

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Modelo DEA para análisis de fusiones de entidades productivas

Autor: Álvaro de los Reyes Margarit

Tutor: Sebastián Lozano Segura

**Dpto. Organización Industrial y Gestión de
Empresas I**

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Modelo DEA para análisis de fusiones de entidades productivas

Autor:

Álvaro de los Reyes Margarit

Tutor:

Sebastián Lozano Segura

Dpto. de Organización Industrial y Gestión de Empresas I
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2020

Proyecto Fin de Carrera: Modelo DEA para análisis de fusiones de entidades productivas

Autor: Álvaro de los Reyes Margarit

Tutor: Sebastián Lozano Segura

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2020

El secretario del Tribunal

A mi familia

A mis amigos

A mis profesores

Resumen

Este documento analiza el modelo de análisis por envoltura de datos (DEA) de fusión de entidades productivas propuesto por Lozano y Adenso-Díaz (2020). El objetivo del modelo estudiado es determinar las fusiones más ventajosas de entre un conjunto de unidades, así como estimar las mejoras de eficiencia que esta fusión puede producir. El modelo también determina qué parte de la mejora de la eficiencia producida por la fusión se debe a un efecto de fusión puro y qué parte al aprendizaje que se produce al replicar comportamientos de otras DMUs (Decision Making Units) similares. Esta división entre mejora de eficiencia de fusión y aprendizaje se utilizará para determinar la idoneidad de la fusión. En este documento también se estudiarán todas las posibles restricciones que se pueden aplicar al modelo para adaptarlo a un escenario real.

Para ilustrar el método y poder extraer conclusiones se ha recurrido a un caso de fusión de granjas productoras de leche. Una vez resuelto este caso con el modelo original se determinarán los resultados introduciendo distintas restricciones para observar los cambios producidos.

Abstract

This paper analyses the Data Envelopment Analysis (DEA) model for merging DMUs (Decision Making Units) proposed by Lozano and Adenso-Díaz (2020). The objective of this model is to determine the most advantageous mergers among a set of DMUs, as well as to estimate the efficiency improvements that these mergers can produce. The model also determines how much of the efficiency improvement is produced by pure merger effects and how much is produced by learning effect. The division between learning effect and pure merger effect will be used to determine the suitability of the merger. This document also studies all the possible restrictions that can be applied to the model to adapt it to a realistic scenario.

To illustrate the method and to be able to draw conclusions, a case of a merger of dairy farms has been used. Once this case is solved with the original model, the results will be recalculated by introducing different restrictions to observe the changes produced.

Índice

Resumen	ix
Abstract	xi
Índice	xiii
Índice de Tablas	xv
Índice de Figuras	xvii
Notación	xix
1 INTRODUCCIÓN	1
2 INTRODUCCIÓN A DEA	3
2.1 <i>INTRODUCCIÓN A LA METODOLOGÍA</i>	3
2.2 <i>MODELOS DEA</i>	9
2.3.1. <i>MODELOS DEA CRS</i>	9
2.3.2. <i>MODELOS DEA VRS</i>	15
2.3.3. <i>MODELOS DEA NO ORIENTADOS</i>	20
3 MODELOS DE FUSIONES	24
3.1 <i>MODELO ZHU ET AL (2017)</i>	24
3.1.1 Selección de parejas basada en la perspectiva de la eficiencia	24
3.1.2 Selección de parejas basada en la perspectiva de los ingresos	27
3.1.3 Selección de parejas basada en la perspectiva de los costes	28
3.1.4 Selección de parejas basada en la perspectiva integral	29
3.2 <i>MODELO DEA DE FUSIONES DE LOZANO Y ADENSO-DÍAZ (2020)</i>	31
4 ILUSTRACIÓN	34
4.1 <i>CASO PRÁCTICO: FUSIÓN DE GRANJAS PRODUCTORAS DE LECHE</i>	34
4.2 <i>PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</i>	35
4.3 <i>RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y ANÁLISIS DE RESULTADOS</i>	36
4.3.1 Resolución del modelo SBI	37
4.3.2 Conclusiones obtenidas de la resolución del modelo SBI	39
4.3.3 Resolución del modelo de fusiones de Lozano y Adenso-Díaz (2020)	41
4.3.4 Conclusiones obtenidas del modelo de fusiones de Lozano y Adenso-Díaz (2020)	43
4.4 <i>PLANTEAMIENTO DE RESTRICCIONES ADICIONALES AL PROBLEMA</i>	48
4.4.1 Restricciones de incompatibilidad	49
4.4.2 Restricciones de inclusión forzada.	50
4.4.3 Restricciones de pertenencia a un determinado conjunto.	51
4.4.4 Restricciones de límite superior.	52

5 CONCLUSIONES	53
Referencias	54
Anexo	57
<i>Modelos LINGO</i>	57
Modelo SBI	57
Modelo fusión	58
Restricciones	59
<i>HOJA EXCEL ASOCIADA AL MODELO LINGO</i>	60
Modelo SBI	60
Extracción de datos de la hoja Excel	60
Volcado de resultados a la hoja Excel	61
Modelo Fusión	62
Extracción de datos de la hoja Excel	62
Volcado de resultados a la hoja Excel	63

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Datos de las granjas productoras de leche	37
Tabla 2 Resultados modelo SBI	38
Tabla 3 Variación porcentual de las entradas y salidas	39
Tabla 4 Resultados primera iteración del modelo de fusión	41
Tabla 5 Resultados de las iteraciones del modelo de fusión	42
Tabla 6 Valor de SBIRLE de cada fusión	43
Tabla 7 Valores de SBIR SBIRLE y SBIR* de cada fusión	43
Tabla 8 Tamaño de las DMUs que componen el problema tras aplicar el método de fusión	45
Tabla 9 Variación porcentual de las entradas y salidas tras las fusiones	46
Tabla 10 Resultados del modelo de fusión tras aplicar restricción de incompatibilidad	49
Tabla 11 Valores de SBIR SBIRLE y SBIR* tras aplicar restricción de incompatibilidad	49
Tabla 12 Resultados del modelo de fusión tras aplicar restricción de inclusión forzada	50
Tabla 13 Valores de SBIR SBIRLE y SBIR* tras aplicar restricción de inclusión forzada	50
Tabla 14 Resultados del modelo de fusión tras aplicar restricción de pertenencia a conjunto	51
Tabla 15 Valores de SBIR SBIRLE y SBIR* tras aplicar restricción de pertenencia a conjunto	51
Tabla 16 Resultados del modelo de fusión tras aplicar restricción de cota superior	52
Tabla 17 Valores de SBIR SBIRLE y SBIR* tras aplicar restricción de cota superior	52

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Representación gráfica de la tecnología CRS	5
Figura 2 Representación gráfica de la tecnología VRS	6
Figura 3 Tamaño de escala más productivo	8
Figura 4 Modelo CCR – INPUT	12
Figura 5 Modelo CCR – OUTPUT	14
Figura 6 Modelo BCC – INPUT	17
Figura 7 Modelo BCC – OUTPUT	20
Figura 8 Modelo aditivo	21
Figura 9 Modelo SBI	23
Figura 10 Representación DMU GP	36
Figura 11 Variación porcentual de entradas y salidas tras aplicar SBI	40
Figura 12 Tamaño de las DMUs	46
Figura 13 Variación porcentual de entradas y salidas tras aplicar el modelo de fusión	47
Figura 14 Valores de SBIR* y SBIRLE	48

Notación

DEA	Data Envelopment Analysis
DMU	Decision Making Unit
CRS	Retornos de escala constante (Constant Return to Scale)
VRS	Retornos de escala variable (Variable Return to Scale)
MPSS	Tamaño de escala más productivo (Most Productive Scale Size)
CCR	Charnes Cooper y Rhodes
BCC	Banker Charnes y Cooper
SBI	Slacks Based Inefficiency
MILP	Mixed Integer Linear Programming
GL	Granja Lechera
TR	Tamaño del Rebaño
CO	Costes Operativos
PL	Producción de Leche

1 INTRODUCCIÓN

En la actualidad la fusión de entidades productivas es una práctica muy extendida en multitud de sectores económicos. Mediante las fusiones, las entidades implicadas ponen en común conocimientos y recursos aumentando su tamaño, lo que implica en muchas ocasiones mejoras de productividad ligadas a las economías de escala. Estas fusiones pueden realizarse de diferentes maneras, por integración, donde dos entidades distintas forman una nueva, por absorción donde una entidad absorbe el resto o formando una cooperativa, donde existen acuerdos entre las personas que la integran para tomar decisiones y poner en común los recursos. El objetivo del documento es estudiar un modelo DEA (Data Envelopment Analysis) que determine qué fusión de DMUs (Decision Making Unit) proporcionará mayor eficiencia a una unidad productiva.

La metodología DEA estudia las mejoras que se le pueden aplicar a las unidades de producción para alcanzar la eficiencia. En la actualidad esta metodología se usa para valorar las fusiones de entidades desde la perspectiva de la eficiencia. La valoración que la metodología DEA puede realizar de las fusiones de empresas se divide entre la evaluación de las ganancias de eficiencia que una fusión determinada y conocida de ante mano puede aportar y determinar qué fusiones de entre un conjunto de DMUs son la que más beneficios aportan desde el punto de vista de la eficiencia.

Para valorar los efectos que una fusión determinada puede tener desde el punto de vista de la eficiencia se recurre a descomponer dicha mejora en efecto de aprendizaje, un efecto armonizador y un efecto de tamaño (Bogetoft y Wang (2005) [1]). Otra manera de determinar los efectos que una fusión determinada puede tener es mediante la preevaluación de todas las posibles combinaciones (Wu et al. (2011) [2] y Li et al. (2019) [3]). Lozano y Villa (2010) [4] proponen una herramienta para planear la fusión antes de que ésta se lleve a cabo y descomponen la ganancia de eficiencia de coste general en ganancia de eficiencia técnica, ganancia de eficiencia de asignación y ganancia de eficiencia de coste de fusión pura. Todos estos modelos valoran fusiones determinadas de antemano.

La otra rama del estudio de las fusiones de entidades mediante DEA se centra en encontrar de entre un conjunto de DMUs cuáles son las mejores unificaciones y establecer los cambios en las entradas y salidas que hay que realizar una vez las DMUs se han fusionado para alcanzar la eficiencia. Lozano (2013) [5] presenta para encontrar la mejor pareja de entre un conjunto de DMUs la metodología MILP (Mixed Integer Linear Programming). Zhu et al. (2017) [6] propone un modelo en que se pueden fusionar más de dos unidades; sin embargo, existe un número máximo de integrantes. Esta metodología estudia la eficiencia desde diferentes puntos de vista como el de los ingresos o los costes.

El documento se centra en el estudio de la metodología DEA propuesta por Lozano y Adenso-Díaz (2020) [7] para la fusión de entidades productivas. Este método pertenece a la tipología de selección de mejores integrantes para la fusión, pero la diferencia que presenta con los anteriores es que el número de unidades que debe formar parte de la fusión no está impuesto, sino que se deja que el modelo determine cuál es el número idóneo de entidades que deben combinarse. Este modelo también descompone los efectos de mejora producidos por la fusión entre efecto de aprendizaje y efecto de fusión puro, esto se realiza para determinar a qué son debidos las mejoras que se han producido y para valorar si es conveniente realizar la fusión. A este modelo DEA se le pueden incluir numerosas restricciones para adoptar el problema a las condiciones de aplicación.

Un sector en el que la fusión de entidades se realiza de forma recurrente y en el que esta práctica ha reportado grandes beneficios es el sector agrario. En este sector las fusiones suelen hacerse por medio de cooperativas. La metodología DEA tiene múltiples aplicaciones para el estudio de dicho sector, este documento se centrará en el estudio de fusión de granjas productoras de leche para ilustrar el modelo de fusión de Lozano y Adenso-Díaz (2020). Dicho problema se resolverá de una manera ideal y posteriormente se incorporarán una serie de restricciones con el fin de adaptar el problema lo máximo posible a las condiciones que se pueden dar en un escenario más realista.

El documento se estructura de la siguiente manera. En el capítulo 2 se hace una introducción de la metodología DEA y sus modelos más representativos. En el capítulo 3 se exponen el modelo de fusión de Zhu et al. (2013) y el modelo de Lozano y Adenso-Díaz (2020), que es el modelo principal en el que se centra el documento y sobre el que se desarrolla la ilustración. En el capítulo 4 se ilustra el modelo de fusión de Lozano y Adenso-Díaz con el ejemplo de las granjas productoras de leche. En el capítulo 5 se exponen las conclusiones.

2 INTRODUCCIÓN A DEA

2.1 INTRODUCCIÓN A LA METODOLOGÍA

La metodología **DEA** (Data Envelopment Analysis) es una herramienta cuantitativa que mide la eficiencia de diversas **DMU** (Decision Making Unit), dicha metodología fue propuesta por Charnes, Cooper y Rhodes en el año 1978 en su libro “Measuring Efficiency of Decision Making Units”. Este método es ampliamente utilizado en campos muy diversos debido a la gran adaptabilidad que presenta.

Una unidad productiva es aquella entidad que, mediante una serie de entradas, genera una serie de salidas, por lo que una DMU es toda aquella unidad productiva capaz de realizar modificaciones tanto en sus recursos como en su producción de manera que se produzca una mejora de eficiencia. Es decir, la DMU con los datos generados mediante la metodología DEA es capaz de reducir los recursos de entrada o de aumentar el nivel de producción de tal manera que aumente su nivel de eficiencia. Lo que hace interesante una DMU es su capacidad de decisión, ya que en caso de no tenerla no sería útil evaluar su eficiencia.

Para poder utilizar esta metodología todas las entradas y salidas han de ser cuantitativas, es decir que en caso de disponer valores cualitativos han de ser transformados en números para poder ser introducidos en el método, de lo contrario no podrán ser valorados.

Las modificaciones que adoptará la DMU por tanto pueden afectar a sus recursos consumidos, es decir, sus entradas o a su nivel de producción, es decir, sus salidas. Cuando dichas modificaciones afectan a los recursos se dice que el problema tiene **orientación de entrada**, por el contrario, si se modifican los niveles de producción la **orientación** será **de salida**. También es posible que se dé el caso en el que se pretende modificar tanto las entradas como las salidas, en este caso se recurrirá a modelos **no orientados**. Definir cuál es la orientación del problema es fundamental para la ejecución de la metodología. La decisión de la orientación de la DMU se realizará dependiendo de cuál sea el objetivo de la unidad productiva, por lo que en muchas ocasiones aún tratándose de la misma DMU, dependiendo del contexto en el que se aplique la metodología puede tener una orientación u otra.

El objetivo de la metodología DEA es determinar de entre una muestra de diversas unidades productivas que operan de manera similar, cuales son eficientes y en caso de no serlo con qué unidad eficiente deben compararse y cuántos grados de ineficiencia posee. Para ello es fundamental disponer de un elevado número de DMUs de tal manera que haya suficientes unidades para comparar entre ellas.

Farrel había establecido los conceptos sobre los que se basa la metodología DEA en su libro del año 1957 “The measurement of productive efficiency”. En este libro señala a la **productividad** como medida del nivel de aprovechamiento de los recursos. Según Farrel la expresión matemática que defina la productividad es la siguiente:

$$Productividad = \frac{Nivel\ de\ producción}{Recursos\ consumidos} = \frac{Salida}{Entrada}$$

La expresión anterior ilustra el caso más simple que se podría dar, el de una DMU que, mediante una única entrada, produzca una única salida. Este caso no suele producirse en la realidad, pero sirve como ilustración debido a su simpleza.

En la práctica se trabaja con DMUs con múltiples entradas y salidas, las cuales han de ser iguales en todas las DMUs. Cada una de las entradas se define como x_{ij} siendo i la entrada a la que corresponde y j la DMU a la que hace referencia; así mismo las salidas y_{kj} siendo k la salida a la que hace referencia y j la DMU que le

corresponde.

Dichas entradas y salidas son términos de distinta naturaleza independientes unos de otros en algunos casos y que pueden tener unidades de medida diferentes, es por ello por lo que la expresión de cálculo de la productividad expuesta anteriormente no es válida para el caso de múltiples entradas y salidas. En este caso para poder calcular la productividad, se recurre a las entradas y salidas virtuales.

Las entradas y salidas virtuales se calculan mediante la suma ponderada de las entradas y salidas que componen la DMU.

$$\text{Entradas virtuales} = \sum_{i=1}^m u_i x_{ij}$$

$$\text{Salidas virtuales} = \sum_{k=1}^p v_k y_{kj}$$

Los términos u_i y v_k representan los pesos de las entradas y salidas respectivamente, dichos pesos son utilizados para la ponderación. Los sumatorios incluyen todas las salidas y todas las entradas que componen la DMU, siendo m el número total de entradas y p el número total de salidas de cada unidad productiva.

Una vez definido como se calculan las entradas y salidas virtuales la expresión que determina la productividad queda de la siguiente forma:

$$\text{Productividad} = \frac{\text{Salidas virtuales}}{\text{Entradas virtuales}} = \frac{\sum_{k=1}^p v_k y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_i x_{ij}}$$

Con las entradas y salidas virtuales se busca una homogeneización de los datos para obtener una productividad adimensional.

Basándose en la productividad es posible definir la **tecnología**, que es el conjunto de posibilidades de producción que se tiene en el problema, es decir, define las distintas cantidades de recursos que puedo emplear en mi problema para producir distintas cantidades de productos.

Al ser DEA un método no paramétrico, se basa en la propia muestra aportada. Mediante esa muestra y diferentes hipótesis es posible definir la tecnología o conjunto de posibilidades de producción. Los axiomas para la definición de la tecnología son los siguientes:

1. **Envoltura**: Puede existir todo lo que se haya observado, es decir, las distintas DMU que he introducido en el modelo. Esto se llama **conjunto de posibilidades de producción (T)**.
2. **Free disposability**: Al poder existir todas las DMUs observadas, también será posible que existan todas las que funcionen peor que éstas.
3. **Convexidad**: Si existen las DMUs observadas, la combinación lineal de dichas DMUs también existirá.

$$(x_1, y_1) \in T$$

$$\rightarrow \alpha (x_1, y_1) + (1 - \alpha) (x_2, y_2) \in T$$

$$(x_2, y_2) \in T$$

4. **Escalabilidad:** Puede existir la DMU observada y cualquier combinación lineal que surja de dicho punto mediante cualquier escalar mayor o igual que cero.

$$(x, y) \in T \quad \rightarrow \quad (\alpha x, \alpha y) \in T \quad \forall \alpha \geq 0$$

Con estos axiomas queda definida la **frontera tecnológica** y la tecnología que no es más que todos los puntos que se encuentren bajo la frontera tecnológica, los puntos que se encuentren por encima de la frontera tecnológica no se considerarán posibles ya que se supondrá que no se puede trabajar mejor que las DMUs observadas. Dependiendo de los axiomas que se tomen y de la tipología de las DMUs y su contexto se pueden producir diferentes tipos de fronteras tecnológicas **CRS** y **VRS**. La elección de aplicar una u otra viene determinada por los retornos de escala de cada uno de los posibles problemas. A continuación, se procede a definir cada uno de los retornos de escala:

- **Retornos de escala constantes (CRS):** se produce en el caso en que cualquier DMU mediante modificaciones de sus entradas y salidas pueda llegar a operar con la misma productividad que la DMU más productiva del problema.

Para definir la tecnología cuando se producen este tipo de retornos de escala se recurre a las Hipótesis de envoltura, free disposability, convexidad y escalabilidad. Dando lugar a la frontera tecnológica ilustrada en la siguiente imagen.

El conjunto generado es el siguiente:

$$T_{CRS} = \{(\vec{x}, \vec{y}) : \exists \vec{\lambda} \geq 0; X\vec{\lambda} \leq \vec{x}; Y\vec{\lambda} \geq \vec{y}\}$$

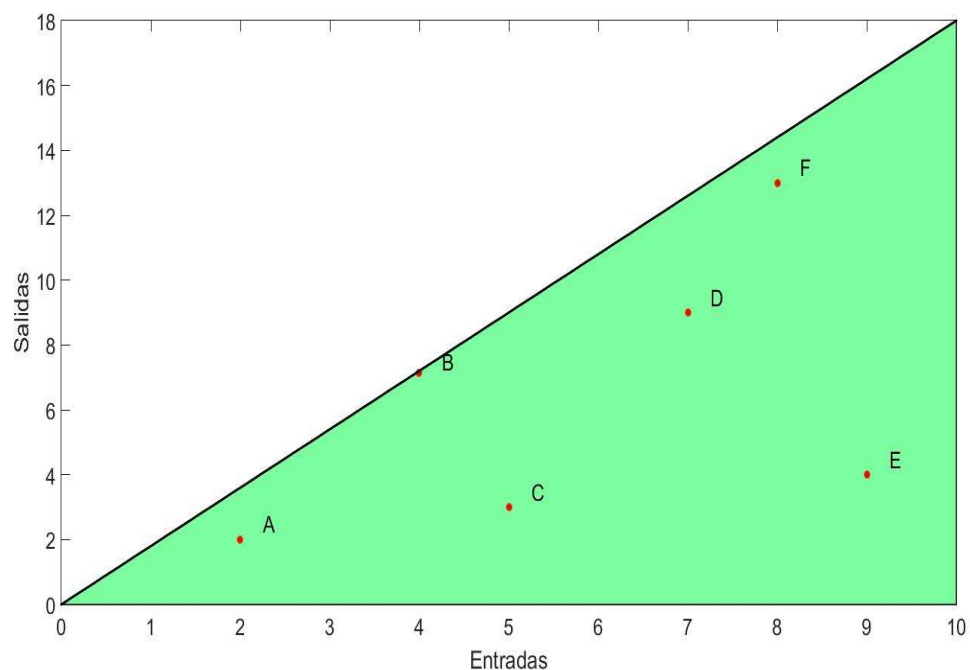


Figura 1 Representación gráfica de la tecnología CRS

Como se puede observar, la ilustración corresponde a una tecnología CRS cuyas DMUs están

compuestas por una única entrada y salida. La frontera tecnológica se determina mediante el punto B que es el que opera con mayor eficiencia, la frontera tecnológica es por tanto la recta que partiendo del origen de coordenadas pasa por el punto más eficiente, en este caso B. La tecnología es la región del espacio bajo la frontera tecnológica, es decir, la región coloreada de verde, en ella se encuentran el resto de los puntos que no operan de manera eficiente.

- **Retornos de escala variable (VRS):** Se produce en los casos en los que no todas las DMUs pueden compararse entre ellas y por lo tanto las ineficientes no pueden realizar modificaciones para llegar a los valores de las eficientes, por ejemplo, las unidades de menor tamaño no se pueden comparar con las de mayor. Por lo tanto, las comparaciones entre DMUs se harán correspondiendo con las dimensiones de cada unidad. Esta imposibilidad de comparar unidades de distintos tamaños entre sí se produce en la mayoría de los casos por las economías de escala. Estas economías de escala hacen que no tengan el mismo impacto reducir recursos o aumentar producción en empresas con tamaños diferentes.

Para definir la tecnología cuando se producen este tipo de retornos de escala se recurre a las hipótesis de envoltura, free disposability y convexidad. Dando lugar a la frontera tecnológica ilustrada en la siguiente imagen.

El conjunto generado es el siguiente:

$$T_{VRS} = \{ (\vec{x}, \vec{y}) : \exists \vec{\lambda} \geq 0; X\vec{\lambda} \leq \vec{x}; Y\vec{\lambda} \geq \vec{y}; \sum_j \lambda_j = 1 \}$$

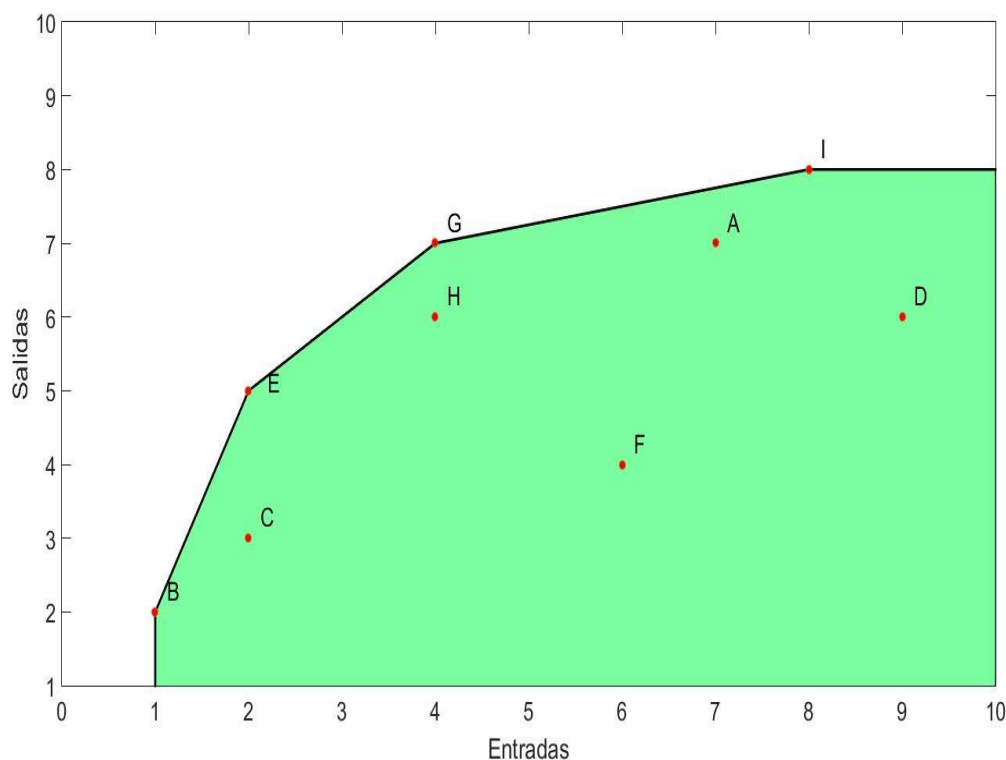


Figura 2 Representación gráfica de la tecnología VRS

Las DMUs representadas en la imagen constan de una entrada y una salida, esto es así debido a la mayor

simplicidad a la hora de la representación. Se puede ver como las DMUs que sirven para trazar la frontera tecnológica son las eficientes de cada tamaño, en este caso B, E, G, I, la frontera tecnológica une estos puntos. Para terminar de delimitar la tecnología, se traza una línea paralela al eje y que corta perpendicularmente con el x desde la DMU eficiente con menor nivel de entradas y salidas, haciéndose así posible la existencia de puntos perores que en este caso B, de la misma manera partiendo de la DMU eficiente con mayor número de entradas y salidas se traza una recta paralela al eje x, que termina de delimitar la tecnología y hace posible la existencia de los puntos que operan peor que I. La tecnología corresponde a la región de color verde y todos las DMUs contenidas en ella pueden existir.

En la frontera es donde se encuentran los puntos eficientes, siendo los interiores los ineficientes, por lo tanto, todos los puntos de la tecnología que no se encuentren en la frontera tecnológica serán ineficientes. Es por ello por lo que la metodología DEA buscar proyectar los puntos ineficientes del interior en los puntos de la frontera tecnológica para alcanzar la eficiencia.

Alcanzar la eficiencia es el objetivo de la metodología DEA, es por ello por lo que se han establecido numerosas formas de medir la eficiencia relativa dependiendo de los retornos de escala del problema que estamos analizando.

A través de la productividad es posible determinar la **eficiencia** de las distintas DMUs. Esta eficiencia llamada **eficiencia relativa** surgirá de comparar las distintas DMUs entre ellas tomando una de referencia. La **eficiencia global** compara siempre una DMU con una productividad determinada, con la unidad de mayor productividad del problema y se calcula como:

$$Eficiencia\ global_j = \frac{Productividad_j}{\max_{j'} Productividad_{j'}}$$

La eficiencia global siempre será menor o igual que uno, en caso de que el resultado de la eficiencia global para la unidad productiva evaluada sea de 1, quiere decir que esa unidad es eficiente, en caso de que el resultado sea menor que uno significará que es ineficiente. Esta ineficiencia hay que matizarla ya que en la eficiencia global se compara con la mejor DMU de entre las seleccionadas y esto no siempre es posible ya que en algunos casos no todas las DMUs pueden compararse entre sí, como ocurre en la tecnología VRS, en estos casos se recurre a la eficiencia técnica. Cabe destacar por tanto que siempre que nos encontremos en casos CRS se aplicará únicamente la eficiencia global.

La **eficiencia técnica** utiliza para su cálculo la proyección del punto que se está estudiando sobre la frontera tecnológica VRS, esta proyección puede realizarse con orientación de entrada o de salida dependiendo del problema en el que nos encontremos. Al proyectarse sobre la frontera VRS para el cálculo de la eficiencia relativa se toma como punto de referencia el de mayor productividad dentro de los puntos que poseen un orden de magnitud similar. Con esto se reduce la región de admisibilidad, ya que en este caso es injusto comparar unidades de tamaños dispares. La fórmula que defina la eficiencia técnica es la siguiente:

$$Eficiencia\ técnica_j = \frac{Productividad_j}{Productividad|_{\substack{máx\ en \\ su\ tamaño}}}$$

La eficiencia global de una DMU va a ser siempre menor o igual que la técnica, independientemente de su orientación. De la comparación entre la eficiencia global y la técnica surge la **eficiencia de escala**.

La eficiencia de escala es el cociente entre la eficiencia global, que es la distancia del punto a la tecnología CRS y la eficiencia técnica que es la distancia del punto a la frontera de la tecnología VRS. El cociente será siempre menor o igual a la unidad.

Si la eficiencia de escala es menor que 1, habría que aumentar o disminuir el tamaño de la DMU para llegar a la máxima productividad del problema. Por otro lado, si la eficiencia es igual a 1, no tengo que cambiar el tamaño

de la DMU para alcanzar la máxima productividad del problema, únicamente será necesario variar el volumen de recursos o de producción, nos encontramos por lo tanto en el **tamaño de escala más productivo**.

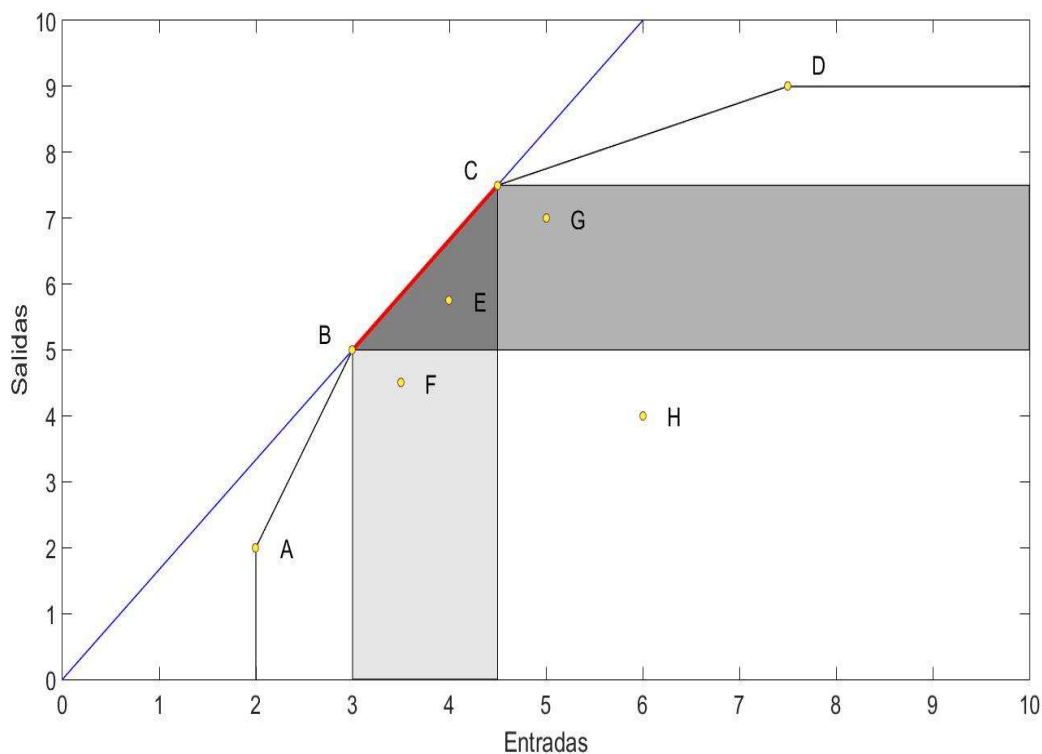


Figura 3 Tamaño de escala más productivo

La imagen ilustra las diferentes situaciones que se pueden encontrar cuando se estudian tanto la eficiencia técnica como los retornos de escala. La imagen representa DMUs con una entrada y una salida y retornos de escala variable. La frontera tecnológica queda delimitada por los puntos A, B, C, D siendo la recta que va de B a C donde se encuentran los tamaños de escala más productivos, ya que corresponde a la recta de mayor pendiente que pasa por una de las DMUs del problema, esta recta es la de color azul. La recta de color rojo corresponde con el tamaño de escala más productivo.

Dentro de la tecnología se distinguen tres zonas. La zona gris más clara corresponde a las DMUs cuya eficiencia de escala de salida es igual a uno y la de entrada es menor que uno, estas DMUs si su orientación es de salida pueden alcanzar la mayor eficiencia posible cambiando el volumen de sus salidas, sin embargo, si su orientación fuera de entrada tendrían que cambiar su tamaño para poder aspirar a la máxima eficiencia, en esta zona se encuentra el punto F. La zona gris corresponde a las DMUs cuya eficiencia de escala con orientación de salida es menor que uno y la de entrada es uno, a diferencia de la anterior si el problema es de orientación de entrada pueden alcanzar la máxima eficiencia variando el nivel de entradas por otro lado si la orientación es de salida para alcanzar la máxima eficiencia del problema deberán cambiar su tamaño, en esta zona se encuentra el punto G. La zona gris oscuro representa la zona donde la eficiencia de escala tanto con orientación de entrada como de salida valen uno, es decir, variando el nivel de sus entradas o de sus salidas puede proyectarse en la recta del tamaño de escala más productivo, en esta zona se encuentra el punto E.

Una vez definidos los conceptos y principios que caracterizan a la metodología DEA, se procede a desarrollar cada uno de los principales modelos.

2.2 MODELOS DEA

Tras haber introducido los conceptos en los que se basa la metodología DEA, se procede a desarrollar los diferentes modelos que surgen de ellos y que tienen como objetivo alcanzar la eficiencia en cada una de las DMUs que componen el problema.

2.3.1. MODELOS DEA CRS

El primer modelo que se va a desarrollar es el **modelo Ratio**, ya que sirve de base para el desarrollo de los otros modelos que se verán a continuación.

Este modelo compara la eficiencia de la unidad a analizar con la de la unidad de referencia, que es la DMU más eficiente, por lo que se obtiene en cada caso la mejor eficiencia posible del problema. El modelo matemático es el siguiente:

$$\max \theta_j = \frac{\sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}}$$

s.a:

$$\frac{\sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}} \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$v_{kj} \geq \varepsilon \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$u_{ij} \geq \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Como se puede observar este modelo consiste en maximizar un cociente o ratio, esto implica no linealidad, por lo que su resolución suele ser compleja.

Las restricciones imponen que la eficiencia de cada una de las DMU sea menor o igual que 1 y que los pesos sean no nulos, siendo ε un número real estrictamente positivo. El problema tendrá $m+p$ restricciones lineales correspondientes a cada una de las restricciones de los pesos, siendo p el número de salidas y m el número de entradas, también se dispondrá de n restricciones no lineales, siendo n el número de DMUs a analizar.

En este modelo como se comparan las DMUs únicamente con la más eficiente buscando replicar su comportamiento, provoca en muchos casos una variación de entradas y salidas inasumible en la realidad, esto sumado a la no linealidad hacen que este método sea poco recomendable y que se hayan desarrollado otros métodos que solventan el problema de la linealidad y usan orientaciones y axiomas, dando lugar a los métodos radiales.

2.3.1.1. MODELO CCR – INPUT

Este modelo, desarrollado por Charnes, Cooper y Rhodes [8] busca solventar los problemas de linealidad del modelo ratio, mediante la sustitución de los cocientes por expresiones lineales.

Es un modelo radial, es decir, la dirección de mejora se tomará trazando radios desde el punto de estudio hasta la frontera tecnológica. Mediante este modelo se resuelven los problemas de tecnología CRS con orientación de entrada, es decir, problemas en los que para alcanzar el óptimo se disminuye el tamaño de los recursos de entrada.

El modelo expresado matemáticamente es el siguiente:

$$\min \quad \theta_j - \varepsilon \left[\sum_{k=1}^p h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right]$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \theta_j x_{ij} - h_i^- \quad \forall i = 1 \dots m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{kj} + h_k^+ \quad \forall k = 1 \dots p$$

$$\lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0$$

$$\theta_j \text{ libre}$$

Las variables que intervienen en el modelo son $\theta_j, \lambda_j, h_i^-, h_k^+$, estas variables buscan modificar los valores de las entradas y salidas del problema para lograr alcanzar la eficiencia.

La variable θ_j es un multiplicador, es decir, es la variable que determina por cuanto tengo que multiplicar las entradas para reducirlas, de manera que se traslade el punto en el que nos encontramos a la frontera tecnológica, para lograr así transformarse en eficiente. Es una variable libre que toma valores entre 0 y 1. θ_j puede ser utilizada como una medida de la eficiencia.

Las variables h_k^+, h_i^- son las holguras, estas variables son complementarias a la variable θ_j en la búsqueda del óptimo. La variable h_i^- determina cuanto se han de reducir las entradas para alcanzar la eficiencia y h_k^+ determina cuanto tienen que ampliarse las salidas. Ambas variables deben ser siempre mayores o iguales que 0 y se ambas están presentes independientemente de la orientación del problema. La variable λ_j es utilizada para generar la frontera tecnológica. Siendo su valor mayor o igual que 0.

La ε es una constante arquimediana, es decir, un número muy pequeño distinto de cero cuya función es la de hacer de peso para la aplicación de las holguras en la función objetivo, buscando reducir el efecto de estas y primando a la variable θ_j . El número total de DMUs que intervienen en el problema es n, m es el número total de entradas y p el de salidas de cada DMU. El subíndice J hace referencia a la DMU que se encuentra en estudio en ese momento. El subíndice i hace referencia a la entrada a la que se refiere la variable, el subíndice k a la salida y el subíndice j a la DMU.

El modelo anterior puede escribirse en dos fases, esto es así ya que al estar las variables de holgura multiplicadas por la constante Arquimediana apenas influyen en la minimización de θ_j , por lo que la primera fase quedaría.

1º FASE

$$\min \quad \theta_j$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_j x_{ij} \quad \forall i = 1 \dots m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} \geq y_{kj} \quad \forall k = 1 \dots p$$

$$\lambda_j \geq 0$$

$$\theta_j \text{ libre}$$

En esta fase se busca acercar al punto lo máximo posible a la frontera tecnológica, reduciendo proporcionalmente todas las entradas. Esta fase es llamada fase radial debido a que ésta es la dirección de mejora que toma. Una vez se ha aplicado la primera fase se obtiene θ_j^* , es decir, el valor óptimo. Si en la primera fase se obtiene un θ_j^* con valor igual a 1 quiere decir que ese punto ya se encuentra en la frontera tecnológica.

Una vez aplicada la primera fase y habiéndose obtenido θ_j^* se inicia la segunda. En esta segunda fase lo primero a destacar es que $\min -\varepsilon \left[\sum_{k=1}^p h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right]$ es igual a $\max \left[\sum_{k=1}^p h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right]$ por lo que el modelo de la segunda fase sería el siguiente:

2º FASE

$$\max \left[\sum_{k=1}^p h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right]$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \theta_j^* x_{ij} - h_i^- \quad \forall i = 1 \dots m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{kj} + h_k^+ \quad \forall k = 1 \dots p$$

$$\lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0$$

En la segunda fase, partiendo de θ_j^* se determina el valor de las holguras que llevan el punto a la frontera eficiente, la utilización de las holguras es necesaria ya que en la mayoría de los casos no solo basta con modificar

las entradas de manera proporcional para alcanzar el óptimo, sino que han de reducirse algunas entradas en mayor medida que otras, así como algunas salidas.

Gráficamente el modelo sería el siguiente.

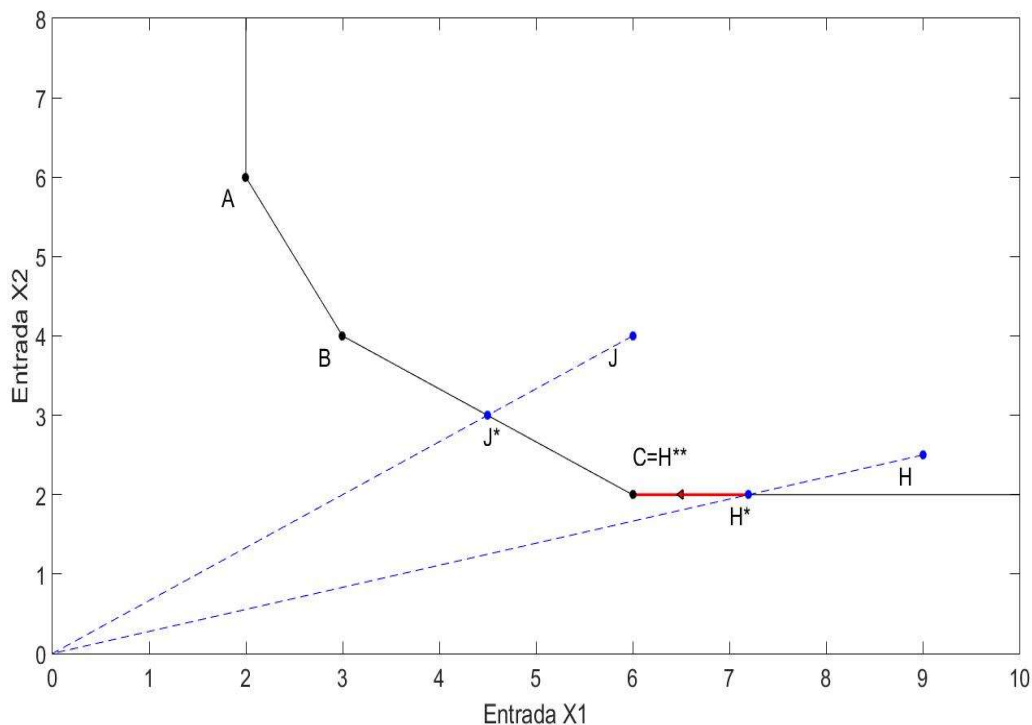


Figura 4 Modelo CCR – INPUT

Para poder ilustrar la segunda fase se ha tomado un modelo con dos entradas y una salida, lo que da lugar a una superficie tridimensional, a esta superficie tridimensional se le ha hecho un corte a un nivel de salida Y constante de tal manera que en los ejes quedan representadas las entradas X1 y X2 para ese valor de la salida.

En la imagen se puede observar cómo actúa la primera fase radial tanto en J como en H haciendo que se reduzcan las entradas hasta proyectarse en la frontera tecnológica donde se encuentran los puntos eficientes dando lugar a los puntos J* y H*, la disminución de las entradas viene determinada por θ_j^* que tendrá un valor menor o igual a uno. Aunque H está proyectado en la frontera tecnológica de manera radial existe otro punto que presenta mayor eficiencia y para trasladar H a él se utiliza la segunda fase, la fase rectangular, que traslada H* al punto H** modificando solamente una de las entradas.

2.3.1.2. MODELO CCR – OUTPUT

Este modelo es análogo al de entrada, pero para el caso de tecnología CRS con orientación de salida, por lo que las modificaciones radiales se realizarán aumentando el nivel de producción. El modelo matemático es el siguiente:

$$\max \quad \gamma_J + \varepsilon \left[\sum_{k=1}^P h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right]$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{iJ} - h_i^- \quad \forall i = 1 \dots m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = \gamma_J y_{kJ} + h_k^+ \quad \forall k = 1 \dots p$$

$$\lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0$$

γ_J libre

La variable γ_J es similar a la variable θ_J del modelo CCR-OUTPUT sin embargo sus valores serán mayor o igual que uno ya que en este caso se aumentan las salidas, a diferencia del caso anterior en el que se reducen las entradas. Esta variable no puede ser tomada como una medida de la eficiencia como tal, para medir la eficiencia ha de tomarse $1/\gamma_J$.

Este modelo también se resuelve en dos fases.

1º FASE

$$\max \quad \gamma_J$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{iJ} \quad \forall i = 1 \dots m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} \geq \gamma_J y_{kJ} \quad \forall k = 1 \dots p$$

$$\lambda_j \geq 0$$

γ_J libre

De esta fase se obtiene γ_J^* , que sirve de partida para la segunda fase.

2º FASE

$$\max \left[\sum_{k=1}^p h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right]$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{ij} - h_i^- \quad \forall i = 1 \dots m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{kj} + h_k^+ \quad \forall k = 1 \dots p$$

$$\lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0$$

Gráficamente el modelo sería el siguiente.

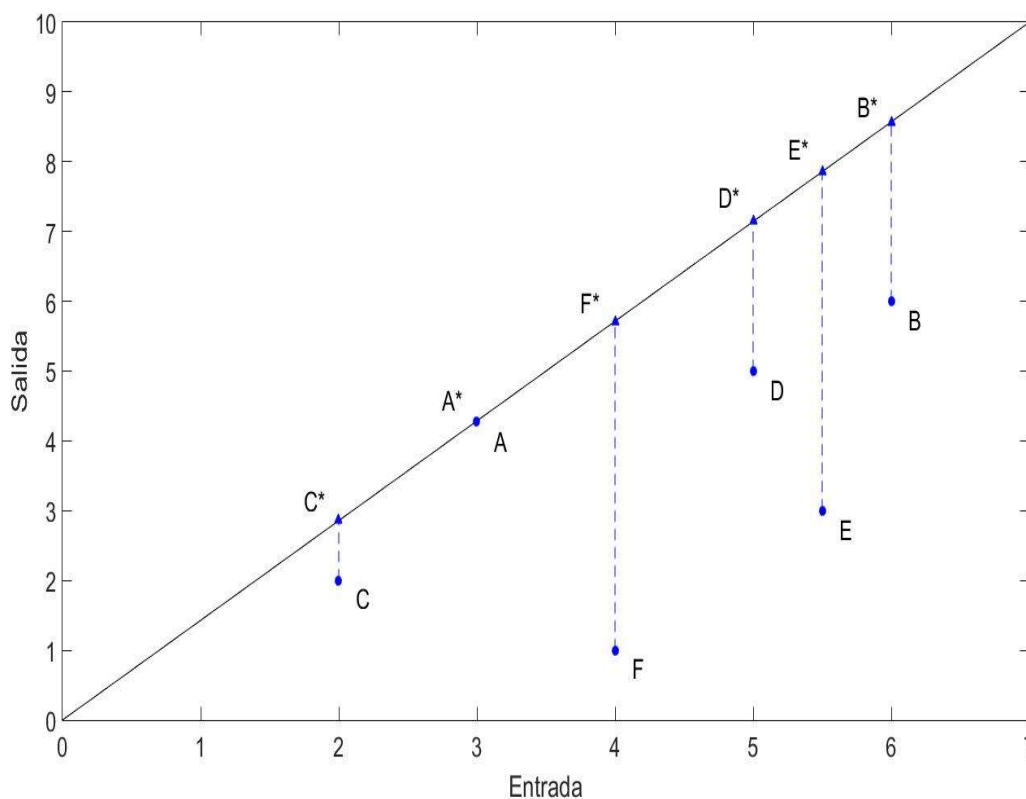


Figura 5 Modelo CCR – OUTPUT

En este caso para la ilustración se ha empleado una entrada y una salida, por lo que solo se aplicaría la primera fase, la fase radial ya que en el caso bidimensional no tiene sentido aplicar la segunda. Como se puede ver el punto A al ser el más eficiente del problema es el que marca la frontera tecnológica y se proyecta sobre sí mismo

por lo que su $\gamma_A^* = 1$, el resto de los puntos se proyecta sobre la frontera tecnológica aumentando sus salidas de forma radial, multiplicando su valor de salida por un $\gamma_j^* > 1$.

2.3.2. MODELOS DEA VRS

Una vez definidos los modelos DEA con retornos de escala constantes, se procede a definir los modelos básicos basados en retornos de escala variables.

La tecnología generada por DMUs con retornos de escala variable queda definida por el siguiente conjunto: $T_{VRS} = \{ (\vec{x}, \vec{y}) : \exists \vec{\lambda} \geq 0; X\vec{\lambda} \leq \vec{x}; Y\vec{\lambda} \geq \vec{y}; \sum_j \lambda_j = 1 \}$. La principal característica que diferencia este conjunto con el de retorno de escala constante es que $\sum_j \lambda_j = 1$, por lo tanto, añadir esta condición es la única variación de los modelos de retorno de escala constante con los variables.

2.3.2.1. MODELO BCC – INPUT

Modelo desarrollado por Banker, Charnes y Cooper [9]. Es un modelo radial, es decir, busca la dirección de mejora mediante radios trazados desde el punto a la frontera eficiente. Mediante este modelo se resuelven problemas con tecnología VRS con orientación de entrada.

La expresión que define al modelo es la siguiente:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_j - \varepsilon \left[\sum_{k=1}^p h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right] \\ \text{s.a:} \quad & \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \theta_j x_{ij} - h_i^- \quad \forall i = 1 \dots m \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{kj} + h_k^+ \quad \forall k = 1 \dots p \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0 \\ & \theta_j \text{ libre} \end{aligned}$$

Como se puede observar las variables y restricciones son las mismas que en el modelo CCR – INPUT con la

salvedad de que se añade una restricción adicional.

Esta restricción adicional añadida al modelo BCC es $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, que obliga a que la proyección de la DMU que se encuentra analizándose se realice sobre el plano conformado por las DMUs eficientes de su tamaño. En este caso la frontera eficiente contendrá mas DMUs que en el caso BCC debido a los retornos de escala variables.

Las variables y constantes utilizadas son las mismas a las utilizadas en el modelo CCR. La variable θ_j puede ser utilizada para medir la eficiencia de las distintas DMUs, cabe destacar que se contará con un mayor número de unidades eficientes en este caso ya que a diferencia del CCR en el que se aplican retornos de escala constantes, en el BCC se aplican retornos de escala variables lo que facilita la inclusión del punto en la frontera eficiente.

Al igual que los modelos anteriores el BCC – INPUT puede escribirse en dos fases:

1º FASE

$$\min \quad \theta_j$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_j x_{ij} \quad \forall i = 1 \dots m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} \geq y_{kj} \quad \forall k = 1 \dots p$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0$$

$$\theta_j \text{ libre}$$

La función de esta primera fase es la de proyectar el punto en la frontera eficiente de manera radial, al igual que en CCR.

Una vez aplicada la primera fase y habiéndose obtenido θ_j^* se inicia la segunda. Como ocurría en el caso CCR – OUT, $\min -\varepsilon \left[\sum_{k=1}^P h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right]$ es igual a $\max \left[\sum_{k=1}^P h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right]$

Matemáticamente la segunda fase queda definida por:

2º FASE

$$\max \left[\sum_{k=1}^p h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right]$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \theta_j^* x_{ij} - h_i^- \quad \forall i = 1 \dots m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{kj} + h_k^+ \quad \forall k = 1 \dots p$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0$$

En la segunda fase, partiendo de θ_j^* se determina el valor de las holguras que llevan el punto a la frontera eficiente.

Gráficamente, el funcionamiento del modelo es el siguiente:

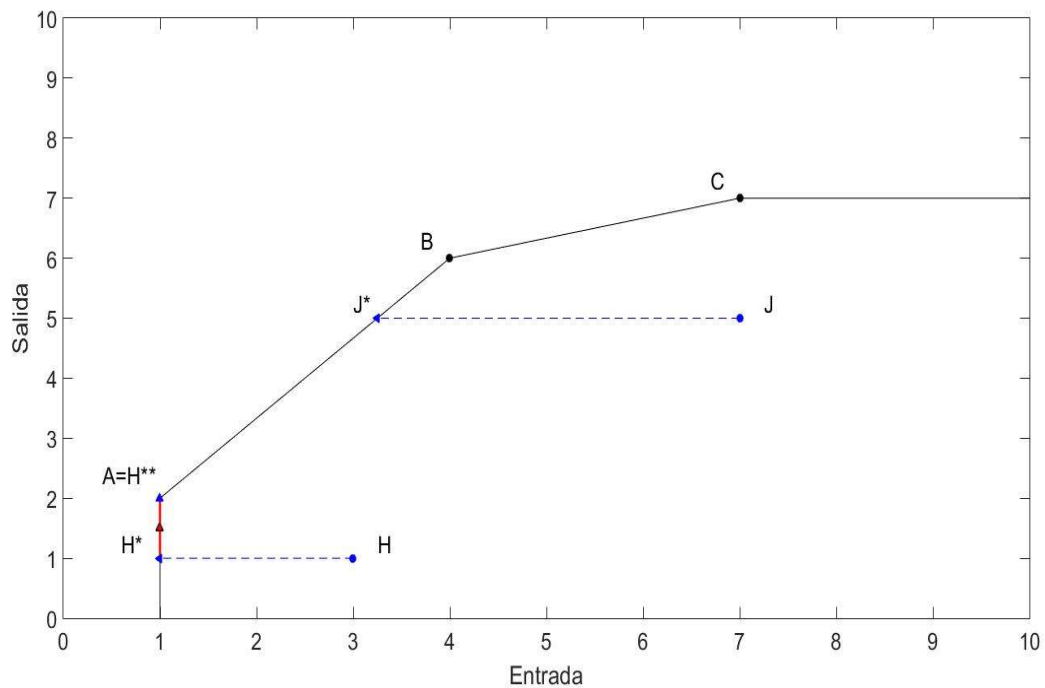


Figura 6 Modelo BCC – INPUT

La imagen representa un problema en que las DMUs que lo componen cuentan con una única entrada y salida.

Se puede observar cómo aplicando la primera fase del modelo se reduce la entrada de tal forma que se trasladan los puntos J y H a la frontera tecnológica, estos nuevos puntos son J* y H*. El valor de la reducción de las entradas necesarios vendrá proporcionado por θ_J^* y θ_H^* . La segunda fase es aplicada en el caso de H* ya que mediante un desplazamiento rectangular es posible alcanzar un punto con mayor eficiencia, este nuevo punto será H** que coincida con el valor de la DMU que tiene menor volumen de entradas y salidas y opera de manera eficiente, es decir, el punto A. El valor del desplazamiento vendrá determinado por h_H^+ ya que se alcanza aumentando las salidas.

2.3.2.2. MODELO BCC – OUTPUT

Este modelo es análogo al BCC – INPUT, pero en este caso la orientación es de salida por lo que las modificaciones realizadas para alcanzar la frontera tecnológica y por tanto la eficiencia se harán mediante un aumento del nivel de producción. Este modelo se basa al igual que el anterior en retornos de escala variables, es decir tecnología VRS.

Matemáticamente el modelo que resulta es el siguiente:

$$\max \quad \gamma_J + \varepsilon \left[\sum_{k=1}^P h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right]$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{iJ} - h_i^- \quad \forall i = 1 \dots m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = \gamma_J y_{kJ} + h_k^+ \quad \forall k = 1 \dots p$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0$$

$$\gamma_J \text{ libre}$$

La variable γ_J es un multiplicador utilizado para saber cuánto tengo que aumentar proporcionalmente las salidas para desplazar al punto a la frontera eficiente. La variable γ_J no es por sí misma una medida de la eficiencia de la DMU a la que se refiere, para ser medida de la eficiencia tiene que ser expresada como $1/\gamma_J$.

Como en los anteriores modelos puede ser escrito en dos fases:

1° FASE

$$\max \quad \gamma_J$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{iJ} \quad \forall i = 1 \dots m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} \geq \gamma_J y_{kJ} \quad \forall k = 1 \dots p$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0$$

$$\gamma_J \text{ libre}$$

Corresponde a la fase radial. De esta primera fase se obtiene γ_J^* que es el óptimo de la variable γ_J y se utiliza como punto de partida para la resolución de la segunda fase.

2° FASE

$$\max \quad \left[\sum_{k=1}^p h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right]$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{iJ} - h_i^- \quad \forall i = 1 \dots m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = \gamma_J^* y_{kJ} + h_k^+ \quad \forall k = 1 \dots p$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0$$

Una vez determinado el valor de las holuras, el punto se encuentra en la frontera eficiente.

Gráficamente, el funcionamiento del modelo es el siguiente:

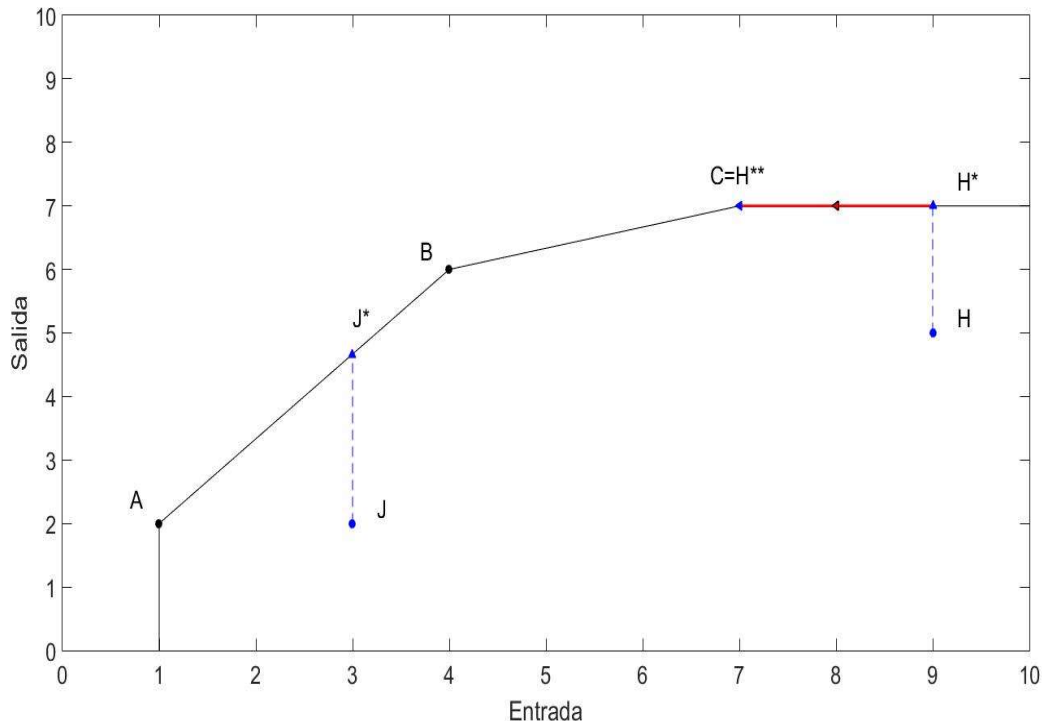


Figura 7 Modelo BCC – OUTPUT

La ilustración representa una DMU con una entrada y una salida. Las DMUs buscan proyectarse en la frontera eficiente, esto lo realizan radialmente, mediante el aumento de las salidas de un valor γ_j^* , una vez se han proyectado en la frontera tecnológica, se inicia la 2ª fase que consiste en el desplazamiento rectangular, esto sucede en H* que para alcanzar la eficiencia disminuye sus entradas un valor h_k^- , proyectándose en el punto C que es el de mayor volumen de entradas y salidas que opera de forma eficiente.

2.3.3. MODELOS DEA NO ORIENTADOS

2.3.3.1. MODELO ADITIVO

Este modelo aplica tecnología VRS, la diferencia principal con los modelos anteriores reside en que en este caso no se tiene una orientación clara de entrada o salida, es decir, para mejorar la eficiencia de la empresa es posible tanto disminuir recursos como aumentar la producción. A diferencia de los modelos radiales el aumento o disminución de las entradas y salidas no se hace de forma proporcional, es decir, radialmente, si no de manera rectangular, lo que implica que cada entrada o salida se aumenta o disminuye sin depender de las demás y sin tener que afectar a todas.

El modelo expresado matemáticamente es el siguiente:

$$\max \left[\sum_{k=1}^p h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right]$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{ij} - h_i^- \quad \forall i = 1 \dots m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{kj} + h_k^+ \quad \forall k = 1 \dots p$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0$$

Este modelo no tiene primera fase, ya que ésta corresponde la fase radial, por lo tanto, solo se aplica la segunda, que corresponde al desplazamiento rectangular mediante las holguras h_k^+, h_i^- .

Al igual que en los otros modelos con retornos de escala variable, esta condición se impone mediante la restricción $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$

Gráficamente el comportamiento del modelo es el siguiente:

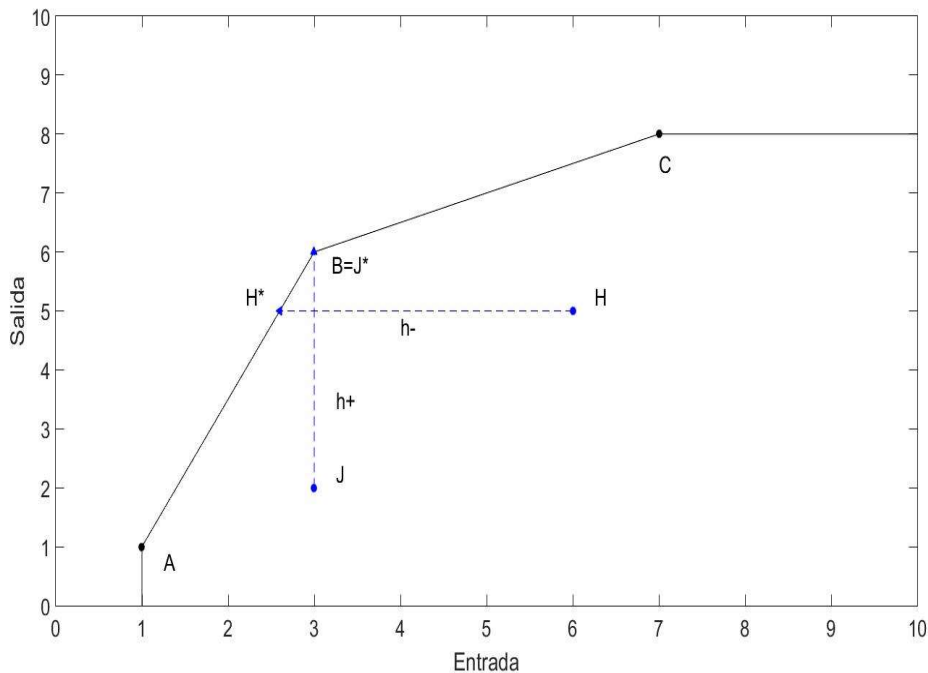


Figura 8 Modelo aditivo

Las DMUs que conforman el problema ilustrado constan de una entrada y una salida. Las DMUs A, B, y C son las que forman la frontera tecnológica, siendo la B la que tiene un tamaño de escala más productivo. Al ser B la

que tiene un tamaño de escala más productivo las DMUs no eficientes J y H buscarán proyectarse lo más cerca posible a este punto mediante la reducción de entradas o el aumento de salidas ya que no tienen una orientación. Se puede observar cómo J incrementa su salida un valor h^+ para proyectarse sobre la misma B y H reduce su entrada un valor de h^- ya que de esta forma se acerca más al punto B que aumentando la salida, la proyección de H sobre la frontera tecnológica es H*. Como puede verse los desplazamientos en este método son rectangulares.

2.3.3.2. MODELO SBI (SLACKS BASED INEFFICIENCY)

El modelo SBI se trata de un modelo no orientado basado en holguras. Fue propuesto por Fukuyama H. y Weber, W.L. [10]. Al ser un modelo no orientado es posible reducir las entradas y maximizar las salidas al mismo tiempo. Este modelo busca una aproximación de la DMU en estudio a la frontera eficiente siguiendo la dirección marcada por el vector \vec{g} , reduciendo las entradas y aumenta las salidas hasta chocar con la frontera tecnológica. Las componentes del vector \vec{g} son introducidas como dato en el modelo. Una vez en la frontera mediante las holguras la DMU se proyecta en el punto de mayor eficiencia.

En este modelo se busca normalizar las holguras de manera que se conviertan en adimensionales y puedan ser agregadas con el fin de obtener una medida de la ineficiencia de la DMU en estudio.

Matemáticamente el modelo tiene la siguiente expresión:

$$SBI(x_j, y_j; g^x, g^y) = \max \left[\frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{h_i^-}{g_i^x} + \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \frac{h_k^+}{g_k^y}}{2} \right]$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{ij} - h_i^- \quad \forall i = 1 \dots m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{kj} + h_k^+ \quad \forall k = 1 \dots p$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0$$

El vector \vec{g} tiene una componente por cada salida y cada entrada, este vector se utiliza para la normalización ya que sus componentes actúan como pesos que priorizan la mejora de cada una de las entradas y salidas. Las componentes del vector \vec{g} que se suelen utilizar son los valores de las entradas y salidas de la DMU en estudio.

El modelo SBI calcula la ineficiencia, luego para calcular la eficiencia habría que restarle a 1 el coeficiente SBI de la siguiente manera, eficiencia=1-SBI. De esta manera cuando se calcule el SBI de cada DMU adquirirá un valor de 0 en las eficientes y de 1 en las ineficientes.

Las DMU que componen el problema son n, siendo m y p el número de entradas y salidas con las que cuenta

cada una.

El término que se maximiza son las holguras normalizadas, la normalización de las holguras se realizan mediante la siguiente expresión:

$$SBI X = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{h_i^-}{g_i^x}$$

$$SBI Y = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \frac{h_k^+}{g_k^y}$$

La primera y segunda restricción definen la frontera eficiente y determinan las holguras de la DMU evaluada, mientras que la tercera restricción establece el criterio de tecnología VRS.

Gráficamente el funcionamiento del modelo es el siguiente:

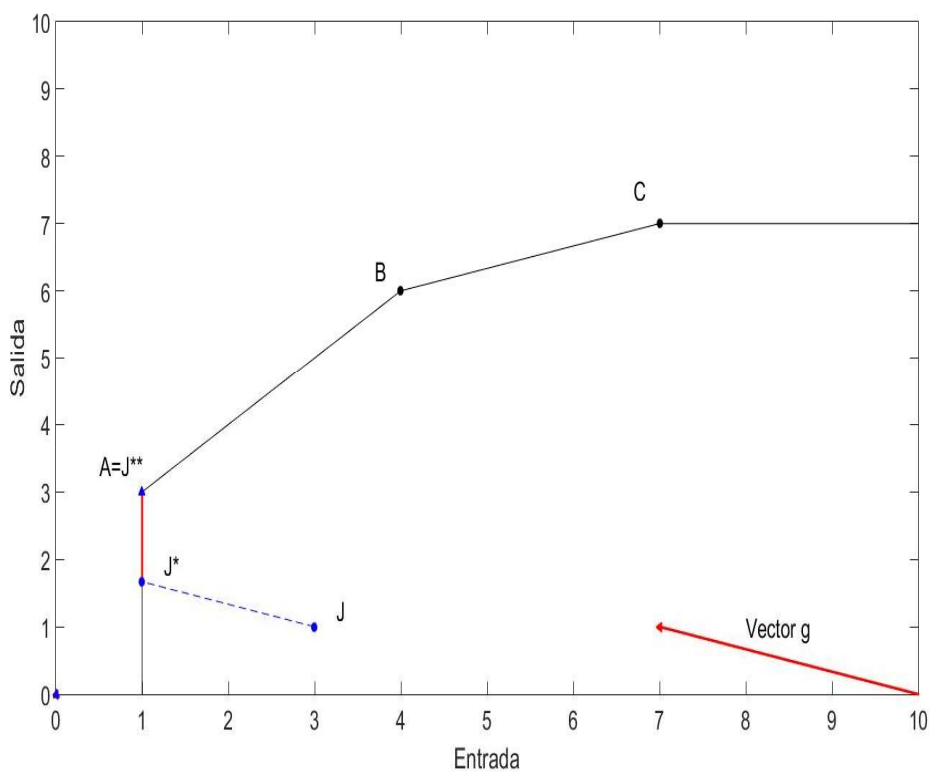


Figura 9 Modelo SBI

En la ilustración podemos ver el funcionamiento del modelo SBI, el punto es llevado a la frontera eficiente tomando la dirección del vector g, este vector tiene unas componentes de (-3, 1) que son el valor de la entrada con signo negativo ya que deben ser reducidas y de las salidas del punto en estudio, en este caso J. Una vez trasladado el punto a la frontera eficiente, mediante holguras se proyecta en la zona de la frontera tecnológica más eficiente, en este caso J* es trasladado a J** que coincide con la DMU A la cual es eficiente y define la frontera tecnológica.

3 MODELOS DE FUSIONES

Los modelos DEA presentados anteriormente buscan que cada unidad productiva alcance la eficiencia de manera individual, mediante la disminución o aumento de sus entradas y salidas, sin embargo, existen otros modelos que tratan de alcanzar la eficiencia por otros métodos. Los modelos desarrollados a continuación buscan alcanzar la eficiencia mediante fusiones de DMUs. Estas fusiones consiguen convertir DMUs ineficientes en eficientes emparejando DMUs de distintos tamaños o que previamente eran eficientes con otras que no lo eran, de manera que aumentan el tamaño de la DMU haciendo que pueda aprovecharse de las economías de escala o de aprendizaje y tecnología sólo disponibles para empresas de mayor tamaño.

Dichas fusiones pueden realizarse desde diferentes perspectivas como buscar la eficiencia o reducir costes y también atendiendo a una serie de restricciones como el número de empresas implicadas o fusiones imposibilidad de fusión de varias empresas debido a diversos motivos como la situación geométrica.

En cuanto a los modelos que estudian las fusiones de DMUs se puede hacer una distinción entre aquellos que dadas una serie de unificaciones buscan las ganancias potenciales de cada una de ellas y otros modelos que buscan de entre una serie de DMUs dadas cuales son las uniones que aumentan la eficiencia. Los modelos desarrollados a continuación corresponden a los de selección de mejores DMUs para formar parte de una fusión.

3.1 MODELO ZHU ET AL (2017)

El objetivo de este modelo es emparejar empresas mediante fusiones. El objetivo del modelo es encontrar las mejores fusiones de entre un conjunto de DMUs y una vez producido dicho emparejamiento modificar los valores de las entradas y salidas de la DMU resultante hasta alcanzar unos valores óptimos. En este modelo se impone un número máximo de parejas que intervienen en cada fusión. El emparejamiento se establece mediante tres perspectivas posibles, la eficiencia, los ingresos o los costes. El modelo se caracteriza por escoger las parejas desde diferentes perspectivas lo que hace que en diferentes situaciones se pueden usar diferentes modelos con objeto de encontrar la pareja que mejor solventa las necesidades específicas de la DMU. Los modelos propuestos se utilizan para generar fusiones desde cuatro perspectivas diferentes.

3.1.1 Selección de parejas basada en la perspectiva de la eficiencia

En este modelo la medida de la eficiencia de la DMU_j se realiza mediante las medidas de Farrell [11]. Esta medida de Farrell es una medida de la eficiencia de forma radial, es decir, similar a la θ y γ de los modelos anteriores.

$$E_j = \min \{ E \in \mathbb{R} \mid (E x_j, y_j) \in T \}$$

$$F_j = \max \{ F \in \mathbb{R} \mid (x_j, F y_j) \in T \}$$

Siendo E_j la máxima minimización de todas las entradas y F_j la máxima expansión de todas las salidas para la DMU_j especificada. Como se definió en las características generales de la metodología DEA, T es el conjunto de posibilidades de producción y está definido por la siguiente expresión:

$$T = \{ (x, y) \mid \exists \lambda \geq 0 : x \geq \sum_j \lambda_j x_j, y \leq \sum_j \lambda_j y_j, \lambda_j \in \Delta(s) \}$$

En el conjunto de posibilidades de producción, el término $\Delta(s)$ depende del retorno de escala del problema, en este caso por ser el más común nos referiremos a retornos de escala variable (VRS), aunque también podrían ser (CRS) entre otros. Para retornos de escala variable el término $\Delta(s)$ haría referencia a $\Delta(VRS) = \{ \lambda \in \mathbb{R}^N \mid \sum_j \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \}$

Una vez definidas las variables E_j y F_j y el conjunto de posibilidades de producción procedemos a aplicar ambos en el caso de fusionar d DMUs.

Las d DMUs que se van a fusionar corresponden al conjunto $j \in D = \{ 1, 2, \dots, d \}$. La fusión de dichas entidades produce unas entradas y salidas que son combinación lineal directa de las entradas y salidas de las DMUs que conforman el conjunto D por separado, siendo las entradas igual a $\sum_{j \in D} x_j$ y las salidas $\sum_{j \in D} y_j$. Esto da lugar a la siguiente expresión para F_D y E_D .

$$F_D = \max \{ F \in \mathbb{R} \mid (\sum_{j \in D} x_j, F[\sum_{j \in D} y_j]) \in T \}$$

$$E_D = \min \{ E \in \mathbb{R} \mid (E[\sum_{j \in D} x_j], \sum_{j \in D} y_j) \in T \}$$

E_D es la máxima minimización a la que puede aspirar la suma de las entradas para las unidades agregadas sin salirse del conjunto de posibilidades de producción en un problema con retornos de escala variables y F_D es la máxima expansión para la suma de las salidas que componen la fusión de las DMUs. La fusión es eficiente si $E_D \leq 1$ y $F_D \geq 1$.

El problema se resolverá a partir de la inserción de una estimación DEA del conjunto de posibilidades de producción subyacente propuesto por Bogetoft y Wang [1] que especificado para F y para un retorno de escala variable queda como:

$$\max F_D$$

s.a.

$$\sum_{j \in D} x_j \geq \sum_{j \in D} \lambda_j x_j$$

$$F_D \left[\sum_{j \in D} y_j \right] \leq \sum_{j \in D} \lambda_j y_j$$

$$\sum_j \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0$$

De este modelo sacaremos el valor de F_D mediante el cual teniendo en cuenta las proposiciones ilustradas por Zhu et al. (2017) [6] podemos determinar la eficiencia. La primera proposición dice “Si la fusión de entradas y salidas sigue en el conjunto de posibilidades tecnológicas, esto es $(\sum_{j \in D} x_j, \sum_{j \in D} y_j) \in T$ entonces la fusión es eficiente” destacando que si $F_D > 1$ es fuertemente eficiente y si $F_D = 1$ se encuentra en la frontera tecnológica y es débilmente eficiente. La segunda proposición establece que “Si las entradas y salidas fusionadas están fuera del conjunto de posibilidades de producción, esto es, $(\sum_{j \in D} x_j, \sum_{j \in D} y_j) \notin T$ entonces la fusión es ineficiente”.

Basándose en lo anterior, el modelo propuesto por Zhu et al. (2017) para la selección de las mejores parejas para la fusión de la DMU_0 con otras $DMUs$ teniendo en cuenta la máxima expansión y una tecnología VRS es el siguiente:

max F_R

s.a.

$$x_{i0} + \sum_{j=1, j \neq 0}^n \delta_j x_{ij} \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$F_R \left[y_{k0} + \sum_{j=1, j \neq 0}^n \delta_j y_{kj} \right] \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} \quad \forall k = 1, 2, \dots, p$$

$$\sum_{j=1, j \neq 0}^n \delta_j = N$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0; \quad \delta_j \in \{0, 1\}$$

De este modelo aparte de extraer F_R se extrae δ_j que es una variable binaria que toma valor 1 si la DMU_j se fusiona con la DMU_0 , siendo N el número total de $DMUs$ que se fusionan con la DMU_0 , esta N es un parámetro fijado antes de aplicar el modelo. R es el conjunto formado por las $DMUs$ que entran a formar parte de la fusión, es decir $R = \{j: \delta_j = 1\}$, difiere del conjunto D usado anteriormente en que las unidades que formaban D estaban predeterminadas y lo que se buscaba resolviendo el modelo era medir la eficiencia de la unión y el conjunto R se genera al resolver el problema y obtener ese conjunto R de unidades que deben fusionarse es el objetivo de la resolución del modelo.

El modelo con orientación de entrada puede escribirse como:

$\min E_R$

s.a.

$$E_R \left[x_{i0} + \sum_{j=1, j \neq 0}^n \delta_j x_{ij} \right] \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$y_{k0} + \sum_{j=1, j \neq 0}^n \delta_j y_{kj} \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} \quad \forall k = 1, 2, \dots, p$$

$$\sum_{j=1, j \neq 0}^n \delta_j = N$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0; \quad \delta_j \in \{0, 1\}$$

3.1.2 Selección de parejas basada en la perspectiva de los ingresos

Al igual que la eficiencia puede ser utilizada como indicador de que la fusión de DMUs mejora el funcionamiento de estas DMUs por separado, los ingresos pueden ser otro método de medir dichas mejoras de la fusión. Este modelo de buscar las ventajas que puede aportar una fusión mediante los ingresos y no por eficiencia se utilizará dependiendo del contexto del problema, es decir de cuáles son los objetivos y las necesidades de las DMUs que se fusionan.

Los beneficios son aportados a cada DMU mediante las salidas, cada una de las salidas que produce una DMU tiene un precio determinado y conocido de ante mano p_k . Todas las salidas a las que corresponda el mismo subíndice k tienen el mismo precio en las distintas DMUs.

El modelo propuesto por Zhu et al. (2017) que empareja una DMU_0 que quiere fusionarse con otras DMU_j en un problema con retornos de escala variable es el siguiente:

$$R_{0,R} = \max \sum_{k=1}^p p_k \hat{y}_k$$

s.a.

$$\hat{x}_i \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$\hat{y}_k \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} \quad \forall k = 1, 2, \dots, p$$

$$\hat{x}_i \leq x_{i0} + \sum_{j=1, j \neq 0}^n \delta_j x_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1, j \neq 0}^n \delta_j = N$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0; \quad \delta_j \in \{0, 1\}$$

Siendo N el número total de DMUs que se unifican para llevar a cabo la fusión, no incluyendo a la DMU_0 , este parámetro es determinado de ante mano y se introduce como dato en el modelo. La \hat{x}_i y la \hat{y}_k son respectivamente las variables de entrada y salida de la nueva fusión de DMUs. $R_{0,R}$ son los ingresos de las empresas fusionadas, donde el subíndice R indica el conjunto de DMUs que participa en la fusión con DMU_0 . Realizar emparejamientos basados en los ingresos, permite lograr los máximos ingresos mediante (\hat{x}_i, \hat{y}_k) , el valor \hat{x}_i será siempre menor o igual que la suma de entradas totales, ya que, si no fuera así podría elevarse en demasía el volumen de producción, esto lo establece la tercera restricción:

$$\hat{x}_i \leq x_{i0} + \sum_{j=1, j \neq 0}^n \delta_j x_{ij}$$

3.1.3 Selección de parejas basada en la perspectiva de los costes

Al igual que los beneficios son una perspectiva muy importante a la hora de realizar unificaciones para fusiones de unidades productivas, los costes también lo son. Aunque existen una gran cantidad de costes asociados a la fusión de DMUs, sólo se tendrán en cuenta los costes relacionados con las entradas, es decir, los recursos consumidos. Estos costes serán determinados por c_i correspondiendo cada subíndice a cada una de las entradas

con las que cuenta la DMU, estos costes son datos del problema e iguales para todas las DMUs. El objetivo de este modelo es conseguir los emparejamientos que minimicen los costes y en nuestro caso concreto con retornos de escala variables.

$$C_{0,R} = \min \sum_{i=1}^m c_i \hat{x}_i$$

s.a.

$$\hat{x}_i \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$\hat{y}_k \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} \quad \forall k = 1, 2, \dots, p$$

$$\hat{x}_i \leq x_{i0} + \sum_{j=1, j \neq 0}^n \delta_j x_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$\hat{y}_k \geq y_{k0} + \sum_{j=1, j \neq 0}^n \delta_j y_{kj} \quad \forall k = 1, 2, \dots, p$$

$$\sum_{j=1, j \neq 0}^n \delta_j = N$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0; \quad \delta_j \in \{0, 1\}$$

Como puede verse el modelo es similar al de beneficios, pero con la añadidura de una restricción sobre \hat{y}_k que sirve para garantizar que se producen unas salidas mínimas ya que de otra manera podría darse el caso de que la mejor forma reducir costes es producir 0. Dicha restricción es la siguiente:

$$\hat{y}_k \geq y_{k0} + \sum_{j=1, j \neq 0}^n \delta_j y_{kj}$$

$C_{0,R}$ determina el coste total de las empresas fusionadas.

3.1.4 Selección de parejas basada en la perspectiva integral

Este modelo trata la perspectiva de ingresos, costes y eficiencia simultáneamente para seleccionar los mejores emparejamientos.

El modelo es el siguiente:

$$P_{0,R} = \max \sum_{k=1}^p p_k \hat{y}_k - \sum_{i=1}^m c_i \hat{x}_i$$

s.a.

$$\hat{x}_i \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$\hat{y}_k \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} \quad \forall k = 1, 2, \dots, p$$

$$\hat{x}_i \leq x_{i0} + \sum_{j=1, j \neq 0}^n \delta_j x_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{k=1}^p p_k y_{k0} \sum_{i=1}^m c_i \hat{x}_i \leq \sum_{i=1}^m c_i x_{i0} \sum_{k=1}^p p_k \hat{y}_k$$

$$C_1 \leq \sum_{i=1}^m c_i \hat{x}_i \leq C_2 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1, j \neq 0}^n \delta_j = N$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0; \quad \delta_j \in \{0, 1\}$$

Los términos C_1 y C_2 se refieren a las cotas inferiores y superiores del presupuesto respectivamente, ambas cotas son introducidas como dato en el modelo. La cuarta restricción surge de linealizar la siguiente expresión:

$$\frac{\sum_{k=1}^p p_k y_{k0}}{\sum_{i=1}^m c_i x_{i0}} \leq \frac{\sum_{k=1}^p p_k \hat{y}_k}{\sum_{i=1}^m c_i \hat{x}_i}$$

Esta expresión no es lineal por lo que se linealiza, el objetivo de dicha restricción es imponer que la eficiencia de las DMUs fusionadas ha de ser mayor que la eficiencia de la DMU_0 .

3.2 MODELO DEA DE FUSIONES DE LOZANO Y ADENSO-DÍAZ (2020)

El objetivo de este modelo es mejorar la eficiencia de ciertas DMUs mediante una serie de fusiones. Este modelo determina de entre un conjunto de DMUs dadas, cuáles son las mejores fusiones. A diferencia del modelo de Zhu et al. (2017), en este no se establecen de ante mano el número de DMUs que tienen que intervenir en las fusiones, si no que el modelo determina en cada fusión cual es el número idóneo de integrantes. En este modelo como se especificará más adelante es posible incorporar diferentes restricciones para determinar la pertenencia de una determinada DMU a una fusión bajo diferentes condiciones. Este modelo de fusión se basa en una medida radial de ineficiencia basada en holguras (SBI), por lo que una vez determinadas las mejores parejas, el modelo establece cuáles han de ser las modificaciones de las entradas y salidas para lograr proyectar las DMUs agregadas sobre la frontera tecnológica, lográndose así la eficiencia.

Al igual que el modelo SBI, este modelo utiliza un coeficiente de normalización de holguras \vec{g} , la finalidad de este vector direccional es la de otorgar pesos en la función objetivo a cada una de las salidas y entradas de manera que se homogenicen y adquieran la misma importancia relativa. Este vector será un dato conocido introducido en el modelo. Los valores que puede tomar dicho vector pueden ser escogidos como:

$$\begin{aligned} g_i^x &= \max(j) x_{ij} & \forall i = 1, 2, \dots, m \\ g_k^y &= \max(j) y_{kj} & \forall k = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

Como se puede observar, los coeficientes de normalización de holguras que se suelen adoptar son los valores máximos de las entradas y salidas de entre todas las DMUs, ya que mediante ellos es posible adimensionalizar las entrada y salidas a las que corresponden.

El modelo propuesto por Lozano y Adenso-Díaz [7] es el siguiente:

$$SBI_R = \max \frac{1}{m+p} \left(\sum_{i=1}^m \frac{h_{iR}^-}{g_i^x} + \sum_{k=1}^p \frac{h_{kR}^+}{g_k^y} \right)$$

s.a.

$$\hat{x}_{iR} = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \sum_{r=1}^n \delta_r x_{ir} - h_{iR}^- \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$\hat{y}_{kR} = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = \sum_{r=1}^n \delta_r y_{kr} + h_{kR}^+ \quad \forall k = 1, 2, \dots, p$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, h_{iR}^-, h_{kR}^+ \geq 0$$

$$\delta_r \in \{0, 1\}$$

Siendo j y r los índices de cada una de las DMUs que intervienen en el problema, i y k los índices de las entradas y salidas de las que está compuesta cada DMU respectivamente y R es el subíndice que denota el conjunto de DMUs que entra dentro de una fusión determinada, matemáticamente es $R = \{r: \delta_r = 1\}$.

Al igual que en el modelo de Zhu et al. (2017), la variable binaria δ_r es utilizada para seleccionar las unidades que entran en la fusión, de manera que adquiere el valor 1 si la DMU a la que se refiere entra en dicha fusión y 0 en caso contrario. Las variables \hat{x}_{iR} y \hat{y}_{kR} son los valores objetivos de cada una de las entradas i y k respectivamente después de la fusión, es decir los puntos de la frontera tecnológica a los que se ha llegado mediante la agregación de las entradas y salidas de cada una de las unidades que componen la empresa y la aplicación de holguras.

A la hora de realizar las fusiones es posible añadirle al modelo restricciones sobre la variable δ_r de manera que para producirse las fusiones las DMUs que intervengan tengan que cumplir una serie de requisitos. La restricción $\sum_{r=1}^n \delta_r \geq N$ establece que las fusiones que se realicen tienen que contar con más de N componentes. Esta restricción hace que la factibilidad no siempre esté garantizada. Otra posible restricción puede ser incluir una unidad obligatoriamente en el emparejamiento, denotando dicha unidad como A , se ha de imponer $\delta_A = 1$, también es posible impedir que dos unidades entren en la fusión $\delta_A + \delta_B \leq 1$, o hacer que solamente una serie de DMUs pertenecientes a un conjunto puedan entrar en la fusión denotando B al conjunto de DMUs que puede entrar en la fusión $\delta_r = 0 \forall r \notin B$.

En el modelo, la función objetivo busca encontrar los valores de las holguras que hay que aplicarle a las entradas y salidas de las DMUs agregadas para que den como resultado una DMU eficiente. Este valor que se obtiene de la función objetivo representa lo que podría mejorar en promedio la DMU agregada, es decir la ineficiencia técnica del punto.

Respecto a las restricciones, la primera y segunda representan el cálculo de la proyección de la DMU agregada sobre la frontera eficiente $(\hat{x}_{iR}, \hat{y}_{kR})$, es decir el punto objetivo y la tercera restricción determina la tecnología VRS que se está aplicando en el problema.

Puede verse como las entradas y salidas de la DMU fusionada no son más que la agregación de las entradas y salidas de cada una de las unidades que intervienen en la fusión. A esta suma se le aplican las holguras para desplazar el punto a la frontera tecnológica $\hat{x}_{iR} = \sum_{r=1}^n \delta_r x_{ir} - h_{iR}$, como muchas unidades que intervienen en la fusión no eran eficientes por si mismas, no es posible saber qué parte de la mejora se ha producido por los efectos de la fusión puros y qué mejora se ha producido al empezar una única entidad ineficiente a trabajar con mayor eficiencia, esto se llama efecto aprendizaje. Las ganancias de la fusión pura son llamadas SBI_R^* y las producidas por el aprendizaje SBI_R^{LE} .

El SBI_R^{LE} puede calcularse mediante el SBI de cada una de las unidades que intervienen en la fusión por separado y agregándolas. El SBI de una unidad r se calcula de la siguiente manera:

$$SBI_r = \max \frac{1}{m+p} \left(\sum_{i=1}^m \frac{h_{ir}^-}{g_i^x} + \sum_{k=1}^p \frac{h_{kr}^+}{g_k^y} \right)$$

s.a.

$$\hat{x}_{ir} = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{ir} - h_{ir}^- \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$\hat{y}_{kr} = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{kr} + h_{kr}^+ \quad \forall k = 1, 2, \dots, p$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, h_{ir}^-, h_{kr}^+ \geq 0$$

Por lo tanto $SBI_R^{LE} = \sum_{r \in R} SBI_r$. Una vez obtenido la parte de la mejora que se produce por aprendizaje, se calcula el producido por la fusión mediante la resta al SBI_R de SBI_R^{LE} .

$$SBI_R^* = SBI_R - SBI_R^{LE}$$

Si $SBI_R^* > 0$ quiere decir que una parte de la mejora que se produce en la eficiencia es debido puramente a la fusión y no solo al aprendizaje. Luego si fuera interesante fusionar las empresas.

Como puede verse, es aconsejable hacer este cálculo del SBI_R^* mediante el SBI_r de cada empresa ya que de esta manera se comprenden mejor los beneficios aportados por cada una de las fusiones y de igual modo se puede valorar cuando éstas son interesantes y cuando no.

4 ILUSTRACIÓN

Una vez se ha expuesto teóricamente el modelo de análisis de fusiones de entidades productivas Lozano y Adenso-Díaz (2020), se procede a ilustrar dicho modelo a través de un ejemplo práctico para facilitar así su comprensión.

Como se ha visto anteriormente, al resolver el modelo de fusión de entidades productivas, se obtiene un vector binario que determina las unidades que forman parte de la fusión, una DMU resultante de agregar las entradas y salidas de todas las DMUs implicadas en la unión y aplicar las correspondientes mejoras y una medida de la mejora de la eficiencia de la DMU resultante. Dicha mejora puede haberse producido por dos motivos principalmente, el primero se produce debido a que las entidades han hecho modificaciones en sus recursos consumidos y en su producción de manera individual, es decir, sin haberse fusionado con ninguna otra, lo que sería un aprendizaje, ya que estas modificaciones están basadas en replicar el comportamiento de las empresas que con tamaño similar operan de forma más eficiente. El segundo motivo por el que puede producirse una mejora de la eficiencia de la DMU resultante de una fusión es por los efectos de la fusión únicamente, esto se produce cuando los tamaños relativos de las DMUs involucradas son pequeños y operan en una parte del conjunto de posibilidades de producción en los que existen incrementos de los retornos de escala. Mediante el modelo se pretende conocer qué parte de la mejora de la eficiencia se ha producido por efecto aprendizaje y que parte por efecto fusión de manera que se pueda saber si dicha fusión es ventajosa.

Para comprender en mayor profundidad los resultados generados por el modelo, como se producen las fusiones, como se determinan los integrantes y como se distingue entre los dos tipos de efectos de mejora y las implicaciones que cada uno de estos efectos tiene en la fusión se procede a desarrollar un caso práctico.

4.1 CASO PRÁCTICO: FUSIÓN DE GRANJAS PRODUCTORAS DE LECHE

El caso práctico escogido es el de la fusión de granjas productoras de leche. Mediante la utilización de este caso práctico se pretende mostrar cuál es el funcionamiento del modelo, así como las conclusiones que de él se pueden extraer a través de datos numéricos.

Este ejemplo concreto elegido para la ilustración del modelo pertenece a un área en la que se han desarrollado multitud de estudios utilizando la metodología DEA, como es el sector agrario. El motivo por el que este sector ha sido objeto de tantos estudios se debe a que cuenta con gran importancia social, política, económica y ecológica entre otras.

Según el informe anual de indicadores de agricultura, pesca, alimentación y medio ambiente del año 2018 [12] elaborado por el ministerio de agricultura y alimentación, el medio rural en España cuenta con una superficie del 84.1% del territorio y una población de 7.594.111 personas, lo que supone un 16,2% de la población española. Puede observarse como el medio rural cuenta con una baja densidad de población ya que, aunque ocupa la mayor parte del territorio su población es escasa. Esta baja densidad de población se va acrecentando cada vez más debido a que muchas personas optan por trasladarse a núcleos urbanos más poblados. Esta pérdida de población puede verse en comunidades autónomas como Castilla-La Mancha e Islas Baleares donde el descenso de población rural entre los años 2000 al 2018 ha sido del 15,6% y del 11,7% respectivamente, en España en general, el descenso de población rural ha sido del 4,6%. Este descenso de población se debe a factores como la falta de trabajo existente en los municipios rurales, la escasa rentabilidad que en muchos casos se le está sacando al campo o la búsqueda de una mejora en los servicios públicos que encuentran en grandes municipios. Actualmente numerosas políticas gubernamentales van encaminadas a solventar este problema de la despoblación de medios rurales, es por ello por lo que esta aplicación de la metodología DEA para la fusión de entidades productoras supone una manera de aumentar el rendimiento de las explotaciones agrarias y de esta manera favorecer que los habitantes de los medios rurales puedan seguir subsistiendo gracias a ellas.

Otro tema que ha adquirido una gran relevancia en los últimos años es el medio ambiente, las emisiones derivadas de la agricultura y ganadería representaron en el año 2017, en términos de CO_2 equivalente un 11,6% de las emisiones totales del inventario nacional, un 3,1% más respecto a 2016. La emisión de contaminantes se podría reducir de forma considerable mediante la fusión de granjas, ya que la incorporación de las mejoras para el aumento de la eficiencia implicaría una disminución de las hectáreas de los terrones dedicados a las actividades agrarias, la disminución de los rebaños, la reducción de combustibles.

En el año 2017 la superficie total cuyo uso principal es pastos fue de un 8.974.797 (ha) y la cabaña ganadera de vacas de leche contaba con 823.390 vacas. La mayoría de estas superficies corresponden a granjas que operan a pequeña escala, lo que implica problemas de ineficiencia haciéndolas poco competitivas y con escasa tecnología. Estos problemas de ineficiencia pueden solventarse mediante la creación de cooperativas en las que los integrantes ponen sus recursos en común. Las cooperativas en algunos casos fusionan tierras, haciendo que los tamaños de las explotaciones sean mayores y puedan acogerse a retornos de escala crecientes. La fusión de tierras puede venir acompañada de una disminución del rebaño ya que con menos vacas es posible obtener mayor rendimiento. Otra ventaja de las cooperativas es que reducen costes como por ejemplo los costes logísticos ya que en lugar de que cada explotación trate la leche por separado sería posible una distribución y tratamiento común. En el año 2017 la superficie total cuyo uso principal era pastos descendió un 3,4% respecto al año anterior. La cabaña ganadera de vacas de leche contaba con 838.871 vacas de ordeño en 2012-16, mientras que en 2017 alcanzó las 823.390 vacas. La producción de leche en España alcanzó los 7,1 millones de toneladas en el año 2018, siendo un 3,1% superior a la media del periodo 2013-17 por lo que se puede observar que aun habiendo menos vacas lecheras y menos hectáreas ocupadas se ha producido mayor cantidad de leche.

Respecto a las fusiones de granjas, no siempre es posible realizarlas de igual manera, ya que existen diferentes factores que influyen como por ejemplo la ubicación de las distintas granjas, lo que puede implicar la distancia entre ellas o la existencia de barreras naturales que implique su conexión, por lo que en muchas ocasiones aun existiendo dos granjas cuya fusión sería la más provechosa ésta sería imposible porque habría que imponer una restricción para que no se produzca. Otra posible restricción sería la existencia de tipología de ganado diferente imposibilitando su mezcla. Todas estas restricciones que se pueden producir pueden ser introducidas en el modelo de manera que se fomente la unión de ciertos tipos de granjas o se imposibiliten otros, también puede resultar interesante imponer restricciones sobre el número de entidades involucradas en la fusión.

Una vez recalcada la importancia del sector al que pertenece el problema que va a ilustrar el modelo de fusión DEA y las ventajas concretas que éste puede aportar a la sociedad, se procede a ilustrar más concretamente el problema seleccionado.

4.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Para la ilustración se utilizará un problema de granjas productoras de leche, de las cuales se tendrá un conjunto de 20 DMUs. Se supondrá que no existen restricciones para la fusión de las granjas, por lo que se podría fusionar cualquiera de ellas entre sí. Tampoco se pondrán restricciones sobre el número máximo de DMUs que debe intervenir en el modelo, sin embargo, si se impondrá la restricción $\sum_{r=1}^n \delta_r \geq 2$ de manera que se asegure que va a haber más de una unidad en las fusiones. Al poderse fusionar todas las granjas entre sí, se está considerando que todas ellas pertenecen a una misma región geográfica, que disponen del mismo tipo de ganado y producen el mismo tipo de leche. Este problema utilizará retornos de escala variable ya que existen multitud de tamaños de explotaciones y esto hace que el rendimiento a alcanzar varía respecto al tamaño.

La DMU contará con dos entradas, el tamaño del rebaño y los costes de operación y una salida, la producción de leche.



Figura 10 Representación DMU GP

Las variables de entrada corresponden a:

- **Tamaño del rebaño (TR)**, indica las vacas que componen el rebaño y se mide en unidades. Para simplificar el problema se ha determinado que todas las granjas tienen la misma tipología de rebaño, es decir la misma especie, esto hace que todas las DMU puedan emparejarse ya que el ser el mismo animal la leche producida será de la misma tipología, así como los posibles costes asociados directamente al animal serán los mismos. Esta variable es entera.
- **Costes de operación (CO)** corresponde a la cantidad de dinero a pagar durante un año para generar el producto, se mide en unidades monetarias/año. Esta variable engloba todos los gastos generados por la producción de la leche, desde el cuidado, alimentación y gastos de veterinario del animal, hasta los gastos de producción de la leche como la luz, los costes derivados del transporte entre otros.

Las variables de salida corresponden a:

- **Producción de leche (PL)** determina la cantidad de leche que ha sido producida durante un año, se mide en litros/año. Se supondrá que todos los animales pueden producir la misma cantidad de leche, es decir las vacas de cualquier granja son capaces de llegar a producir los mismos litros que las vacas de la mejor granja.

Como puede verse las distintas entradas y salidas de las distintas DMUs, pueden agregarse sin inconveniente para formar las distintas fusiones. No se producen ningún tipo de entradas o salidas no deseadas. Lo que se pretenderá con este modelo es reducir las entradas, es decir, el tamaño del rebaño y los costes de operación y aumentar las salidas, la producción de leche, de manera que se aumente la eficiencia de la DMU resultante de la fusión.

Una vez caracterizada la DMU y el contexto del problema, se procede a resolverlo numéricamente para ilustrar así el método de fusión de entidades.

4.3 RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para resolver el problema se han generado 20 granjas productoras cuyos datos de entradas y salidas son los que se detallan en la siguiente tabla. Estos datos numéricos empleados son ficticios, aunque para generarlos se han

usado como referencia datos de granjas reales.

Como se puede observar cada DMU está designada por GL que es una abreviatura de Granja Lechera, la entrada X1 corresponde al tamaño del rebaño TR, la entrada X2 corresponde a los costes de operación OP y la salida Y corresponde a la producción de leche.

DMU	x_{TRr}	$x_{CO r}$	$y_{PL r}$
GL 1	74	80.674,00	200.485,00
GL 2	109	130.528,00	500.456,00
GL 3	50	69.512,00	110.612,00
GL 4	144	140.513,70	683.421,00
GL 5	55	70.916,00	115.789,30
GL 6	158	199.523,00	756.289,00
GL 7	97	120.529,40	412.560,00
GL 8	126	125.678,00	540.763,00
GL 9	88	92.745,40	290.465,00
GL 10	161	200.415,30	757.253,00
GL 11	150	150.790,00	700.652,00
GL 12	102	110.320,00	445.623,00
GL 13	132	141.520,00	600.782,00
GL 14	63	75.513,80	120.578,00
GL 15	139	130.418,10	620.480,00
GL 16	90	112.436,25	300.485,00
GL 17	153	180.479,80	699.956,00
GL 18	170	215.623,00	900.456,00
GL 19	107	123.521,00	450.623,00
GL 20	111	140.520,90	520.789,00

Tabla 1 Datos de las granjas productoras de leche

Podemos observar como la DMU_3 es la que tiene menores valores de entradas y salidas, el tamaño de su rebaño es de 50 vacas, sus costes operativos son 69.512,00 unidades monetarias al año y su producción de leche es de 110.612,00 litros al año. Por otro lado, la DMU que presenta los valores más altos de entradas y salidas es la DMU_{18} con un total de 170 vacas, un gasto de 215.623,00 unidades monetarias por año y una producción de 900.456,00 litros por año. Los valores de las otras DMUs se encuentran comprendidos entre estos valores anteriores.

4.3.1 Resolución del modelo SBI

Para obtener cuales son las uniones más ventajosas de las DMUs anteriores primero se calculará la eficiencia de cada una de las DMUs por separado, para ello se proyecta cada DMU sobre la frontera eficiente siguiendo el modelo SBI_r propuesto en el modelo DEA de fusión de Lozano y Adenso-Díaz (2020). En este modelo la proyección de la DMU se realiza mediante holguras normalizadas. Esta SBI_r que se calcula con las holguras normalizadas representa la ineficiencia de cada unidad, por lo que para calcular la eficiencia habría que calcular $eficiencia=1-SBI_r$, por lo tanto, aquellas unidades cuyo valor de SBI_r sea 0 serán eficientes.

Al modelo propuesto anteriormente para calcular SBI_r , se le añade la condición de que la variable $h_{TR,r}^-$ es entera. Ya que en el tamaño del rebaño no se pueden aceptar cifras decimales.

Para el vector \vec{g} se ha optado por escoger sus valores mediante:

$$g_i^x = \max(j) x_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$g_k^y = \max(j) y_{kj} \quad \forall k = 1, 2, \dots, p$$

Por lo que los valores que adquiere son:

$$g^x = (170 \ 215623)$$

$$g^y = (900456)$$

Introduciendo los datos en el modelo y usando el vector \vec{g} para la normalización de las holguras se obtienen los siguientes resultados.

DMU	SBI_r	$h_{TR,r}^-$	$h_{CO,r}^-$	$h_{PL,r}^+$	$\hat{x}_{TR,r}$	$\hat{x}_{CO,r}$	$\hat{y}_{PL,r}$
GL 1	0,020	10	175,23	322,27	64	80.498,77	200.807,27
GL 2	0,001	0	662,17	0	109	129.865,82	500.456
GL 3	0	0	0	0	50	69.512	110.612
GL 4	0	0	0	0	144	140.513,70	683.421
GL 5	0,009	4	619,23	1.265,22	51	70.296,77	117.054,52
GL 6	0,062	5	33.009,93	2259,50	153	166.513,07	758.548,50
GL 7	0,022	0	14.133,25	850,40	97	106.396,15	413.410,40
GL 8	0,019	7	3.136,74	1.111,57	119	122.541,26	541.874,57
GL 9	0,022	10	1.259,86	537,54	78	91.485,54	291.002,54
GL 10	0,069	8	33.902,23	1.295,5	153	166.513,07	758.548,50
GL 11	0,014	4	4.065,59	0	146	146.724,41	700.652
GL 12	0	0	0	0	102	110.320	445.623
GL 13	0,022	2	11.070,87	3.373	130	130.449,13	604.155
GL 14	0,030	11	4.432,26	2.919,04	52	71.081,54	123.497,04
GL 15	0	0	0	0	139	130.418,10	620.480
GL 16	0,051	10	19.381,17	3.402,58	80	93.055,08	303.887,58
GL 17	0,067	7	34.188,46	160	146	146.291,34	700.116
GL 18	0	0	0	0	170	215.623	900.456
GL 19	0,027	4	12.482,10	661,86	103	111.038,90	451.284,86
GL 20	0	0	0	0	111	140.520,90	520.789

Tabla 2 Resultados modelo SBI

Como se puede observar, la columna SBI_r muestra el valor de la ineficiencia de cada una de las DMUs, las columnas $h_{TR,r}^-$ $h_{CO,r}^-$ $h_{PL,r}^+$ muestran el valor de las holguras sin normalizar de las variables de entrada TR (tamaño del rebaño) CO (costes de operación) y salida PL (producción de leche) respectivamente. Las columnas $\hat{x}_{TR,r}$ $\hat{x}_{CO,r}$ $\hat{y}_{PL,r}$ determinan el valor del objetivo de cada una de las variables de entrada y salida asociada a cada DMU. Cabe destacar que el ser el tamaño del rebaño (TR) una variable entera, las variables asociadas a ella como son la holgura $h_{TR,r}^-$ y el objetivo $\hat{x}_{TR,r}$ también serán enteras.

4.3.2 Conclusiones obtenidas de la resolución del modelo SBI

Se puede ver que seis de las DMUs tienen un SBI=0 por lo que se tratan de DMUs eficientes. Estas DMUs son la DMU_3 , DMU_4 , DMU_{12} , DMU_{15} , DMU_{18} , DMU_{20} , el resto de DMUs presenta ineficiencias. Estas DMUs no eficientes no presentan valores elevados de ineficiencia siendo la que mayor ineficiencia tiene la DMU_{10} con un valor de 0,069. Cabe destacar, como era de esperar que tanto la DMU de menor tamaño DMU_3 como la de mayor tamaño DMU_{18} son eficientes, por lo que forman parte de la frontera tecnológica.

En total el efecto que las holguras han provocado en la reducción de las entradas y salidas ha sido el siguiente. La suma de las reducciones del número de vacas que cada DMU debe realizar es de 82, lo que supone una reducción del ganado total que contaba con 2279 vacas de un 3,59%. La suma de la reducción de costes de cada DMU es de 172.519,09 unidades monetarias, que supone un 6,6% inferior a las 2.612.177,65 unidades monetarias invertidas antes de aplicar el modelo SBI_r . Respecto a la cantidad de leche producida aumenta un 18.158,47 litros lo que supone un aumento 0,18% respecto a los 9.728.517,3 litros que se producían antes de aplicar el modelo. Puede verse como la mayor variación se ha realizado en los costes de operación, mientras que la menor se ha producido en la producción de la leche.

Respecto al efecto que cada holgura tiene sobre cada DMU se detalla en la siguiente tabla, para poder compararlas entre sí se ha calculado la variación porcentual relativa de cada entrada y salida respecto a la cantidad con la que trabajaba la DMU originalmente. Es decir, en el caso de las entradas $\frac{h_{ir}^-}{x_{ir}} * 100$ y en el de las salidas $\frac{h_{kr}^+}{y_{kr}} * 100$.

DMU	$\frac{h_{TRr}^-}{x_{TRr}}$ (%)	$\frac{h_{CO r}^-}{x_{CO r}}$ (%)	$\frac{h_{PLr}^+}{y_{PLr}}$ (%)
GL1	13,514	0,217	0,161
GL2	0	0,507	0
GL3	0	0	0
GL4	0	0	0
GL5	7,273	0,873	1,093
GL6	3,165	16,544	0,299
GL7	0	11,726	0,206
GL8	5,556	2,496	0,206
GL9	11,364	1,358	0,185
GL10	4,969	16,916	0,171
GL11	2,667	2,696	0
GL12	0	0	0
GL13	1,515	7,823	0,561
GL14	17,460	5,869	2,421
GL15	0	0	0
GL16	11,111	17,237	1,132
GL17	4,575	18,943	0,023
GL18	0	0	0
GL19	3,738	10,105	0,147
GL20	0	0	0

Tabla 3 Variación porcentual de las entradas y salidas

En la siguiente imagen se puede ver gráficamente la variación porcentual de las entradas y salidas que se produce en cada DMU.

La elección de medir las variaciones porcentualmente se ha tomado al considerar que no tiene el mismo impacto una variación de cualquiera de las variables en una entidad de pequeño tamaño que en una de gran tamaño, por ejemplo, eliminar 10 vacas en la DMU_5 que cuenta con 55 vacas supone mucho más impacto que eliminar la misma cantidad de vacas en la DMU_{18} que cuenta con 153. Por tanto, al tomar variaciones porcentuales se armonizaría el efecto que cada holgura tiene sobre cada variable permitiendo comparar los cambios sufridos por cada DMU en cuanto a esfuerzo.

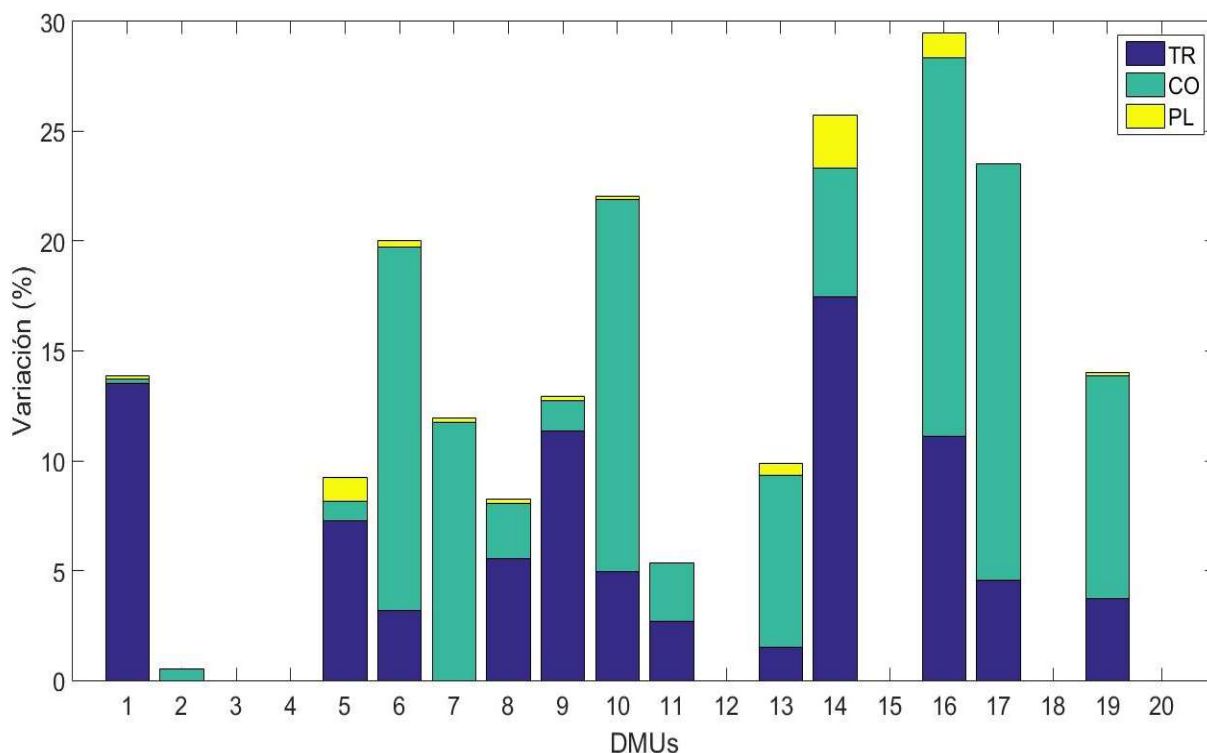


Figura 11 Variación porcentual de entradas y salidas tras aplicar SBI

Como se puede observar, las DMUs eficientes no han sufrido ninguna modificación de sus entradas o salidas, respecto a las DMUs no eficientes se pueden observar casos en los que sólo se ha modificado una de las variables, como es el caso de la DMU_2 , casos en los que se han modificado dos de las variables como es el caso de la DMU_{11} y casos en los que se han modificado las tres variables como es el caso de la DMU_{14} . También se puede observar cómo los cambios realizados en PL son considerablemente inferiores a los realizados en las variables de entrada.

Cabe destacar que, aunque la DMU_{10} es la más ineficiente, ésta no es la que ha visto modificada en mayor medida sus entradas y salidas, ya que la que mayor modificaciones sufre es la DMU_{16} . Esto se debe a que la función objetivo del modelo SBI calcula la ineficiencia usando modificaciones absolutas y no relativas y también se debe a las ponderaciones que el vector \vec{g} otorga a cada holgura.

Esta SBI calculada para cada DMU indica los cambios en el volumen de entradas y salidas que cada unidad puede llevar a cabo de manera individual, sin verse afectado por las ventajas de la fusión. Como se verá a continuación gracias a esta SBI_r , será posible calcular la SBI^{LE} de cada una de las fusiones.

4.3.3 Resolución del modelo de fusiones de Lozano y Adenso-Díaz (2020)

A continuación, se procede a determinar cada una de las uniones de DMUs que propician el aumento de la eficiencia, esto se hará mediante el modelo DEA de fusiones de Lozano y Adenso-Díaz (2020). Este modelo calcula SBI_R , es decir, la ineficiencia de la unión de las DMUs que forman el conjunto R, siendo este conjunto las DMUs que participan en la fusión. Una vez conocida la ineficiencia de la fusión será posible aplicarle modificaciones variando los valores de las entradas y salidas para alcanzar la eficiencia.

Al modelo para el cálculo de SBI_R hay que añadirle la restricción $\sum_{r=1}^n \delta_r \geq 2$ para asegurar de que las fusiones que se han de llevar a cabo están compuestas por al menos dos unidades. También es necesario incluir la condición de que la holgura de la variable de entrada TR, ha de ser un entero ya que la variable x_{TR} es un entero.

Aplicando el modelo se obtiene que se puede alcanzar una mejora de la eficiencia fusionando la DMU_1 DMU_3 DMU_5 DMU_{14} DMU_{16} . El modelo nos proporciona cuál es el valor de SBI para la fusión realizada, así como el valor de las entradas y salidas de la DMU que surge como fusión de las anteriores y el valor de las holguras que se han empleado para reducir las entradas y aumentar las salidas para hacer que la DMU resultante se proyecte en la frontera eficiente. La tabla con los resultados obtenidos al aplicar por primera vez el modelo es la siguiente:

R	$(\sum_{r \in R} x_{ir}, \sum_{r \in R} y_{kr})$	$(\hat{x}_{iR}, \hat{y}_{kR})$	(h_{iR}^-, h_{kR}^+)	SBI_R
GL 1, GL 3, GL5, GL 14, GL16	TR 332 CO 409.052,05 PL 847.949,3	TR 164 CO 198.290,09 PL 850.371	TR 168 CO 210.761,97 PL 2.421,70	0,656

Tabla 4 Resultados primera iteración del modelo de fusión

El SBI_R calculado mide la ineficiencia total que tenía la DMU agregada, sin embargo, al aplicar el método la mejora de la eficiencia puede deberse a dos factores, el primero es el aprendizaje y el segundo es a los efectos de la fusión. Al ser los efectos de aprendizaje todas aquellas modificaciones que la DMU puede llevar a cabo sin necesidad de fusionarse con otra será necesario saber qué parte de la mejora de la eficiencia se ha llevado a cabo por efectos de aprendizaje y qué parte por efecto de la fusión únicamente para determinar si la fusión es ventajosa o no.

El efecto de aprendizaje SBI_R^{LE} de la fusión se calcula como la suma del SBI_r de cada unidad que participa en la fusión. De esta manera el SBI_R^{LE} de la fusión calculada es:

$$SBI_R^{LE} = SBI_{GL1} + SBI_{GL3} + SBI_{GL5} + SBI_{GL14} + SBI_{GL16} = 0,02 + 0 + 0,01 + 0,029 + 0,051 = 0,11$$

Una vez se ha obtenido el valor del efecto de aprendizaje, para calcular el efecto de la fusión pura SBI_R^* se resta al valor de SBI_R el valor del efecto de aprendizaje.

$$SBI_R^* = SBI_R - SBI_R^{LE} = 0,656 - 0,11 = 0,546$$

Como se puede observar el valor de $SBI_R^* > 0$ lo que quiere decir que $SBI_R > SBI_R^{LE}$ por lo que esta unión es ventajosa.

Tras realizar la primera fusión es posible calcular cuál sería la fusión de las DMUs restantes que supondría un aumento de la eficiencia. Para el cálculo de este nuevo conjunto R imponemos al modelo anterior la restricción $\delta_r = 0 \quad \forall r \in \{GL1, GL3, GL5, GL14, GL16\}$.

En esta iteración el conjunto R resultante contiene las DMUs GL7 y GL 9. De igual manera que en la primera iteración se calcula su SBI_R^* y si es mayor que cero es una fusión ventajosa. Al ser ventajosa esta fusión puede llevarse a cabo. Tras esta segunda iteración se vuelve a aplicar el modelo añadiendo la condición $\delta_r = 0 \quad \forall r \in \{GL1, GL3, GL5, GL14, GL16, GL7, GL9\}$ que excluye de las nuevas fusiones tanto a las DMUs que intervinieron en la primera iteración como a las DMUs que han intervenido en la segunda. Esta tercera iteración da como resultado que las DMUs que deben fusionarse son GL12 y GL19. Al imponer las condiciones para una cuarta iteración el modelo no se puede resolver por lo tanto no es posible fusionar el resto de DMUs.

Los resultados obtenidos en cada una de las iteraciones se muestran en la siguiente tabla.

R	$(\sum_{r \in R} x_{ir}, \sum_{r \in R} y_{kr})$	$(\hat{x}_{iR}, \hat{y}_{kR})$	(h_{iR}^-, h_{kR}^+)	SBI_R
GL 1, GL 3, GL5, GL 14, GL16	TR 332	TR 164	TR 168	0,656
	CO 409.052,05	CO 198.290,09	CO 210.761,97	
	PL 847.949,30	PL 850.371	PL 2.421,70	
GL 7, GL 9	TR 185	TR 146	TR 39	0,176
	CO 213.274,80	CO 148.641,73	CO 64.633,07	
	PL 703.025	PL 703.025	PL 0	
GL 12, GL19	TR 209	TR 170	TR 39	0,106
	CO 233.841	CO 215.623	CO 18.218	
	PL 896.246	PL 900.456	PL 4.210	

Tabla 5 Resultados de las iteraciones del modelo de fusión

En esta tabla se muestran en la columna $(\sum_{r \in R} x_{ir}, \sum_{r \in R} y_{kr})$ el volumen de entradas y salidas resultante de agregar todas las DMUs implicadas en la fusión. En la columna $(\hat{x}_{iR}, \hat{y}_{kR})$ se muestra el valor que adquiere la DMU resultante de la agregación al proyectarse en la frontera eficiente mediante la modificación de sus variables originales según las holguras indicadas en la columna (h_{iR}^-, h_{kR}^+) . Por último, la columna SBI_R muestra la medida de la ineficiencia de la DMU resultante de la fusión.

DMU	SBI_R^{LE}
GL 1, GL 3, GL5, GL 14, GL16	0,110
GL 7, GL 9	0,044
GL 12, GL1 9	0,027

Tabla 6 Valor de SBI_R^{LE} de cada fusión

En la tabla anterior se muestran las diferentes SBI_R^{LE} de cada fusión que resultan de agregar las SBI_r de cada unidad por separado.

R	SBI_R	SBI_R^{LE}	SBI_R^*
GL 1, GL 3, GL5, GL 14, GL16	0,656	0,110	0,546
GL 7, GL 9	0,176	0,044	0,132
GL 12, GL19	0,106	0,027	0,079

Tabla 7 Valores de SBI_R , SBI_R^{LE} y SBI_R^* de cada fusión

Esta última tabla muestra el cálculo de la SBI_R^* de cada fusión. Como puede observarse, al ser todas las $SBI_R^* > 0$ todas las fusiones son ventajosas.

4.3.4 Conclusiones obtenidas del modelo de fusiones de Lozano y Adenso-Díaz (2020)

Al aplicar el modelo se han producido tres fusiones distintas, la primera compuesta por cinco DMUs mientras que la segunda y tercera están compuestas por dos DMUs. En el primer conjunto a fusionar, las DMUs que intervienen son de pequeño y mediano tamaño. Se va a utilizar únicamente el tamaño del rebaño como indicador del tamaño de la DMU ya que el orden de magnitud de las variables costes operativos y producción de leche están estrechamente relacionados con esta variable. Por lo tanto, viendo el tamaño del ganado de las DMUs que participan en dicha fusión $DMU_1 = 74$, $DMU_3 = 50$, $DMU_5 = 55$, $DMU_{14} = 63$, $DMU_{16} = 90$, puede verse que son de pequeño tamaño comparado con la de mayor que es 170. La fusión de todas las granjas lleva a un tamaño de rebaño de 332 vacas que tras introducir los cambios especificados en las holguras que es de 168 se reduce a 164. El resto de las variables pasan de un valor de 409.052,05 unidades monetarias de costes operativos tras agregar las DMUs, a un valor de 198.290,08 cuando se proyecta en la frontera eficiente llevado por las holguras cuyo valor es 210.761,96. Respecto a la producción de leche al agregar las unidades vale 847.949,3 y tras aplicar las holguras de 2.421,7 se llega a un objetivo de 850.371 litros. De las GL que participan en la fusión, únicamente la DMU_3 era eficiente. Se puede observar como aquellas fusiones en las que los integrantes son de menor tamaño, están compuestas por mayor cantidad de DMUs y los valores que adquieren las holguras son más elevados.

Numéricamente se puede comprobar cómo esta fusión implica beneficio económico. Suponiendo que cada litro de leche se vende a un precio de una unidad monetaria y que los costes operativos son los únicos que influyen,

se calcula el beneficio medio de las seis empresas aplicando los cambios en los volúmenes de las variables que nos aporta el método SBI y el modelo de fusión de empresas.

$$Beneficio_{SBI} = \frac{\sum_{r \in R} (y_{PLr} - x_{OCr})}{5} = \frac{855.858,4 - 384.444,15}{5} = 94.282,85$$

$$Beneficio_{Fusión} = \frac{y_{PLR} - x_{COR}}{5} = \frac{850.371 - 198.290,09}{5} = 130.416,18$$

$Beneficio_{Fusión}$ es mayor que $Beneficio_{SBI}$ lo que implica que de media las DMUs que se han fusionado han visto incrementado su beneficio en 36.133,33 unidades monetarias más que si hubieran aplicado modificaciones sin fusionar las DMUs.

La segunda fusión corresponde a la que implica a las DMU_7 y DMU_9 , ambas DMUs tienen un tamaño mediano, ya que en caso de la DMU_7 el ganado está compuesto por 97 vacas y en caso de la DMU_9 está compuesto por 88. En este caso ninguna de las dos unidades era eficiente. Al producirse la fusión y agregarse las distintas variables se llega a los siguientes valores $x_{TR}=185$ $x_{CO}=213.274,8$ $y_{PL}=703.025$ estos valores producen un resultado ineficiente por lo que tras aplicar las holguras $h_{TR}^- = 39$ $h_{CO}^- = 64.633,07$ $h_{PL}^+ = 0$ se llegan a los valores objetivos proyectados en la frontera eficiente de $\hat{x}_{TR} = 146$ $\hat{x}_{CO} = 148.641,73$ $\hat{y}_{PL} = 703.025$.

Al igual que se ha hecho con el primer conjunto a fusionar se va a comprobar el aumento de la eficiencia como un aumento del posible beneficio económico.

$$Beneficio_{SBI} = \frac{\sum_{r \in R} (y_{PLr} - x_{OCr})}{2} = \frac{704.412,94 - 197.881,7}{2} = 253.265,63$$

$$Beneficio_{Fusión} = \frac{y_{PLR} - x_{COR}}{2} = \frac{703.025 - 148.641,73}{2} = 277.191,64$$

Se puede observar como el $Beneficio_{Fusión}$ es mayor que el $Beneficio_{SBI}$ por lo que la fusión reporta beneficios de eficiencia y por tanto económicos.

La tercera fusión que surge del modelo implica a las DMU_{12} y DMU_{19} , ambas tienen un tamaño mediano, aunque superior a las DMUs implicadas en la fusión anterior, en este caso la DMU_{12} contaba con 102 vacas y la DMU_{19} con 111. La DMU_{12} es eficiente según los resultados del SBI. Agregando las variables de entrada y salida para realizar la fusión se llega a unos valores de $x_{TR} = 209$ $x_{CO} = 233.841$ $y_{PL} = 896.246$ aplicando las holguras cuyos valores son $h_{TR}^- = 39$ $h_{CO}^- = 18.218$ $h_{PL}^+ = 4.210$ se llega a los valores proyectados en la frontera eficiente de $\hat{x}_{TR} = 146$ $\hat{x}_{CO} = 148.641,73$ $\hat{y}_{PL} = 703.025$ que son los objetivos. Para comprobar el interés de esta fusión desde el punto de vista económico se calculan los beneficios.

$$Beneficio_{SBI} = \frac{\sum_{r \in R} (y_{PLr} - x_{OCr})}{2} = \frac{896.907,86 - 221.358,9}{2} = 337.774,48$$

$$Beneficio_{Fusión} = \frac{y_{PLR} - x_{COR}}{2} = \frac{900.456 - 215.623}{2} = 342.416,5$$

Como ocurría en las anteriores fusiones $Beneficio_{Fusión}$ vuelve a ser superior a $Beneficio_{SBI}$ por lo que resultaría conveniente la fusión.

De este beneficio económico también es posible extraer cuanto mejora aporta la realización de la fusión respecto a no realizarla y aplicar mejoras a cada DMU individualmente. Esta mejora puede ser medida como $Beneficio_{Fusión} - Beneficio_{SBI}$ dando para la primera fusión un valor de 36.133,33 para la segunda 23.926,01 y la tercera 4.642,02. Se puede observar cómo es la primera fusión la que tiene un mayor reporte de beneficio, este beneficio va disminuyendo, siendo la tercera fusión la que menos reporta.

Las DMUs que no han entrado a formar parte de ninguna fusión, es decir, DMU_2 DMU_4 DMU_6 DMU_8 DMU_{10} DMU_{11} DMU_{13} DMU_{15} DMU_{17} DMU_{18} DMU_{20} adoptarán las mejoras propuestas por el modelo SBI de tal manera que cada una adquiere la eficiencia de manera individual.

Con los resultados obtenidos al aplicar el modelo de fusión Lozano y Adenso-Díaz (2020) se generan tres fusiones. Fusión1 compuesta por DMU_1 DMU_3 DMU_5 DMU_{14} y DMU_{16} , Fusión2 compuesta por DMU_7 y DMU_9 y Fusión3 compuesta por DMU_{12} y DMU_{19} . A estas fusiones que surgen de agregar cada una de las variables de entrada y salida de las DMUs que las componen se le aplican las variaciones indicadas por las holguras para alcanzar su valor objetivo (target). Por lo que, tras producirse, cada fusión es tratada como una nueva DMU. A las DMUs que no han entrado a formar parte de ninguna fusión se le aplican las mejoras obtenidas del modelo SBI y que hacen que cada unidad llegue a su target de manera individual. De esta manera todas las entidades del problema llegarán a su valor objetivo. En la siguiente tabla se muestra el tamaño de cada una de las DMUs que se han obtenido tras aplicar las variaciones determinadas por el modelo SBI y el modelo de fusión. El tamaño de cada DMU se determinará mediante el tamaño del rebaño.

DMU	$\hat{x}_{TR,r}$
FUSIÓN 1	164
FUSIÓN 2	146
FUSIÓN 3	170
DMU 2	109
DMU 4	144
DMU 6	153
DMU 8	119
DMU 10	153
DMU 11	146
DMU 13	130
DMU 15	139
DMU 17	146
DMU 18	170
DMU 20	111

Tabla 8 Tamaño de las DMUs que componen el problema tras aplicar el método de fusión

Este tamaño, representado por los targets de cada una de las DMUs que componen el problema (es decir, las tres fusiones y las DMUs que no han formado parte de ninguna fusión) se representan gráficamente mediante el siguiente gráfico de barras.

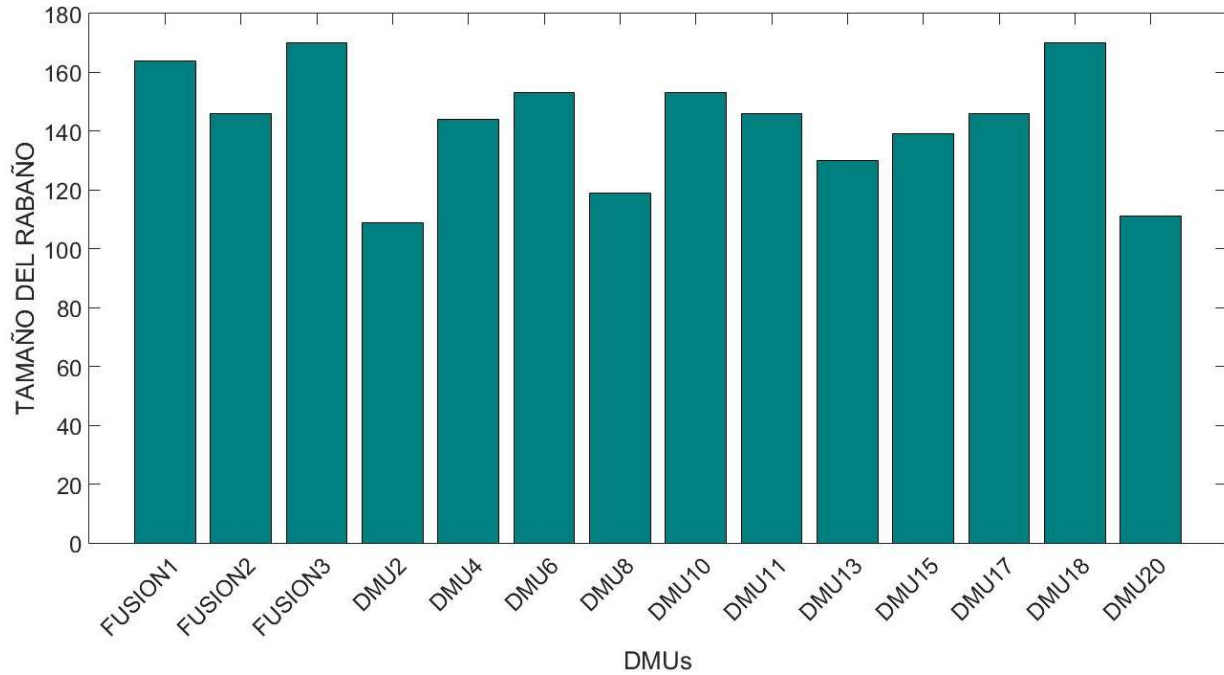


Figura 12 Tamaño de las DMUs

Como puede verse el modelo ha fusionado las granjas de menor tamaño entre ellas de manera que como resultado se ha generado un conjunto de granjas las cuales tienen un tamaño muy similar entre sí. Esta unión de granjas de pequeño tamaño se debe a las economías de escala existentes en el problema y que hacen que conforme mayor es el tamaño del rebaño, menos cuesta mantenerlo económicamente y mayor rendimiento se le puede sacar a la producción de leche.

Respecto al efecto que cada holgura tiene sobre cada DMU resultado de la fusión se detalla en la siguiente tabla, para poder compararlas entre sí se ha calculado la variación porcentual relativa de cada entrada y salida respecto a la cantidad con la que trabajaba la DMUs fusionadas originalmente. El cálculo y el razonamiento es igual al realizado en el SBI

DMU	$\frac{h_{TRr}^-}{\sum_{r \in R} x_{TRr}}$ (%)	$\frac{h_{CO r}^-}{\sum_{r \in R} x_{CO r}}$ (%)	$\frac{h_{PLr}^+}{\sum_{r \in R} y_{PLr}}$ (%)
FUSIÓN 1	50,602	51,524	0,286
FUSIÓN 2	21,081	30,305	0
FUSIÓN 3	18,660	7,791	0,470

Tabla 9 Variación porcentual de las entradas y salidas tras las fusiones

En la siguiente imagen se puede ver gráficamente la variación porcentual de las entradas y salidas que se produce en cada DMU tras la fusión.

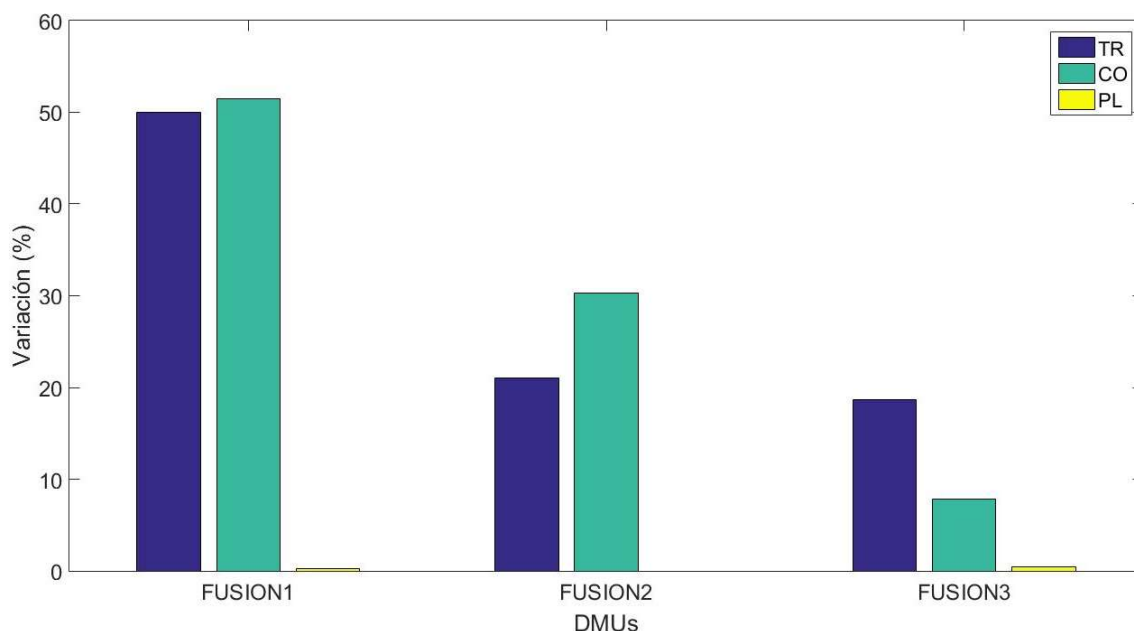


Figura 13 Variación porcentual de entradas y salidas tras aplicar el modelo de fusión

Puede verse como la entidad que ha necesitado más modificaciones tras la fusión ha sido la que surge de la primera fusión, ya que era la más ineficiente. A medida que se han ido realizando más iteraciones el valor de las holguras ha ido disminuyendo. Las holguras aplicadas en la segunda fusión han sido inferiores a las aplicadas en la primera y las holguras aplicadas en la tercera fusión han sido inferiores a las aplicadas en la segunda, esto es debido a que el modelo ha comenzado formando la fusión más ventajosa y en posteriores iteraciones ha buscado la fusión más ventajosa posible con las entidades restantes. Los cambios en el volumen de las variables han afectado sobre todo a las variables de entrada tamaño del rebaño y costes operativos, mientras que la producción de leche apenas se ha visto modificada.

De igual manera que se ha analizado el efecto que cada holgura tiene sobre las cantidades de las DMUs fusionadas, es conveniente analizar de donde proviene el valor de las modificaciones de las cantidades de entrada y salida realizada por las holguras. Como se ha mencionado anteriormente dicha mejora puede producirse debido al aprendizaje o al efecto de la fusión pura. En la siguiente imagen se muestra el valor que tiene el SBI en cada fusión y se descompone en efecto de fusión pura y aprendizaje.

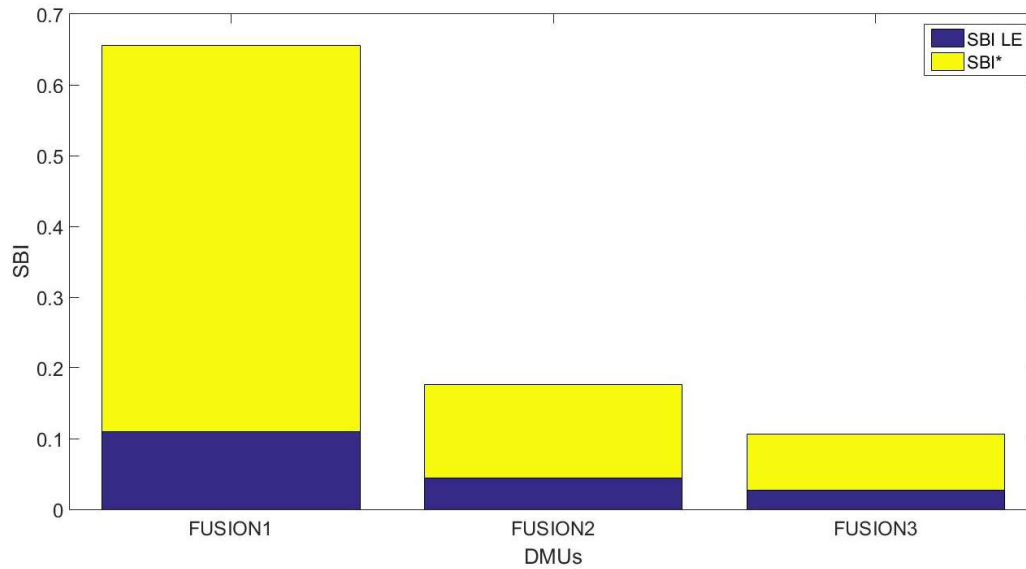


Figura 14 Valores de SBI_R^* y SBI_R^{LE}

Como se muestra en la imagen, la fusión 1 es la que más valor de SBI_R presenta, este valor ha ido decayendo conforme se han realizado las iteraciones. Esto se debe a que el modelo busca realizar en primer lugar las fusiones más ventajosas y estas son aquellas que presentan un mayor SBI_R . Así la fusión 2 tiene un valor de SBI_R menor que la fusión 1 y la fusión 3 a su vez menor que la fusión 2. Se puede comprobar como el efecto de la fusión en los tres casos es bastante superior al de aprendizaje, lo que indica que las tres fusiones son ventajosas. En el caso tanto de la primera como la tercera fusión el reducido valor de SBI_R^{LE} se debe a la existencia de unidades eficientes entre las entidades que componen la fusión desde el punto de vista SBI_r , en la segunda fusión, aunque ambas DMUs son ineficientes, el valor de SBI_r es tan reducido que implica que al agregarlos de como resultado un SBI_R^{LE} pequeño, lo que hace que el efecto del SBI_R^* sea mucho mayor en comparación en el SBI_R que el provocado por SBI_R^{LE} . Al igual que ocurre con SBI_R se puede observar como el efecto de SBI_R^* va disminuyendo con cada iteración.

4.4 PLANTEAMIENTO DE RESTRICCIONES ADICIONALES AL PROBLEMA

El problema propuesto anteriormente es un problema ideal, en el que todas las DMUs pueden fusionarse unas con otras y no existe ningún tipo de preferencia con respecto a las DMUs que se quieren que se fusionen. Sin embargo, en la vida real esto no es así ya que, por limitaciones geográficas, por ejemplo, algunas DMUs no pueden fusionarse, o por razones de afinidad se prioriza la unión de dos DMUs frente a otras. Al modelo de fusión de Lozano y Adenso-Díaz (2020) es posible mediante la inserción de una serie de restricciones adaptarlo a las condiciones anteriores acercándolo así a un escenario real.

4.4.1 Restricciones de incompatibilidad

Estas restricciones se incluyen en el modelo cuando, debido a las características particulares de dos o varias DMUs, resulta imposible su inclusión en una misma fusión, es por ello por lo que debe imponerse una restricción de manera que el modelo no genere ningún conjunto que contenga a ambas al mismo tiempo. Esta imposibilidad de fusión puede deberse, en el ejemplo concreto de las granjas de leche, a la existencia de barreras físicas en el terreno que imposibiliten la unificación.

Para añadir esta condición de incompatibilidad en el modelo de fusión Lozano y Adenso-Díaz (2020) se introduce la siguiente restricción.

$$\delta_{r'} + \delta_{r''} \leq 1$$

Esta restricción impone que, si la variable binaria $\delta_{r'}$ adquiere el valor 1, la variable $\delta_{r''}$ tenga que ser igual a 0 y viceversa.

En el ejemplo de las granjas lecheras, si la unión de las granjas GL1 y GL16 fuera incompatible, habría que incluir al modelo la restricción $\delta_1 + \delta_{16} \leq 1$ dando lugar a los siguientes resultados.

R	$(\sum_{r \in R} x_{ir}, \sum_{r \in R} y_{kr})$	$(\hat{x}_{iR}, \hat{y}_{kR})$	(h_{iR}^-, h_{kR}^+)	SBI_R
GL 1, GL 3, GL5, GL 9, GL14	TR 330	TR 163	TR 167	0,629
	CO 389.361,20	CO 195.401,27	CO 193.959,94	
	PL 837.929,30	PL 842.023,50	PL 4.094,20	

Tabla 10 Resultados del modelo de fusión tras aplicar restricción de incompatibilidad

R	SBI_R	SBI_R^{LE}	SBI_R^*
GL 1, GL 3, GL5, GL 9, GL14	0,629	0,081	0,548

Tabla 11 Valores de SBI_R , SBI_R^{LE} y SBI_R^* tras aplicar restricción de incompatibilidad

Puede verse como al imponer la restricción la DMU_{16} que contaba con un tamaño de rebaño de 90 vacas ha dejado de formar parte del conjunto y se ha introducido la DMU_9 cuyo tamaño de rebaño era de 88. La DMU_9 entraba a formar parte de la fusión que surgía de la segunda iteración en el modelo sin restricciones, por lo que el modelo al no poder introducir a la DMU_{16} , ha optado por introducir a la siguiente DMU que reporta más ventaja desde el punto de vista de la eficiencia y tiene un tamaño similar. Al haber impuesto esta restricción el valor del SBI_R se ha visto reducido de 0,656 en el problema sin restricción a 0,629 con la restricción impuesta.

4.4.2 Restricciones de inclusión forzada.

Esta restricción se emplea cuando se tiene una DMU específica y lo que se pretende es encontrar cuales son las unidades que pueden fusionarse con esa DMU establecida para mejorar la eficiencia.

La restricción que obliga a la pertenencia forzada es:

$$\delta_{r'} = 1$$

Esta restricción fuerza a que la variable binaria $\delta_{r'}$ adquiera el valor 1.

A continuación, se procede a incluir esta restricción en el problema de las granjas lecheras de manera que se pretende encontrar una granja que pueda fusionarse con la DMU_7 para lograr así un aumento de la eficiencia. La restricción que se tiene que introducir en el modelo es $\delta_7 = 1$. Al resolver el problema se obtienen los siguientes resultados.

R	$(\sum_{r \in R} x_{ir}, \sum_{r \in R} y_{kr})$	$(\hat{x}_{iR}, \hat{y}_{kR})$	(h_{iR}^-, h_{kR}^+)	SBI_R
GL 3, GL5, GL7, GL14	TR 265	TR 153	TR 112	0,481
	CO 336.471,20	CO 167.313,61	CO 169.157,59	
	PL 759.539,30	PL 759.539,30	PL 0	

Tabla 12 Resultados del modelo de fusión tras aplicar restricción de inclusión forzada

R	SBI_R	SBI_R^{LE}	SBI_R^*
GL 3, GL5, GL7, GL14	0,481	0,061	0,420

Tabla 13 Valores de SBI_R , SBI_R^{LE} y SBI_R^* tras aplicar restricción de inclusión forzada

Las DMUs que se han fusionado con la DMU_7 han sido la DMU_3 , DMU_5 , DMU_{14} consiguiéndose así una SBI_R de 0,481. Al incluir esta restricción se ha disminuido dicho valor de SBI_R ya que incluir la DMU impuesta implica que no se puede realizar la fusión más ventajosa. Puede verse como introducir a la DMU_7 implica sacar de la fusión a la DMU_1 y la DMU_{16} que si forman parte de la unión más beneficiosa.

4.4.3 Restricciones de pertenencia a un determinado conjunto.

En algunas ocasiones, aunque las DMUs que componen la totalidad del problema se dediquen a lo mismo, es decir que con las mismas entradas produzcan las mismas salidas, es posible que no todas trabajen de la misma manera. En estos casos podría ser recomendable fusionar de entre todas las unidades aquellas con características similares. En el caso de la granja lechera podría ocurrir que cada granja tiene una raza de vaca lechera diferente, por lo tanto, a la hora de la fusión podría ser interesante realizar uniones de granjas cuyas razas de vacas sean las mismas. Para ello la restricción que hay que imponer es:

$$\delta_r = 0 \quad \forall r \notin A$$

Siendo A el conjunto formado por todas las DMUs que pueden formar parte de la fusión.

Para ilustrar cual sería el efecto causado por la inclusión de esta restricción en el modelo, se determina un conjunto A formado por DMU_1 DMU_4 DMU_6 DMU_9 DMU_{13} DMU_{15} DMU_{16} DMU_{17} DMU_{18} este conjunto está compuesto por granjas que tienen la misma raza de vaca. De estas DMUs similares se pretende encontrar la fusión idónea para aumentar la eficiencia. La siguiente tabla muestra el resultado de aplicar el modelo.

R	$(\sum_{r \in R} x_{ir}, \sum_{r \in R} y_{kr})$	$(\hat{x}_{iR}, \hat{y}_{kR})$	(h_{iR}^-, h_{kR}^+)	SBI_R
GL 1, GL 9, GL16	TR 252 CO 285.855,65 PL 791.435	TR 157 CO 178.068,35 PL 791.938,50	TR 95 CO 107.787,30 PL 503,50	0,353

Tabla 14 Resultados del modelo de fusión tras aplicar restricción de pertenencia a conjunto

R	SBI_R	SBI_R^{LE}	SBI_R^*
GL 1, GL 9, GL16	0,353	0,093	0,260

Tabla 15 Valores de SBI_R SBI_R^{LE} y SBI_R^* tras aplicar restricción de pertenencia a conjunto

Se puede observar cómo al reducir el número de DMUs que pueden intervenir en las combinaciones, la eficiencia ganada baja, ya que, aunque existen mejores combinaciones al no pertenecer al mismo grupo no se pueden producir. Las DMUs que se han unido en esta fusión han sido las de menor tamaño que pertenecían al conjunto, en el caso de DMU_1 DMU_{16} ya entraban a formar parte de la fusión en el modelo sin restricciones, la DMU_9 ha entrado a formar parte de la fusión tras aplicar la restricción ya que DMUs de menor tamaño como DMU_3 no pueden pertenecer por lo que la DMU_9 que antes era de tamaño medio se ha convertido en una de las DMUs de menos tamaño.

4.4.4 Restricciones de límite superior.

En muchas ocasiones es necesario establecer límites sobre los elementos que intervienen en un problema. Por ejemplo, se puede limitar el número máximo de unidades que intervienen en una fusión, o también es posible limitar el tamaño máximo que adquieren las entradas y las salidas después de que se produzca una fusión.

Para incluir un límite de DMUs que intervienen en una fusión, se incluye en el modelo la siguiente expresión:

$$\sum_{r=1}^n \delta_r \leq N$$

En el caso de incluirse un límite la cantidad de algunas de las variables de entrada o salida, se utilizaría la siguiente expresión.

$$\sum_{r \in R} x_{ir} \leq N$$

En ambos casos la N establece la cota superior.

Para ejemplificar esta restricción, se resolverá el problema de las granjas productoras de leche con la condición de que las fusiones no pueden tener más de 3 integrantes. Para ello se le añade al modelo de fusión de Lozano y Adenso-Díaz (2020) la restricción $\sum_{r=1}^{20} \delta_r \leq 3$. Una vez aplicado el modelo se obtienen los siguientes resultados.

R	$(\sum_{r \in R} x_{ir}, \sum_{r \in R} y_{kr})$	$(\hat{x}_{iR}, \hat{y}_{kR})$	(h_{iR}^-, h_{kR}^+)	SBI_R
GL 1, GL 14, GL16	TR 227	TR 133	TR 94	0,394
	CO 268.624,05	CO 132.935,02	CO 135.689,03	
	PL 621.548	PL 621.548	PL 0	

Tabla 16 Resultados del modelo de fusión tras aplicar restricción de cota superior

R	SBI_R	SBI_R^{LE}	SBI_R^*
GL 1, GL 14, GL16	0,394	0,100	0,294

Tabla 17 Valores de SBI_R , SBI_R^{LE} y SBI_R^* tras aplicar restricción de cota superior

Como se puede observar, en la fusión se han visto involucradas la DMU_1 , la DMU_{14} y la DMU_{16} , estas DMUs son las que tienen un valor más alto de las holguras al aplicar el modelo SBI, por lo que su entrada en la fusión reporta más beneficios que la DMU_3 o la DMU_5 . Al igual que ocurre en los otros casos al imponer restricciones el valor de la eficiencia que es posible ganar con la fusión baja, por lo tanto, lo más conveniente será, siempre que sea posible, resolver el modelo sin restricciones en las fusiones ya que estas provocan un descenso del potencial de mejora de las DMUs.

5 CONCLUSIONES

Este documento se centra en el desarrollo del modelo de fusión de entidades productivas Lozano y Adenso-Díaz (2020). Dicho modelo identifica de entre un conjunto de DMUs cuáles son las fusiones más convenientes de manera que mediante las unificaciones producidas se aumente la eficiencia de las DMUs implicadas. El modelo puede aplicarse en diversas iteraciones para que una vez se ha encontrada una fusión ventajosa sea posible encontrar sucesivas unificaciones con las DMUs restantes. La primera iteración es la que determina la fusión más ventajosa y por tanto la que reporta una mayor mejora de la eficiencia. Esta mejora de la eficiencia que reporta la fusión va disminuyendo conforme se van realizando sucesivas iteraciones. El modelo de fusión Lozano y Adenso-Díaz (2020) es un modelo flexible que permite la inclusión de diversas restricciones utilizadas para amoldar al problema a las condiciones que lo envuelven. A diferencia de otros modelos en los que el número máximo de integrantes en cada fusión está definido de ante mano, otros en los que se busca qué unidades se fusionan con una unidad concreta previamente seleccionada u otros en los que no se busca encontrar las mejores fusiones, si no calcular la eficiencia de una unión preestablecida, este método selecciona para formar parte de la fusión aquellas DMUs pertenecientes a un conjunto sin número máximo de integrantes y sin ninguna DMU preestablecida de partida, de manera que se proporcione aquella unión que genera mayor eficiencia.

A parte de las DMUs que integran la fusión, este modelo permite determinar las ganancias de eficiencia que se obtienen al fusionar las unidades, así como determinar el valor de los cambios a realizar en las cantidades de las variables de entrada y salida tanto de las DMUs que no entran a formar parte de ninguna fusión, como de las nuevas DMUs que surgen de la fusión de otras entidades, estas variaciones se determinan mediante las holguras. Otra característica de este modelo es que proporciona el valor de la ganancia de eficiencia descompuesto en efecto de aprendizaje y efecto de fusión pura, permitiéndose así valorar si las fusiones que resultan son convenientes.

Para ilustrar el modelo se ha usado un problema de granjas productoras de leche. Al aplicar el modelo a este problema se han obtenido las fusiones más ventajosas y se ha comprobado como la primera iteración del modelo ha sido la que mayor mejora de la eficiencia ha producido, decayendo dicha mejora en las sucesivas iteraciones. Se ha podido observar como el modelo ha tendido en un primer momento a fusionar las unidades de menor tamaño para alcanzar la eficiencia, prosiguiendo con las de tamaño medio hasta llegar a un momento en el que tras haberse producido las fusiones factibles y las mejoras planteadas por el modelo los tamaños de las unidades han llegado a ser similares. Se puede notar como la fusión de unidades de menor tamaño es la que implica después una mayor variación de las entradas y salidas de la DMU ya fusionada para alcanzar la eficiencia, es decir se obtienen mayores valores de las holguras, es por ello por lo que se trata de la DMU que presenta una mayor mejora de la eficiencia y por tanto un valor de SBI_R mayor.

Tras haber estudiado el comportamiento del modelo bajo unas condiciones “ideales”, se han aplicado una serie de restricciones que pueden ser utilizadas en situaciones que pueden darse durante la aplicación del modelo. Se ha podido observar como la implementación de dichas restricciones conlleva un descenso de la eficiencia que las DMUs fusionadas pueden ganar ya que se puede impedir la fusión de las unidades más ventajosas.

Por tanto, como se ha podido observar este método es eficaz en la agrupación de DMUs y posterior regulación de las entradas y salidas a niveles óptimos, consiguiéndose así la máxima eficiencia posible en las DMUs que componen el conjunto.

REFERENCIAS

- [1] Bogetoft, P. and Wang, D., "Estimating the Potential Gains from Mergers", *Journal of Productivity Analysis*, 23 (2005) 145-171.
- [2] Wu, D.D., Zhou, Z. and Birge, J.R., "Estimation of potential gains from mergers in multiple periods: a comparison of stochastic frontier analysis and Data Envelopment Analysis", *Annals of Operations Research*, 186 (2011) 357-381.
- [3] Li, F., Liang, L., Li, Y. and Emrouznejad, A., "An alternative approach to decompose the potential gains from mergers", *Journal of the Operational Research Society*, (2019) (doi:10.1080/01605682.2017.1409867).
- [4] Lozano, S. and Villa, G., "DEA-based pre-merger planning tool", *Journal of the Operational Research Society*, 61 (2010) 1485-1497.
- [5] Lozano, S., "Using DEA to find the best partner for a horizontal cooperation", *Computers and Industrial Engineering*, 66 (2013) 286-292.
- [6] Zhu, Q., Whu, J., Chu, J., Amirteimoori, A. and Sun, J., "DEA-based models for best partner selection for merger", *RAIRO-Operations Research*, 51 (2017) 1345-1357.
- [7] Lozano, S. and Adenso-Diaz, B., "A DEA approach for merging dairy farms", Working paper (2020).
- [8] A. Charnes, W. Cooper y E. Rhodes "Measuring the efficiency of decision making units" *European Journal of Operational Research* vol 2 pp 44-429. 1978.
- [9] R. Banker, A. Charnes y W. Cooper, "Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis", *Management Science*, n°30, 1984.
- [10] Fukuyama, H. and Weber, W.L., "A directional slacks-based measure of technical inefficiency", *Socio-Economic Planning Sciences*, 43 (2009) 274-287.
- [11] M. Farrell, The measurement of productive efficiency *J. Royal stat. soc. series A (General)* 120 (1957) 253-290.
- [12] Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación, "Informe anual de indicadores agricultura, pesca y alimentación 2018".

Modelos LINGO

Modelo SBI

SETS:

DMU: SBI;

INPUTDIM:GX;

OUTPUTDIM:GY;

INPUTS(DMU,INPUTDIM):X, INPUTSLACK, INPUTTARGET;

OUTPUTS(DMU,OUTPUTDIM):Y,OUTPUTSLACK, OUTPUTTARGET;

DMU2(DMU,DMU):LAMBDA;

ENDSETS

DATA:

DMU=1..20;

INPUTDIM=1..2;

OUTPUTDIM=1..1;

X,Y,GX,GY=@OLE('C:\Users\alvaro\Desktop\MODELOSBI.xls');

@OLE('C:\Users\alvaro\Desktop\MODELOSBI.xls')=SBI,INPUTSLACK,OUTPUTSLACK,INPUTTARGET,OUTPUTTARGET;

ENDDATA

MAX=FO;

FO=@SUM(DMU(r):SBI(r));

@FOR(DMU(r):

 @FOR(INPUTDIM(I):

 @SUM(DMU(J):LAMBDA(J,r)*X(J,I))=INPUTTARGET(r,I);

 INPUTTARGET(r,I)=X(r,I)-INPUTSLACK(r,I);

);

 @FOR(OUTPUTDIM(K):

 @SUM(DMU(J):LAMBDA(J,r)*Y(J,K))=OUTPUTTARGET(r,K);

 OUTPUTTARGET(r,K)=Y(r,K)+OUTPUTSLACK(r,K);

);

SBI(r)=(@SUM(INPUTDIM(I):INPUTSLACK(r,I)/GX(I))+@SUM(OUTPUTDIM(K):OUTPUTSLACK(r,K)/GY(K)))/(@SIZE(INPUTDIM)+@SIZE(OUTPUTDIM));

 @SUM(DMU(J):LAMBDA(J,r))=1;

 @FOR(DMU(J):LAMBDA(J,r)>=0);

```

    @FOR (INPUTDIM(I) : INPUTSLACK(r, I) >=0);
    @FOR (OUTPUTDIM(K) : OUTPUTSLACK(r, K) >=0);
    @GIN (INPUTSLACK(r, 1));

);

```

Modelo fusión

SETS:

DMU : LAMBDA, DELTA;

INPUTDIM : GX, INPUTSLACK, INPUTTARGET, SUMINPUT;
 OUTPUTDIM : GY, OUTPUTSLACK, OUTPUTTARGET, SUMOUTPUT;

INPUTS (DMU, INPUTDIM) : X;
 OUTPUTS (DMU, OUTPUTDIM) : Y;

A : SBI;

ENDSETS

DATA:

DMU=1..20;
 INPUTDIM=1..2;
 OUTPUTDIM=1..1;
 A=1..1;

X, Y, GX, GY=@OLE('C:\Users\alvaro\Desktop\MODELOFUSION.xls');
 @OLE('C:\Users\alvaro\Desktop\MODELOFUSION.xls')=SBI, DELTA, SUMINPUT, SUMOUTPUT,
 INPUTSLACK, OUTPUTSLACK, INPUTTARGET, OUTPUTTARGET;

ENDDATA

MAX=FO;

FO=@SUM(A(R) : SBI(R));

@FOR(A(R) :

```

@FOR (INPUTDIM(I) :
    @SUM (DMU (J) : LAMBDA (J) *X (J, I) )=INPUTTARGET (I) ;
    INPUTTARGET (I) =@SUM (DMU (J) : DELTA (J) *X (J, I) ) -INPUTSLACK (I) ;
    SUMINPUT (I) =@SUM (DMU (J) : DELTA (J) *X (J, I) ) ;
);

```

```

@FOR (OUTPUTDIM(K) :
    @SUM (DMU (J) : LAMBDA (J) *Y (J, K) )=OUTPUTTARGET (K) ;
    OUTPUTTARGET (K) =@SUM (DMU (J) : DELTA (J) *Y (J, K) ) +OUTPUTSLACK (K) ;
    SUMOUTPUT (K) =@SUM (DMU (J) : DELTA (J) *Y (J, K) ) ;
);

```

SBI (R) = (@SUM (INPUTDIM (I) : INPUTSLACK (I) /GX (I)) +@SUM (OUTPUTDIM (K) : OUTPUTSLACK (K) /GY (K))) / (@SIZE (INPUTDIM) +@SIZE (OUTPUTDIM));

@SUM (DMU (J) : DELTA (J)) >=2;

```

@SUM (DMU (J) : LAMBDA (J) ) =1 ;
@FOR (DMU (J) : LAMBDA (J) >=0) ;
@FOR (INPUTDIM (I) : INPUTSLACK (I) >=0) ;
@FOR (OUTPUTDIM (K) : OUTPUTSLACK (K) >=0) ;
@GIN (INPUTSLACK (1) ) ;
@FOR (DMU (J) : @BIN (DELTA (J) ) ; ) ;

) ;

```

Restricciones

Segunda iteración

```

DELTA (1) =0 ;
DELTA (3) =0 ;
DELTA (5) =0 ;
DELTA (14) =0 ;
DELTA (16) =0 ;

```

Segunda iteración

```

DELTA (1) =0 ;
DELTA (3) =0 ;
DELTA (5) =0 ;
DELTA (14) =0 ;
DELTA (16) =0 ;
DELTA (7) =0 ;
DELTA (9) =0 ;

```

Restricción de incompatibilidad

```

DELTA (1) +DELTA (16) <=1 ;

```

Restricción de pertenencia forzada

```

DELTA (7) =1 ;

```

Restricción de límite superior

```

@SUM (DMU (J) : DELTA (J) ) <=3 ;

```

HOJA EXCEL ASOCIADA AL MODELO LINGO

En este anexo se muestran las hojas Excel empleadas para resolver los modelos LINGO del modelo SBI y del modelo fusión. En primer lugar, se han marcado los rangos de celdas de los que el modelo LINGO extrae los datos y en segundo lugar se han marcado los rangos de las celdas en los que el modelo LINGO vuelca los resultados obtenidos mediante la aplicación del modelo.

Modelo SBI

Extracción de datos de la hoja Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	DMU	X1	X2	Y	SLACK X1	SLACK X2	SLACK Y	SBI	TARGET X1	TARGET X2	TARGET Y	DMU
2	1	74	80674	200485								1
3	2	109	130528	500456								2
4	3	50	69512	110612								3
5	4	144	140513,7	683421								4
6	5	55	70916	115789,3								5
7	6	158	199523	756289								6
8	7	97	120529,4	412560								7
9	8	126	125678	540763								8
10	9	88	92745,4	290465								9
11	10	161	200415,3	757253								10
12	11	150	150790	700652								11
13	12	102	110320	445623								12
14	13	132	141520	600782								13
15	14	63	75513,8	120578								14
16	15	139	130418,1	620480								15
17	16	90	112436,25	300485								16
18	17	153	180479,8	699956								17
19	18	170	215623	900456								18
20	19	107	123521	450623								19
21	20	111	140520,9	520789								20
22	Vector G	170,00	215623,00	900456,00								

X es el nombre del rango de celdas de donde el modelo LINGO extrae los datos de entrada X1 (tamaño del rebaño) y X2 (costes operativos).

Y corresponde al rango de celdas de donde el modelo LINGO extrae los datos de las salidas producción de leche.

GX corresponde al rango de celdas de donde se extraen los valores del vector G que corresponde a las entradas, los cuales surgen de encontrar el máximo de cada columna X1 y X2.

GY corresponde al rango de celdas de donde se extraen los datos del vector G que corresponde a las salidas, estos datos surgen de calcular el máximo de la columna Y.

Volcado de resultados a la hoja Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	DMU	X1	X2	Y	SLACK X1	SLACK X2	SLACK Y	SBI	TARGET X1	TARGET X2	TARGET Y	DMU
2	1	74	80674	200485	10	175,230769	322,269231	0,01999803	64	80498,7692	200807,269	1
3	2	109	130528	500456	0	662,174357	0	0,0102366	109	129865,826	500456	2
4	3	50	69512	110612	0	0	0	0	50	69512	110612	3
5	4	144	140513,7	683421	0	0	0	0	144	140513,7	683421	4
6	5	55	70916	115789,3	4	619,230769	1265,21923	0,00926877	51	70296,7692	117054,519	5
7	6	158	199523	756289	5	33009,9269	2259,5	0,06167066	153	166513,073	758548,5	6
8	7	97	120529,4	412560	0	14133,2462	850,403846	0,0221635	97	106396,154	413410,404	7
9	8	126	125678	540763	7	3136,74048	1111,57143	0,01898609	119	122541,26	541874,571	8
10	9	88	92745,4	290465	10	1259,86154	537,538462	0,02175446	78	91485,5385	291002,538	9
11	10	161	200415,3	757253	8	33902,2269	1295,5	0,06857557	153	166513,073	758548,5	10
12	11	150	150790	700652	4	4065,58907	0	0,01412816	146	146724,411	700652	11
13	12	102	110320	445623	0	0	0	0	102	110320	445623	12
14	13	132	141520	600782	2	11070,8667	3373	0,02228474	130	130449,133	604155	13
15	14	63	75513,8	120578	11	4432,26154	2919,03846	0,02950107	52	71081,5385	123497,038	14
16	15	139	130418,1	620480	0	0	0	0	139	130418,1	620480	15
17	16	90	112436,25	300485	10	19381,1731	3402,57692	0,05082893	80	93055,0769	303887,577	16
18	17	153	180479,8	699956	7	34188,4615	160	0,06663694	146	146291,338	700116	17
19	18	170	215623	900456	0	0	0	0	170	215623	900456	18
20	19	107	123521	450623	4	12482,1024	661,857143	0,02738433	103	111038,898	451284,857	19
21	20	111	140520,9	520789	0	0	0	0	111	140520,9	520789	20
22	Vector G	170,00	215623,00	900456,00								

INPUTSLACK rango de celdas en las que el modelo LINGO vuelca los datos de las holguras que deben aplicarse a las variables de entrada.

OUTPUTSLACK rango de celdas en las que el modelo LINGO vuelca los datos de las holguras que deben aplicarse a las variables de salida.

SBI es el rango de celdas en las que el modelo LINGO vuelca los resultados del cálculo de la ineficiencia para cada una de las DMUs.

INPUTTARGET nombre del rango de celdas en las que se vuelcan los valores de las variables de entrada al proyectarse en la frontera eficiente para cada una de las DMUs.

OUTPUTTARGET rango de celdas en las que el modelo vuelca los valores de los objetivos de las variables de salida de cada una de las DMUs.

Modelo Fusión

Extracción de datos de la hoja Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	DMU	X1	X2	Y		SUMINPUT		SUMOUTPUT			DELTA	
2	1	74	80674	200485		X1	X2	Y				1
3	2	109	130528	500456								2
4	3	50	69512	110612								3
5	4	144	140513,7	683421		INPUTTARGET		OUTPUTTARGET				4
6	5	55	70916	115789,3		X1	X2	Y				5
7	6	158	199523	756289								6
8	7	97	120529,4	412560								7
9	8	126	125678	540763		INPUTSALCK		OUTPUTSLACK				8
10	9	88	92745,4	290465		X1	X2	Y				9
11	10	161	200415,3	757253								10
12	11	150	150790	700652								11
13	12	102	110320	445623		SBI						12
14	13	132	141520	600782								13
15	14	63	75513,8	120578								14
16	15	139	130418,1	620480								15
17	16	90	112436,25	300485								16
18	17	153	180479,8	699956								17
19	18	170	215623	900456								18
20	19	107	123521	450623								19
21	20	111	140520,9	520789								20
22	Vector G	170,00	215623,00	900456,00								

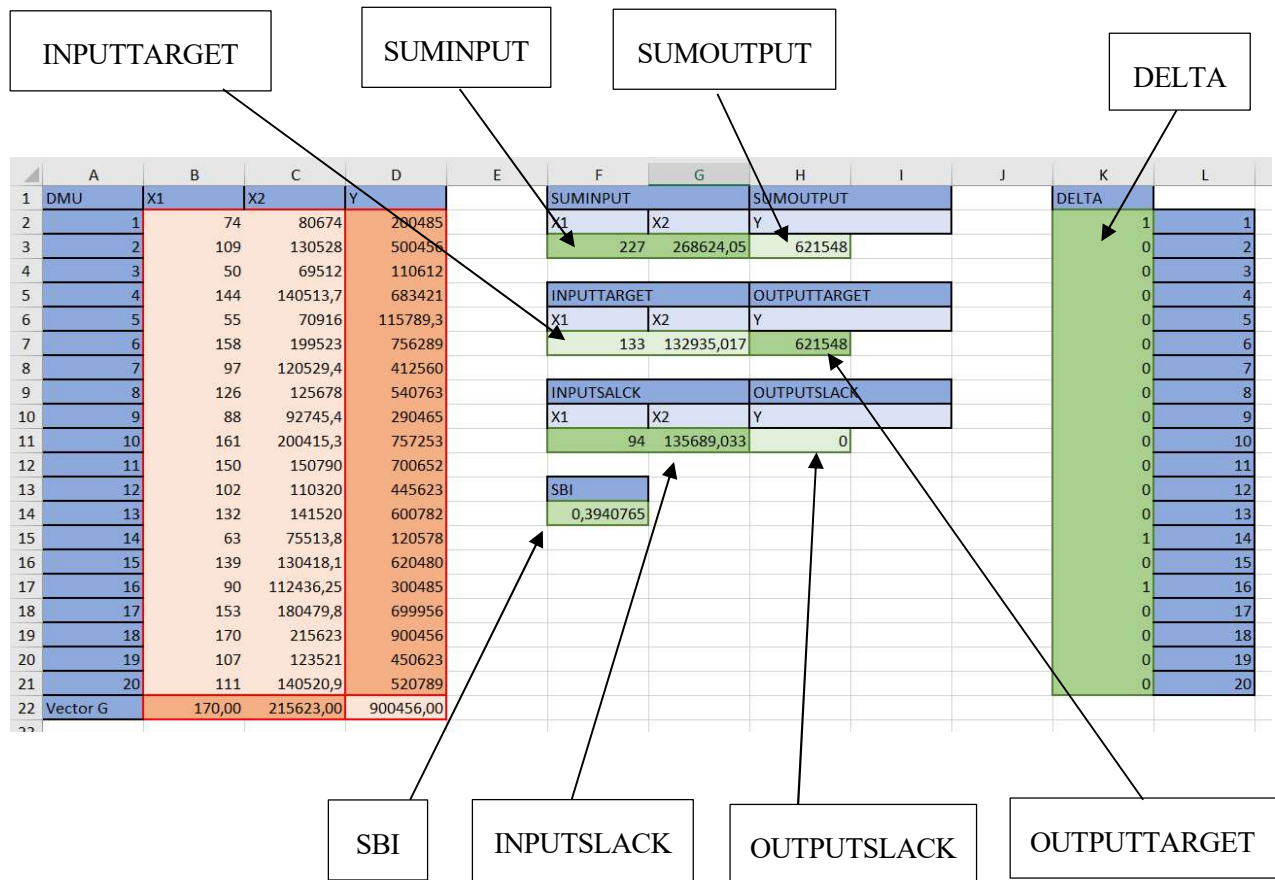
X es el nombre del rango de celdas de donde el modelo LINGO extrae los datos de entrada X1 (tamaño del rebaño) y X2 (costes operativos).

Y corresponde al rango de celdas de donde el modelo LINGO extrae los datos de las salidas producción de leche.

GX corresponde al rango de celdas de donde se extraen los valores del vector G correspondiente a las entradas, los cuales surgen de encontrar el máximo de cada columna X1 y X2.

GY corresponde al rango de celdas de donde se extraen los datos del vector G correspondientes a las salidas, estos datos surgen de calcular el máximo de la columna Y.

Volcado de resultados a la hoja Excel



- SBI es el rango de celdas en las que el modelo LINGO vuelca los resultados de la función objetivo del modelo.
- DELTA rango de celdas en el que se vuelcan los datos de la variable binaria que indica la pertenencia o no de la DMU a la fusión.
- SUMINPUT rango en el que se vuelcan la suma de las entradas de las DMUs que componen la fusión.
- SUMOUTPUT rango en el que vuelcan la suma de las salidas de las DMUs que componen la fusión.
- INPUTSLACK rango de celdas en las que el modelo LINGO vuelca los datos de las holguras que deben aplicarse al SUMINPUT surgido de la fusión para proyectarse en la frontera eficiente.
- OUTPUTSLACK rango de celdas en las que el modelo LINGO vuelca los datos de las holguras que deben aplicarse al SUMOUTPUT de la fusión para proyectarse en la frontera eficiente.
- INPUTTARGET nombre del rango de celdas en las que se vuelcan los valores de las variables de entrada al proyectarse en la frontera eficiente.
- OUTPUTTARGET rango de celdas en las que el modelo vuelca los valores las variables de salida al proyectarse en la frontera eficiente.