

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería de las Tecnologías Industriales

Juegos cooperativos y su aplicación al tratamiento  
del agua.

Autor: José Luis Gutiérrez Corrales

Tutor: Manuel Ordóñez Sánchez

**Dpto. Matemática Aplicada II**  
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**  
**Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2020





Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería de las Tecnologías Industriales

# **Juegos cooperativos y su aplicación al tratamiento del agua.**

Autor:

José Luis Gutiérrez Corrales

Tutor:

Manuel Ordóñez Sánchez

Dpto. de Matemática Aplicada II  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla  
Sevilla, 2020



Trabajo Fin de Grado: Juegos cooperativos y su aplicación al tratamiento del agua.

Autor: José Luis Gutiérrez Corrales

Tutor: Manuel Ordóñez Sánchez

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2020

El Secretario del Tribunal

*A mi familia*

*A mis amigos*

*A mi país*



# Agradecimientos

---

Este trabajo en sí es una forma de agradecer los cinco años de mi vida vividos en esta Escuela. Ha sido una etapa mucho trabajo y esfuerzo, pero también, de muchos momentos felices y grandes sensaciones. Por ello, quiero enfocar mis sinceras palabras de agradecimiento a cinco grupos de personas.

En primer lugar, mi familia. En ella, he encontrado el apoyo y la fortaleza cuando me faltaban las fuerzas, cuando la hora del reloj marcaba las cuatro de la mañana y cuando en segundo de carrera me dejé llevar demasiado por el ocio propio de la juventud. Muy especialmente a mis cuatro abuelos que, algunos desde el cielo y otros a mi lado, con tanta gratificación y cariño recompensan mi trabajo.

En segundo lugar, a mis amigos del colegio. Los cuales durante más de veinte años han estado ahí cuando más los he necesitado. Cada llamada, cada conversación, cada reunión con ellos... han hecho de mí una persona mucho mejor.

En tercer lugar, a mis buenos profesores. La presencia de la palabra “buenos” es debido a que, en la carrera, como en la vida, hay personas que se esfuerzan por enseñar, mientras que hay otras a las que les es muy difícil porque creen saberlo todo. Muchos nombres de buenos profesores me vienen a la mente: Ramón Risco, Alejandro Santana, Ángel Luis Trigo, y Manuel Ordóñez, este último tutor del presente TFG. Gracias Manuel, por tu actitud siempre tan cercana en la que he encontrado un foco de inspiración para aprender y resolver mis dudas.

A mis amigos de la carrera, por supuesto. Con ellos he aprendido que no todo en la vida es estudiar. Tantos buenos momentos post suspensos, tantas risas y tantas cervezas que han conseguido que cada día fuese a la Escuela a pasarlo en grande.

Por último, y como miembro del Consejo de Gobierno, al equipo de gobierno de la Universidad de Sevilla. En concreto a D. Miguel Ángel Castro Arroyo y a Dña. Pastora Revuelta Marchena, por haber encontrado en ellos el orgullo que ahora mismo siento por formar parte de esta Universidad.

*José Luis Gutiérrez Corrales*

*Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sevilla*

*Sevilla, 2020*



# Resumen

---

Hoy en día vivimos en un mundo en el que estamos constantemente tomando decisiones en todos los aspectos y campos de nuestra vida. Por ejemplo, en nuestra propia Escuela de Ingeniería nos surgen preguntas como: ¿Qué asignaturas me prepararé este cuatrimestre? ¿A qué clases asistiré?... En nuestras prácticas al final de la carrera: ¿Qué empresa seleccionaré? O, también en nuestro entorno más personal: ¿Qué plan de todos los que tengo para hoy me apetece hacer?

Es sorprendente caer en la cuenta de cómo estas decisiones que cada día tomamos pueden cambiar por completo debido a pequeñas cosas, pequeños factores que nos hacen escoger entre unos planes u otros. Como pequeños detalles, que a veces no dependen de nosotros mismos (otras tantas sí), pueden hacernos decantarnos por distintos caminos (cada uno de ellos con resultados diferentes).

Uno de los grandes campos en la toma de decisiones se encuentra en el ocio. Una sociedad tan modernizada como la nuestra enfoca la atención en encontrar nuevas formas de divertirse y entretenerse para conseguir olvidar (al menos durante un tiempo) los problemas existentes en nuestro alrededor. Lo que ha provocado que el interés por los “juegos” se encuentre actualmente en pleno auge.

Me permitirá hacerle una pregunta: ¿Quién no ha jugado alguna vez a juegos de mesa como el póker, a juegos deportivos como el tenis, o a algún juego de ordenador como League of Legends? No es complicado caer en la cuenta de que estos tres juegos tienen algo en común... En ellos, cada jugador busca obtener el mejor resultado posible, pero deberá ser consciente de que, si el jugador de póker posee una mano mejor, el jugador rival en tenis nos engaña con una dejada o el rival online nos ataca con una habilidad inesperada, nuestro resultado podría ser un desastre.

Es decir, en la vida existen situaciones en las que no solo podemos centrar los esfuerzos en nuestras acciones, sino también, estar atentos a como los demás pueden actuar y qué impacto tienen sus acciones sobre las nuestras. Es justo aquí, donde nace la Teoría de Juegos. Escoger las decisiones más convenientes para obtener el mejor resultado cumpliendo con las reglas de un determinado juego y teniendo en cuenta que las decisiones de otros también influyen en nuestro resultado obtenido.

Desde la creación de esta área de las matemáticas allá por 1928, se ha tratado de aplicar esta herramienta para dar respuesta a muchos de los problemas que encontramos en nuestra sociedad. Se pueden describir una gran multitud de aplicaciones en diferentes campos, principalmente en: economía, ciencias políticas, biología evolutiva o incluso filosofía.

Este trabajo busca precisamente profundizar en esta herramienta, utilizándola de base para analizar uno de los mayores problemas que debe afrontar el ser humano para garantizar su supervivencia en el planeta: la gestión del suministro de agua potable.

Lo lógico ahora es preguntarse ¿Puede entonces la Teoría de juegos dar respuesta a la problemática asociada al recurso natural más necesario de la humanidad? Pues sí, de hecho, la respuesta radica en que la Teoría de Juegos optimiza y mitiga la complejidad asociada al análisis de la captación y suministro de agua. Mediante dicho análisis, conseguimos agrupar y simplificar los infinitos factores que influyen en cada decisión por medio de acuerdos de colaboración con “jugadores externos”, siendo en este tipo de escenarios donde interesa aplicar la Teoría de Juegos.

Por medio de ella, en este trabajo trataré de hacer comprender al lector las dos visiones que se pueden adoptar a la hora de buscar soluciones en estos escenarios complejos relacionados con el suministro de aguas urbanas: una actitud de cooperación o, por el contrario, una actitud basada en el rechazo ante cualquier comunicación o acuerdo posible.



# Abstract

---

Nowadays we live in a world in which we are constantly taking decisions that affect our lives. Take our own School of Engineering, where the following questions inevitably are usually asked: which subjects will I pass this year? which ones am I going to attend? As well as in our final course internships: which company will I apply to? Or in our personal surroundings: of all the possible plans, which one do I really want to make today?

Sometimes, it is surprising to realize how these decisions (that we make every day) can change completely due to small things, small factors that make us choose between different plans. Small details, that sometimes do not depend on us (many others do), which can make us take different paths, each one with different outcomes.

Leisure is one of the biggest areas in which to consider decision-making. Our modern society seeks to develop new ways to have fun in order to forget everyday life problems, which consequently have led to the increasing popularity of "games" in our daily lives.

Let me ask you something: who has never played board games like poker, sports games like tennis, or computer game like the League of Legends? It is not difficult to realize that these three games have something in common... In all of them, each player seeks to get the highest score, but above all, to be careful of their opponents, because if the poker player has a better hand, the rival player in tennis tricks us with a drop, or the online rival attack us with an unexpected skill, our result could be a disaster.

This means there are some situations in which we cannot only focus our efforts on our actions, but also paying attention to how others can react and what impact may their actions have on our decisions. For this reason, Game Theory was born, which consists on choosing the most convenient decisions to obtain the best result respecting the rules of a specific game and taking into account that the decisions of others can influence our result.

Since its establishment in 1928, a large number of experts have been applying Game Theory to give an answer to many of the problems we find in our society. A great multitude of applications can be described, mainly in economics, political science, evolutionary biology or even philosophy.

This work explores this mathematical tool, using it to analyze one of the greatest problems that human beings must face to guarantee their survival on the planet: the management of the drinking water supply.

So, is it possible that the Game Theory could provide a solution for the problem associated with the most necessary natural resource for humanity? The answer is yes. The reason for this is that Game Theory optimizes and mitigates the complexity associated with the supply of water. This analysis simplifies infinite factors that influence each decision by means of collaboration agreements with "external players", especially in those types of scenarios where the Game Theory is interesting for its application.

Applying the theory mentioned above, throughout this paper I will try to make the reader understand the two ways that can be adopted when looking for solutions in these complex scenarios related to urban water supply: either by taking a cooperation attitude, or on the contrary, a rejection to any agreement here displayed.

# Índice

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>ix</b>
<b>Resumen</b>	<b>xi</b>
<b>Abstract</b>	<b>xiii</b>
<b>Índice</b>	<b>xiv</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>xvii</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xix</b>
<b>Notación</b>	<b>xxi</b>
<b>1 Introducción a la Problemática del Agua</b>	<b>1</b>
1.1 <i>Problemática general del agua</i>	1
1.2 <i>Importancia del agua</i>	2
1.3 <i>Desafío internacional</i>	2
1.4 <i>Importancia del agua en el sector ecológico</i>	3
1.5 <i>Objetivo de futuro</i>	4
<b>2 Introducción a la Teoría de Juegos</b>	<b>5</b>
2.1 <i>Juegos cooperativos</i>	6
2.1.1 El conjunto de imputaciones	7
2.1.2 El Core	8
2.1.3 El valor de Shapley	8
2.2 <i>Juegos no cooperativos</i>	9
<b>3 Suministro de Aguas Urbanas</b>	<b>11</b>
3.1 <i>Sobrepoblación</i>	15
3.2 <i>Sobreconsumo por parte del ser humano</i>	16
3.3 <i>Infraestructura deficiente</i>	16
3.3.1 Consecuencias de la falta de inversión	17
3.4 <i>Inundaciones</i>	18
3.5 <i>Fugas</i>	19
3.6 <i>Situación actual</i>	20
3.7 <i>Situación en comparación con Europa</i>	21
3.8 <i>Sistemas de bombeo obsoletos</i>	21
3.9 <i>Contaminación del agua</i>	22
3.10 <i>El impacto en la sociedad debido a la escasez del agua</i>	22
3.11 <i>¿Es nuestro país consciente de dicha problemática?</i>	23
3.12 <i>Tecnologías cooperativas como posible solución</i>	23
<b>4 Caso I. Versión Cooperativa</b>	<b>25</b>
4.1 <i>Parámetros y condiciones del problema</i>	29
4.2 <i>Descripción del modelo</i>	30
4.3 <i>Modelo</i>	31

4.4	<i>Solución</i>	31
4.5	<i>Conclusión del caso cooperativo</i>	32
<b>5</b>	<b>Caso II. Versión no Cooperativa</b>	<b>34</b>
5.1	<i>Limitaciones en función de cada actor</i>	35
5.2	<i>Limitaciones comunes</i>	36
5.2.1	Usuarios agrícolas	36
5.2.2	Usuarios industriales	37
5.2.3	Usuarios domésticos	37
5.3	<i>Limitaciones adicionales</i>	37
5.4	<i>Descripción del modelo</i>	38
5.5	<i>Parámetros del modelo</i>	38
5.6	<i>Modelo</i>	38
5.7	<i>Solución</i>	40
5.8	<i>Conclusión del caso no cooperativo</i>	40
<b>6</b>	<b>Conclusión Final</b>	<b>42</b>
<b>7</b>	<b>Anexos</b>	<b>43</b>
7.1	<i>Anexo A. Caso I: Condiciones previas</i>	43
7.1.1	Datos de inicio y ejemplo de referenciación	43
7.1.2	Restricciones	43
7.2	<i>Anexo B. Caso I: Propuesta de resolución</i>	48
7.2.1	Código de resolución. Core	48
7.2.2	Código de resolución. Coreset	49
7.3	<i>Anexo C. Caso II: Propuesta de resolución</i>	52
7.3.1	Solución escogida	52
7.3.2	Simplificación a un problema de programación lineal	54
7.3.3	Código alternativo para obtener la solución del problema	56
<b>8</b>	<b>Referencias</b>	<b>61</b>
8.1	<i>Capítulo 1: Problemática del agua</i>	61
8.2	<i>Capítulo 2: Teoría de Juegos</i>	61
8.3	<i>Capítulo 3: Suministro de Aguas Urbanas</i>	61
8.4	<i>Capítulo 4: Caso I</i>	63
8.5	<i>Capítulo 5: Caso II</i>	63
	<b>Glosario</b>	<b>66</b>



# ÍNDICE DE TABLAS

---

<i>Tabla 1. Descripción de costes del Caso I.</i>	29
<i>Tabla 2. Valores de costes asociados al Caso I.</i>	29
<i>Tabla 3. Primera solución del Modelo. En u.m genéricas.</i>	31
<i>Tabla 4. Incremento de costes en la solución 1 del Modelo. En u.m genéricas.</i>	32
<i>Tabla 5. Segunda solución del Modelo. En u.m genéricas.</i>	32
<i>Tabla 6. Incremento de costes en la solución 2 del Modelo. En u.m genéricas.</i>	32
<i>Tabla 7. Variables de decisión del Caso II.</i>	35
<i>Tabla 8. Parámetros del Modelo. Millones de metros cúbicos al año.</i>	38
<i>Tabla 9. Parámetros de los cultivos.</i>	38
<i>Tabla 10. Parámetros del Modelo. Millones de metros cúbicos al año.</i>	40
<i>Tabla 11. Restricciones asociadas al Caso II.</i>	41



# ÍNDICE DE FIGURAS

---

<i>Figura 1. Central José María de Oriol, Extremadura [1].</i>	2
<i>Figura 2. 12 de los 17 Objetivos de Desarrollo Sostenible Mundial</i>	3
<i>Figura 3. Esquema gráfico del dilema del prisionero.</i>	10
<i>Figura 4. Acueducto de Itálica suministrando agua tomada de los manantiales del río Guadamar [4].</i>	12
<i>Figura 5. Esquema elemental de las fases de captación y distribución del agua [5].</i>	12
<i>Figura 6. Representación de los países con futuras crisis de suministro de aguas en 2040 [6].</i>	13
<i>Figura 7. Estrés hídrico futuro en 167 países [6].</i>	14
<i>Figura 8. Evolución de la población mundial [7].</i>	15
<i>Figura 9. Infraestructura del alcantarillado de Santa Marta [10].</i>	17
<i>Figura 10. Garajes inundados y tuberías desbordadas por las intensas lluvias caídas en Palma [15].</i>	19
<i>Figura 11. Fuga producida en La Maruca (Santander) que dejó a cientos de vecinos sin suministro de agua en 2019 [17].</i>	20
<i>Figura 12. Agua distribuida frente al porcentaje de pérdida en España en los últimos años [18].</i>	20
<i>Figura 13. Volumen de agua no registrada/facturada al año por persona y día en los países europeos [18].</i>	21
<i>Figura 14. Representación del ciclo total de abastecimiento del agua para cuatro actores [23].</i>	25
<i>Figura 15. Representación elemental de un enfoque no colaborativo.</i>	27
<i>Figura 16. Representación elemental del enfoque cooperativo.</i>	28
<i>Figura 17. Representación elemental del enfoque cooperativo a dos en función de sus costes de coalición.</i>	30
<i>Figura 18. Representación elemental del planteamiento no cooperativo [24].</i>	35



# Notación

---

$[]$	Enlace bibliográfico
$(\dots)$	Información adicional de poca relevancia
u.m	Unidades monetarias
$\emptyset$	Conjunto vacío
$\rightarrow$	Implica que
$\in$	Perteneciente a
$\subseteq$	Subconjunto impropio de
$\subset$	Subconjunto propio de
$R^n$	En todo el dominio
$\cap$	Intersección
$\cup$	Unión
$:$	Tal que
$\leq$	Menor o igual
$\geq$	Mayor o igual
$\forall$	Cualquier
$\setminus$	Backlash



# 1 INTRODUCCIÓN A LA PROBLEMÁTICA DEL AGUA

---

*“El agua es la fuerza motriz de toda la naturaleza”*

Leonardo Da Vinci

**E**L agua, un recurso tan vital como limitado, ocupa hoy en día la atención y preocupación de científicos, técnicos, políticos y en general, de muchos habitantes del planeta.

Su escasez obliga a concienciar a la población mediante una llamada a la moderación de consumo a nivel mundial, ya que, sin su colaboración, los esfuerzos técnicos que llevan a cabo algunas organizaciones para abastecer a la sociedad resultarían ineficientes.

El agua se puede encontrar en la naturaleza con distintas propiedades en función de las características que rodean su entorno, principalmente en función de su temperatura, salinidad y densidad. Un 97,5% del agua presente en nuestro planeta es agua de mar, con la presencia de sal. Mientras que sólo el 2,5 % de toda el agua del planeta es considerada dulce, ubicada en ríos, lagos y mantos subterráneos. De ese total de agua dulce, el 69% se encuentra en forma de hielo, ubicado en los polos y en las cumbres de las montañas más altas.

Es evidente que las propiedades presentes en el agua, influyen de manera directa en la nocividad de su consumo. Para poder consumirla, el ser humano necesita tratar el agua presente en la naturaleza. Esto, conlleva la eliminación de partículas y organismos dañinos para la salud. Para que posteriormente, esta agua apta para el consumo, sea distribuida a través de la integración de complejos sistemas de tuberías y válvulas para suministrarla al lugar donde es requerida y pueda ser utilizada.

## 1.1 Problemática general del agua

La creciente necesidad de lograr un equilibrio hidrológico que asegure el abastecimiento suficiente de agua a la población, se plantea en base a combinar:

1. La disponibilidad natural de este recurso
2. Las extracciones por parte del ser humano de dicho recurso

Todo ello acompañado de un uso correcto y eficiente del recurso. Un país como España, rico en recursos naturales, obtiene el agua que consume la población de fuentes como ríos, arroyos y acuíferos del subsuelo. Estos acuíferos se recargan de forma natural en época de lluvias. Sin embargo, la época de lluvias tiene una duración promedio de cuatro meses equivalentes al año lo que propicia una escasa captación.

Además, teniendo en cuenta que aproximadamente el 70% de agua total de agua captada por lluvias se evapora sumado a la intermitencia con la que se produce temporada de lluvias debido al cambio climático, hace que la disponibilidad del agua procedente de recursos naturales sea cada vez menor.

Ante esta insostenibilidad, la respuesta por parte del ser humano se ha basado en la construcción excesiva de infraestructura hidráulica que permita satisfacer y abastecer de agua a los diferentes sectores de la población. Estos son fundamentalmente:

- Sector agrícola

- Sector industrial
- Sector doméstico y de servicios
- Otros sectores

Sin embargo, los problemas de desabastecimiento de agua no sólo no se han conseguido frenar, sino que el ritmo de aumento representa uno de los mayores desafíos para el ser humano. La desproporción que existe entre la cantidad de agua que se capta y las imparable extensiones territoriales, cada vez mayores, está provocando graves problemas de disponibilidad, desperdicios y contaminación del agua urbana que más adelante describiré de forma detallada.

## 1.2 Importancia del agua

De manera general hemos analizado la función principal del agua, el consumo humano. Sin embargo, este recurso lleva asociado otras muchas acciones de vital importancia en el planeta.

La infraestructura hidráulica no sólo se encarga de suministrar agua a las poblaciones, sino que cumple con el importante desempeño de la protección a la población y áreas productivas, de situaciones imprevistas como las inundaciones y desbordamientos de ríos.

Una función esencial consiste en el aprovechamiento del almacenamiento natural de este recurso mediante estructuras denominadas presas, combinado con los movimientos necesarios provocados para formar corrientes de agua que generen energía a partir del movimiento de este fluido. De hecho, las zonas con un alto promedio de escurrimientos<sup>1</sup> son aprovechadas por las centrales energéticas para la generación de servicios como la energía eléctrica.

La energía hidráulica, proporciona alrededor de una sexta parte del total de energía producida en el mundo. Es una energía renovable que aprovecha el poder de la corriente antes mencionada para mover turbinas que permiten la conversión de esa energía cinética en energía eléctrica mediante generadores.



*Figura 1. Central José María de Oriol, Extremadura [1].*

Otro aspecto importante es el relativo a su productividad, la escasez de agua se ha venido considerando como un problema hidrológico. Sin embargo, cada vez más expertos aconsejan orientar el enfoque a un problema económico, puesto que se trata de un recurso que, al margen de otros usos, es demandado casi en un 90% de actividades económicas.

## 1.3 Desafío internacional

En la agenda política internacional, el tema de la escasez del agua se ha vuelto un asunto prioritario. Tanto es así, que la ONU recoge una necesidad de cambio entre sus objetivos marcados para lograr un mundo sostenible

---

<sup>1</sup> Se denomina escurrimiento a la corriente de agua que es vertida al rebasar su depósito o cauce natural (o artificial).

en el año 2030 [2]. Algunos de ellos son:

- Objetivo N°6: “Garantizar la disponibilidad de agua y su gestión sostenible y el saneamiento para todos”
- Objetivo N°12: “Garantizar modalidades de consumo y producción sostenibles”
- Objetivo N°17: “Alianzas para lograr los objetivos”



*Figura 2. 12 de los 17 Objetivos de Desarrollo Sostenible Mundial*

Para entender el objetivo N°17, es necesario comprender que el acceso al agua es un punto importante de los acuerdos de paz entre muchos países, por ejemplo, los acuerdos acordados entre Israel y sus vecinos. Compartir ríos, es un asunto de índole de seguridad nacional precisamente por la importancia del agua para el desarrollo; actualmente cerca del 40% de la gente en el mundo vive en más de doscientas cuencas de ríos compartidos.

Con todo ello, ante una situación de escasez del agua, la amenaza se puede resumir en tres aspectos fundamentales del bienestar humano:

- El sistema actual de producción de alimentos
- La salud de la sociedad
- La estabilidad de los sistemas políticos y sociales

Es por esto que la gestión del recurso deberá tender a evitar situaciones conflictivas debidas a escasez, sobreexplotación y contaminación, mediante medidas preventivas que procuren un uso racional y de conservación.

La conceptualización de la conservación del recurso agua debe entenderse como un proceso que cruza a varios sectores, por lo que la estrategia debe considerar todo: lo económico, lo social, lo biológico, lo político, etcétera.

## 1.4 Importancia del agua en el sector ecológico

Para la ecología el agua tiene un doble valor, por una parte, es un elemento del ecosistema que representa un activo social, por otra, es generador de ecosistemas.

Por ello, al llevar a cabo aprovechamientos de agua y valorar la conservación de especies y ecosistemas afectados, no podemos olvidar la función que realiza el agua cuando fluye, desde aguas arriba en los ríos hasta el mar, puesto que moviliza y distribuye elementos químicos tan importantes para la vida como son el fósforo o el anhídrido carbónico.

Podemos, por tanto, resumir la función ecológica del agua en dos ventajas fundamentales:

1. Realizar un mantenimiento de los ecosistemas

2. Ser un vehículo de transporte de nutrientes, sedimentos y vida

## **1.5 Objetivo de futuro**

El desafío consiste en lograr suministrar agua para todos, optimizar la productividad del recurso hídrico, especialmente en la agricultura, sector al que se destina la mayor parte de esos recursos en todo el mundo, y velar por que los ríos y los acuíferos subterráneos compartidos por países se gestionen en forma equitativa y armoniosa.

Por un lado, hace falta agua dulce, y por otro, una nueva forma de pensar. Una nueva forma de pensar que implique encontrar soluciones prácticas y adecuadas para garantizar un abastecimiento fiable y equitativo del agua.

# 2 INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE JUEGOS

---

*“A veces, el mayor desafío de un jugador viene en relación con su papel en el equipo”*

Scotty Maurice Pippen

Un juego es una situación con ciertas reglas que envuelve a un grupo de agentes y en el que dichos agentes pueden obtener ciertos beneficios. En un juego cada agente intenta conseguir el mayor resultado posible, teniendo en cuenta que el resultado del juego depende tanto de sus actos como de las acciones del resto de agentes. Es ésta la característica de los juegos: tomar las decisiones que más convienen para ganar, teniendo que cumplir las reglas del juego, y sabiendo que los demás agentes también influyen en los resultados con sus decisiones.

En economía se estudian a menudo situaciones de decisión individual, en las que cada agente intenta maximizar su utilidad, sin importar lo que hagan los otros. Por ejemplo:

- Elección de cantidades de un determinado producto a comprar por parte de un consumidor. Se suponen datos los precios de este producto, así como la renta del consumidor.
- Elección de cantidades a producir de un producto en una empresa. Se suponen dados los precios de dicho producto y de los factores de producción.
- Elección del precio de un bien en un mercado monopolista. Se suponen dados los precios de los factores de producción y la curva de demanda de dicho bien.

Sin embargo, hay muchas otras situaciones en que la utilidad del resultado final no depende solo de la acción del agente, sino también de los otros agentes:

- Elección por parte de la empresa A de la cantidad a producir de un bien o del precio de dicho bien, si también los produce la empresa B y ninguna más (duopolio). Los resultados finales para la empresa A dependen de sus propias decisiones y de las de B.
- Elección por una empresa de automóviles de un nivel de gasto en publicidad. Las consecuencias finales de dicho gasto dependen del gasto realizado en publicidad por las empresas competidoras.
- Elección de un coleccionista en la puja (cantidad de dinero que ofrece) de una subasta de un cuadro. Los resultados (si consigue o no el cuadro subastado) dependen también de la puja de otros participantes.

El planteamiento según el cual no importa lo que hagan otros agentes es más bien una simplificación de la realidad. La teoría de juegos se ocupa, por tanto, del análisis riguroso y sistemático de esas situaciones, donde interfieren las acciones de los agentes. Así pues, la teoría de juegos podría llamarse teoría de la decisión interactiva, que es diferente de la teoría de la decisión individual. Fue introducida por Von Neumann y Morgenstern en 1944 y numerosos premios noveles de economía han trabajado sobre ello, Aumann, Sentel, Shapley.

Algunos aspectos básicos en un juego son los siguientes. Se denominan jugadores a los agentes del juego que toman las decisiones con el fin de maximizar su utilidad, son dos o más. Las acciones de cada jugador son las decisiones que puede tomar cada jugador en cada momento que le toque jugar. Luego, el conjunto de acciones

de un jugador en cada momento del juego puede ser finito o infinito. Una estrategia de un jugador es un plan completo de acciones con las que éste podría proponerse participar en dicho juego. Siendo, por tanto, el perfil de estrategias un conjunto de estrategias, una por cada jugador. Los jugadores pueden formar grupos que realicen acciones y estrategias conjuntas. A estos grupos se les llama coaliciones. Los resultados del juego son los distintos modos en los que puede concluir un juego, llevando cada resultado aparejado unas consecuencias para cada agente. Cada jugador recibe un pago al acabar el juego, que depende de cuál haya sido el resultado del juego. Por último, el significado de dicho pago es la utilidad que cada jugador atribuye a dicho resultado; es decir, la valoración que para el jugador tienen las consecuencias de alcanzar un determinado resultado en el juego.

Una vez definidos los conceptos básicos, distinguimos dos tipos de juegos básicos o, dicho de otro modo, dos enfoques diferentes en el análisis de un juego: cooperativos y no cooperativos.

En el enfoque cooperativo se analizan las posibilidades de que algunos o todos los jugadores lleguen a un acuerdo sobre qué decisiones tomaría cada jugador en ausencia de acuerdo previo. Dos aspectos son vitales en dicho análisis: qué coaliciones se formarán y cómo se repartirán los beneficios obtenidos.

Entre los juegos no cooperativos caben dos distinciones básicas: los juegos estáticos o dinámicos, y juegos con o sin información completa. En los juegos estáticos los jugadores toman sus decisiones simultáneamente (cada jugador decide sin saber que han decidido los demás), mientras que en los dinámicos puede darse el caso de que un jugador conozca ya las decisiones de otro antes de decidir. En los juegos con información completa, todos los jugadores conocen las consecuencias, para sí mismos y para los demás del conjunto de decisiones tomadas, mientras que, en los juegos con información incompleta, algún jugador desconoce algunas de las consecuencias.

## 2.1. Juegos cooperativos

A continuación, se detallan los conceptos básicos asociados a la posibilidad de que algunos jugadores puedan llegar a acuerdos vinculantes (a los que estarían obligados de manera eludible), que hemos denominado coaliciones.

Se trata de analizar cómo puede actuar un grupo de jugadores, interesándonos en los comportamientos colectivos y sin que haga falta detenerse en las acciones individuales de cada uno de los miembros de la coalición. Dos preguntas han de responderse ante una situación como ésta: ¿Qué coaliciones se formarán? ¿Cómo se repartirán los beneficios obtenidos? Comenzaremos resolviendo la segunda pregunta.

Para ello, definimos  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  como un conjunto finito de jugadores, y  $P(N)$  como el conjunto de las partes de  $N$ , que está formado por cada una de las posibles coaliciones que se pueden formar (incluyendo la coalición sin jugadores que es  $\emptyset$ ).

A continuación, haremos dos suposiciones previas con idea de simplificar la comprensión.

- Consideramos que cada coalición puede determinar el mejor resultado que sus componentes pueden obtener teniendo en cuenta sus acciones y la del resto de jugadores.
- Supongamos además que las utilidades de los jugadores son transferibles, lo que quiere decir que las ganancias o pérdidas que se obtienen al actuar como coalición pueden repartirse entre los jugadores que la componen; en ocasiones este reparto no es posible por lo que no existe una forma de transferir la unidad (problema que no es objeto de estudio del TFG). En un juego cooperativo de unidad transferible, se llama función característica a la función que asigna a cada coalición un número real, asignando al conjunto vacío el valor cero, es decir,

$$v: P(N) \rightarrow \mathbb{R}, v(\emptyset) = 0.$$

Esta última suposición es una condición técnica.

Para una coalición  $S \in P(N)$ , al número  $v(S)$ , se le llama valor de la coalición y se interpreta como el valor mínimo que puede obtener la coalición si todos sus miembros se asocian y juegan en equipo. Se trata por tanto del valor que una coalición toma sus decisiones de forma adecuada. En este caso utilizaremos la interpretación de  $v(S)$  como beneficio, aunque también puede interpretarse en términos de costes.

---

Definición: Un juego cooperativo de unidad transferible consiste, por tanto, en un par  $G = (N, v)$ , dado por:

- Un conjunto finito de jugadores  $N = \{1, 2, \dots, n\}$

- Una función característica,  $v$ , que asocia a cada subconjunto de  $N$  (o coalición) un número real (valor de la coalición).

---

Definimos a continuación los denominados juegos monótonos:

---

Definición: Se dice que un juego es monótono si para todo par de coaliciones  $S \subseteq T$  se verifica que:

$$v(S) \leq v(T).$$

---

Es decir, hablamos de un juego cooperativo monótono cuando al crecer el número de jugadores que forman una coalición el beneficio o pago de esta coalición no disminuye. Además, será necesario definir los juegos superaditivos.

---

Definición: Se dice que un juego es superaditivo si para todo par de coaliciones  $S, T \in P(N)$ , con  $S \cap T = \emptyset$  se verifica que:

$$v(S) + v(T) \leq v(T \cup S)$$

---

Es decir, si dos coaliciones disjuntas deciden unirse para formar una coalición mayor, el beneficio de la nueva coalición será igual o superior que la suma de los beneficios de las coaliciones originales. Nos interesan, por lo tanto, los juegos superaditivos. Si extendemos la condición de superaditivo a coaliciones no disjuntas obtenemos un tipo de juegos con grandes propiedades.

Para continuar, será necesario responder a la primera de las preguntas que se introdujo anteriormente, ¿Qué coaliciones se formarán? Para simplificar el problema consideramos que la coalición que se formará será  $N$ . Sin embargo, esto no garantiza que el interés de los jugadores sea siempre el de formar la coalición  $N$ , ya que, pondrían establecerse coaliciones de grupos más pequeños cuya suma de pagos sea superior. Pasamos a continuación a definir los juegos convexos.

---

Definición: Se dice que un juego es convexo si para todo par de coaliciones  $S, T \in P(N)$ , se verifica que:

$$v(S) + v(T) - v(S \cap T) \leq v(T \cup S)$$

---

Es decir, si dos coaliciones no disjuntas deciden unirse para formar una coalición mayor, el beneficio de la nueva coalición será igual o superior que la suma de los beneficios de las coaliciones originales menos el valor de intersección entre dichas coaliciones.

Ambos conceptos son aplicables también a juegos de costes sin más que cambiar las desigualdades. Y por último, concluimos definiendo los juegos subaditivos.

---

Definición: El juego se dice subaditivo si para todo par de coaliciones  $S, T \in P(N)$ , con  $S \cap T = \emptyset$  se verifica que:

$$v(S) + v(T) \geq v(T \cup S)$$

---

### 2.1.1 El conjunto de imputaciones

Sea  $G = (N, v)$  un juego cooperativo de utilidad transferible superaditivo, en cual  $N$  es el conjunto de jugadores y  $v$  es la función característica. Si como hemos supuesto en el juego los jugadores deciden trabajar conjuntamente, es decir, cooperar, el único problema que se presenta consiste en cómo repartir el valor  $v(N)$  entre los jugadores.

Sea  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$  un vector de distribución de pagos, en donde  $x_i$  representa el pago que recibe el jugador  $i$ . Para cualquier  $S \subset N$  se utilizará la siguiente expresión:

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i$$

Si deseamos hacer un reparto del valor, entonces debemos exigir el “principio de eficiencia”, esto es:

$$x(N) = v(N)$$

Por otro lado, ningún jugador admitiría que su situación individual fuese mejor que su pago en la coalición, es decir, se debe verificar el “principio de racionalidad individual”:

$$x_i \geq v(\{i\})$$

Definición: El conjunto de imputaciones de un juego cooperativo en su forma coalicional es:

$$I(N, v) = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n : x(N) = v(N), x_i \geq v(\{i\}) \forall i \in N \}$$

### 2.1.2 El Core

Siguiendo con el principio de racionalidad individual, podemos pensar en exigir la “racionalidad condicional”, esto es, para todo  $S \subset N$ , ocurre que  $x(S) \geq v(S)$ .

Definición: El core de un juego cooperativo de beneficio en su forma coalicional es:

$$C(N, v) = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n : x(N) = v(N), x(S) \geq v(S) \forall S \subset N \}$$

El Core conjunto es cerrado, acotado y convexo. Sin embargo, su principal problema es que puede ser muy grande o a veces, incluso vacío. Si el Core es vacío, tendremos que olvidar la búsqueda de soluciones racionales para todas las coaliciones. Si es grande, la cuestión será analizar cuál de sus vectores de pagos vamos a escoger.

Se plantea a continuación una condición equivalente a que el core sea no vacío. Una familia  $\{S_1, \dots, S_p\}$  de subconjuntos de  $N$ , disjuntos y no vacíos, es equilibrada sobre  $N$  si existen números positivos,  $\{a_1, \dots, a_p\}$  denominados pesos, tales que para todo  $i \in N$ ,

$$\sum_{\{j, i \in S_j\}} a_j = 1$$

Definición: Se dice que un juego es equilibrado si para toda familia equilibrada  $\{S_1, \dots, S_m\}$  que sea partición de  $N$ , se tiene:

$$\sum_j a_j v(S_j) \leq v(N)$$

Esto es, ninguna partición ponderada obtiene mejores beneficios.

#### **Teorema 1**

Un juego es equilibrado si y sólo si el Core es no vacío.

### 2.1.3 El valor de Shapley

Puede comprobarse, que el objetivo es buscar hacer una distribución de pagos entre los jugadores de manera que se cumplan determinados criterios, llamados axiomas, previamente establecidos.

Sea  $G(N, v)$  un juego en forma coalicional, en donde  $N = \{1, \dots, n\}$ . Se considera la siguiente asignación de pagos para los  $n$  jugadores:

$$\phi(N, v) = (\phi_1(N, v), \dots, \phi_n(N, v))$$

La función de asignación de pagos debe cumplir los siguientes axiomas:

- **Eficiencia:** La función de asignación debe distribuir el pago total del juego. Es decir, debe ser:

$$\sum_i \phi_i(N, v) = v(N).$$

- **Simetría:** Para cualquier par de jugadores que realicen aportaciones similares en cada coalición, se debe cumplir:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \forall S \subset N, \text{ con } i, j \notin S \text{ se tiene que } \phi_i(N, v) = \phi_j(N, v)$$

- **Tratamiento del jugador pasivo.** Si un jugador no aporta ningún beneficio adicional al resto de los jugadores no debe recibir ningún pago coalicional. Es decir, para cada jugador, se verifica que:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S), \forall S \subset N, \text{ se tiene que } \phi_i(N, v) = v(\{i\})$$

- **Aditividad.** La función de de asignación debe ser invariante a cualquier descomposición arbitraria del juego. Formalmente, dados dos juegos cualesquiera v y w, se tiene que:

$$\phi_i(N, v + w) = \phi_i(N, v) + \phi_i(N, w), \forall i \in N$$

### **Teorema 2:**

La única asignación que verifica los 4 axiomas anteriores es el valor de Shapley que sigue la siguiente expresión:

$$\phi_i(N, v) = \sum_{\{S \subset N: i \in S\}} q(s)[v(S) - v(S \setminus i)], \forall i \in N$$

donde  $q(s) = \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}$ , siendo s el número de jugadores que hay en la coalición S.

El valor de Shapley puede interpretarse como la contribución marginal esperada de cada jugador al entrar en una coalición al azar. En efecto, el valor  $v(S) - v(S \setminus i)$  es la contribución marginal efectiva de i al incorporarse a S, mientras que el factor q(s) es la probabilidad de que a i le toque incorporarse precisamente a la coalición S.

### **Teorema 3:**

Si es un juego convexo entonces el valor de Shapley pertenece al Core de v.

## **2.2 Juegos no cooperativos**

Los equilibrios de Nash se definen como la combinación de estrategias tal que no hay ningún incentivo para que los jugadores se desvíen de su elección. Su propia decisión será la mejor opción que un jugador puede tomar, teniendo en cuenta la decisión de los otros jugadores y donde un cambio en la decisión de un jugador sólo conducirá a un resultado peor si los otros jugadores se adhieren a su estrategia.

Uno de los equilibrios de Nash más conocidos se encuentra en el dilema del prisionero. Este concepto pertenece a la teoría de juegos, específicamente para los juegos no cooperativos, y toma el nombre de John Nash que lo desarrolló en el siglo XX.

Hay unos pocos requisitos de coherencia que deben tenerse en cuenta cuando se trata de equilibrios de Nash. Uno de ellos es conocido como el conocimiento común, que complementa la necesidad de información completa. Por lo tanto, las expectativas sobre las estrategias de otros jugadores deben ser racionales.

Por lo tanto, un equilibrio de Nash es una combinación de creencias acerca de las estrategias y las opciones del otro jugador. Es bastante fácil entender esto con un ejemplo, en este caso utilizaremos el dilema del prisionero: “La policía arresta a dos sospechosos. No hay pruebas suficientes para condenarlos y, tras haberlos separado, los visita a cada uno y les ofrece el mismo trato. Si uno confiesa y su cómplice no, el cómplice será condenado a la pena total, diez años, y el primero será liberado. Si uno calla y el cómplice confiesa, el primero recibirá esa pena y será el cómplice quien salga libre. Si ambos confiesan, ambos serán condenados a ocho años. Si ambos lo niegan, todo lo que podrán hacer será encerrarlos durante un año por un cargo menor” [2]. Lo que puede resumirse en la siguiente matriz de juegos:

		<b>Prisionero 2</b>	
		<i>Confiesa</i>	<i>Miente</i>
<b>Prisionero 1</b>	<i>Confiesa</i>	<u>-8, -8</u>	0, -10
	<i>Miente</i>	-10, 0	<u>-1, -1</u>

Figura 3. Esquema gráfico del dilema del prisionero.

Luego, el prisionero 1 (P1) tiene analizar lo que el prisionero 2 (P2) va a hacer, con el fin de elegir la mejor estrategia.

Si P2 confiesa (P2C) obtendrá un pago de -8 o 0, y si miente (P2M), obtendrá -10 o -1. Se puede ver fácilmente que P2 elegirá confesar, ya que, en ambos casos le resulta más conveniente. Por lo tanto, P1 debe elegir la mejor estrategia dado que P2 elegirá a confesar: P1 puede confesar (P1C, con un pago de -8) o mentir (P1M, con un pago de -10). Luego, lo racional para P1 es confesar.

Procediendo a la inversa, se analizan las creencias que P2 tiene sobre las estrategias de P1, lo que nos lleva al mismo punto: lo racional para P1 es confesar. Por lo tanto, (P1C, P2C) es el equilibrio de Nash en este juego (subrayado en rojo).

Los equilibrios Nash se pueden utilizar para predecir el resultado de juegos finitos, siempre que exista tal equilibrio. Por otra parte, el equilibrio se puede encontrar utilizando el método de eliminación de las estrategias dominadas, lo que nos ayudará a encontrar el equilibrio de Nash mediante la exclusión de equilibrios de Nash ‘irracionales’.

Sin embargo, nos encontramos con el problema que surge cuando se trata de un equilibrio de Nash que no es ni social ni ético, y donde la eficiencia puede ser subjetiva, que es el caso en el dilema del prisionero. En este juego, el equilibrio de Nash no cumple con los criterios para ser óptimo de Pareto (subrayado en verde). Además, la posibilidad de que se produzcan equilibrios múltiples hacen que el resultado final del juego sea menos predecible.

# 3 SUMINISTRO DE AGUAS URBANAS

---

*"Olvidamos que el ciclo del agua y el ciclo de la vida son uno mismo"*

Jacques Y. Cousteau

Los seres humanos han almacenado y distribuido agua durante siglos. En la antigüedad, cuando se realizaban asentamientos, estos siempre se producían cerca de lagos y ríos. Sin embargo, cuando no existían lagos y ríos, se recurría al aprovechamiento de los recursos de agua subterráneos que se extraían mediante la construcción de pozos.

Una vez que la población humana comienza a crecer de manera extensiva, y no existiendo suficientes recursos disponibles de agua, se hace necesario buscar diferentes fuentes de agua. Es por ello que la humanidad ha almacenado y distribuido agua prácticamente desde sus orígenes.

Las lluvias no se reparten regularmente a lo largo de todo el año. Sin embargo, el hombre precisa del agua todos los días para sus distintas actividades. Mediante el almacenamiento del agua, podemos disponer de ella en épocas en que no llueve.

De una manera concisa y resumida, podemos encontrar en la antigua civilización romana el origen de los sistemas de captación, transporte y utilización del agua. Desde las primeras técnicas de almacenaje, limpieza y distribución, hasta las infraestructuras y tecnologías actuales para el tratamiento, reciclado y depuración de aguas, ha transcurrido una larga historia.

Cuando se estudia o se lee sobre el abastecimiento de agua en el periodo romano, se tiende a obviar el concepto que tenían del abastecimiento de agua y suponemos que era similar al que actualmente tenemos, aunque en realidad, su intención era llevar el río a la ciudad, preservándolo en canales, para que no dejara de tener las mismas características que en su captación, fomentando siempre un funcionamiento continuo; el agua entraba continuamente en la conducción central y salía por los múltiples ramales: cuando se cerraba un grifo, el agua no se paraba sino continuaba por otro ramal hasta desaguar.

Para ello los romanos construyeron numerosos acueductos para tener agua en las ciudades y en los lugares industriales, estando éstos entre los mayores logros de ingeniería del mundo antiguo. Todavía hay ciudades que mantienen y usan los antiguos acueductos hoy en día. [3]

Un ejemplo cercano contrastable se ubica en Santiponce, término municipal en el que se encuentran los restos de la antigua ciudad romana de Itálica. En esta ciudad fundada allá por el 206 a.C, se disponía de un acueducto que conectaba la ciudad con unos sistemas de abastecimiento de aguas y complejas redes de cloacas que garantizaban la llegada a Itálica de unos 13.000 metros cúbicos de agua al día. Se presenta a continuación una ilustración a ordenador de lo que en su día fue el acueducto.



Figura 4. Acueducto de Itálica suministrando agua tomada de los manantiales del río Guadiamar [4].

Dejando a un lado el contexto histórico, nos centraremos en cómo este proceso se lleva a cabo en la actualidad. El sistema de abastecimiento de agua se puede dividir en 5 subprocesos: captación, tratamiento, almacenamiento, transporte y distribución. A partir de estos procesos, hoy en día se consigue que al ir a la cocina y abrir la llave del grifo salga agua en condiciones higiénicas aceptables. Entrando en más detalle, supongamos un esquema como el mostrado en la siguiente figura:

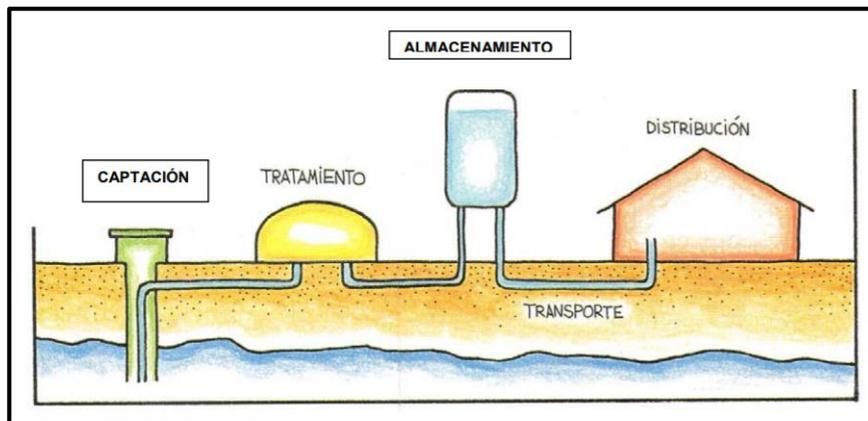


Figura 5. Esquema elemental de las fases de captación y distribución del agua [5].

- **Captación:** Se define como la procedencia de la cual proviene el abastecimiento. Como, por ejemplo: Acuíferos, presas, pozos, ríos...
- **Tratamiento:** Proceso obligatorio al que se somete el agua captada para garantizar que no es perjudicial para la salud.
- **Almacenamiento:** En esta tercera fase por medio de depósitos se acumula el agua. Hay grandes embalses contruidos por la Naturaleza donde se almacena el agua cuando llueve. Son los lagos y los acuíferos. Estos últimos se van llenando con las aguas infiltradas. Su nivel entonces sube. Si este alcanza cierta altura, las aguas rebosan por la fuentes y manantiales, o bien, vierten subterráneamente al mar. Por tanto, una parte del agua que llevan los ríos procede de la descarga natural de los acuíferos. Agua que se almacenó en épocas de lluvias. También existen depósitos artificiales para almacenar agua. Son los embalses que se forman en los ríos mediante la construcción de presas.
- **Transporte:** El transporte se encargar de movilizar el agua desde los puntos de almacenamiento hasta los puntos de consumo.
- **Distribución:** Esta fase está ligada el transporte, y se encargará de garantizar el correcto transporte a todos los puntos de consumo de la manera más eficiente posible. Por ejemplo, una aplicación reside en el suministro de los núcleos urbanos en los que la distribución del agua apta para el consumo se realiza por medio de tuberías subterráneas presentes en las aceras de las calles.

Podría definirse un sexto paso llamado Reutilización. Este paso hace referencia a un tratamiento adicional de regeneración del agua para ser reutilizada en usos distintos al consumo humano. Este aspecto está muy moda en los sistemas económicos actuales que buscan el desarrollo de una economía circular y sostenible.

Habiendo detallado este procedimiento, no es complicado entender que el agua que llega a nuestras casas es el resultado de un conjunto de procesos complejos (integrados mediante redes de tuberías) expuestos a infinidad de factores y a los que de ahora en adelante agruparemos en el término “suministro de aguas urbanas”.

Esta idea de infinidad de factores se verá reflejada de manera recursiva en el trabajo, ya que, será la base para la realización de un modelo matemático que represente un sistema de abastecimiento de aguas analizado mediante la Teoría de Juegos, y que tendrá en cuenta los impactos de cada uno de estos factores en el suministro de aguas urbanas del problema en cuestión.

Explicándolo de este modo, la agrupación de estos procesos en un modelo puede parecer sencillo. Sin embargo, el análisis del suministro de este recurso vital es muy complicado. Una buena forma de ser conscientes de la sostenibilidad o no del actual sistema de suministro de aguas urbanas es recurrir a estadísticos.

Se estima que más de 1.000.000.000 de personas en la tierra no tienen acceso a agua potable, según un estudio realizado por WRI se prevé un terrible escenario futuro del planeta [6]. Dicho estudio presenta lo que será el mapa mundial en 2040 (dentro de 20 años) analizando los países que sufrirán una crisis hídrica.

Se considera que existe una crisis hídrica cuando no hay suficiente agua potable para una población determinada, y entre sus principales características encontramos:

- El acceso insuficiente a agua potable salubre
- El acceso insuficiente al agua para el saneamiento y la eliminación de residuos
- El uso excesivo de reservas de agua subterránea
- El uso excesivo y la contaminación de los recursos hídricos, provocando una reducción de la biodiversidad

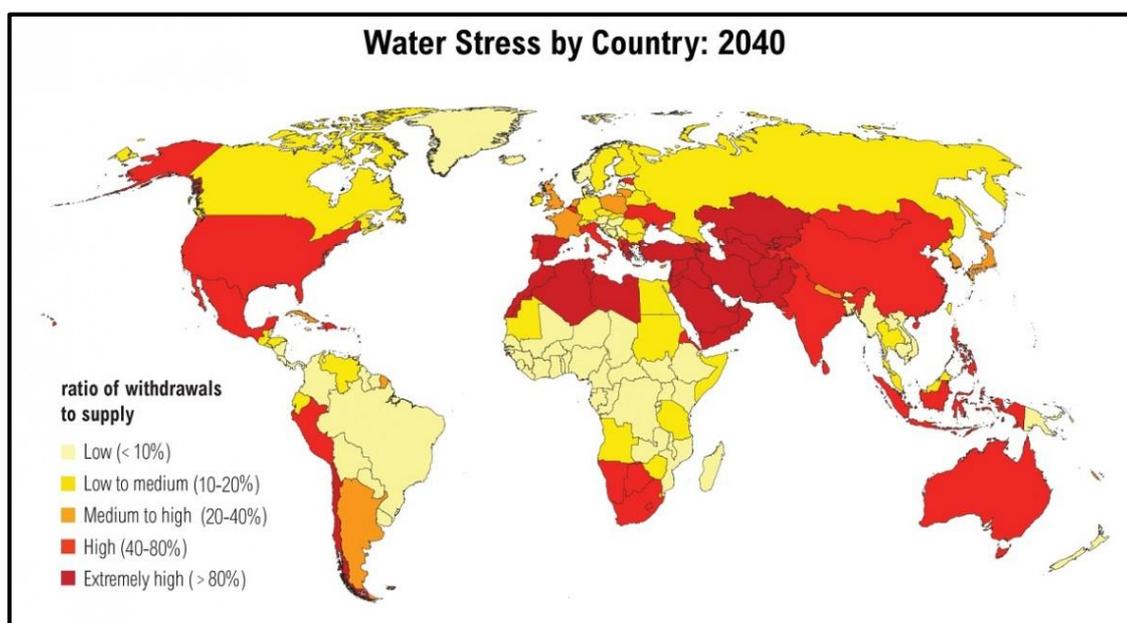


Figura 6. Representación de los países con futuras crisis de suministro de aguas en 2040 [6].

En el mismo estudio citado, se detalla un ranking en el cuál atendiendo a un conjunto de modelos climáticos y escenarios socioeconómicos se representa a modo de ratio la insuficiencia para abastecer a un País con sistemas de suministro de aguas. Puede observarse que España ocupa el puesto número 32.



Figura 7. Estrés hídrico futuro en 167 países [6].

Es por tanto evidente la necesidad de desarrollar un sistema de suministro de agua potable que sea capaz de hacer frente a los diversos problemas existentes en la actualidad que, en caso de no ser mitigados, seguirán empeorando.

La pregunta que a continuación debemos hacernos es: ¿Cómo hemos llegado a este posible escenario?, ¿Qué está sucediendo?, ¿Cuál es la problemática que engloba al suministro de aguas?

Para responder a estas preguntas haremos uso de la Teoría de Juegos. Como hemos definido en la introducción, es una herramienta para la toma de decisiones que entiende que un problema y la solución de este se verán afectados por el conjunto que factores que conforman el entorno del problema.

Por ejemplo, supongamos una empresa que trabaja en una hipotética ciudad pequeña y cuyo objetivo consiste en distribuir agua potable que recibe en grandes cantidades por medio de proveedores a comienzos de la mañana. Por mucho que la empresa tenga un sistema de distribución óptimo, ¿Qué sucederá si los camiones cisterna de los proveedores cierto día tienen un problema y no pueden acceder para suministrar el agua? Es evidente que ese día independientemente de la organización de nuestra empresa ficticia, la ciudad se quedará sin agua potable. Este elemental y sencillo ejemplo nos hace reflexionar que parte del problema puede ser debido a una falta de conexión entre:

- Por un lado, los modelos actuales desarrollados para suministrar agua potable.
- Y por otro, los factores que tienen influyen sobre estos procesos y cuyo impacto puede desarticular estos modelos generando pérdidas constantes de eficiencia y eficacia en ellos.

Frente a esto, la teoría de juegos busca una visión más cooperativa. En la que la clave para ser eficientes y eficaces es colaborar, lo veremos más adelante.

Dejando a un lado la particularidad del ejemplo, en el suministro de aguas urbanas existe un gran entorno de factores que generan una amplia problemática. La presencia de estos factores hace que, si no se buscan

soluciones adecuadas, el agua se encamine a convertirse en un recurso mucho más limitado de lo que ya lo es. Siguiendo con el guion explicativo, a continuación, se detallarán todos y cada uno de estos factores.

### 3.1 Sobrepoblación

La población mundial se ha duplicado en los últimos 50 años, a día de hoy, contamos con una población total de unas 7.000.000.000 de personas en el planeta. Y como se puede ver en la siguiente gráfica, seguimos con una tendencia al alza:



Figura 8. Evolución de la población mundial [7].

Según cifras de la ONU, el 55% de la población mundial vive en zonas urbanas, porcentaje que se espera que aumente al 68% en 2050. Esta migración desde las zonas rurales hacia las ciudades, combinada con el crecimiento generalizado de la población mundial observado en la gráfica anterior, podría sumar a las áreas urbanas otros 2500 millones de personas para 2050.

Esta rápida urbanización ya está presionando las infraestructuras de aguas limpias y residuales de las ciudades, que cada vez son más antiguas y carecen de sistemas modernos de monitorización y control [8]. La rápida urbanización ha puesto de manifiesto la necesidad de conseguir:

- Una gestión inteligente de las aguas dulces, residuales y pluviales para garantizar la seguridad del agua potable.
- Una gestión de las aguas residuales y la monitorización de las aguas pluviales para mantener la seguridad de las viviendas urbanas.
- Evitar la escasez de agua, riesgos para la salud pública e inundaciones en zonas urbanas.

La dificultad de dicho aumento es que a medida que la población se incrementa la demanda de agua crece. Esta afirmación guarda un trasfondo fundamental. Si se diseña un sistema de suministro de aguas urbanas basado en la actualidad y sin mirar al futuro, dicho sistema será obsoleto al cabo de poco tiempo, ya que, no será capaz de abastecer al aumento de población de un futuro muy cercano. Llevando esto asociado, un gasto económico desproporcionado al crear un sistema de suministro de agua que no sea capaz de adaptarse a los cambios venideros.

### 3.2 Sobreconsumo por parte del ser humano

Estudios realizados por profesionales en el tema, afirman que aproximadamente un 67% del agua que usamos se desperdicia [9]. Debido fundamentalmente a:

- Malos hábitos: procedentes por parte del ser humano en sus actividades diarias.
- Desperdicios en granjas: Sólo una pequeña fracción del agua que se usa en las granjas llega finalmente a los cultivos.
- Fábricas: requieren millones de litros de agua al día para producir sus productos.
- Producción de electricidad: por medio de fuentes como el carbón o el gas natural consumen grandes cantidades de agua.

Ello supone que de los esfuerzos realizados por suministrar agua a la sociedad solo una tercera parte sería realmente necesaria. En términos económicos es fácil descubrir el sobre coste al que se está incurriendo, siendo necesario buscar un modelo que permita afrontar este problema por medio de dos posibles caminos:

1. Concienciar a la sociedad y con ello reducir el actual sistema de suministro de aguas urbanas. Que no será el objetivo de este trabajo debido a la incertidumbre que este tipo de proyectos sociales lleva asociada.
2. Modelar un sistema de suministro de aguas más fiel a la realidad implementando por ejemplo la reutilización del agua mediante realimentaciones para poder darle un uso secundario una vez desechada que es por el ser humano. Un ejemplo sencillo aparece en los propios domicilios, donde el agua utilizada en los retretes (que directamente será desechada sin consumirla) es agua potable.

### 3.3 Infraestructura deficiente

España suministra agua por medio de 155.000 km de redes de distribución, acompañada de 140000 km de redes de alcantarillados, cientos de estaciones de tratamiento, desaladoras, estaciones de bombeos y alrededor de unas 1200 grandes presas. Permitiendo así un abastecimiento de más de 4.000 hm<sup>3</sup> de agua al año (en cascos urbanos) [10].

La problemática que está apareciendo es que estas infraestructuras comienzan a volverse obsoletas debido a una falta de inversión en su renovación y mantenimiento. Y el problema no acaba aquí, debido a la reciente crisis económica “El capítulo de inversiones reales en los programas de gestión, infraestructuras y calidad del agua de los Presupuestos Generales del Estado ha pasado de 4.300 M€ en 2008 a 1.500 M€ en 2012”, Raúl Herrero, Fuente: iagua.es.

Otro dato interesante relativo a las redes de distribución de agua en España es que, a los ciudadanos españoles nos corresponde unos 4,8 metros de tubería por persona, con los que agrupándolos podríamos dar cinco vueltas y media a la Tierra.

En relación con el anterior Estudio referenciado de AEAS-AGA [11], se ha producido un envejecimiento evidente de estas instalaciones:

- El 29% tiene menos de 15 años, el 30% entre 15-30 años y el 41% restante cuenta con más de 30 años. Los datos revelan que su porcentaje de renovación es del 0,9%.
- Por lo que respecta al parque de contadores, hay 21 millones de contadores de agua de los cuales el 24% tienen menos de 5 años, el 40% entre 5-10 años y el 36% más de 10 años. Su porcentaje de renovación es del 7%.
- Asimismo, se observa un progresivo envejecimiento de las redes de alcantarillado, que actualmente suman 165.000 km de red. Su porcentaje de renovación es del 0,6%, y el 26% tiene menos de 15 años, el 34% entre 15-30 años y el 40% más de 30 años.

Otro factor clave es que, en España, los sistemas de abastecimiento y saneamiento son competencia y

responsabilidad de los ayuntamientos. Pero ¿estos sistemas se están gestionando correctamente? ¿Se dispone de los medios y del personal especializado adecuado para realizar esta gestión? ¿El servicio mejora cuando la gestión se delega en un tercero? ¿Los servicios subcontratados se controlan de manera eficaz por parte de la administración?

Cortar el agua cuando llega una sequía, tener redes de abastecimiento con rendimientos bajos... no debería ser propio de un país desarrollado en el que el agua es un bien escaso. Sin embargo, en España ocurre.

A continuación, se presenta las consecuencias principales asociadas al desarrollo de un sistema de suministro de aguas urbanas con la presencia de una inversión deficiente, lo que nos ayudará a reflexionar sobre la necesidad de destinar una serie de recursos mínimos a desarrollar una nueva forma de pensar que garantice la sostenibilidad de nuestro futuro modelo de gestión de suministro.

### 3.3.1 Consecuencias de la falta de inversión

1. Se dificulta la elaboración de un análisis que sea veraz y real: debido a una falta de control por parte de los organismos reguladores de las administraciones, hay que afrontar los análisis con ausencia de muchos datos reales, teniendo que recurrir a datos basados en estadísticos generados por el INE.
2. Pérdidas en términos de agua suministrada: tuberías antiguas presentes en los cascos urbanos sin un control pertinente generan a menudo problemas (como por ejemplo fugas) y en consecuencia reducen el rendimiento de las redes de abastecimiento. Las “fugas” serán desarrolladas en detalle en la Subsección 3.5.
3. Redes con insuficiente capacidad: El crecimiento de las ciudades no ha sido acompañado por la ampliación de la capacidad de transporte de las redes.



*Figura 9. Infraestructura del alcantarillado de Santa Marta [10].*

Como puede observarse en la fotografía superior, la infraestructura no ha sido capaz de hacer frente al crecimiento de la población de Santa Marta, debido a la falta de inversión. “El informe realizado por la Alcaldía muestra el mal estado en que se encuentra la infraestructura de acueducto y alcantarillado de Santa Marta, y sería la prueba que demostraría que Metroagua no ha realizado las inversiones necesarias para mejorar el suministro de agua potable en la ciudad.” Fuente: semana.com [10].

Además, durante la expansión urbanística de los últimos años no se ha exigido a los promotores de las nuevas urbanizaciones asumir los costes de ampliación de las infraestructuras de abastecimiento ubicadas aguas arriba de su punto de conexión. Lo que ha generado la saturación del sistema de suministro en muchos puntos urbanos.

4. Cortes de agua: Los cortes de agua suelen enmascarar una mala gestión del agua y una red de abastecimiento deficiente con importantes pérdidas.

Dicha consecuencia es especialmente influyente ya que lleva asociada un impacto en la calidad del

servicio prestado a la sociedad. Es evidente que algo funciona de manera “mejorable” cuando con cierta frecuencia en nuestra ciudad (sea cual sea) cada pocos meses encontramos un aviso de corte de agua debido a una avería.

Por ejemplo, en Madrid, diciembre de 2019: “Una avería en la red de distribución de agua del canal de Isabel II ha dejado sin servicio esta mañana a varios barrios del centro de Madrid y ha causado interrupciones o retrasos, algunas ya solucionadas, en el tráfico de los trenes de Cercanías y de Metro de Madrid, 10/12/2019 11:30, Fuente: telemadrid.es” [12].

5. Un traslado del problema a las generaciones venideras: La demanda mundial de agua crece cada año un 1%, debido a los cambios en los patrones de consumo, al crecimiento de la población y al desarrollo económico.

Sin embargo, la disponibilidad de agua no crece con el paso del tiempo lo que está trayendo graves consecuencias en todo el mundo. Según el último Informe Mundial de Naciones Unidas sobre el Desarrollo de los Recursos Hídricos, se prevé para el año 2050, que la mitad de la población del mundo, es decir, 5.700 millones de personas, se verán afectadas por la escasez del agua.

Por todo ello, es necesario establecer nuevas soluciones eficaces, estratégicas, razonables e inmediatas, para la gestión del recurso hídrico, ya que, el planeta va aumentando su ritmo de consumo con el paso de los años.

### 3.4 Inundaciones

Las inundaciones son el riesgo natural más frecuente en las regiones mediterráneas y uno de los que provoca mayores pérdidas económicas. La aceleración del cambio climático hace que las lluvias sean más intensas y que su frecuencia aumente al mismo ritmo que la disponibilidad del agua disminuye.

Ashish Sharma, investigador en la Universidad de Nueva Gales, en Australia, advierte ante la pérdida de zonas de almacenamiento de agua: “el aumento de las lluvias está forzando las infraestructuras de drenaje en pueblos y ciudades, causando más inundaciones urbanas”. Las inundaciones y otros desastres relacionados con el agua representan el 70% de todas las muertes relacionadas con desastres naturales [13].

Un ejemplo reciente son las lluvias torrenciales azotaron Baleares en el mes de octubre de 2018, donde en pocas horas, llovió más que en un tercio de todo el año. Provocando fallos en el suministro de agua potable durante un periodo de seis meses:

“El tráfico y el agua potable vuelven al Llevant seis meses después de la tormentada. Los trabajos para reconstruir las infraestructuras dañadas en el Llevant de Mallorca tras la fatídica tormentada del 9 de octubre han permitido que la normalidad vaya regresando a esta comarca, donde las localidades más afectadas han recuperado el agua potable (...) también ha sido crucial recuperar el servicio de agua potable y de evacuación de aguas residuales. Después de 3,5 millones de euros de inversión, la reparación del servicio de aguas en Sant Llorenç está a punto de finalizar, con nuevas estaciones de bombeo, la sustitución del colector antiguo, y también nuevos equipos para conducir agua potable entre Son Carrió y Sa Coma. 06/04/2019, Fuente: ultimahora.es” [14].



*Figura 10. Garajes inundados y tuberías desbordadas por las intensas lluvias caídas en Palma [15].*

Para estos desafortunados escenarios, en España según el CCS hay unos gastos de media de casi 90 millones de euros por año (este valor es el mínimo ya que sólo contempla las personas y bienes asegurados, y no los que no lo están). En las últimas décadas se ha producido un incremento de los daños generados por las inundaciones. Esta tendencia parece obedecer a un incremento de la exposición, que podría ir acompañada de un incremento del riesgo causado por el cambio climático. [16].

Entre los daños producidos encontramos:

- Daños directos materiales (daños en viviendas, fábricas, calles, playas...)
- Daños humanos (víctimas mortales, heridos...)
- Daños materiales indirectos (retenciones en carreteras, afectaciones en suministros...)
- Dificultades en la gestión de la emergencia
- Otros (principalmente en economía y turismo)

### 3.5 Fugas

En las ciudades y pueblos españoles se consumieron en 2016: 4.290,5 hectómetros cúbicos, o expresado en litros, 42905 seguido por 9 ceros. De estos, el 16.3%, o sea, “701 seguido por 9 ceros” litros, se perdieron sin ni siquiera llegar a su destino [18]. Más allá de este valor concreto, lo más preocupante es que tras unos años de bajadas, las pérdidas en las redes de abastecimiento, vuelven a subir.

Pero, antes de nada, vamos a explicar brevemente algunos términos básicos del abastecimiento de agua que vamos a necesitar para seguir comprendiendo los aspectos claves de su problemática. Las empresas que gestionan el abastecimiento de agua, contabilizan la cantidad de agua que potabilizan e inyectan en la red. También contabilizan el consumo de la población, ya sea doméstico, edificios oficiales, comerciales, industria, etc. para facturarlos. Hasta ahí, todo lógico.

Si el sistema fuera perfecto, la suma de la lectura de todos los contadores de agua en la ciudad sería igual a la cantidad de agua que se inyecta en la red. Pero no es así, aparece una diferencia denominada agua no registrada.

Existen dos principales causas por lo que no se registra parte del agua:

1. Pérdidas aparentes, fallos en la medición. Los contadores no son perfectos y a veces muestran datos erróneos. Estos contadores deben poder medir bien un rango amplio de caudales, y esto no es fácil de conseguir, por lo que suelen presentar errores de medición sobre todo en caudales pequeños. Como el resto de la tecnología, estos contadores van mejorando, y se intenta que estos errores sean cada vez sean más pequeños. Otras veces, directamente sucede que, por descuido o negligencia, hay consumos que ni siquiera pasan por un contador.
2. Pérdidas reales, fugas. El agua ni siquiera llega a los puntos de consumo y se pierde por el camino. Estas

fugas en tuberías pueden producirse por agentes externos a la tubería, por características intrínsecas del material, por operación de la red, por condiciones de la instalación o por otras causas de menor importancia.



Figura 11. Fuga producida en La Maruca (Santander) que dejó a cientos de vecinos sin suministro de agua en 2019 [17].

Como hemos visto, el agua no registrada es muy fácil de calcular, pero discernir que parte es debido a problemas con los contadores, y que parte es debido a fugas, no es una cuenta directa, y se estima por medios indirectos. Como media, según la Estadística sobre el suministro y saneamiento del agua del INE, en el año 2016, el 35% del agua no registrada eran pérdidas aparentes y el 65 % pérdidas reales.

### 3.6 Situación actual

Si echamos la vista atrás y vemos los datos de dotación y porcentaje de pérdidas en la red de abastecimiento desde 2008, vemos algo que puede parecer preocupante: una subida de más de un punto porcentual en las pérdidas de agua.

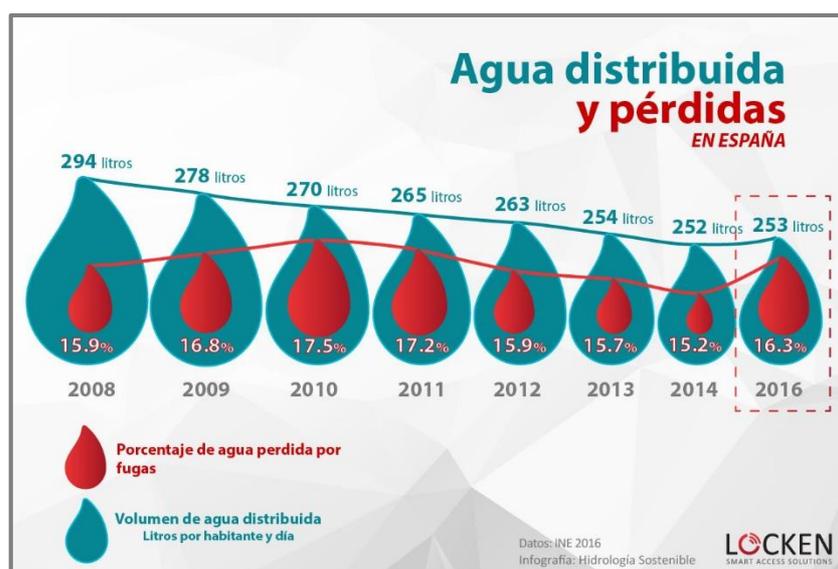


Figura 12. Agua distribuida frente al porcentaje de pérdida en España en los últimos años [18].

### 3.7 Situación en comparación con Europa

Estos datos que se muestran a continuación corresponden a EurEau, por lo que no coinciden exactamente con los datos del INE detallados para España, pero nos servirá de referencia para la comparativa con los demás países.

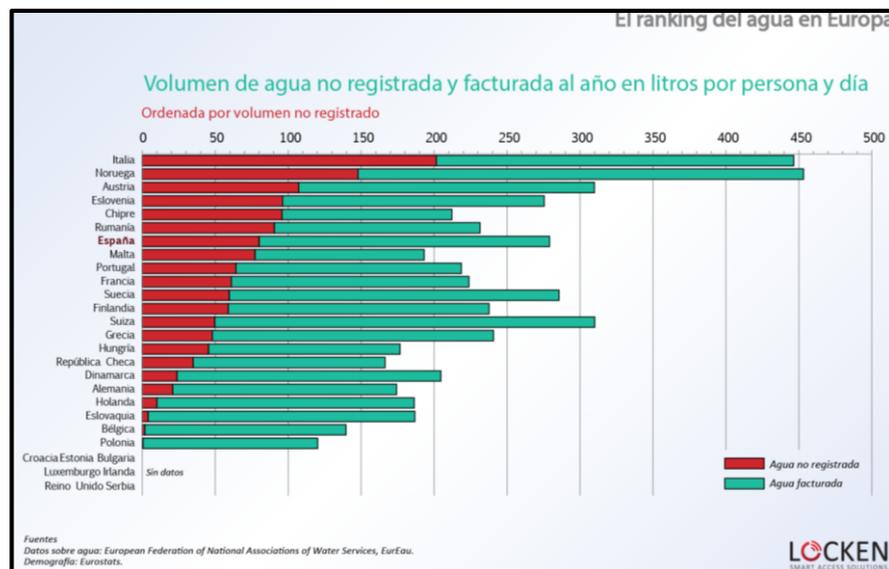


Figura 13. Volumen de agua no registrada/facturada al año por persona y día en los países europeos [18].

Según podemos ver en la gráfica, estamos claramente por encima de la media, tanto en dotación, como en pérdidas de agua por habitante.

### 3.8 Sistemas de bombeo obsoletos

Se conoce a un sistema de bombeo como un conjunto de elementos que permiten el transporte a través de tuberías y el almacenamiento temporal de los fluidos, de forma que se cumplan las especificaciones de caudal y presión necesarias en los diferentes sistemas y procesos [21].

La especificación básica que debe satisfacer un sistema de bombeo es el transporte de un caudal de un determinado fluido de un lugar a otro. Además, suele ser necesario que el fluido llegue al lugar de destino con una cierta presión, y que el sistema permita un rango de variación tanto del caudal como de la presión.

El problema aparece cuando estas especificaciones comienzan a dejar de cumplirse debido al paso del tiempo y la falta de inversión en renovación, lo que provoca deficiencias en el abastecimiento debido fundamentalmente a:

1. Fallos en sistemas de bombeo por cavitación: Es un fenómeno frecuente en sistemas de bombeo de agua donde se presentan cambios bruscos en la velocidad de flujo.
2. Fallos en sistemas de bombeo por golpe de ariete: Es la sobrepresión generada por la interrupción drástica del flujo dentro de una tubería. Puede, en los peores casos, provocar una fuga (explicada anteriormente) en las partes más débiles de la instalación.
3. Fallos en sistemas de bombeo por dimensionamiento en tuberías y bombas: Dependiendo de los elementos del sistema que se encuentren mal dimensionados pueden presentarse diferentes fallos en el sistema de bombeo.
4. Fallos en sistemas de bombeo por falta de mantenimiento: Los fallos en sistemas de bombeo por falta de mantenimiento, se evidencian principalmente en los equipos mecánicos.

En agosto del año 2019, en Alfaro, una ciudad y municipio de la comunidad autónoma de La Rioja, se produjo un fallo del sistema eléctrico que afectó al sistema de bombeo de agua que cubre el suministro de la ciudad dejando a los vecinos sin acceso agua durante cinco horas y sin previo aviso. Cito textualmente: “Alfaro recupera el abastecimiento de agua tras cinco horas de corte por un fallo eléctrico en el bombeo (...) después de horas intensas de trabajo de operarios del Ayuntamiento y fontaneros para ponerle solución, el abastecimiento de agua ha ido regresando poco a poco a los hogares”, Fuente: larioja.com [22].

### 3.9 Contaminación del agua

Un aspecto clave a la hora de evaluar los posibles riesgos en el suministro de aguas urbanas viene representado por la posibilidad de que en cualquiera de los 5 subprocesos explicados en la introducción se produzcan filtraciones no deseadas de sustancias peligrosas que contaminen el agua en el proceso de abastecimiento. Estas sustancias se clasifican en:

- Fertilizantes: sustancia orgánica o inorgánica compuesta de nutrientes en forma asimilable para las plantas para mejorar su crecimiento.
- Pesticidas: sustancias cuya función es la destrucción de plagas.
- Desperdicios tóxicos: constituyen un tipo de residuos peligrosos capaces de causar efectos nocivos sobre la salud de los seres humanos.
- Aguas residuales: se pueden definir como aguas cuya calidad se ha visto deteriorada por influencia del ser humano.

Un ejemplo de cómo la sociedad se previene de estas sustancias se encuentra en las calles de las ciudades. En ellas, las tuberías de la red de saneamiento (redes que transportan aguas residuales) deberán ir por el centro de la calle y a una mayor profundidad que aquellas tuberías que aportan el agua apta para el consumo, evitando así, posibles riesgos de contaminación por fugas.

### 3.10 El impacto en la sociedad debido a la escasez del agua

A continuación, una vez presentada la problemática asociada al suministro de agua ineficiente, se detallan cuáles son las consecuencias de este problema de cara a la sociedad [19]. Las consecuencias se pueden organizar en los siguientes grupos: salud, trabajo, educación, hogar, Estado, comunidades autónomas y Medio Ambiente.

En primer lugar, en el ámbito sanitario la principal consecuencia reside en la aparición de enfermedades frecuentemente gastrointestinales. Aunque también pueden considerarse aspectos como la falta de atención médica en centros sanitarios por suministros de agua insuficientes, así como, el cierre de algunos servicios médicos por condiciones sanitarias.

Otro grupo importante sería el asociado al trabajo. En un futuro y en vista a la escasez del agua, problemas como: declaración de días no laborables por falta de agua en el lugar de trabajo, inasistencias al trabajo por parte de los trabajadores al no cumplirse las condiciones higiénicas mínimas, traspaso o cierre de los centros de trabajo... podrían ser una realidad si seguimos infravalorando la importancia de un recurso tan vital como es el agua.

En el ámbito de educación y de forma parecida al ámbito laboral las principales consecuencias vendrían definidas por la inasistencia de los jóvenes a los centros de estudios y el cierre temporal de centros educativos por la falta de agua.

En el hogar aparecen sin duda las mayores consecuencias, tales como: limitaciones en la preparación de alimentos y aseo personal, el abandono de viviendas por insuficiente agua, la necesidad de implantar instalaciones que suministren agua, la alteración de horarios, un reciclaje antihigiénico del agua, una dificultad de desarrollar una vida sana y saludable, etcétera.

Relativo al Estado, en un futuro se prevé la necesidad de instaurar un ministerio de atención de las aguas. Por otro lado, con respecto a las comunidades, podrían aparecer conflictos sociales expresados en forma de protestas

en calles y avenidas, así como, la aparición de venta ilegal de agua a los consumidores de una comunidad.

Por último, en el medio ambiente se aprecian consecuencias como: la degradación de los ecosistemas, la alteración del ciclo del agua y la alteración de la calidad del agua entre otras.

### 3.11 ¿Es nuestro país consciente de dicha problemática?

El lector de dicho trabajo puede apreciar que, con cierta frecuencia a lo largo de este trabajo, se busca referenciar a España en la información que se va detallando. La explicación reside en primer lugar en que España es considerado un país europeo desarrollado, es decir, que posee un alto nivel de vida o, dicho de otra forma, un alto nivel de desarrollo humano. Y, en segundo lugar, el lugar de publicación de este trabajo (Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sevilla) es en España, lo que significa que para el mayor porcentaje de los lectores les será más personal y más interesante la exposición de ejemplos relativos a dicho país.

Por ello, y teniendo en cuenta que el objetivo de dicho trabajo es una llamada a la concienciación, veo necesario que, después la gran cantidad de información referenciada y relativa a España (noticias, rankings, datos de futuro...), les presente el grado de implicación que tiene este país en la actualidad con la problemática expuesta anteriormente.

Una buena forma de verlo es mediante una noticia publicada en febrero de 2020 (año de la publicación de este trabajo) en la que se explica que, el nuevo gobierno, marca el recurso del agua como uno de sus objetivos primordiales para la adaptación al futuro escenario climático, “El agua, uno de los principales ejes de la adaptación al cambio climático fijados por el Gobierno”, Fuente: iagua.es [20].

En esta noticia, la vicepresidenta cuarta y ministra para la transición ecológica y el reto demográfico, Teresa Ribera, compareció en el Congreso para explicar las líneas de acción prioritarias de su departamento e informar sobre las prioridades del Gobierno en materia energética, medioambiental y reto demográfico. Centrando la atención en la sostenibilidad, la lucha contra el cambio climático, la corrección de desequilibrios y la exigencia de poner a la sociedad en el centro del reto hacia la transición energética.

“Liderar la mitigación y la adaptación al cambio climático convertirá nuestra acción en una gran oportunidad para el progreso de nuestro país”, decía Ribera. Entre las actuaciones a las que el gobierno se compromete destacaré las asociadas al ámbito de este trabajo:

- Una nueva red de vigilancia meteorológica: que permita predecir los escenarios meteorológicos, así como el impacto de estos en la sociedad y en los sistemas de redes de suministro de agua potable.
- Prevenir el riesgo de inundación: Para reducir los riesgos asociados a las inundaciones derivadas del incremento de los fenómenos meteorológicos extremos.
- Reforzar los procesos de depuración y el saneamiento: donde la vicepresidenta ha señalado que debemos prepararnos para una relación distinta con el agua, pues el cambio climático obliga a planificar y gestionar de otra manera, entendiendo el recurso como único y atendiendo especialmente a las cuestiones de calidad, lucha contra la contaminación, extracciones ilegales o amenazas a ecosistemas protegidos.

A todo esto, responderá el nuevo ciclo de planificación hidrológica 2022-2027 para el que ya han comenzado los trabajos pertinentes.

Con esto queda demostrado que los tiempos venideros requieren de un planteamiento muy extenso de la situación del agua y que, en España, se están tomando importantes medidas de acción para lograr adaptarnos al desafío emergente del agua.

### 3.12 Tecnologías cooperativas como posible solución

Cambiando ahora el horizonte de mira y poniendo el foco a continuación en el mundo, el Consejo Económico Mundial (CEM) cree que la solución ante esta problemática puede estar en desarrollar sistemas de monitorización conectados que ayuden a anticipar fallos del sistema y otros peligros potenciales. Es decir,

desarrollar un sistema de colaboración en el que todos los aspectos que influyen en el entorno del proceso de suministro de aguas urbanas se encuentren por así decirlo “conectados”. Estas redes de colaboración son la clave de las futuras ciudades inteligentes [21].

Ante esta afirmación uno se preguntará ¿Qué es una ciudad inteligente? A día de hoy no existe una definición universal aceptada de ciudad inteligente, significa distintas cosas para distintas personas. Así pues, el concepto de ciudad inteligente varía de una ciudad a otra y de un país a otro, dependiendo del nivel de desarrollo, de la voluntad de cambio y reforma y de los recursos y aspiraciones de los residentes de la ciudad.

Sin embargo, según un informe de Nesta (una fundación para la innovación global) las ciudades inteligentes del futuro serán aquellas que combinen los mejores aspectos de las infraestructuras tecnológicas al mismo tiempo que aprovechen el creciente potencial de las “tecnologías colaborativas”, permitiendo así una mayor colaboración entre comunidades urbanas, así como entre ciudadanos y gobiernos municipales, con el fin de mejorar la calidad de vida.

## 4 CASO I. VERSIÓN COOPERATIVA

*Para conseguir el mejor resultado, cada miembro del grupo debe hacer lo mejor para él mismo y para el grupo.*

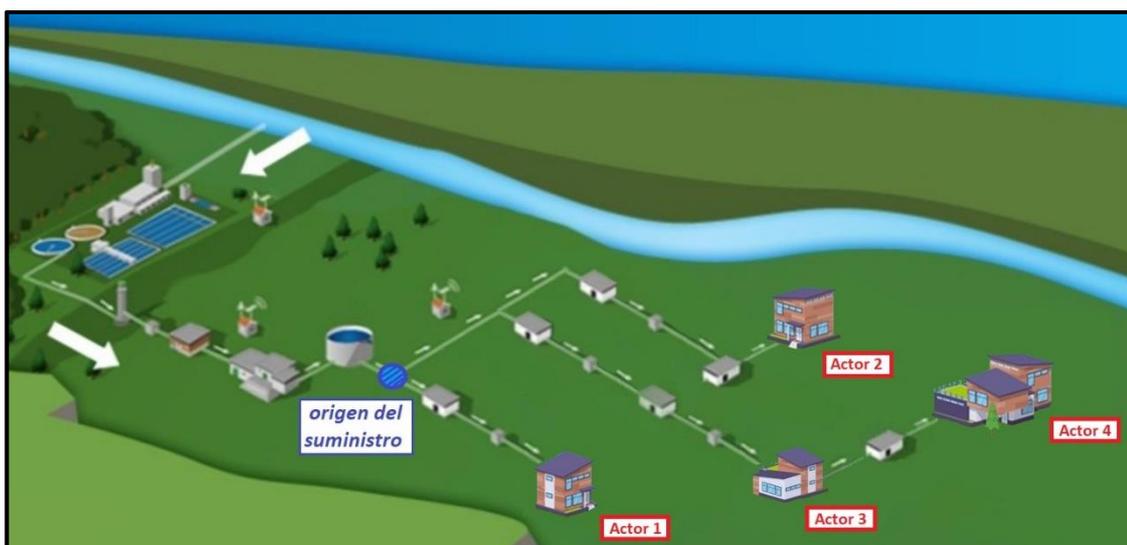
John Forbes Nash

Se plantea a continuación el primer caso de resolución. En él, analizaremos un problema aplicado a un escenario en el que participan cuatro actores que deciden tomar una actitud colaborativa. Es decir, los actores del problema centrarán sus esfuerzos en establecer acuerdos que les permitan obtener una serie de beneficios que de manera individual no podrían alcanzar.

Para plasmar este enfoque recurriremos a su aplicación por medio de una situación cotidiana en nuestra sociedad. Para ello, se definen cuatro actores que actúan como demandantes de agua en un sistema de redes de tuberías que parten de un mismo origen. Para poder comprenderlo es necesario en primer lugar, describir a los actores principales.

El lector podrá observar en la *Ilustración 13* una representación que aúna la problemática que hemos explicado en el Capítulo 3, con los conceptos que durante este capítulo vamos a desarrollar. Se muestra la captación del recurso hídrico a partir de un río, y todo su proceso de tratado hasta conseguir un agua apta para el consumo.

Esta agua tratada, mediante un sistema de tuberías abastece a distintos demandantes (que actuarán como actores del juego) de una determinada ciudad. Es evidente que esta ilustración muestra una escala no fidedigna, es debido a que el objetivo de esta ilustración consiste en resumir de manera didáctica todo el ciclo del agua para posteriormente centrarnos en analizar el abastecimiento de los cuatro actores del problema.



*Figura 14. Representación del ciclo total de abastecimiento del agua para cuatro actores [23].*

Podemos encontrar cuatro actores principales que hacen referencia a posibles edificaciones de una ciudad genérica. Para una mayor comprensión cada actor lleva a cabo una actividad diferente en la ciudad, pudiendo

ser descritos como:

- En primer lugar, tenemos un primer actor que representa una clínica veterinaria y se encuentra abajo a la izquierda de la ilustración. Tiene una media de atención de seis clientes al día, por lo que su demanda diaria de agua se estima en un valor bajo de abastecimiento.
- En la parte superior localizamos al segundo actor, que consiste en un bloque de viviendas. Este jugador, necesita una demanda diaria de agua apta para el consumo para abastecer el uso doméstico de toda la comunidad. El número de pisos se estima en 3, representando una comunidad de pocos vecinos.
- El tercer actor hace referencia a una peluquería de gran tamaño. Esta peluquería, debido a una intensa campaña de búsqueda de clientes ha conseguido cada día dar servicio a un elevado número de cortes de pelo. En base a ello, la demanda de agua que necesita (aproximadamente similar a la del segundo actor) la destina a ofrecer una gran cantidad de servicios, tales como:
  - Lavado de cabello
  - Afeitarse a sus clientes
  - Elaboración de cosméticos
  - Uso de agua para los servicios
  - Uso de agua durante los recortes de cabello
- En último lugar encontramos al cuarto actor. Este, es un prestigioso local de relajación que funciona por medio de baños termales. Este tipo de negocios, como es evidente, requiere de un suministro continuo de agua que permita mantener acondicionadas sus salas de baño, mediante una correcta ambientación y climatización. Por ello, este último agente, demandará una cantidad de agua necesariamente mayor que sus actores precedentes.

Una vez definidos los actores, comenzamos a establecer las bases del “juego”. Definimos para ello el vector de costes, esto es, cuanto paga cada actor por tener acceso a la red de agua que suministra a todos ellos. Naturalmente, conforme más agua se demanda, el acceso a la red de agua es más caro. Por ello, se define:

- $C(1) = 1$  u.m, precio en términos de unidades monetarias genéricas que deberá incurrir el jugador N°1 para tener acceso a agua.
- $C(2) = 3$  u.m, precio en términos de unidades monetarias genéricas que deberá incurrir el jugador N°2 para tener acceso a agua.
- $C(3) = 3$  u.m, precio en términos de unidades monetarias genéricas que deberá incurrir el jugador N°3 para tener acceso a agua.
- $C(4) = 1 * C(3) + 1 = 4$  u.m, precio en términos de unidades monetarias genéricas que deberá incurrir el jugador N°4 para tener acceso a agua.

Puede observarse que el precio que debe pagar nuestro jugador número cuatro, representa el mismo que el del jugador número tres más un incremento adicional. Esto es así, debido a que el jugador que representa el local de baños utiliza parte del sistema de tuberías que alimentan al jugador 3.

Con todo esto, si el problema se tratase de un enfoque no cooperativo, ya estaría resuelto. Es decir, cada uno de ellos hace frente al coste impuesto por la compañía y a cambio, recibe agua (suponiendo que se cumplen las restricciones particulares del problema). De una manera sencilla, el problema podría definirse mediante el siguiente diagrama de suministro:

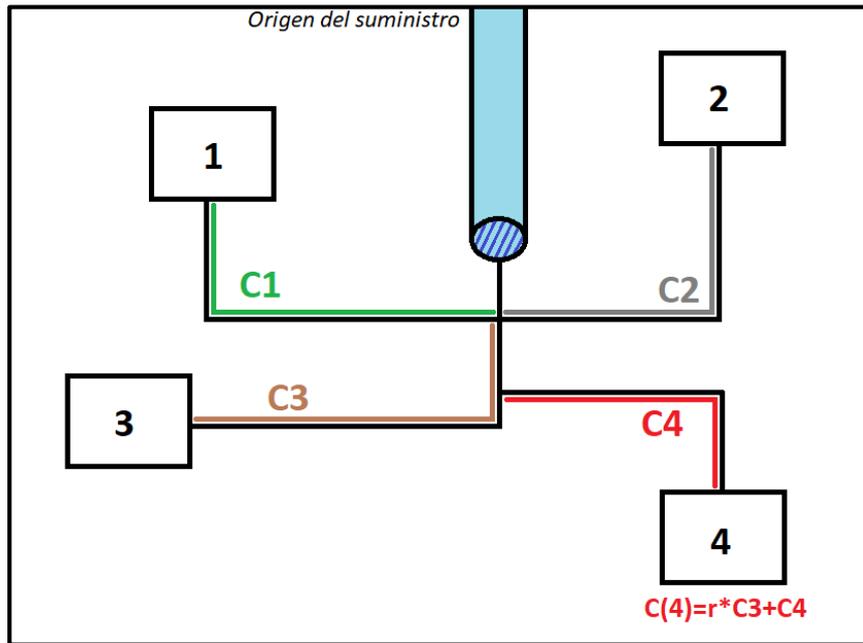


Figura 15. Representación elemental de un enfoque no colaborativo.

Sin embargo, los actores no están contentos con la situación actual debido a que tienen que hacer frente a constantes fallos en el sistema de tuberías lo que provoca una gran cantidad de problemas de suministros.

Suponiendo una recogida de datos de los cortes de agua producidos, se tiene:

1. Para el primer agente, se producen en torno a 2-3 cortes de agua a la semana con un tiempo medio de reparación de 30 minutos.
2. Para el segundo jugador, la situación es algo más complicada. Debido al deterioro de su sistema de tuberías sufre aproximadamente un corte de agua cada dos días cuyo tiempo medio de reactivación es de una hora.
3. Los cortes en la peluquería son mucho más frecuentes debido a un mal funcionamiento de la bomba que le abastece. Pese a ello, el tiempo de reactivación del suministro se logra en apenas 20 minutos con tan sólo reiniciar la bomba.
4. Para el cuarto actor, los cortes de agua (uno cada tres días) están poniendo en riesgo los beneficios del negocio. El día en el que se produce el corte de agua, el local se ve obligado a cerrar debido al sobrecoste que supone volver a climatizar las salas de baño.

Esta desafortunada problemática desemboca en numerosos y aleatorios cortes de agua al día, que provoca el siguiente impacto negativo en cada uno de los actores:

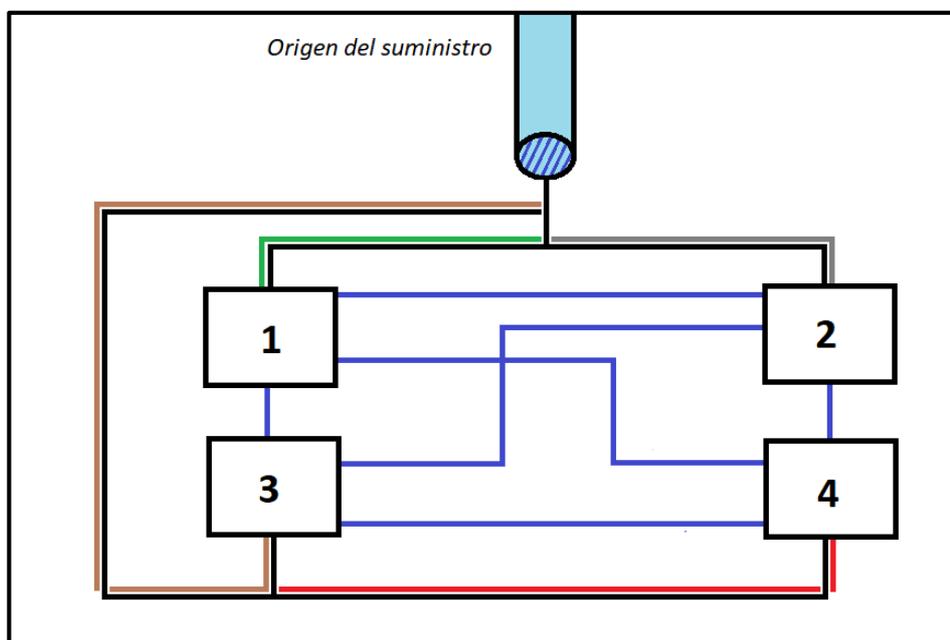
- En la clínica, los frecuentes cortes de agua se tratan de solucionar realizando actividades alternativas que no requieran de suministros de agua. Sin embargo, esta solución cada vez es más insostenible debido a que, en la mayoría de las ocasiones, el corte de suministro se produce en los momentos de baño de los animales para su desinfección, lo que obliga a interrumpir este proceso.
- En el bloque de edificios aparece una incapacidad para satisfacer las necesidades básicas domésticas, lo que está generando ambientes de tensión en la comunidad.
- En la peluquería, se están produciendo importantes pérdidas en cuanto a calidad de servicio. Los cortes de agua ocasionan, además, que muchos trabajos se tengan que interrumpir provocando malas valoraciones de los clientes.
- En el local termal, este tipo de casuística supone la obligación de cierre de las salas de baño al no disponer de agua para mantener las piscinas en condiciones óptimas, lo que genera un importante

malestar de los clientes.

Para evitar esto, los jugadores se reúnen y afrontan un enfoque de carácter colaborativo. Este escenario consiste en la posibilidad de que, pagando un poco más, los constantes cortes de agua se logren reducir con ayuda de todos.

Para ello, la compañía de suministro eléctrico se reúne con ellos y les ofrece a los actores una oferta: “ofrecemos instalar nuevas tuberías que conecten a unos actores con otros, de modo que, ante un posible corte, otro actor pueda ceder parte de su suministro de agua al actor afectado”. Además, “la compañía se compromete a que, si los actores cooperan entre ellos, reducirá el coste de dicha nueva instalación en un 85%”.

Esto significa que, a cambio de un mínimo incremento del pago a la compañía de agua, los cortes de agua producidos se solventarían al momento sin tener que hacer frente a largas horas sin agua. Quedando el nuevo diagrama elemental de la siguiente manera:



*Figura 16. Representación elemental del enfoque cooperativo.*

Es evidente que, cuando se analizan este tipo de escenarios, la disposición a tener acuerdos varía en función de los intereses de cada actor. La compañía es consciente de esta situación, y por ello, define los nuevos costes a los que tendrán que hacer frente los agentes que decidan cooperar en función de los actores con los que decidan asociarse. Estos son:

Coste	Definición
C(1)	Pago del jugador N°1 sin cooperar.
C(2)	Pago del jugador N°1 sin cooperar.
C(3)	Pago del jugador N°1 sin cooperar.
C(4)	Pago del jugador N°1 sin cooperar.
<b>C(12)</b>	Pagos de los jugadores 1 y 2 si deciden cooperar entre ellos.
<b>C(13)</b>	Pagos de los jugadores 1 y 3 si deciden cooperar entre ellos.
<b>C(14)</b>	Pagos de los jugadores 1 y 4 si deciden cooperar entre ellos.
<b>C(23)</b>	Pagos de los jugadores 2 y 3 si deciden cooperar entre ellos.
<b>C(24)</b>	Pagos de los jugadores 2 y 4 si deciden cooperar entre ellos.
<b>C(34)</b>	Pagos de los jugadores 3 y 4 si deciden cooperar entre ellos.
<b>C(123)</b>	Pagos de los jugadores 1, 2 y 3 si deciden cooperar entre ellos.
<b>C(124)</b>	Pagos de los jugadores 1, 2 y 4 si deciden cooperar entre ellos.
<b>C(134)</b>	Pagos de los jugadores 1, 3 y 4 si deciden cooperar entre ellos.
<b>C(234)</b>	Pagos de los jugadores 2, 3 y 4 si deciden cooperar entre ellos.
<b>C(1234) = C(N)</b>	Pagos de los jugadores si todos deciden cooperar.

Tabla 1. Descripción de costes del Caso I.

#### 4.1 Parámetros y condiciones del problema

Una vez definidas las variables de costes, se presentan a continuación los valores que la compañía de agua asigna a cada uno de estos parámetros en función del coste de instalación de las nuevas tuberías. Estos son:

Coste	Definición
C(1)	1 u.m
C(2)	3 u.m
C(3)	3 u.m
C(4)	4 u.m
<b>C(12)</b>	<b>5 u.m</b>
<b>C(13)</b>	<b>5 u.m</b>
<b>C(14)</b>	<b>6 u.m</b>
<b>C(23)</b>	<b>6 u.m</b>
<b>C(24)</b>	<b>7 u.m</b>
<b>C(34)</b>	<b>8 u.m</b>
<b>C(123)</b>	<b>9 u.m</b>
<b>C(124)</b>	<b>10 u.m</b>
<b>C(134)</b>	<b>11 u.m</b>
<b>C(234)</b>	<b>14 u.m</b>
<b>C(1234) = C(N)</b>	<b>18 u.m</b>

Tabla 2. Valores de costes asociados al Caso I.

Es importante introducir que dichos datos no pueden ser elegidos de forma arbitraria. Han de satisfacer dos condiciones fundamentales.

- ✓ En primer lugar, el coste asociado a la unión entre dos o más actores siempre deberá ser superior al coste que cada uno afrontaría de manera individual, es decir, “cuando dos subconjuntos de actores se unen, el coste de la nueva unión siempre será superior a cada uno de los costes de los subconjuntos iniciales.”
- ✓ En segundo lugar, estos datos deben garantizar que estamos frente a un problema definido convexo. Para ello, definiremos dos subconjuntos que contengan las posibles coaliciones entre los actores presentes en el problema:

$$S \subseteq \{1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, N\}.$$

$$T \subseteq \{1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, N\}.$$

A partir de ellas, se deberá garantizar convexidad en el problema por medio de la siguiente restricción:

$$C(S \cup T) + C(S \cap T) \geq C(T) + C(S)$$

La comprobación de que se cumple dicha restricción para  $\forall (S, T) \subseteq N$  se encuentra desarrollada en el Anexo A donde, con ayuda del programa Microsoft Excel, se ha podido detallar que este problema cumple la condición de convexidad para todas las combinaciones de los subconjuntos S y T.

Una vez que las condiciones previas han sido demostradas, se presenta como quedaría el nuevo sistema de abastecimiento en función de todas las combinaciones a dos posibles:

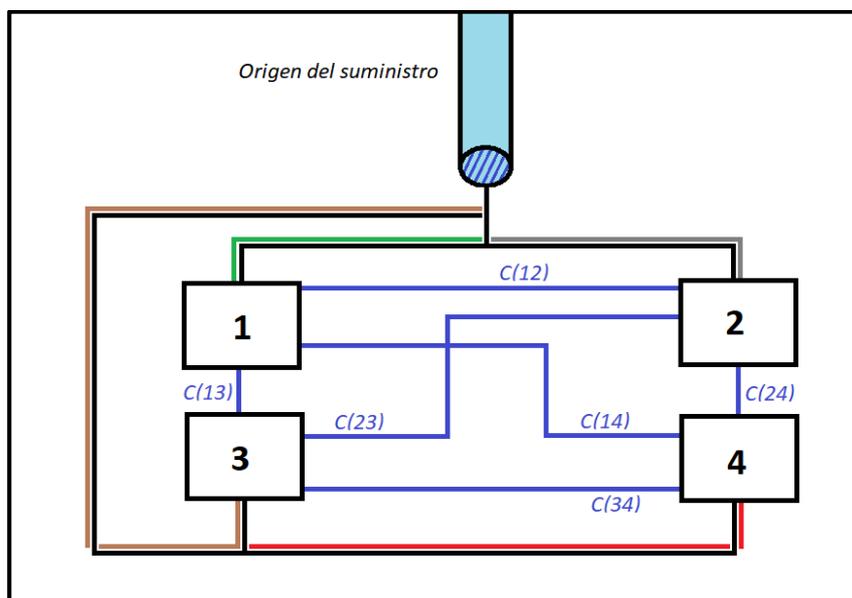


Figura 17. Representación elemental del enfoque cooperativo a dos en función de sus costes de coalición.

## 4.2 Descripción del modelo

El modelo se define como un juego cooperativo compuesto por cuatro actores para un vector de costes dado, tanto para los costes individuales como para los costes asociados a las distintas coaliciones. Además, cabe destacar que todas las variables presentes en el modelo se definen no negativas.

### 4.3 Modelo

El modelo consiste en calcular y analizar el Nucléolo. Para ello, hay que definir una nueva variable, el vector de pagos tras el juego. Siendo el Core:

- $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ , que representa lo que paga cada jugador después de jugar.

Este vector deberá satisfacer la siguiente condición:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = C(N) \quad (I)$$

A dicha restricción, habrá que unir otra expresión que garantice que, a cabo de beneficiarse de un incremento de suministros, los actores deberán pagar un incremento respecto a sus valores de decisión individuales. Esto es:

$$x(S) \geq C(S) \quad (II)$$

Para  $S \subseteq \{1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, N\}$ .

Este tipo de problemas de programación se basan en la minimización de variables con respecto a unos umbrales mínimos descritos de antemano (costes individuales). Su resolución consiste en encontrar una combinación de valores mínimos de estas variables que no sobrepase los límites establecidos pero que permita reducir todo lo posible el valor de la función objetivo, que sería el pago final por abastecerse de rutas de agua alternativas.

### 4.4 Solución

La solución que se obtiene tras aplicar el código del algoritmo detallado en el Anexo B, es:

$x_1$	<b>2</b>
$x_2$	<b>4</b>
$x_3$	<b>5</b>
$x_4$	<b>7</b>
<i>Suma de Pagos (=C(N))</i>	<b>18</b>

*Tabla 3. Primera solución del Modelo. En u.m genéricas.*

En esta primera forma de resolución se puede observar un incremento del vector de pagos final.

$$C = \{1, 3, 3, 4\}.$$

$$X = \{2, 4, 5, 7\}.$$

<i>Tabla 4. Incremento de costes al cooperar en la solución 1 del Modelo. En u.m genéricas.</i>	
<b>x1</b>	<b>+1</b>
<b>x2</b>	<b>+1</b>
<b>x3</b>	<b>+2</b>
<b>x4</b>	<b>+3</b>

*Tabla 4. Incremento de costes en la solución 1 del Modelo. En u.m genéricas.*

Una vez descrita la solución del Nucléolo, se resuelve utilizando un segundo enfoque en donde se obtiene la siguiente solución (conocida como el Coreset):

<i>Tabla 5. Segunda solución del Modelo. En u.m genéricas.</i>	
<i>y1</i>	<b>1,667</b>
<i>y2</i>	<b>3,5</b>
<i>y3</i>	<b>5,1667</b>
<i>y4</i>	<b>7,6667</b>
<i>Suma de Pagos</i>	<b>18</b>

*Tabla 5. Segunda solución del Modelo. En u.m genéricas.*

Para esta nueva solución, los incrementos de costes que se producen tras jugar son:

<i>Tabla 6. Incremento de costes al cooperar en la solución 2 del Modelo. En u.m genéricas.</i>	
<b>y1</b>	<b>+0,667</b>
<b>y2</b>	<b>+0,5</b>
<b>y3</b>	<b>+2,1667</b>
<b>y4</b>	<b>+3,667</b>

*Tabla 6. Incremento de costes en la solución 2 del Modelo. En u.m genéricas.*

#### 4.5 Conclusión del caso cooperativo

Estamos ante la resolución de un problema por medio de Teoría de Juegos cooperativos. Se ha podido observar, durante la explicación y resolución del mismo, el punto de inflexión en el que los actores optan por cooperar, describiendo posteriormente los beneficios que pueden obtener si lo hacen.

Es importante describir que, aunque pueda haber una primera tendencia a colaborar, en ningún caso supone una obligación (para este problema), es decir, los jugadores cooperan convencidos de que están logrando juntos nuevos beneficios y oportunidades que por sí solos no podrían lograr. Por lo cual, para una correcta colaboración es necesario el convencimiento por parte de todos los actores implicados en que la mejor opción es aliarse y colaborar entre ellos.

Por tanto, ante este escenario, los actores han tenido que decidir entre dos posibles enfoques:

1. Limitarse a seguir pagando una cantidad a la compañía de agua y convivir con frecuentes cortes de agua que dificultan su día a día.
2. Por medio de acuerdos con el resto de actores, incrementar el pago mensual al que incurren a cambio de conseguir crear un sistema que permita mitigar los cortes de agua por medio de realimentaciones de agua entre unos actores con otros.

En este problema, parece evidente que colaborar es la mejor opción, debido a que, las condiciones impuestas para lograr cooperación son muy favorables. Sin embargo, esto no siempre tiene que ser así y el análisis dependerá fundamentalmente del contexto en el que se desarrolla el problema.

A continuación, con el objeto de seguir comprendiendo los posibles enfoques en Teoría de Juegos pasaremos a analizar un problema donde la actitud de los jugadores se basará en el rechazo a establecer acuerdos, centrándonos de este modo, en un enfoque no colaborativo.

## 5 CASO II. VERSIÓN NO COOPERATIVA

*“Cada individuo se esfuerza siempre para encontrar la inversión más provechosa para el capital que tenga”*

Adam Smith

Se plantea a continuación el segundo caso de resolución. Siguiendo el orden de descripción del trabajo, nos adentramos en un enfoque no colaborativo, es decir, los actores del problema no llegarán acuerdos. Para poder plasmar este enfoque a la realidad, recurriremos a su aplicación por medio de una situación cotidiana en nuestra sociedad, el abastecimiento de diferentes tipos de aguas para su posterior uso en diferentes fines.

Para ello, en primer lugar, será necesario definir los actores principales del problema. Estos son:

1. Agricultura
2. Industria
3. Usuarios Domésticos

Cada uno de estos actores, para su correcto funcionamiento demanda una determinada cantidad de agua. El agua, tal y como la conocemos en sociedad, puede encontrarse con diferentes propiedades en función del tratamiento que haya recibido. En este escenario, suponemos tres tipos de agua. Estas son:

- a) Agua superficial
- b) Agua subterránea
- c) Agua tratada.

El suministro de agua superficial y subterránea se puede obtener de fuentes locales, aunque también, se puede importar de otras cuencas vecinas.

Definiendo un contador genérico  $k$  que represente un índice para cada usuario, definimos:

- $k=1$ : Agricultura
- $k=2$ : Industria
- $k=3$ : Usuarios domésticos

De forma gráfica, el problema definido se representa en la siguiente ilustración:

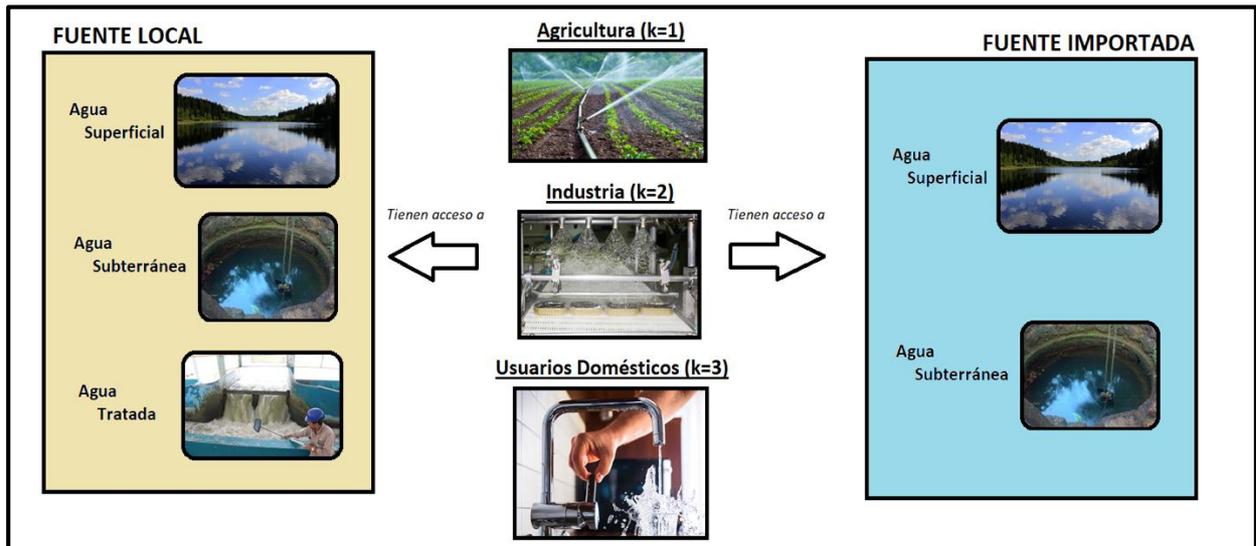


Figura 18. Representación elemental del planteamiento no cooperativo [24].

A continuación, se definen las siguientes variables de decisión para cada uno de los tres usuarios:

Variable de decisión	Definición
sk	Uso de agua superficial de fuente local.
gk	Uso de agua subterránea de fuente local.
tk	Uso de agua tratada.
sk*	Uso importado de agua superficial.
gk*	Uso importado de agua subterránea.

Tabla 7. Variables de decisión del Caso II.

Con ello, podemos definir la estrategia de cada jugador. Se define la estrategia como el conjunto de decisiones que un jugador toma a lo largo de la partida, en nuestro caso, la estrategia hace referencia a las cantidades de agua que cada usuario demanda. Teniendo cinco opciones para ser abastecido, se define el vector estrategia para cada consumidor compuesto por cinco elementos:

$$x_k = (sk, gk, tk, sk^*, gk^*)$$

Por otro lado, se puede definir la función de pagos. La función de pagos representa la valoración que para cada jugador tienen las consecuencias de alcanzar un determinado resultado. Particularizando a nuestro escenario, representa la cantidad total de agua que recibe cada uno de los tres actores del modelo. Luego:

$$F_k = sk + gk + tk + sk^* + gk^*$$

## 5.1 Limitaciones en función de cada actor

Cada actor tiene una limitación común. Esta restricción está asociada a la demanda total de agua que cada jugador puede consumir, la cual debe estar entre unos umbrales que acotan la cantidades máximas y mínimas de agua que cada actor puede demandar.

Con ello, se definen dos restricciones asociadas a cada actor. En la primera, la cantidad total de agua suministrada no puede ser menor que una cantidad mínima,  $D_{min}$ . Y en la segunda, el agua total suministrada no debe ser mayor que un dato de demanda máxima,  $D_k$ . Por tanto:

$$sk + gk + tk + sk * + gk * \geq D_{min}k \quad (I)$$

$$sk + gk + tk + sk * + gk * \leq Dk \quad (II)$$

Estas restricciones garantizan por un lado la rentabilidad mínima de las empresas de abastecimiento de agua y, por otro lado, evitan un consumo excesivo de un recurso tan imprescindible para la sociedad.

## 5.2 Limitaciones comunes

Además de la limitación asociada a la demanda, cada jugador tiene sus propias limitaciones individuales.

### 5.2.1 Usuarios agrícolas

Los usuarios agrícolas, asociados al primer valor del contador  $k=1$ , tienen dos restricciones principales. Para definir las será necesario introducir nuevas variables:

$G$  = conjunto de cultivos que solo pueden usar agua subterránea.

$a_i$  = proporción del cultivo  $i$  en el área agrícola

$w_i$  = necesidad de agua del cultivo  $i$  por hectárea.

$T$  = conjunto de cultivos que pueden usar agua tratada.

$W$  = necesidad total de agua por hectárea.

Es inmediato deducir:

$$W = \sum a_i * w_i$$

La diferenciación de los cultivos en función del agua es debida a que el agua subterránea tiene la mejor calidad de riego, mientras que el agua tratada tiene la peor.

Por tanto, la presencia de cultivos sensibles a la calidad del agua hace que muchos de estos solo puedan ser regados con agua subterránea. Siendo los cultivos menos sensibles, accesibles al riego por medio de agua tratada.

Teniendo esta información en cuenta, pasaremos a definir las restricciones asociadas al sector agrícola. En primer lugar, la proporción de agua subterránea disponible (cociente a) no puede ser menor que la necesidad de agua de los cultivos que solo pueden usar agua subterránea (cociente b).

- Agua subterránea demandada por el sector agrario / Agua demandada total por el sector agrario.
- Necesidad de agua por parte del sector agrario para los cultivos con riego exclusivo de agua subterránea / Necesidad total de agua por parte del sector agrario.

Por tanto:

$$\frac{(g1 + g1 *)}{(s1 + g1 + t1 + s1 * + g1 *)} \geq \frac{\sum_{i \in G} (a_i * w_i)}{W} \quad (III)$$

$$\text{Con } W = \sum_{\text{Para todo } i} (a_i * w_i)$$

En segundo lugar, para la proporción de agua tratada, la disponibilidad de esta agua (c) no puede ser mayor que la proporción de necesidad de agua de los cultivos que usan agua tratada (d).

- c) Agua tratada demandada por el sector agrario / Agua demanda total por el sector agrario.
- d) Necesidad de agua por parte del sector agrario para los cultivos con riego de agua tratada / Necesidad total de agua por parte del sector agrario.

Esto es:

$$\frac{(t1)}{(s1 + g1 + t1 + s1 * +g1 *)} \leq \frac{\sum_{i \text{ en } T}(ai * wi)}{W} \quad (IV)$$

### 5.2.2 Usuarios industriales

Por otro lado, los usuarios industriales (asociados a  $k = 2$ ) también tienen sus propias restricciones. Para poder definir las es necesario introducir las siguientes variables de diseño:

Bg = proporción mínima de agua subterránea que la industria debe recibir

Bt = proporción máxima de agua tratada que la industria puede usar

Debido a que el agua subterránea tiene la mejor calidad, para mantener una calidad media suficiente del agua utilizada por la industria se especifica una proporción mínima de agua subterránea: Bg.

De modo similar, la peor calidad del agua tratada requiere que la industria use solo una proporción limitada de agua tratada: Bt.

Con estos valores límites dados, las restricciones serán de la forma:

$$\frac{(g2 + g2 *)}{(s2 + g2 + t2 + s2 * +g2 *)} \geq Bg \quad (V)$$

$$\frac{(t2)}{(s2 + g2 + t2 + s2 * +g2 *)} \leq Bt \quad (VI)$$

### 5.2.3 Usuarios domésticos

Por último, los usuarios domésticos (con  $k = 3$ ) llevan asociados una única restricción relativa a la limitación del uso del agua tratada. Esto se debe a que esta agua sólo puede usarse unos fines determinados y muy limitados: riego en parques, fuentes públicas...

Definiendo la siguiente variable auxiliar:

Bd = proporción máxima de agua tratada que los usuarios domésticos pueden solicitar

Se plantea la siguiente restricción:

$$\frac{(t3)}{(s3 + g3 + t3 + s3 * +g3 *)} \leq Bd \quad (VII)$$

## 5.3 Limitaciones adicionales

Debido a la limitación de los recursos empleados en el modelo, es necesario definir restricciones adicionales de interconexión. Estas restricciones se definen para garantizar el uso de todos los recursos locales disponibles antes de recurrir a importar agua de otras cuencas vecinas. Por tanto:

$$s1 + s2 + s3 = Ss \quad (VIII)$$

$$g1 + g2 + g3 = Sg \quad (IX)$$

$$s1 * + s2 * + s3 * \leq Ss * \quad (X)$$

$$g1 * + g2 * + g3 * \leq Sg * \quad (XI)$$

Siendo:

$Ss$  = cantidad máxima disponible de agua superficial a partir de la fuente local.

$Sg$  = cantidad máxima disponible de agua subterránea a partir de la fuente local.

$Ss^*$  = máxima cantidad disponible de agua superficial obtenida por medio de importación.

$Sg^*$  = máxima cantidad disponible de agua subterránea obtenida por medio de importación.

## 5.4 Descripción del modelo

Este modelo se define como un juego no cooperativo compuesto por tres actores, con funciones de pago dadas y conjuntos de estrategias definidos por medio de las ecuaciones asociadas a cada restricción. Además, cabe destacar que todas las variables presentes en el modelo se definen no negativas.

## 5.5 Parámetros del modelo

	K=1	K=2	K=3
$D_k^{min}$	600	180	1100
$D_k$	998	2000	2150
$B_g$		0,07	
$B_t$		0,25	
$B_d$			0,58
$S_s$		800	
$S_g$		800	
$S_s^*$		2300	
$S_g^*$		2300	

Tabla 8. Parámetros del Modelo. Millones de metros cúbicos al año.

	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
$a_i$	0,14	0,15	0,25	0,25	0,2
$w_i$	1	1	0.5	0.5	5

Tabla 9. Parámetros de los cultivos.

Para  $G = \{i: 1, 2\}$  y  $T = \{i: 3, 4, 5\}$ .

## 5.6 Modelo

### Funciones objetivo

$$\begin{aligned}
F1 &= s1 + g1 + t1 + s1 * + g1 * \\
F2 &= s2 + g2 + t2 + s2 * + g2 * \\
F3 &= s3 + g3 + t3 + s3 * + g3 *
\end{aligned}$$

**Restricciones I, II:**

$$\begin{aligned}
s1 + g1 + t1 + s1 * + g1 * &\geq 600 \\
s1 + g1 + t1 + s1 * + g1 * &\leq 998
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s2 + g2 + t2 + s2 * + g2 * &\geq 180 \\
s2 + g2 + t2 + s2 * + g2 * &\leq 2000
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s3 + g3 + t3 + s3 * + g3 * &\geq 1100 \\
s3 + g3 + t3 + s3 * + g3 * &\leq 2150
\end{aligned}$$

**Restricción III:**

$$\frac{(g1 + g1 *)}{(s1 + g1 + t1 + s1 * + g1 *)} \geq \frac{0,29}{1,54}$$

**Restricción IV:**

$$\frac{(t1)}{(s1 + g1 + t1 + s1 * + g1 *)} \leq \frac{1,25}{1,54}$$

**Restricción V:**

$$\frac{(g2 + g2 *)}{(s2 + g2 + t2 + s2 * + g2 *)} \geq 0,07$$

**Restricción VI:**

$$\frac{(t2)}{(s2 + g2 + t2 + s2 * + g2 *)} \leq 0,25$$

**Restricción VII:**

$$\frac{(t3)}{(s3 + g3 + t3 + s3 * + g3 *)} \leq 0,58$$

**Restricciones VIII, IX, X, XI:**

$$\begin{aligned}
s1 + s2 + s3 &= 800 \\
g1 + g2 + g3 &= 800 \\
s1 * + s2 * + s3 * &\leq 2300 \\
g1 * + g2 * + g3 * &\leq 2300
\end{aligned}$$

## 5.7 Solución

<i>s1</i>	378
<i>g1</i>	179
<i>t1</i>	23
<i>s1*</i>	10
<i>g1*</i>	10
<i>s2</i>	261
<i>g2</i>	159
<i>t2</i>	118
<i>s2*</i>	13
<i>g2*</i>	20
<i>s3</i>	161
<i>g3</i>	462
<i>t3</i>	0
<i>s3*</i>	638
<i>g3*</i>	25
<i>F1</i>	$378+179+23+10+10 = 600$
<i>F2</i>	$261+159+118+13+20 = 571$
<i>F3</i>	$161+462+0+638+25 = 1286$

*Tabla 10. Parámetros del Modelo. Millones de metros cúbicos al año.*

## 5.8 Conclusión del caso no cooperativo

Como se ha venido insistiendo, la conclusión principal reside en entender que, ante las decisiones que se nos presentan en cualquier sector de la sociedad, un determinado actor podrá actuar conforme a dos principios fundamentales: colaborar o no colaborar.

El primero de ellos es el enfoque de cooperación, que no ha sido objeto de estudio de este caso. El segundo, representa una visión más individualista y de rechazo a cooperar, tomando decisiones en base a analizar únicamente el computo de factores que tenemos en nuestro entorno más personal. Esta forma de proceder, se ha podido observar durante el desarrollo de este problema que hemos analizado y que se basa, en el estudio del suministro de aguas para demandantes de zonas metropolitanas.

Cada uno de estos actores toman decisiones de “puertas para adentro” sin tener en cuenta lo que puede suceder con el resto de actores presentes. Este escenario, como todo, tiene siempre sus ventajas y desventajas. En cuanto a las ventajas, tomar decisiones centrándose en minimizar los costes asociados a los aspectos individuales suele conllevar un aumento de eficiencia, ya que, no nos preocupamos de la presencia de aspectos externos de análisis muy complejo.

Sin embargo, el hecho de colaborar implica abrirse a un campo de nuevas oportunidades con beneficios que desde un enfoque no colaborativo jamás se podrían adquirir. Es quizá un poco más complejo, debido a que la decisión de cada actor dependerá también de las decisiones de los demás. Pero también, permite que los

beneficios totales sean repartidos evitando competir con otros actores del sistema que puedan ser superiores.

En este problema el escenario es claramente no cooperativo. Tenemos tres actores que necesitan abastecerse de agua, para lo que deberán cumplir unas restricciones impuestas por la Administración. Mientras que se cumplan estas restricciones de demanda, cada uno puede tomar la decisión que crea más oportuna.

Sin embargo, haber optado por una visión colaborativa habría permitido un mayor aprovechamiento total del recurso hídrico. Podemos observar en la siguiente tabla como quedan las restricciones tras el proceso de resolución:

Restricciones asociadas al Caso II			
1	600	$\geq$	600
2	600	$\leq$	998
3	571	$\geq$	180
4	571	$\leq$	2000
5	1286	$\geq$	1100
6	1286	$\leq$	2150
7	189	$\geq$	112,9870130
8	23	$\leq$	487,0129870
9	179	$\geq$	39,97
10	118	$\leq$	142,75
11	0	$\leq$	745,88
12	800	=	800
13	800	=	800
14	661	$\leq$	2300
15	55	$\leq$	2300

*Tabla 11. Restricciones asociadas al Caso II.*

En ella podemos ver que muchas restricciones muestran holguras respecto a los umbrales, y esto, generalmente lleva asociado términos de ineficiencia. Por ello, un enfoque en donde los tres actores mantengan acuerdos y puedan reestablecer sus valores de suministro aumentaría el aprovechamiento del agua en el sistema global.

Por ejemplo, si el sector industrial que, posee la mayor demanda de agua tratada, llegase a un acuerdo con los otros dos sectores comprometiéndose a ofrecer parte de su agua subterránea y superficial (muy necesarias para el sector agrícola), a cambio de disponer de una mayor cantidad de agua tratada, se podrían aumentar los beneficios globales de todos los actores.

## 6 CONCLUSIÓN FINAL

---

*“La toma de decisiones realmente exitosa reside en un equilibrio entre pensamiento deliberado e intuitivo”*

Malcolm Gladwell

**E**n este trabajo hemos tratado dos problemas distintos relacionados con el agua, su distribución y uso. Resolviendo el primero de ellos por medio de un enfoque de juegos cooperativos y el segundo, desde una visión no cooperativa.

En el primer caso, hemos analizado el suministro de agua a un conjunto de receptores heterogéneos que tratan de colaborar para llegar a una situación de pago beneficiosa para todos. De manera particular, estos agentes se han definido como: un bloque de viviendas, un local de baños termales, una peluquería y un negocio más pequeño: una clínica veterinaria.

El problema se define en torno al hecho de que el suministro de agua es muy errático debido a una infraestructura en condiciones deficientes. Ante ello, se decide cooperar para lograr un cambio de la infraestructura, de modo que los jugadores (heterogéneos) deciden usar el Core como solución de su juego. Esto permite que haya más posibilidades de solución debido a que es una región y no un punto. En un futuro podrán restringir el Core a un valor más concreto tipo Shapley si se dan las circunstancias adecuadas.

En el segundo problema abordamos una situación de demanda de agua por diversos sectores económicos: la agricultura, la industria y las zonas comunes de una ciudad. Además, se especifican dos tipos de suministros, uno de agua subterránea y otro de agua superficial, a veces tratada y a veces no. Esto conlleva restricciones fuertes en cuanto al reparto de los costos y las implicaciones económicas impuestas por la administración de la región. Hemos resuelto el problema, alcanzando una solución aceptable para cada uno de los agentes implicados que consideramos satisfactoria.

Un aspecto clave a tener en cuenta en esta solución, es el balanceo del uso de los dos tipos de agua, agua tratada para el sector industrial, por ejemplo, que nos ha permitido estudiar una posible mejora económica del conjunto de los tres sistemas y un beneficio para el resto de la población y de los sectores.

# 7 ANEXOS

## 7.1 Anexo A. Caso I: Condiciones previas

Este primer apéndice muestra una forma sencilla para realizar las comprobaciones necesarias que garanticen convexidad en el problema cooperativo del Caso I.

### 7.1.1 Datos de inicio y ejemplo de referenciación

Excel es un programa con muchas opciones para enlazar datos, lo que permite hacer comprobaciones de restricciones mediante referenciación de celdas.

Parámetros Iniciales (Costes)									
C(1)	C(2)	C(3)	C(4)	C(12)	C(13)	C(14)	C(23)	C(24)	C(34)
1	3	3	4	5	5	6	6	7	8
C(123)	C(124)	C(134)	C(234)	C(1234)					
9	10	11	14	18					

En la parte superior, la tabla de color azul representa los datos iniciales que imponía la compañía de agua a los cuatro actores. Puede observarse como cada uno de estos valores (en u.m) tiene referenciado un determinado número de celda. Por ejemplo, el coste  $C(3) = 3$  u.m es localizado por medio de la celda D6, siendo “D” el número de la columna y “6” el número de la fila.

Como explicábamos en el Capítulo 4 (caso cooperativo), el coste asociado al cuarto jugador guarda una dependencia con el coste asignado al tercer jugador, que como acabamos de explicar, se halla en la celda D6. Por ello, el coste del jugador 4 será:

$$C(4) = 1 * D6 (\text{referencia a } C(3)) + 1$$

Luego, siguiendo esta manera de referenciar, se han podido realizar las comprobaciones necesarias para las distintas posibilidades de coalición que van recorriendo los subconjuntos S y T.

### 7.1.2 Restricciones

Las restricciones, se encuentran agrupadas en 3 grandes grupos.

1. Restricciones de convexidad: que garantizan la siguiente ecuación:

$$C(S \cup T) + C(S \cap T) \geq C(S) + C(T)$$

$$\text{para } \forall (S, T) \subseteq N$$

Para todas las combinaciones posibles entre los actores. Para ello, habíamos definido:

$S \subseteq \{1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, N\}$ .

$T \subseteq \{1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, N\}$ .

2. **Restricciones de aumento de costes por coalición:** de modo que el coste asociado a la unión entre dos o más actores siempre sea superior al coste de cada uno de estos actores de manera individual.
3. **Restricciones de costes no nullos:** es decir, se debe garantizar que los costes individuales que cada actor paga a la compañía sean positivos.

Con todo ello, se muestra el fichero Excel con las comprobaciones realizadas para los datos escogidos.

Parámetros Iniciales (Costes)									
C(1)	C(2)	C(3)	C(4)	C(12)	C(13)	C(14)	C(23)	C(24)	C(34)
4	4	4	4	5	5	6	6	7	8
C(123)	C(124)	C(134)	C(234)	C(1234)					
9	10	11	14	18					

Restricciones									
RESTRICCIONES CONVERGENCIA: $C(SUT) - C(S\setminus T) \geq C(S) + C(T)$	$z$ Cumple?	RESTRICCIONES COSTES COOPERATIVOS MAYORES A INDIVIDUALES	$z$ Cumple?	RESTRICCIONES COSTES NO NULLOS					
S=1; T=2	1	C(12) $\geq$ C(1)	1	C(1) $\geq$ 1					
S=1; T=3	1	C(13) $\geq$ C(1)	1	C(2) $\geq$ 1					
S=1; T=4	1	C(14) $\geq$ C(1)	1	C(3) $\geq$ 1					
S=1; T=12	1	C(12) $\geq$ C(2)	1	C(4) $\geq$ 1					
S=1; T=13	1	C(23) $\geq$ C(2)	1						
S=1; T=14	1	C(24) $\geq$ C(2)	1						
S=1; T=23	1	C(13) $\geq$ C(3)	1						
S=1; T=24	1	C(23) $\geq$ C(3)	1						
S=1; T=34	1	C(34) $\geq$ C(3)	1						
S=1; T=123	1	C(14) $\geq$ C(4)	1						
S=1; T=124	1	C(24) $\geq$ C(4)	1						
S=1; T=134	1	C(34) $\geq$ C(4)	1						
S=1; T=234	1	C(12) $\leq$ C(123)	1						
S=1; T=1234	1	C(13) $\leq$ C(123)	1						
S=2; T=3	1	C(23) $\leq$ C(123)	1						
S=2; T=4	1	C(12) $\leq$ C(124)	1						
S=2; T=12	1	C(14) $\leq$ C(124)	1						
S=2; T=13	1	C(24) $\leq$ C(124)	1						
S=2; T=14	1	C(13) $\leq$ C(134)	1						
S=2; T=23	1	C(14) $\leq$ C(134)	1						
S=2; T=24	1	C(34) $\leq$ C(134)	1						
S=2; T=34	1	C(23) $\leq$ C(234)	1						
S=2; T=123	1	C(24) $\leq$ C(234)	1						
S=2; T=124	1	C(13) $\leq$ C(234)	1						
S=2; T=134	1	C(123) $\leq$ C(1234)	1						
S=2; T=234	1	C(124) $\leq$ C(1234)	1						
S=2; T=1234	1	C(134) $\leq$ C(1234)	1						
S=3; T=4	1	C(234) $\leq$ C(1234)	1						
S=3; T=12	1								

S	T	Constraint	z Cumple?
S=3; T=13			1
S=3; T=14			1
S=3; T=23			1
S=3; T=24			1
S=3; T=34			1
S=3; T=123			1
S=3; T=124			1
S=3; T=134			1
S=3; T=234			1
S=3; T=1234			1
S=4; T=12			1
S=4; T=13			1
S=4; T=14			1
S=4; T=23			1
S=4; T=24			1
S=4; T=34			1
S=4; T=123			1
S=4; T=124			1
S=4; T=134			1
S=4; T=234			1
S=4; T=1234			1
S=12; T=13			1
S=12; T=14			1
S=12; T=23			1
S=12; T=24			1
S=12; T=34			1
S=12; T=123			1
S=12; T=124			1
S=12; T=134			1
S=12; T=234			1
S=12; T=1234			1
S=13; T=14			1
S=13; T=23			1
S=13; T=24			1
S=13; T=34			1
S=13; T=123			1
S=13; T=124			1
S=13; T=134			1
S=13; T=234			1
S=13; T=1234			1
S=14; T=23			1
S=14; T=24			1
S=14; T=34			1
S=14; T=123			1
S=14; T=124			1
S=14; T=134			1
S=14; T=234			1
S=14; T=1234			1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
91		S=14; T=134	17	>=	17	1										
92		S=14; T=234	22	>=	20	1										
93		S=14; T=1234	24	>=	24	1										
94		S=23; T=24	17	>=	13	1										
95		S=23; T=34	17	>=	14	1										
96		S=23; T=123	15	>=	15	1										
97		S=23; T=124	21	>=	16	1										
98		S=23; T=134	21	>=	17	1										
99		S=23; T=234	20	>=	20	1										
100		S=23; T=1234	24	>=	24	1										
101		S=24; T=34	18	>=	15	1										
102		S=24; T=123	21	>=	16	1										
103		S=24; T=124	17	>=	17	1										
104		S=24; T=134	22	>=	18	1										
105		S=24; T=234	21	>=	21	1										
106		S=24; T=1234	25	>=	25	1										
107		S=34; T=123	21	>=	17	1										
108		S=34; T=124	22	>=	18	1										
109		S=34; T=134	19	>=	19	1										
110		S=34; T=234	22	>=	22	1										
111		S=34; T=1234	26	>=	26	1										
112		S=123; T=124	23	>=	19	1										
113		S=123; T=134	23	>=	20	1										
114		S=123; T=234	24	>=	23	1										
115		S=123; T=1234	27	>=	27	1										
116		S=124; T=134	24	>=	21	1										
117		S=124; T=234	25	>=	24	1										
118		S=124; T=1234	28	>=	28	1										
119		S=134; T=234	26	>=	25	1										
120		S=134; T=1234	29	>=	29	1										
121		S=234; T=1234	32	>=	32	1										
122																
123																
124																
125																
126																
127																
128																
129																
130																
131																
132																
133																
134																
135																
136																

Puede observarse que para el primer bloque de restricciones se deben realizar 104 comprobaciones. Mientras que para el segundo bloque se han de realizar solo 27 comprobaciones.

A continuación, para una mejor comprensión, se expondrá un ejemplo de alguna de estas restricciones. Concretamente analizaremos la restricción asociada a la fila 28, que representa la restricción número 11 del total de restricciones asociadas a convexidad. En esta restricción:

$$S = \{1\}, \text{ actor N}^{\circ}1 \text{ de manera individual}$$

$$T = \{1, 3, 4\}, \text{ actores N}^{\circ} 1, 3 \text{ y } 4, \text{ actuando en forma de coalición}$$

Por tanto, la restricción de convexidad deberá satisfacer:

$$C(\{1\} \cup \{1,3,4\}) + C(\{1\} \cap \{1,3,4\}) \geq C(\{1\}) + C(\{1,3,4\})$$

Que realizando las uniones e intersecciones se queda de la forma:

$$C(\{1,3,4\}) + C(\{1\}) \geq C(\{1\}) + C(\{1,3,4\})$$

En este caso, es evidente que la restricción se satisface con signo de igualdad. A fin de una mayor comprensión se extrapolará esta expresión a formato Excel.

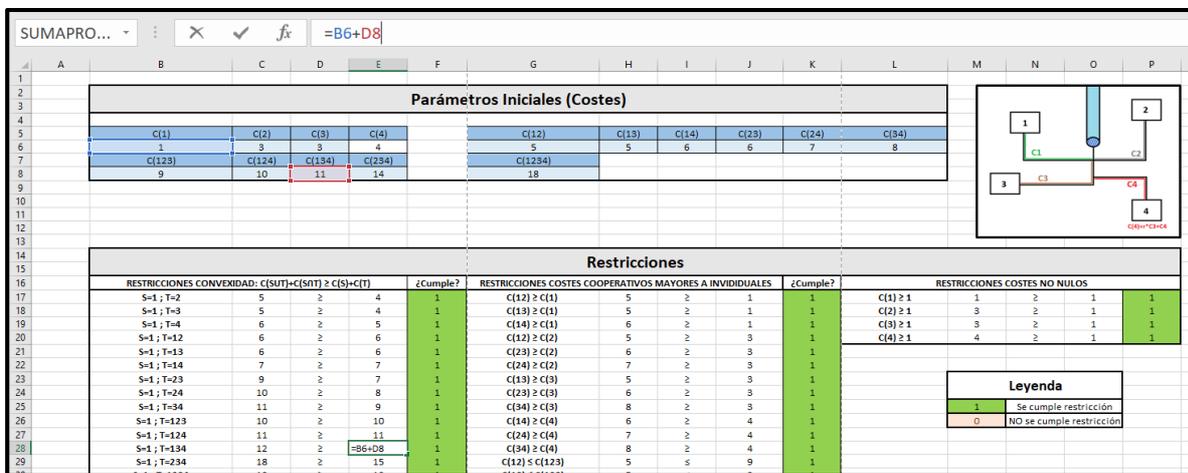
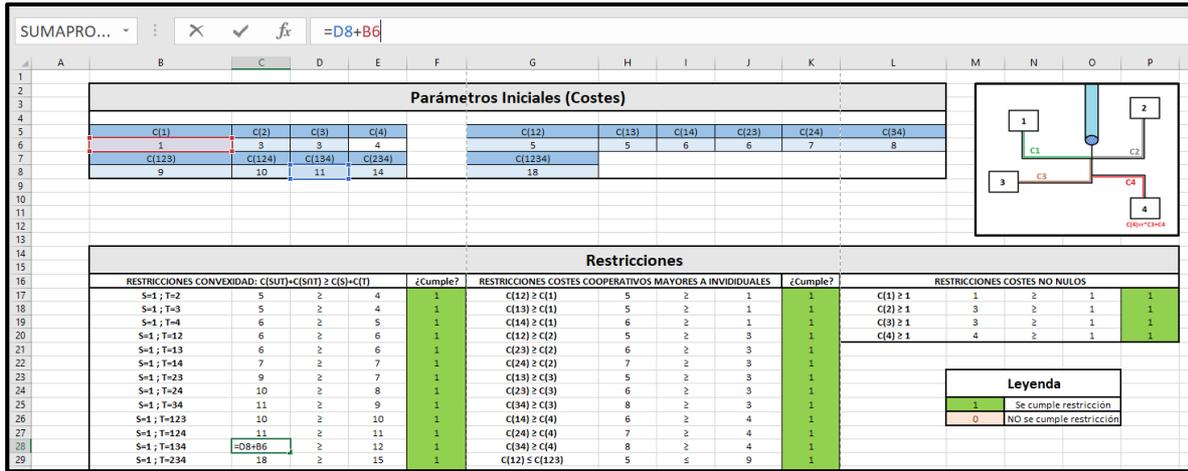
El primer y tercer coste de la expresión se encuentra en la tabla azul en la celda D8. Mientras que la segunda y cuarta expresión se encuentran en la celda B6. Luego, la referencia será:

$$\text{“Columna C”} \leq D8 + B6 \geq B6 + D8 \Rightarrow \text{“Columna E”}$$

En términos cuantitativos:

$$\begin{aligned} 11 + 1 &\geq 1 + 11 \\ 12 &\geq 12 \end{aligned}$$

Luego, queda demostrado. Se presenta a continuación la justificación de la correcta referenciación de esta expresión de la fila 28.



Por último, será necesario detallar que son esos números “1” de color verde a la derecha de cada restricción.

En todo programa como este, destinado a la comprobación rápida de restricciones, es necesario implementar un sistema que nos permita comprobar de manera ágil si se cumple el computo de restricciones.

Por ello, mediante programación en Excel, si una restricción es considerada válida se le asocia de manera automática un número “1” con el fondo verde, mientras que, en caso contrario, se le asigna un valor “0” remarcado en rojo. El código de comando es:

$$= \{SI(C28 \geq E28;1;0)$$

Siendo SI un comando condicional que asocia a la celda un valor “1” si la expresión algebraica se cumple y un “0” en caso contrario. Por último, en opciones de celda se ha asociado un relleno sólido verde cuando en ella aparezca el valor 1 y un color rojo si el valor es 0. Se muestra a continuación dicha referencia.



## 7.2 Anexo B. Caso I: Propuesta de resolución

En este apéndice se muestra en lenguaje de programación “C” el código empleado para el cálculo de las soluciones del Caso I en el programa matemático “MATLAB”.

Puede observarse que las subrutinas o funciones auxiliares son llamadas en los códigos, pero no incluiremos su cálculo con el fin de mostrar una visualización clara y concisa.

### 7.2.1 Código de resolución. Core

---

```
function ccpoints=corecoververtices(A)

tamanho=size(A);

    if tamanho==[1 15]
        jugadores=4;
        ccpoints=corecoververtices4(A);

    else
        error('Argument must be a vector of dimension 1x15 (4 players)')
    end

function ccpoints=corecoververtices4(A)

AD=admissiblegame(A)

    switch AD
        case 0
            ccpoints=[];

        otherwise
            v1=A(1);v2=A(2);v3=A(3);v4=A(4);
            v12=A(5);v13=A(6);v14=A(7);v23=A(8);v24=A(9);v34=A(10);
            v123=A(11);v124=A(12);v134=A(13);v234=A(14);
            v1234=A(15);

            [M,m]=utopiapayoffs(A)

            plano(1,:)=[1 0 0];b(1)=m(1);
            plano(2,:)=[-1 0 0];b(2)=-M(1);
            plano(3,:)=[0 1 0];b(3)=m(2);
            plano(4,:)=[0 -1 0];b(4)=-M(2);
            plano(5,:)=[0 0 1];b(5)=m(3);
            plano(6,:)=[0 0 -1];b(6)=-M(3);
            plano(7,:)=[1 1 1];b(7)=v1234-M(4);
            plano(8,:)=[-1 -1 -1];b(8)=-v1234+m(4);

    load interseccionesCC
    C=[];

    for II=1:size(interseccionesCC,1)
```

```

ii=interseccionesCC(II,1);jj=interseccionesCC(II,2);kk=interseccionesCC(II,3);
AA=[plano(ii,:);plano(jj,:);plano(kk,:)];
BB=[b(ii);b(jj);b(kk)];
AABB=[plano(ii,:) b(ii);plano(jj,:) b(jj);plano(kk,:) b(kk)];

    if rank(AA)==3
        hh=inv(AA)*BB;
        C=[C;hh'];

    else
        C=C;

end

end

C=repeatedrows(C);
checkCC=[];ref=[];

for ii=1:size(C,1)

    corecoverpunto=plano*C(ii,:)'-b';
    checkCC(ii)=0;

        if corecoverpunto>=zeros(size(1,8))

            checkCC(ii)=1;

        end

end

ref=find(checkCC>0);
ccpoints=C(ref,:);
ccpoints=repeatedrows(eficiencia(ccpoints,v1234));

end

```

---

Introduciendo los valores de los costes de coalición en este algoritmo y compilando, obtenemos el Core. Y con ello, la solución factible cuyo valor no puede ser mejorado por ninguna otra coalición.

## 7.2.2 Código de resolución. Coreset

---

```

function coreset(A)

tamanho=size(A);

if tamanho==[1 7]
    jugadores=3;
    coreset3(A);

```

```

elseif tamanho==[1 15]
    jugadores=4;
    coreset4(A);

else
    error('Argument must be a vector of dimension 1x7 (3 players) or
1x15 (4 players)')
end

function coreset3(A)

v1=A(1);v2=A(2);v3=A(3);
v123=A(7);

[Cextremes,hiperplanos,faces,numpuntos,numplanos,planosactivos,puntos
xplano,MPC]=coreinfo(A);
M=CCimputation3(A);

switch numpuntos
    case 0
        warning('The core is empty')
        return

    case 1
        vertices=M*Cextremes';
        plot(vertices(1),vertices(2),'*','Color',[0.5 0.5 0.5])

    case 2
        vertices=M*Cextremes';
        plot(vertices(1,:),vertices(2,:),'-*','Color',[0.5 0.5
0.5])

    otherwise
        vertices=M*Cextremes';
        vertices=polygonorder(vertices)';
        color=[0.5 0.5 0.5];
        fill(vertices(1,:),vertices(2,:),color)
end

function coreset4(A)

v1=A(1);v2=A(2);v3=A(3);v4=A(4);
v12=A(5);v13=A(6);v14=A(7);v23=A(8);v24=A(9);v34=A(10);
v123=A(11);v124=A(12);v134=A(13);v234=A(14);
v1234=A(15);

[Cextremes,hiperplanos,faces,numpuntos,numplanos,planosactivos,puntos
xplano,MPC]=coreinfo(A);

switch numpuntos
    case 0
        warning('The core is empty')
        return

    case 1

```

```

plot3(Cextremes(1),Cextremes(2),Cextremes(3),'*','Color',[0.5 0.5 0.5])

    case 2
        plot3(Cextremes(:,1)',Cextremes(:,2)',Cextremes(:,3)','-
*', 'Color',[0.5 0.5 0.5])

    otherwise
        vertices=Cextremes(:,1:3)
        tonos=[];

    for ii=1:numero
        tonos(ii,:)=[0.5 0.5 0.5];

    end

patch('Vertices', vertices, 'Faces', faces,...
'FaceVertexCData',tonos,'FaceColor','flat','FaceAlpha',0.5)
camlight;
lighting gouraud;
hold off

end

```

---

## 7.3 Anexo C. Caso II: Propuesta de resolución

Con el objeto de aportar una mayor diversidad de métodos de resolución, se ha decidido resolver el segundo problema, asociado a un enfoque no colaborativo, mediante Microsoft Excel.

Dentro de la gran oferta de aplicaciones de este programa, aparece un comando denominado “Solver”. Mediante él, se pueden resolver problemas matemáticos de programación lineal, e incluso algunos problemas concretos de programación no lineal.

A continuación, el lector podrá ir observando cómo se han ido obteniendo resultados y encontrará las justificaciones pertinentes para la decisión de escoger una solución entre las dos posibles.

### 7.3.1 Solución escogida

En primer lugar, a modo de introducción se presenta el formato de la hoja Excel con la que se ha resuelto el problema.

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

Variables de Programación Lineal					Función Objetivo	
s1	g1	t1	s*1	g*1	F1	
0	0	0	0	0	0	
s2	g2	t2	s*2	g*2	F2	
0	0	0	0	0	0	
s3	g3	t3	s*3	g*3	F3	
0	0	0	0	0	0	

Restricciones						¿Cumple?
Restricciones asociadas al Caso II						
1	0	≥		600		0
2	0	≤		998		1
3	0	≥		180		0
4	0	≤		2000		1
5	0	≥		1100		0
6	0	≥		2150		1
7	#DIV/0!	≥		0,1883117		#DIV/0!
8	#DIV/0!	≤		0,8116883		#DIV/0!
9	#DIV/0!	≥		0,07		#DIV/0!
10	#DIV/0!	≤		0,25		#DIV/0!
11	#DIV/0!	≤		0,58		#DIV/0!
12	0	=		800		0
13	0	=		800		0
14	0	≤		2300		1
15	0	≤		2300		1

The flow diagram illustrates the water distribution process:

- FUENTE LOCAL:** Includes 'Agua Superficial', 'Agua Subterránea', and 'Agua Tratada'.
- Actores:** 'Agricultura (Itz1)', 'Industria (Itz2)', and 'Usuarios Domésticos (Itz3)'. Arrows indicate that 'Agricultura' and 'Industria' have access to 'Agua Superficial', while 'Usuarios Domésticos' has access to 'Agua Subterránea'.
- FUENTE IMPORTADA:** Includes 'Agua Superficial' and 'Agua Subterránea'.

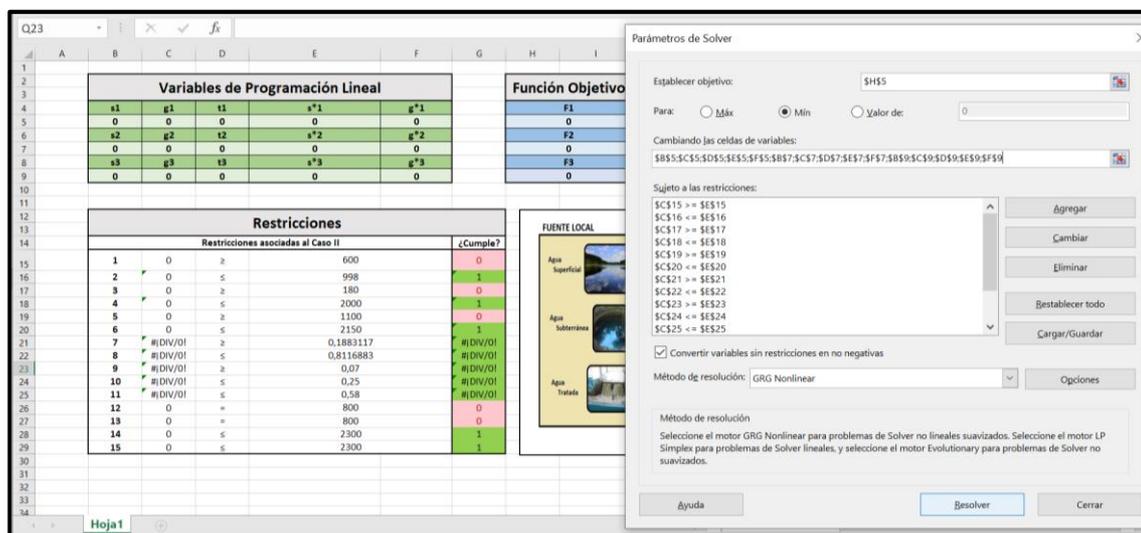
Puede observarse cuatro elementos fundamentales:

1. **Variables del problema:** arriba a la izquierda se puede visualizar un recuadro que agrupa las variables del problema descritas anteriormente. Estos valores inicialmente se encuentran en valor nulo, sin embargo, una vez que el Excel resuelva el problema dichas celdas se rellenarán con nuevos valores.
2. **Funciones objetivo:** seguidamente, a la derecha, se puede observar una columna con tres filas. Cada una de estas filas representa la suma de las variables asociadas a cada actor del problema.
3. **Restricciones:** las restricciones del problema se encuentran en la esquina inferior de la izquierda, estas restricciones se encuentran explicadas de forma extensa en el Capítulo 5 que describe el problema del Caso II. Es importante comprender que los valores “#DIV/0!” hacen referencia a una indeterminación asociada a que los valores de las variables son inicialmente nulos.

Una vez resuelto el problema, las restricciones serán acotadas con los valores asociados al óptimo, luego no deben aparecer estos errores en las celdas.

4. **Esquema gráfico:** representado en la esquina inferior derecha de manera que facilite la comprensión del problema.

Una vez descritos todos los elementos presentes, se continúa pulsando en la ventana “Datos” y pulsando en “Solver”.

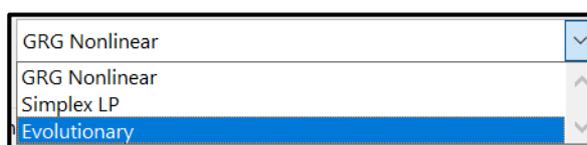


Solver permite de una manera muy sencilla e intuitiva implementar en el ordenador los problemas de programación. Para ello, se seleccionan las celdas que contienen los valores de:

- La función objetivo
- Las variables a calcular
- Las restricciones

Una vez implementado el modelo del problema, se tendrá que decidir el método de resolución deseado. La elección de dicho método de resolución será la clave para comprender las distintas soluciones obtenidas.

Microsoft Excel, permite tres métodos fundamentales de resolución:



De ellos, descartaremos el “método evolutivo” debido a que este tipo de algoritmos no entran dentro de los objetivos de este trabajo. Los otros dos métodos, ofrecen la posibilidad de resolver dos tipos de problemas: lineales y no lineales.

Durante todo momento se ha introducido el problema del Caso II como un problema de programación lineal, sin embargo, es preciso percatarse de la existencia restricciones que “a priori” son no lineales. Basta comprobarlo en cualquiera de las restricciones:

Variables de Programación Lineal					
s1	g1	t1	s*1	g*1	
378	179	23	10	10	
s2	g2	t2	s*2	g*2	
261	159	118	13	20	
s3	g3	t3	s*3	g*3	
161	462	0	638	25	

Restricciones				
Restricciones asociadas al Caso II				¿Cumple?
1	600	≥	600	1
2	600	≤	998	1
3	571	≥	180	1
4	571	≤	2000	1
5	1286	≥	1100	1
6	1286	≤	2150	1
7	5+F5/H5	≥	0,1883117	1
8	0,0383333	≤	0,8116883	1
9	0,3134851	≥	0,07	1
10	0,206655	≤	0,25	1
11	0	≤	0,58	1
12	800	=	800	1
13	800	=	800	1
14	661	≤	2300	1
15	55	≤	2300	1

Decimos a priori porque con una simple modificación, estas expresiones no lineales se convierten en lineales. Es evidente, que dicha modificación se basa en pasar el cociente de la división a la derecha. Pero, más allá de poner una etiqueta al problema, esta peculiaridad nos servirá para utilizar distintos métodos de resolución que nos aporten distintas soluciones.

En este apartado, titulado “Primera solución” se han utilizado las expresiones en su forma no lineal y se ha indicado a Excel que busque soluciones mediante el método “GRG Nonlinear”. Con ello se obtiene la siguiente solución factible:

Variables de Programación Lineal					
s1	g1	t1	s*1	g*1	
378	179	23	10	10	
s2	g2	t2	s*2	g*2	
261	159	118	13	20	
s3	g3	t3	s*3	g*3	
161	462	0	638	25	

Restricciones				
Restricciones asociadas al Caso II				¿Cumple?
1	600	≥	600	1
2	600	≤	998	1
3	571	≥	180	1
4	571	≤	2000	1
5	1286	≥	1100	1
6	1286	≤	2150	1
7	0,315	≥	0,1883117	1
8	0,0383333	≤	0,8116883	1
9	0,3134851	≥	0,07	1
10	0,206655	≤	0,25	1
11	0	≤	0,58	1
12	800	=	800	1
13	800	=	800	1
14	661	≤	2300	1
15	55	≤	2300	1

Función Objetivo	
F1	600
F2	571
F3	1286

**Resultados de Solver**

Solver encontró una solución. Se cumplen todas las restricciones y condiciones óptimas.

Conservar solución de Solver Informes  
Responder  
Sensibilidad  
Límites

Restaurar valores originales

Volver al cuadro de diálogo de parámetros de Solver  Informes de esquema

Aceptar    Cancelar    Guardar escenario...

**Solver encontró una solución. Se cumplen todas las restricciones y condiciones óptimas.**

Al usar el motor GRG, Solver ha encontrado al menos una solución óptima local. Al usar Simplex LP, significa que Solver ha encontrado una solución óptima global.

Puede observarse que el programa devuelve un mensaje notificando que ha encontrado una solución. Dicha solución ha sido la utilizada en la resolución del problema, sacando a partir de ellas las conclusiones del caso no cooperativo.

### 7.3.2 Simplificación a un problema de programación lineal

En este segundo apartado, el objetivo consiste en poner el Modelo en forma lineal y aplicar el conocido Método

Simplex LP. Para ello, una a una, iremos redefiniendo las ecuaciones.

Por ejemplo, para la restricción número 10 el proceso será:

1) Expresión no lineal:

$$\frac{(t2)}{(s2 + g2 + t2 + s2 * +g2 *)} \leq 0,25$$

2) Expresión lineal:

$$(t2) \leq 0,25 * (s2 + g2 + t2 + s2 * +g2 *)$$

Puede observar cómo quedará en nuestra plantilla Excel a continuación:

Variables de Programación Lineal					
s1	g1	t1	s*1	g*1	
378	179	23	10	10	
s2	g2	t2	s*2	g*2	
261	159	118	13	20	
s3	g3	t3	s*3	g*3	
161	462	0	638	25	

Función Objetivo	
F1	600
F2	571
F3	1286

Restricciones				
Restricciones asociadas al Caso II				¿Cumple?
1	600	≥	600	1
2	600	≤	998	1
3	571	≥	180	1
4	571	≤	2000	1
5	1286	≥	1100	1
6	1286	≤	2150	1
7	0,315	≥	0,1883117	1
8	0,0383333	≤	0,8116883	1
9	0,3134851	≥	0,07	1
10	=D7	≤	0,25	1
11	0	≤	0,58	1
12	800	=	800	1
13	800	=	800	1
14	661	≤	2300	1
15	55	≤	2300	1

Y a la derecha de la restricción:

Variables de Programación Lineal					
s1	g1	t1	s*1	g*1	
378	179	23	10	10	
s2	g2	t2	s*2	g*2	
261	159	118	13	20	
s3	g3	t3	s*3	g*3	
161	462	0	638	25	

Función Objetivo	
F1	600
F2	571
F3	1286

Restricciones				
Restricciones asociadas al Caso II				¿Cumple?
1	600	≥	600	1
2	600	≤	998	1
3	571	≥	180	1
4	571	≤	2000	1
5	1286	≥	1100	1
6	1286	≤	2150	1
7	0,315	≥	0,1883117	1
8	0,0383333	≤	0,8116883	1
9	0,3134851	≥	0,07	1
10	118	≤	=0,25*H7	1
11	0	≤	0,58	1
12	800	=	800	1
13	800	=	800	1
14	661	≤	2300	1
15	55	≤	2300	1

Con todo ello, y una vez aplicado este procedimiento a todas las expresiones del modelo, se vuelve a llamar a

su resolución mediante el método de resolución lineal “Simplex LP”. Y se obtiene la siguiente solución:

Variables de Programación Lineal					
x1	g1	t1	s*1	g*1	
487,01299	112,98701	0	0	0	
x2	g2	t2	s*2	g*2	
0	12,6	0	167,4	0	
x3	g3	t3	s*3	g*3	
312,98701	674,41299	0	0	112,6	

Función Objetivo	
F1	600
F2	180
F3	1100

Restricciones				
Restricciones asociadas al Caso II				¿Cumple?
1	600	≥	600	1
2	600	≤	998	1
3	180	≥	180	1
4	180	≤	2000	1
5	1100	≥	1100	1
6	1100	≤	2150	1
7	112,98701	≥	112,9870130	1
8	0	≤	487,0129870	1
9	12,6	≥	12,6	1
10	0	≤	45	1
11	0	≤	638	1
12	800	=	800	1
13	800	=	800	1
14	167,4	≤	2300	1
15	112,6	≤	2300	1

Se puede observar que esta solución además de ser distinta, resulta más beneficiosa para todos.

Es distinta debido a que estamos analizando un problema multiobjetivo, es decir, existen tres funciones objetivo de modo que la minimización de algunas variables conlleva un aumento irremediable en el valor de otras, provocando que se obtengan distintas soluciones.

Esta solución obtenida mediante el algoritmo Simplex LP quedará descartada debido a que, según el resultado, el consumo total de agua tratada en el sistema es nulo. Aunque el modelo lo permita, es evidente que el sector de la industria y el sector doméstico necesitan de agua tratada para llevar a cabo muchas de sus funciones esenciales. Por ello, esta solución queda fuera del alcance del problema.

### 7.3.3 Código alternativo para obtener la solución del problema

En este último apartado, se ofrece al lector la posibilidad de buscar soluciones mediante el programa “MATLAB”. De este modo, los usuarios menos familiarizados con Excel, podrán encontrar la solución al problema procediendo de la misma forma que la detallada en el Anexo B.

Se presenta, por tanto, en lenguaje “C” el código del algoritmo de resolución del problema asociado al Caso II.

```
function
[x,fval,exitflag,output,lambda]=linprog(f,A,B,Aeq,Beq,lb,ub,x0,options
)

% Copyright 1990-2002 The MathWorks, Inc.
% \Revision: 1.23, Date: 2002/03/12 20:36:20.

defaultopt = struct('Display','final',...
    'TolFun',1e-8,'Diagnostics','off',...
    'LargeScale','on','MaxIter',85);

if nargin==1 & nargout <= 1 & isequal(f,'defaults')
    x = defaultopt;
    return
```

```

end

% Handle missing arguments
if nargin < 9, options = [];
    if nargin < 8, x0 = [];
        if nargin < 7, ub = [];
            if nargin < 6, lb = [];
                if nargin < 5, Beq = [];
                    if nargin < 4, Aeq = [];
                        end, end, end, end, end, end

if nargout > 4
    computeLambda = 1;
else
    computeLambda = 0;
end

% Options setup
largescale
isequal(optimget(options, 'LargeScale', defaultopt, 'fast'), 'on');
diagnostics
isequal(optimget(options, 'Diagnostics', defaultopt, 'fast'), 'on');

switch optimget(options, 'Display', defaultopt, 'fast')
case {'off', 'none'}
    verbosity = 0;
case 'iter'
    verbosity = 2;
case 'final'
    verbosity = 1;
otherwise
    verbosity = 1;
end

% Set the constraints up: defaults and check size
[nineqcstr, nvarsineq]=size(A);
[neqcstr, nvarseq]=size(Aeq);
nvars = max([length(f), nvarsineq, nvarseq]); % In case A is empty
ncstr = nineqcstr + neqcstr;

if isempty(f), f=zeros(nvars,1); end
if isempty(A), A=zeros(0,nvars); end
if isempty(B), B=zeros(0,1); end
if isempty(Aeq), Aeq=zeros(0,nvars); end
if isempty(Beq), Beq=zeros(0,1); end

% Set to column vectors
f = f(:);
B = B(:);
Beq = Beq(:);

if ~isequal(length(B), nineqcstr)
    error('The number of rows in A must be the same as the length of
b.')
```

```

elseif ~isequal(length(Beq), neqcstr)
    error('The number of rows in Aeq must be the same as the length of
beq.')
```

```

elseif ~isequal(length(f),nvarsineq) & ~isempty(A)
    error('The number of columns in A must be the same as the length
of f.')
elseif ~isequal(length(f),nvarseq) & ~isempty(Aeq)
    error('The number of columns in Aeq must be the same as the length
of f.')
end

[x0,lb,ub,msg] = checkbounds(x0,lb,ub,nvars);
if ~isempty(msg)
    exitflag = -1;
    output = []; x=x0; fval = []; lambda = [];
    if verbosity > 0
        disp(msg)
    end
    return
end

caller = 'linprog';
ncstr = nineqcstr + neqcstr;

if largescale
    OUTPUT.algorithm = 'large-scale: interior point';
else
    OUTPUT.algorithm = 'medium-scale: active-set';
end

if diagnostics
    % Do diagnostics on information so far
    gradflag = []; hessflag = []; line_search=[];
    constflag = 0; gradconstflag = 0; non_eq=0;non_ineq=0;
    lin_eq=size(Aeq,1); lin_ineq=size(A,1); XOUT=ones(nvars,1);
    funfcn{1} = [];ff=[]; GRAD=[];HESS=[];
    confcn{1}=[];c=[];ceq=[];cGRAD=[];ceqGRAD=[];
    msg
diagnose('linprog',OUTPUT,gradflag,hessflag,constflag,gradconstflag,..
.
    line_search,options,defaultopt,XOUT,non_eq,...

non_ineq,lin_eq,lin_ineq,lb,ub,funfcn,confcfn,ff,GRAD,HESS,c,ceq,cGRAD,
ceqGRAD);
end

if (largescale)
    if ~isempty(x0) & verbosity > 0
        warning('Interior Point method is ignoring starting point')
    end
    [x,fval,lambda,exitflag,output]
lipsol(f,A,B,Aeq,Beq,lb,ub,options,defaultopt,computeLambda);
    output.algorithm = 'lipsol';
else
    if ~largescale & (issparse(A) | issparse(Aeq) )% asked for medium-
scale but sparse
        if verbosity > 0
            disp('The medium-scale (active-set) algorithm does not
currently handle sparse matrices.')
            disp('Converting to full matrices to solve.')
        end
    end
end

```

```

        end
    end
    if isempty(x0), x0=zeros(nvars,1); end
    [x,lambdaqp,exitflag,output]= ...

qpsub([],full(f),full([Aeq;A]),full([Beq;B]),lb,ub,x0,neqcstr,verbosity,caller,ncstr,nvars,options,defaultopt);
    output.algorithm = 'medium-scale: activeset';
end

if isequal(output.algorithm , 'medium-scale: activeset')
    fval = f'*x;
    llb = length(lb);
    lub = length(ub);
    lambda.lower = zeros(llb,1);
    lambda.upper = zeros(lub,1);
    arglb = ~isinf(lb); lenarglb = nnz(arglb);
    argub = ~isinf(ub); lenargub = nnz(argub);
    lambda.eqlin = lambdaqp(1:neqcstr,1);
    lambda.ineqlin = lambdaqp(neqcstr+1:neqcstr+nineqcstr,1);
    lambda.lower(arglb) =
lambdaqp(neqcstr+nineqcstr+1:neqcstr+nineqcstr+lenarglb);
    lambda.upper(argub) =
lambdaqp(neqcstr+nineqcstr+lenarglb+1:neqcstr+nineqcstr+lenarglb+lenargub);

    output.cgiterations =[];

    if verbosity > 0
        if ( exitflag ==1 )
            disp('Optimization terminated successfully. ');
        end
        if ( exitflag == 2)
            % do some sort of check here to see how unreliable
            disp('Optimization completed. ');
        end
        if (exitflag ==0)
            disp('Maximum number of iterations exceeded;')
            disp('    increase options.MaxIter')
        end
    end

end
end

```

---

La solución obtenida mediante este código y en variables del algoritmo es:

- Sector agrícola:  $x=378$ ,  $y=179$ ,  $z=421$ ,  $t=10$ ,  $r=10$ .
- Sector industria:  $x_1=261$ ,  $y_1=159$ ,  $z_1=118$ ,  $t_1=13$ ,  $r_1=20$ .
- Sector doméstico:  $x_1=161$ ,  $y_1=462$ ,  $z_1=0$ ,  $t_1=638$ ,  $r_1=25$ .

Comparándola con la solución obtenida en el primer apartado, se puede observar que la única variable que varía es el agua tratada destinada al sector agrícola. Esta solución es también factible pero menos beneficiosa, ya que, en la solución obtenida con Excel el valor de esta variable es menor y el resto de variables se mantienen

constantes.

Independientemente de dicha apreciación, se puede comprobar que la solución obtenida por un programa u otro es muy similar.

# 8 REFERENCIAS

---

## 8.1 Capítulo 1: Problemática del agua

[0]

“*Perspectivas del Medio Ambiente Mundial 2000*. PNUMA. Ed. Mundi-Prensa. 2000. Vivendi Environment. Annual Report 2000.”

[1]

El periódico de la energía. 13 julio 2015 [consulta: 2 febrero 2020]. Disponible en: <https://elperiodicodelaenergia.com/las-10-mayores-centrales-hidroelectricas-de-espana/>

## 8.2 Capítulo 2: Teoría de Juegos

"Game Theory", Wilfrid Hodges, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

"A framework for the unification of the behavioral sciences", Herbert Gintis, *Behavioral and Brain Sciences* (2007) 30:1-61.

Game Theory, Experimental Economics, and Market Design Page, Alvin Roth.

A Chronology of Game Theory, Paul Walker.

GameTheory.net: A resource for educators and students of game theory, Mike Shor.

Introduction to Game Theory. Lecture by Benjamin Polak.

[2]

Wikipedia: la enciclopedia libre. 02 junio 2016 [consulta: 14 febrero 2020]. Disponible en: [https://es.wikipedia.org/wiki/Dilema\\_del\\_prisionero](https://es.wikipedia.org/wiki/Dilema_del_prisionero)

## 8.3 Capítulo 3: Suministro de Aguas Urbanas

[3]

iAgua. 13 marzo 2017 [consulta: 25 febrero 2020]. Disponible en: <https://www.iagua.es/blogs/beatriz-pradillo/aguas-residuales-y-roma>

[4]

Blog: Itálica Romana. 22 febrero 2009 [consulta: 25 febrero 2020]. Disponible en: <http://italicaromana.blogspot.com/2009/02/acueducto-romano.html>

[5]

Gobierno de Aragón. [en línea]. MANUAL PARA MANIPULADORES DE ALIMENTOS. [consulta: 26 febrero,2020].Disponible:

<https://www.aragon.es/documents/20127/674325/Manual%20de%20manipuladores%20de%20abastecimientos%20de%20agua-1.pdf/614d228b-06c6-bde7-2b54-8589cbaf03c0>

[6]

iAgua. 07 mayo 2015 [consulta: 27 febrero 2020]. Disponible en: <https://www.iagua.es/blogs/facts-and-figures/20-paises-mas-probabilidades-tener-escasez-agua-2040>

[7]

Apuntes de Demografía. 15 junio 2016 [consulta: 27 febrero 2020]. Disponible en: <https://apuntesdedemografia.com/curso-de-demografia/ejercicios-resueltos/ejercicio-3-poblacion-mundial-grafico-de-su-evolucion/>

[8]

iAgua. 30 enero 2016 [consulta: 27 febrero 2020]. Disponible en: <https://www.iagua.es/noticias/abb/uso-redes-agua-inteligente-suministro-agua-seguro-fiable-y-eficiente>

[9]

Youtube. [consulta: 2 marzo 2020]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=OmMt7a5M5Uo&t=29s>

[10]

Semana. 01 julio 2017 [consulta: 2 marzo 2020]. Disponible en: <https://www.semana.com/nacion/articulo/metroagua-prestacion-del-servicio-de-agua-potable-en-santa-marta/511542>

[11]

Asociación Española de Abastecimiento de Agua y Saneamiento, 2012. [consulta: 10 marzo 2020]. Disponible en:

[http://www.aeas.es/servlet/mgc?pg=ListNews&ret=next&news\\_id=1249&areaCode=publicarea&newsCategory=Noticias%20AEAS](http://www.aeas.es/servlet/mgc?pg=ListNews&ret=next&news_id=1249&areaCode=publicarea&newsCategory=Noticias%20AEAS)

[12]

TeleMadrid. 10 diciembre 2019 [consulta: 12 marzo 2020]. Disponible en: <http://www.telemadrid.es/noticias/madrid/Varios-Madrid-Canal-Isabel-II-0-2184681518--20191210113040.html>

[13]

Planeta Inteligente. El Mundo. Acciona. 30 enero 2019 [consulta: 14 marzo 2020]. Disponible en: <https://planetainteligente.elmundo.es/retos-y-soluciones/mas-inundaciones-menos-acceso-al-agua>

[14]

UH Noticias. 06 abril 2019 [consulta: 16 marzo 2020]. Disponible en: <https://www.ultimahora.es/noticias/part-forana/2019/04/06/1070797/trafico-agua-potable-vuelven-llevar-seis-meses-despues-torrentada.html>

[15]

El Mundo. 01 mayo 2018 [consulta: 16 marzo 2020]. Disponible en: <https://www.elmundo.es/baleares/2018/05/01/5ae891b8e2704e1a7a8b4586.html>

[16]

FLOODUP, 2015-2016. [consulta: 18 marzo 2020]. Disponible en: <http://www.floodup.ub.edu/el-impacto-de-las-inundaciones/>

[17]

EL DIARIO Montañés. 02 diciembre 2019 [consulta: 20 marzo 2020]. Disponible en: <https://www.eldiariomontanes.es/santander/resueltas-incidencias-suministro-20191202095457-nt.html>

[18]

iAgua. 19 marzo 2016 [consulta: 22 marzo 2020]. Disponible en: <https://www.iagua.es/noticias/locken/vuelven-aumentar-perdidas-agua-espana>

[19]

iAgua. 20 febrero 2020 [consulta: 22 marzo 2020]. Disponible en: <https://www.iagua.es/noticias/ministerio-transicion-ecologica-y-reto-demografico/agua-principales-ejes-adaptacion-al>

[20]

iAgua. 02 julio 2018 [consulta: 24 marzo 2020]. Disponible en: <https://www.iagua.es/blogs/mixzaida-pena/problemas-recurso-agua>

[21]

Universidad de Oviedo. [en línea]. SISTEMAS DE BOMBEO. [consulta: 24 marzo 2020]. Disponible en: [https://agasca.net/wp-content/uploads/2018/08/PDF\\_SistemasdeBombeo2.pdf](https://agasca.net/wp-content/uploads/2018/08/PDF_SistemasdeBombeo2.pdf)

[22]

Diario LARIOJA. 09 agosto 2019 [consulta: 25 marzo 2020]. Disponible en: <https://www.larioja.com/comarcas/alfaro/alfaro-recupera-abastecimiento-20190809093415-nt.html?ref=https://www.google.com/>

## 8.4 Capítulo 4: Caso I

[23]

General Water Company Argentina, 2018. [consulta: 28 marzo 2020]. Disponible en: <https://gwc.com.ar/servicios/abastecimiento-agua/>

## 8.5 Capítulo 5: Caso II

[24]

iAgua. 28 febrero 2020 [consulta: 10 abril 2020]. Disponible en: <https://www.iagua.es/blogs/siham-amasri/agua-agricultura-y-bosques-marruecos>

Ainia Centro Tecnológico. 15 abril 2019 [consulta: 11 abril 2020]. Disponible en: <https://www.interempresas.net/Alimentaria/Articulos/243863-10-medidas-de-economia-circular-para-gestion-del-agua-en-industrias-agroalimentarias.html>

El Eix Clot, Associació de Comerciants Emprenedors del Clot - Camp de l'Arpa del distrito de San Martí. 20 marzo 2020 [consulta: 11 abril 2020]. Disponible en: <https://www.eixclot.cat/es/noticia/el-gobierno-aprueba-reducir-a-la-mitad-el-canon-del-agua-para-usuarios-domesticos-y-actividades-economicas>

Wikipedia: la enciclopedia libre. 16 octubre 2013 [consulta: 11 abril 2020]. Disponible en: [https://es.wikipedia.org/wiki/Agua\\_subterr%C3%A1nea](https://es.wikipedia.org/wiki/Agua_subterr%C3%A1nea)

Escuela de Ingeniería y medio Ambiente. [consulta: 11 abril 2020]. Disponible en: <http://cimaformacion.com/categorias-de-las-masas-de-agua-superficial/>

Blog. Gestión de residuos industriales. 08 agosto 2018 [consulta: 11 abril 2020]. Disponible en: <https://gestionderesiduosindustriales.blogspot.com/2018/08/agua-tratada-definicion.html>



# GLOSARIO

---

ONU: Organización Mundial de las Naciones Unidas	2
TFG: Trabajo Fin de Grado	6
WRI: World Resources Institute	13
AEAS: Asociación Española de Abastecimientos de Agua y Saneamiento	16
AGA: Gestoras de los Servicios de Agua a Poblaciones	16
INE: Instituto Nacional de Estadística	17
CCS: Consorcio de Compensación de Seguros	19
EurEau: European Federation of National Associations of Water Services	20
GRG: Generalized Reduced Gradient	54