

Trabajo de Fin de Grado  
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Diseño de un sistema vibratorio excitado por un rotor  
desequilibrado

Autor: Santiago Lapachet Quesada

Tutor: Jesús Vázquez Valeo

Dpto. Ingeniería Mecánica y Fabricación  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2019





Trabajo de Fin de Grado  
Grado en Ingeniería Aeroespacial

# **Diseño de un sistema vibratorio excitado por un rotor desequilibrado**

Autor:

Santiago Lapachet Quesada

Tutor:

Jesús Vázquez Valeo

Profesor contratado doctor

Dpto. de Ingeniería Mecánica y Fabricación

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2019



Trabajo de Fin de Grado: Diseño de un sistema vibratorio excitado por un rotor desequilibrado

Autor: Santiago Lapachet Quesada

Tutor: Jesús Vázquez Valeo

El tribunal nombrado para juzgar el Trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2019

El Secretario del Tribunal

*A mi familia, por su apoyo y  
confianza*

*A mis amigos, por estar conmigo  
en todo momento*

*Al CMU San Juan Bosco, por  
todos los valores recibidos*



# Agradecimientos

---

Quiero dar las gracias a mis padres la gran oportunidad que me han brindado y todo el amor me han dado incondicionalmente, espero habérselo devuelto y seguir haciéndolo como se merecen. Gracias también a mi hermano, por escucharme y estar a mi lado aun cuando no estamos juntos. A todos mis amigos, de Córdoba, Sevilla y del CMU San Juan Bosco que me han ayudado a crecer durante mi etapa universitaria, en especial, a Carlos, Manuel, Juan, Eduardo y D. Miguel Ángel.

Por último, agradecer a todas aquellas personas que me han ayudado sin esperar nada a cambio.

*Santiago Lapachet Quesada*

*Sevilla, 2019*



# Resumen

---

El objetivo de este trabajo es un estudio de viabilidad del diseño de un banco de ensayo de vibraciones con dos grados de libertad.

Para ello, se tomará en consideración un sistema masa-resorte que se ve excitado por la vibración de un motor desequilibrado. Dicho motor tiene las mismas características que uno existente en el Laboratorio de Ingeniería Mecánica de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Universidad de Sevilla.

En primera instancia se estudiará el comportamiento del sistema con un único grado de libertad (1 GDL) y, posteriormente, con 2 GDL.

Dado que el objetivo es estudiar la viabilidad de la construcción del equipo utilizando parte del material ya existente en el Laboratorio de Ingeniería Mecánica y de ciertos componentes comerciales, se realizarán una serie de simulaciones informáticas de los dos sistemas anteriores, tratando de ser lo más fiel al comportamiento real que se espera. Para ello, se ha empleado el software MSC.Adams con el fin de simular el comportamiento dinámico de los sistemas, y para su modelado, se ha hecho uso del software CATIA v5. En cuanto al análisis matemático y postprocesado de los datos obtenidos en la simulación, se ha empleado Matlab.

Una vez que se han creado los sistemas, se han realizado pruebas a distintas frecuencias para determinar una serie de parámetros característicos del sistema mecánico, como amortiguamiento, frecuencias naturales, etc. tal y como está pensado que lo hagan los alumnos en las prácticas.

Por último, se ha hecho una comparativa de los resultados de las simulaciones con los modelos matemáticos, a fin de verificar la fidelidad de los mismos.



# Abstract

---

This project has as its ultimate object the design of a future equipment to perform hands-on laboratory lessons about mechanical vibrations.

In order to reach this goal, two mass-spring systems have been considered, with one and two degree of freedom respectively. Such systems had been designed to be harmonically excited by an unbalanced rotor. In this case, the rotor chosen to cause the movement possesses identical characteristics to the one located in the Mechanic Engineering Laboratory of the Higher Engineering School of Sevilla.

Since this is a preliminar study of the equipment designment a series of simulations had been made, trying to make them as the most reality-like as possible. For this purpose, it has been used mainly MSC.Adams, in order to simulate the dynamic response of systems. As a complement, it has also been used CATIA v5 for an easier modeling of some elements, and Matlab for mathematic analysis and data postprocessing.

Once the systems were created, frequency scanning has been made to determinate several parameters, such as damping or natural frequencies, in the same way the students would do using an actual assembly.

Finally the data obtained in the simulations has been verified, comparing it to the other results obtained through analytic and numeric evaluation.



# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>ix</b>
<b>Resumen</b>	<b>xi</b>
<b>Abstract</b>	<b>xiii</b>
<b>Contenido</b>	<b>xiv</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>xvii</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xix</b>
<b>Notación</b>	<b>xxi</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>23</b>
1.1. <i>Motivación</i>	23
1.2. <i>Objetivos</i>	23
1.3. <i>Equipo disponible</i>	24
1.3.1 Equipo de análisis modal	24
1.3.2 Motor desequilibrado	24
<b>2 Estudio analítico</b>	<b>25</b>
2.1. <i>Limitaciones de diseño y montaje</i>	25
2.2. <i>Caracterización del sistema de 1 GDL</i>	25
2.3. <i>Diseño del sistema de 1 GDL</i>	27
2.4. <i>Caracterización del sistema de 2 GDL</i>	29
2.5. <i>Diseño del sistema de 2 GDL</i>	33
<b>3 Descripción de MSC Adams</b>	<b>36</b>
3.1. <i>Características generales</i>	36
3.2. <i>Adams View</i>	37
<b>4 Modelado del sistema</b>	<b>40</b>
4.1. <i>Rotor desequilibrado</i>	40
4.2. <i>Guía</i>	41
4.3. <i>Mesa de ensayo</i>	42
4.4. <i>Utillaje</i>	42
4.5. <i>Ensamblaje</i>	43
4.6. <i>Conectores y fuerzas</i>	45
<b>5 Simulación y Resultados</b>	<b>47</b>
5.1. <i>Diseño de la simulación</i>	47
5.2. <i>Simulación</i>	50
5.3. <i>Resultados</i>	52
5.3.1 Sistema 1 grado de libertad	52
5.3.2 Sistema 2 grados de libertad	55
<b>6 Conclusiones y futuro</b>	<b>62</b>
6.1. <i>Conclusión</i>	62
6.2. <i>Líneas de acción futuras</i>	62
6.3. <i>Presupuesto estimado</i>	62
<b>7 Bibliografía</b>	<b>64</b>



# ÍNDICE DE TABLAS

---

Tabla 5.1-1: Barrido frecuencia 1 GDL .....	49
Tabla 5.1-2: Barrido frecuencia 2 GDL .....	49
Tabla 5.3.1-1: Tabla resultados 1 GDL.....	53
Tabla 5.3.2-1: Tabla resultados 2 GDL.....	56



# ÍNDICE DE FIGURAS

---

Figura 1.1-1: Esquema simplificado	23
Figura 1.3.1-1: Equipo de análisis modal	24
Figura 2.2-1: Esquema 1 GDL	25
Figura 2.2-2: Equilibrio de fuerzas 1 GDL	26
Figura 2.2-3: Equilibrio de fuerzas en equilibrio estático 1 GDL	26
Figura 2.4-1: Esquema 2 GDL	29
Figura 2.4-2: Equilibrio fuerzas masa 1 en 2 GDL	29
Figura 2.4-3: Equilibrio fuerzas masa 2 en 2 GDL	30
Figura 3.2-1: Ventana principal Adams View	37
Figura 3.2-2: Barra de herramientas Adams View	37
Figura 3.2-3: Pestaña Bodies	37
Figura 3.2-4: Pestaña Connectors	38
Figura 3.2-5: Pestaña Motions	38
Figura 3.2-6: Pestaña Forces	38
Figura 3.2-7: Pestaña Elements	38
Figura 3.2-8: Pestaña Design Exploration	39
Figura 3.2-9: Pestaña Plugins	39
Figura 3.2-10: Pestaña Machinery	39
Figura 3.2-11: Pestaña Simulation	39
Figura 3.2-12: Pestaña Results	39
Figura 4.1-1: Modelo CATIA del rotor	40
Figura 4.2-1: Modelo 3D Guía	41
Figura 4.2-2: Modelo CATIA de la Guía	41
Figura 4.3-1: Modelo CATIA de la Mesa	42
Figura 4.4-1: Modelo CATIA del Utillaje	42
Figura 4.5-1: Importación a Adams View	43
Figura 4.5-2: Modificación propiedades	43
Figura 4.5-3: Ensamblaje modelo 1 GDL Adams View	44
Figura 4.5-4: Ensamblaje modelo 2 GDL Adams View	44
Figura 4.6-1: Fixed joint	45
Figura 4.6-2: Cinematic joint	45
Figura 4.6-3: Spring-Dumper	46
Figura 4.6-4: Modificación parámetros resorte	46
Figura 5.1-1: Creación CG	47
Figura 5.1-2: Fuerza puntual aplicada	48
Figura 5.1-3: Definición fuerza puntual	48

Figura 5.1-4: Obtención de medidas	49
Figura 5.2-1: Simulation Control	50
Figura 5.2-2: Aliasing	50
Figura 5.2-3: Ejemplo de gráfica sin aliasing	51
Figura 5.2-3: Gráfica 1 GDL sin aliasing	51
Figura 5.2-4: Postprocessor	51
Figura 5.3.1-1: Comando spline Matlab	53
Figura 5.3.1-2: Amplitud vs frecuencia 1 GDL	53
Figura 5.3.1-3: Aceleración vs frecuencia 1 GDL	54
Figura 5.3.1-4: Método ancho banda	54
Figura 5.3.2-1: Comando Spline Matlab 2 GDL	56
Figura 5.3.2-2: Amplitud rotor vs frecuencia 2 GDL	57
Figura 5.3.2-3: Amplitud masa 2 vs frecuencia 2 GDL	57
Figura 5.3.2-4: Comparación de ambas amplitudes vs frecuencia 2 GDL	57
Figura 5.3.2-5: Función sistema primer orden Matlab	59
Figura 5.3.2-6: Comando ode45 Matlab	60
Figura 5.3.2-7: Comparación amplitudes vs tiempo en modo 1	60
Figura 5.3.2-8: Comparación amplitudes vs tiempo en modo 2	61
Figura 5.3.2-9: Método ancho banda 2 GDL	61

# Notación

---

$A^*$	Conjugado
c.t.p.	En casi todos los puntos
c.q.d.	Como queríamos demostrar
■	Como queríamos demostrar
e.o.c.	En cualquier otro caso
$e$	número $e$
$\text{IRe}$	Parte real
$\text{Im}$	Parte imaginaria
$\text{sen}$	Función seno
$\text{tg}$	Función tangente
$\text{arctg}$	Función arco tangente
$\text{sen}$	Función seno
$\text{sen}^x y$	Función seno de $x$ elevado a $y$
$\text{cos}^x y$	Función coseno de $x$ elevado a $y$
$\text{Sa}$	Función sampling
$\text{sgn}$	Función signo
$\text{rect}$	Función rectángulo
$\text{Sinc}$	Función sinc
$\partial y \partial x$	Derivada parcial de $y$ respecto
$x^\circ$	Notación de grado, $x$ grados.
$\text{Pr}(A)$	Probabilidad del suceso $A$
SNR	Signal-to-noise ratio
MSE	Minimum square error
:	Tal que
$<$	Menor o igual
$>$	Mayor o igual
$\backslash$	Backslash
$\Leftrightarrow$	Si y sólo si



# 1 INTRODUCCIÓN

A continuación, se van a exponer una serie de ideas básicas, objetivos, medios empleados y forma de abordar el presente trabajo, con la intención de introducir brevemente algunos de los conceptos que se desarrollarán con una mayor profundidad en capítulos posteriores.

## 1.1. Motivación

La mecánica de vibraciones es una rama muy importante de la ingeniería, y cuyo desconocimiento ha dejado ejemplos bastantes desoladores como el caso del puente de Tacoma. Es por ello por lo que es fundamental dar a los alumnos una visión de lo importante que es esta disciplina, y una buena forma es dar apoyo práctico y visual a lo aprendido en las clases teóricas.

Actualmente el Laboratorio de Ingeniería Mecánica de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros posee un banco de ensayo que comprende un motor desequilibrado que se encuentra sobre una viga bi-apoyada. Sin embargo, el modelo que aquí se propone es mucho más visual a la hora de hallar las frecuencias naturales del sistema, de modo que este trabajo puede resultar un buen refuerzo para facilitar un entendimiento más profundo por parte del alumnado.

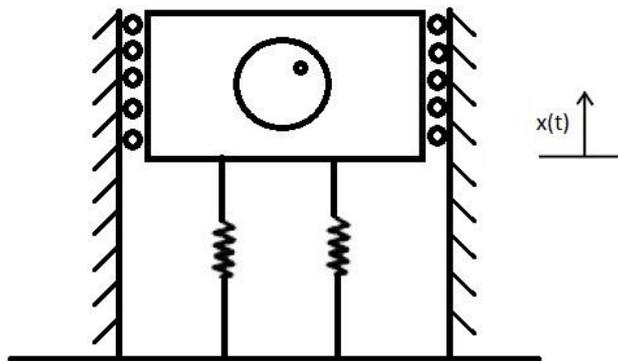


Figura 1.1-1: Esquema simplificado

Esta imagen muestra el esquema más simple del sistema (1 GDL) que se va a estudiar en este trabajo, en el que no se ha representado gráficamente ningún elemento amortiguador como tal, pero se considerará el amortiguamiento propio del sistema.

## 1.2. Objetivos

El objetivo de este trabajo es principalmente el diseño de un banco de ensayo de vibraciones para que pueda ser útil en próximos cursos. Para lograrlo es necesario señalar una serie de puntos o hitos que explican la línea de actuación que ha tenido este trabajo, y que se detallan a continuación:

- Realizar un boceto sencillo del montaje, viendo posibles desventajas y sobre todo soluciones a estas.
- Trasladar dicho boceto a un modelo analítico que permita su estudio teórico, y que a través de este, se puedan elegir valores adecuados de los parámetros de diseño.

- Mediante catálogos disponibles, elegir elementos necesarios para el montaje, materiales y propiedades de los mismos.
- Realizar un modelo CAD que sea lo más fiel posible al que sería el montaje real.
- Con el anterior modelo CAD, realizar una serie de simulaciones que permitan el análisis a través de MSC.Adams, y, de esta forma, poder hallar parámetros tales como el amortiguamiento o las frecuencias naturales.
- Finalmente, comparar los resultados obtenidos en la simulación con los que se obtuvieron teóricamente.

### 1.3. Equipo disponible

Para un mejor aprovechamiento de los recursos, hay que conocer el equipo disponible en el laboratorio, por si resultase de utilidad. Los únicos equipos reutilizables son el motor con desequilibrio y el equipo de análisis modal.

#### 1.3.1 Equipo de análisis modal

El equipo de análisis modal consta de:

- Martillo PCB Piezotronics modelo 086C03 con sensibilidad 2.25 mV/N
- Acelerómetro PCB Piezotronics 352C33 SN 66941, SN 66937, SN 66936 y SN 67661
- Software comercial Pimiento (adquisición de datos) y TestLab (explotación de datos)
- Módulo periférico que recibe señales de entrada.



Figura 1.3.1-1: Equipo de análisis modal

Estos datos han sido sacados de la página web del área de ingeniería mecánica de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería.

#### 1.3.2 Motor desequilibrado

Puesto que no hay datos sobre este equipo en la página web mencionada anteriormente, se han tomado estas medidas del equipo del laboratorio junto con algunos ajustes necesarios para garantizar los resultados deseados:

- Masa (M) incluyendo desequilibrio: 7,800 kg
- Masa ( $m_0$ ) del desequilibrio: 0,155 kg
- Rango de frecuencias: [1, 25] Hz
- Dimensiones:

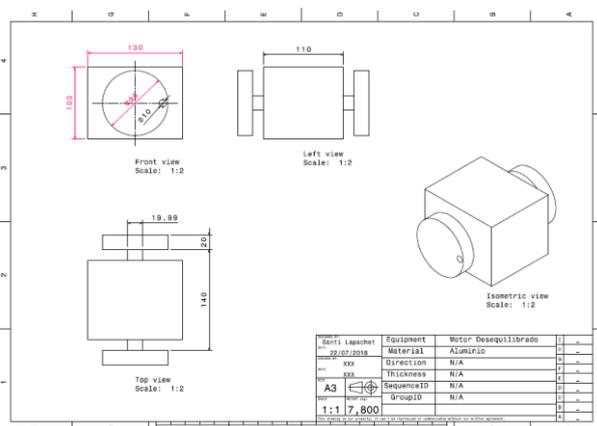


Figura 1.3.2-1: Dimensiones rotor desequilibrado

## 2 ESTUDIO ANALÍTICO

En este apartado se va a realizar un estudio analítico de los dos sistemas propuestos, 1 GDL y 2 GDL, con el fin de obtener información relevante a la hora de elegir los parámetros del sistema, véase una relación entre la masa y la rigidez, de manera que teniendo un valor de la masa se obtenga la rigidez que es necesaria imponer al resorte, y viceversa.

### 2.1. Limitaciones de diseño y montaje

Antes de comenzar con la obtención de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los sistemas y su posterior diseño, es necesario recordar las limitaciones que poseen los equipos a emplear:

- De los acelerómetros:
  - o Aceleraciones máximas medibles de hasta 50 g.
  - o Dificultad para medir frecuencias por debajo de 1 Hz.
- Del motor desequilibrado:
  - o Frecuencia limitante superiormente: 1500 RPM = 25 Hz

Nótese la necesidad de elegir los parámetros de manera que las frecuencias naturales del sistema estén dentro del rango del motor desequilibrado, pues uno de los objetivos que tiene este trabajo es ver los modos 1 y 2 del sistema 2 GDL.

En cuanto a las limitaciones de amplitud de vibración, estas vendrán dadas por la longitud de las guías que permitirán únicamente el desplazamiento vertical de las masas. Puesto que es un elemento que todavía no se ha concretado, su elección se realizará después de obtener los resultados teóricos, por lo que, a priori, no debe ser un elemento limitante.

Una vez aclarado este apartado, se procede a la caracterización y diseño de los sistemas de 1 GDL y 2 GDL.

### 2.2. Caracterización del sistema de 1 GDL

Se parte de un diseño sencillo en 2D, que es con el que más se acostumbra a trabajar, y, puesto que se van a restringir los movimientos lateral y horizontal, se puede suponer como buena la aproximación al caso 2D.

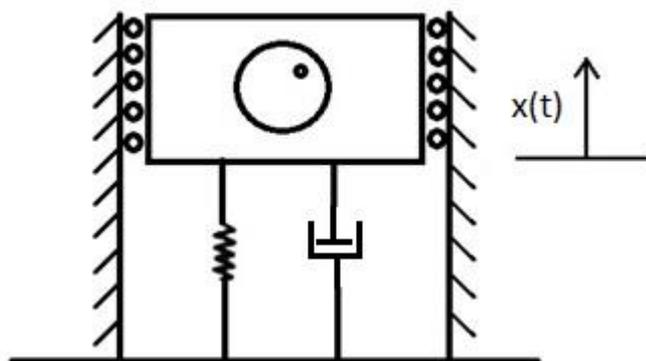


Figura 2.2-1: Esquema 1 GDL

En esta imagen, a diferencia de la que se mostró al comienzo del trabajo, se le ha añadido un elemento amortiguador que, aunque no se colocará ninguno como tal en el diseño real, representa el amortiguamiento natural propio del sistema.

Comenzando con en análisis propiamente dicho, este problema estaría en la categoría de problemas de vibración forzada periódica, provocada por el funcionamiento de un rotor con desequilibrio.

Antes del funcionamiento de este, el sistema parte de una posición de equilibrio, si se hace equilibrio de fuerzas en ese estado de reposo se tiene:

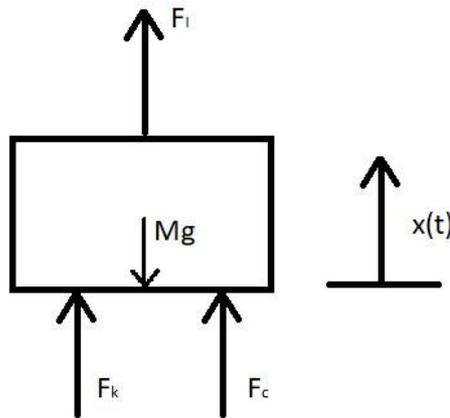


Figura 2.2-2: Equilibrio de fuerzas 1 GDL

Como puede observarse, el peso, al estar en la dirección del movimiento, no puede despreciarse. Sin embargo, se pueden calcular las ecuaciones desde la posición de equilibrio estático, de manera que la fuerza propia del peso no interviene en las ecuaciones explícitamente, pero sí lo hace en las condiciones iniciales, haciendo que la posición en dicho instante inicial no sea nula.

$$\begin{cases} F_I = -m\ddot{x} \\ F_k = -k(-x) \\ F_c = -c(-\dot{x}) \\ F_I + F_k + F_c = Mg \end{cases}$$

Resolviendo la última ecuación para el caso de equilibrio estático, es decir, velocidad y aceleración nulas, se tiene una posición de equilibrio estático  $\delta_{est} = \frac{Mg}{k}$ .

Tras la obtención de la posición inicial, pueden desarrollarse las ecuaciones características del movimiento, haciendo nuevamente equilibrio de fuerzas, pero teniendo en cuenta la fuerza del rotor desequilibrado.

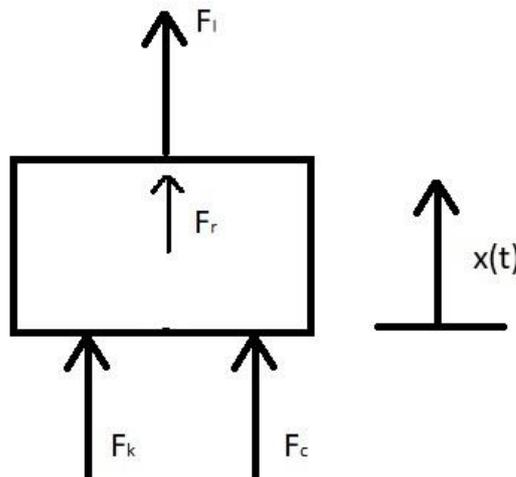


Figura 2.2-3: Equilibrio de fuerzas en equilibrio estático 1 GDL

La ecuación obtenida es  $F_r + F_I + F_k + F_c = 0$ , donde todas las fuerzas tienen la misma dirección y sentido según el criterio de signos empleado.

Desarrollando las expresiones de cada fuerza se tiene:

$$\begin{cases} F_I = -m\ddot{x} \\ F_r = m_o e_o \omega^2 \sin(\omega t) \\ F_k = -kx \\ F_c = -c\dot{x} \end{cases}$$

Si se reescribe la ecuación del equilibrio de fuerzas reorganizando los términos se obtiene la ecuación que caracteriza el movimiento:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_0 e_0 \omega^2 \sin(\omega t)$$

Uno de los aspectos a tener en cuenta es la amplitud del movimiento. Aunque en el apartado de limitaciones del sistema no se le dio importancia porque todavía no se había escogido el diseño de la guía vertical, es necesario valorar este parámetro para la futura elección del elemento mecánico.

Para obtener la amplitud, sabiendo que la fuerza del rotor desequilibrado es del tipo:

$$F_r = A\omega^2 \sin(\omega t)$$

Se va a suponer una solución particular de la ecuación del movimiento tal que:

$$x_p = X \sin(\omega t - \alpha)$$

Tras lo cual, se puede llegar a una expresión sencilla de la amplitud:

$$X = \frac{e_0 m_0}{M} \frac{\tau^2}{\sqrt{(1 - \tau^2)^2 + (2\xi\tau)^2}} = \frac{e_0 m_0}{M} R$$

Donde  $\tau = \omega/\omega_n$  y la relación de amortiguamiento  $\xi = \frac{c}{2m\omega_n}$ , siendo  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}$  la frecuencia natural del sistema. El factor que duplica  $e_0 m_0$  es por la simetría del rotor que hace que tenga dos desequilibrios en lugar de uno solo.

Se ha expresado la amplitud como función de la relación de amplificación, de manera que se puede deducir que para disminuir la amplitud de vibración habría que aumentar la masa si no se desea cambiar ningún parámetro de rigidez o amortiguamiento, algo que puede parecer obvio a primera vista sin necesidad de demostrarse analíticamente.

Una vez que se ha obtenido la amplitud  $X$ , quedaría averiguar la aceleración para saber si el diseño cumple con la restricción impuesta por el acelerómetro.

Para ello se parte nuevamente de la solución particular que se supuso anteriormente. Simplemente derivando dos veces la posición con respecto del tiempo se obtiene la expresión de la aceleración:

$$\begin{cases} x_p = X \sin(\omega t - \alpha) \\ \dot{x}_p = X\omega \cos(\omega t - \alpha) \\ \ddot{x}_p = -X\omega^2 \sin(\omega t - \alpha) \end{cases}$$

Y sustituyendo la expresión que se halló de la amplitud en función se tiene que la aceleración es:

$$\ddot{x}_p = -\frac{e_0 m_0}{M} \frac{\tau^2}{\sqrt{(1 - \tau^2)^2 + (2\xi\tau)^2}} \omega^2 \sin(\omega t - \alpha)$$

### 2.3. Diseño del sistema de 1 GDL

Una vez definidas las ecuaciones que gobiernan el movimiento del sistema de 1 GDL, llega el momento de establecer una relación entre los parámetros que no están definidos, esto es,  $M$  y  $k$ , de manera que, tras un proceso iterativo, se converja a una solución que esté dentro de los límites impuestos anteriormente.

En primer lugar, se va a elegir un valor de la frecuencia que esté dentro de los límites, esto es, que cumpla con la condición más restrictiva  $f \in [1, 25] \text{ Hz}$  impuesta por el rango del rotor y la frecuencia mínima medible. Lo primero que viene a la mente como valor de entrada serían los extremos del intervalo o el valor medio. Puesto que el valor que se escoja será el punto de diseño, es decir, el centro del intervalo barrido, se va a tomar como primera opción  $f = 12 \text{ Hz}$ . Esta va a ser la frecuencia natural del sistema en primera instancia.

$$\omega_n = \sqrt{k/M} = 2\pi f = 2\pi * 12 = 75.4 \text{ rad/s}$$

Obteniendo una relación lineal entre la rigidez y la masa como se buscaba:

$$\frac{k}{M} = 5685.16 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

Se procede, entonces, al cálculo de la amplitud de vibración que tendría el sistema:

$$X = 2 \frac{e_o m_o}{M} \frac{\tau^2}{\sqrt{(1 - \tau^2)^2 + (2\xi\tau)^2}} = \frac{e_o m_o}{M} R$$

Conociendo los valores de algunos de los parámetros y suponiendo otros que serán susceptibles de cambio:

- $e_o = 0.038 \text{ m}$
- $m_o = 0.2 \text{ kg}$
- $\tau = 1$
- $\xi = 0.1$

Los valores de  $e_o m_o$  se han obtenido del rotor desequilibrado del laboratorio; para el valor de  $\tau$  se ha supuesto el caso más desfavorable, aquel en el que  $\omega = \omega_n$ ; y para  $\xi$  se ha tomado un valor típico de la relación de amortiguamiento.

Con estos datos se obtiene un valor de  $R = 50$ , y por tanto la amplitud será:

$$X = 2 * \frac{0.038 * 0.2}{M} * 50 = \frac{0.076}{M}$$

Quedando dicho parámetro en función de la masa del rotor. Suponiendo un valor inicial  $M = 8 \text{ kg}$ , dado por la masa real del rotor (7.8 kg) y el peso añadido de los anclajes de las guías verticales (aproximadamente 100 g cada uno).

Finalmente, la amplitud obtenida es de  $X = 0.0095 \text{ m} = 9.5 \text{ mm}$ .

Con el valor de la masa que se ha supuesto se puede hallar el amortiguamiento  $c$  del sistema gracias a la expresión de la relación de amortiguamiento:

$$c = 2 * M * \omega_n * \xi = 120.64 * 10^{-3} \text{ N s/mm}$$

Debido al valor tan pequeño y poco significativo de amplitud que se ha obtenido, se realiza un segundo cálculo donde lo que se supone conocido ahora es la amplitud y se deja como incógnita la masa del sistema  $M$ . El resto de los parámetros de diseño siguen siendo los mismos que se recuerdan a continuación, y la amplitud que se desea obtener tendrá un valor  $X = 0.02 \text{ m} = 2 \text{ cm}$ .

- $e_o = 0.038 \text{ m}$
- $m_o = 0.200 \text{ kg}$
- $\tau = 1$
- $\xi = 0.1$
- La masa obtenida es  $M = 3.8 \text{ kg}$ . Este valor es muy inferior al que se ha usado inicial y que posee el equipo del laboratorio. Sin embargo, se va a proseguir con el cálculo del amortiguamiento  $c$  del sistema, sabiendo que  $\omega_n = 75.4 \text{ rad/s}$ :

$$c = 2 * M * \omega_n * \xi = 57.304 * 10^{-3} \text{ N s/mm}$$

En vista de esto, se deciden cambiar los parámetros iniciales:

- $e_o = 0.04 \text{ m}$
- $m_o = 0.155 \text{ kg}$
- $\tau = 1$
- $\xi = 0.01$

El cambio más destacable es el de la relación de amortiguamiento, que disminuye a la décima parte. Esto garantiza que la amplitud resultante sea mucho mayor.

Los valores de  $e_o m_o$  se han obtenido del sistema de 2 GDL que, como se verá más adelante, es el más limitante.

Con estos datos se obtiene un valor de  $R = 50$ , y por tanto la amplitud será:

$$X = 2 * \frac{0.04 * 0.155}{M} * 50 = \frac{0.62}{M}$$

Dando de nuevo a la masa el valor  $M = 8 \text{ kg}$ , se obtiene una amplitud  $X = 0.0388 \text{ m} = 38.8 \text{ mm}$ , resultado es mucho más significativo que los anteriores.

A la hora de calcular el amortiguamiento, se toma la frecuencia  $f = 9.27 \text{ Hz}$ , siendo  $\omega_n = 58.248 \text{ rad/s}$ . Este resultado se ha conseguido, haciendo que la rigidez del sistema sea la misma que la que se va a calcular en el sistema de 2 GDL,  $k = 27143 \text{ N/m}$ .

$$c = 2 * M * \omega_n * \xi = 9.3197 \text{ N s/mm}$$

## 2.4. Caracterización del sistema de 2 GDL

A continuación, tras haber realizado la caracterización y diseño del sistema en 1 GDL, se va a hacer lo propio con el de 2 GDL. Nuevamente, se hará uso del diseño en 2D que es una buena aproximación del diseño 3D con las restricciones de movimiento que se imponen.

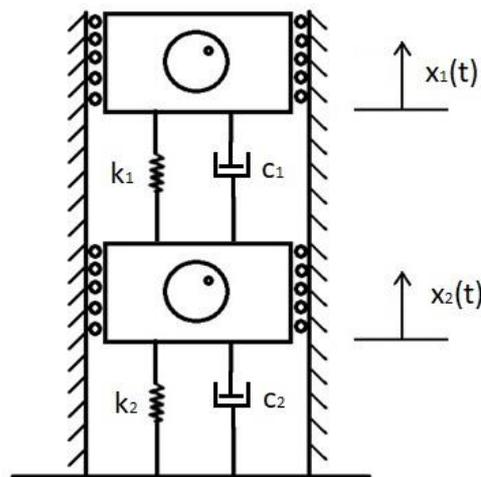


Figura 2.4-1: Esquema 2 GDL

Hay que tener en cuenta que, aunque se distingan los valores de sistema 1 y 2 de masas, una de las hipótesis simplificativas es  $M_1 = M_2$ ;  $c_1 = c_2$ ;  $k_1 = k_2$ , hipótesis que se aplicará más adelante.

Al igual que en el apartado anterior, se realiza un equilibrio de fuerzas en reposo, de manera que se obtenga la posición de equilibrio estático. Empezando por la masa que se encuentra arriba ( $M_1$ ), se tiene:

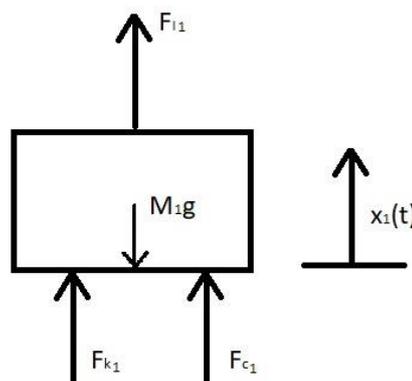


Figura 2.4-2: Equilibrio fuerzas masa 1 en 2 GDL

La ecuación resultante de igualar fuerzas es  $F_I + F_c + F_k = M_1 g$ , donde cada término es:

$$\begin{cases} F_I = -M_1 \ddot{x}_1 \\ F_c = -c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ F_k = -k_1(x_1 - x_2) \end{cases}$$

Por lo tanto, se tiene:

$$M_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + kx_1 = c_1 \dot{x}_2 + kx_2 - M_1 g$$

Teniendo en cuenta que en reposo tanto la velocidad como la aceleración son nulas, y aplicando la hipótesis  $k_1 = k_2$ , la ecuación simplificada sería:

$$x_1(0) - x_2(0) = -\frac{M_1 g}{k}$$

Y esta es la primera ecuación del sistema que es necesario para obtener las dos posiciones estáticas, una por masa.

En cuanto a la segunda, el proceso es similar, con la salvedad de que las fuerzas que aplican a la masa  $M_2$  no son las mismas que lo hacen a la  $M_1$ .

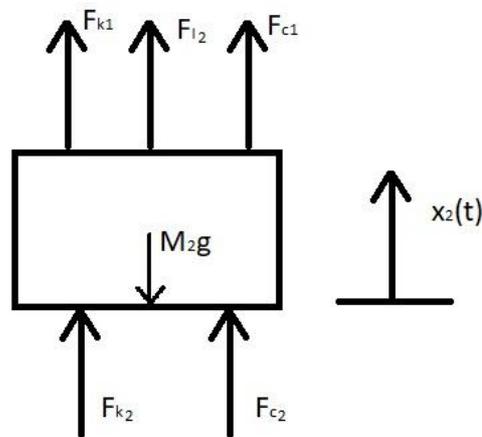


Figura 2.4-3: Equilibrio fuerzas masa 2 en 2 GDL

La ecuación queda de la siguiente manera:

$$F_I + F_{c1} + F_{c2} + F_{k1} + F_{k2} = M_2 g$$

Siendo cada término:

$$\begin{cases} F_I = -M_2 \ddot{x}_2 \\ F_{c1} = -c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ F_{k1} = -k_1(x_2 - x_1) \\ F_{c2} = -c_2(\dot{x}_2) \\ F_{k2} = -k_2(x_2) \end{cases}$$

Por lo que la ecuación completa tiene el siguiente aspecto:

$$M_2 \ddot{x}_2 + 2c_2 \dot{x}_2 + 2k_2 x_2 = c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + M_2 g$$

Tras simplificarla por encontrarse en estado de reposo, y una vez se aplica la hipótesis  $k_1 = k_2$ , se tiene la segunda ecuación del sistema que permite calcular las posiciones estáticas:

$$2x_2(0) - x_1(0) = -\frac{M_2 g}{k}$$

Por lo que, si se resuelve el siguiente sistema, se obtiene:

$$\begin{cases} x_1(0) - x_2(0) = -\frac{M_1 g}{k} \\ 2x_2(0) - x_1(0) = -\frac{M_2 g}{k} \end{cases}$$

Finalmente:

$$\begin{cases} x_1(0) = -2\frac{M_1 g}{k} - \frac{M_2 g}{k} \\ x_2(0) = -\frac{M_1 g}{k} - \frac{M_2 g}{k} \end{cases}$$

Aparentemente, puede no tener sentido que  $x_1(0)$  sea mayor que  $x_2(0)$ , ya que la masa  $M_2$  tiene que soportar el peso propio y además el de la masa de arriba  $M_1$ . Sin embargo, lo que hay que tener en cuenta es que la masa  $M_1$  está apoyada sobre la masa  $M_2$ , y, por lo tanto, su desplazamiento será el sufrido por el peso propio sumado al que sufre la base sobre la que se apoya, esto es, la masa  $M_2$ .

Una vez que se ha obtenido la posición inicial de cada masa, se puede realizar el equilibrio de fuerzas en cada masa descartando la fuerza del peso como se hizo anteriormente para el caso de 1 GDL:

$$M_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + kx_1 - c_1 \dot{x}_2 - kx_2 = m_o e_o \omega^2 \sin(\omega t)$$

En el caso de la  $M_2$ , la ecuación es idéntica a la obtenida en el equilibrio estático, pero sin el peso propio:

$$M_2 \ddot{x}_2 + 2c_2 \dot{x}_2 + 2k_2 x_2 - c_1 \dot{x}_1 - k_1 x_1 = 0$$

Una vez obtenido el sistema, se expresa de forma matricial para facilitar cálculos futuros.

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_o e_o \omega^2 \sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para poder resolver de una manera más sencilla se toma en cuenta la siguiente hipótesis: El amortiguamiento es conservativo y de carácter proporcional. Esto es, el amortiguamiento es proporcional a la masa y a la rigidez del sistema,  $[C] = A[M] + B[K]$ . En esta situación, el resultado de las frecuencias naturales y los modos de vibración serán los mismos que el sistema conservativo asociado:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_o e_o \omega^2 \sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obtenidas las dos ecuaciones que gobiernan el movimiento del sistema en 2 grados de libertad, se van a expresar en función de la amplitud  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ , para ello, se utiliza de nueva la solución particular empleada en el caso de 1 G.D.L., particularizando para  $i = 1, 2$ .

$$\begin{cases} x_{pi} = X_i \sin(\omega t - \alpha) \\ \dot{x}_{pi} = X_i \omega \cos(\omega t - \alpha) \\ \ddot{x}_{pi} = -X_i \omega^2 \sin(\omega t - \alpha) \end{cases}$$

Por lo tanto, la expresión matricial recién obtenida quedaría de la siguiente manera expresada en términos de la amplitud únicamente:

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \sin(\omega t) + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \sin(\omega t) = \begin{bmatrix} m_o e_o \omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} \sin(\omega t)$$

$$\begin{bmatrix} k - \omega^2 M_1 & 0 \\ 0 & 2k - \omega^2 M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_o e_o \omega^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para poder obtener el valor de ambas amplitudes, se despeja el vector amplitud mediante la inversa de la matriz  $Y(\omega)$ :

$$Y(\omega) = \begin{bmatrix} k - \omega^2 M_1 & 0 \\ 0 & 2k - \omega^2 M_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Y(\omega)^{-1} \begin{bmatrix} m_o e_o \omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{adj[Y(\omega)]}{|Y(\omega)|} \begin{bmatrix} m_o e_o \omega^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En vistas a simplificar los cálculos futuros, se deciden igualar las masas, de manera que

$$M_1 = M_2 = M$$

Y se tiene como resultado:

$$X_1 = \frac{(2k - \omega^2 M)e_o m_o \omega^2}{k^2 - 3\omega^3 kM + \omega^4 M^2}$$

$$X_2 = \frac{k e_o m_o \omega^2}{k^2 - 3\omega^3 kM + \omega^4 M^2}$$

Llegados a este punto, se podría comenzar con el diseño del sistema, es decir, realizar una serie de pruebas con distintos valores de los parámetros de diseño, con el fin de ver cuáles de estos valores aportan mejores resultados dentro de las limitaciones del sistema.

Sin embargo, para facilitar las operaciones que tendrán lugar más adelante, se expresan las amplitudes en función de los modos de vibración. Para ello, primero hay que obtener los modos de vibración:

$$|Y(\omega)| = \omega^4 M^2 - 3\omega^3 kM + k^2 = 0$$

$$\omega_1^2 = \frac{k}{2M} (3 - \sqrt{5})$$

$$\omega_2^2 = \frac{k}{2M} (3 + \sqrt{5})$$

Quedando las amplitudes:

$$X_1 = \frac{(2k - \omega^2 M)e_o m_o \omega^2}{M^2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}$$

$$X_2 = \frac{k e_o m_o \omega^2}{M^2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}$$

## 2.5. Diseño del sistema de 2 GDL

Del mismo modo que para el caso de 1 grado de libertad, se va a obtener una relación entre los parámetros de la rigidez y la masa, de manera que se obtenga un resultado dentro de las limitaciones y que aporte una solución de interés.

Sin embargo, hay un problema que impide realizar el proceso de la misma manera que en 1 GDL. Si se toma  $\omega = \omega_1$  ó  $\omega = \omega_2$ , se puede ver como ambas ecuaciones de amplitud se encuentran con una indeterminación de valor infinito.

La solución que se va a tomar ante esta situación es la siguiente. En apartados anteriores se contempló el valor  $\xi = 0.01$ , que junto con el valor unidad de  $\tau = \frac{\omega}{\omega_n}$ , se obtenía  $\frac{\tau^2}{\sqrt{(1-\tau^2)^2+(2\xi\tau)^2}} = 50$ . Pero, si ahora se supone que  $\omega = \sigma\omega_n$ , quedando, por tanto,  $\tau = \frac{\omega}{\omega_n} = \sigma$ , y se supone además que  $\xi = 0$ , se puede obtener el valor de  $\sigma$  para que la ecuación anterior siga teniendo el mismo resultado:

$$\frac{\sigma^2}{(1-\sigma^2)} = 50$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{5}{6}} \sim 0.98$$

Esto implica que en lugar de tomar el valor de la frecuencia que hace que esté vibrando en uno de los dos modos, se tomará el 90% de las frecuencias de los modos, de manera que el resultado será aproximado y así se evita la indeterminación.

Es el momento de realizar los cálculos de las amplitudes para los distintos modos en función de los parámetros de diseño:

Si  $\omega = 0.98\omega_1$ :

$$\begin{cases} X_1 = 3.124 \frac{e_o m_o}{M} \\ X_2 = 1.846 \frac{e_o m_o}{M} \end{cases}$$

Si  $\omega = 0.98\omega_2$ :

$$\begin{cases} X_1 = 0.294 \frac{e_o m_o}{M} \\ X_2 = 2.452 \frac{e_o m_o}{M} \end{cases}$$

A continuación, lo que se va a hacer es suponer un valor de frecuencia para uno de los dos modos, y ver si al calcular el otro, este se encuentra dentro del rango de frecuencias permitido.

En primer lugar, se supone el valor  $f_1 = 10 \text{ Hz}$ , esto es, la frecuencia a la que el sistema se encuentra en modo 1. Sabiendo que  $\omega_1 = 2\pi f_1 = 62.832 \text{ rad/s}$ , y que el modo 1 está definido por la ecuación  $\omega_1^2 = \frac{k}{2M}(3 - \sqrt{5})$ , se obtiene la siguiente igualdad:

$$(2\pi f_1)^2 = \frac{k}{2M}(3 - \sqrt{5})$$

De donde se puede hallar el valor de  $\frac{k}{M} = \frac{2\omega_1^2}{3-\sqrt{5}} = 10334.58 \frac{N}{kg \cdot m}$ , y sustituirlo en la expresión análoga referente al modo 2:

$$(2\pi f_2)^2 = \frac{k}{2M}(3 + \sqrt{5})$$

Obteniendo un valor de frecuencia  $f_2 = 26.2 \text{ Hz} > 25 \text{ Hz}$ . Sin embargo, el valor obtenido no cumple con las limitaciones impuestas por encontrarse fuera del rango de frecuencias admisibles.

Como solución, y en vistas a que la frecuencia del modo 2 será superior a la del modo 1, se decide suponer una frecuencia en modo 2, y hallar la resultante en modo 1.

Al igual que antes, esta vez se supone  $f_2 = 15 \text{ Hz}$ , dando como resultado  $\omega_2 = 2\pi f_2 = 94.248 \text{ rad/s}$ , que a su vez implica una relación rigidez-masa tal que  $\frac{k}{M} = \frac{2\omega_2^2}{3+\sqrt{5}} = 3392.87 \frac{N}{\text{kg}\cdot\text{m}}$ .

Con estos datos, se consiguen los siguientes valores en modo 1:  $\omega_1^2 = \frac{k}{2M}(3 - \sqrt{5}) = 1295.961 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2$ ,  $\omega_1 = 2\pi f_1 = 35.99 \text{ rad/s}$  con una frecuencia  $f_1 = 5.73 \text{ Hz} < 25 \text{ Hz}$ , cumpliendo con las limitaciones.

Una vez se han definido las frecuencias de los modos, es el momento de sustituir los parámetros y comprobar si el límite de aceleraciones se cumple y cuál es la amplitud máxima que alcanza el sistema.

Los datos que se van a emplear para estos cálculos, junto con las expresiones de las amplitudes anteriores, son los que se usaron en la primera prueba del sistema 1 GDL con el fin de certificar que la elección de parámetros no había sido la adecuada:

- $M = 8 \text{ kg}$
- $e_o m_o = 2 * 0.038 * 0.200 \text{ m}$
- $\xi = 0.1$
- $\ddot{x}_i = -X_i \omega^2 \sin(\omega t)$

Si  $\omega = \omega_1$ :

$$|\ddot{x}_1| = 0.78 \text{ g} < 50 \text{ g}$$

$$|\ddot{x}_2| = 0.46 \text{ g} < 50 \text{ g}$$

$$X_1 = 5.93 \text{ mm}$$

$$X_2 = 3.5 \text{ mm}$$

Si  $\omega = \omega_2$ :

$$|\ddot{x}_1| = 0.5 \text{ g} < 50 \text{ g}$$

$$|\ddot{x}_2| = 4.21 \text{ g} < 50 \text{ g}$$

$$X_1 = 0.55 \text{ mm}$$

$$X_2 = 4.65 \text{ mm}$$

Como puede comprobarse, ambos modos cumplen con el límite de aceleraciones máximas medibles. No obstante, desde un punto de vista práctico, los resultados obtenidos en 2 GDL no son buenos, tal y como se esperaba tras el análisis en 1 GDL.

Sabiendo que la amplitud más baja es la del rotor en modo 2, se van a recalcular los parámetros de diseño de manera que se cumpla con la condición  $X_1 = 10 \text{ mm}$ .

Los datos obtenidos son los que se han usado en el resultado final del sistema de 1 GDL:

- $M = 8 \text{ kg}$
- $e_o m_o = 2 * 0.04 * 0.155 \text{ m}$
- $\xi = 0.01$
- $\ddot{x}_i = -X_i \omega^2 \sin(\omega t)$

Si  $\omega = \omega_1$ :

$$|\ddot{x}_1| = 3.71 \text{ g} < 50 \text{ g}$$

$$|\ddot{x}_2| = 2.28 \text{ g} < 50 \text{ g}$$

$$X_1 = 27.9 \text{ mm}$$

$$X_2 = 17.2 \text{ mm}$$

Si  $\omega = \omega_2$ :

$$|\ddot{x}_1| = 9.10 \text{ g} < 50 \text{ g}$$

$$|\ddot{x}_2| = 16.6 \text{ g} < 50 \text{ g}$$

$$X_1 = 10 \text{ mm}$$

$$X_2 = 17.6 \text{ mm}$$

Al imponer la condición de desplazamiento comentada anteriormente, se ve un aumento significativo de las magnitudes a estudiar, lo cual es muy beneficioso para poder apreciarse los distintos modos de vibración a simple vista, estando dentro de los límites de diseño.

# 3 DESCRIPCIÓN DE MSC ADAMS

---

Para realizar las simulaciones necesarias para el desarrollo del trabajo se ha optado por usar el software MSC.Adams. Antes de explicar el proceso de simulación, se ha considerado oportuno realizar una breve introducción del programa, de los distintos módulos que posee y la utilidad que tiene, en concreto, para este proyecto.

## 3.1. Características generales

Es un software de simulación de sistemas mecánicos que cuenta con numerosos módulos diferentes mencionados a continuación:

- **Adams Car:** permite crear y probar el funcionamiento de prototipos virtuales de distintos tipos de automóvil.
- **Adams Driveline:** permite crear distintos trazados para la conducción de manera que se pueda estudiar la dinámica del vehículo durante diferentes condiciones de operación.
- **Adams Flex:** permite incluir en un modelo la flexibilidad de los componentes, permitiendo que estos se deformen durante la simulación.
- **Adams Solver:** es el motor de análisis del programa.
- **Adams View:** Proporciona herramientas de modelado propias y la importación de modelos desde distintos formatos, como CATIA, permitiendo su manipulación, análisis y obtención de resultados.
- **Adams PostProcessor:** Es el módulo encargado del postprocesado y presentación de resultados.

A continuación, puesto que el módulo con el que se va a trabajar es Adams View, se va a proceder a una explicación más detallada del mismo.

## 3.2. Adams View

Como se ha comentado antes, este módulo permite modelar sistemas, tanto importados de otros programas como de elaboración en Adams.

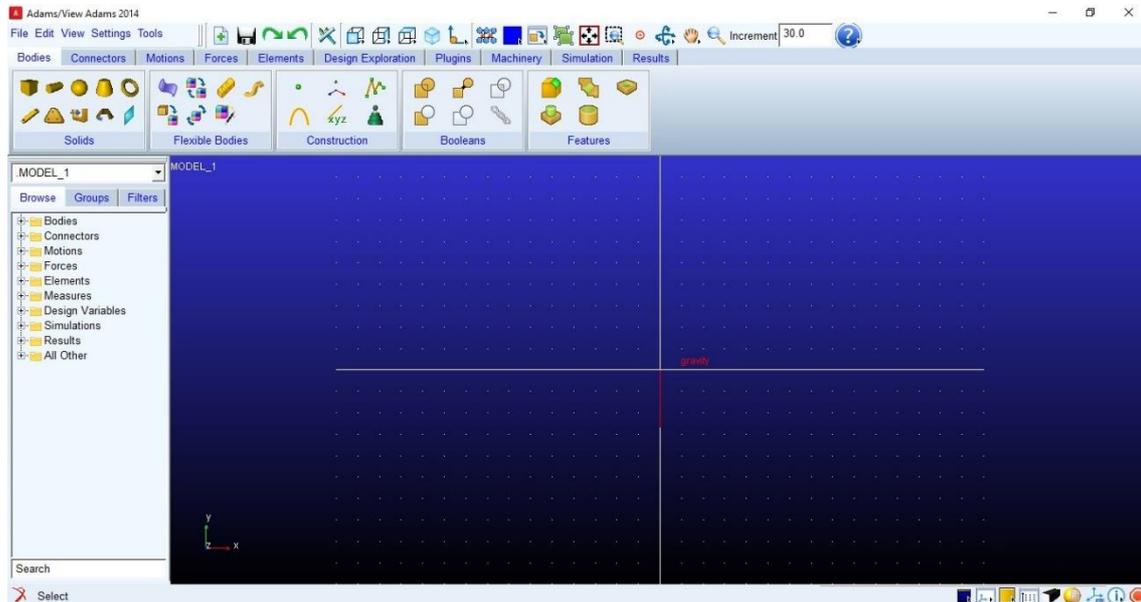


Figura 3.2-1: Ventana principal Adams View

En esta imagen se muestra la ventana principal de Adams View una vez se ha creado un nuevo modelo. En la parte superior se pueden ver las distintas herramientas que permite usar el programa y que se irán describiendo a continuación.



Figura 3.2-2: Barra de herramientas Adams View

Aquí se observan, junto con los desplegables que puede tener cualquier otro programa como opciones o herramientas, una serie de comandos que permiten la manipulación del modelo en cuanto a tipo de vista, tamaño en pantalla o rotación de la misma.

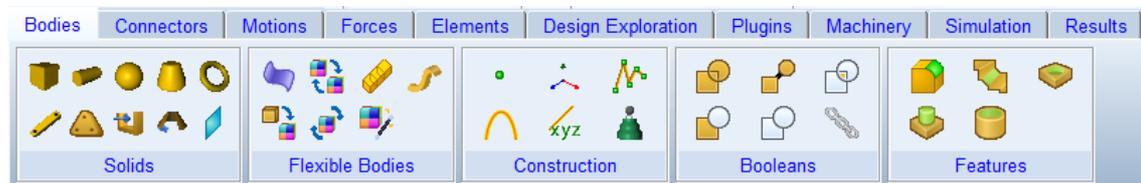


Figura 3.2-3: Pestaña Bodies

La pestaña Bodies permite la creación de sólidos predefinidos y cuerpos flexibles. También permite realizar operaciones booleanas como fusión de cuerpos e intersecciones, y otras operaciones como chaflanes y taladros. A pesar de no ser una herramienta de diseño 3D tan potente como CATIA, por ejemplo, resulta muy útil a la hora de esbozar un sistema de manera sencilla.



Figura 3.2-4: Pestaña Connectors

La pestaña Connectors permite establecer uniones entre los sólidos. Estas pueden ser restringir todos los movimientos, permitir desplazamientos en una o varias direcciones, y rotaciones. También establece condiciones de contacto entre sólidos, paralelismo entre caras o perpendicularidad entre otras.



Figura 3.2-5: Pestaña Motions

Motions impone condiciones de movimiento, es decir, una vez se establecen las condiciones de contorno entre sólidos, se pueden imponer movimientos de traslación y rotación que cumplan con las limitaciones anteriormente impuestas.



Figura 3.2-6: Pestaña Forces

El apartado Forces permite la aplicación de fuerzas. Estas pueden ser puntuales, distribuciones de cargas, fuerzas recuperadoras como las de un resorte, etc.

La diferencia entre este bloque y el anterior reside en que aquí se impone una fuerza que provoca un desplazamiento que se puede medir, y la anterior se impone un desplazamiento que viene derivado de una fuerza que se puede calcular.



Figura 3.2-7: Pestaña Elements

La pestaña Elements permite crear funciones como polinomios interpoladores, arrays o matrices para la obtención de datos.

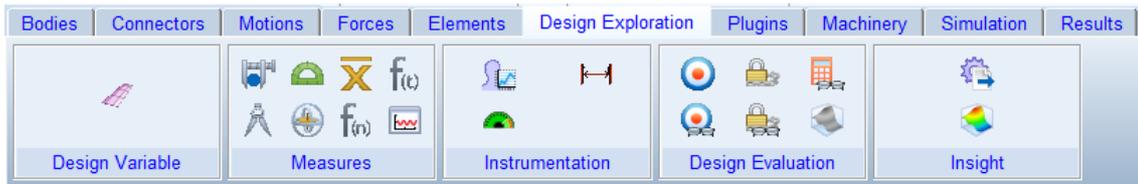


Figura 3.2-8: Pestaña Design Exploration

Design Exploration permite crear sensores virtuales o mediciones en distintos puntos a la hora de la toma de datos.



Figura 3.2-9: Pestaña Plugins

En plugins se pueden lanzar plugins específicos para la resolución de tipos de problema concretos, como el módulo Vibration que permite realizar análisis en el dominio de la frecuencia.



Figura 3.2-10: Pestaña Machinery

La pestaña Machinery permite crear distintos elementos mecánicos como engranajes, cadenas o motores.



Figura 3.2-11: Pestaña Simulation

Esta pestaña permite configurar los parámetros de la simulación como pueden ser el tiempo, el número de pasos, y más opciones que se verán más adelante con más detalle.



Figura 3.2-12: Pestaña Results

Por último, la pestaña Results es la que lanza el módulo de postprocesado, permitiendo analizar los resultados obtenidos en la simulación y visualizar las gráficas resultantes con mayor detalle.

# 4 MODELADO DEL SISTEMA

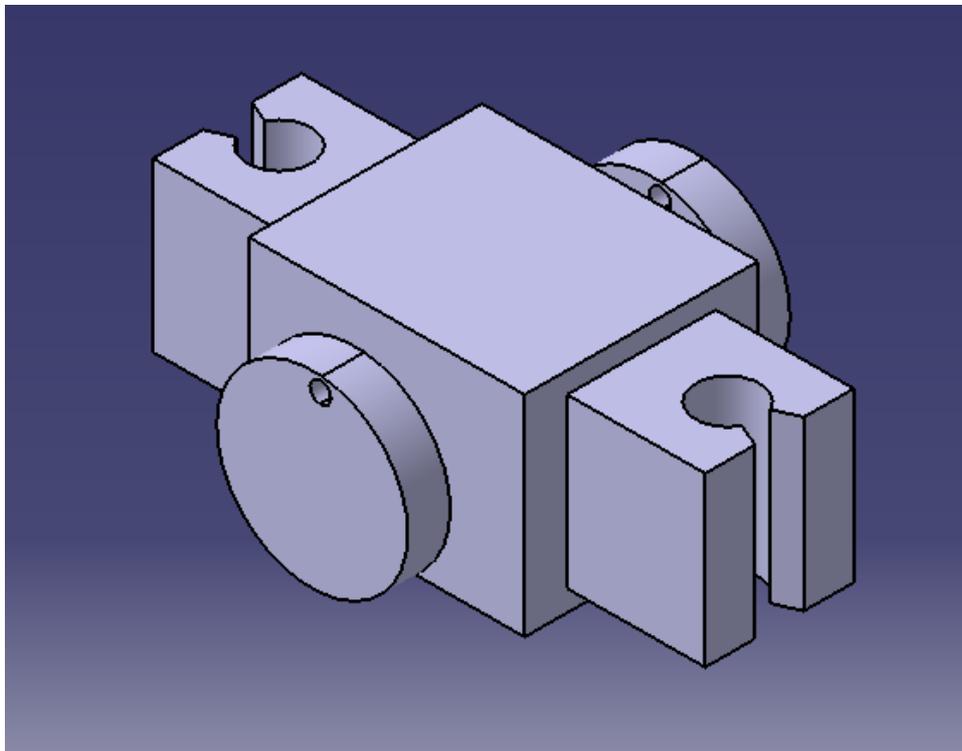
---

El paso previo a la simulación es el modelado del sistema. Para obtener resultados que se aproximen a la realidad, es necesario que el modelo sea también lo más fiel a la realidad que se pueda. Para ello no se va a realizar el modelado 3D con las herramientas que había en la pestaña Bodies de Adams, sino que va a optarse por un modelado en CATIA, que permite un mayor detalle.

## 4.1. Rotor desequilibrado

Para el rotor desequilibrado se ha optado por un diseño basado en la forma y en las medidas del rotor del laboratorio. Adicionalmente en el diseño se han incluido dos abrazaderas que formarán parte de la guía que permita el desplazamiento vertical, a la vez que impide el resto de movimientos.

Se ha tenido en cuenta que el eje del rotor donde se encuentra el desequilibrio es doble por la simetría.

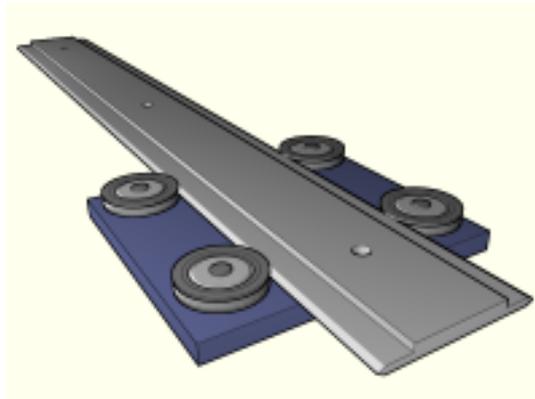


*Figura 4.1-1: Modelo CATIA del rotor*

La segunda masa que se usará en el sistema de 2 grados de libertad posee las mismas dimensiones que el rotor, salvo que no posee desequilibrio.

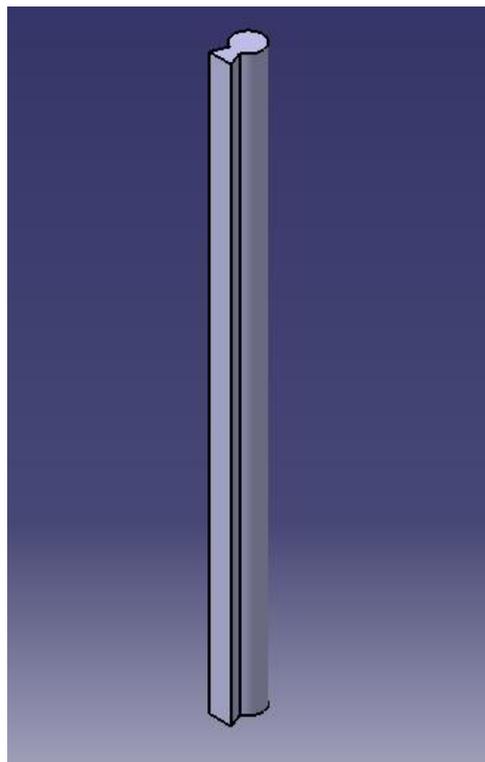
## 4.2. Guía

Para la elección de la guía, se ha decidido usar un modelo similar a lo que comúnmente se conoce como apoyo de bolas:



*Figura 4.2-1: Modelo 3D Guía*

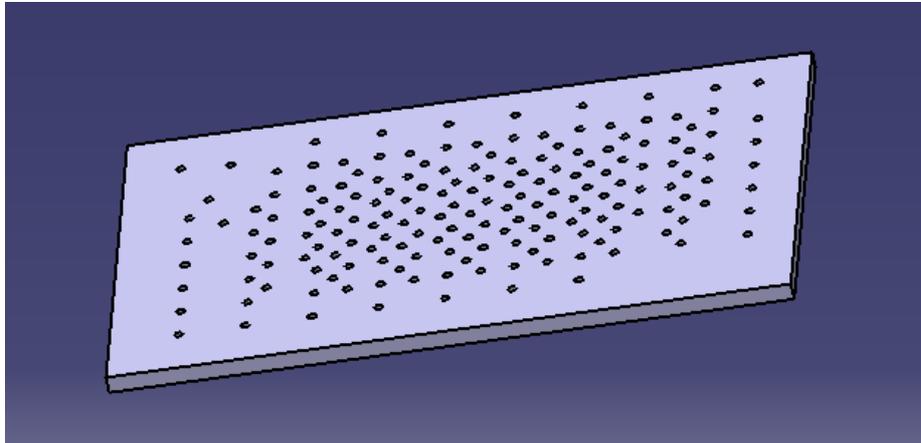
Para que sea más fácil de implementar en CATIA, se ha simulado una guía de ranuras que tenga las mismas restricciones de movimiento que necesita el sistema.



*Figura 4.2-2: Modelo CATIA de la Guía*

### 4.3. Mesa de ensayo

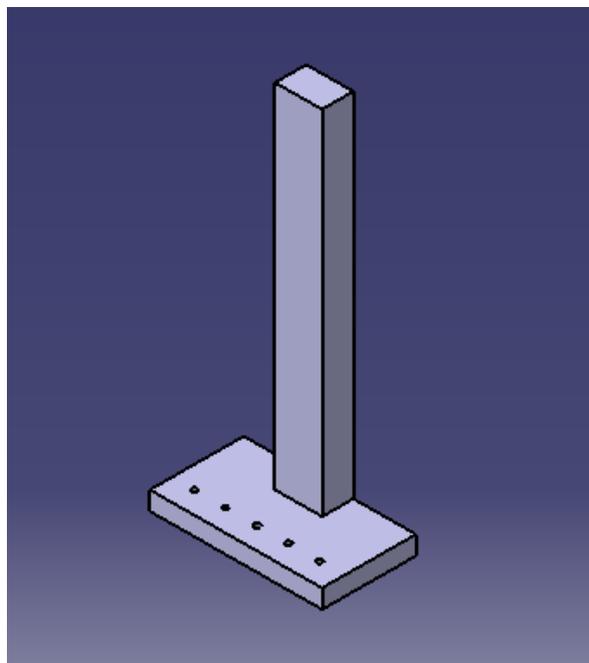
Para la mesa, simplemente se ha creado un tablero al que se le han hecho una serie de taladros en los que puedan fijarse otros elementos como las guías o el utillaje.



*Figura 4.3-1: Modelo CATIA de la Mesa*

### 4.4. Utillaje

El utillaje es el elemento vertical al que se fijarán las guías. La base cuenta con una serie de taladros que permitan su fijación a la mesa de ensayo.



*Figura 4.4-1: Modelo CATIA del Utillaje*

## 4.5. Ensamblaje

Una vez que todas las partes del sistema han sido creadas en CATIA, es necesario importarlas desde Adams View para poder realizar su ensamblaje. Adams permite importar archivos en multitud de formatos, entre ellos CATIA V5.

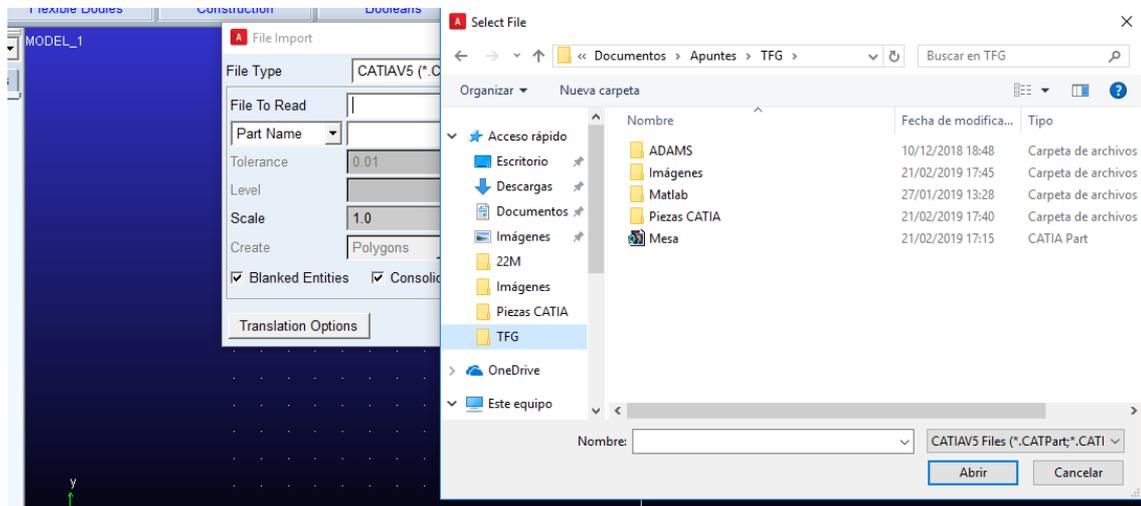


Figura 4.5-1: Importación a Adams View

Una vez que se ha importado la pieza deseada será necesario modificar propiedades como posición y orientación (*Name and position*) a fin de situarla correctamente con respecto a las demás; así mismo habrá que asignarle propiedades mecánicas. Estas pueden ser calculadas automáticamente por el programa al seleccionar un material de entre los disponibles en la librería de Adams (*Geometry and material type*), o manualmente a través de la masa, centro de gravedad e inercias.

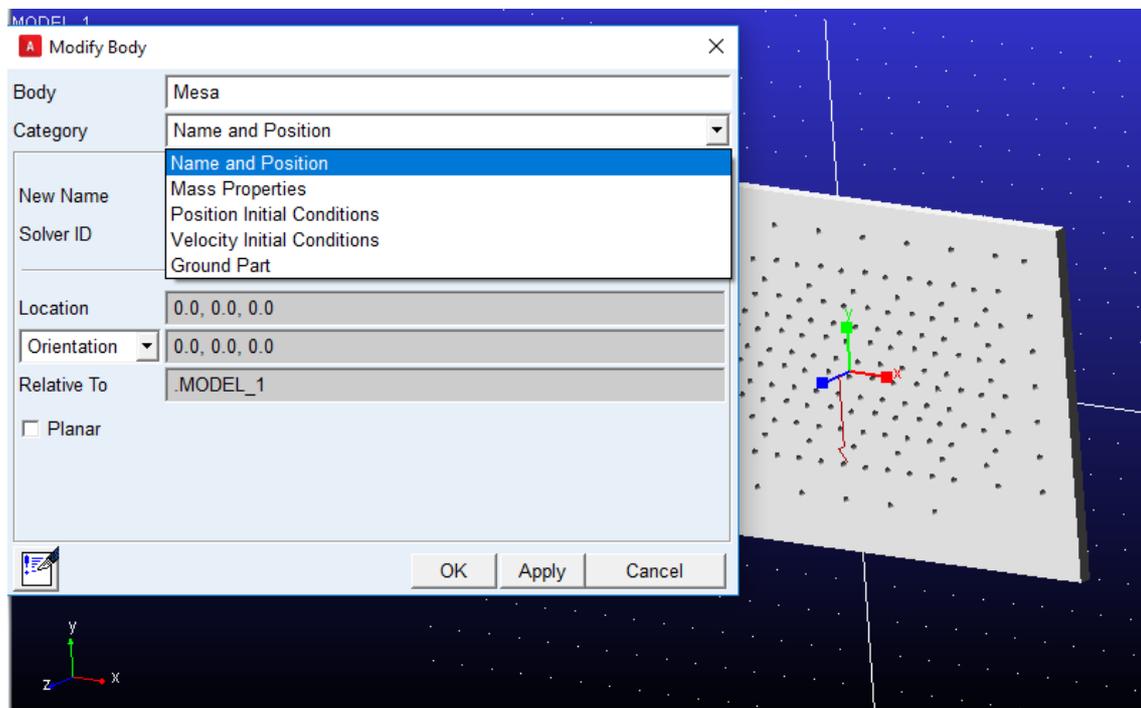
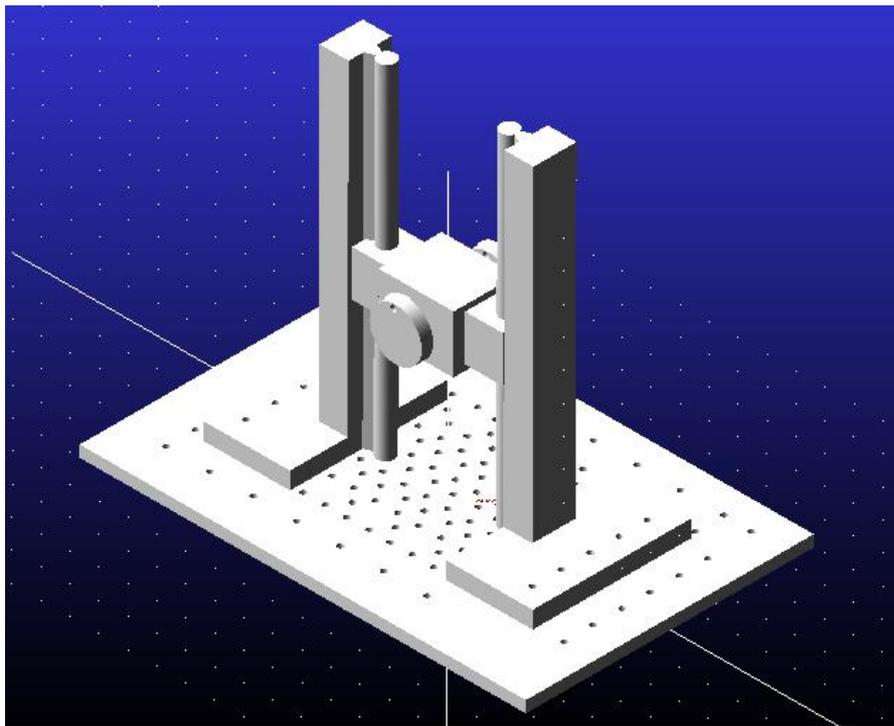
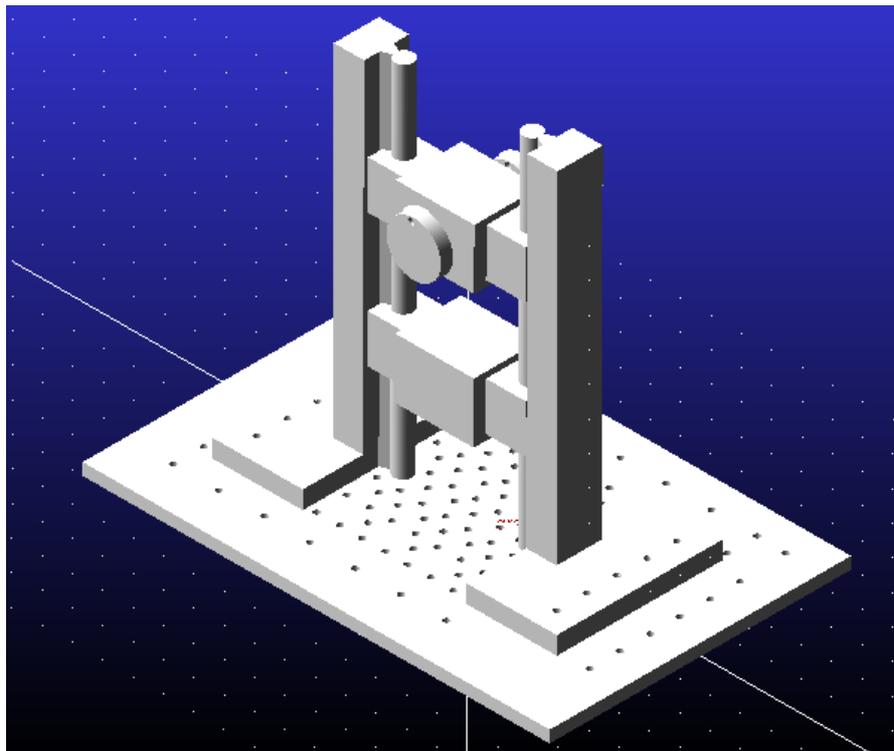


Figura 4.5-2: Modificación propiedades

Para el rotor y la segunda masa, se han introducido las magnitudes manualmente, de manera que la masa que ambos elementos poseen es de 8 kg. El resto de elementos del sistema se han elegido de acero inoxidable.



*Figura 4.5-3: Ensamblaje modelo 1 GDL Adams View*



*Figura 4.5-4: Ensamblaje modelo 2 GDL Adams View*

## 4.6. Conectores y fuerzas

Una vez que se han ensamblado todas las partes del sistema, es el momento de establecer las restricciones de movimiento entre las distintas partes del sistema.

En primer lugar, se tienen que fijar las partes que no van a desplazarse, es decir, la mesa de ensayo, utillajes y guías. Con la opción *fixed joint* se simula que los elementos mencionados anteriormente se encuentran atornillados a la mesa, la cual no debe moverse, impidiendo cualquier movimiento.

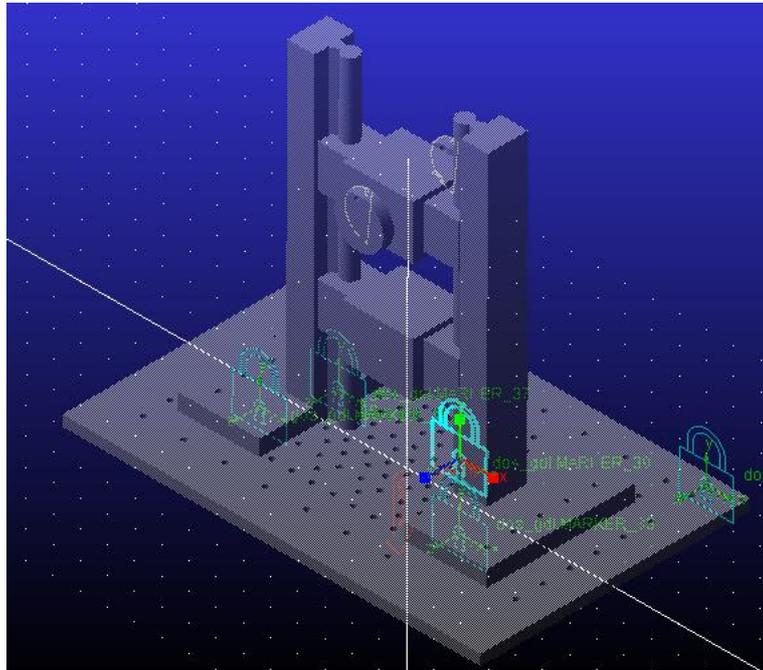


Figura 4.6-1: Fixed joint

Para terminar con las restricciones de tipo cinemático, se añaden las uniones de deslizantes entre el rotor y las guías que permitan el desplazamiento de la masa.

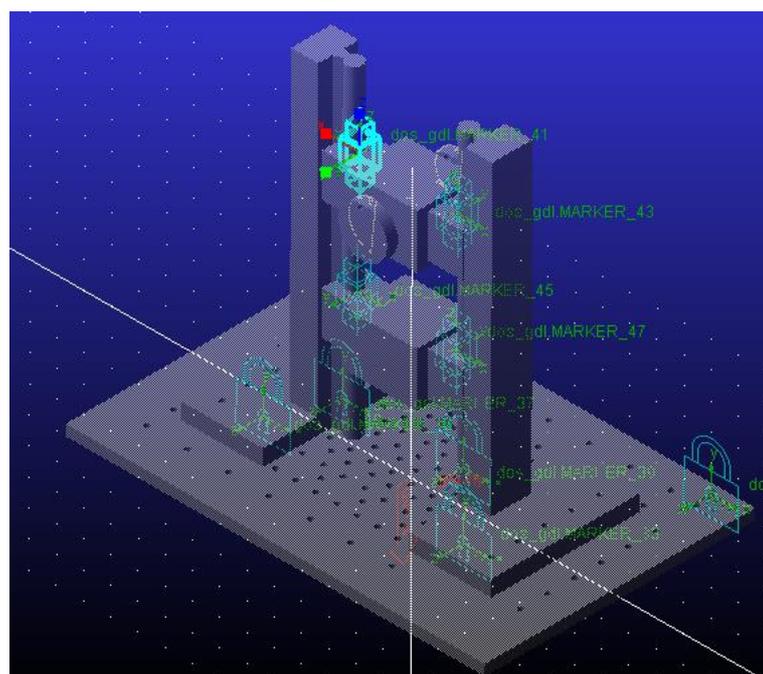


Figura 4.6-2: Cinematic joint

Es el momento de aplicar las condiciones dinámicas debidas a la presencia de muelles. Para ello se elige la opción del resorte, *spring-damper*, que, como el propio nombre indica, posee una componente de amortiguamiento además de la rigidez.

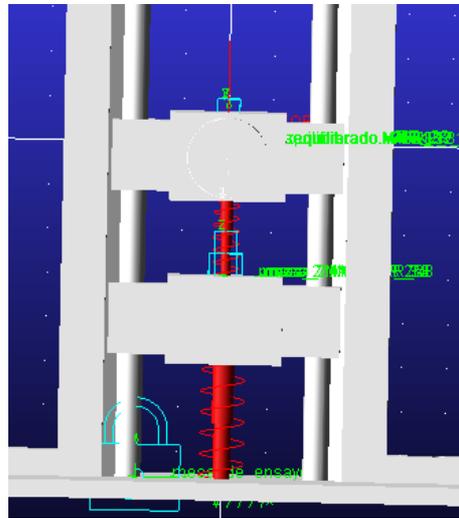


Figura 4.6-3: Spring-Dumper

Recordando los resultados obtenidos apartados anteriores, la constante de rigidez tiene un valor de  $k = 2.7143 \cdot 10^4 \text{ N/m}$  para uno y dos grados de libertad, de modo que se puedan usar los mismos muelles para ensayar ambos casos.

En cuanto al amortiguamiento, tras los distintos ajustes que se hicieron de la relación de amortiguamiento  $\xi$ , se obtuvo un valor  $c = 9.3197 \text{ N} \cdot \text{s/m}$  para un  $\xi = 0.01$ .

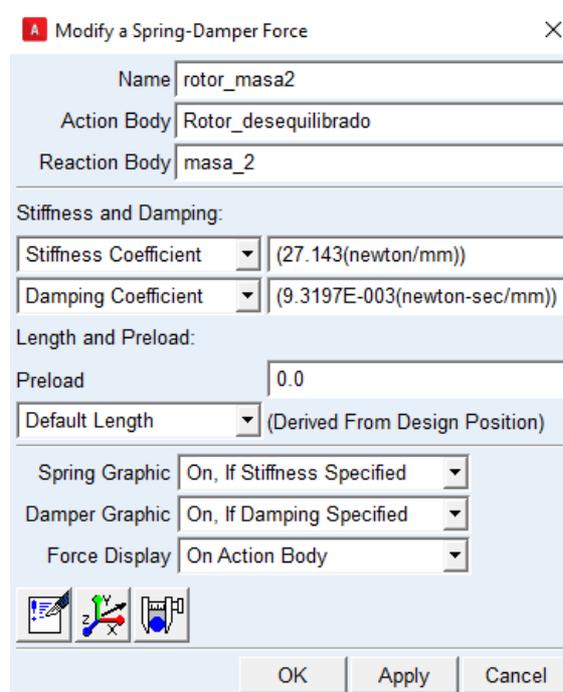


Figura 4.6-4: Modificación parámetros resorte

Con esto queda caracterizado el entorno de la simulación por completo, a expensas de añadir la fuerza que represente la vibración provocada por el desequilibrio del rotor.

# 5 SIMULACIÓN Y RESULTADOS

En este apartado se va a tratar la simulación como tal, es decir, cómo se va a modelar la excitación que viene derivada del desequilibrio, qué datos son necesario tomar y cómo se van a obtener. Adicionalmente, se describirá el proceso de las simulaciones para terminar representando los resultados obtenidos e interpretarlos en el contexto de este proyecto y los objetivos inicialmente marcados.

## 5.1. Diseño de la simulación

En primer lugar, se va a definir la fuerza propia del desequilibrio. Como se vio en las distintas pestañas de Adams View, se puede elegir entre varios tipos de fuerzas. Si bien, la carga distribuida podría ser una buena opción, se opta por una carga puntual aplicada en el centro de gravedad del rotor. Dicha fuerza será armónica y dependiente de la frecuencia, tal y como se dedujo en el estudio analítico.

Recordando que la expresión de la fuerza era del tipo  $F = A\omega^2 \sin(\omega t)$ , se tiene:

$$F_r = m_o e_o \omega^2 \sin(\omega t) = 0.0062 \omega^2 \sin(\omega t)$$

Para poder introducir esta fuerza como una carga puntual aplicada en un punto, es necesario elegir dicho punto de aplicación. Para ello, y como se mencionó con anterioridad, se ha elegido el centro de masas, por la propia definición de fuerza puntual. Si bien Adams View calcula el centro de gravedad de un sólido generado en la pestaña *Bodies*, no es capaz de señalarlo automáticamente con elementos exportados desde otro software de diseño 3D. Sin embargo, si permite la creación de puntos destacados, es decir, puntos físicos del sólido que permitan ser seleccionados a la hora de aplicar una restricción o una fuerza en este caso.

Para situar el centro de masas del rotor, se hace la suposición de que es un prisma de masa uniformemente distribuida, de manera que el punto de interés se encuentra en la intersección de los planos medios.

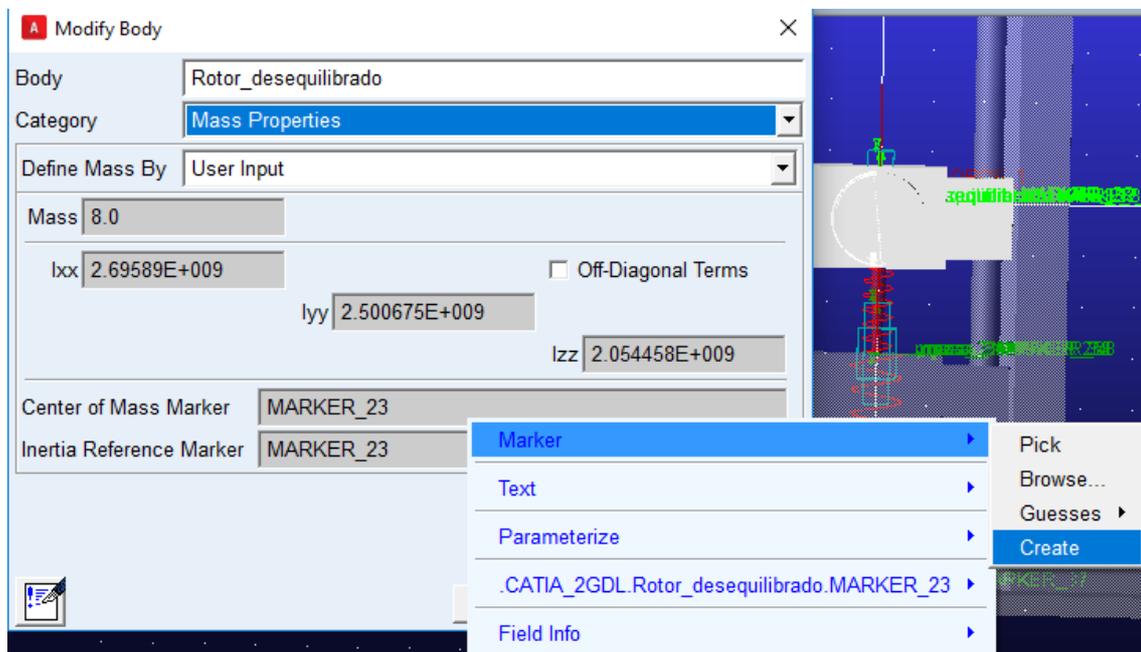


Figura 5.1-1: Creación CG

Una vez el centro de gravedad del rotor ha sido creado, se procede a aplicar la fuerza  $F_r$  en la dirección vertical, para permitir el desplazamiento de las masas.

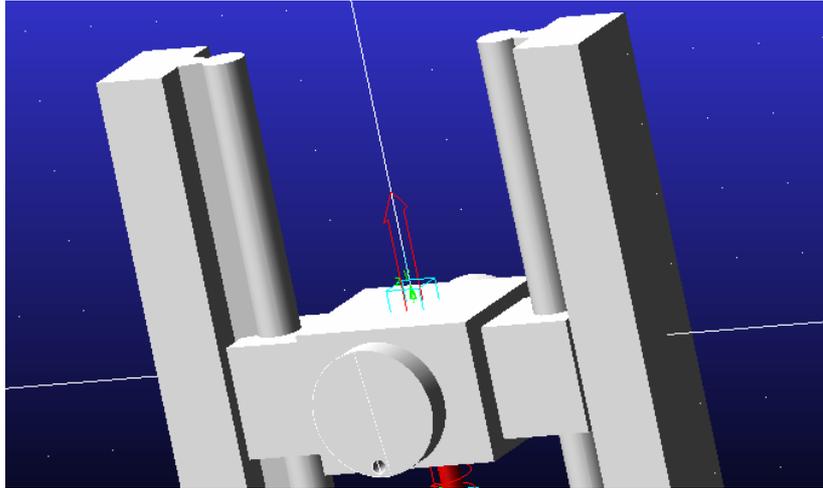


Figura 5.1-2: Fuerza puntual aplicada

Una vez creada la fuerza, es el momento de modificarla para que tenga la expresión calculada anteriormente. Para ello, Adams proporciona un editor de funciones que permite añadir tanto senoidales predefinidas, como establecer una variable tiempo, en este caso *time*.

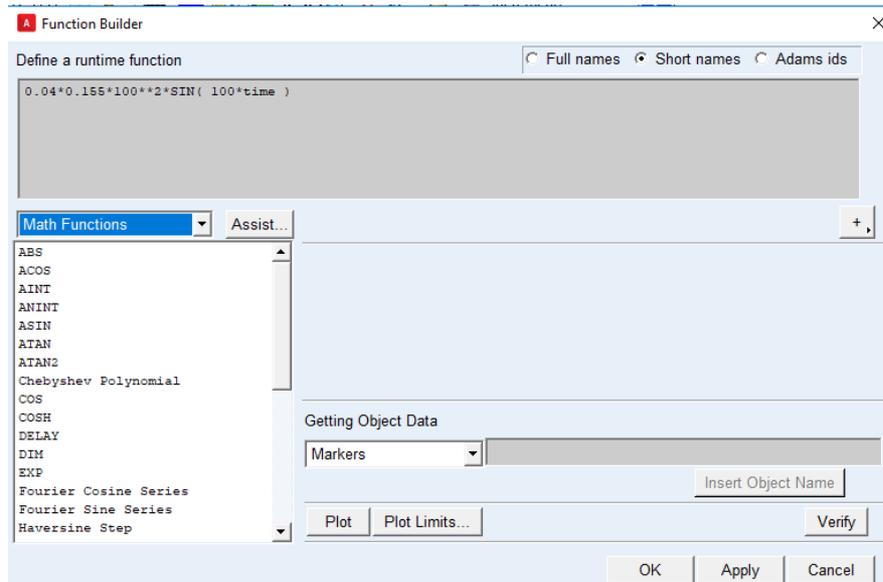


Figura 5.1-3: Definición fuerza puntual

La expresión de la fuerza depende no solo del tiempo, sino también de la frecuencia, por lo tanto, habrá que proporcionar valores de  $\omega$  para que la función restante dependa únicamente del tiempo y sea interpretable por Adams.

A pesar de que Adams permite realizar análisis en el dominio de la frecuencia, se deciden hacer barridos en frecuencia, realizando varias simulaciones para distintos valores de  $\omega$ , puesto que no hay que olvidar que el objetivo de este trabajo es su implementación práctica, y las herramientas de las que disponen los alumnos en el laboratorio permiten el estudio con incrementos en frecuencia dentro de un rango preestablecido, para así obtener las amplitudes máximas asociadas a cada frecuencia.

Los valores de frecuencia escogidos para medir las amplitudes están espaciados en intervalos no regulares, sino que serán mayores lejos de las frecuencias naturales, y menos en frecuencias próximas a las naturales, de modo que se obtengan más puntos de interés en las zonas donde se prevé que las amplitudes serán mayores, para poder identificar donde se encuentran los puntos singulares de las mismas.

En el sistema de 1 grado de libertad, se calculó analíticamente una frecuencia natural en torno a  $\omega_n = 58.25 \text{ rad/s}$ , por lo tanto, será en torno a ese valor donde habrá que calcular más puntos.

10	20	30	40	45	50	52	54	55	56	57	58	59
60	61	62	64	66	70	75	80	90	100	120	140	170

Tabla 5.1-1: Barrido frecuencia 1 GDL

Para el sistema de 2 grados de libertad, las frecuencias naturales de los dos modos obtenidas analíticamente son  $\omega_{n1} = 35.99 \text{ rad/s}$  y  $\omega_{n2} = 94.248 \text{ rad/s}$  para los modos 1 y 2 respectivamente. El barrido en frecuencia será similar, pero teniendo en cuenta que hay dos puntos de interés esta vez.

10	20	25	30	32	34	35	36	37	38	40	45	50	60	70	80
85	90	92	93	94	95	96	98	100	120	130	140	150	170	185	200

Tabla 5.1-2: Barrido frecuencia 2 GDL

Finalmente, el último paso antes de iniciar la simulación es definir las magnitudes que se van a medir. Para ello hay que seleccionar *measure* entre las opciones del cuerpo cuyas magnitudes se desean medir, y elegir la deseada en la pestaña *characteristic*.

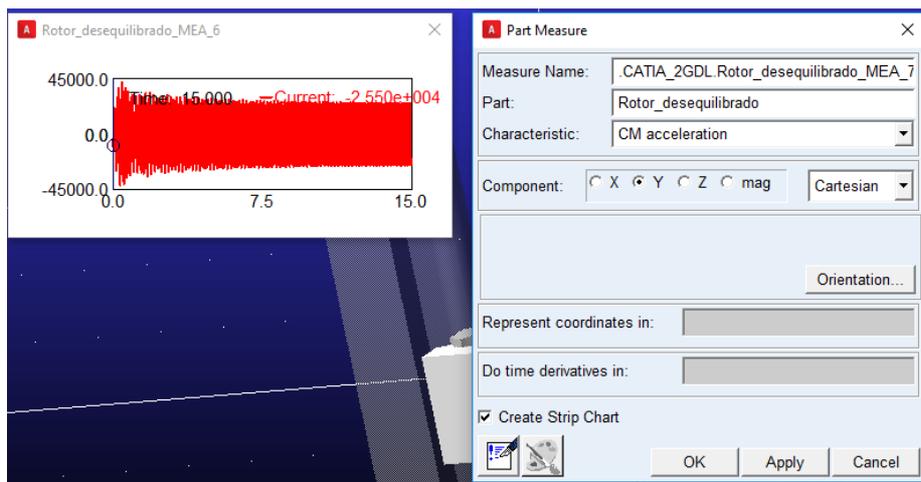


Figura 5.1-4: Obtención de medidas

Para este proyecto, la magnitud de interés es la amplitud del cuerpo, es decir, que se debería medir el desplazamiento o la posición. Sin embargo, puesto que la posición inicial no es nula, es más útil la gráfica de la aceleración, y se obtendrá la amplitud a través de la expresión que relaciona ambas magnitudes  $|X| = \omega^2 \ddot{X}$ . Además, hay que tener en cuenta la posible implementación de esta práctica en los laboratorios, por lo que se tendrán que usar acelerómetros.

La simulación que realiza Adams toma las medidas del centro de gravedad. Si bien en la práctica esto no es posible porque el acelerómetro no puede colocarse en ese punto, se va a considerar como una buena aproximación.

En ambos sistemas, 1 y 2 grados de libertad, se medirán las aceleraciones en el eje Z.

## 5.2. Simulación

Una vez hecho lo mencionado anteriormente, se puede proceder a realizar las simulaciones, usando para ello la opción *Run an Interactive Simulation* de la pestaña *Simulation*.

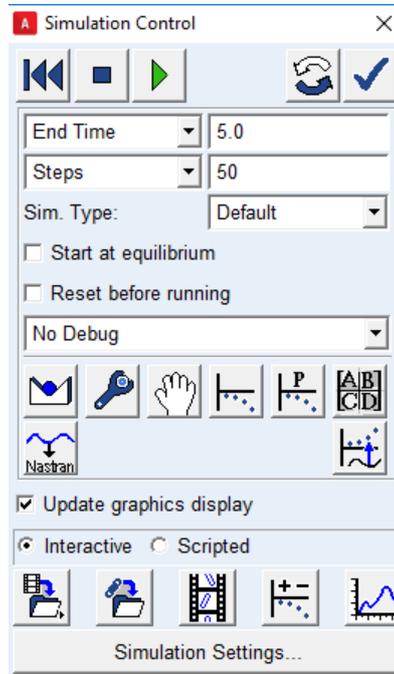


Figura 5.2-1: Simulation Control

Los principales parámetros a tener en cuenta son el tiempo de simulación y el número de pasos. Respecto al tiempo de simulación, debe ser lo suficiente grande para que se alcance el régimen permanente de modo que los resultados mostrados sean representativos, por otro lado no puede serlo en exceso para no ralentizar innecesariamente el ritmo de trabajo, puesto que una vez que se alcance el régimen permanente los resultados no van a variar. Un número apropiado sería entre 10 y 15 segundos.

Respecto al número de pasos, cuanto mayor sea más recursos consume, ralentizando significativamente la simulación con lo cual no es posible trabajar con cantidades de pasos excesivamente grandes. En la práctica, para que los resultados obtenidos sean buenos, el programa debe muestrear al menos 50 veces por ciclo, es decir el número de pasos por cada segundo de simulación ha de ser al menos 50 veces la frecuencia en Herzios, de no ser así aparecen patrones de interferencia indeseables en las medidas:

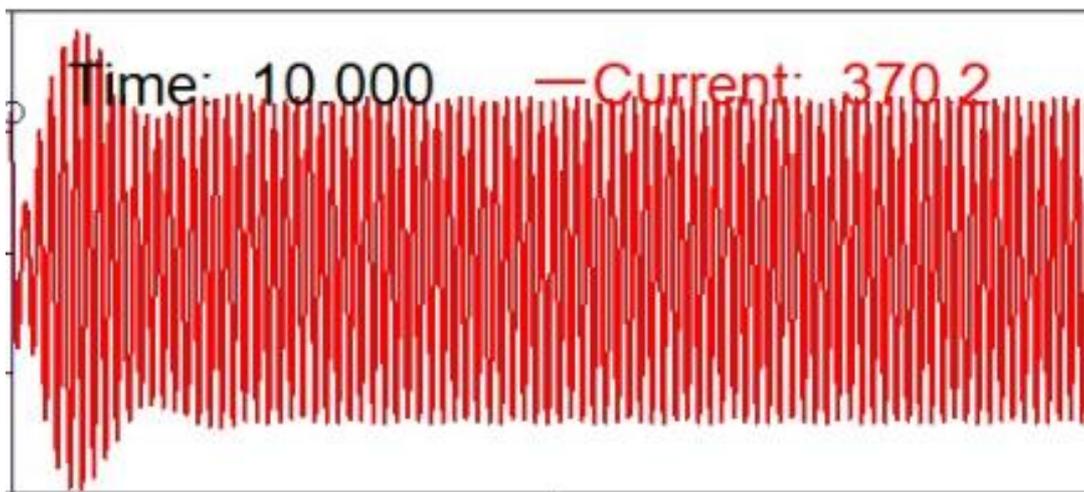


Figura 5.2-2: Aliasing

En esta imagen pueden verse pequeñas marcas que pueden recordar a la forma de una gráfica senoidal.

La aparición de este tipo de patrones obedece al fenómeno conocido como aliasing, el cual se debe a que el número de pasos es insuficiente.

En una simulación cuyos parámetros End Time y Steps estén adecuadamente seleccionados la respuesta en aceleraciones debe aproximarse a una senoide perfecta de frecuencia la de la excitación, aun así, en el caso de que aparecieran problemas como el anterior, bastaría simplemente con tomar el valor mayor de todos puesto que el aliasing no “inventa” datos, simplemente oculta parte de ellos, gráficamente:

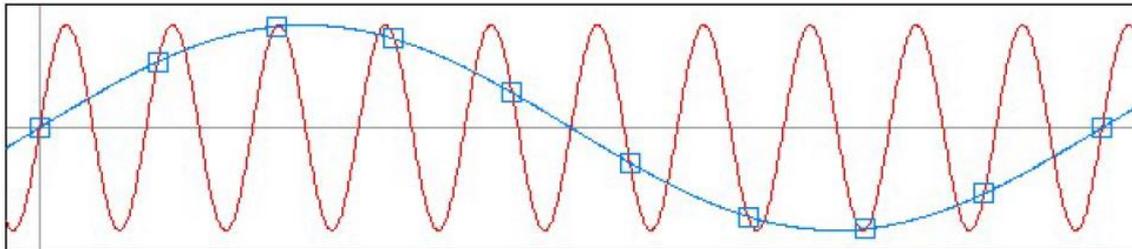


Figura 5.2-3: Ejemplo de gráfica sin aliasing

En efecto, lo que se vería es la curva azul, pero los valores máximos y mínimos de ambas gráficas coinciden, así que por lo que el resultado es perfectamente bueno.

Un ejemplo de aspecto que debe tener la gráfica obtenida cuando los parámetros de la simulación son adecuados es el siguiente:

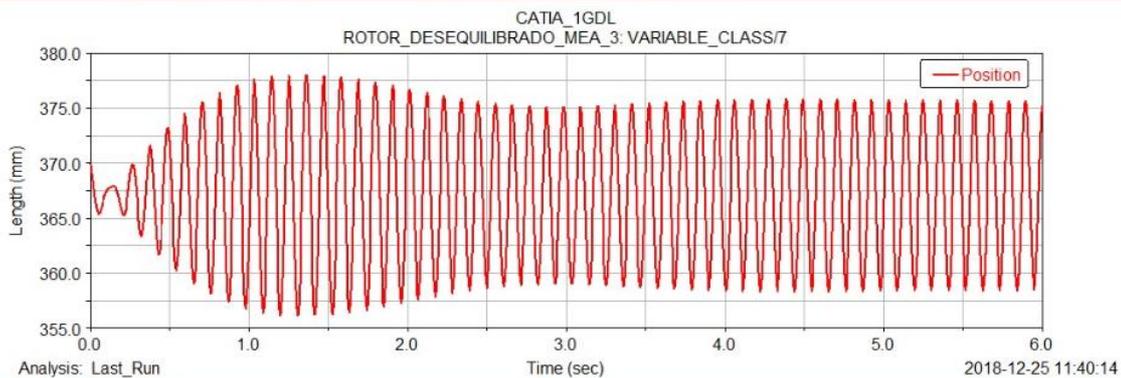


Figura 5.2-3: Gráfica 1 GDL sin aliasing

Cuando se completa una simulación para uno de los valores de  $\omega$  fijados, seleccionando en una ventana de medida la opción *Transfer to Full Plot*, Adams lanza directamente el módulo de postprocesado:

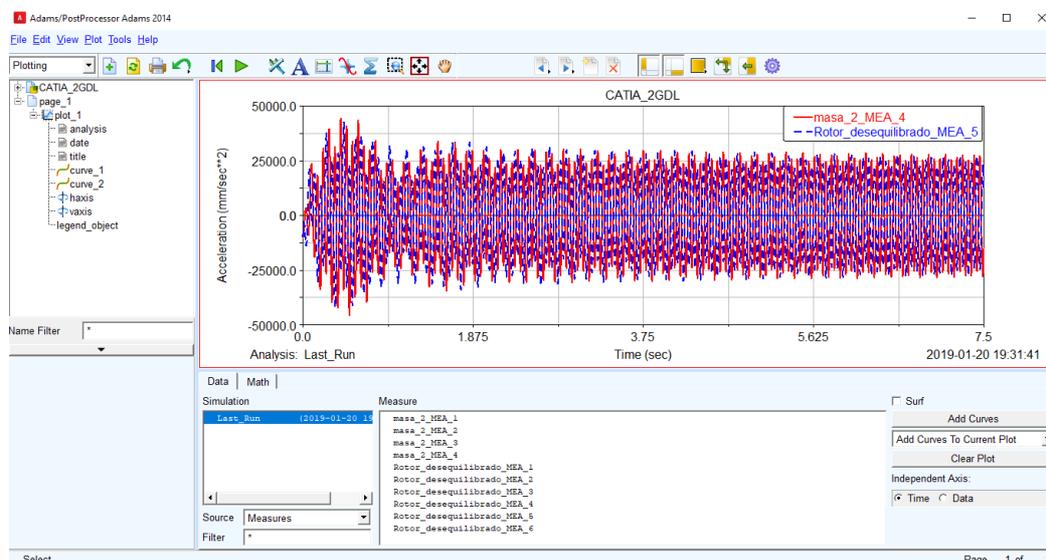


Figura 5.2-4: Postprocessor

Este módulo ofrece una manera sencilla de representar los resultados, por un lado, se pueden representar gráficamente, pudiendo navegar entre los datos de todas las simulaciones realizadas en una sesión de trabajo, y a su vez se pueden obtener datos rápidamente usando su *Plot Tracking* para identificar los valores máximos y mínimos, la máxima pendiente y los valores del punto deseado.

### 5.3. Resultados

Tras haber obtenido los resultados de las simulaciones, es el momento de analizarlos.

#### 5.3.1 Sistema 1 grado de libertad

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos en cuanto a aceleraciones y amplitudes máximas.

$\omega(rad/s)$	$\ddot{X}_{m\acute{a}x}(mm/s^2)$	$X_{m\acute{a}x}(mm)$
10	-	-
20	-	-
30	250	0.27
40	1195	0.74
45	2500	1.23
50	5535	2.21
52	8300	3.07
54	13650	4.68
55	18787	6.21
56	27750	8.85
57	48837	15.03
58	115060	34.2
59	85500	24.56
60	44250	12.3
61	31150	8.37
62	24300	6.32
64	18650	4.55
66	15650	3.6
70	12625	2.57
75	11225	1.99



Sobre esta gráfica se van a realizar una serie de medidas y comprobar su validez. En primer lugar, se va a hallar la frecuencia natural del sistema, para ello no hay más que encontrar la amplitud máxima mostrada en la gráfica y ver la frecuencia a la que está asociada ese valor. La frecuencia para la que se obtiene la máxima amplitud es  $\omega_n = 58.32 \text{ rad/s}$ . Si se compara este valor con el calculado analíticamente,  $\omega_n = 58.24 \text{ rad/s}$ , se observa una variación del 0.14%, por lo que se puede considerar una aproximación más que apropiada.

Si ahora se comparan los valores de amplitud obtenidos por ambos métodos, se tiene en la gráfica una amplitud  $X = 38.02 \text{ mm}$ , frente a la calculada analíticamente  $X = 38.8 \text{ mm}$ . Si se calcula el error relativo, se tiene un 2.05%, lo cual corrobora que es una medida bastante aceptable.

Como comentario, se puede ver una clara tendencia a  $X = 1 \text{ mm}$  cuando las frecuencias son muy elevadas. Este hecho que se aprecia en la amplitud, se ve reflejado en un aumento de la aceleración con la frecuencia, como puede verse en la siguiente gráfica:

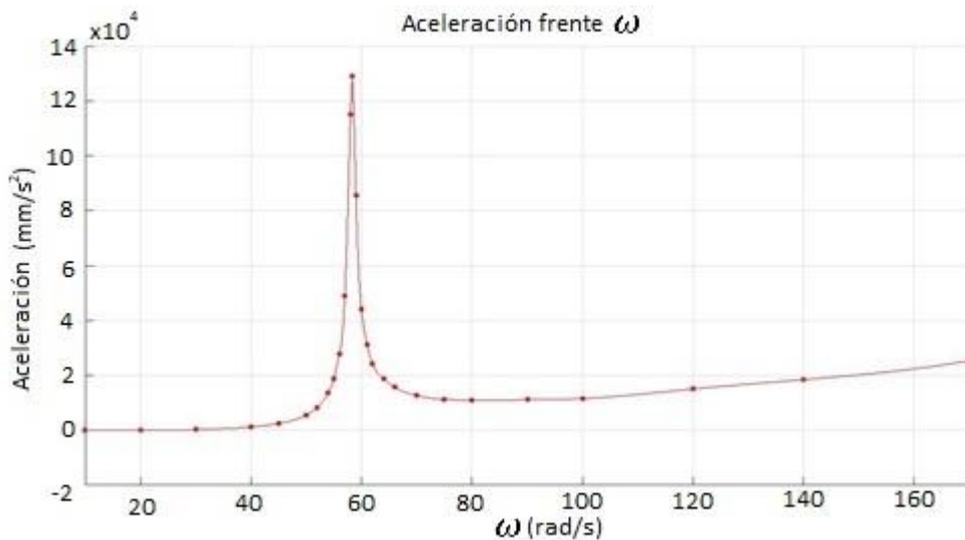


Figura 5.3.1-3: Aceleración vs frecuencia 1 GDL

Por último, se va a comparar la relación de amortiguamiento  $\xi$  que se estimó analíticamente, con la que puede calcular de la gráfica a través del método del ancho de banda. Para aplicarlo, es necesario identificar la amplitud máxima y dividirla entre  $\sqrt{2}$ , de manera que se obtengan dos valores de frecuencia para los que esta amplitud recién calculada se puede conseguir.

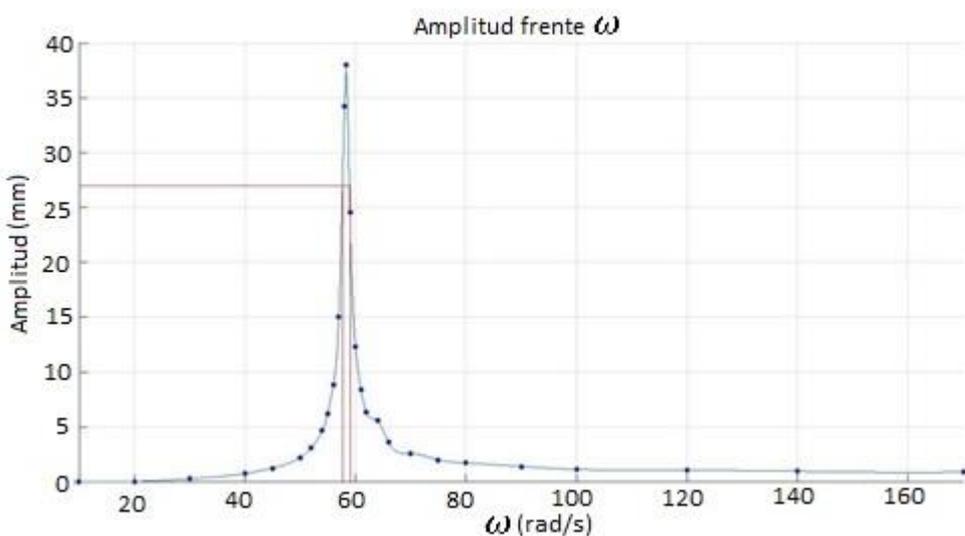


Figura 5.3.1-4: Método ancho banda

El resultado es  $\frac{X_{m\acute{a}x}}{\sqrt{2}} = 26.88 \text{ mm}$ , que se puede obtener para  $\omega_1 = 57.652 \text{ rad/s}$  y  $\omega_2 = 58.907 \text{ rad/s}$ .

La relación de amortiguamiento que se obtiene de la gráfica es:

$$\xi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_n} = \frac{58.907 - 57.652}{2 \cdot 58.32} = 0.0107$$

Recordando el valor estimado en el análisis inicial,  $\xi = 0.01$ , el error relativo entre ambos es de un 6.5%.

### 5.3.2 Sistema 2 grados de libertad

Del mismo modo, se va a realizar el estudio de los resultados del sistema de 2 grados de libertad. Para ello, se va a resumir en la siguiente tabla las aceleraciones y amplitudes máximas obtenidas para cada frecuencia:

$\omega(\text{rad/s})$	$\ddot{X}_{1\text{máx}}(\text{mm/s}^2)$	$X_{1\text{máx}}(\text{mm})$	$\ddot{X}_{2\text{máx}}(\text{mm/s}^2)$	$X_{2\text{máx}}(\text{mm})$
10	0	0	0	0
20	1250	3.12	750	1.85
25	2000	3.2	1250	2
30	2650	2.94	1600	1.7
32	3687	3.6	2220	2.16
34	7500	6.48	4500	3.9
35	13625	11.12	8375	6.83
36	48000	37.03	30000	23.15
37	12650	9.24	8000	5.84
38	8300	5.74	5300	3.67
40	5200	3.25	3400	2.125
45	3600	1.77	2500	1.23
50	3150	1.26	2350	0.94
60	3150	0.875	3150	0.875
70	2875	0.58	4625	0.94
80	1460	0.22	8750	1.36
85	2250	0.31	13900	1.92
90	12100	1.49	29900	3.69
92	25000	2.95	50000	5.9
93	39565	4.57	72000	8.32
94	57906	6.55	96100	10.87
95	60320	6.68	91250	10.11

96	48250	5.23	67500	7.32
98	32143	3.35	39025	4.06
100	25550	2.55	27000	2.7
105	19225	1.74	15445	1.4
110	17750	1.47	11225	0.92
120	17440	1.21	7910	0.54
130	18312	1.08	6366	0.37
140	19450	0.99	5525	0.28
150	21780	0.968	4945	0.22
170	26325	0.91	4218	0.15
185	30237	0.88	4040	0.11
200	34686	0.86	3922	0.1

Tabla 5.3.2-1: Tabla resultados 2 GDL

Y al igual que en el apartado anterior, se van a representar gráficamente estas medidas a través de Matlab mediante otro comando *spline*.

```
clear all, close all, clc

vf = [10, 20, 25, 30, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 85, 90]
vamp_1 = [0, 3.12, 3.2, 2.94, 3.6, 6.48, 11.12, 37.03, 9.24, 5.74, 3.25, 1.7]
vamp_2 = [0, 1.85, 2, 1.7, 2.16, 3.9, 6.38, 23.15, 5.84, 3.67, 2.125, 1.23, 0.8]
vac_1 = [0, 1250, 2000, 2650, 3687, 7500, 13650, 48000, 12650, 8300, 5200, 3]
vac_2 = [0, 750, 1250, 1600, 2220, 4500, 8375, 30000, 8000, 5300, 3400, 2500]

figure(1)
hold on
plot(vf, vamp_1, 'bo', 'markersize', 4, 'markerfacecolor', 'b')

z_1=@(xx) interp1(vf,vamp_1,xx,'spline');
fplot(z_1, [vf(1), vf(end)])
hold off
xlabel('\omega [rad/s]')
ylabel('Amplitud [mm]')
grid on
title('Amplitud frente \omega')
legend('Amplitud rotor', 'Amplitud rotor')
```

Figura 5.3.2-1: Comando Spline Matlab 2 GDL

Dando como resultado las siguientes gráficas:

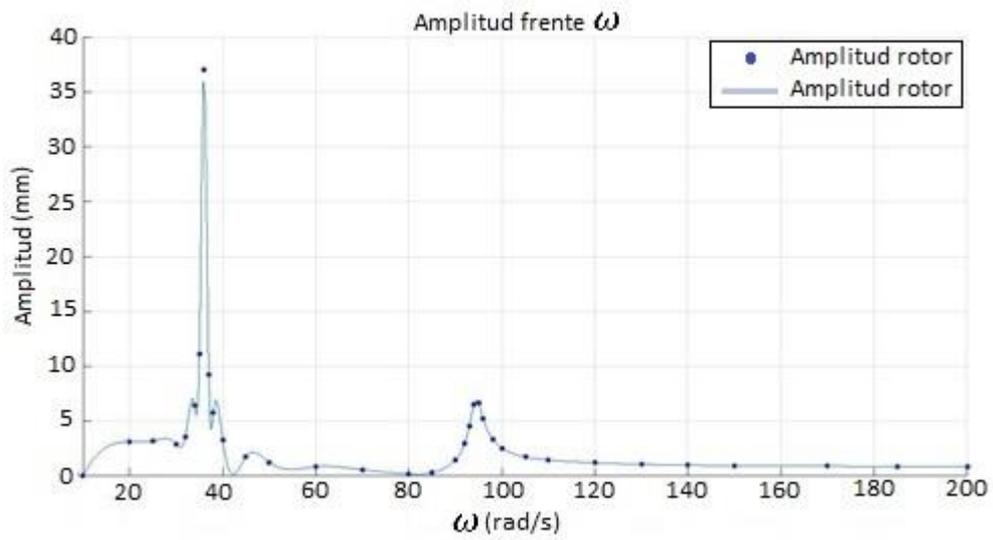


Figura 5.3.2-2: Amplitud rotor vs frecuencia 2 GDL

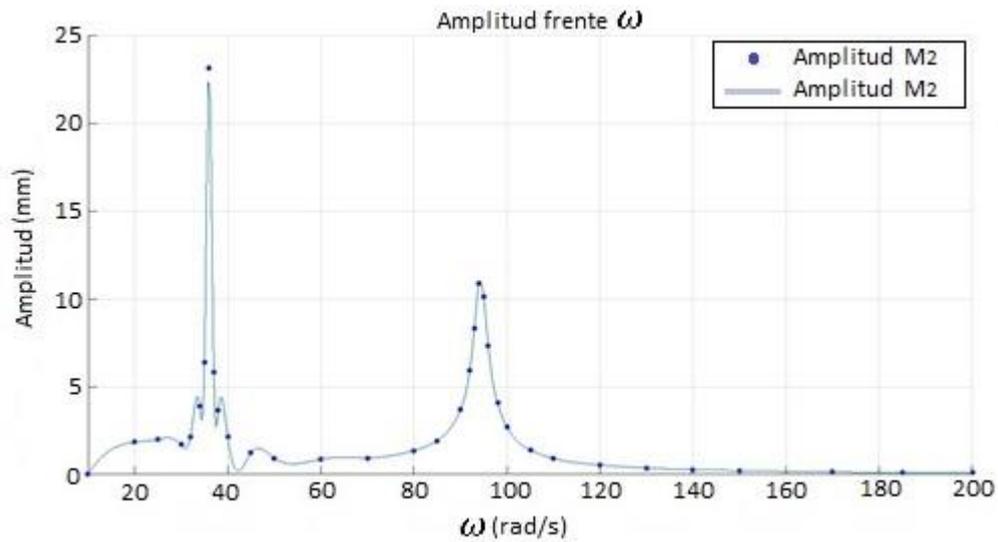


Figura 5.3.2-3: Amplitud masa 2 vs frecuencia 2 GDL

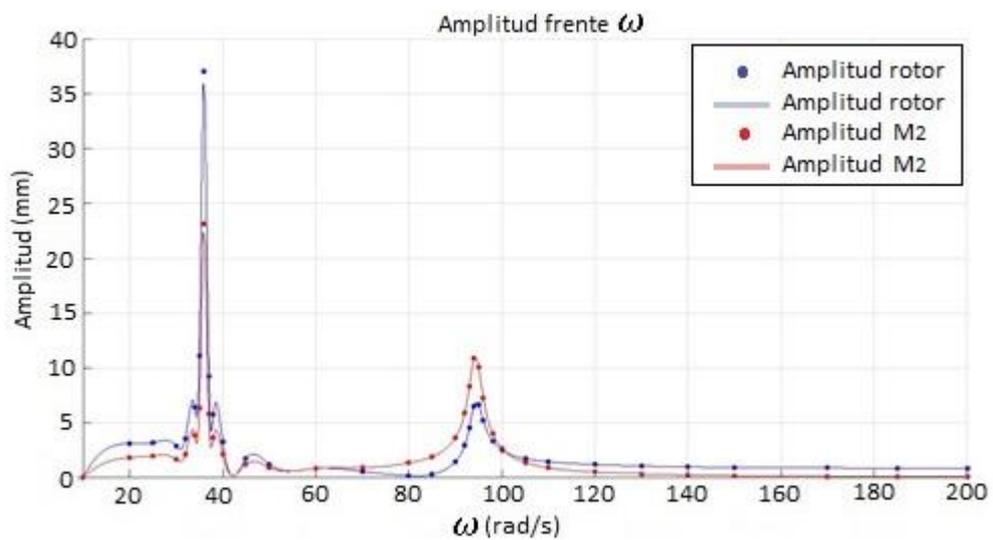


Figura 5.3.2-4: Comparación de ambas amplitudes vs frecuencia 2 GDL

En esta última gráfica comparativa de ambas amplitudes, se puede apreciar mejor como ambas tienen un comportamiento muy similar, con la salvedad de los valores máximos de cada masa.

Con estas gráficas se podrían calcular las frecuencias para las que se obtienen las máximas amplitudes al igual que se hizo con el modo de 1 grado de libertad. Las frecuencias naturales que se obtienen son  $\omega_{n_1} = 36 \text{ rad/s}$  y  $\omega_{n_2} = 94 \text{ rad/s}$ , para los modos I y II respectivamente. Los errores respecto a las frecuencias halladas analíticamente,  $\omega_{n_1} = 35.99 \text{ rad/s}$  y  $\omega_{n_2} = 94.248 \text{ rad/s}$ , estos son del 0.001% para el modo I y del 0.26% para el modo II, lo cual muestra una gran similitud entre ambos métodos.

Los resultados que se obtienen en amplitud, sin embargo, son:

$X_1|_{\omega=\omega_1} = 37.03 \text{ mm}$  con un error del 24.6% respecto a  $27.9 \text{ mm}$  calculado analíticamente.

$X_2|_{\omega=\omega_1} = 23.15 \text{ mm}$  con un error del 25.7% respecto a  $17.2 \text{ mm}$ .

$X_1|_{\omega=\omega_2} = 6.6 \text{ mm}$  con un error del 51% respecto a  $10 \text{ mm}$ .

$X_2|_{\omega=\omega_2} = 10.9 \text{ mm}$  con un error del 57.14% respecto a  $61.46 \text{ mm}$ .

Estos errores son demasiado grandes para considerarse como válidos. Esto se debe a que en el cálculo analítico para el sistema de 2 grados de libertad no se ha tenido en cuenta que el amortiguamiento es proporcional, esto es, que es linealmente dependiente de la masa y la rigidez del sistema:  $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$ .

Si se desarrolla este sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} c & -c \\ -c & 2c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c = \alpha M + \beta k \\ c = \beta k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{c}{k} \end{cases}$$

Sabiendo que la relación de amortiguamiento es de la forma  $\xi_i = \frac{1}{2\omega_i} \sum_{b=0}^{\infty} a_b \omega_i^{2b}$ , donde  $a_b$  es el vector formado por los coeficientes que multiplican a las matrices de masa y rigidez, es decir,  $a_b = [\alpha, \beta, \dots]$ , que seguiría hasta infinito dependiendo de los grados de libertad que tenga el sistema.

Dándole valores al subíndice  $i$  se obtienen dos relaciones de amortiguamiento, uno por cada masa que compone el sistema:

$$\xi_1 = \frac{\alpha}{2\omega_1} + \frac{\beta\omega_1}{2} = \frac{c\omega_1}{2k} = 0.006$$

$$\xi_2 = \frac{\alpha}{2\omega_2} + \frac{\beta\omega_2}{2} = \frac{c\omega_2}{2k} = 0.016$$

Valores que no son muy dispares del escogido inicialmente para el análisis,  $\xi_i = 0.01$ , pero que marca una diferencia muy grande en cuanto a los resultados como se va a ver a continuación.

$X_1'|_{\omega=\omega_1} = 46.8 \text{ mm}$  con un error del 26.4% respecto a  $37.03 \text{ mm}$  obtenido en la simulación.

$X_2'|_{\omega=\omega_1} = 23.8 \text{ mm}$  con un error del 2.8% respecto a  $23.15 \text{ mm}$  obtenido en la simulación.

$X_1'|_{\omega=\omega_2} = 6 \text{ mm}$  con un error del 9% respecto a  $6.6 \text{ mm}$  obtenido en la simulación.

$X_2'|_{\omega=\omega_2} = 11.2 \text{ mm}$  con un error del 2.75% respecto a  $10.9 \text{ mm}$  obtenido en la simulación.

Se puede ver una clara mejoría de los errores, sin embargo, los resultados siguen siendo muy dispares entre ellos. Para solucionarlo, se va a diseñar un código con Matlab que trate de reproducir los algoritmos de cálculo de Adams, con el fin de que ambos valores se asemejen lo más posible.

Para ello, lo primero es calcular los autovalores y autovectores del siguiente sistema  $[M^{-1} \cdot K - \lambda \cdot I] = 0$ . Los vectores obtenidos son:  $v_1 = \begin{pmatrix} -0.8507 \\ -0.5257 \end{pmatrix}$  y  $v_2 = \begin{pmatrix} -0.5257 \\ 0.8507 \end{pmatrix}$ .

A continuación, se realiza el cambio de variable  $X = V \cdot X^V$ , siendo esa matriz la formada por los autovectores,

$V = \begin{pmatrix} -0.8507 & -0.5257 \\ -0.5257 & 0.8507 \end{pmatrix} = V^{-1} = V^T$ , que cuenta con la particularidad de que su traspuesta es igual a su inversa, e igual a la original.

Si se premultiplica toda la ecuación matricial del sistema por  $V^T$ , se tiene lo siguiente:

$$V^T \cdot M \cdot \ddot{X}^V + V^T \cdot C \cdot \dot{X}^V + V^T \cdot K \cdot X^V = V^T \cdot F(t)$$

Este nuevo sistema consta de 2 ecuaciones diferenciales de segundo orden independientes entre sí, y cuya solución, tras deshacer el cambio de variable, debe ser prácticamente idéntica a la proporcionada por Adams.

La resolución de estas ecuaciones puede ser bastante compleja, por lo que se resolverán con Matlab como se adelantó anteriormente. El código que se empleará tendrá como hilo conductor el comando *ode45*, que resuelve sistemas de primer orden, por lo que habrá que transformar el sistema actual en uno que *ode45* sea capaz de resolver. Para lo cual, se harán diversos cambios de variable, definidos por el vector  $u = [u_1, u_2, u_3, u_4] = [x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2]$ . Para terminar de transformar el sistema en uno de primer orden, se hace otro cambio  $f = [f_1, f_2, f_3, f_4] = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2]$ , se definirán como funciones de  $u$  como se ve en el siguiente código de Matlab.

```
function f=pru(t,u)

m = 8;
mo = 0.155;
eo = 0.04;

f2 = 15; %Hz Se supone una frecuencia dentro del rango de vibraciones y se calcula la otra
w2 = 2*pi*f2; %modo 2
k = 2*m*w2^2/(3+sqrt(5)); %w2 = sqrt(k*(3+sqrt(5))/(2*M)) rigidez en N/m
w1 = sqrt(k*(3-sqrt(5))/(2*m)); %modo 1
f1 = w1/(2*pi); %Hz tiene que estar dentro del rango 1-25

c = 9.3197;

%Se define el vector u con las componentes amplitud y velocidad
u1 = u(1);
u2 = u(2);
u3 = u(3);
u4 = u(4);

w = w1;

f1 = u3;%velocidad 1
f2 = u4;%velocidad 2
f3 = (mo*eo*w^2*sin(w*t)-c*u3+c*u4-k*u1+k*u2)/m;%aceleración 1
f4 = (c*u3-2*c*u4+k*u1-2*k*u2)/m;%aceleración 2
f = [f1; f2; f3; f4]; %vector columna

end
```

Figura 5.3.2-5: Función sistema primer orden Matlab

Primero se ha definido esta función de Matlab que aplica el cambio de variable, y a continuación se aplica el comando *ode45* en este código que llama a la función anterior.

```

f = @pru;
tiempos = 0:0.005:20;
y0 = [0; 0; 0; 0];
opciones = odeset('Abstol', 1e-16, 'RelTol', 1e-16);

[T,Y] = ode45(f, tiempos, y0, opciones);

x = T;
rotor = Y(:,1);
masa2 = Y(:,2);

hold on

z1 = @(xx) interp1(x,rotor,xx,'spline');
fplot(z1,[x(1), x(end)])
hold on
z2 = @(xx) interp1(x,masa2,xx,'spline');
fplot(z2,[x(1), x(end)])
hold off
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Amplitud [m]')
grid on
title('Amplitud VS Tiempo')
legend('Amplitud rotor','Amplitud masa 2')

```

Figura 5.3.2-6: Comando ode45 Matlab

Representando los resultados obtenidos, se pueden tomar las medidas máximas de amplitud en ambos modos de vibración directamente de las gráficas.

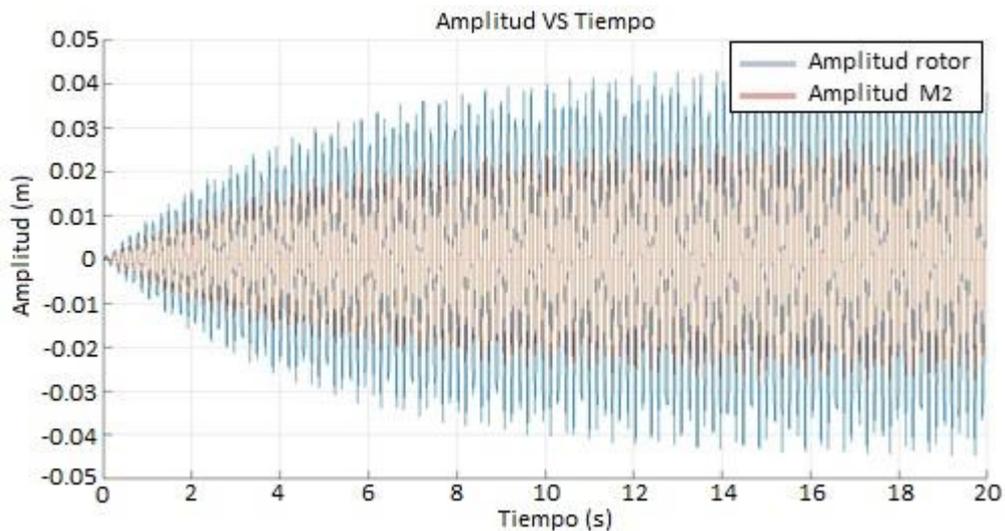


Figura 5.3.2-7: Comparación amplitudes vs tiempo en modo 1

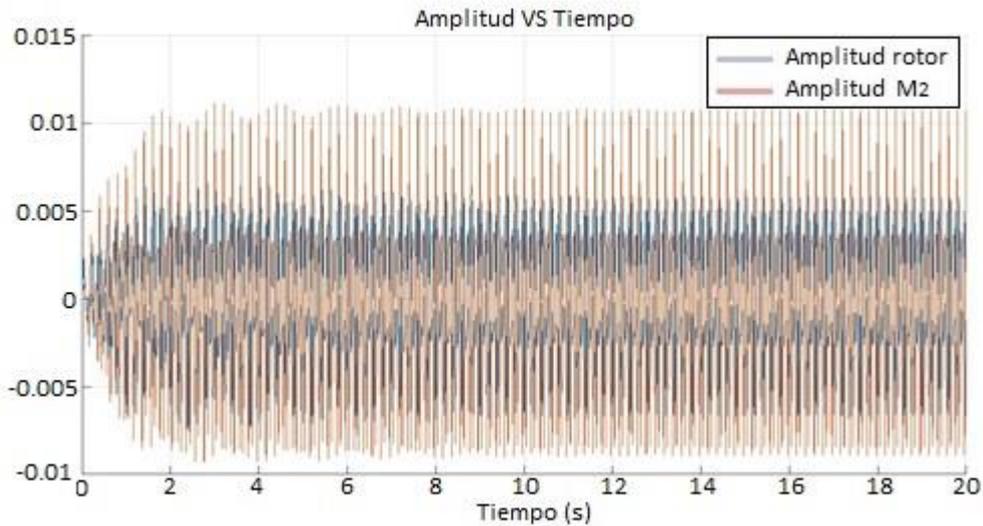


Figura 5.3.2-8: Comparación amplitudes vs tiempo en modo 2

Se observan variaciones elevadas en el permanente del modo I, por lo que las medidas obtenidas se han conseguido haciendo la media de varios valores.

$X_1|'_{\omega=\omega_1} = 36.52 \text{ mm}$  con un error del 1.37% respecto a  $37.03 \text{ mm}$  obtenido en la simulación.

$X_2|'_{\omega=\omega_1} = 23.34 \text{ mm}$  con un error del 0.82% respecto a  $23.15 \text{ mm}$  obtenido en la simulación.

$X_1|'_{\omega=\omega_2} = 6.38 \text{ mm}$  con un error del 3.33% respecto a  $6.6 \text{ mm}$  obtenido en la simulación.

$X_2|'_{\omega=\omega_2} = 10.71 \text{ mm}$  con un error del 1.74% respecto a  $10.9 \text{ mm}$  obtenido en la simulación.

Estos resultados son mucho más aceptables que los anteriores, manteniendo un margen de error debido a redondeos y a las limitaciones que pueda tener Matlab frente al algoritmo de Adams.

Para terminar, se van a calcular las relaciones de amortiguamiento mediante el método del ancho de banda, como se hizo en el sistema de 1 grado de libertad.

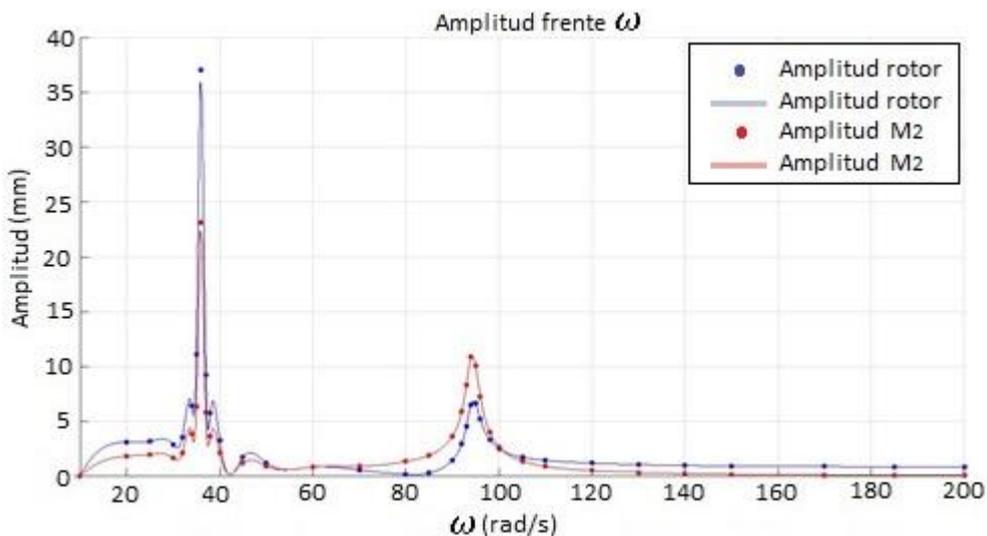


Figura 5.3.2-9: Método ancho banda 2 GDL

Para la variable 1 se ha encontrado  $\xi_1(\omega_1) = 0.0038$  y  $\xi_1(\omega_2) = 0.0079$ , haciendo lo mismo con la variable 2 se obtiene  $\xi_2(\omega_1) = 0.0137$  y  $\xi_2(\omega_2) = 0.01748$ . Calculando los valores medios se tiene  $\xi_1 = 0.00585$  y  $\xi_2 = 0.01559$ . Comparados con los obtenidos analíticamente presentan una gran similitud, con un porcentaje de variación del 2.5% para  $\xi_1$  y del 2.56% en el caso de  $\xi_2$ .

Con esto certificamos que los resultados son correctos gracias a que hay una gran proximidad entre los cálculos realizados analíticamente y los obtenidos tras la simulación en Adams.

# 6 CONCLUSIONES Y FUTURO

---

En este último apartado, se van a comentar las conclusiones a las que se ha llegado tras la realización de este trabajo. Adicionalmente se añadirán unos comentarios sobre las futuras líneas de acción, a fin de poder llevar a buen puerto la realización práctica de este proyecto en el laboratorio. Finalmente, se hablará brevemente del presupuesto estimado para la construcción de ambos sistemas.

## 6.1. Conclusión

La conclusión inmediata a la que se llega después de este profundo estudio es que el diseño propuesto, tanto para uno como para dos grados de libertad, cumple con las limitaciones impuestas por los equipos disponibles en el laboratorio. Recordando que el objetivo de este trabajo era el diseño de una práctica de laboratorio que permita el estudio de un sistema de uno y dos grados de libertad sometido a la fuerza provocada por un rotor desequilibrado, el diseño propuesto sería válido para su implementación en el laboratorio. Puesto que los alumnos van a ser los encargados de analizar los resultados obtenidos en dicha práctica, otro requisito que se cumple es que estos sean sencillos de analizar, como se puede ver en las gráficas fácilmente interpretables.

Si bien los alumnos no podrán predecir las aceleraciones medidas en el laboratorio con los datos iniciales, puesto que ha sido necesario un análisis modal mediante Matlab para poder obtener resultados próximos a la simulación, sí tienen a su alcance el cálculo de otros parámetros como las relaciones de amortiguamiento o la rigidez del sistema partiendo de los datos cogidos de los acelerómetros.

Al margen de los cálculos analíticos, la simulación a través de Adams ha resultado de lo más eficaz a la hora de comprobar que estos eran cercanos a la realidad. Sería de gran utilidad su empleo en las prácticas de asignaturas como Mecánica de Máquinas y Vibraciones.

## 6.2. Líneas de acción futuras

La línea más directa sería el montaje físico del diseño que se ha desarrollado a lo largo de este proyecto, de manera que se pueda demostrar realmente si su comportamiento es similar al que se ha estudiado o no, y, en caso de que lo sea, se pueda emplear como otra forma de estudiar los sistemas de dos grados de libertad sometidos a vibraciones.

En caso afirmativo, habría que preparar también el guion de la práctica que indique los pasos que debe seguir el alumno para lograr completarla.

## 6.3. Presupuesto estimado

Para poder realizar una estimación veraz del presupuesto necesario, primero hay que tener en cuenta los materiales que no se tienen en el laboratorio y que sería necesario adquirir.

Además del equipo descrito con anterioridad en la sección de modelado como el utillaje y las guías, es necesario tener en cuenta también el sistema de anclajes.

Para fijar el utillaje a la mesa de ensayos, se recomienda usar abarcones, debido a su utilidad y a que su uso no es posible en las guías, por ejemplo, por poder limitar el movimiento del rotor en las mismas.

Para el anclaje de las guías al utillaje se sugieren dos opciones. La primera serían tornillos de rosca y tuerca, conocidos por su utilidad y sencillo diseño. La segunda opción sería la misma que se va a utilizar para fijar los soportes que circularán por las guías al rotor, esto es, resinas epoxídicas. La resina epoxi es conocida por sus propiedades adhesivas y uso en la construcción de aviones, automóviles, etc., por lo que su eficacia para fijar los componentes de este diseño está garantizada.

Haciendo balance de lo mencionado, se pueden estimar los siguientes precios:

- Resina epoxi: 25€
- Tornillería y abarcones: 15€
- Guías y soportes: 70€
- Material y mecanizado para anclaje: 50€
- Material para segunda masa: 20€

TOTAL: 180€ aproximadamente.

Se debe tener en cuenta que los precios descritos son meramente orientativos, conseguidos tras solicitar varios presupuestos a distintos proveedores y promediándolos.

# 7 BIBLIOGRAFÍA

---

- (1) C. Anil Kumar & K. S. Shivakumar Aradhya, A Parametric study of the Vibration Characteristics of a Structural Building subjected to Seismic excitation using Finite Element Method, 2015.
- (2) A.A. Shabana, Theory of vibration vol. 1, Springer-Verlag, 1991.