solo si G es 3-periplano.*

Demostración:

$\boxed{\Leftarrow}$ G admite una inmersión en S^2 con todos los vértices en 3 caras. Un procedimiento para obtener una inmersión peri-S_1 de G es el siguiente:

Se elige un punto cualquiera del interior de cada cara de la esfera. A los puntos elegidos se les llama P_1, P_2 y P_3. Se pega una esfera a la anterior por P_1 y P_2 y otra por P_1 y P_3.

$\boxed{\Rightarrow}$ Se parte de una inmersión peri-S_1 de G en la que todos sus vértices están en la cara C. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que G no tiene componentes ni bloques periplanos. Si se tiene en cuenta que P_2 y P_3 juegan el mismo papel, se pueden presentar varias situaciones mutuamente excluyentes:

1. $P_1, P_2, P_3 \in G$. C está contenida en una célula, luego G es periesférico salvo, a lo sumo, por 2 aristas que pueden estar total o parcialmente en otras células. De hecho, para que hubiera 2 aristas, tendrían que ser incidentes en P_1. Pero un grafo periplano al que se le añaden hasta 2 aristas incidentes sigue siendo 3-periplano, de acuerdo con el Lema 3.1.4.

2. $P_1, P_2 \in G$, $P_3 \notin G$. Contrayendo una arista parcialmente, si fuera preciso, puede considerarse que P_1 es un vértice de G. Si todos los vértices de G están en la esfera no distinguida de P_1 y P_2, el grafo es periplano salvo por la arista

P_1P_2, luego G es 2-periplano. Por eso, se puede suponer que, salvo por una arista, G no utiliza esa célula no distinguida (la de P_2). A la otra célula no distinguida (la de P_3) la llamaremos ahora S. Según P_3 pertenezca o no a C, distinguimos:

(a) Si $P_3 \notin C$, se puede eliminar S obteniendo una inmersión peri-B_2 de G. Por esto, G es 2-periplano, luego también 3-periplano.

(b) Si $P_3 \in C$ y el subgrafo de G representado en S es periplano, G es peri-B_2 (luego 2-periplano) salvo por dicho subgrafo que está formado solo por el vértice en P_1 (el resto necesariamente serían componentes periplanas o bloques periplanos). Si el subgrafo de G representado en S no es periplano, G resulta ser la unión por un punto de un grafo peri-B_2 (por lo que es 2-periplano) con otro también 2-periplano. Así, el Lema 3.1.2 implica que G es 3-periplano.

3. $P_1 \notin G$, $P_2, P_3 \in G$. Conviene distinguir 2 subcasos:

   (a) Si P_1 no estuviera en C, C estaría contenida en la célula distinguida, luego G sería periesférico y, por tanto, periplano.

   (b) Si P_1 está en C, se puede dividir P_1 en 3 puntos distintos (topológicamente hablando, se efectúa una "cirugía" en el sentido de [34]) obteniendo una inmersión de G en S^2 con todos los vértices en 3 caras (una correspondiente a cada célula de S_1).

4. $P_1 \in G$, $P_2, P_3 \notin G$. También distinguimos entre 2 posibilidades:

   (a) Si P_2 y P_3 están en la misma cara, existe un arco entre ellos dentro de dicha cara y de la célula distinguida. Contrayendo dicho arco, se obtiene una inmersión peri-L_3 de G, luego G es 3-periplano por el Lema 3.1.3.

   (b) Si P_2 y P_3 no están en la misma cara, al menos uno de ellos no está en C. La célula no distinguida en que está tal punto singular puede ser eliminada sin que ello afecte a la inmersión peri de G. Así, se obtiene una inmersión peri-B_2 de G, por lo que es 2-periplano y, por tanto, 3-periplano.

5. $P_1, P_2 \notin G$, $P_3 \in G$. Se considera que G_1 es el subgrafo de G que está representado en la célula no distinguida que tiene a P_1 y a P_3 y que G_2 es el subgrafo de G que está en las otras 2 células. Se puede suponer que P_3 es un vértice de G, por lo que G_1 y G_2 comparten dicho vértice.

Como se está suponiendo que G_1 no es periplano, es 2-periplano salvo por P_3 y todos los vértices de G_2 (incluido P_3) están en la misma cara de una inmersión peri-B_2, luego 2-periplana. Así, G es 3-periplano por el Lema 3.1.2.

6. $P_1, P_2, P_3 \notin G$. Llamamos $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ con G_1 la unión de las componentes conexas que están en una de las células no distinguidas y G_2 las de la otra célula no distinguida (de donde G_3 está representada en la célula distinguida). Como las células no distinguidas solo tienen 2 puntos singulares, G_1 y G_2 son necesariamente 2-periplanos:

   (a) Si G_i es no vacío para $i = 1$ o para $i = 2$, eliminando la célula en que está G_i, se hace evidente que el resto del grafo tiene que ser peri-B_2. Luego G es la unión disjunta de 2 grafos 2-periplanos, por lo que es 3-periplano por el Lema 3.1.1.

   (b) Si, por el contrario, G_1 y G_2 son vacíos, hay que demostrar que G_3 es 3-periplano. Pero G_3 es un grafo que admite una inmersión plana con todos los vértices en las caras de P_1, P_2 y P_3 contenidas en C y en la célula distinguida. □

De este Teorema 3.1.5, pueden extraerse, al menos, 2 consecuencias inmediatas:

Corolario 3.1.6 *Los grafos que tienen inmersión peri-S_1 admiten caracterización por menores prohibidos.*

Demostración: Una inmersión 3-periplana de un grafo induce una inmersión 3-periplana de cualquier menor suyo. Por eso, es posible caracterizar los grafos 3-periplanos (que son los peri-S_1) por menores prohibidos. □

Corolario 3.1.7 *El conjunto de menores topológicos prohibidos para las inmersiones peri-S_1 es finito.*

Demostración: Como en otras ocasiones anteriores, es suficiente recordar que de una caracterización por menores prohibidos se puede obtener una correspondiente caracterización por menores topológicos prohibidos que también es finita. □

Hay otras seudosuperficies formadas por 3 esferas y de las que se pueden estudiar los grafos peri:

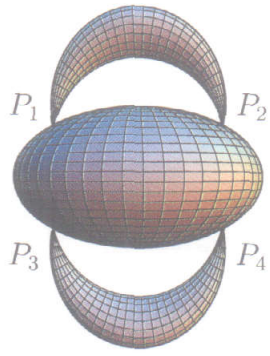

Figura 3.2: Seudosuperficie S_2 con 3 esferas y 4 puntos singulares.

Sea S_2 la seudosuperficie de la Figura 3.2. S_2 está formada por 3 esferas pegadas por 4 puntos singulares, a los que llamaremos P_1, P_2, P_3 y P_4, de modo que de las 3 células, llamaremos *célula distinguida* a la que tiene 4 puntos singulares y *células no distinguidas* a las que tienen 2, que serán, respectivamente, P_1 y P_2 para una y P_3 y P_4 para la otra.

Proposición 3.1.8 *Si G es 3-periplano, entonces es peri-S_2.*

Demostración: G admite una inmersión en S^2 con todos los vértices en 3 caras. Para dar una inmersión peri-S_2 solo hay que proceder según se describe a continuación:

Se eligen 2 puntos del interior de una de las caras y se llaman P_1 y P_3. A continuación, se elige un punto del interior de cada una de las otras 2 caras y se les llama P_2 y P_4, respectivamente. Se pega una esfera a la anterior por P_1 y P_2 y otra por P_3 y P_4. □

Obsérvese que el recíproco del enunciado anterior no es cierto, al existir grafos no planos que admiten inmersiones peri en S_2, tal como se muestra en el siguiente caso particular:

Ejemplo 3.1.9 *$K_{3,3}$ no es 3-periplano por no ser plano.* Sin embargo, en la Figura 3.3 se representa una inmersión peri-S_2 de $K_{3,3}$. En ella, las identificaciones deben realizarse, como es habitual, en el sentido de las flechas. ◁

Restricciones sobre el tipo de inmersión en S_2 nos posibilitan acceder a resultados parciales que se deducirán posteriormente. Pero no se podrá prescindir de dichas restricciones ni sustituirlas por otras hipótesis acerca de la planaridad de G. El

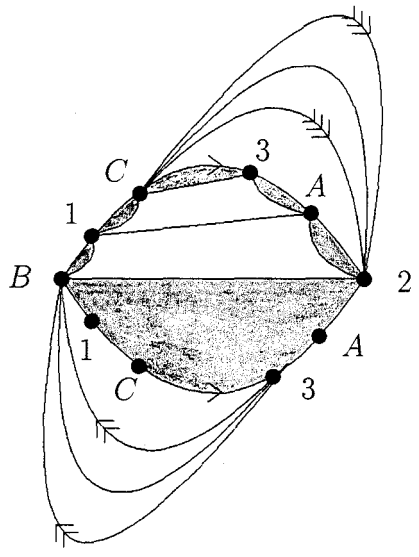

Figura 3.3: Inmersión peri de $K_{3,3}$.

motivo de esto es que hay grafos planos que admiten inmersiones peri en S_2 y que no son 3-periplanos. En particular, considérese el siguiente:

Ejemplo 3.1.10 Todas las inmersiones planas del grafo de la Figura 3.4 son equivalentes. Así, es inmediato comprobar que dicho grafo no es 3-periplano, pues ninguna combinación de 3 de sus caras cubren todos los vértices. Sin embargo, en la Figura 3.5 se representa una inmersión peri-S_2 de dicho grafo. $\triangleleft$

A la vista de la inmersión dada en este Ejemplo 3.1.10, enunciamos lo siguiente:

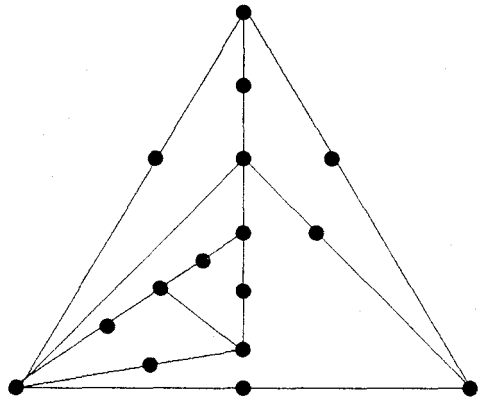

Figura 3.4: Grafo peri-S_2 no 3-periplano.

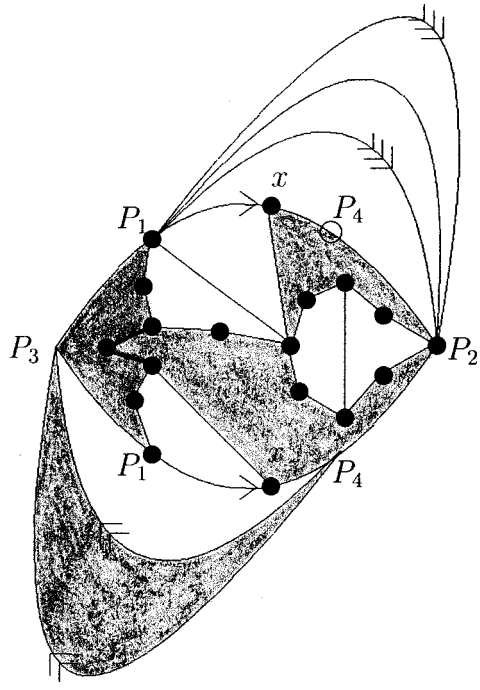

Figura 3.5: Inmersión peri de un grafo no 3-periplano.

Proposición 3.1.11 *En cada inmersión peri-S_2 de un grafo no 3-periplano, los 2 puntos singulares de alguna de las células no distinguidas de S_2 pertenecen al grafo.*

Demostración: Sea G peri-S_2 y pongamos que G admite una inmersión peri en S_2 tal que ninguna célula no distinguida de S_2 tiene 2 puntos singulares que pertenezcan simultáneamente a G y en la que todos sus vértices están en la cara que llamaremos C. Analizando los casos posibles veremos que, bajo estas hipótesis, G es 3-periplano.

1. Cada célula no distinguida tiene un punto singular en G y otro fuera de G. Supongamos, por ejemplo, que $P_1 \notin G$, $P_2 \in G$, $P_3 \notin G$ y $P_4 \in G$. Hay 2 posibilidades:

   (a) Si P_1 y P_3 están en la misma cara C de G, existe un arco de P_1 a P_3 en dicha cara y dentro de la célula distinguida. Contrayendo dicho arco, se tiene una inmersión peri-S_1 de G, luego G es 3-periplano por el Teorema 3.1.5.

   (b) Si P_1 no está en C (el razonamiento sería análogo para P_3) en la célula no distinguida en que está P_1 no puede haber nada de G fuera de P_1; eliminándola, se tiene una inmersión peri-B_2 de G, luego 2-periplana.

2. Una célula no distinguida no tiene ninguno de sus 2 puntos singulares en G y la otra tiene un punto singular en G y el otro fuera de G. Pongamos que $P_1, P_2, P_3 \notin G$, $P_4 \in G$. Veamos que es similar al caso anterior:

   Se puede suponer que P_1 está en C (o lo está P_2 o no hay nada en la célula no distinguida que tiene a P_1 y P_2 por puntos singulares, que no afectaría a la peri-representabilidad y se podría suprimir). Se presentan 2 posibilidades:

   (a) Si P_3 está en C, existe un arco de P_1 a P_3 (o, si no, de P_2 a P_3), dentro de C y de la célula distinguida. Contrayendo dicho arco, se obtiene una inmersión peri-S_1 de G luego G es 3-periplano.

   (b) Si P_3 no está en C, en la célula no distinguida que tiene por puntos singulares P_3 y P_4 no puede haber nada de G fuera de P_4. Eliminando dicha célula, se obtiene una inmersión peri-B_2 de G, luego sería 2-periplano.

3. Ningún punto singular está en G; esto es, $P_i \notin G$ con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces, $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ con G_1 inmerso en la célula distinguida y G_2 y G_3 (cada G_i puede ser vacío o no serlo) en las otras 2 células. Distinguimos 2 subcasos más:

   (a) Si G_2 ó G_3 no son periplanos, G es la unión disjunta de un grafo peri-B_2 y otro que también es 2-periplano (el G_2 o, en su caso, el G_3).

   (b) En caso contrario, G es la unión disjunta de componentes periplanas con G_1. En la célula distinguida no se pueden comunicar 4 caras distintas con solo 4 puntos singulares que pertenecen a 2 esferas distintas. Por tanto, un punto singular de una esfera no distinguida comparte cara con uno de la otra, luego P_1, P_2, P_3 y P_4 están en 3 caras que contienen todos los vértices de G_1. Luego G es 3-periplano.

Con esto, G es 3-periplano en todos los casos posibles. □

Se puede decir algo más de los grafos peri-S_2, pero se necesita de un lema previo:

Lema 3.1.12 *Sea G 2-periplano y sean x e y 2 vértices suyos. Si $G + xy$ es plano, entonces G es 4-periplano.*

Demostración: Si x e y son adyacentes en G, no hay nada que demostrar. Si no lo son pero pertenecen a una misma cara en una inmersión 2-periplana de G, es fácil

observar que $G + xy$ es 3-periplano. Sin embargo, puede que x e y no compartan cara en ninguna inmersión 2-periplana de G.

En este caso, la modificación de la inmersión de G (para dar una inmersión plana de $G + xy$) puede dar lugar a que los vértices estén en las correspondientes a las 2 caras anteriores y en una nueva cara, en la que están x e y. Al añadir la arista xy, esta última cara puede que se divida en 2, con lo que, en cualquier caso, $G + xy$ es 4-periplano. □

Con esto se puede acotar, en cierto modo, la complejidad de los grafos peri-S_2.

Proposición 3.1.13 *Sea G plano y peri-S_2. Entonces G es 4-periplano.*

Demostración: Se acaban de describir (antes del Ejemplo 3.1.10) las inmersiones de G de las que se puede deducir la 3-periplanaridad. Solo queda estudiar un caso: una célula no distinguida de S_2 tiene sus 2 puntos singulares en G. Por ejemplo, $P_i \in G$ con $i \in \{1, 2\}$. Salvo, eventualmente, por una arista, se tiene una inmersión peri de G en S^2 o en B_2. En ambos casos, G menos una arista es 2-periplano y, al añadir esa arista, G es 4-periplano por el Lema 3.1.12, pues G es plano. □

De las demostraciones anteriores se puede extraer la siguiente consecuencia inmediata, en la que no se trata exclusivamente con grafos planos:

Teorema 3.1.14 *Sea G un grafo. Son equivalentes:*

1. *G es peri-S_2.*
2. *G es 3-periplano o G menos una arista es 2-periplano.*

Demostración:

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Sea G peri-S_2. Si G es 3-periplano, no hay nada que probar. Si no lo es, por la Proposición 3.1.11, una inmersión peri-S_2 de G tiene que pasar por los 2 puntos singulares de alguna de las células no distinguidas. Pero en esa célula no distinguida no puede haber vértices fuera de sus puntos singulares, por lo que G menos la arista que pasa por ambos puntos singulares es peri-B_2, luego 2-periplano.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Se deduce inmediatamente de las pruebas anteriores, en las que se describen inmersiones peri-S_2 de esos tipos de grafos. □

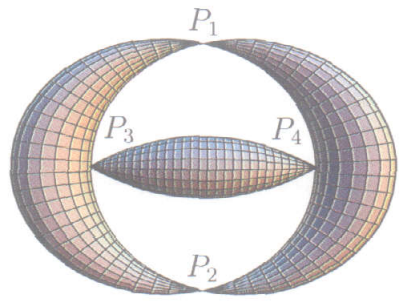

Figura 3.6: Seudosuperficie S_3 con 3 esferas y 4 puntos singulares.

Ya se había visto que no todas las seudosuperficies formadas por 3 esferas se comportan de la misma forma con respecto a los grafos peri (recuérdense B_3 y L_3). A continuación se verá que aún quedan casos distintos de los estudiados hasta ahora:

Sea S_3 la seudosuperficie de la Figura 3.6. S_3 está formada por 3 esferas pegadas por 4 puntos singulares, a los que llamaremos P_1, P_2, P_3 y P_4, de modo que de las 3 células, llamaremos *célula distinguida* a la que solo tiene 2 puntos singulares, que serán P_3 y P_4 y *células no distinguidas* a las que tienen 3 que serán, P_1, P_2 y, además, P_3 ó P_4, respectivamente.

Proposición 3.1.15 *Todo grafo 3-periplano es peri-S_3.*

Demostración: Considérese un grafo que admite una inmersión en S^2 con todos los vértices en 3 caras. Se puede elegir un punto del interior de cada una de las caras y llamarlos P_1, P_2 y P_3. Se obtiene una inmersión peri-S_3 si se pega una esfera a la anterior por P_1 y P_2 y a la seudosuperficie resultante se le pega otra esfera por P_3 y un punto no singular cualquiera de la última esfera pegada. □

Nótese que tampoco es cierto el recíproco del resultado anterior ni siquiera para grafos planos, tal como se observa en el siguiente:

Ejemplo 3.1.16 El grafo de la Figura 3.7 es peri-S_3 a pesar de ser plano y no 3-periplano, dado que una inmersión peri-S_3 se obtiene situando los 2 vértices de valencia 5 en los puntos P_1 y P_2 como en la Figura 3.8. No obstante, ninguna combinación de 3 de sus caras cubren todos los vértices en la inmersión plana del grafo, que es única por tratarse de la subdivisión de un grafo 3-conexo (la demostración de este hecho puede consultarse en [83]). ◁

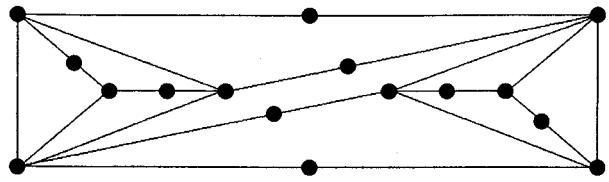

Figura 3.7: Grafo plano y peri-S_3 pero no 3-periplano.

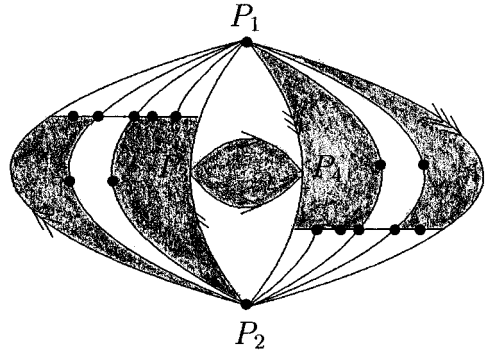

Figura 3.8: Inmersión peri de un grafo plano y no 3-periplano.

De un modo semejante a como se razonaba en S_2, los grafos peri-S_3 que admiten ciertas inmersiones peri sí son los 3-periplanos. Para demostrar una tal caracterización, se necesita de un resultado previo, que enunciamos en términos de la notación clásica que se recuerda a continuación:

Dados el grafo $G = (V, A)$ y el conjunto $W \subseteq V$, G se dice *W-periplano* cuando admite una inmersión en el plano con todos los vértices de W en una misma cara (que se puede suponer que es la exterior).

Lema 3.1.17 *Sea $G = (V, A)$ un grafo $V \setminus \{u\}$-periplano ($u \in V$). Para todo $v \in V \setminus \{u\}$, G admite una inmersión 2-periplana en la que u y v están en la misma cara.*

Demostración: Se puede suponer que G es un polígono (con vértices los de $V \setminus \{u\}$) al que se le añaden algunas diagonales y algunas aristas incidentes en un punto u del interior del polígono.

Si u no comparte cara con v, u está en una cara en que una de las aristas, d, es una diagonal del polígono que lo divide en dos partes: un polígono G_1 en cuyo interior está u y otro G_2 en que está v como vértice. Se puede identificar convenientemente la arista d de ambos polígonos haciendo que los vértices de G_2 estén en el interior de G_1. De este modo, se obtiene una inmersión 2-periplana de G con u y v en una misma cara interior. □

Con esto, es posible enunciar:

Proposición 3.1.18 *En cada inmersión peri-S_3 de un grafo no 3-periplano, ninguno de los puntos singulares de la célula distinguida de S_3 pertenecen a G pero los otros 2 puntos singulares sí pertenecen a G.*

Demostración: Tendremos en cuenta que P_1 desempeña el mismo papel que P_2 y P_3 el mismo que P_4. Además, los bloques periplanos de G no afectan al contenido de la prueba (no afectan a la 3-periplanaridad y se podrían reubicar, en cualquier caso), por lo que se prescinde de ellos en lo que sigue.

Considérese una inmersión peri-S_3 de G en que todos los vértices están en la cara C. Las siguientes posibilidades solo se dan para grafos 3-periplanos, según se verá:

1. $P_3 \in G$, $P_4 \notin G$ (o al revés). Si $P_4 \notin C$, se puede eliminar la célula distinguida, con lo que G sería peri-B_2 y, por consiguiente, 2-periplano. Si, por el contrario, $P_4 \in C$, G es 2-periplano salvo, posiblemente, por el vértice que pertenece a la célula distinguida. Así, G es 3-periplano.

   En adelante no hay que estudiar casos en que solo un punto singular de la célula distinguida pertenece a G. Por eso, P_3 y P_4 pertenecerán o no a G simultáneamente.

2. $P_1, P_2, P_3, P_4 \in G$. Se tiene una inmersión peri-esférica de G salvo por una arista que pasa por P_4 y, eventualmente, otra (entre P_1 y P_2) incidente con aquélla. Pero un grafo peri-esférico sigue siendo 3-periplano si se le añaden 2 aristas incidentes en un mismo vértice, según el Lema 3.1.4.

3. $P_1, P_2, P_3, P_4 \notin G$. $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ con G_1 en la célula distinguida y G_2 y G_3, respectivamente, en las no distinguidas.

   (a) Si G_1 no es vacío, no es periplano y G_2 y G_3 no pueden ser a la vez no periplanos, luego uno es vacío y existe un arco dentro de C y de una célula no distinguida entre un punto singular de la célula distinguida (P_3 ó P_4) y otro punto singular fuera de dicha célula (P_1 ó P_2). Contrayendo dicho arco se obtiene una inmersión peri-S_1 de G, luego G es 3-periplano.

   (b) Si G_1 es vacío, P_3 y P_4 son de C (salvo en casos en los que no hay nada que probar). P_1 ó P_2 tienen que ser de C, ya que en caso contrario se podrían separar las células no distinguidas y tendríamos una inmersión

periplana de G. Por eso, puede procederse como en el subcaso anterior y obtener una inmersión peri-S_1 de G, que tiene que ser 3-periplano por el Teorema 3.1.5.

4. $P_1, P_2 \notin G$, $P_3, P_4 \in G$. Puede suponerse que $P_3, P_4 \in V(G)$. No puede haber subgrafos no periplanos en ambas esferas no distinguidas; luego en una de ellas, por ejemplo la que contiene a P_4, el subgrafo se reduce a P_4 y en la otra se representa un subgrafo 2-periplano que, al unirle la arista P_3P_4 seguirá siendo 2-periplano (y, en consecuencia, 3-periplano).

5. $P_1, P_3, P_4 \in G$, $P_2 \notin G$ (o $P_2, P_3, P_4 \in G$, $P_1 \notin G$). En la célula distinguida no hay vértices fuera de P_3 y P_4; en caso contrario, una cirugía sobre P_2 produce una inmersión peri-B_3 de G, luego G es 2-periplano por el Teorema 2.3.4 y, por tanto, es 3-periplano.

   Es más, el subgrafo de G representado en una de las células no distinguidas (pongamos que es la de P_4) es periplano, mientras que el representado en la otra célula no distinguida (la de P_3) es 2-periplano. Contrayendo parcialmente aristas de G (si fuera preciso), puede suponerse, además, que P_1 y P_3 son vértices de G. El grafo H representado en la célula no distinguida de P_3 es, según lo anterior, $V(H) \setminus \{P_1\}$-periplano. Aplicando el Lema 3.1.17, se puede dar una inmersión 2-periplana del subgrafo H de G representado en la célula no distinguida de P_3 con P_1 y P_3 en una misma cara. Esa cara puede utilizarse para representar el resto de G y dar una inmersión plana de G con todos los vértices en 3 caras.

6. $P_1 \in G$, $P_2, P_3, P_4 \notin G$ (o $P_2 \in G$, $P_1, P_3, P_4 \notin G$). Analizamos por separado 2 casos:

   (a) Si en la célula distinguida hay vértices, forman un subgrafo 2-periplano. Así, G es la unión disjunta de dicha componente con un grafo peri-B_2. Por el Lema 3.1.1, G es 3-periplano.

   (b) Si en la célula distinguida no hay vértices, se puede suponer que $P_3, P_4 \in C$ (en caso contrario, se podría suprimir la célula distinguida y se tendría una inmersión peri-B_2 de G). En este punto conviene estudiar por separado 2 posibilidades:

      i. Si $P_2 \notin C$, se puede "duplicar" P_2 y obtener una inmersión peri-B_3 de G.

ii. Si $P_2 \in C$, necesariamente hay un arco dentro de C y de una célula no distinguida entre P_2 y P_3 (o P_4). Contrayendo dicho arco, se prueba que G es peri-S_1, luego 3-periplano.

En conclusión, G es 3-periplano en todos los casos posibles de inmersión peri-S_3 salvo cuando $P_1, P_2 \in G$, $P_3, P_4 \notin G$. En este único caso, no tenemos garantía alguna de la 3-periplanaridad de G, lo cual confirma el enunciado. □

Los Ejemplos 3.1.10 y 3.1.16 dados anteriormente resultan adecuados para renunciar a establecer relación de inclusión alguna entre el conjunto de los grafos peri-S_2 y el de los peri-S_3. Esto nos permite dar el siguiente enunciado:

Proposición 3.1.19 *No todo grafo peri-S_2 es peri-S_3 y recíprocamente.*

Demostración: Primero veamos que el grafo del Ejemplo 3.1.10, que es peri-S_2, no es peri-S_3:

Al tratarse de un grafo no 3-periplano, según la Proposición 3.1.18, una inmersión peri-S_3 suya tiene que pasar por P_1 y P_2 y no por P_3 ni por P_4.

Si en una de las células no distinguidas no hubiera más que una arista, el resto del grafo tendría que ser periplano y eso no ocurre en este caso para ninguna arista del grafo.

En caso contrario, puede considerarse que P_1 y P_2 son un par de corte del grafo, pero ninguno de los 11 pares de corte existentes determinan 2 componentes 2-conexas periplanas.

Veamos ahora un grafo peri-S_3, el del Ejemplo 3.1.16, que no es peri-S_2:

También se trata de un grafo no 3-periplano. En virtud del Teorema 3.1.14 hay que comprobar si el grafo que nos ocupa puede ser 2-periplano al suprimir una arista. En este caso se observa fácilmente que no lo es. □

Aunque no se han caracterizado completamente los grafos peri-S_i con $i \in \{1, 2, 3\}$, los resultados obtenidos son suficientes para inferir propiedades interesantes de los grafos peri en las seudosuperficies que se van a estudiar en la siguiente sección. Éstas serán útiles para caracterizar los grafos peri en S_3, según se verá.

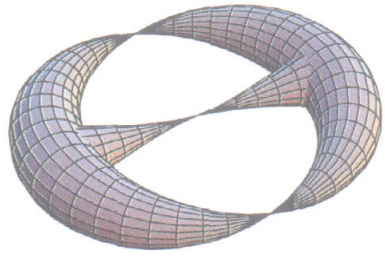

Figura 3.9: Seudosuperficie J_3 con 2 esferas y 3 puntos singulares.

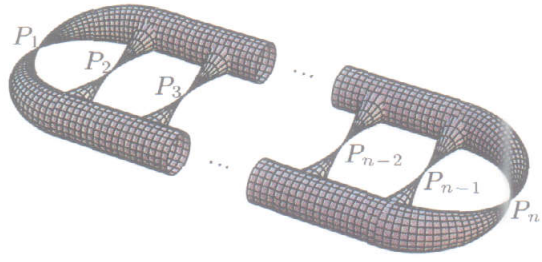

Figura 3.10: Seudosuperficie J_n con 2 esferas y n puntos singulares.

3.2 Dos esferas pegadas por más de dos puntos

Todas las seudosuperficies estudiadas hasta este momento se pueden obtener identificando puntos de esferas, pero el número de puntos singulares siempre resultaba menor o igual que el número de células. A continuación estudiaremos los grafos peri en las seudosuperficies más simples que, con más de una célula, tienen más puntos singulares que células.

Para todo $n \geq 3$, se define J_n como la seudosuperficie resultante de identificar n puntos distintos de una esfera con otros n puntos de otra esfera. Según esta definición, J_3 es la seudosuperficie de la Figura 3.9. El caso general se representa en la Figura 3.10.

Nótese que, en esta línea, se podría llamar J_2 a B_2 y J_1 a la unión de 2 esferas por un punto.

Estas seudosuperficies ya han sido estudiadas con relación a las inmersiones de grafos. $J_2 = B_2$ tiene una lista infinita de grafos de Kuratowski [76] y en 1999 se demostró que también es así para J_n con $n \geq 3$ [22, 23],[1] seudosuperficies a las que se llamó "*medusas*". Representamos en la Figura 3.11 el ejemplo dado en [76] de familia infinita de grafos minimales (en el sentido de menores) que no admiten

[1] De hecho, el caso que más se tardó en probar resultó ser el de J_3, al que ahora nos dedicaremos.

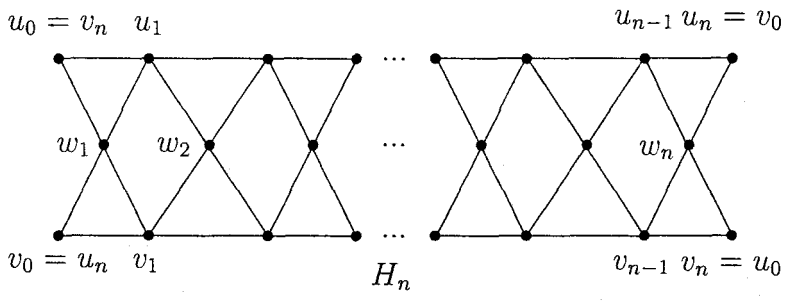

Figura 3.11: Familia infinita de grafos sin inmersión en B_2.

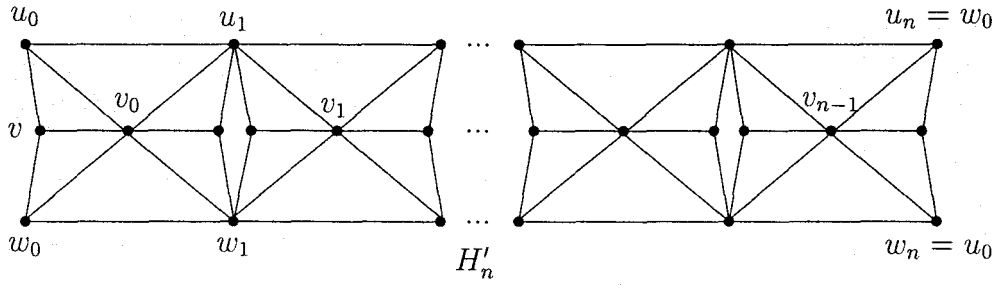

Figura 3.12: Familia infinita de grafos sin inmersión en J_3.

inmersión en J_2. En la Figura 3.12 se reproduce la familia dada en [22, 23] para el caso particular de J_3.

Volviendo a las inmersiones peri y valiéndose de que los 3 puntos singulares de J_3 desempeñan el mismo papel, el siguiente resultado relaciona los grafos peri en J_3 con los peri en la seudosuperficie S_3 de la sección precedente.

Teorema 3.2.1 *G es peri-J_3 si y solo si G es peri-S_3.*

Demostración:

$[\Leftarrow]$ Considérese una inmersión peri-S_3 de G. Si existe algún punto singular de la célula distinguida de S_3 que no pertenezca a G, se puede *desingularizar* por dicho punto; es decir, se puede sustituir el punto singular y sus 2 entornos homeomorfos a discos abiertos por una esfera a la que se le suprimen 2 discos abiertos y disjuntos. Esto es lo que se entiende por *introducir un 2-conector*, tal y como se hace en [34, 69]. De este modo, se obtiene una inmersión peri-J_3 de G. Pero si ambos puntos singulares pertenecen a G, tampoco hay nada que impida repetir un proceso de desingularización similar al anterior.

$[\Rightarrow]$ Si hay una inmersión peri-J_3 de G en la que algún punto singular no pertenece

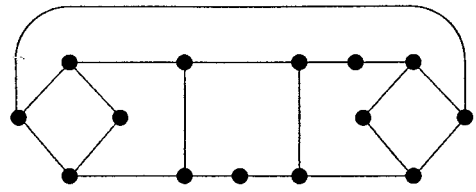

Figura 3.13: Grafo no 3-periplano pero sí peri-J_3.

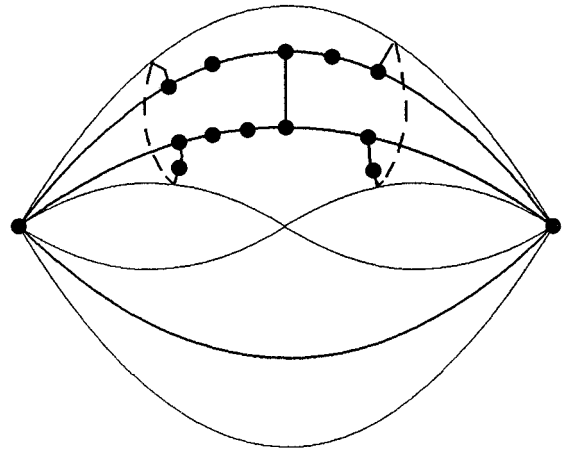

Figura 3.14: Una inmersión peri-J_3.

a G, se puede utilizar dicho punto para "intercalar" una esfera entre las 2 células existentes y, en consecuencia, dar una inmersión peri-S_3 de G.

En caso contrario, los 3 puntos singulares de J_3 pertenecen a G y G menos las aristas de un K_3 es periplano. Pero todo grafo periplano admite las aristas de un K_3 (en la cara común a todos sus vértices) sin dejar de ser 3-periplano y todo grafo 3-periplano es peri-S_3 por la Proposición 3.1.15. □

A pesar de lo conseguido, este resultado queda bastante lejos de la caracterización de los grafos peri-J_3 por menores (o por menores topológicos) prohibidos. Para facilitar dicha caracterización en futuros trabajos, se presentan un ejemplo de inmersión peri-J_3 (de un grafo peri-S_3 no peri-S_2, como lo era el del Ejemplo 3.1.16) y otros resultados relacionados.

Ejemplo 3.2.2 El grafo de la Figura 3.13 no es 3-periplano ni peri-S_2, pero sí es peri-J_3, según se deduce de la inmersión de la Figura 3.14. En particular, también es peri-S_3. ◁

El resultado anterior caracteriza los grafos peri-J_3 en tanto en cuanto se consiga una caracterización de los grafos peri-S_3. Se pretende un resultado más útil, por lo que se hace uso del siguiente resultado sobre las inmersiones en J_3, que resulta ser generalizable a inmersiones en J_n.

Teorema 3.2.3 *[22, 23] Sea $G = (V, A)$ un grafo con al menos tres vértices. G admite una inmersión en J_3 si y solo si existen $v_1, v_2, v_3 \in V$ y dos subgrafos planos de G, $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$, tales que $V_1 \cap V_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $A_1 \cup A_2 = A$.* □

La caracterización de las inmersiones en J_3 nos resulta conveniente en nuestro estudio de los grafos peri-J_3, pero no facilita una caracterización inmediata debido a que hay grafos peri-J_3 que no son J_3-representables si se les suma K_1, como se puede comprobar a continuación.

Ejemplo 3.2.4 Considérese el grafo $G = K_{2,4} \cup K_{2,4}$. G es 3-periplano por el Lema 3.1.1, pues está formado por dos componentes conexas 2-periplanas. Según la Proposición 3.1.15, G es peri-S_3; luego G es peri-J_3 en virtud del Teorema 3.2.1.

Sin embargo, $G + K_1$ no es J_3-representable como consecuencia del Teorema 3.2.3. ◁

Son trivialmente ciertas, entre otras, las 2 siguientes propiedades que enunciamos conjuntamente:

Lema 3.2.5 *Sea G un grafo. Se verifican:*

1. *Si $G + K_1$ admite inmersión en J_3, G es peri-J_3.*
2. *Si al menos 2 puntos singulares de J_3 pertenecen a una inmersión peri-J_3 de G, $G + K_1$ es J_3-representable.*

□

Motivada en lo anterior, se enuncia una caracterización tanto para los grafos peri-J_3 como para los peri-S_3:

Teorema 3.2.6 *Sea $G = (V, A)$ un grafo. G es peri-J_3 si y solo si se verifica alguna de las dos siguientes condiciones:*

1. *G es 3-periplano.*

2. *Existen $v_1, v_2 \in V$ y dos subgrafos de G, $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$, tales que $V_1 \cap V_2 = \{v_1, v_2\}$, $A_1 \cup A_2 = A$ y o bien G_1 es $V_1 \setminus \{v_1\}$-periplano y G_2 es $V_2 \setminus \{v_2\}$-periplano o bien G_1 es periplano y G_2 es $V_2 \setminus \{v_1, v_2\}$-periplano.*

Demostración:

$[\Rightarrow]$ Las componentes o bloques periplanos se pueden obviar en la presente prueba.

Considérese una inmersión peri-J_3 de G en la que todos los vértices están en la cara C. Los puntos singulares de J_3 se llaman P_1, P_2 y P_3 y desempeñan todos el mismo papel. Según cuántos de estos puntos singulares pertenezcan a G, distinguimos:

1. $P_1, P_2, P_3 \in G$. C está contenida en una de las células, por lo que G es periplano salvo, a lo sumo, por las aristas de un K_3. Pero un grafo periplano admite las aristas de un K_3 sin dejar de ser 3-periplano.

2. $P_1, P_2 \in G$, $P_3 \notin G$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que P_1 y P_2 son vértices de G y que $P_3 \in C$. Dicho punto singular permite dar una inmersión en J_3 de $G + K_1$ sin modificar la inmersión peri-J_3 de G (como en el Lema 3.2.5) luego, por el Teorema 3.2.3, existen tres vértices v_1, v_2, v_3 y dos subgrafos planos de $G + K_1$, $G_1^* = (V_1^*, A_1^*)$ y $G_2^* = (V_2^*, A_2^*)$, tales que $V_1^* \cap V_2^* = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $A_1^* \cup A_2^* = A(G + K_1)$.

   Supongamos aquí que $v_1, v_2 \in V$. Se presentan dos posibilidades:

   (a) $v_3 \in V$. En este caso, $V_1^* = \{v_1, v_2, v_3\}$ ó $V_2^* = \{v_1, v_2, v_3\}$ ya que K_1 es adyacente con todos los vértices de G. Así, G es periplano salvo, a lo sumo, por las aristas de un K_3. Como en el caso anterior, G es 3-periplano.

   (b) $v_3 \notin V$. Existen $v_1, v_2, v_3 \in V$ y dos subgrafos planos de $G + K_1$, G_1^* y G_2^*, tales que $V_1^* \cap V_2^* = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $A_1^* \cup A_2^* = A \cup \{v_3 w : w \in V\}$. De este modo, se pueden definir dos subgrafos de G, $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$: $V_i = V_i^* \setminus \{v_3\}$, $A_i = A_i^* \setminus \{v_3 w : w \in V_i\}$, con $i = 1, 2$. Se verifican:

   - $V_1 \cap V_2 = (V_1^* \cap V_2^*) \setminus \{v_3\} = \{v_1, v_2\}$.
   - $A_1 \cup A_2 = (A_1^* \cup A_2^*) \setminus \{v_3 w : w \in A\} = A$, pues $(V_1^* \cup V_2^*) \setminus V = \{v_3\}$.

- Existe una inmersión de $G_1 + K_1$ en una sola célula salvo, posiblemente, por las aristas v_1v_3 y v_2v_3, que pueden estar en la otra célula. Lo mismo se puede decir para $G_2 + K_1$.

3. $P_1 \in G$, $P_2, P_3 \notin G$. G es la unión de 2 bloques por un vértice, que se puede suponer en P_1. Cada uno de los bloques se puede representar en una de las células.

   Si ambos bloques son simultáneamente no periplanos, ambos son 2-periplanos y uno, además, es periplano salvo por el vértice en P_1. Luego hay una inmersión plana de G con todos los vértices en 3 caras (una correspondiente a un bloque menos P_1 y 2 correspondientes al otro bloque, que incluye a P_1).

4. $P_1, P_2, P_3 \notin G$. En el peor de los casos, hay una cara por cada punto singular de J_3 de modo que todos los vértices de G están en 3 caras.

$[\Leftarrow]$ Si G es 3-periplano, es peri-J_3 por el Teorema 3.2.1 y la Proposición 3.1.15.

En caso contrario, v_1 y v_2 se representan en puntos singulares de J_3 y los vértices de V_1 y V_2 en células distintas. Como los vértices de V_1 no son adyacentes con los de V_2 (pues los subgrafos G_1 y G_2 tendrían más vértices en común que v_1 y v_2), se ha dado una inmersión peri-J_3 de G. □

Del resultado anterior, pueden extraerse numerosas consecuencias. A continuación se recogen tres de ellas.

Corolario 3.2.7 *Ni K_5 ni $K_{3,3}$ son peri-J_3.*

Demostración: Tanto para K_5 como para $K_{3,3}$, basta la comprobación mecánica de que no se cumplen las condiciones del Teorema 3.2.6, para lo que hay que comprobar que K_5 menos la arista v_1v_2 (resultando el grafo de la Figura 3.15, donde v_1 y v_2 son los 2 vértices señalados) no es $V(K_5) \setminus \{v_1, v_2\}$-periplano, lo cual se tiene en virtud del Teorema de caracterización de los grafos W-periplanos [68]. □

Corolario 3.2.8 *La peri-J_3-representabilidad es hereditaria por menores.*

Demostración: Todo subgrafo de un grafo peri-J_3 es peri-J_3 (de hecho, esta observación es suficiente para probar el Corolario 3.2.9).

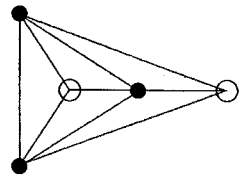

Figura 3.15: Grafo clave para probar que K_5 no es peri-J_3.

Como cualquier contracción de arista en un grafo 3-periplano no aumenta el número de caras en que están todos los vértices, solo queda comprobar que la contracción de una arista de un grafo que verifica la condición *2* del Teorema 3.2.6 es peri-J_3.

Si se contraen aristas distintas de v_1v_2, el grafo resultante sigue verificando la condición *2*. Si, por el contrario, se contrae la arista v_1v_2, distinguimos entre dos casos posibles:

- Si G_1 es $V_1\setminus\{v_1\}$-periplano y G_2 es $V_2\setminus\{v_2\}$-periplano, el subgrafo representado en la célula en que estaba v_1v_2 pasa a ser periplano, pues se ha contraído una arista de un grafo que era periplano salvo por uno de los extremos de dicha arista (v_1 ó v_2). En cuanto al otro subgrafo, se identifican 2 vértices distintos y no adyacentes de un grafo periplano salvo por uno de esos dos vértices, lo que no puede hacer que deje de ser 2-periplano (pues es la contracción de una arista en un cierto grafo 2-periplano). La unión por un vértice de un grafo periplano con otro 2-periplano es 2-periplano, luego 3-periplano y, por tanto, peri-J_3.

- Si G_1 es periplano y G_2 es $V_2 \setminus \{v_1, v_2\}$-periplano, el razonamiento a seguir es parecido al del caso anterior. Si G_1 está en la misma célula que v_1v_2, G es la unión por un vértice de un grafo periplano con otro 3-periplano, luego es 3-periplano y peri-J_3. En caso contrario, G es la unión por un vértice de un grafo 2-periplano (que resulta de la identificación de 2 vértices de G_1) con otro grafo 2-periplano (que resulta de la contracción de v_1v_2 en un grafo periplano salvo por v_1 y v_2). Luego G es 3-periplano y, por tanto, peri-J_3. □

Con esto, la peri-J_3-representabilidad se puede caracterizar por menores prohibidos y, además, se puede deducir lo siguiente:

Corolario 3.2.9 *Si G es peri-J_3, es plano.*

Demostración: Por reducción al absurdo, si G es peri-J_3 pero no es plano, tiene como menor topológico a K_5 o a $K_{3,3}$, que no son peri-J_3 (según el Corolario 3.2.7), lo que contradice el Corolario 3.2.8 anterior. □

Con lo cual, también se ha demostrado que los grafos peri-S_3 son planos, a pesar de que, por ejemplo, no todos los peri-S_2 lo eran.

Resultados semejantes a los anteriores pueden obtenerse para las seudosuperficies J_n cuando n es mayor que 3. Dejamos para futuras investigaciones la comprobación de que la dificultad del problema no aumenta excesivamente en el caso general. Analizamos, en lo que sigue, un problema sustancialmente diferente del que se planteaba para las medusas de orden n.

3.3 Infinitos menores topológicos peri prohibidos

Como se comentó anteriormente, Širáň y Gvozdjak [76] probaron que la lista de menores topológicos prohibidos para las inmersiones en B_2 era infinita. Con anterioridad, Robertson y Seymour [71] habían demostrado que las listas de menores prohibidos siempre eran finitas.

Utilizando exclusivamente seudosuperficies esféricas simples, en el capítulo anterior se comprobó que hay seudosuperficies sin lista de menores peri prohibidos. Ahora se está en condiciones de asegurar algo más: hay seudosuperficies sin listas finitas de menores topológicos peri prohibidos.

Ejemplo 3.3.1 La seudosuperficie representada en la Figura 3.16 no posee lista finita de menores topológicos peri prohibidos. Para probar esta afirmación, basta dar una familia infinita de grafos de modo que ninguno de ellos sea peri en dicha seudosuperficie, pero tal que todo subgrafo de cualquiera de ellos sí lo sea.

Considérense dos copias del grafo $F_{2,0} = K_1 + (K_3 \cup K_3)$ y sea $n \geq 2$. Se va a definir un grafo H_n, representado en la Figura 3.18, "conectando" los vértices centrales de los $F_{2,0}$ mediante una "cadena" en el modo que se describe a continuación:

Inicialmente, se conectan dichos vértices centrales (v_0 y v_n en la Figura 3.18) mediante el arco P_n de longitud $n-1$ (etiquetando los vértices como $v_0, v_1, \ldots, v_n$); es decir, a las dos copias de $F_{2,0}$ se le añaden $n-2$ vértices y $n-1$ aristas. Al grafo resultante, se añaden ahora n vértices ($u_1, \ldots, u_n$ en la Figura 3.18) adyacentes cada uno de ellos solo con 2 vértices consecutivos de la cadena anterior (u_i es adyacente

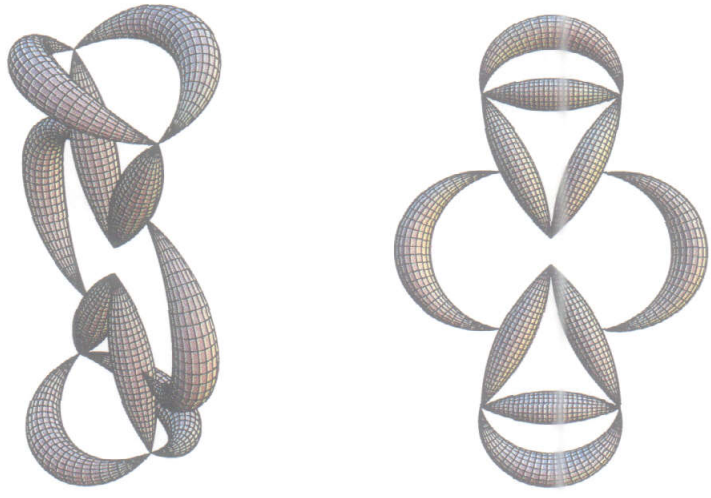

Figura 3.16: Dos representaciones de una misma seudosuperficie con infinitos menores topológicos peri prohibidos.

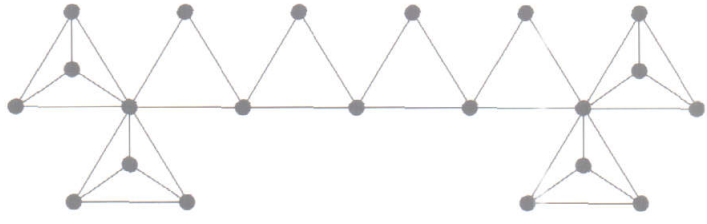

Figura 3.17: Grafo de una familia infinita de menores topológicos peri prohibidos.

con v_{i-1} y con v_i) y de modo que todos los vértices de la cadena (los v_i) quedan con valencia 4 (salvo v_0 y v_n, que tienen valencia 8).

En la Figura 3.17 se da uno de los grafos de la familia infinita que se buscaba (el H_4). Para dibujar la familia completa solo hay que introducir copias de K_3 entre las ya presentes en el grafo (como en la Figura 3.18). En cualquier caso, simplemente hay que analizar la casuística (según qué puntos singulares corresponden a vértices) para comprobar que ninguno de los H_n generados son peri en la seudosuperficie de la Figura 3.16 a pesar de que sus subgrafos sí lo son. ◁

Comencemos a continuación un breve análisis de los grafos peri en seudosuperficies no formadas exclusivamente por esferas.

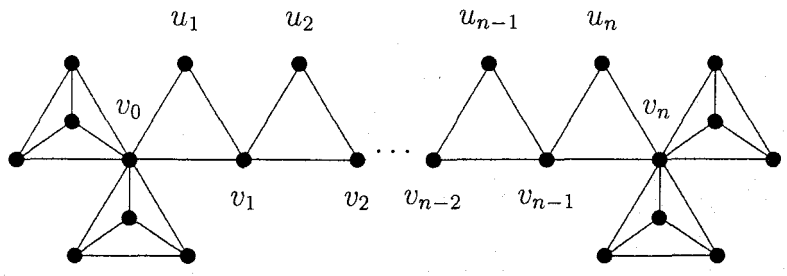

Figura 3.18: Familia infinita de grafos sin inmersión peri-J_3.

3.4 Inmersiones peri en superficies no conexas

Un grafo, no necesariamente conexo, es peri en la unión disjunta de dos superficies (o seudosuperficies) cuando lo es, al menos, en una de las dos. Si se trata de caracterizar por menores (o menores topológicos) prohibidos a los grafos que admiten una inmersión peri en $S_1 \cup S_2$, se necesita conocer la caracterización de los grafos que admiten una inmersión peri en S_1 y los que en S_2. En el mejor de los casos, basta conocer una de las caracterizaciones y la relación de inclusión que pueda haber entre los conjuntos de grafos peri en ellas.

Este requisito es también imprescindible cuando se trabaja con la unión disjunta de una cantidad finita de superficies (o seudosuperficies).

Sin embargo, considérese la colección formada por todas las superficies compactas orientables. Todo grafo finito G es peri en esta superficie no conexa, pues $G + K_1$ es un grafo finito, por lo que su género orientable es también finito. Así, se sabe que tanto la lista de menores prohibidos como la de menores topológicos prohibidos son vacías, a pesar de no conocerse éstas para el caso del toro, por ejemplo, que es una de las componentes de la superficie no conexa.

Para el caso de una cantidad finita de superficies, al menos, el problema propuesto parece tener sentido, gracias al siguiente Lema:

Lema 3.4.1 *Sean S_1 y S_2 superficies compactas. Si G es peri en S_1, también lo es en la suma conexa $S_1 \# S_2$.*

Demostración: Es trivial a partir de la definición de suma conexa, pues en el interior de toda cara C puede elegirse un disco abierto por el que sumar conexamente otra superficie sin que ello afecte a la peri-representabilidad de un grafo. □

Como la esfera S^2 es el elemento neutro para la suma conexa, hay casos muy sencillos en que se pueden caracterizar los grafos peri utilizando el Lema 3.4.1. Los grafos peri-$(S^2 \cup S)$ son los peri-S para toda superficie o seudosuperficie S.

Ejemplo 3.4.2 Considérese la superficie no conexa $S^2 \cup \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Localmente, el plano proyectivo (como cualquier superficie compacta) es homeomorfo al plano, luego el que G sea peri-S^2 implica que G es peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, por lo que el conjunto de los grafos peri-$(S^2 \cup \mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ es el mismo que el de los peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. $\triangleleft$

Para obtener resultados más completos, se pueden utilizar propiedades como la siguiente.

Lema 3.4.3 *Si un grafo tiene como menores a G_1 y a G_2, también tiene como menor a algún menor de $G_1 + G_2$ que tiene como menores tanto a G_1 como a G_2.*

Demostración: Sean $\mathcal{G}$ la colección de todos los menores de $G_1 + G_2$ que contienen como menores tanto a G_1 como a G_2 y G un grafo que tiene como menores tanto a G_1 como a G_2. Veamos que G tiene al menos un menor en $\mathcal{G}$:

G puede tener como menor a $G_1 \cup G_2$ que está en $\mathcal{G}$; en tal caso, se concluye la tesis. En caso contrario, G tiene como menor un grafo que surge de $G_1 \cup G_2$ identificando vértices y, posiblemente, contrayendo aristas. Pero en la familia $\mathcal{G}$ se incluyen todos los grafos que resultan de la identificación de vértices de G_1 con vértices de G_2 (en cualquier número) y todos los menores de éstos que tengan como menores tanto a G_1 como a G_2, por lo que se concluye que hay un menor de G en $\mathcal{G}$. $\square$

De hecho, se puede demostrar que es posible caracterizar por menores prohibidos los grafos peri en la unión de superficies (o seudosuperficies) cuyos grafos peri pueden caracterizarse por menores prohibidos. La demostración del siguiente resultado es constructiva en el sentido de que se dará un algoritmo (aunque no óptimo) para construir la lista de menores peri prohibidos a partir de las listas de menores peri prohibidos de ambas superficies.

Proposición 3.4.4 *Si los grafos peri en S_1 y los peri en S_2 se pueden caracterizar por menores prohibidos, también se pueden caracterizar los de $S_1 \cup S_2$.*

Demostración: Sean $\mathcal{H}_1 = \{G_1^1, G_2^1, \ldots, G_m^1\}$ y $\mathcal{H}_2 = \{G_1^2, G_2^2, \ldots, G_n^2\}$ las listas de menores peri prohibidos, respectivamente, para S_1 y para S_2.

Un grafo G peri en $S_1 \cup S_2$ tiene que serlo en S_1 o en S_2. Así, un grafo G no peri en $S_1 \cup S_2$ tiene como menor alguno de los grafos de $\mathcal{H}_1$ y, también, alguno de los grafos de $\mathcal{H}_2$.

Formamos todas las parejas posibles con un grafo $G_i^1 \in \mathcal{H}_1$ y otro $G_j^2 \in \mathcal{H}_2$. Para cada pareja, inicialmente, se trata de generar un conjunto $\mathcal{H}_{i,j}$ de grafos de modo que todo grafo que tenga como menores a G_i^1 y a G_j^2, tenga como menor a alguno de $\mathcal{H}_{i,j}$. Después, se obtendrá una lista de menores prohibidos a partir de los elementos de todos los $\mathcal{H}_{i,j}$.

Para $G_i^1 \in \mathcal{H}_1$ y $G_j^2 \in \mathcal{H}_2$, inclúyanse en $\mathcal{H}_{i,j}$ todos los menores de $G_i^1 + G_j^2$ que tengan como menores tanto a $G_i^1 \in \mathcal{H}_1$ como a $G_j^2 \in \mathcal{H}_2$. Eligiéndolos de este modo, nos aseguramos que no son peri ni en S_1 ni en S_2. Además, por el Lema 3.4.3, un grafo que tiene como menores a G_i^1 y a G_j^2 tiene como menor a un elemento de $\mathcal{H}_{i,j}$.

Finalmente, se reúnen todos los grafos obtenidos en una única lista $\mathcal{H} = \bigcup_{i,j} \mathcal{H}_{i,j}$ y se eliminan los grafos de $\mathcal{H}$ que resultan redundantes por ser menores de otros grafos de $\mathcal{H}$. Un grafo de $\mathcal{H}$ no puede tener como menor propio a ningún grafo que tenga como menor simultáneamente a un grafo de $\mathcal{H}_1$ y a otro de $\mathcal{H}_2$, porque sería considerado redundante en el paso que se acaba de realizar.

Como se han descrito una cantidad finita de pasos y en cada uno de ellos se trata con una cantidad finita de grafos, el proceso termina dando una lista de menores peri-$S_1 \cup S_2$ prohibidos. □

Inmediatamente se obtiene una consecuencia correspondiente a la caracterización por menores topológicos prohibidos:

Corolario 3.4.5 *Si S_1 y S_2 son superficies o seudosuperficies con listas finitas de menores topológicos peri prohibidos, también lo es $S_1 \cup S_2$.*

Demostración: Según se ha visto en varias ocasiones, a partir de una lista finita de menores peri prohibidos se puede obtener la correspondiente lista finita de menores topológicos peri prohibidos. □

Como se comentó con anterioridad, el algoritmo dado en la demostración anterior

no es eficiente; de hecho, la resolución de algunos de sus pasos implica responder sucesivamente al siguiente problema NP-completo, expuesto en [43, pág. 202]:

PROBLEMA: **CONTRACCIÓN DE GRAFOS (CG).**
DATOS: Dos grafos $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$.
PREGUNTA: ¿Se puede obtener un grafo isomorfo a G_2 mediante una sucesión de contracciones de aristas de A_1 a partir de G_1?

A pesar de esto, se pueden dar explícita o implícitamente listas de menores peri prohibidos en muchos casos más, según el tipo de superficies que se unan disjuntamente. Con la intención de describir esos casos, se explica el siguiente algoritmo que mejora sustancialmente al de la demostración de la Proposición 3.4.4 en muchas ocasiones. Es preciso comentar, no obstante, que hay casos en que lo siguiente no mejora nada al proceso anterior.

Los datos de entrada son las listas de menores peri prohibidos $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_k$ en diferentes superficies o seudosuperficies $S_1, S_2, \ldots, S_k$ (de las que poseen tales listas, evidentemente). De hecho, el desconocimiento actual de las listas para las superficies no esféricas impide la utilización del presente algoritmo salvo en casos triviales o para seudosuperficies de las estudiadas en esta memoria.

Paso 1: Puesto que los grafos peri en una superficie orientable lo son también en otra orientable de mayor género (por el Lema 3.4.1), se eliminan todas las superficies orientables menos la que tenga mayor género.

Si queda una única superficie (y no hay seudosuperficies), la lista buscada es la de dicha superficie.

Paso 2: Análogamente al paso anterior, se eliminan todas las superficies no orientables menos la que tenga mayor género.

Si queda una única superficie (y no hay seudosuperficies), la lista buscada es la de dicha superficie.

Paso 3: Toda superficie no orientable es la suma conexa de una orientable bien con el plano proyectivo bien con la botella de Klein. Si la superficie no orientable que queda se puede obtener como suma conexa de una superficie no orientable con la orientable que queda, se suprime esta última.

Si queda una única superficie (y no hay seudosuperficies), la lista buscada es la de dicha superficie. En caso contrario, quedan varias seudosuperficies (en sentido amplio, pues 2 de ellas pueden ser superficies).

Paso 4: Si una seudosuperficie S proviene de la contracción a puntos de ciclos de S', los grafos peri en S lo son también en S', como se puede comprobar adaptando la inmersión peri en S a una en S'. Por esto, si alguna seudosuperficie se obtiene contrayendo ciclos de otra seudosuperficie o superficie, se puede eliminar.

Si queda una única seudosuperficie (en sentido amplio), la lista buscada es la de dicha seudosuperficie. En caso contrario, quedan k seudosuperficies.

Paso 5: Como los grafos no peri en la unión de seudosuperficies son los no peri en ninguna de las seudosuperficies componentes, se puede proceder por recurrencia. Para $h = 2$ hasta k (número de seudosuperficies), se procede a calcular los menores peri prohibidos de $\bigcup_{j=1}^{h} S_j$:

Paso 6: A partir de la lista $\mathcal{H}_1$ de menores peri-$\bigcup_{j=1}^{h-1} S_j$ prohibidos y de la lista $\mathcal{H}_2$ de menores peri-S_h prohibidos, se procede como en la demostración de la Proposición 3.4.4 para obtener la lista $\mathcal{H}$ de menores peri-$\bigcup_{j=1}^{h} S_j$ prohibidos.

Paso 7: Se incrementa h en 1 y se vuelve al **Paso 5** mientras sea necesario.

Fin.

Estudiemos ahora lo que ocurre al "conectar" las superficies en las que se quiere estudiar la peri-representabilidad.

3.5 Inmersiones peri en uniones por un punto

Dadas dos superficies compactas, a partir de ellas se puede conseguir un objeto topológico conexo mediante la adición de los puntos de un segmento, de varios segmentos o de otros conjuntos más complejos.

Como se verá a continuación, el estudio de los grafos que admiten una inmersión peri en la unión de dos superficies por un punto engloba a los que la admiten en la unión de dos superficies por un segmento, entendiendo que la intersección entre las

superficies originales sea vacía o, como mucho, un punto.

Este tipo especial de seudosuperficies han gozado de cierta popularidad incluso fuera de la Topología. Comentamos a modo de ejemplo los actuales y numerosos esfuerzos por interpretar el "wedge" en Magnetoelectrónica, cuyo estudio de las secciones cónicas se refiere a seudovariedades con puntos o segmentos singulares que resultan de la intersección de superficies.

3.5.1 Inmersiones peri en uniones por segmentos

Si, por ejemplo, se considera la unión disjunta de dos superficies compactas y se añade un segmento cuyos extremos pertenecen uno a cada superficie, se obtiene un ente al que se podría llamar seudosuperficie conexa pero con infinitos puntos singulares.

Los grafos que admiten una inmersión peri en estas seudosuperficies son los mismos que si se contrae el segmento a un único punto (aunque no sean seudosuperficies homeomorfas). El motivo de la coincidencia de grafos peri es que un solo punto del segmento que pertenezca al grafo obliga a que el resto del grafo esté en una misma superficie. Lógicamente, esto cambiaría si hubiera más de un punto del segmento que perteneciese a ambas superficies, si se "pegasen" superficies con segmentos que se intersectasen entre ellos, o si los segmentos se utilizasen para conectar puntos en la misma componente conexa de la seudosuperficie a tratar.

Las uniones por un segmento parecen no aportar nada nuevo y al utilizar varios segmentos se generarían múltiples objetos cuyo estudio requeriría de un espacio excesivamente amplio. Por esto, se siguen estudiando superficies con una cantidad finita de puntos singulares. Las próximas en ser analizadas proceden de la unión por un punto, a la que a menudo se llama "*wedge*" de 2 superficies compactas.

3.5.2 Inmersiones peri en uniones por un punto

Dadas dos superficies S_1 y S_2, se denotará $S = S_1 \wedge S_2$ la *unión* de ambas *por un punto*. Como todos los puntos de una superficie compacta son equivalentes, es indistinto el punto de cada superficie que se elija para su identificación. Al igual que en situaciones anteriores, se llamará *céula* de S tanto a S_1 como a S_2.

Teorema 3.5.1 *Sean S_1 y S_2 dos superficies. G es peri en $S_1 \wedge S_2$ si y solo si existen G_1 y G_2 tales que $G = G_1 \cup G_2$, con G_i peri en S_i $(i = 1, 2)$.*

Demostración:
$[\Rightarrow]$ En $S_1 \wedge S_2$, considérese el punto singular $P = S_1 \cap S_2$ y la cara C en que están todos los vértices de una inmersión de G. Si $P \in G$, la cara C está en una sola célula de las dos consideradas y G, por peri-representabilidad, también $(G_1 = G)$.

Si $P \notin G$, P puede ser un punto de C; si $G_i = G \cap S_i$ para $i = 1, 2$, $G = G_1 \cup G_2$ con G_i peri en S_i. En otro caso, P no es punto de C con lo que todo G está en una sola seudosuperficie, como en el primer caso considerado.

$[\Leftarrow]$ Siempre existen inmersiones convenientes de G_i en S_i de modo que solo quede identificar puntos de los interiores de las caras en que están todos los vértices. □

Del Teorema 3.5.1 puede extraerse:

Corolario 3.5.2 *Sean S_1 y S_2 dos superficies y G un grafo conexo. G es peri-$(S_1 \cup S_2)$ si y solo si G es peri-$(S_1 \wedge S_2)$.*

Demostración: Si G es un grafo conexo, no se puede descomponer como la unión disjunta de dos subgrafos propios suyos, por lo que la inmersión de G debe producirse en una única célula. □

Según lo anterior, a fin de obtener una caracterización de los grafos peri-$(S_1 \wedge S_2)$, queda por analizar el caso no conexo. De hecho, todo grafo peri en $S_1 \cup S_2$ lo es también en $S_1 \wedge S_2$, aunque el recíproco no es siempre cierto.

Es más, no todos los grafos peri-$(S_1 \wedge S_2)$ prohibidos son peri-$(S_1 \cup S_2)$ prohibidos, porque un grafo no peri-$(S_1 \wedge S_2)$ puede que se desconecte al quitarle una arista y que el grafo resultante sea peri-$(S_1 \wedge S_2)$ pero no peri-$(S_1 \cup S_2)$.

La obtención de los menores peri-$(S_1 \wedge S_2)$ prohibidos a partir de los menores peri-$(S_1 \cup S_2)$ prohibidos depende de las superficies S_1 y S_2. En ocasiones, puede ser suficiente modificar levemente el algoritmo dado para caracterizar los grafos peri en la unión, pese a que no siempre será sencillo.

Resulta natural plantearse ahora el estudio de los grafos peri en la unión de seudosuperficies por un punto. Sin embargo, un resultado similar al Teorema 3.5.1 no sería cierto para seudosuperficies. De hecho, no todos los puntos de una seudosuperficie son idénticos, luego la unión por un punto de dos seudosuperficies puede no estar bien definida si no se determina el punto que se va a identificar de cada

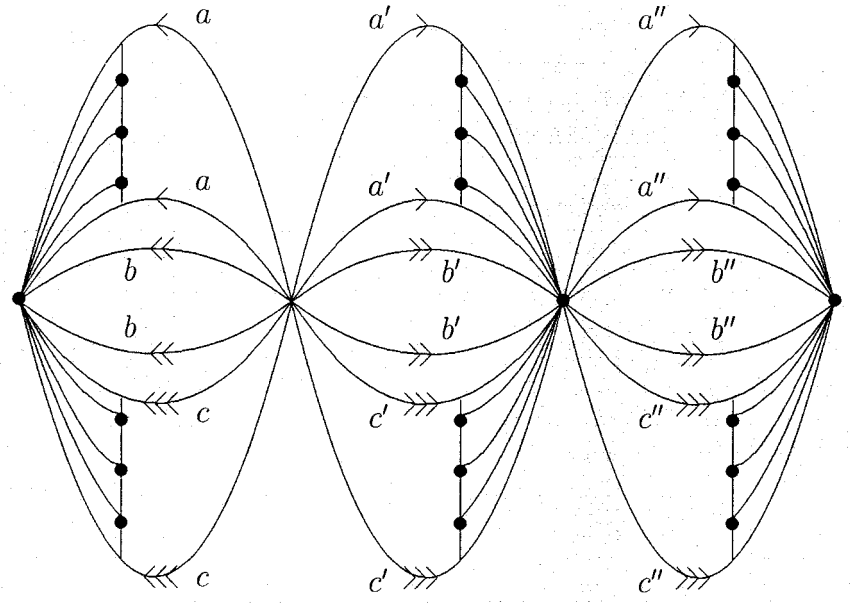

Figura 3.19: Grafo no peri que es unión de grafos peri.

seudosuperficie. Así, como $S_1 \wedge S_2$ es seudosuperficie, $S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$ no está bien definida aunque S_1, S_2 y S_3 sean superficies compactas.

Ejemplo 3.5.3 Considérese la seudosuperficie S resultante de identificar 2 puntos singulares de dos L_3 y, posteriormente, pegar dicha superficie con otro L_3, pero esta vez por otro punto singular distinto del utilizado anteriormente.

El grafo formado por tres copias disjuntas de $F_{2,0}$ [2] no es peri en S a pesar de que cada componente conexa suya sí es peri en L_3. Además, $F_{2,0} \cup F_{2,0}$ es peri en $L_3 \wedge L_3$ y podría serlo $F_{2,0} \cup F_{2,0} \cup F_{2,0}$ en la seudosuperficie resultante de la unión de tres L_3 por un par de puntos elegidos convenientemente en los L_3. En la Figura 2.6 se dio una inmersión peri de $F_{2,0}$ en L_3 mientras que en la Figura 3.19 se da una inmersión de $F_{2,0} \cup F_{2,0} \cup F_{2,0}$ en dicho $S = L_3 \wedge L_3 \wedge L_3$, pero que no es peri-$S$. No obstante, la inmersión de la Figura 3.19 resulta útil para comprobar que $F_{2,0} \cup F_{2,0} \cup F_{2,0}$ no es peri-S. $\triangleleft$

A pesar de este hecho, es sencillo encontrar ejemplos de seudosuperficies en los que el resultado sí es similar al caso de las superficies:

[2] Recordemos que $F_{2,0} = K_1 + (K_3 \cup K_3)$.

Figura 3.20: Las tres posibles uniones por un punto de 2 biplátanos.

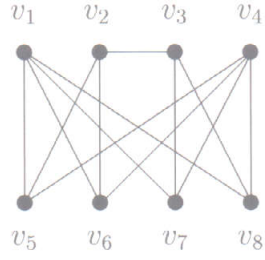

Figura 3.21: Grafo con una única inmersión en B_2.

Ejemplo 3.5.4 Hay 3 formas distintas (representadas en la Figura 3.20) de definir $S = B_2 \wedge B_2$. Es evidente que se trata de tres seudosuperficies distintas, ya que poseen distinto número de puntos singulares.

También se puede comprobar que hay grafos que admiten inmersiones en cada una de estas seudosuperficies y no en las otras 2. Para dar una inmersión en B_2 del grafo de la Figura 3.21, es necesario representar la arista v_2v_3 en la célula en que no está el resto del grafo. A partir de dos copias de dicho grafo se pueden obtener los ejemplos buscados, identificando convenientemente vértices de una y otra copia (dos "vértices v_1", dos "vértices v_2" o un "vértice v_1" con un "vértice v_2", respectivamente). $\triangleleft$

No obstante, puede facilitarse simultáneamente una caracterización de los grafos peri en las tres seudosuperficies del Ejemplo 3.5.4:

Teorema 3.5.5 *Sean $S = B_2 \wedge B_2$ y G un grafo. G es peri-S si y solo si G no tiene como menor a ninguno de los siguientes grafos: K_5, $K_{3,3}$, la unión disjunta de 3 grafos elegidos en $\{K_4, K_{2,3}\}$ y, finalmente, los E_j de la Figura 2.1, con $4 \leq j \leq 36$.*

Demostración: Los grafos peri-B_2 (2-periplanos) admiten inmersión en B_2 con todos los vértices en una sola célula y en una sola cara y sin que los puntos singulares pertenezcan al grafo. Debido a esto, en los tres casos anteriores, G es peri en S si y solo si $G = G_1 \cup G_2$ con cada uno de los G_i peri en B_2. Es decir, G es la unión disjunta de dos grafos peri-B_2 (posiblemente vacíos) o, lo que es lo mismo, G es la unión disjunta de dos grafos 2-periplanos. De ahí que podamos determinar una lista de menores prohibidos (y también una de menores topológicos prohibidos):

- De E_4 a E_{36} siguen siendo prohibidos, pues son conexos y no 2-periplanos.
- E_1, E_2 y E_3 son peri-S, pues poseen dos componentes conexas y cada una de ellas es 2-periplana. Sin embargo, ni E_1, ni E_2, ni E_3 son peri-S si se les une alguna otra componente conexa no periplana (de aquí salen 4 menores prohibidos más, cada uno con 3 componentes conexas elegidas en $\{K_4, K_{2,3}\}$), ni tampoco es peri-S ningún grafo que se obtenga de hacer conexo a alguno de $\{E_1, E_2, E_3\}$ añadiendo una sola arista (con lo que tendrían un menor en $\{E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9\}$).

Tras conseguir una lista de menores prohibidos, solo queda comprobar que ningún grafos más es redundante. □

La forma de obtener esta lista proporciona un algoritmo que parece modificable para cada caso en que la unión por un punto de dos seudosuperficies tenga como grafos peri-representables los formados por dos componentes peri, cada una de ellas, en cada superficie. Sin embargo, buscar un algoritmo general de caracterización de los grafos peri puede resultar complicado, según se vio en el caso de las superficies.

Como en otros casos de listas de menores prohibidos, también es posible obtener una lista de menores topológicos prohibidos a partir de la anterior. El procedimiento es el mismo para cualquier lista finita, por lo que no volvemos a describirlo. En su lugar, nos dedicamos al estudio de los grafos peri en seudosuperficies algo más generales que las anteriores y en las que se pueda generalizar el algoritmo descrito para la unión de superficies.

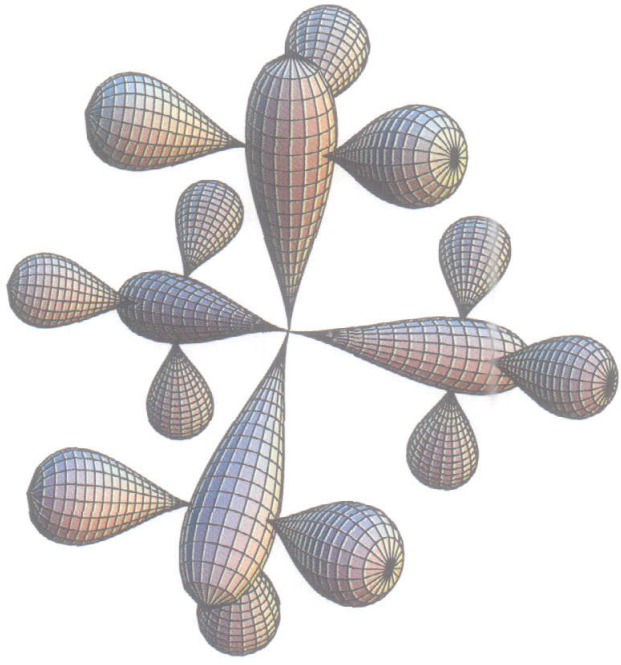

Figura 3.22: Seudosuperficie arborescente con 16 células esféricas.

3.6 Inmersiones peri en seudosuperficies arborescentes

Otros casos en donde sí es posible intentar aplicar el procedimiento anterior son, por ejemplo, las *seudosuperficies arborescentes*. Éstas son seudosuperficies que se obtienen mediante la aplicación sucesiva de la operación "pegar por un punto una superficie", con lo que no existirá la posibilidad de representar ciclos que pasen por más de una célula.

Un ejemplo de seudosuperficie arborescente se puede observar en la Figura 3.22. En el próximo Teorema 3.6.1 se presenta una notación para estas seudosuperficies, en las que no se impide que las células sean diferentes superficies compactas.

A pesar de que, según se ha visto, la unión por un punto es una operación que, en general, no conmuta con más de 2 superficies, puede enunciarse la siguiente caracterización:

Teorema 3.6.1 *Sean $S_1, \ldots, S_n$ superficies y $S = S_1 \wedge S_2 \wedge \ldots \wedge S_n$. Entonces G es peri en S si y solo si $G = G_1 \cup \ldots \cup G_n$, con cada G_i peri en S_i $(i = 1, \ldots, n)$.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que los puntos singulares de S no pertenecen a las inmersiones peri-S de G: los vértices de G se pueden trasladar dentro de una misma célula sin modificar la peri-S-representabilidad y los vértices de una misma arista no pueden ser de diferentes células de S porque no podrían estar en una misma cara, luego G es de la forma $G_1 \cup \ldots \cup G_n$, con cada G_i peri en S_i.

Recíprocamente, sea $G = G_1 \cup \ldots \cup G_n$, con cada G_i peri en S_i. Si una célula posee algún vértice de G, todos sus puntos singulares pueden suponerse en la misma cara en que están todos los vértices de G. Con esto, se consigue probar la equivalencia entre grafo peri-S y grafo cuyas componentes conexas son peri-S_i. □

Finalizamos el estudio de los grafos peri en las seudosuperficies arborescentes con las siguientes observaciones, relacionadas con el Teorema 3.6.1:

Si todas las células de una seudosuperficie arborescente S son esféricas, los grafos peri-S son los periplanos. En caso contrario, las células esféricas de S se pueden contraer a puntos sin que ello afecte a los grafos peri-S. Nótese que esta contracción no es posible, en general, si lo que está estudiándose es la S-representabilidad. La unión de dos K_5 por un vértice, por ejemplo, admite inmersión en la unión de dos toros por un punto pero no admite inmersión en la seudosuperficie resultante de pegarle a una esfera, por dos puntos distintos, sendos toros.

Por otra parte, existe cierta relación entre los grafos peri en la unión disjunta de superficies y los grafos peri en las seudosuperficies arborescentes que se puedan formar con dichas superficies: todos los grafos conexos que sean menores peri prohibidos de la unión disjunta son también menores peri prohibidos para la unión por un punto; los menores no conexos peri prohibidos en la unión de superficies que no sean peri en la seudosuperficie arborescente (por no poderse escribir como unión de componentes peri en cada superficie) son también menores peri prohibidos para el wedge y, por supuesto, pueden obtenerse otras relaciones en cada caso concreto.

También pueden aprovecharse las conclusiones anteriores para estudiar los grafos peri en *seudosuperficies forestales* que se pueden expresar como la unión disjunta de seudosuperficies arborescentes.

Analizando las seudosuperficies estudiadas hasta el momento, se puede caer en la cuenta de que las contracciones sucesivas de meridianos de una esfera y de las seudosuperficies resultantes solo producen seudosuperficies de las ya tratadas. Por eso, concluimos en este punto el estudio realizado sobre grafos peri finitos, dejando

abierta la posibilidad de un estudio más detallado de seudosuperficies concretas de algunos de los tipos anteriores.

Parte II

Peri-representabilidad de grafos infinitos

Capítulo 4

Inmersiones peri en superficies tubulares

La caracterización de Chartrand y Harary en [28] para los grafos periplanos finitos también es válida para los grafos infinitos numerables (resultado debido a Dirac y Schuster [32]). Pero para garantizar que un grafo posee una inmersión periplana sin puntos de acumulación (como se motiva en [78]), se necesita que sea localmente finito y que no contenga a otros dos grafos prohibidos más, según demostraron Boza, Diánez y Márquez en [24] (ver Teorema 0.3.5). Desde entonces, se han intentado algunas generalizaciones como las que se recogen en [26] y en [44].

Por otra parte, algunos estudios sobre inmersiones de grafos infinitos (como en [70]), se refieren a los grafos que admiten inmersiones en superficies tubulares, proporcionando una caracterización de los grafos representables sin acumulación en dichas superficies.

Nuestro siguiente objetivo será caracterizar los grafos numerables que admiten una inmersión en una superficie tubular con n finales de Freudenthal de modo que todos los vértices estén en la misma cara y sin que se produzca acumulación de éstos. Para acercarnos a dicha caracterización, parece conveniente estudiar con detalle lo que sucede en los casos más sencillos. Por eso, la superficie inicial será esférica y los primeros resultados se referirán a lo que ocurre cuando se contemplan grafos con finales coloreados. Estos resultados, de hecho, permitirán una generalización bastante completa y serán utilizados para generar otros sin colorear finales.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

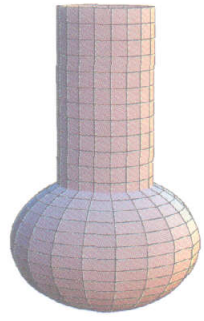

Figura 4.1: Representación del plano como superficie tubular.

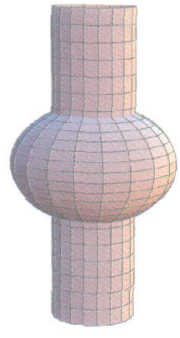

Figura 4.2: Representación del cilindro como superficie tubular.

4.1 Superficies tubulares

Nos limitamos a describir de un modo informal las superficies a las que se va a hacer referencia, adecuando una notación conveniente a nuestros propósitos. Un estudio geométrico detallado de estas superficies puede encontrarse, por ejemplo, en [33].

Mientras no se indique otra cosa, S representará una superficie compacta. Si a S se le reemplazan un número finito, n, de círculos disjuntos por la misma cantidad de semicilindros, el ente geométrico obtenido, que denotaremos por $S(n)$, es una superficie no compacta con una cantidad finita de finales de Freudenthal. De hecho, de acuerdo con la definición dada en [38] por el propio Freudenthal, $S(n)$ posee n finales para toda superficie compacta S, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$.

Llamaremos *superficie tubular con n finales* a $S(n)$ y, en el caso en que S sea la esfera, $S(1)$ es homeomorfo al plano real según se ve en la Figura 4.1 y $S(2)$ es el cilindro (infinito) representado en la Figura 4.2.

Nótese que $S(n)$ es homeomorfa al resultado de quitarle n puntos cualesquiera a S, lo que permite simplificar las representaciones gráficas de $S(n)$ y facilitar los razonamientos que siguen.

4.2 Conceptos previos a la coloración de finales

De aquí en adelante, salvo indicación en contra, los grafos se supondrán numerables y localmente finitos (aunque, por supuesto, no necesariamente finitos). El que solo estudiemos aquí grafos localmente finitos se debe a que no es posible dar inmersiones sin acumulación de aristas de un grafo que no sea localmente finito.

A fin de reconocer el estado actual del estudio de las inmersiones de grafos numerables en superficies tubulares, conviene hacer referencia a diversos resultados relacionados con ellas. Por ejemplo, Dana [31] estudia las inmersiones de grafos periódicos o dinámicos en el plano y en el cilindro. Revuelta [70] demuestra que el problema de caracterizar los grafos que admiten una inmersión en $S(n)$ sin acumulación de vértices (problema de naturaleza infinita) es equivalente a caracterizar los grafos que admiten una inmersión en S con los vértices de un conjunto W en n caras, demostrando la finitud de la lista de menores prohibidos para cualquier superficie tubular y dándola explícitamente para los casos del plano y de la banda de Möbius (en $S^2(1)$ y $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$, según la notación anterior).

Como también se va a perseguir una caracterización de algunos de estos grafos numerables mediante listas de menores prohibidos o de menores topológicos prohibidos, se necesita una relación de orden entre los grafos que sea compatible con las características que se le exigen a éstos.

En nuestro caso, aprovecharemos que todo menor (por tanto, también todo subgrafo) de un grafo que admite una inmersión peri en cualquier superficie tubular, admite una inmersión peri en la misma superficie (además, cada inmersión del grafo induce otra en el menor de manera natural y evidente). Esto permite definir menores prohibidos, así como menores topológicos prohibidos, en el modo habitual. Una de las escasas diferencias que pueden apreciarse con el caso finito consiste en que la conversión de dos aristas a una sola, con la consiguiente "pérdida" de un vértice, no implica que disminuya el número de vértices del grafo.

En adelante, diremos que un grafo numerable G es *p-peri-*$S(n)$ cuando admite una inmersión en $S(n)$ sin acumulación de vértices y con todos los vértices de G en una misma cara. Más adelante se verá que los grafos p-peri-$S(n)$ tampoco presentan acumulación de aristas.

Se pasa a analizar otras de las herramientas que se usarán en adelante: la compactificación y la descompactificación. Para ello, se comentan primero algunas características de los finales que nos permitirán seguir avanzando.

Proposición 4.2.1 *Todos los finales de un menor topológico prohibido para la p-peri-$S(n)$-representabilidad son estables.*

Demostración: La prueba que se explica, por reducción al absurdo, utiliza las ideas aportadas por Halin para probar la estabilidad de los finales de otros menores topológicos prohibidos (pueden consultarse las desarrolladas por Gegúndez en [44]).

Supongamos que G es p-peri-$S(n)$ prohibido y que tiene algún final no estable.

Sea $\{H'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de subgrafos finitos de G cuya unión es G. Para cada $n \in \mathbb{N}$, llamaremos G'_n al complementario de H'_n en aquellas componentes conexas de G cuya intersección con H'_n no sea vacía. De este modo, hay una relación natural entre las componentes conexas de H'_n y de G'_n.

A partir de estas sucesiones, se define otra, $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de forma recursiva:

H_1 es el grafo resultante de unir a H'_1, por cada componente infinita de G'_1 y mediante una arista, un final estable, que se supone que está completamente contenido en la componente infinita a la que está asociado.

Para cada $n > 1$, H_n se obtiene al unirle a H'_n los finales estables de H_{n-1} además de uno por cada componente infinita de G'_n que no tenga ya un final estable asociado.

Cada H_i es p-peri-$S(n)$, pues es un subgrafo estricto de G (H_i no tiene finales no estables) y G era un menor topológico prohibido. Por esto, se puede dar una inmersión p-peri-$S(n)$ para cada H_i, con $i \in \mathbb{N}$. Pero, en un sentido fácil de asumir (aunque un poco largo de formalizar[1]), solo hay una cantidad finita de inmersiones distintas para cada H_i, por lo que alguna inmersión de H_1 debe repetirse infinitas veces entre las generadas por los elementos de la sucesión $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y existe una subsucesión $\{H^1_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en la que se mantiene fija tal inmersión de H_1.

A su vez, $\{H^1_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ genera una cantidad finita de distintas inmersiones de H_2, con lo que se puede repetir el proceso anterior y obtener $\{H^2_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{H^1_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que mantiene fijas las inmersiones de H_1 y de H_2.

Así, procediendo por inducción, se obtiene una sucesión creciente $\{H^j_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de inmersiones p-peri-$S(n)$ de subgrafos de G que nos induce una inmersión p-peri-$S(n)$ de G, lo cual contradice la hipótesis de partida. □

[1]Se pueden consultar, por ejemplo, [79, 80] para una descripción algo más detallada.

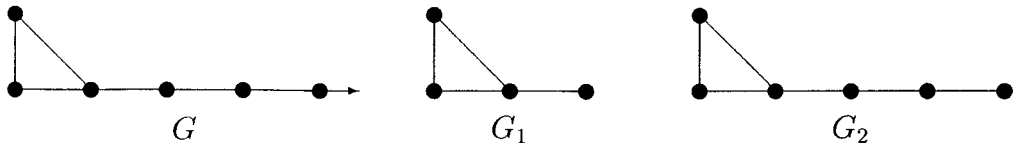

Figura 4.3: Dos compactificaciones distintas de un mismo grafo G.

Corolario 4.2.2 *Todos los finales de un menor prohibido para la p-peri-$S(n)$-representabilidad son estables.*

Demostración: Los menores prohibidos son menores topológicos prohibidos. □

El que los finales de los menores prohibidos (y de los menores topológicos prohibidos) sean estables, favorece compactificar y descompactificar grafos en el modo que se explica a continuación.

Definición 4.2.3 Sean G un grafo finito y v un vértice no aislado de G. La *descompactificación* de G por v es el grafo (infinito) numerable que resulta al sustituir cada arista de G incidente con v por un rayo que parte de su extremo y, finalmente, eliminar v.

Si p es un punto del interior de una arista, la descompactificación de G por p (o descompactificación de G por la arista que contiene a p) se define como la descompactificación por p del grafo que se obtiene al subdividir por p la arista de G que lo contiene.

Definición 4.2.4 Sea G un grafo infinito numerable cuyos finales son todos estables. Se dice que G^* es una *compactificación* de G cuando G es la descompactificación de G^* por algún vértice o por alguna arista.

Es evidente que cada grafo posee una única descompactificación por cada vértice no aislado y por cada arista.

Por otra parte, es fácil comprobar (ver la Figura 4.3) que un mismo grafo puede tener varias compactificaciones por un mismo vértice (o por una misma arista), aunque todas son homeomorfas. Además, si G es finito, se puede convenir que $G^* = G$.

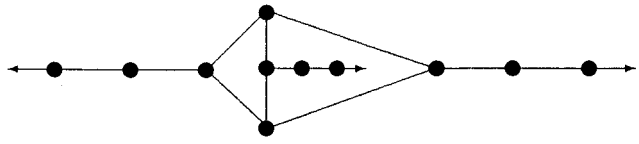

Figura 4.4: Un grafo sin inmersión VAP en el plano.

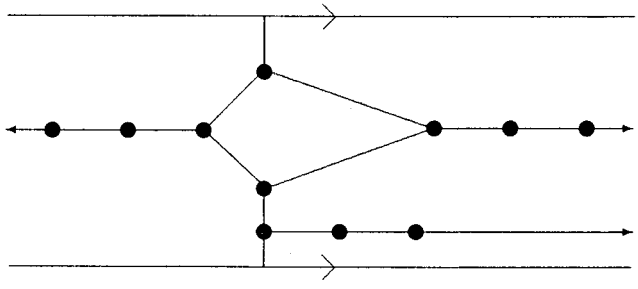

Figura 4.5: Inmersión VAP en el cilindro infinito.

Es claro (aunque este hecho se justificará más adelante) que las compactificaciones resultan útiles para el estudio de las inmersiones de grafos en superficies tubulares.

Ejemplo 4.2.5 La descompactificación de $K_{3,3}$ por un vértice cualquiera es el grafo de la Figura 4.4, que no admite (como era de esperar) una inmersión en el plano sin acumulación de vértices (inmersión VAP-plana). Sin embargo, ese mismo grafo infinito admite inmersiones en el cilindro sin acumulación, según se representa en la Figura 4.5.

Es obvio que éste no es el único ejemplo posible de grafo que no admite una inmersión sin acumulación en una superficie S pero sí en $S(n)$ para algún $n \in \mathbb{N}$. De hecho, para todo $n \in \mathbb{N}$, se pueden encontrar grafos con solo $n+1$ finales que no admitan una inmersión sin acumulación en $S(n)$ pero sí en $S(n+1)$. $\triangleleft$

Por otra parte, si S es una superficie compacta, $n \in \mathbb{N}$ y G es un grafo numerable con todos sus finales estables y que no admite una inmersión sin acumulación en $S(n)$, ninguna compactificación de G por n puntos admite una inmersión en S (ver [70]).

Establezcamos ahora la relación entre la acumulación de vértices y la de aristas en los grafos peri en superficies tubulares:

Proposición 4.2.6 *Todo grafo p-peri-$S(n)$ admite una inmersión en $S(n)$ sin acumulación de vértices ni de aristas y con todos los vértices en una misma cara.*

El recíproco de la Proposición 4.2.6 es evidente. Para probar la que nos ocupa necesitamos enunciar antes algunos resultados:

Lema 4.2.7 *Los grafos formados por infinitos K_5 o infinitos $K_{3,3}$ pegados por un punto no admiten inmersión en ninguna superficie compacta.*

Demostración: Sea G un grafo cuyos bloques son G_i, con $i = 1, \ldots, n$. Según probaron Battle, Harary, Kodama y Youngs [9], el género orientable de G se puede expresar en función de los géneros de los G_i como

$$\gamma(G) = \sum_{i=1}^{n} \gamma(G_i).$$

Stahl y Beineke [77] dieron la fórmula equivalente para el género no orientable:

$$\tilde{\gamma}(G) = \begin{cases} 1 - n + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\gamma}(G_i) \text{ si } \tilde{\gamma}(G_i) = 2\gamma(G_i) + 1 \text{ para } i = 1, \ldots, n \\ \\ 2n - \sum_{i=1}^{n} \text{máx}\{2 - 2\gamma(G_i), 2 - \tilde{\gamma}(G_i)\} \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Aunque esta última fórmula puede escribirse de forma más sencilla como:

$$\tilde{\gamma}(G) = \begin{cases} 1 + 2\sum_{i=1}^{n} \gamma(G_i) \text{ si } \tilde{\gamma}(G_i) = 2\gamma(G_i) + 1 \text{ para } i = 1, \ldots, n \\ \\ \sum_{i=1}^{n} \text{mín}\{2\gamma(G_i), \tilde{\gamma}(G_i)\} \text{ e.o.c.} \end{cases}$$

Evidentemente, $\gamma(K_5) \geq 1$, $\gamma(K_{3,3}) \geq 1$, $\tilde{\gamma}(K_5) \geq 1$ y $\tilde{\gamma}(K_{3,3}) \geq 1$ (de hecho, todos valen 1). Por eso, el género de la unión por un punto de infinitos K_5 ó $K_{3,3}$ es necesariamente infinito, a pesar de que el género de cualquier superficie compacta (orientable o no) es finito. □

Lema 4.2.8 *Los grafos formados por infinitos K_4 o infinitos $K_{2,3}$ no admiten inmersión con todos los vértices en una misma cara en ninguna superficie compacta.*

Demostración: Por reducción al absurdo, si G es un grafo que contiene infinitos K_4 y con una inmersión peri en una superficie compacta, $G + K_1$ es un grafo que contiene infinitos K_5 y con una inmersión en una superficie compacta, contra el Lema 4.2.7.

En el otro caso, si G contiene infinitos $K_{2,3}$, $G + K_1$ contiene infinitos $K_{3,3}$ y se concluye de la misma forma. □

Aún se pueden probar otros dos resultados relacionados con las inmersiones que estamos tratando:

Lema 4.2.9 *Los grafos formados por infinitos grafos de Halin (de la Figura 7) pegados por un punto no admiten inmersión sin acumulación de vértices en $S(n)$ para ninguna superficie compacta S y $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Compactificando convenientemente los infinitos grafos de Halin, solo hay que aplicar el Lema 4.2.7. □

Lema 4.2.10 *Los grafos formados por infinitos A_1^1 o infinitos B_1^1 (de la Figura 12) no admiten inmersión con todos los vértices en una misma cara en $S(n)$ para ninguna superficie compacta S y $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Si a B_1^1 se le añade un nuevo vértice adyacente con un vértice de cada uno de sus rayos, se obtiene $K_{3,3}^{\infty}$; si a A_1^1 se le añade un vértice adyacente con 3 vértices de valencia 2, dos de los cuales pertenecen al ciclo, se obtiene $L_{3,3}^{\infty}$.

Como en la demostración del Lema 4.2.8, al sumar K_1 a infinitos L_4 ó $L_{2,3}$, se obtienen infinitos grafos de Halin pegados por un punto, grafo cuya planaridad iría contra el Lema 4.2.9. □

Dos inmersiones son equivalentes cuando sus caras respectivas tienen los mismos vértices; la demostración de los dos siguientes enunciados se tiene en [25].

Proposición 4.2.11 *[25] Un grafo EAP-$S(n)$ con una inmersión VAP-$S(n)$ admite una inmersión EAP-$S(n)$ equivalente a la anterior.* □

Proposición 4.2.12 *[25] Sea G un grafo con una cantidad finita de componentes planas finitas. G no es EAP-$S(n)$ si y solo si existen $k \in \{0, \ldots, n\}$, $H_1, \ldots, H_k$ y J tales que: H_i es homeomorfo a $P(K_5)$ ó $P(K_{3,3})$ para cada i, J no es VAP-$S(n-k)$ y $H_1 \cup \ldots \cup H_k \cup J$ es un subgrafo de G.* □

De acuerdo con estos resultados, ya estamos en condiciones de continuar:

Demostración de la Proposición 4.2.6: Utilizando tanto el Lema 4.2.8 como el 4.2.10, se sabe que un grafo p-peri-$S(n)$ solo puede tener una cantidad finita de componentes no VAP-periplanas. El resto de las componentes no afectan a la peri-$S(n)$-representabilidad pues se pueden dibujar en la cara no acotada (en la que se puede suponer que están todos los vértices) sin acumulación de vértices ni de aristas. Por tanto, se demuestra el caso en que hay una cantidad finita de componentes conexas.

Sea G un grafo p-peri-$S(n)$ con una cantidad finita de componentes conexas. Utilizando la equivalencia de la Proposición 4.2.12, veamos que G es EAP-$S(n)$:

Si $k > 0$, G tendría un subgrafo homeomorfo a $P(K_5)$ o a $P(K_{3,3})$, luego contendría infinitos K_4 ó $K_{2,3}$. Pero eso no es posible, ni siquiera permitiendo acumulación, según el Lema 4.2.8.

Si $k = 0$, G tendría un subgrafo no VAP-$S(n)$, pero esto tampoco es posible porque G es VAP-$S(n)$ por ser p-peri-$S(n)$.

Entonces, como G es EAP-$S(n)$, por la Proposición 4.2.11, admite una inmersión EAP-$S(n)$ que tiene todos los vértices en una misma cara. □

Antes de utilizar estas nociones para intentar caracterizar los grafos peri-$S(n)$, resulta conveniente introducir el concepto de inmersión coloreada de un grafo y relacionarlo con las inmersiones peri en superficies tubulares cuyos finales también están etiquetados.

4.3 Coloración de los finales de un grafo

Una *coloración de los finales de un grafo* es una asignación que a cada final del grafo le hace corresponder un entero positivo (al que se suele llamar *color*). En este contexto, una *n-coloración* es una coloración de los finales de un grafo que utiliza n colores. Tras dotarlo de una n-coloración, dicho grafo se denomina *n-coloreado*.

Ejemplo 4.3.1 Todo grafo con no menos de n finales admite una n-coloración. En la Figura 4.6 se representan una 2-coloración y una 3-coloración de un mismo grafo con 3 finales. ◁

En [70], Revuelta define una VAP-coloración de G en $S(n)$ como una inmersión de G en $S(n)$ sin acumulación de vértices y de tal forma que dos finales de G van a un mismo final de $S(n)$ si y solo si tienen asignado el mismo color. Este concepto puede adaptarse para el estudio de los grafos peri en una superficie tubular:

Un grafo numerable G se dice *c-peri-$S(n)$* cuando existe una VAP-coloración de G en $S(n)$ con todos los vértices de G en una misma cara.

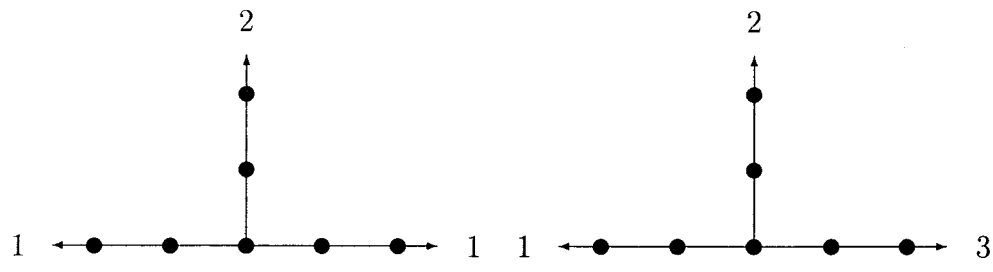

Figura 4.6: Una 2-coloración y una 3-coloración.

Sea $n \in \mathbb{N}$. En el conjunto de los grafos n-coloreados, se pretende definir una relación de orden parcial de modo que grafos menores que grafos c-peri-$S(n)$ sean siempre c-peri-$S(n)$. Para ello, se utilizan operaciones sobre los grafos numerables a las que se les impone que no *modifiquen* la n-coloración de la que se ha dotado al grafo:

- La operación $Op1$ consiste en obtener un subgrafo sin alterar la coloración de los finales que no se hayan eliminado.
- La operación $Op2$ actúa contrayendo una arista, identificando sus 2 vértices. $Op2$ hace desaparecer un vértice y, al menos, una arista; pero mantiene el número de finales del grafo n-coloreado y no afecta a la n-coloración del grafo.

Sobre el conjunto de los grafos n-coloreados se definen las relaciones $\mathcal{R}$ y $\leq$ de forma que $G_1 \mathcal{R} G_2$ cuando G_1 se obtiene de G_2 por la aplicación de $Op1$ o de $Op2$ y $\leq$ es la clausura reflexiva y transitiva de la relación $\mathcal{R}$. $\leq$ es la relación de orden parcial que se estaba buscando y se dirá que el grafo G_1 de finales coloreados es un *menor* de G_2 (también de finales coloreados) cuando $G_1 \leq G_2$.

Es claro que existe una lista de menores prohibidos como para cualquier propiedad hereditaria de los grafos, pues todo menor de un grafo c-peri-$S(n)$ también es c-peri-$S(n)$: si G no verifica dicha propiedad, o es mínimo (luego "prohibido") o no lo es (luego contiene estrictamente algún "prohibido"). Según se comentó con anterioridad, si la lista de menores prohibidos existe, es finita. Además, si existe la lista de menores prohibidos, existe también una lista de menores topológicos prohibidos. En este caso que nos ocupa, la lista de menores c-peri-$S(n)$ prohibidos es finita, según se podrá deducir a posteriori: se va a describir un algoritmo finito para obtener los menores c-peri-$S(n)$ prohibidos a partir de un conjunto finito (se sabe que la lista de menores topológicos peri-S prohibidos es finita en cualquier superficie S [7, 71]).

De un modo análogo a como se hizo notar antes de hablar de coloraciones, todo menor (por tanto, también todo subgrafo) de un grafo c-peri-$S(n)$ es c-peri-$S(n)$ y cada inmersión c-peri-$S(n)$ del grafo induce una en el menor de forma natural). También se pueden utilizar las definiciones usuales de menores prohibidos y menores topológicos prohibidos y transcribir la Proposición 4.2.1 y el Corolario 4.2.2 para el caso actual en que se trata con grafos c-peri-$S(n)$, en los que tampoco habrá acumulación de aristas.

En cuanto a las Definiciones 4.2.3 y 4.2.4, ahora hay que procurar otras nuevas que respondan a la aparición de diferentes tipos (colores) de finales, lo que se puede interpretar intuitivamente como la descompactificación hacia *varios infinitos* o la compactificación por varios puntos distintos.

Sean G un grafo finito, $v_1, \ldots, v_r$ vértices no aislados de G y $p_1, \ldots, p_s$ puntos interiores de aristas de G. La *descompactificación* de G por los $r+s$ puntos $v_1, \ldots, v_r, p_1, \ldots, p_s$ es el grafo (infinito) numerable $r+s$-coloreado que resulta al descompactificar sucesivamente G por $p_1, \ldots, p_s, v_1, \ldots, v_r$ coloreando con un color distinto los finales que aparezcan en cada paso. De hecho, también se puede descompactificar G por puntos que no pertenecen a G sino a una descompactificación suya.

Hay que aclarar que es posible alterar el orden de las descompactificaciones distinguiendo vértices o aristas, en el sentido dado en [44]. En cualquier caso, tal descompactificación por los $r+s$ puntos dados es única.

Sea G un grafo n-coloreado cuyos finales son todos estables. Se dice que G^* es una *compactificación de G (por n puntos)* cuando G es la descompactificación de G^* por algún conjunto de vértices o puntos interiores de aristas formado por n elementos.

En la situación anterior, la compactificación por n puntos de un grafo n-coloreado es única salvo homeomorfismos, lo cual permite comenzar a pensar en que las compactificaciones y descompactificaciones pueden ser útiles para el estudio de los grafos c-peri-$S(n)$.

Ejemplo 4.3.2 La descompactificación de K_4 por 2 puntos interiores, respectivamente, a 2 aristas no adyacentes produce el grafo de la Figura 4.7, que se puede representar en el cilindro sin acumulación y que admite, incluso, inmersiones p-peri-$S^2(n)$ para cualquier $n \geq 2$.

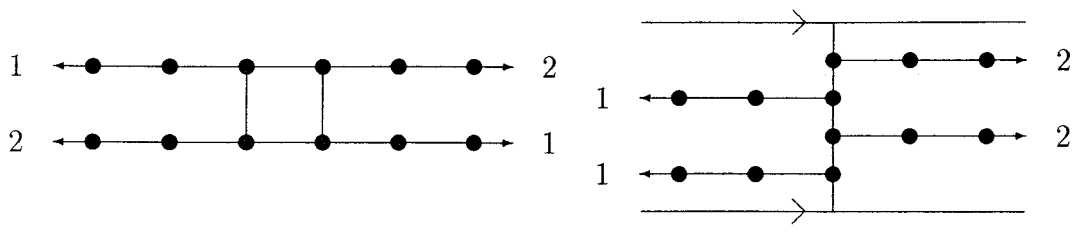

Figura 4.7: Un grafo no c-peri-$S^2(2)$ y una inmersión no p-peri-$S^2(2)$.

Sin embargo, no es posible dar una inmersión peri de dicho grafo sin acumulación, manteniendo su coloración de finales y asignando un final distinto del cilindro a cada color. ◁

De acuerdo con esto, las descompactificaciones de los grafos periplanos prohibidos deberían tener significado para la c-peri-$S^2(n)$-representabilidad, aunque no lo tuvieran del mismo modo para la p-peri-$S^2(n)$-representabilidad.

4.4 Caracterización de los grafos c-peri-$S(n)$

Antes de proseguir en la línea que parece sugerir el Ejemplo 4.3.2, es necesario justificar que un procedimiento basado en la compactificación y descompactificación puede ser válido. En la situación de resultados anteriores, se enuncia la siguiente (que habrá que adaptar luego para grafos con los finales no coloreados):

Proposición 4.4.1 *Sean G un grafo n-coloreado con todos sus finales estables y S una superficie compacta. Son equivalentes:*

1. *G es c-peri-$S(n)$.*
2. *Toda compactificación de G por n puntos es peri-S.*

Demostración:

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Como G es c-peri-$S(n)$, existe una inmersión de G en $S(n)$ sin acumulación que verifica:

- A cada final de $S(n)$ solo van finales de G que son rayos y que tienen el mismo color entre sí.

- Todos los vértices de G están en una misma cara C. Ésta es necesariamente no acotada si G posee, al menos, un final estable.

Cualquier compactificación de G por n puntos debe sustituir los rayos que van a un mismo final (o una parte infinita de ellos) por un vértice que será adyacente con aquéllos que lo eran con los rayos a que sustituye (si dicho vértice es de valencia 2, hay compactificaciones que lo consideran *punto interior de una arista*). Si se compactifica la superficie no compacta $S(n)$ con n puntos distintos y se utilizan esos mismos n puntos para representar a los vértices que deben sustituir a los rayos, el resultado es una prueba de que el nuevo grafo es peri-S, pues la cara C se ha transformado en otra que, aunque acotada como S, pasa por todos los vértices del nuevo grafo.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Sea G^* una compactificación de G por los puntos $\{a_1, \ldots, a_n\}$ (vértices o puntos interiores de aristas de G^*). La descompactificación de G^* por $\{a_1, \ldots, a_n\}$ se puede representar, de forma natural, en S con todos los vértices en la misma cara y con acumulación de vértices solo en los puntos a_i, con $1 \leq i \leq n$; para ello, solo hay que subdividir convenientemente (aunque infinitas veces) cada arista que *toca* a a_i para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Conviene destacar que todos los puntos de las nuevas aristas están en la misma cara que todos los vértices gracias a que se puede repetir este mismo razonamiento, si fuera preciso, para otra compactificación con mayor número de vértices de valencia 2. Y esto concluye la prueba, pues la descompactificación de G^* no puede tener finales no estables, por lo que la inmersión que se ha dado es de todo el grafo G y se transforma mediante homeomorfismo en una c-peri-$S(n)$. □

De esta Proposición 4.4.1 pueden extraerse, inmediatamente, dos propiedades:

Corolario 4.4.2 *Sean S una superficie compacta y G^* un grafo finito y peri-S que admite una inmersión con todas las aristas en la misma cara. Entonces, todas las descompactificaciones de G^* por n puntos son c-peri-$S(n)$.*

Demostración: Se puede repetir el final de la demostración anterior sin necesidad de exigir que todas las compactificaciones sean peri-S gracias a que hay una inmersión con todas las aristas en la misma cara. En realidad, sería suficiente exigir que estén en la misma cara que los vértices aquellas aristas *incidentes* con alguno de los puntos por los que se va a descompactificar. □

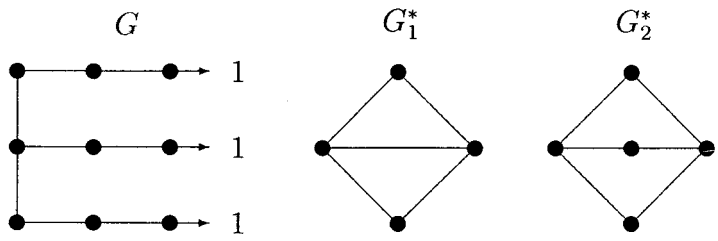

Figura 4.8: Un grafo no c-peri-$S^2(2)$ y 2 compactificaciones suyas.

Corolario 4.4.3 *Sean S una superficie compacta y H^* un grafo finito no peri-S. Si H es una descompactificación de H^* por n puntos, H no es c-peri-$S(n)$.*

Demostración: La descompactificación de H^* por n puntos dados, se puede compactificar de modo que se obtenga H^*. □

Sean G un grafo n-coloreado con todos sus finales estables y S una superficie compacta. No es cierto que si existe una compactificación de G por n puntos que sea peri-S, tengan que serlo todas. De hecho, dado un grafo finito y peri-S, G^*, puede haber descompactificaciones de G^* por n puntos que no sean c-peri-$S(n)$.

Sin embargo, sí se puede admitir una cierta relación entre las compactificaciones: todas las compactificaciones de G por n puntos son homeomorfas entre sí y se distinguen unas de otras por los vértices de valencia 2 que se pueden evitar al compactificar.

Ejemplo 4.4.4 En la Figura 4.8, se representa un grafo, G, no c-peri-$S^2(n)$ para ningún $n \in \mathbb{N}$ y dos compactificaciones distintas; la primera, G_1^*, es peri-S^2, mientras que la segunda, G_2^*, no. ◁

Aunque no lo parezca a priori, con esto queda abierta la posibilidad de caracterizar los grafos c-peri-$S(n)$, según se deduce de los resultados que se ven a continuación.

Teorema 4.4.5 *Sean S una superficie compacta, $n \in \mathbb{N}$ y G un grafo n-coloreado. Si G es un menor topológico c-peri-$S(n)$ prohibido, entonces alguna compactificación de G por n puntos es un menor topológico peri-S-prohibido.*

Demostración: En virtud del resultado análogo a la Proposición 4.2.1 para finales coloreados, todos los finales de los menores topológicos c-peri-$S(n)$ prohibidos son estables, por lo que tiene sentido utilizar el desarrollo teórico anterior.

Si G no es c-peri-$S(n)$, tampoco será peri-S (por la anterior Proposición 4.4.1) alguna compactificación de G por n puntos, a la que llamaremos G^*.

Si G^* no es subdivisión de un menor topológico peri-S prohibido, existe al menos una arista $e \in A(G^*)$ de modo que $G^* - e$ no es peri-S (obviamos el caso trivial en que solo *sobrarían* vértices aislados). Pero la descompactificación del grafo finito $G^* - e$ por n puntos *equivalentes* a los de antes produce un subgrafo propio de G que no es c-peri-$S(n)$, en contra de lo que se había supuesto.

Luego G^* es subdivisión de un menor topológico peri-S prohibido; pero si G^* no es peri-S prohibido, existen vértices de valecia 2 *sobrantes* en G^*. Estos vértices pueden proceder bien de la compactificación de alguno de los rayos (en cuyo caso, está claro que se podrían evitar compactificando convenientemente G) o bien del resto del grafo (habría que proceder como en el párrafo anterior para llegar a contradicción con la hipótesis de que G es c-peri-$S(n)$ prohibido). □

Corolario 4.4.6 *Sean S una superficie compacta, $n \in \mathbb{N}$ y G un grafo n-coloreado. Si G es un menor c-peri-$S(n)$ prohibido, entonces tiene como compactificación por n puntos algún menor topológico peri-S prohibido.*

Demostración: G también es menor topológico c-peri-$S(n)$ prohibido, luego se puede aplicar el Teorema 4.4.5. □

En cuanto al recíproco del Teorema 4.4.5, no es cierto: si G^* es un grafo peri-S prohibido, ninguna descompactificación por n puntos de G^* es c-peri-$S(n)$, pero no tiene que ser c-peri-$S(n)$ prohibido. Por ejemplo, el grafo M_4^1 de la Figura 4.10 tiene como compactificación a K_4, que es un menor topológico peri-S^2 prohibido a pesar de lo cual M_4^1 no es c-peri-$S^2(1)$ prohibido, según se verá.

Por otra parte, tampoco es posible probar que alguna compactificación por n puntos de un menor c-peri-$S(n)$ prohibido es menor peri-S prohibido; se podrá describir un contraejemplo cuando se traten los grafos p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$.

El último corolario que se ha enunciado resulta ser una poderosa herramienta para dar una lista de menores c-peri-$S(n)$ prohibidos (de la que se podría obtener otra de menores topológicos prohibidos) para cualquier $n \in \mathbb{N}$ no demasiado

grande (aunque fuera posible, resultaría inmanejable) y para aquellas superficies compactas, S, de las que se conozcan los menores peri-S prohibidos. Conocida la lista de menores peri-S prohibidos, por ejemplo, solo habría que elegir los puntos para descompactificar e ir generando menores c-peri-$S(n)$ prohibidos.

No obstante, para calcular las listas, debemos restringirnos a las únicas superficies para las que se conocen los peri-S prohibidos: la esfera, S^2, y el plano proyectivo, $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Se podría realizar un desarrollo teórico similar al anterior para el caso en que S sea una seudosuperficie. Aprovechando la existencia de listas de menores prohibidos para la peri-representabilidad finita en ciertas seudosuperficies, se pueden conocer las listas de menores (o de menores topológicos) c-peri-$S(n)$ prohibidos e, incluso, en algunos casos, las caracterizaciones de los grafos p-peri-$S(n)$. Se deja abierta la posibilidad de futuros trabajos en este sentido.

4.5 Grafos c-peri-$S^2(n)$

Además de servir como paso previo en la caracterización de los grafos p-peri-$S^2(n)$, puede resultar interesante y aplicable conocer cuáles son los grafos peri cuando se exige que cada final infinito vaya a un final concreto de la superficie tubular en que se da la inmersión.

Sin perder esto de vista, comencemos estudiando el caso concreto de la superficie esférica, donde podemos apoyarnos en el Teorema de Chartrand y Harary (que caracteriza los grafos c-peri-$S^2(0)$, que son también los p-peri-$S^2(0)$). Inicialmente, cuando n toma los primeros valores naturales, se propone el desarrollo de un procedimiento consecuente con la teoría expuesta hasta el momento. Su aplicación facilita, por cierto, la explicación del caso general que se resolverá más tarde, por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$.

4.5.1 Grafos c-peri-$S^2(1)$

La descompactificación de K_4 y de $K_{2,3}$ como menores topológicos prohibidos para la peri-representabilidad finita nos proporcionará todos los menores infinitos c-peri-$S(1)$ prohibidos, que son los obtenidos por Boza, Diánez y Márquez en [24] como menores topológicos p-periplanos prohibidos.

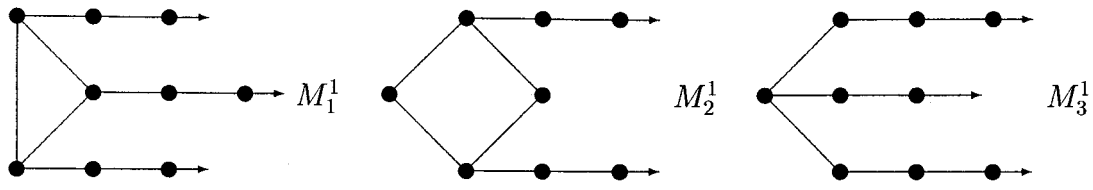

Figura 4.9: Descompactificaciones de K_4 y $K_{2,3}$ por un vértice.

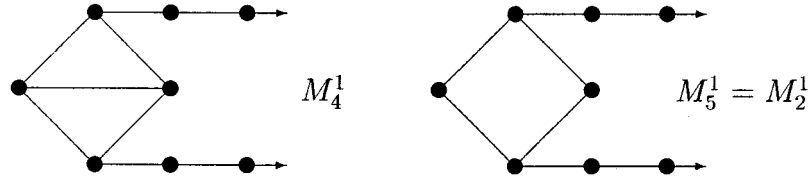

Figura 4.10: Descompactificaciones de K_4 y $K_{2,3}$ por una arista.

En K_4 se puede descompactificar por uno cualquiera de los vértices (todos juegan el mismo papel), con lo que se obtiene un único grafo: el M_1^1 de la Figura 4.9.

Si se descompactifica por un vértice de $K_{2,3}$, se puede hacer por un vértice de valencia 2 (M_2^1 de la Figura 4.9) o por uno de valencia 3 (M_3^1 de la Figura 4.9).

Pero, tanto en K_4 como en $K_{2,3}$, se puede descompactificar por un punto interior a una arista (tanto en K_4 como en $K_{2,3}$, todas las aristas juegan el mismo papel) resultando, respectivamente, M_4^1 y $M_5^1 = M_2^1$ de la Figura 4.10.

Por tanto, la lista de menores prohibidos para la p-periplanaridad (menores p-peri-$S^2(1)$ o, lo que es lo mismo, c-peri-$S^2(1)$ prohibidos) se obtiene al eliminar los redundantes de $\{M_i^1\}_{i=1,2,3,4}$; es decir (como M_1^1 tiene como menor a M_3^1 y M_2^1 es menor de M_4^1) son los dos grafos infinitos de la Figura 4.11 a los que llamaremos, en adelante, $A_1^1 = M_2^1$ y $B_1^1 = M_3^1$. [2] El resultado siguiente puede compararse con el Teorema 0.3.5, ya presentado.

Teorema 4.5.1 *[24] Un grafo infinito numerable es p-periplano si y solo si no tiene como menores a K_4, $K_{2,3}$, A_1^1 ó B_1^1.*

□

[2] La notación más utilizada para denotar estos menores es $L_4 = M_3^1$ y $L_{2,3} = M_2^1$; se da otra por ser más fácil de generalizar en el estudio la que sigue y para no confundir con seudosuperficies ya tratadas en esta memoria.

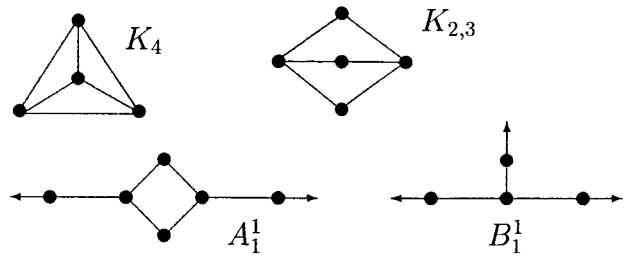

Figura 4.11: Menores c-peri-$S^2(1)$ prohibidos.

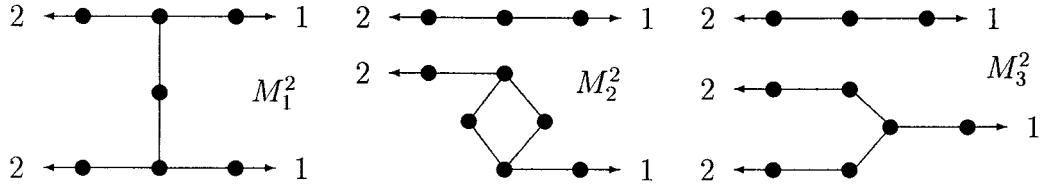

Figura 4.12: Descompactificaciones de A_1^1 por vértices.

4.5.2 Grafos c-peri-$S^2(2)$

A partir de A_1^1 y B_1^1 se van a obtener nuevos menores prohibidos al descompactificar vértices o aristas. En esta ocasión, colorearemos los nuevos rayos de forma diferente a como se había hecho con los obtenidos hasta ahora (es una 2-coloración).

En A_1^1 hay 3 tipos de vértices (los de valencia 2 que pertenecen a un ciclo, los de valencia 2 que no pertenecen a ningún ciclo y los de valencia 3), por lo que hay que estudiar 3 descompactificaciones distintas (las M_1^2, M_2^2 y M_3^2 de la Figura 4.12).

En B_1^1 hay (a efectos de descompactificación) 2 tipos de vértices (los hay de valencia 2 y el de valencia 3), con lo que surgen los menores M_4^2 y M_5^2 de la Figura 4.13.

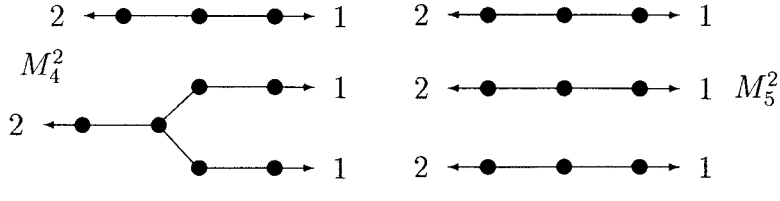

Figura 4.13: Descompactificaciones de B_1^1 por vértices.

En un intento de proporcionar una notación útil para el desarrollo posterior, llamamos $A_1^2 = M_2^2$, $A_2^2 = M_1^2$, $B_1^2 = M_3^2$ y $C_1^2 = M_5^2$.

En cuanto a la descompactificación por puntos interiores a aristas, vamos a probar que no es necesaria en nuestro caso, ya que solo se obtendrían menores prohibidos redundantes de entre los M_i^2 que se consiguiesen. Necesitamos algunos lemas previos:

Lema 4.5.2 *Sea G un grafo finito en que cada arista es incidente con algún vértice de valencia 2. Al descompactificar G por un punto interior a una arista, se obtiene un grafo que resulta de G al descompactificar por un vértice adecuado.*

Demostración: Basta tomar como *vértice adecuado* uno de valencia 2 incidente con la arista que se había usado para descompactificar G. □

Lema 4.5.3 *Sean G un grafo y H una descompactificación de G por un vértice. Entonces, si cada arista de G es incidente con algún vértice de valencia 2, también lo es cada arista de H.*

Demostración: Si el vértice por el que se descompactifica G no era de valencia 2, no hay nada que probar, pues los nuevos vértices pertenecen a un rayo. Pero tampoco si era de valencia 2, pues las aristas que eran incidentes con él ahora lo son con nuevos vértices de valencia 2. □

Corolario 4.5.4 *Sea M un menor c-peri-$S^2(n)$ prohibido, con $n \geq 1$. Entonces cada arista de M es incidente con algún vértice de valencia 2.*

Demostración: Obsérvese que cada arista de A_1^1 y de B_1^1 es incidente con algún vértice de valencia 2. □

Con esto, se simplifica bastante la búsqueda de menores prohibidos que nos ocupa. De todos modos, no deben olvidarse otros menores prohibidos: los que ya lo eran en etapas pasadas de nuestro proceso iterativo.

Nótese que un menor c-peri-$S^2(n-1)$ prohibido sigue siendo c-peri-$S^2(n)$ prohibido pese a que solo tiene finales de $n-1$ colores distintos. Sin embargo, puede que exista otra coloración para la que el grafo sea p-peri-$S^2(n)$. El caso más sencillo con esta situación se presenta para A_1^1, que admite una coloración que hace que sea

p-pericilíndrico (p-peri-$S^2(2)$) a pesar de no serlo si se mantiene su coloración plana (un solo final de Freudenthal).

Conforme se ha hecho hasta ahora, denotamos por M_i^n a los grafos que surgen de la descompactificación por vértices de los menores c-peri-$S^2(n-1)$ prohibidos.

Puede pensarse, incluso, que habría que descompactificar también todos los M_i^{n-1} (incluso los redundantes) para obtener los M_i^n y no descompactificar solo los menores c-peri-$S^2(n)$ prohibidos, como se ha hecho. Pero esto no es necesario, como se ve a continuación.

En un grafo G que ha resultado ser redundante, la descompactificación puede realizarse bien por algún vértice que no está ya en ningún menor c-peri-$S^2(n-1)$ prohibido o bien por un vértice que aún permanece en alguno:

- En el primer caso (como ocurre en el Ejemplo 4.3.2, que resulta tener como menor a A_1^1 tras la primera descompactificación) el grafo G tiene como menor a un menor c-peri-$S^2(1)$ prohibido y también la segunda descompactificación tiene como menor al mismo menor prohibido, luego es redundante.

- En el segundo caso, la descompactificación de G tiene como menor a una descompactificación de un menor de G que era c-peri-$S^2(n-1)$ prohibido, luego también es redundante.

En consecuencia, tiene sentido obviar "grafos redundantes" al realizar las descompactificaciones para obtener los menores c-peri-$S^2(n)$ prohibidos y, evidentemente, tampoco se necesita descompactificar menores que ya se han descompactificado en pasos anteriores (basta renombrar los finales).

Teniendo en cuenta, además, el Lema 4.5.2, el Lema 4.5.3 y el Corolario 4.5.4, se obtiene:

Corolario 4.5.5 *Si $n \geq 2$, todo menor c-peri-$S^2(n)$ prohibido es bien c-peri-$S^2(n-1)$ prohibido o bien la descompactificación por un vértice de algún menor c-peri-$S^2(n-1)$ prohibido.*

□

De todo lo anterior se deduce el *Teorema de caracterización* de los grafos c-peri-$S^2(2)$, como también se deducirán para un mayor número de "tubos", n:

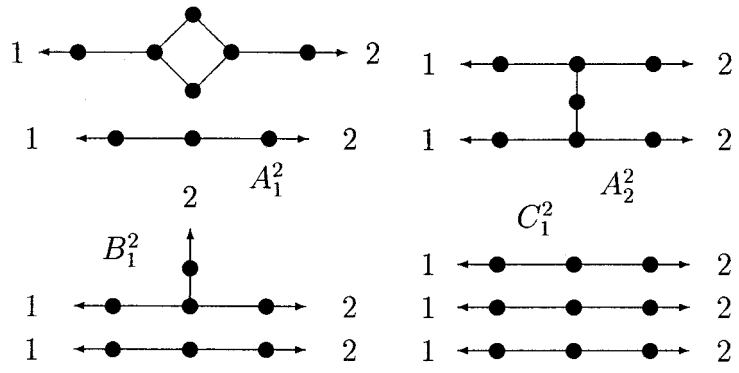

Figura 4.14: Menores c-peri-$S^2(2)$ prohibidos.

Teorema 4.5.6 *Un grafo infinito numerable es c-peri-$S^2(2)$ si y solo si no tiene como menores a K_4, $K_{2,3}$, A_1^1, B_1^1, A_1^2, A_2^2, B_1^2 ó C_1^2.*

□

4.5.3 Grafos c-peri-$S^2(3)$

Repitiendo el proceso de descompactificación por vértices y eliminando los menores que resultan redundantes, se obtienen los A_1^3, A_2^3, A_3^3, B_1^3, B_2^3 y C_1^3 de la Figura 4.15, con los que se puede enunciar el correspondiente Teorema de caracterización:

Teorema 4.5.7 *Un grafo infinito numerable es c-peri-$S^2(3)$ si y solo si no tiene como menores a K_4, $K_{2,3}$, A_1^1, B_1^1, A_1^2, A_2^2, B_1^2, C_1^2, A_1^3, A_2^3, A_3^3, B_1^3, B_2^3 ó C_1^3.*

□

4.5.4 Tipos de menores c-peri-$S^2(n)$ prohibidos

Si se prescindiese de coloraciones, ya es posible determinar cuáles serán los menores c-peri-$S^2(n)$ prohibidos en el caso general ($n \in \mathbb{N}$) que no se había podido describir hasta ahora. Los menores prohibidos son de 5 tipos:

Tipo 1. Los menores de este tipo constan de n componentes conexas. Una de ellas (salvo, eventualmente, por su coloración de finales) es A_1^1; las restantes son 2-caminos.

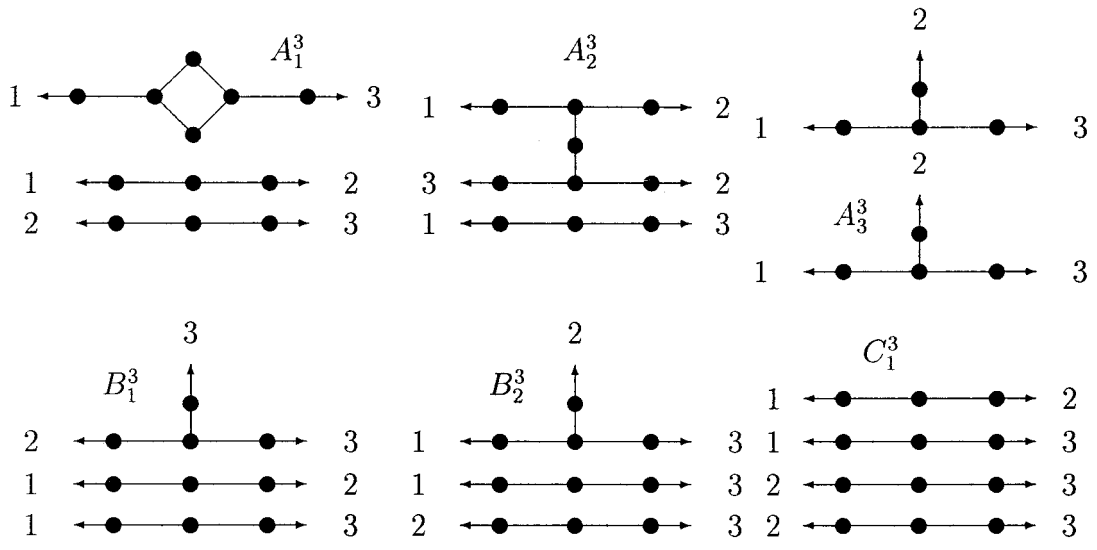

Figura 4.15: Menores c-peri-$S^2(3)$ prohibidos.

Tipo 2. Constan de $n-1$ componentes. Una es (salvo coloración) A_2^2; las otras son 2-caminos.

Tipo 3. Constan de $n-1$ componentes. Dos son (salvo coloración) B_1^1; las otras son 2-caminos.

Tipo 4. Constan de n componentes. Una es (salvo coloración) B_1^1; las otras son 2-caminos.

Tipo 5. Constan de $n+1$ componentes, que son 2-caminos.

La descompactificación de un menor de uno de los tipos anteriores, produce otro menor de uno de esos tipos pero con un 2-camino más de los que corresponde al caso n-ésimo, como es fácil comprobar:

- Al descompactificar un menor c-peri-$S^2(n)$ prohibido de **Tipo 1**, se obtienen menores que se verá que son c-peri-$S^2(n+1)$ prohibidos y de **Tipo 1**, **Tipo 2** o **Tipo 4**.
- Los de **Tipo 2** producen menores de **Tipo 2**, **Tipo 3** o **Tipo 4**.
- Del **Tipo 3** se obtienen menores de **Tipo 3** o **Tipo 4**.
- Los de **Tipo 4** generan de **Tipo 4** o **Tipo 5**.

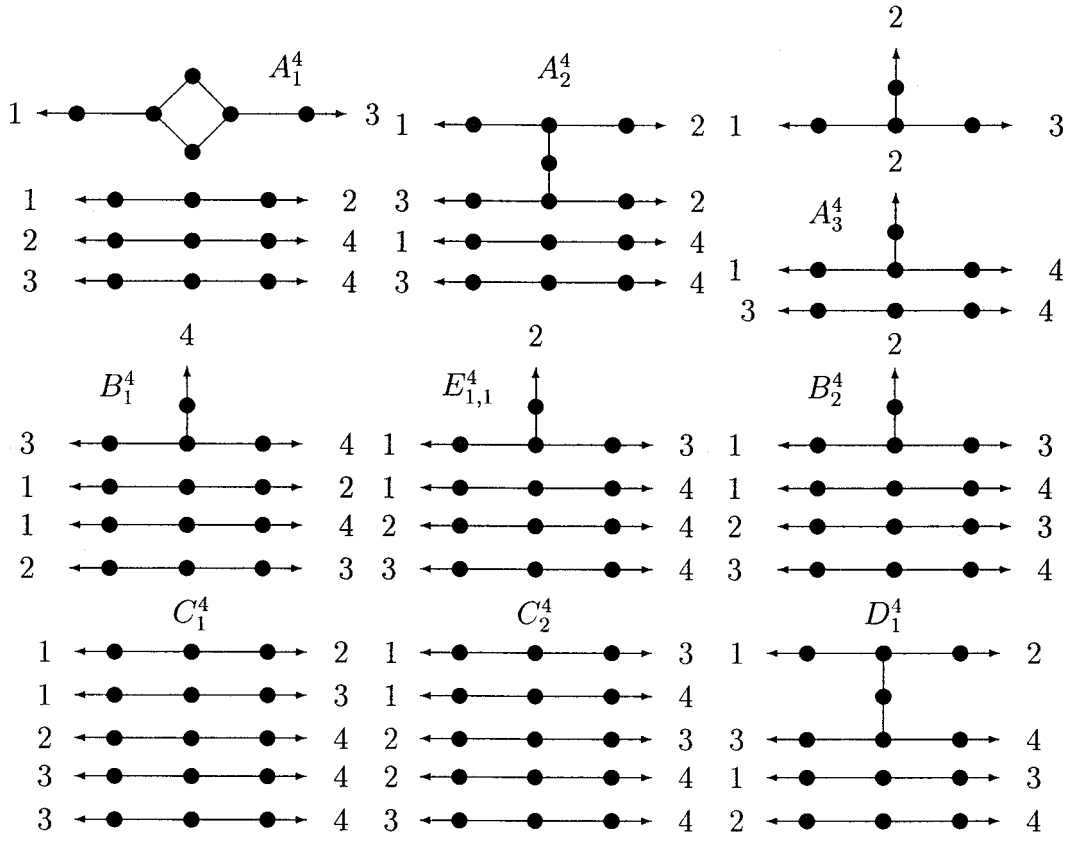

Figura 4.16: Menores c-peri-$S^2(4)$ prohibidos.

- Del **Tipo 5** salen menores solo de **Tipo 5**.

Puede parecer que esto posibilita una caracterización para todo $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, presentaremos un caso particular más porque permitirá realizar varias observaciones sobre las coloraciones de dichos menores prohibidos.

4.5.5 Grafos c-peri-$S^2(4)$

Como en los pasos anteriores, la descompactificación por vértices produce una lista de menores c-peri-$S^2(4)$ prohibidos, que se han denotado como A_1^4, A_2^4, A_3^4, B_1^4, B_2^4, C_1^4, C_2^4, D_1^4 y $E_{1,1}^4$ en la Figura 4.16.

Teorema 4.5.8 *Un grafo infinito numerable es c-peri-$S^2(4)$ si y solo si no tiene como menores a K_4, $K_{2,3}$, A_1^1, B_1^1, A_1^2, A_2^2, B_1^2, C_1^2, A_1^3, A_2^3, A_3^3, B_1^3, B_2^3, C_1^3 A_1^4, A_2^4, A_3^4, B_1^4, B_2^4, C_1^4, C_2^4, D_1^4 ó $E_{1,1}^4$.*

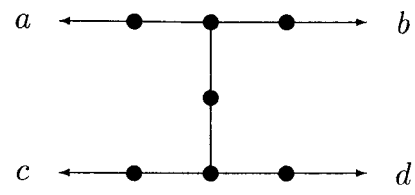

Figura 4.17: Componente conexa de A_2^n con 4 finales.

□

Nótese que en el menor D_1^4 hay, por primera vez, una componente conexa en la que los finales tienen asignados 4 colores distintos (más adelante se verá que toda una familia de menores prohibidos, los D_j^n, verifican esta propiedad). Es claro que 4 será el máximo de colores que pueden aparecer en una misma componente conexa de un menor c-peri-$S^2(n)$ prohibido, porque también es el número máximo de finales distintos que aparece en una misma componente conexa de uno de estos menores. Desafortunadamente, este hecho no guarda relación con el célebre *Teorema de los 4 colores*,[3] sino que encuentra su motivo en que no hay subgrafos de K_4 ni de $K_{2,3}$ a los que lleguen más de 4 aristas procedentes del resto del grafo. La cantidad de 4 aristas se alcanza para cualquier K_2 contenido en K_4 o en algunos $K_{1,2}$ del $K_{2,3}$.

4.5.6 Grafos c-peri-$S^2(n)$

Para poder enunciar una caracterización de los grafos c-peri-$S^2(n)$ válida para todo $n \in \mathbb{N}$, necesitamos introducir una notación que simplifique, en lo posible, la exposición de resultados generales. Por ejemplo, denotaremos por (i, j) la coloración de los finales de un 2-camino, por (i, j, k) la de una componente conexa con 3 finales indistinguibles (si no fuese por la coloración), como ocurre en B_1^1, y por (a, b, c, d) la de la componente conexa de la Figura 4.17.

Esta notación nos posibilita describir varias familias de grafos que resultarán determinantes para dar la lista de menores c-peri-$S^2(n)$ prohibidos:

- Para $n \geq 1$, A_1^n es de **Tipo 1**. La coloración de los finales de la componente

[3] El *Teorema de los 4 colores*, del que se puede encontrar demostración en [2, 3] ha sido uno de los problemas que más han motivado el desarrollo de la Teoría de Grafos Topológicos, por las dificultades que presentó su demostración y por los diferentes problemas que se le fueron relacionando.

conexa que no es un 2-camino es 1 y n; la de los 2-caminos es $(i, i+1)$, con $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

- Para $n \geq 2$, A_2^n es de **Tipo 2**. Su coloración es $(a, b, c, d) = (1, 2, 1, n)$ para la componente conexa que no es un 2-camino y $(i, i+1)$ para los 2-caminos, con $i = 2, 3, \ldots, n-1$.

- Para $n \geq 3$, A_3^n es de **Tipo 3**. La coloración de las componentes que no son 2-caminos es, respectivamente, $(1, 2, 3)$ y $(1, 2, n)$ y, la de los 2-caminos, $(i, i+1)$, con $i = 3, 4, \ldots, n-1$.

- Para $n \geq 4$ y $h \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ (si $n = 3$, $h \in \{1, 2\}$), B_h^n es de **Tipo 4**. Su coloración es $(1, h, n)$ y, en los 2-caminos, $(i, i+1)$, con $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

- Para $n \geq 2$ e $i \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, C_i^n es de **Tipo 5**. Su coloración es $(1, i+1)$, $(1, n)$ y $(j, j+1)$ con $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

- Para $n \geq 4$ y $j \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$, D_j^n es de **Tipo 2**. Su coloración es $(a, b, c, d) = (n, 1, 2, 3)$ y, en los 2-caminos, $(i, i+1)$, con $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \setminus \{j+1\}$. Obsérvese que, si $j = 0$, se obtendría A_2^n.

- Para $n \geq 4$, $E_{1,1}^n$ es de **Tipo 4**. Su coloración es $(1, 2, 3)$ y, en los 2-caminos, $(1, n)$, $(2, n)$ e $(i, i+1)$ con $i = 3, 4, \ldots, n-1$. También, para $n \geq 4$, cualquier otro $E_{k,l}^n$ es de **Tipo 4** y su coloración es como la de $E_{1,1}^n$ salvo porque se sustituye: el 2-camino $(1, n)$ por k 2-caminos de la forma $(i, i+1)$ con $i = 1, 2, \ldots, k-1$ y (k, n) (si $k = 1$, solo aparece este último); el 2-camino $(2, n)$ por l 2-caminos de la forma $(2, k+1)$, $(i, i+1)$ con $i = k+1, k+2, \ldots, k+l-1$ y $(k+l, n)$; el resto de los 2-caminos (son $n-k-l-1$), por $(3, k+l+1)$ e $(i, i+1)$ con $i = k+l+1, k+l+2, \ldots, n-1$. En este caso, $k \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor\}$ y $l \in \{k, k+1, \ldots, \lfloor \frac{n-k-1}{2} \rfloor\}$.

- Para $n \geq 5$ y $m \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$, F_m^n es de **Tipo 3**. Su coloración es $(1, m+2, n)$, $(m+1, n-1, n)$ y, la de los 2-caminos, $(i, i+1)$, con $i \in \{1, 2, \ldots, n-2\} \setminus \{m+1\}$.

- Para $n \geq 6$, $G_{r,s}^n$ es de **Tipo 3**. Su coloración es $(1, 2, 3)$, $(n-2, n-1, n)$ y, en los 2-caminos: r 2-caminos son de la forma $(i, i+1)$ con $i = 1, 2, \ldots, r-1$ y $(r, n-1)$ (si $r = 1$, solo aparece este último); s 2-caminos son de la forma $(2, r+1)$, $(i, i+1)$ con $i = r+1, r+2, \ldots, r+s-1$ y $(r+s, n)$ (si $s = 1$, solo aparece este último); el resto de los 2-caminos (quedan $n-r-s-3$), son

$(3, r+s+1)$ e $(i, i+1)$ con $i = r+s+1, r+s+2, \ldots, n-1$. En este caso, $r \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor\}$ y $s \in \{r, r+1, \ldots, \lfloor \frac{n-r-3}{2} \rfloor\}$.

- Para $n \geq 5$, $q \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor\}$ y $p \in \{q, q+1, \ldots, \lfloor \frac{n-q}{2} \rfloor\}$, $H^n_{p,q}$ es de **Tipo 5**. Su coloración es: $n-q$ 2-caminos son $(1, n-q)$ y $(j, j+1)$ con $j = 1, 2, \ldots, n-q-1$; el resto ($q+1$ 2-caminos) son $(1, n-q+1)$, $(j, j+1)$ con $j = n-q+1, n-q+2, \ldots, n-1$ y $(n, p+1)$. Nótese que, para $q = 0$, se obtendría C^n_p.

Finalmente, para todo $n \in \mathbb{N}$, llamaremos $\mathcal{T}_n$ al conjunto formado por los grafos que se enumeran a continuación:

- $\mathcal{T}_0 = \{K_4, K_{2,3}\}$;
- $\mathcal{T}_1 = \{A^1_1, B^1_1\}$;
- $\mathcal{T}_2 = \{A^2_1, A^2_2, B^2_1, C^2_1\}$;
- $\mathcal{T}_3 = \{A^3_1, A^3_2, A^3_3, B^3_1, B^3_2, C^3_1\}$;
- $\mathcal{T}_4 = \{A^4_1, A^4_2, A^4_3, B^4_1, B^4_2, C^4_1, C^4_2, D^4_1, E^4_{1,1}\}$;
- $\mathcal{T}_n = \{A^n_1, A^n_2, A^n_3, B^n_h, C^n_i, D^n_j, E^n_{k,l}, F^n_m, G^n_{r,s}, H^n_{p,q} : h \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$, $k \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor\}$, $l \in \{k, k+1, \ldots, \lfloor \frac{n-k-1}{2} \rfloor\}$, $m \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$, $r \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor\}$, $s \in \{r, r+1, \ldots, \lfloor \frac{n-r-3}{2} \rfloor\}$, $q \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor\}$, $p \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n-q}{2} \rfloor\}\}$, con $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$ (aunque no hay ningún $G^5_{r,s}$ en $\mathcal{T}_5$).

Sin duda, se podría haber adoptado una notación más elegante unificando familias, pero la exposición resultaría bastante más oscura por cuanto los subíndices dejarían de estar relacionados con el momento en que surgen los grafos (número de finales de la superficie) y complicaría la comprensión de la demostración del teorema que se enuncia a continuación.

Teorema 4.5.9 *Con la notación anterior, un grafo infinito numerable es c-peri-$S^2(n)$ si y solo si no tiene como menor a ninguno del conjunto* $\bigcup_{\lambda=0}^{n} \mathcal{T}_\lambda$.

Demostración: Para completar la prueba por inducción sobre n, de acuerdo con lo que se ha explicado en los casos particulares, lo primero que se debe hacer es comprobar que la descompactificación por un vértice de un grafo de $\mathcal{T}_n$ es un elemento de $\mathcal{T}_{n+1}$, para todo $n \geq 4$. Esto mismo nos servirá para verificar que cada elemento de $\mathcal{T}_{n+1}$ procede de alguno de $\mathcal{T}_n$, pues se alcanzan de hecho todas las posibilidades que se describen a continuación.

- Comencemos descompactificando por vértices A_1^n:
  - Al descompactificar en los 2-caminos, veamos que se obtiene el grafo A_1^{n+1}: pongamos que se descompactifica por un vértice del 2-camino $(a, a+1)$ con $a \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. De dicho 2-camino surgen 2: $(a, n+1)$ y $(n+1, a+1)$, que llamaremos, respectivamente, (a, m) y $(m, a+1)$. Ahora, solo hay que renumerar los finales para obtener un menor cuyos finales están coloreados como se habían descrito los de A_1^{n+1}; esto es, a cada $b \in \{a+1, a+2, \ldots, n\}$ se le llama $b+1$ y, finalmente, a m se le asigna el valor $a+1$.
  - Al descompactificar por otro vértice de valencia 2 que no pertenezca a un ciclo, también se obtiene A_1^{n+1}. Como en los casos que siguen, esto se puede comprobar de forma parecida a la anterior.
  - Al descompactificar por un vértice de valencia 2 de los que pertenecen al ciclo, se llega a A_2^{n+1}.
  - Al descompactificar por un vértice de valencia 3, se obtiene B_1^{n+1}.

Análogamente se procede con el resto de los menores:

- Al descompactificar A_2^n, se puede obtener:
  - A_2^{n+1};
  - A_3^{n+1};
  - B_2^{n+1};
  - D_1^{n+1}.
- De A_3^n, se obtiene:
  - A_3^{n+1};
  - $E_{1,1}^{n+1}$;

- F_1^{n+1}.

- De B_1^n:
  - B_1^{n+1};
  - B_2^{n+1};
  - C_1^{n+1}.

- De B_h^n, con $h \in \{2, 3, \ldots \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\}$:
  - B_h^{n+1};
  - B_{h+1}^{n+1} (si $h+1 \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ o solo B_h^{n+1} en caso contrario);
  - C_h^{n+1};
  - $E_{1,h-1}^{n+1}$.

- De C_i^n, con $i \in \{1, 2, \ldots \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\}$:
  - C_i^{n+1} (según esto, por descompactificación de C_1^n solo se genera el primer C_i^{n+1}, el resto proviene de otras familias, como B_h^n);
  - $H_{i,1}^{n+1}$.

- De D_j^n, con $j \in \{1, 2, \ldots \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\}$:
  - B_{j+2}^{n+1} (si $j+2 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ó B_{j+1}^{n+1} en caso contrario);
  - D_j^{n+1};
  - D_{j+1}^{n+1};
  - F_j^{n+1}.

- De $E_{k,l}^n$, con $1 \leq k \leq l \leq n-k-l-1$:
  - $E_{k,l}^{n+1}$;
  - $E_{k,l+1}^{n+1}$ (si $l+1 \leq n-k-l$ ó $E_{k,n-k-l}^{n+1}$ en caso contrario);
  - $E_{k+1,l}^{n+1}$ (si $k+1 \leq l \leq n-k-l$ o bien $E_{l,k+1}^{n+1}$ si $l < k+1 \leq n-k-l$ o bien $E_{l,n-k-l}^{n+1}$ si $l \leq n-k-l < k+1$);
  - $H_{l,k}^{n+1}$.

- De F_m^n, con $m \in \{1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\}$:
  - $E_{1,m+1}^{n+1}$ (si $m+1 \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ ó $E_{1,n-m-2}^{n+1}$ en caso contrario);

- F_m^{n+1};
- F_{m+1}^{n+1} (si $m+1 \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ ó F_m^{n+1} en caso contrario);
- $G_{1,m}^{n+1}$.

- De $G_{r,s}^n$, con $1 \leq r \leq s \leq n-r-s-3$:
  - $E_{r+1,s+1}^{n+1}$;
  - $G_{r,s}^{n+1}$;
  - $G_{r,s+1}^{n+1}$ (si $s+1 \leq n-r-s-3$ ó $E_{r,n-r-s-3}^{n+1}$ en caso contrario);
  - $G_{r+1,s}^{n+1}$ (si $r+1 \leq s \leq n-r-s-3$ o bien $E_{s,r+1}^{n+1}$ si $s < r+1 \leq n-r-s-3$ o bien $E_{s,n-r-s-3}^{n+1}$ si $s \leq n-r-s-3 < r+1$).

- De $H_{p,q}^n$, con $1 \leq q+1 \leq p \leq n-p-q$:
  - $H_{p,q}^{n+1}$;
  - $H_{p+1,q}^{n+1}$ (si $p+1 \leq n-p-q$ ó $H_{n-p-q,q}^{n+1}$ en caso contrario);
  - $H_{p,q+1}^{n+1}$ (si $q+2 \leq p \leq n-p-q$ o bien $H_{q+2,p-1}^{n+1}$ si $p < q+2 \leq n-k-l$ o bien $H_{n-p-q,p-1}^{n+1}$ si $p \leq n-p-q < q+2$).

A modo de ayuda a la lectura de esta prueba se aporta la siguiente "tabla resumen". En ella no se encuentran todos los casos pormenorizados, pero sirve para hacerse una idea de cuál es la procedencia de cada uno:

MENORES (superíndice $n+1$) QUE SE OBTIENEN
AL DESCOMPACTIFICAR (los de superíndice n):

	A_1^{n+1}	A_2^{n+1}	A_3^{n+1}	B_1^{n+1}	B_h^{n+1}	C_i^{n+1}	D_j^{n+1}	$E_{k,l}^{n+1}$	F_m^{n+1}	$G_{r,s}^{n+1}$	$H_{p,q}^{n+1}$
A_1^n	•	•		•							
A_2^n		•	•		•		•				
A_3^n			•					•	•		
B_1^n				•	•	•					
B_h^n					•	•		•			
C_i^n						•					•
D_j^n					•		•		•		
$E_{k,l}^n$								•			•
F_m^n								•	•	•	
$G_{r,s}^n$								•		•	
$H_{p,q}^n$											•

Del análisis detallado de cada uno de los casos, se concluye. □

Si se quiere afirmar que se ha aportado una lista de menores prohibidos, hay que asegurarse de que no hay ningún menor redundante; es decir:

- Ningún elemento de $\mathcal{T}_i$ es menor de otro $\mathcal{T}_j$ para $i \neq j$.
- Ningún elemento de $\mathcal{T}_i$ es menor de otro elemento de $\mathcal{T}_i$.

Ambas cuestiones pueden comprobarse sin dificultad en el caso que nos ocupa.

4.6 Grafos c-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(n)$

Se está en condiciones de realizar un desarrollo similar al anterior para otras superficies no esféricas; es posible para superficies tubulares que se obtienen a partir del plano proyectivo puesto que los grafos peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ son conocidos.

4.6.1 Grafos p-peri en la banda de Möbius

Puesto que la banda de Möbius es homeomorfa al plano proyectivo menos un punto y que éste también es homemomorfo a la superficie tubular $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$, el siguiente objetivo consite en caracterizar los grafos p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ o, lo que es lo mismo, los c-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$. Por eso, se puede utilizar el procedimiento anteriormente explicado para obtener los menores c-peri-$S(1)$ prohibidos para una superficie S de la que se conoce la lista de menores peri prohibidos.

Teorema 4.6.1 *Un grafo infinito numerable es p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ si y solo si no tiene como menores a alguno de los grafos de las Figuras 10 y 4.18.*

Demostración: En [26] se describe la forma de calcular los menores y los menores topológicos peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ prohibidos y se da la lista (corregida en [6, 70], aunque sobra una arista en uno de los menores dados en [70]).

Tras descompactificar todos los grafos de la lista de menores prohibidos de la Figura 10 (tanto por vértices como por aristas), se obtienen 186 menores distintos. Análogamente, de los menores topológicos prohibidos de la Figura 11 se obtienen

también grafos distintos de los anteriores. A todos ellos se deben añadir los de la lista de menores peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ prohibidos (esto es, los de la Figura 10).

Tras eliminar los redundantes (que tienen como menor algún otro grafo de la lista), se obtienen los 92 menores p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ prohibidos. 32 corresponden a menores peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ prohibidos (los de la Figura 10) y los 60 de la Figura 4.18 son los menores infinitos p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ que se han obtenido por el procedimiento explicado para las superficies tubulares con finales coloreados y que se describe más detalladamente en el Apéndice A. □

La adaptación del algoritmo para obtener los menores topológicos prohibidos a partir de una lista finita de menores prohibidos finitos, nos permite obtener la caracterización en términos de menores topológicos prohibidos:

Teorema 4.6.2 *Un grafo infinito numerable es p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ si y solo si no tiene como menor topológico alguno de los grafos de las Figuras 10, 11, 4.18 y 4.19.*

Demostración: Se reduce a la aplicación del algoritmo que se describe en el Apéndice A para obtener una lista de menores topológicos prohibidos a partir de una lista finita de menores prohibidos de grafos numerables. □

Según se ha enunciado, en la Figura 4.19 se representan los 77 menores topológicos infinitos p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ prohibidos que no son menores p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ prohibidos. En ella, como en la Figura 4.18, se representa cada rayo del menor por una flecha, de un modo bastante intuitivo.

En total, se cuentan 182 menores topológicos peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ prohibidos: los 45 menores topológicos peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ prohibidos de las Figuras 10 y 11, los 60 grafos de la Figura 4.18 y los 77 de la Figura 4.19.

La combinación de los resultados para la banda de Möbius con los explicados para las superficies tubulares con los finales coloreados, permitiría obterner nuevas caracterizaciones, como la de los grafos c-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(n)$ y los de las familias sucesivas que surgen al aumentar el número de finales. Nos apartamos de esta línea para tratar con grafos infinitos a los que se pretende dotar de inmersiones peri sin atender a la coloración de finales.

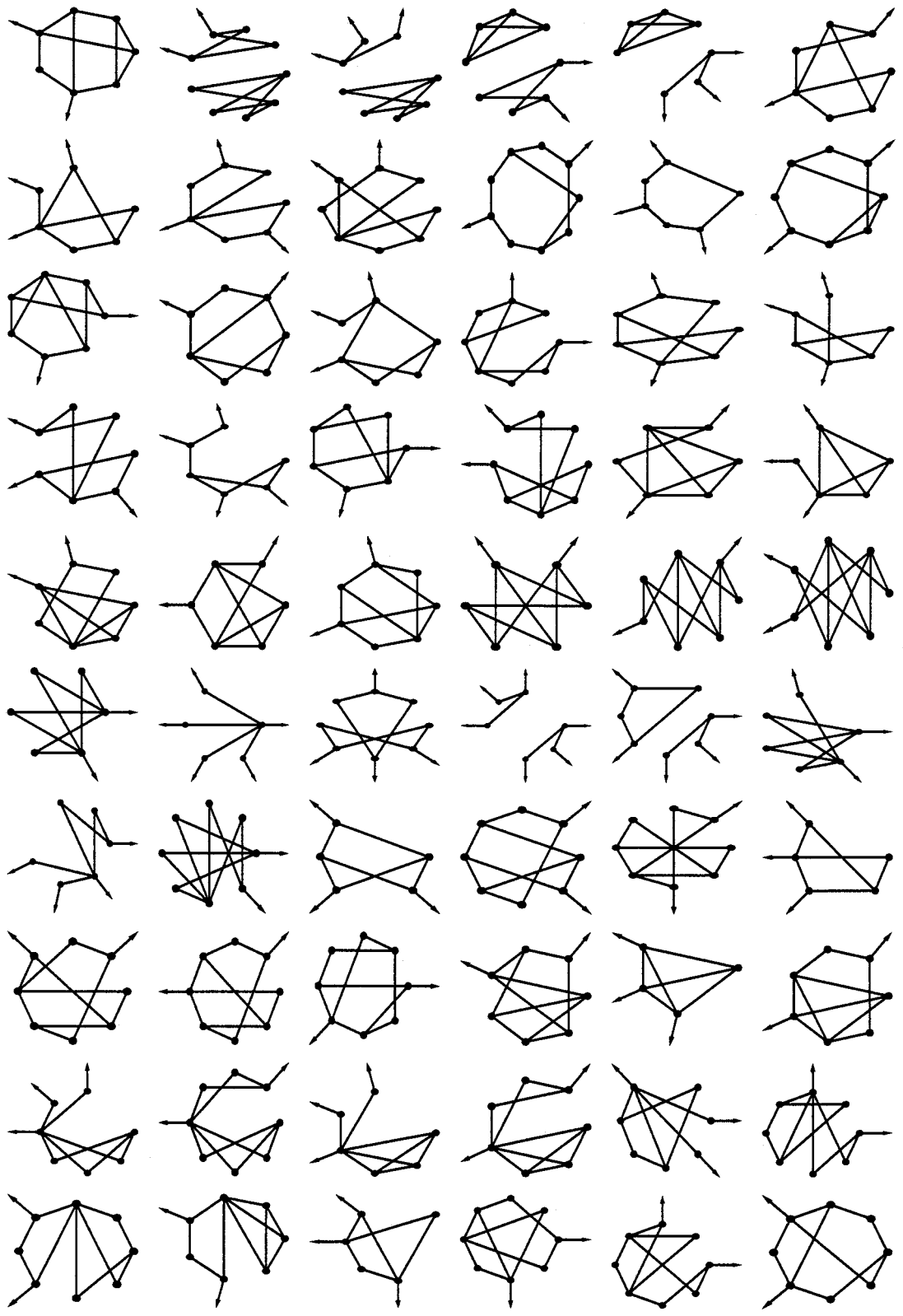

Figura 4.18: Menores p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ prohibidos.

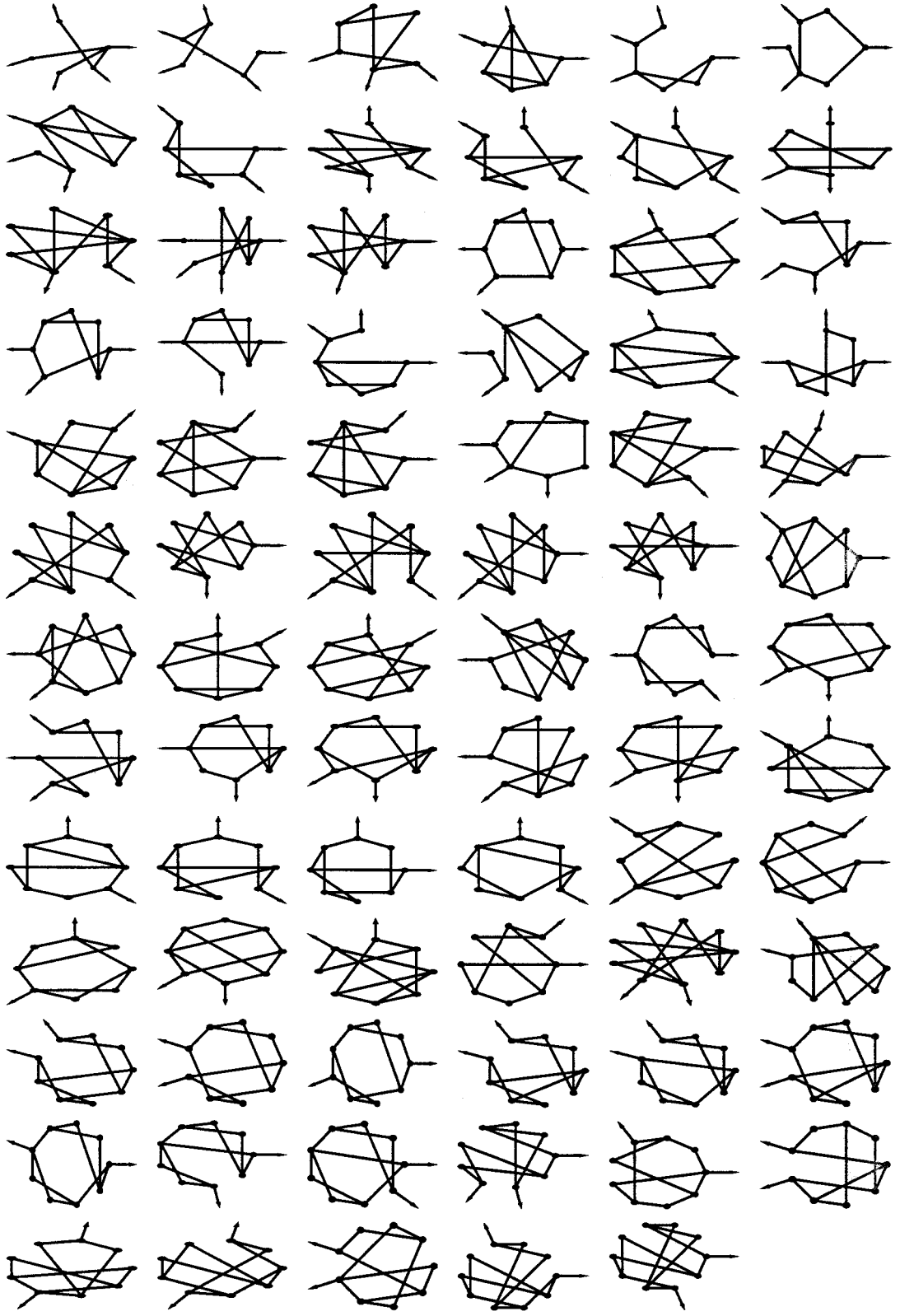

Figura 4.19: Menores topológicos p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ prohibidos que no son menores p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ prohibidos.

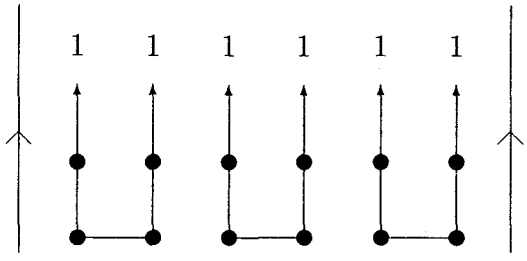

Figura 4.20: Una inmersión p-peri-$S^2(2)$ válida para n componentes conexas.

4.7 Grafos p-peri-$S^2(n)$

El procedimiento explicado para grafos c-peri-$S(n)$ solo es válido para los p-peri-$S(n)$ en el caso en que $n = 1$. Cuando $n > 1$, un grafo que es p-peri-$S(n)$ admite alguna coloración de finales que lo hace c-peri-$S(n)$ y, por tanto, no hay ninguna coloración de finales que haga c-peri-$S(n)$ a un grafo no p-peri-$S(n)$. No obstante, estas observaciones no generan ninguna lista de menores p-peri-$S(n)$ prohibidos ni de menores topológicos p-peri-$S(n)$ prohibidos. En los siguientes ejemplos se trata de justificar esta afirmación que obliga a buscar otro procedimiento para la caracterización de los grafos p-peri-$S^2(n)$.

Ejemplo 4.7.1 El grafo C_1^2, que consta de tres 2-caminos coloreados con 2 colores en cada componente conexa ((1,2), (1,2) y (1,2), según la notación utilizada anteriormente) no es c-peri-$S^2(n)$ para ningún $n \geq 2$ en virtud del Teorema 4.5.9. Sin embargo, se le puede dotar de una 1-coloración, que lo hace p-peri-$S^2(n)$ para cualquier número positivo de finales, como se observa en la Figura 4.20.

De hecho, de la inmersión representada se puede deducir que también será p-peri-$S^2(2)$ (incluso será p-peri-$S^2(1)$, es decir, p-periplano) el grafo formado por cualquier cantidad finita de 2-caminos. ◁

Ejemplo 4.7.2 Aunque $K_{2,3}$ no es periplano, al descompactificar por un vértice de valencia 2, se obtiene un grafo p-peri-$S^2(2)$. Es más, prescindiendo de las coloraciones de finales, los A_1^n y A_2^n son p-peri-$S^2(2)$ y no lo es, según se verá, el grafo que resulta al sumarle a A_1^2 una arista entre un vértice del 2-camino y un vértice de valencia 2 del único ciclo. Este grafo conexo tiene como menor propio (y como subgrafo propio) a A_1^2 y a A_2^2 pero no a ningún otro menor c-peri-$S^2(m)$ prohibido cualquiera que sea $m \geq 2$. ◁

Es más, al contrario de lo que sucedía con la c-peri-$S^2(n)$-representabilidad, un grafo no p-peri-$S^2(n)$ puede ser p-peri-$S^2(n+1)$. Un ejemplo muy sencillo de este hecho es el grafo B_1^1 de la Figura 4.11, que no es p-periplano pero sí admite inmersiones en el cilindro infinito sin acumulación y con todos los vértices en una misma cara.

A pesar de estas dificultades, aún hay cierta relación entre los grafos finitos y periplanos (peri-S^2) y los p-peri-$S^2(n)$ a través de la compactificación y la descompactificación (se puede hablar de estos conceptos gracias a que tanto los menores como los menores topológicos p-peri-$S^2(n)$ prohibidos tienen todos sus finales estables).

Si G^* es un grafo finito, es posible descompactificar G^* por n puntos distintos (vértices de G^* o puntos interiores de aristas de G^*) sin colorear los finales resultantes. Fijados los n puntos, de cada G^* se obtendrá un único grafo G del que se conoce una inmersión sin acumulación en $S^2(n)$ a partir de cualquier inmersión de G^* en S^2. Aunque no es la única inmersión válida para G, es suficiente para comprobar que G^* periplano implica que, $\forall\, m \geq n$, G es p-peri-$S^2(m)$ (si fuese necesario, se añaden finales a $S^2(n)$ fuera del grafo).

Recíprocamente, si G es un grafo numerable con sus n finales estables y que admite una inmersión sin acumulación en $S^2(n)$, es posible obtener algún grafo G^* del que G sea la descompactificación por n puntos. En general, tal grafo G^* no es único, pues depende de la inmersión dada para G (además de depender de los vértices de valencia 2 "residuales" tras eliminar cada final) . Una inmersión p-peri-$S^2(n)$ de G produce un grafo, G^*, periplano pero no parece útil determinar si G es p-peri-$S^2(n)$ a partir de G^*. Esto acaba con la posibilidad de utilizar el método dado para los grafos c-peri-$S^2(n)$ y nos obliga a desarrollar, para el caso concreto en que $n = 2$, otro procedimiento más costoso.

4.7.1 Grafos p-pericilíndricos

Tratando con grafos finitos, los grafos que se pueden representar en el cilindro con todos los vértices en una misma cara son los periplanos. Éste es el motivo de que el término *pericilíndrico* no se haya utilizado para denotar el concepto que parece natural sino (como en [5]) para referirse a los grafos 2-periplanos. En adelante, sin embargo, se utilizará el término *p-pericilíndrico* como sinónimo de *p-peri-$S^2(2)$* y se tendrá en cuenta que todo grafo p-periplano es también p-pericilíndrico.

Resulta conveniente describir algunas otras propiedades relacionadas con la p-peri-$S^2(2)$-representabilidad, la primera de las cuales se deduce inmediatamente de la caracterización de los grafos p-periplanos dada en [24].

Lema 4.7.3 *La unión numerable de componentes conexas p-periplanas es p-periplana.*

□

Lema 4.7.4 *Si se le añaden a un grafo periplano (finito) menos de* 3 *rayos, el resultado es un grafo p-pericilíndrico.*

Demostración: Se parte de una inmersión periesférica del grafo periplano. Se eligen 2 puntos del interior de una cara en la que están todos los vértices; es posible añadir 2 rayos (cada uno con acumulación en uno de los 2 puntos elegidos) sin que se incremente el número de caras del grafo y de modo que todos los vértices de los rayos pertenecen a la misma cara que el resto de los vértices del grafo. Tras descompactificar la esfera por ambos puntos, se tiene una inmersión p-peri-$S^2(2)$ del grafo periplano con 2 finales. □

Nótese que no es posible garantizar que el grafo periplano al que se le unen 3 rayos siga siendo p-pericilíndrico, porque 2 rayos van necesariamente al mismo final y no es posible concluir la prueba como antes.

Lema 4.7.5 *Si se le añaden a un árbol (finito) menos de* 5 *rayos, el resultado es un grafo p-pericilíndrico.*

Demostración: Procediendo como en la demostración del Lema 4.7.4, se parte de una inmersión periesférica del árbol y se eligen 2 puntos de la única cara. Como antes, es posible añadir 2 rayos que se acumulen a cada punto de modo que todos los vértices de los rayos pertenecen a la misma cara que el resto de los vértices del árbol. La descompactificación de la esfera por ambos puntos, produce una inmersión conveniente. □

Tampoco aquí es posible obtener un resultado positivo con mayor número de rayos, porque un quinto rayo no puede representarse en la misma cara que los otros cuatro (se dará una demostración rigurosa de este hecho).

Lema 4.7.6 *Si se le añaden a un grafo p-periplano menos de* 3 *rayos a un mismo vértice, el resultado es un grafo p-pericilíndrico.*

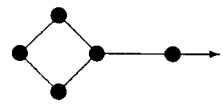

Figura 4.21: Un menor "clave" para los grafos no p-pericilíndricos.

Demostración: Como G es p-periplano, admite una inmersión periesférica con acumulación en un único punto. Como en las demostraciones anteriores, es posible añadir 2 rayos, de un mismo vértice a un punto cualquiera de la cara en la que están el resto de los vértices, sin que ningún vértice deje de estar en la cara común. Solo queda descompactificar por el punto elegido y por el punto de acumulación que ya existía. □

En el resultado anterior, también se deduce de la prueba que no es posible incrementar el número de rayos y enunciar un resultado similar. Solo se necesita, de momento, relacionar con la p-peri-$S^2(2)$-representabilidad una propiedad más.

Lema 4.7.7 *Si se le añade a un grafo p-periplano, G, el grafo de la Figura 4.21, identificando un vértice del ciclo con un vértice de G, el resultado es un grafo p-pericilíndrico.*

Demostración: En este caso, también se parte de una representación periesférica con acumulación en un único punto. Es claro que se puede añadir un ciclo en la cara en que están el resto de los vértices identificando un vértice existente con uno del ciclo y sin que la inmersión deje de ser periesférica. Solo queda elegir un punto en la nueva cara común a todos los vértices y proceder como en las pruebas anteriores. □

Para poder enunciar un teorema de caracterización de los grafos p-pericílindricos, se necesita de los grafos de la Figura 4.11 y los representados en la Figura 4.22.

Teorema 4.7.8 *Un grafo infinito numerable es p-peri-$S^2(2)$ si y solo si no tiene como menor a ninguno de los siguientes* 11 *grafos: K_4, $K_{2,3}$, $A_1^1 \cup A_1^1$, $A_1^1 \cup B_1^1$, $B_1^1 \cup B_1^1$, M_i, con $i = 1, \ldots, 6$.*

Demostración: Ninguno de los 11 grafos del enunciado son p-pericilíndricos, pues no existe ninguna coloración de sus finales (en total, hay 37 posibles coloraciones

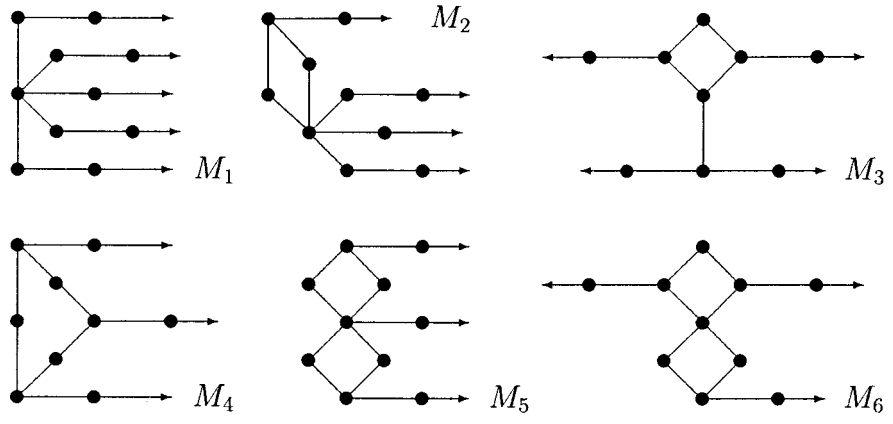

Figura 4.22: Menores p-peri-$S^2(2)$ prohibidos.

distintas) con la que alguno de dichos grafos sea c-peri-$S^2(2)$. Además, el conjunto dado es mínimo: ninguno de los 11 grafos es menor de otro.

Queda probar ahora que todo grafo no p-pericilíndrico tiene como menor a alguno de los 11 de la lista propuesta de menores p-peri-$S^2(2)$ prohibidos.

Sea G no p-pericilíndrico. G puede tener finales no estables, pero tiene como menor un grafo no p-pericilíndrico con todos los finales estables (un menor prohibido, que tiene sus finales estables en virtud del Corolario 4.2.2). Por eso, podemos suponer en adelante que G tiene todos sus finales estables; consta de una "parte finita" y de rayos infinitos.

Por otra parte, si G tiene menos de 3 finales (incluye el caso en que no tiene finales, luego es finito), G no puede ser periplano aun suprimiéndole los rayos (según el Lema 4.7.4), por lo que tiene como menor a K_4 o a $K_{2,3}$. Veamos qué ocurre si G es un grafo (infinito) con, al menos, 3 finales estables.

No todas las componentes conexas de G pueden ser p-periplanas (la unión numerable de componentes p-periplanas es p-pericilíndrica, por el Lema 4.7.3). De hecho, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que G no tiene componentes conexas p-periplanas; de ahí que, si G no es conexo, tiene como menor a la unión disjunta de 2 menores p-periplanos prohibidos ($A_1^1 \cup A_1^1$, $A_1^1 \cup B_1^1$, $B_1^1 \cup B_1^1$ o alguna unión de dichos 2 menores en la que aparezca K_4 ó $K_{2,3}$). En lo que sigue, se trata con un grafo conexo.

Si G tiene 5 finales o más, como es conexo, tiene como menor a M_1. A continuación se estudia el caso en que G tiene 3 ó 4 finales; G consta de una parte finita

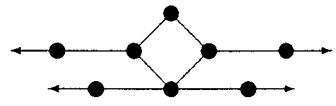

Figura 4.23: Un grafo p-pericilíndrico con 4 finales y un ciclo.

que supondremos periplana (si no, ya se sabe que tiene como menor a K_4 o a $K_{2,3}$) y 3 ó 4 rayos infinitos.

G tiene que tener algún ciclo, ya que un árbol no deja de ser p-pericilíndrico si se le añaden 3 ó 4 rayos (ver el Lema 4.7.5). Es evidente que en algún ciclo hay entre 1 y 4 puntos de corte a los que llamaremos aquí *vértices de apoyo*: vértices del ciclo cuyo borrado separa una componente conexa que sigue siendo infinita de otras en las que permanece el resto de los vértices que pertenecen a ciclos.

Antes de estudiar los vértices de apoyo de G, veamos que se puede suponer que dos ciclos cualesquiera de G no comparten más que un vértice: si solo comparten una arista (y, por tanto, también 2 vértices), ésta se puede eliminar obteniendo un menor de G que tampoco es p-pericilíndrico y que tiene menos ciclos que comparten algún elemento; no pueden compartir nada más porque habría un subgrafo finito de G no periplano.

Teniendo en cuenta lo anterior, los ciclos sin vértices de apoyo ya no afectan a la p-peri-$S^2(2)$-representabilidad (es decir, se puede encontrar un menor de G no p-peri-$S^2(2)$ cuyos ciclos tienen todos algún vértice de apoyo). Consecuentemente, se supone que todos los ciclos de G tienen vértices de apoyo.

Si hay menos vértices de apoyo que rayos, el grafo que resulta al eliminar 2 rayos que *van* al mismo vértice de apoyo no puede ser p-periplano, según el Lema 4.7.6, luego tiene como menor a A_1^1 (no a B_1^1 porque G tendría 5 rayos). Así, G tiene como menor a M_2 (si los rayos se añaden sin nuevos vértices de apoyo) o al grafo de la Figura 4.23 (en caso contrario). Pero el grafo de la Figura 4.23 es p-pericilíndrico y no deja de serlo aunque se le añadan árboles (finitos), ciclos que pasan por alguno de los vértices de apoyo (no hay que olvidar que G no contiene a K_4 ni a $K_{2,3}$ ni ciertos tipos de ciclos y que tiene menos de 5 rayos) o se descontraigan vértices, salvo en el caso del vértice de valencia 4, que produce el menor M_3, no p-pericilíndrico. Por eso, M_3 es menor de G siempre que haya menos vértices de apoyo que rayos y no lo sea M_2.

Aún queda el caso en que G es un grafo conexo con una parte finita (que es

periplana) y con 3 ó 4 rayos que corresponden a diferentes vértices de apoyo. Como la eliminación de los rayos finitos no modifica el carácter de p-pericilíndrico del grafo, puede suponerse que no hay rayos finitos en G y que cada rayo es incidente en un vértice de apoyo (y no en un árbol que *sale* de un vértice de apoyo).

Así, resulta sencillo aceptar que se puede suponer que 2 vértices de apoyo de un mismo ciclo no son adyacentes. Si lo fueran, al contraer la arista entre ambos, el menor resultante seguiría sin ser p-pericilíndrico (pues no disminuye el número de caras en que se puede representar a todos los vértices) pero tendría menos vértices de apoyo que rayos, por lo que se ha visto que tiene como menor a M_2 o a M_3. Según esto, si hay 3 vértices de apoyo en un mismo ciclo (como cuando G solo tiene un ciclo), G tiene como menor a M_4.

Si no hay 3 vértices de apoyo en un mismo ciclo, existen 2 ciclos que cada uno solo comparte un vértice con otros ciclos y en que hay 2 vértices de apoyo que, cada uno, pertenece solo a uno de los 2 ciclos. Si en estos ciclos hay dos vértices de apoyo en cada uno, G tiene como menor a M_5 (si son solo 3 vértices de apoyo) o a M_3. En caso contrario, hay un ciclo que solo comparte un vértice con otros ciclos y que solo tiene un vértice de apoyo. Se puede suponer que el vértice de apoyo no es adyacente con el *vértice compartido* (si fuera adyacente, la arista entre ambos se podría eliminar sin que el grafo se volviese p-pericilíndrico pero sí disminuyendo el número de ciclos), por lo que (en virtud del Lema 4.7.7) se puede eliminar un ciclo (salvo por un vértice) y un rayo de modo que el grafo resultante no puede ser p-periplano. Así, G tiene como menor a la unión por un punto de A_1^1 o de B_1^1 con el grafo de la Figura 4.21, por lo que G tiene como menor a M_2, a M_5 o a M_6.

Con esto se contemplan todos los posibles grafos no p-pericilíndricos y concluye la prueba. □

El resultado anterior proporciona, por ejemplo, una caracterización inmediata de los grafos que admiten una inmersión en $S^2(3)$ con todos los vértices en la misma cara y con un final distinguido. Solo habría que obtener la lista de menores topológicos p-peri-$S^2(2)$ prohibidos y proceder, descompactificando por un punto, como anteriormente se había hecho para obtener los menores c-peri-$S^2(n)$ prohibidos.

Terminamos este capítulo haciendo notar que, de un modo análogo al anterior, se podrían caracterizar los grafos c-peri-$S(n)$ cuando S es una seudosuperficie de las que se conoce su lista de menores prohibidos para la peri-representabilidad.

Así, el procedimiento recursivo propuesto para las diferentes superficies tubulares

ha abierto la posibilidad de caracterizar los grafos c-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(n)$ y los p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(n)$ con $n > 1$ e, incluso, los grafos que admiten una inmersión en $S^2(3)$ con todos los vértices en la misma cara y con un final distinguido.

Éstas y otras posibles caracterizaciones se dejan como problemas a resolver en posteriores investigaciones.

Capítulo 5

Inmersiones peri de grafos no numerables

En 1967, el mismo año en que Chartrand y Harary [28] caracterizaron los grafos finitos periplanos, Wagner [82] hizo lo propio con los grafos no numerables que admiten una inmersión en el plano. En las siguientes páginas se estudian los grafos no numerables que admiten inmersiones peri.

Es obvio que la definición de grafo es perfectamente válida en casos en los que el conjunto de vértices, $V(G)$, no es ni siquiera numerable. Sin embargo, algunos conceptos sencillos (como se verá) requieren unas aclaraciones que resultan innecesarias en el caso finito.

Los estudios realizados sobre grafos infinitos no numerables (como en [66, 78, 82]) intentan generalizar los resultados conocidos para grafos finitos o numerables. Eso es lo que se hará a continuación en relación con la peri-S-representabilidad para las superficies o seudosuperficies ya tratadas a lo largo de esta memoria.

La motivación para realizar el estudio de los grafos no numerables procede, por una parte, de que la simple idea de generalizar resultados en este tipo de grafos origina la aparición de numerosos problemas de interés topológico. Por otra parte, las aplicaciones de los grafos infinitos al estudio del cálculo de probabilidades (como se sugiere en [66]) los hacen también merecedores de este análisis.

5.1 Grafos no numerables

Un *grafo no numerable* es el que tiene una cantidad no numerable de vértices, sin importar que el número de aristas pueda ser infinito numerable o, incluso, finito. Un ejemplo de grafo no numerable es $G_{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}, \emptyset)$.

En lo que sigue, el cardinal del conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, se denota por $\aleph_0$ y el de $\mathbb{R}$ es $2^{\aleph_0}$. El sucesor inmediato de $\aleph_0$ en el ordenamiento de los números cardinales se suele denotar por $\aleph_1$, por lo que $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$. Sean o no iguales (la igualdad se conoce como "hipótesis del continuo"), $\aleph_1$ es no numerable; de hecho, es el menor cardinal no numerable. Se pueden consultar propiedades de estos cardinales en [54].

A continuación, se trata con grafos no numerables. Es intuitivo pensar que las representaciones gráficas pierden parte del valor que tenían en el estudio de los grafos peri finitos, pues no suele resultar sencillo representar una cantidad no numerable de relaciones entre los vértices. De todos modos, se adaptará la notación utilizada en el caso finito:

A pesar de que 1-caminos, 2-caminos y rayos (que se utilizarán en el mismo sentido que hasta ahora) son como *caminos infinitos*, no tiene sentido definir un "camino no numerable", pues se ordenaría un conjunto no numerable: cada vértice del "camino no numerable" tendría un anterior y un siguiente, que corresponderían a sus dos vértices adyacentes en el camino.

Según lo anterior, también para grafos infinitos, un *ciclo* es un camino (luego finito) salvo porque empieza y termina en un mismo vértice. Con respecto a los ciclos, más adelante necesitaremos el siguiente resultado:

Lema 5.1.1 *Sea G un grafo conexo en que hay a lo más una cantidad numerable de vértices de valencia mayor o igual que 3 y tal que cada vértice pertenece a una cantidad numerable de ciclos. Entonces, G posee una cantidad numerable de ciclos.*

Demostración: Sean v un vértice de $G_0 = G$, J_0 el grafo cuyo único vértice es v y H_0 el grafo formado por las componentes conexas de $G_0 - J_0$ que no tengan algún vértice que pertenezca a un ciclo en G_0. Como hay una cantidad numerable de

vértices de G_0 de valencia mayor que 2 y una cantidad numerable de ciclos en G_0 contienen a v, en G_0 hay una cantidad numerable de vértices adyacentes con v que no pertenecen a H_0.

Así, en $G_1 = G_0 - H_0$ hay una cantidad numerable de vértices adyacentes con v y G_1 tiene los mismos ciclos que G.

Se definen, a partir de los grafos anteriores, de forma recursiva, para todo $k \in \mathbb{N}$:

- J_k es el subgrafo de G_k generado por los vértices a distancia de v menor o igual que k en G_k.
- H_k es el grafo unión de las componentes conexas de $G_k - J_k$ que no tienen ningún vértice que pertenezca a algún ciclo en G_k.
- $G_{k+1} = G_k - H_k$, que tiene los mismos ciclos que G.

Obviamente, en J_k hay una cantidad numerable de ciclos y, además, por inducción, gracias a que G es conexo, $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$, que tiene los mismos ciclos que G y son una cantidad numerable. □

Además, como cada ciclo tiene una cantidad finita de vértices, se tiene de forma inmediata el siguiente:

Corolario 5.1.2 *Sea G un grafo conexo en que hay a lo más una cantidad numerable de vértices de valencia mayor o igual que 3 y tal que cada vértice pertenece a una cantidad numerable de ciclos. Entonces, G posee una cantidad numerable de vértices que pertenecen a algún ciclo.*

□

Hay otros conceptos cuya generalización a los grafos no numerables no conlleva dificultad especial, como son los de *inmersión*, *grafo plano* y, en general, tanto el de *grafo S-representable* como *peri-S-representable*. Cuando se trata de grafos no numerables, siempre se admiten inmersiones en las que se produzcan acumulación de vértices y aristas.

Otro punto de partida esencial para el desarrollo posterior es el siguiente Teorema 5.1.3 de caracterización de los grafos planos no numerables, cuya demostración se debe a Wagner [82], aunque fue generalizada por Hutchinson y Wagon [55] para poderla aplicar a superficies distintas del plano.

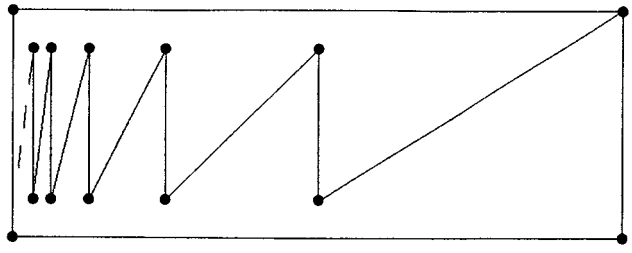

Figura 5.1: Inmersión plana de un grafo numerable.

Teorema 5.1.3 *[82] Sea G un grafo. Son equivalentes:*

1. *G es plano.*
2. *Se verifican las tres siguientes condiciones:*
   (a) *G no tiene como menores topológicos a K_5 ni a $K_{3,3}$.*
   (b) *El cardinal de $V(G)$ es menor o igual que $2^{\aleph_0}$.*
   (c) *G posee, a lo sumo, $\aleph_0$ vértices de valencia al menos 3.*

□

5.2 Inmersiones periplanas

En una inmersión adecuada de un grafo S-representable G, se definen las *caras* como cada una de las componentes conexas del complementario topológico de G, sin importar, de momento, que G pueda ser no numerable.

Obviamente, incluso para grafos numerables, esta definición anterior no equivaldría a hablar de componentes conexas por caminos, pues se pueden aportar ejemplos sencillos de complementarios de grafos con más componentes conexas por caminos que componentes conexas. Uno de tales ejemplos es el de la Figura 5.1, del que se da una inmersión plana con 2 caras a pesar de que una de ellas no es conexa por caminos.

A pesar de eludir la conexión por caminos, hay grafos en que el número de caras varía con la inmersión que se dé de él. Se puede pensar aquí en una circunferencia en que todos los puntos son vértices, luego tiene $\aleph_1$ vértices (al menos) pero no aristas y se han determinado 2 caras. Este grafo sin aristas admite una inmersión "dibujando" sus vértices en una semirrecta, con lo que definiría una única cara.

Así, el número de caras no es un invariante para los grafos no numerables, pues depende de la inmersión. Por eso, es necesario precisar lo de "*adecuada*". Por ejemplo, un cuadrado relleno de vértices (hay $2^{\aleph_0}$) no es una inmersión adecuada para un estudio de la peri-representabilidad: no todos los vértices están en la misma cara (de hecho, hay vértices que no están en ninguna cara) aunque se podrían haber colocado en una recta o sobre el conjunto de Cantor, dando lugar a inmersiones que parecen más apropiadas para un análisis como el que pretendemos realizar.

Además, puede haber caras cuya frontera contenga una cantidad infinita de ciclos. En las inmersiones periplanas solo hay una cara con esta propiedad, ya que cada ciclo divide al plano en una parte interior y otra exterior y solo en una de ellas puede haber vértices fuera del ciclo.

En cuanto a los grafos peri-S-representables, se trata de los grafos S-representables que admiten alguna inmersión en S con todos los vértices en la frontera de una misma cara. Como en los capítulos anteriores, los grafos *periplanos*, *periesféricos*, *peritóricos*... no son más que casos particulares.

Se señala a continuación una cuestión que, probablemente, ha influido en el análisis de los grafos peri no numerables. Chartrand y Harary [28] definen los grafos periplanos no conexos como aquéllos cuyas componentes son todas periplanas. Esta definición simplificaría el problema de caracterización (de grafos peri no numerables) enormemente, pero no resulta consistente con la definición de grafo plano no numerable ni con la idea intuitiva de peri-representabilidad de grafos infinitos, según se verá en el siguiente:

Ejemplo 5.2.1 El grafo formado por una cantidad no numerable de copias de K_3 (como el que se denota $\aleph_1 K_3$) no admite, según se verá, una inmersión en el plano con todos los vértices en una misma cara a pesar de que todas sus componentes son periplanas. De acuerdo con la definición que utilizaremos, por eso, no se trata de un grafo periplano, aunque sí lo sería $\aleph_0 K_3$, grafo que se representa en la Figura 5.2. $\lhd$

El modo más natural de obtener un resultado similar al Teorema 5.1.3 que caracterice los grafos periplanos no numerables es comprobar si es plano el grafo $G + K_1$, cuando ya lo es G. Es decir, se intenta determinar la periplanaridad de grafos cuando se obtienen grafos planos al sumarle K_1, posiblemente, a infinitas componentes conexas, como en el Ejemplo 5.2.2. Pero se corre el peligro de simplificar en exceso el problema planteado. Sumar K_1 a un grafo plano no siempre es tarea sencilla; esta

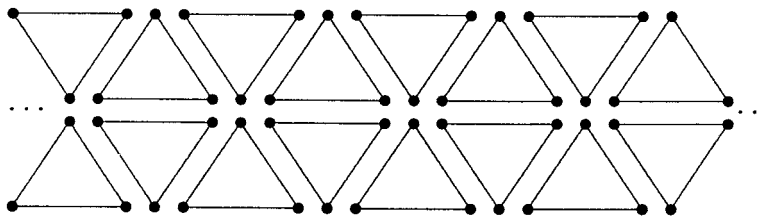

Figura 5.2: Inmersión periplana de un grafo con infinitas caras.

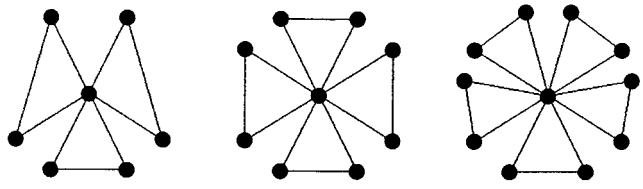

Figura 5.3: Sucesión creciente de grafos periplanos.

operación puede generar incluso grafos cuya periplanaridad merece ser tratada con más detalle.

Ejemplo 5.2.2 A priori, no es trivial determinar la periplanaridad de grafos que se obtienen al sumarle K_1 a infinitas componentes conexas planas, como en $K_1 + \aleph_1 K_2$. $\aleph_1 K_2$ es un grafo plano, pero sus representaciones más intuitivas no permiten la suma de un nuevo vértice con todos los anteriores. En la Figura 5.3 se dan inmersiones periplanas de algunos subgrafos finitos de $K_1 + \aleph_1 K_2$. A partir de ellas es sencillo deducir que $K_1 + \aleph_0 K_2$ es periplano. ◁

Lema 5.2.3 *Si el grafo $G + K_1$ es plano, entonces G es periplano.*

Demostración: La cara de $G + K_1$ en la que está K_1 nos determina una de G en la que están todos los vértices de G. Las propias aristas que van de K_1 a cada uno de los vértices nos demuestran este hecho. □

Para grafos numerables, Cáceres probó en [26] algo más general que la equivalencia entre la planaridad de $G + K_1$ y la periplanaridad de G, cuando no se permite acumulación de vértices ni de aristas en la representación plana de G:

Un grafo G admite una inmersión plana sin acumulación y con todos los vértices del conjunto finito $W \subseteq V(G)$ en una misma cara si y solo si el *cono* de G respecto

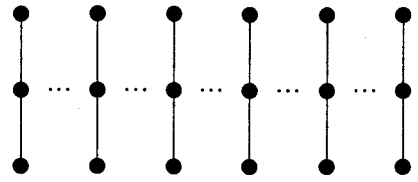

Figura 5.4: Un grafo periplano con infinitas componentes conexas.

de W (es decir, G más un nuevo vértice y las aristas de éste a cada vértice de W) admite una inmersión plana sin acumulación. La demostración de este hecho se puede extender sin dificultad a conjuntos W infinitos siempre que se permita acumulación de aristas en torno al nuevo vértice con el que se forma el cono.

Permitiendo acumulación y trabajando con grafos numerables, la equivalencia entre la periplanaridad de un grafo y la planaridad del mismo grafo más un nuevo vértice es fácil de probar:

Proposición 5.2.4 *Sea G un grafo numerable y periplano. Entonces $G + K_1$ es plano.*

Demostración: Como G es periplano, no contiene ni a K_4 ni a $K_{2,3}$, por lo que $G+K_1$ tampoco contiene ni a K_5 ni a $K_{3,3}$; utilizando el Teorema 5.1.3, se concluye que $G + K_1$ es un grafo plano. □

Más adelante, se obtendrá una generalización de esta Proposición 5.2.4 en superficies compactas. Conviene tener en cuenta que, al tratarse de inmersiones de grafos infinitos en conjuntos compactos, es lógico prescindir de las restricciones sobre la acumulación de vértices.

Con todo, se pueden dar ejemplos de grafos numerables y periplanos en los que una inmersión periplana no resulte adecuada para sumar K_1:

Ejemplo 5.2.5 Considérense 3 copias paralelas del intervalo cerrado $[0, 1]$. G es un grafo cuyos vértices son los puntos racionales de cada uno de los intervalos y tal que los vértices del intervalo de enmedio serán adyacentes con sus números correspondientes en las otras dos copias, por lo que son de valencia 2; los vértices de los otros dos intervalos son de valencia 1 (ver la Figura 5.4).

El grafo G descrito es numerable y periplano, pero no se puede dar una inmersión de $G + K_1$ sin modificar la inmersión de G. ◁

Con esto, en realidad, no se determina ninguna condición para G. No obstante, el recíproco del Lema 5.2.3 no es necesariamente cierto para grafos no numerables ni siquiera en el plano.

Ejemplo 5.2.6 Denotaremos por $\mathcal{C}$ al conjunto de Cantor, cuyos elementos son los números t de la forma $t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n}$, con los $t_n \in \{0, 2\}$.

Como $\mathcal{C}$ es homeomorfo a $\{0,2\} \times \{0,2\} \times \ldots$, es un conjunto no numerable (y tiene cardinal $2^{\aleph_0}$).

Puede construirse un grafo parecido al del Ejemplo 5.2.5 pero no numerable, considerando como conjunto de vértices tres copias paralelas de $\mathcal{C}$ y uniendo por aristas cada elemento de una de las copias con sus números correspondientes en las otras dos copias. El grafo así definido consiste en $2^{\aleph_0}$ copias disjuntas de $K_{1,2}$ y es periplano, pues todos los vértices están en la misma y única cara del grafo.

Considérese ahora el grafo $G + K_1$; éste no es un grafo plano, pues hay una cantidad no numerable de vértices con valencia 3 (todos los del conjunto de Cantor que habíamos unido con los de las otras dos copias). ◁

A la vista de lo anterior y de los grafos provistos por los Ejemplos 5.2.1 y 5.2.2, se va a demostrar el siguiente Teorema de caracterización de los grafos periplanos no numerables:

Teorema 5.2.7 *Sea G un grafo no necesariamente numerable. Son equivalentes:*

1. *G es periplano.*
2. *Se verifican las tres siguientes condiciones:*
   - *(a) G es plano.*
   - *(b) Todo subgrafo finito de G es periplano.*
   - *(c) A lo sumo, G posee $\aleph_0$ ciclos distintos.*
3. *Se verifican las tres siguientes condiciones:*
   - *(a) $|V(G)| \leq 2^{\aleph_0}$.*
   - *(b) G posee, a lo sumo, $\aleph_0$ vértices de valencia al menos 3.*
   - *(c) G no contiene un subgrafo que sea una subdivisión de K_4, $K_{2,3}$, $K_1 + \aleph_1 K_2$ ni $\aleph_1 K_3$.*

Demostración:

1⇒2 (y 3) G es plano y no contiene ni a K_4 ni a $K_{2,3}$ porque G no puede poseer un subgrafo no periplano.

A continuación se verá que no hay más de $\aleph_0$ ciclos en una inmersión periplana de G.

Es fácil probar que no puede haber una cantidad no numerable de ciclos disjuntos de modo que cada uno esté en el exterior de todos los demás (como en $\aleph_1 K_3$). Si esto fuera así, como en el interior de cada uno de estos ciclos no podría haber más vértices (por periplanaridad), podríamos sumarle K_1 a cada ciclo (por ejemplo, situando estos nuevos vértices en el interior de cada ciclo). Como los vértices de los ciclos (hay una cantidad no numerable de ellos) tenían valencia al menos 2, ahora pasan a tener valencia al menos 3, con lo que el grafo construido no podría ser plano en virtud del Teorema 5.1.3 (tiene una cantidad no numerable de vértices de valencia mayor o igual que 3), lo que contradice su propia construcción.

Tampoco pueden encontrarse una cantidad no numerable de ciclos de interiores disjuntos compartiendo un vértice (como en $K_1 + \aleph_1 K_2$), por el mismo motivo anterior. Y si los ciclos comparten aristas no se añade ninguna dificultad a la prueba.

Finalmente, queda descartar el que haya una cantidad no numerable de ciclos en el interior de uno dado. Lo ya estudiado elimina la posibilidad de que en el interior de un ciclo haya una cantidad no numerable de ciclos de interiores disjuntos pero dentro de uno de estos ciclos que quedan dentro del ciclo dado no puede haber más vértices (por periplanaridad), por lo que tampoco puede haber más de $\aleph_0$ ciclos dentro de uno dado.

2⇒3 Es evidente, gracias al Teorema 5.1.3.

3⇒1 En G hay, como mucho, una cantidad numerable de vértices de valencia mayor o igual que 3; luego se puede deducir que, a lo sumo, $\aleph_0$ componentes conexas no son caminos (finitos o infinitos) ni ciclos. De hecho, hay una cantidad numerable de ciclos disjuntos pues, si no fuese numerable, habría una subdivisión de $\aleph_1 K_3$.

Las componentes conexas que sean caminos, de las que hay a lo más $2^{\aleph_0}$, o ciclos se pueden obviar (incluso los caminos infinitos), luego se puede suponer que G tiene una cantidad numerable de componentes conexas.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

Ya se comentó con anterioridad (justo tras el Teorema 0.3.4) que la unión disjunta de una cantidad numerable de componentes periplanas es también periplana, por lo que basta demostrar que cada componente conexa de G es periplana y, por tanto, se puede reducir la presente demostración al caso en que G es un grafo conexo.

Estudiemos el caso en que G sea un grafo conexo (no numerable). G puede tener vértices de valencia no numerable, pero los vértices de valencia al menos 3 solo son una cantidad numerable. Luego, por el Corolario 5.1.2, solo hay una cantidad numerable de vértices que no pertenecen a algún rayo (finito o infinito) o a un solo ciclo (si un vértice pertenece a una cantidad no numerable de ciclos, existiría un subgrafo subdivisión de $K_1 + \aleph_1 K_2$). Los rayos infinitos no afectan a la periplanaridad (se pueden eliminar) y, por otra parte, si hubiera una cantidad no numerable de ciclos, por el Lema 5.1.1, debería haber más de $\aleph_0$ compartiendo un vértice. Por tanto, se puede restringir la prueba a los grafos numerables.

Si G es numerable, considérese ahora el grafo $G + K_1$. No contiene a K_5 ni a $K_{3,3}$ porque G no contiene (respectivamente) ni a K_4 ni a $K_{2,3}$. El cardinal de $V(G)$ es menor que $2^{\aleph_0}$, pues $G + K_1$ solo posee un vértice más que G. Y, además, $G + K_1$ posee, a lo sumo, $\aleph_0$ vértices de valencia al menos 3, trivialmente. Así, en virtud del Teorema 5.1.3, $G + K_1$ es plano y, por el Lema 5.2.3, G es periplano. □

Como carece de sentido estudiar las inmersiones sin acumulación de grafos no numerables, no hay que diferenciar lo que ocurre en el infinito de lo que ocurre en cualquier punto del plano. Esto permite extender el resultado anterior al caso de la esfera, caracterizando los grafos que admiten una inmersión en la superficie esférica con todos sus vértices en la misma cara.

Corolario 5.2.8 *Sea G un grafo no necesariamente numerable. Son equivalentes:*

1. *G es peri-esférico.*
2. *Se verifican las condiciones 2a, 2b y 2c del Teorema 5.2.7.*
3. *Se verifican las condiciones 3a, 3b y 3c del Teorema 5.2.7.*

Demostración: Para dar una prueba de este resultado, es suficiente utilizar la proyección estereográfica, salvo en los casos triviales en que todos los puntos de la esfera pertenecen al grafo. Pero son casos que tampoco dan problemas para comprobar que no verifican las condiciones. □

El siguiente objetivo natural es caracterizar los grafos no numerables que admiten una inmersión en otras superficies compactas (distintas de la esférica) con todos los vértices en una misma cara. Es lógico asumir que nos enfrentamos con una dificultad añadida al no conocerse la caracterización por menores (o menores topológicos) prohibidos de los grafos peri en superficies compactas distintas de la esfera o el plano proyectivo, pero se pueden enunciar teoremas que caractericen los grafos peri no numerables en función de los propios grafos finitos peri-representables.

5.3 Inmersiones peri en otras superficies compactas

El Lema 5.2.3 es generalizable a las inmersiones en cualquier superficie y su recíproco sigue sin ser cierto. A continuación se dará una caracterización de los grafos peri-S-representables y no numerables (*peri-S no numerables*) para cualquier S superficie compacta (luego de característica de Euler finita). Para ello, resulta conveniente utilizar el siguiente resultado, cuya demostración se debe a Hutchinson y Wagon [55].

Teorema 5.3.1 *[55] Sean S una superficie compacta y G un grafo. Son equivalentes:*

1. *G admite una inmersión en S.*
2. *Se verifican las tres siguientes condiciones:*
   (a) *G no contiene ningún subgrafo finito que no admita una inmersión en S.*
   (b) *El cardinal de $V(G)$ es menor o igual que $2^{\aleph_0}$.*
   (c) *G posee, a lo sumo, $\aleph_0$ vértices de valencia al menos 3.*

□

Con esto, se está en disposición de caracterizar los peri-S siempre que la característica de Euler de S sea finita. Antes, obtendremos un resultado sencillo:

Corolario 5.3.2 *Sean S una superficie compacta y G un grafo numerable y peri-S. Entonces $G + K_1$ es S-representable.*

Demostración: Como G es peri-S, no contiene ningún subgrafo finito no peri-S, por lo que $G + K_1$ tampoco contiene ningún subgrafo finito no representable en S; utilizando el Teorema 5.3.1, se tiene lo que se quería demostrar. □

El Teorema de caracterización de los grafos peri-S no numerables se enuncia:

Teorema 5.3.3 *Sean S una superficie compacta y G un grafo no necesariamente numerable. Son equivalentes:*

1. *G es peri-S.*
2. *Se verifican las tres siguientes condiciones:*
   (a) *G admite una inmersión en S.*
   (b) *Todo subgrafo finito de G es peri-S.*
   (c) *A lo sumo, G posee $\aleph_0$ ciclos distintos.*
3. *Se verifican las tres siguientes condiciones:*
   (a) *$|V(G)| \leq 2^{\aleph_0}$ y G posee, a lo sumo, $\aleph_0$ vértices de valencia al menos 3.*
   (b) *Todo subgrafo finito de G es peri-S.*
   (c) *G no contiene un subgrafo que sea una subdivisión de $K_1 + \aleph_1 K_2$ ni de $\aleph_1 K_3$.*

Demostración:

$\boxed{1 \Rightarrow 2 \text{ (y } 3)}$ En el Teorema 5.3.1 se generaliza el Teorema 5.1.3 a cualquier superficie (orientable o no). Esto nos permite utilizar la primera parte de la demostración dada para el Teorema 5.2.7

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ También aquí es evidente.

$\boxed{1 \Leftarrow 3}$ Como en la referida demostración del Teorema 5.2.7, se puede suponer que G tiene una cantidad numerable de componentes conexas.

Si G es numerable, se puede considerar el grafo $G+K_1$ que admite una inmersión en S en virtud del Teorema 5.3.1 y proceder como entonces.

Si G no es numerable, los vértices que pertenecen a algún ciclo vuelven a ser una cantidad numerable; el resto de los vértices desaparecen al eliminar los rayos (finitos o infinitos) como se hacía en la demostración del Teorema 5.2.7. □

Este resultado constituirá una verdadera caracterización por menores topológicos prohibidos en aquellas superficies de las que se conozca la caracterización por menores topológicos prohibidos de sus grafos peri finitos. Para obtener una tal lista de menores topológicos prohibidos, a estos subgrafos anteriores, añadimos:

- El grafo sin aristas pero cuyo cardinal del conjunto de sus vértices sea el cardinal siguiente a $2^{\aleph_0}$ (usando el *Axioma del continuo generalizado*, este grafo tendrá $2^{\aleph_1} = \aleph_2$ vértices);
- todos los grafos bipartitos en los cuales una de las partes de la bipartición consiste en $\aleph_1$ vértices de valencia 3;
- $K_1 + \aleph_1 K_2$;
- $\aleph_1 K_3$.

Como cabía esperar, la lista que se acaba de describir está formada por una cantidad no numerable de grafos debido a la forma de impedir que haya una cantidad no numerable de vértices de valencia 3 o más. Pero entre los grafos bipartitos con $\aleph_1$ vértices de valencia 3, hay muchos redundantes (unos entre sí y otros que tienen como subgrafo una subdivisión de $K_{2,3}$). En realidad, bastaría considerar solo dos grafos: $\aleph_1 K_{1,3}$ y un grafo E en que un vértice es adyacente con $\aleph_1$ vértices, cada uno de los cuales es adyacente con otros 2 vértices distintos entre sí. Así, la lista de menores topológicos peri-S prohibidos está formada por los peri-S prohibidos finitos, $(\aleph_2, \emptyset)$, $\aleph_1 K_{1,3}$, E, $K_1 + \aleph_1 K_2$ y $\aleph_1 K_3$.

A la vista de los resultados conseguidos, parece lógico intentar obtener otros similares para seudosuperficies con lo que se estarían generalizando los enunciados sobre grafos peri descritos a lo largo de la memoria.

5.4 Seudosuperficies y superficies no compactas

El Lema 5.2.3 sigue siendo cierto para inmersiones en una seudosuperficie S, como se deduce del análisis de su demostración. Continuando con la intención de enunciar un resultado similar al Teorema 5.3.3 para seudosuperficies, surge un primer inconveniente en el hecho de que hay grafos finitos y peri-S tales que, al sumarles K_1, no son S-representables, según se ha podido comprobar en ocasiones anteriores

(como en los Ejemplos 2.1.2, 3.2.4, ...). Esto impide utilizar los procedimientos de demostraciones ya descritas.

Por tanto, para conseguir resultados similares a los de secciones precedentes habría que estudiar cómo se comporta cada seudosuperficie por separado. No obstante, hay familias enteras de seudosuperficies para las que se pueden enunciar resultados comunes. También se pueden estudiar los grafos no numerables en superficies no compactas con una cantidad finita de finales de Freudenthal.

Proposición 5.4.1 *Sean G un grafo, $n \in \mathbb{N}$ y S una superficie compacta. Son equivalentes:*

1. *G admite una inmersión en la superficie tubular $S(n)$.*

2. *G admite una inmersión en la superficie S.*

Demostración: En ambas condiciones se puede suponer que no todos los puntos de la superficie pertenecen a la inmersión de G. Como no importan las acumulaciones de vértices o aristas que puedan producirse en la inmersión de un grafo no numerable, cualquier homeomorfismo entre S menos n puntos y $S(n)$ es suficiente para probar la equivalencia entre la condición *1* del enunciado y las del Teorema 5.3.1. □

Con esto, se puede enunciar la caracterización de los grafos peri en las superficies tubulares:

Teorema 5.4.2 *Sean G un grafo, $n \in \mathbb{N}$ y S una superficie compacta. Son equivalentes:*

1. *G es peri-$S(n)$.*

2. *G es peri-S.*

Demostración: Es similar a la de la Proposición 5.4.1, pero utilizando el Teorema 5.3.3 en lugar del 5.3.1. □

Por otra parte, al buscar la caracterización en seudosuperficies, uno se encuentra con la dificultad de no tener caracterizados los grafos no numerables que admiten inmersiones. Aportemos, de todos modos, un resultado parcial:

Proposición 5.4.3 *Sean G un grafo y S una seudosuperficie obtenida mediante la contracción a puntos de una cantidad finita de curvas cerradas y simples de una superficie compacta. Si G admite una inmersión en S, entonces se verifican las tres siguientes condiciones:*

1. *G no contiene ningún subgrafo finito que no admita una inmersión en S.*
2. *El cardinal de $V(G)$ es menor o igual que $2^{\aleph_0}$.*
3. *G posee, a lo sumo, $\aleph_0$ vértices de valencia al menos 3.*

Demostración: Es evidente que se verifica *1*. Además, si S' es la superficie compacta de la que procede S, G admite una inmersión en S', luego se verifican *2* y *3* por el Teorema 5.3.1. □

Obtener un recíproco de esta Proposición podría resultar interesante. Conviene tener en cuenta que este estudio de los grafos peri no numerables no estará completamente concluido mientras no se caractericen los grafos no numerables que admiten inmersión en las seudosuperficies a tratar.

Advirtiendo de este detalle, se puede enunciar:

Proposición 5.4.4 *Sean G un grafo y S una seudosuperficie obtenida mediante la contracción a puntos de una cantidad finita de curvas cerradas y simples de una superficie compacta. Si G es peri-S, entonces se verifican las siguientes condiciones:*

1. *G admite inmersión en S.*
2. *Todo subgrafo finito de G es peri-S.*
3. *G posee, a lo sumo, $\aleph_0$ ciclos distintos.*
4. *G no contiene un subgrafo que sea una subdivisión de $K_1 + \aleph_1 K_2$ ni de $\aleph_1 K_3$.*

Demostración: *1* y *2* se verifican de forma evidente. Como en la última prueba descrita, si S' es la superficie compacta de la que procede S, G admite inmersión peri-S'; por tanto, el Teorema 5.3.3 permite concluir en este caso. □

La comprobación de que, en la Proposición 5.4.4, tanto *1*, *2* y *3* como *1*, *2* y *4*, son condiciones suficientes para la peri-S-representabilidad de grafos no numerables

será posible para seudosuperficies S en las que G sea peri-S es equivalente a que $G + K_1$ es S-representable; solo habrá que construir demostraciones similares a las anteriores. Seudosuperficies de este tipo son, por ejemplo, las que tienen a lo sumo un punto singular: el toro estrangulado, la unión por un punto de dos superficies, ciertas seudosuperficies arborescentes o forestales...

La caracterización de los grafos no numerables que admiten inmersión con todos los vértices en una misma cara se puede abordar también para seudosuperficies distintas de las consideradas en estos últimos resultados. La conclusión de esta línea de investigación bien puede merecer mayor dedicación de la que se le puede dedicar aquí, al final de esta memoria.

Apéndice A

Menores peri prohibidos en la banda de Möbius

En las páginas dedicadas al estudio de las inmersiones peri en la banda de Möbius, se hace referencia a varios algoritmos para la obtención de listas de menores y menores topológicos prohibidos. Se presentan a continuación.

A.1 Menores p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ prohibidos

Los datos de entrada del algoritmo son tanto los menores peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ prohibidos (a los que llamamos $H_1, \ldots, H_{32}$) como el resto de menores topológicos peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ prohibidos ($H_{33}, \ldots, H_{45}$), que se representaron en las Figuras 10 y 11.

Paso 1: Desde $i = 1$ hasta 45, se efectúan los **Pasos 2** y **3**.

Paso 2: Por cada vértice $v \in V(H_i)$, se genera un par ordenado $(G_i, W_i) = (H_i - v, \{w \in H_i : vw \in A(H_i)\})$; es decir, se señalan los vértices adyacentes con v y se borra v.

Paso 3: Para cada arista $a \in A(H_i)$, se genera un par ordenado $(G_i, W_i) = (H_i - a, \{\text{extremos de } a\})$; esto es, se señalan los extremos de a y se borra a. Se incrementa i en 1 y se vuelve al **Paso 1** mientras sea necesario.

Paso 4: Se define un orden parcial entre los pares de la forma (G_i, W_i) con $W_i \subseteq V(G_i)$:

$(G_1, W_1) <_2 (G_2, W_2) \Longleftrightarrow$ o bien $G_1 = G_2$ y $W_1 \subset W_2$ o bien $W_1 \subseteq W_2$ y G_1 es un menor propio de G_2 (es decir, G_1 se obtiene de G_2 mediante el borrado de vértices, de aristas o la contracción de aristas).

Paso 5: Utilizando el orden $<_2$ definido en el **Paso 4**, se comparan los pares dos a dos y se van eliminando los que tienen algún otro como menor dentro de la lista.

Paso 6: A partir de cada (G_i, W_i), se construye el grafo infinito numerable que resulta al añadir a G_i un rayo adyacente con cada vértice de W_i.

La unión de la lista resultante (que se representó en la Figura 4.18) con los menores peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ prohibidos $(H_1, \ldots, H_{32})$ es la de menores p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ prohibidos.

A.2 Menores topológicos p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ prohibidos

El dato de entrada del algoritmo es, ahora, la lista de los pares (G_i, W_i) que permanecen en la lista después de la ejecución del **Paso 5** del algoritmo de la Sección A.1.

El modo de obtener, a partir de esa lista de pares, los pares que generarán los menores topológicos p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ prohibidos (de las las Figuras 4.18 y 4.19) es casi idéntico al explicado por Cáceres en [26], por lo que no parece necesaria su exposición.

Otro procedimiento igualmente válido para obtener la lista de menores topológicos p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ prohibidos consiste en repetir el algoritmo de la Sección A.1 pero sustituyendo el orden $<_2$ definido en el **Paso 4** por este otro:

$(G_1, W_1) <_1 (G_2, W_2) \Longleftrightarrow$ o bien $G_1 = G_2$ y $W_1 \subset W_2$ o bien $W_1 \subseteq W_2$ y G_1 es un subgrafo propio de G_2 (es decir, G_1 se obtiene de G_2 mediante el borrado de vértices o aristas).

Obsérvese que también se puede obtener la lista de menores p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ prohibidos a partir de la lista de menores topológicos p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ prohibidos, eliminando los grafos que resultan redundantes al compararse entre sí mediante el orden $<_2$ del algoritmo de la Sección A.1.

Bibliografía

[1] Aho, A. V; Hopcroft, J. E; Ullman, J. D. "The design and analysis of computer algorithms". *Addison-Wesley Publishing Company*, 1974.

[2] Apple, K; Haken, W. "Every planar map is 4-colorable - 1: Discharging". *Ill. J. Math.* **21** (1977), 429–490.

[3] Apple, K; Haken, W. "Every planar map is 4-colorable - 2: Reducibility". *Ill. J. Math.* **21**, (1977), 491–567.

[4] Archdeacon, D. "A Kuratowski theorem for the Proyective Plane". *Journal of Graph Theory* **5** (1981), 243–246.

[5] Archdeacon, D; Bonnington, C. P; Dean, N; Hartsfield, N; Scott, K. "Obstruction sets for outer-cylindrical graphs". Comunicación personal, 1997.

[6] Archdeacon, D; Hartsfield, N; Little, C. H. C; Mohar, B. "Obstruction sets for outer-proyective-planar graphs". *Ars Combinatoria* **49** (1998), 113–127.

[7] Archdeacon, D; Huneke, P. "A Kuratowski theorem for non-orientable surfaces". *J. Combinatorial Theory.* Series B **27** (1979), 332–370.

[8] Ayala, R; Domínguez, E; Márquez, A; Quintero, A. "On the graphs which are the edge op a plane tiling". *Mathematica Scandinavica* **77** (1995), 5–16.

[9] Battle, J; Harary, F; Kodama, Y; Youngs, J. W. T. "Additivity of the genus of a graph". *Bull. Amer. Math. Soc.* **68** (1962), 565–568.

[10] Bernhart, F; Kainen, P. C. "The book thickness of a graph". *Journal of Combinatorial Theory.* Series B **27**:3 (1979), 320–331.

[11] Bodendiek, B; Gvozdjak, P; Širáň, J. "On minimal graphs for bananas surface B_2." *Contemporary methods in graph theory.* Bibliographisches Inst., Mannheim, 1990, 1–29.

[12] Bodendiek, B; Schumacher, H; Wagner, K. "Über Relationen auf Graphenmengen". *Abh. Math. Sem. Univ. Hamb.* **51** (1981), 232–243.

[13] Bodendiek, B; Schumacher, H; Wagner, K. "Über Graphen auf Fächen und Spindelflächen". *Festschrift K. Wagner: Graphen in Forschung und Unterricht*, R.Bodendiek, H.Schumacher and G.Walther editors, Franzbecker-Verlag (1985), 18–47.

[14] Bodendiek, R; Wagner, K. "On almost planar graphs". (Graphentheorie und ihre Anwendungen; Stadt Wehlen, 1988). *Dresdner Reihe Forsch* **9** (1988), 9–12.

[15] Bodendiek, R; Wagner, K. "On the minimal basis of the spindle-surface S_1". (Combinatorics and graph theory). *Banach Center Publ.* **25** (1989), 19–31.

[16] Bodendiek, R; Wagner, K. "Solution to Konig's graph embedding problem". *Mathematische Nachrichten* **140** (1989), 251–272.

[17] Bodendiek, R; Wagner, K. "The fascination of minimal graphs". *Annals of Discrete Mathematics* **41** (1989), 39–52.

[18] Bodendiek, R; Wagner, K. "Solutions of Konig's embedding problem for bananas surface". (Mathematische Wissenschaften gestern und heute. 300 Jahre Mathematische Gesellschaft in Hamburg, Teil 3; Hamburg, 1990). *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg.* **12**:3 (1991), 749–765.

[19] Bodendiek, R; Wagner, K. "On the bananas surface B_2". (Fourth Czechoslovakian Symposium on Combinatorics, Graphs and Complexity; Prachatice, 1990). *Ann. Discrete Math.* **51** (1992), 23–30.

[20] Booth, K. S; Lueker, G. S. "Testing the consecutive ones property, interval graphs and graphs planarity using PQ-tree algorithms". *J. Comput. Syst. Sci.* **13** (1976), 335–379.

[21] Borodin, O. V; Melnikov, L. S. "The chromatic number of a seudosurface". *Diskret. Analiz.* Issledovanija Struktury i Funkcionirovanija Upravljajuscih Sistem **24** (1974), 8–20.

[22] Boza, L; Dávila, M. T; Fedriani, E. M; Moyano, R. "n-amalgamations of two spheres with $n \geq 2$ do not admit a finite Kuratowski's Theorem". Comunicación personal, 2000.

[23] Boza, L; Dávila, M. T; Moyano, R. "Finitud del Teorema de Kuratowski en seudosuperficies". I Encuentro Andaluz de Matemática Discreta. La Rábida-Huelva, 1999.

[24] Boza, L; Diánez, A; Márquez, A. "On infinite outerplanar graphs". *Mathematica Bohemica* **119**:4 (1994), 381–384.

[25] Boza, L; Revuelta, M. P. "Caracterización de grafos infinitos que admiten inmersiones EAP en superficies tubulares". *Comunicación personal*, 1999.

[26] Cáceres, J. "Diversos tipos de planaridad de grafos". *Tesis Doctoral.* Dpto. de Geometría, Topología y Química Orgánica. Universidad de Almería, 1996.

[27] Cairns, S. S. "Introductory Topology". *The Ronald Press Company.* New York, 1961.

[28] Chartrand, G; Harary, F. "Planar permutation graphs". *Ann. Inst. H. Poincaré.* Sect. B **3** (1967), 433–438.

[29] Chiba, N; Nishizeki, T; Abe, S; Ozawa, T. "A linear algorithm for embedding planar graphs using PQ-trees". *J. Comput. Syst. Sci.* **30**:1 (1985), 54–76.

[30] Cook, S. A. "The complexity of the theorem proving procedures". *Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, New York (1971), 151–158.

[31] Dana, J. C. "Grafos periódicos. Una algorítmica constructiva". *Tesis Doctoral.* Dpto. de Matemática Aplicada I. Universidad de Sevilla, 1994.

[32] Dirac, G. A; Schuster, S. "A theorem of Kuratowski". *Indag. Math.* **16** (1954), 343–348.

[33] Do Carmo, M. P. "Geometría diferencial de curvas y superficies". *Alianza Universidad Textos*, 1990.

[34] Domínguez, E. "Geometrical introduction to bordism theory". Publicaciones del Seminario Matemático García de Galdeano. Universidad de Zaragoza. Serie II. **4**. Sección 3, 1985.

[35] Filotti, I. S; Miller, G. L; Reif, J. "On determining the genus of a graph in $O(v^{O(g)})$ steps". *Proceedings 11th Anual ACM Symp. Theory of Computing* (1979), 27–37.

[36] Fréchet, M; Fan, K. "Introducción a la Topología Combinatoria". *Ed. Universitaria de Buenos Aires*, 1959.

[37] Frederickson, G. Ñ; Janardan, R. "Space-efficient and fault-tolerant routing in outerplanar graphs". *IEEE: Trans. on Comp.* **37**:12 (1988), 1529–1540.

[38] Freudenthal, H. "Über die Enden Topologischer Raüme und Gruppen". *Math. Zeit* **33** (1931), 692–713.

[39] Gardner, M. "Inspiración: ¡ajá!". *Editorial Labor, S.A.* Barcelona, 1981.

[40] Gardner, M. "Ruedas, vida y otras diversiones matemáticas". *Editorial Labor, S.A.* Barcelona, 1985.

[41] Gardner, M. "Rosquillas anudadas y otras amenidades matemáticas". *Editorial Labor, S.A.* Barcelona, 1987.

[42] Gardner, M. "Mosaicos de Penrose y escotillas cifradas". *Editorial Labor, S.A.* Barcelona, 1990.

[43] Garey, M. R; Johnson, D. S. "Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness". *W. H. Freeman*, 1979.

[44] Gegúndez, M. "Inmersiones periplanas de grafos sin acumulación con aristas y vértices distinguidos en superficies". *Tesis Doctoral.* Dpto. de Matemática Aplicada I. Universidad de Sevilla, 1998.

[45] Gradolato, M; Pisanski, T. "Combinatorial description of pseudosurfaces". *Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Universita di Trieste* **21**:2 (1989), 193–210.

[46] Halin, H. "Über Trennende Eckenmengen in Graphen und der Mengerstchen Satz". *Math. Ann.* **157** (1964), 34–41.

[47] Halin, H. "Zur Häufungspunktfreien Darsellung Adzählbarer Graphen in der Ebene". *Arch. Math.* **17** (1966), 239–242.

[48] Harary, F. "Graph Theory". *Addison Wesley Reading Mass*, 1969.

[49] Harary, F; Tutte, W. T. "A dual form of Kuratowski's theorem". *Canada Math. Bull.* **8** (1965), 17–20.

[50] Havel, H. "On wedge-shaped surfaces. I". *Casopis Pest. Mat.* **80** (1955), 51–59.

[51] Havel, H. "On wedge-shaped surfaces. II". *Casopis Pest. Mat.* **80** (1955), 308–316.

[52] Heath, L. S. "Embedding outerplanar graphs in small books". *Society for Industrial and Applied Mathematics. Journal on Algebraic and Discrete Methods* **8**:2 (1987), 198–218.

[53] Hopcroft, J. E; Tarjan, R. E. "Efficient planarity testing". *J. Assoc. Comput. Mach.* **21** (1976), 549–568.

[54] Hrbacek, K; Jech, T. J. "Introduction to set theory". *Monographs and textbooks in pure and applied mathematics"* **85**. Marcel Dekker, Ed. New York, 1984.

[55] Hutchinson, J. P. y Wagon, S. "A forbidden subgraph characterization of infinite graphs of finite genus". *Graphs and applications.* Wiley Intersci. Publ. (1982), 183–194.

[56] Kerékjártó, B. M. "Vorlesungen ueber Topologie I". *Julius Springer.* Berlin, 1923.

[57] Knor, M. "Characterization of minor-closed pseudosurfaces". *Ars Combinatoria* **43** (1996), 246–256.

[58] Kuratowski, K. "Sur le problème des courbes gauches en topologie". *Fund. Math.* **15** (1930), 271–283.

[59] Lempel, A; Even, S; Cederbaum, I. "An algorithm for planarity testing of graphs". *Theory of Graphs*, Gordon and Breach (1967), 215–232.

[60] Lu, C. K. "Classification of 2-manifolds with singular points". *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 1093–1098.

[61] Lucks, E. M. "Isomorphism of graphs of bounded valence can be tested in polynomial time". *Proc. 21st. IEEE Symp. on Foundations of Computer Science*, Syracuse, 1980, 42–49.

[62] Manber, U. "Introduction to algorithms". *Addison Wesley*, 1989.

[63] Massey, W. S. "Introducción a la Topología algebraica". *Ed. Reverté.* Barcelona, 1972.

[64] Mitchell, S. "Linear algorithms to recognize outerplanar and maximal outerplanar graphs". *Information Processing Letters* **9** (1979), 229–232.

[65] Moyano, R. "Inmersiones de grafos de línea, medios y totales en superficies". *Tesis Doctoral.* Dpto. de Matemática Aplicada I. Universidad de Sevilla, 2000.

[66] Nash-Williams, C. St. J. A. "Infinite graph - a survey". *Journal of Combinatorial Theory* **3** (1967), 286–301.

[67] Nishizeki, T; Chiba, N. "Planar graphs: theory and algorithms". *Annals of Discrete Mathematics* **32** North Holland, 1988.

[68] Oubiña, L; Zucchello, R. "A generalization of outerplanar graphs". *Discrete Mathematics* **51**:1 (1984), 243–249.

[69] Quintero, A. "Interpretación geométrica de algunos resultados de la Topología Algebraica". *Tesis de Licenciatura.* Universidad de Sevilla, 1978.

[70] Revuelta, M. P. "Inmersiones de grafos en superficies tubulares de género finito". *Tesis Doctoral.* Dpto. de Matemática Aplicada I. Universidad de Sevilla, 1999.

[71] Robertson, N; Seymour, P. D. "Graph minors VIII. A Kuratowski Theorem for general surfaces". *J. Combinatorial Theory.* Series B **48** (1990), 255–288.

[72] Robertson, N; Seymour, P. D. "An outline of a disjoint paths algorithm". *H. J. Prömel, A. Schrijver, B. Korte and L. Lovász edit. Paths, Flows and VLSI-Layout.* Springer-Verlag, Berlin (1990), 267–292.

[73] Robinson, D. F; Janjic, I. "The constructability of floorplans with given outerplanar adjacency and rooms areas". *Ars Combinatoria* **20**:B (1985), 133–142.

[74] Sedláček, J. "On a generalization of outerplanar graphs". *Časopis Pěst. Mat.* **113** (1988), 213–218.

[75] Seifert, H; Threlfall, W. "A textbook of Topology". *Academic Press.* New York, 1980.

[76] Širáň, J; Gvozdjak, P. "Kuratowski-type theorems do not extend to pseudosurfaces". *Journal of Combinatorial Theory.* Series B **54** (1992), 209–212.

[77] Stahl, S; Beineke, L. W. "Blocks and the nonorientable genus of graphs". *Journal of Graph Theory* **1** (1977), 75–78.

[78] Thomassen, C. "Infinite Graphs". *Selected Topics in Graph Theory* **2** Academic Press (1983), 129–160.

[79] Thomassen, C. "The graph genus problem is NP-complete". *Journal of Algorithms* **10** (1989), 568–576.

[80] Thomassen, C. "The genus problem for cubic graphs". *Journal of Combinatorial Theory.* Series B **69** (1997), 52–58.

[81] Van Lier, M. C; Otten, R. H. J. M. "C.A.D. of masks and wiring". *T.H. Rept.* 74-e-44. Dept. Elect. Engrg. Eindhoven University of Technology (The Netherlands), 1974.

[82] Wagner, K. "Fastplättbare Graphen". *Journal of Combinatorial Theory* **3** (1967), 326–365.

[83] Whitney, H. "Congruent graphs and the connectivity of graphs". *Amer. J. Math.* **54** (1932), 150–168.

[84] Whittlesey, E. F. "Finite surfaces: a study of finite 2-complexes. II. The canonical form". *Math. Mag.* **34** (1960), 67–80.

[85] Winter, P. "Generalized Steiner problems in outerplanar network". *BIT* **25**:3 (1985), 485–496.

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	conjunto ordenado de los números naturales
$\mathbb{Z}$	conjunto ordenado de los números enteros
$\mathbb{R}$	cuerpo de los números reales
$\aleph_0$	cardinal de $\mathbb{N}$
$\aleph_1$	siguiente cardinal a $\aleph_0$
$\|X\|$	cardinal del conjunto X
$\times$	producto cartesiano
$\times$	producto de grafos
ab	arista entre los vértices a y b
$+$	suma de grafos
$\#$	suma conexa de superficies
$\wedge$	unión por un punto
$\setminus$	diferencia de conjuntos
$-$	resta de grafos
$\square$	final de demostración u omisión de la misma
$\triangleleft$	final de un ejemplo

Índice de Materias

1-camino, 9, 144
2-bloque, 11
2-camino, 9, 144
2-conector, 78
4 colores, Teorema de los, 124

Π-cara, 26
Π-género, 26

acumulación, 12, 145
algoritmo, 22
    eficiente, 22
árbol, 10, 136
arco, 8
arista, 6
    incidente, 6
    interior, 10
    múltiple, 58
Axioma del continuo, 144, 155

biplátano, 4, 40
bloque, 10
borrar, 8
botella de Klein, 2, 32

cadena de esferas, 62, 63
cadena de vértices, 84
camino, 8, 144
cara, 15, 146
    exterior, 15
célula, 5, 91
    distinguida, 63, 67, 72
ciclo, 7–9, 144
ciclo (permutación), 25
color, 109
coloración de finales, 109
compactificación, 105, 111
conjunto independiente, 23
cono de un grafo, 148
contracción, 10
cubo, 7, 36, 40

descompactificación, 105, 111
desingularizar, 78
digrafo, 58
distancia, 8

esfera, 2
Euler, fórmula de, 26
extremo, 6

final de Freudenthal, 2
final estable, 9, 104

género, 26
    no orientable, 2, 24
    orientable, 2, 24
grafo
    n-coloreado, 109
    n-conexo, 10
    k-periplano, 16
    W-periplano, 16, 73
    S-representable, 145
    acíclico, 10

bipartito, 8
completo, 8
c-peri-$S(n)$, 109
completo, 6
conexo, 9
cúbico, 7, 9
dirigido, 58
EAP-plano, 13
esférico, 12
finito, 6
homeomorfo, 10
intersección, 7
localmente finito, 6
no numerable, 6, 144
numerable, 6
p-peri-$S(n)$, 103
p-peri-$S^2(2)$, 135
p-pericilíndrico, 120, 135
p-periplano, 16
peri-S, 15, 40, 145
no numerable, 153
peri-representado, 26
pericilíndrico, 135
periesférico, 147
periplano, 15, 147
periplano generalizado, 16
peritórico, 147
plano, 11, 145
producto, 7
regular, 7
subyacente, 58
suma, 7
tórico, 12
unión, 7
VAP-plano, 13
Grafos finitos, 21
Grafos infinitos, 101
Halin, grafos de, 14
hereditaria, propiedad, 13, 55
hoja, 7
inmersión, 26, 145
adecuada, 147
peri, 15
plana, 11
isomorfismo entre grafos, 8
Kuratowski, Teorema de, 12
lazo, 58
longitud, 8
medusa, 77
menor, 10, 110
prohibido, 12
topológico prohibido, 12
morfismo entre grafos, 8
multigrafo, 58
orientación positiva, 26
pareja de corte, 10
permutación, 25
permutación cíclica, 25
pétalo, 50
plano proyectivo, 2
problema, 22
CI (del conjunto independiente), 23
de decisión, 22
GG (del género de un grafo), 24
GGC (del género de un grafo cúbico), 24
IG (de isomorfismo entre grafos), 25
IGC (de isomorfismo entre grafos cúbicos), 25
NP-completo, 22

PG (del peri-género), 29
PGC (del peri-género de un grafo cúbico), 29
PGC (del peri-seudogénero de grafos cúbicos), 29
PGS (del peri-género de un grafo sumergible), 29
PSG (del peri-seudogénero), 27
SAT (de la satisfacibilidad), 23
puente, 10
punto de corte, 10
punto singular, 3, 40

rayo, 9, 38, 105, 144
recorrido, 8
red neuronal, xiii
resta de grafos, 8
rueda, 10

seudografo, 58
seudosistema de rotación, 26
seudosuperficie, 3, 40
arborescente, 96
esférica simple, 5
forestal, 97
sistema de rotación, 25
subdividisión, 10
subgrafo, 7
inducido, 7
suma conexa, 2, 87
superficie, 2
no orientable, 2
orientable, 2
tubular, 102

toro, 2
estrangulado, 4

unión por un punto, 91

valencia, 6
vértice, 6
adyacente, 6
aislado, 7
de apoyo, 139
de corte, 50
vértices de corte, 35

wedge, 91

Índice de Figuras

1 El toro y las seudosuperficies más sencillas. 4

2 Dos representaciones de B_1. 4

3 B_2. 5

4 B_3. 5

5 Dos representaciones de K_4 distintas. 11

6 Grafos de Kuratowski. 12

7 Menores VAP-planos prohibidos. 14

8 Menores EAP-planos prohibidos. 14

9 Menores periplanos prohibidos. 15

10 Menores peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ prohibidos. 17

11 El resto de menores topológicos peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ prohibidos. 18

12 Menores p-periplanos prohibidos. 18

1.1 El toro estrangulado. 32

1.2 Un grafo no 2-periplano y una inmersión suya peri-B_1. 34

1.3 Un grafo y un corte suyo por un vértice. 35

1.4 Inmersión peri-B_1 de un grafo sin cortes periplanos. 36

2.1 Menores planos prohibidos para la 2-periplanaridad. 42

2.2 Menores topológicos 2-periplanos prohibidos no menores prohibidos. . 43

2.3 Caso clave para estudiar los grafos peri-B_2. 45

2.4 L_3. 47

2.5 Inmersión peri-L_3 de $K_4 \cup K_4$. 48

2.6 Inmersión peri-L_3 de 2 K_4 pegados por un punto. 49

2.7 Grafos peri-L_3 pero no 2-periplanos. 50

2.8 Grafos no peri-L_3. 51

2.9 Algunos menores peri-L_3 prohibidos. 52

2.10 Grafos de la familia $\mathcal{F}_3$. 53

2.11 Grafos de la familia $\mathcal{F}_4$. 53

2.12 Una seudosuperfice formada por 9 esferas. 56

2.13 Una seudosuperficie formada por 8 esferas. 57

2.14 Inmersión peri no "hereditaria" para menores. 57

2.15 Una seudosuperfice formada por 10 esferas. 59

2.16 Multigrafo no peri de grafo subyacente peri. 59

2.17 Grafo subyacente del multigrafo de la Figura 2.16. 59

3.1 Seudosuperficie S_1 con 3 esferas y 3 puntos singulares. 64

3.2 Seudosuperficie S_2 con 3 esferas y 4 puntos singulares. 67

3.3 Inmersión peri de $K_{3,3}$. 68

3.4 Grafo peri-S_2 no 3-periplano. 68

3.5 Inmersión peri de un grafo no 3-periplano. 69

3.6 Seudosuperficie S_3 con 3 esferas y 4 puntos singulares. 72

3.7 Grafo plano y peri-S_3 pero no 3-periplano. 73

3.8 Inmersión peri de un grafo plano y no 3-periplano. 73

3.9 Seudosuperficie J_3 con 2 esferas y 3 puntos singulares. 77

3.10 Seudosuperficie J_n con 2 esferas y n puntos singulares. 77

3.11 Familia infinita de grafos sin inmersión en B_2. 78

3.12 Familia infinita de grafos sin inmersión en J_3. 78

3.13 Grafo no 3-periplano pero sí peri-J_3. 79

3.14 Una inmersión peri-J_3. 79

3.15 Grafo clave para probar que K_5 no es peri-J_3. 83

3.16 Dos representaciones de una misma seudosuperficie con infinitos menores topológicos peri prohibidos. 85

3.17 Grafo de una familia infinita de menores topológicos peri prohibidos. 85

3.18 Familia infinita de grafos sin inmersión peri-J_3. 86

3.19 Grafo no peri que es unión de grafos peri. 93

3.20 Las tres posibles uniones por un punto de 2 biplátanos. 94

3.21 Grafo con una única inmersión en B_2. 94

3.22 Seudosuperficie arborescente con 16 células esféricas. 96

4.1 Representación del plano como superficie tubular. 102

4.2 Representación del cilindro como superficie tubular. 102

4.3 Dos compactificaciones distintas de un mismo grafo G. 105

4.4 Un grafo sin inmersión VAP en el plano. 106

4.5 Inmersión VAP en el cilindro infinito. 106

4.6 Una 2-coloración y una 3-coloración. 110

4.7 Un grafo no c-peri-$S^2(2)$ y una inmersión no p-peri-$S^2(2)$. 112

4.8 Un grafo no c-peri-$S^2(2)$ y 2 compactificaciones suyas. 114

4.9 Descompactificaciones de K_4 y $K_{2,3}$ por un vértice. 117

4.10 Descompactificaciones de K_4 y $K_{2,3}$ por una arista. 117

4.11 Menores c-peri-$S^2(1)$ prohibidos. 118

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
600027910

4.12 Descompactificaciones de A_1^1 por vértices. 118

4.13 Descompactificaciones de B_1^1 por vértices. 118

4.14 Menores c-peri-$S^2(2)$ prohibidos. 121

4.15 Menores c-peri-$S^2(3)$ prohibidos. 122

4.16 Menores c-peri-$S^2(4)$ prohibidos. 123

4.17 Componente conexa de A_2^n con 4 finales. 124

4.18 Menores p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ prohibidos. 132

4.19 Menores topológicos p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ prohibidos que no son menores p-peri-$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})(1)$ prohibidos. 133

4.20 Una inmersión p-peri-$S^2(2)$ válida para n componentes conexas. . . . 134

4.21 Un menor "clave" para los grafos no p-pericilíndricos. 137

4.22 Menores p-peri-$S^2(2)$ prohibidos. 138

4.23 Un grafo p-pericilíndrico con 4 finales y un ciclo. 139

5.1 Inmersión plana de un grafo numerable. 146

5.2 Inmersión periplana de un grafo con infinitas caras. 148

5.3 Sucesión creciente de grafos periplanos. 148

5.4 Un grafo periplano con infinitas componentes conexas. 149

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. EUGENIO MANUEL FEDRIANI MARTEL titulada INMERSIONES DE GRAFOS EN SUPERFICIES Y SUPERFICIES CON TODOS LOS VÉRTICES EN UNA MISMA CARA acordó otorgarle la calificación de SOBRESALIENTE CUM LAUDE (POR UNANIMIDAD)

Sevilla, 27 de JUNIO de 2001

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Presidente El Secretario, El Doctorando,

Eugenio M. Fedriani Martel