

Proyecto Fin de Carrera  
Ingeniería de las Tecnologías Industriales.

Aplicación de la Teoría de Juegos a los Recursos de  
Agua.

Autor: Lourdes González Parejo

Tutor: Manuel Ordóñez Sánchez

**Dpto. Matemática Aplicada II**  
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**  
**Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2020





Proyecto Fin de Carrera  
Ingeniería de las Tecnologías Industriales

# **Aplicación de la Teoría de Juegos a los Recursos de Agua.**

Autor:

Lourdes González Parejo

Tutor:

Manuel Ordóñez Sánchez

Dpto. de Matemática Aplicada II  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020



Proyecto Fin de Carrera: Aplicación de la Teoría de Juegos a los Recursos de Agua.

Autor: Lourdes González Parejo

Tutor: Manuel Ordóñez Sánchez

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2020

El Secretario del Tribunal

*A mi familia*

*A mis amigos*

*A mis profesores*



# AGRADECIMIENTOS

---

Quisiera agradecer a mi tutor, Manuel Ordóñez su amabilidad, colaboración y valiosa ayuda durante la elaboración de mi proyecto. Sin lugar a duda, la realización del proyecto hubiera sido imposible sin él y sin el tiempo que me ha dedicado.

Desde luego me acuerdo de mis amigos, que han sido fundamentales en esta etapa universitaria, compañeros con los que he compartido cada minuto de este camino

Para terminar, le agradezco a mi familia el apoyo que me ha dado durante esta etapa final de la carrera y durante los cuatro últimos años de esfuerzo y dedicación.



# RESUMEN

---

El agua residual producida por los agricultores es de por vida, el agua residual producida por las empresas del municipio es de producción industrial. En este trabajo se analiza el juego no cooperativo entre el gobierno y los agricultores, el gobierno y las empresas municipales, respectivamente.

El segundo problema para tratar es el un conjunto comunidades cercanas a una gran ciudad que consideran la posibilidad de desarrollar su propio Sistema de tratamiento de aguas residuales e independizarse de la Planta central. Para ello usamos el valor Core de un juego cooperativo definido entre las distintas comunidades

# ABSTRACT

---

The wastewater produced by the farmers is for life, the wastewater produced by the companies of the municipality is industrial production. This paper analyzes the non-cooperative game between the government and the farmers, the government and the municipal companies, respectively.

The second problem to deal with is a set of communities near a large city that consider the possibility of developing their own Wastewater Treatment System and becoming independent from the Central Plant. For this we use the Core value of a cooperative game defined between the different communities

# ÍNDICE

1	Introducción.....	16
1.1	Evolución de los servicios del agua.....	17
1.2	Breve Introducción a la Teoría de Juegos .....	18
1.2.1	Juegos Cooperativos .....	18
1.2.2	Juegos no Cooperativos .....	19
1.3	Herramientas para el Análisis Económico de los Recursos Hídricos .....	19
1.4	Organización de los Servicios de Agua en España .....	20
1.5	Contaminación del Agua.....	21
1.6	El Agua en la Agricultura.....	25
1.6.1	Economía del Agua de Riego: Escasez, Calidad e Instrumentos Económicos.....	27
1.6.2	Regadío y Asignación de Costes .....	28
1.7	Aguas Urbanas .....	29
2	Teoría de Juegos .....	32
2.1	Introducción a los Juegos .....	32
2.2	Los Juegos Cooperativos .....	33
2.2.1	El Conjunto de Imputaciones.....	35
2.2.2	El Core .....	36
2.2.3	El Valor de Shapley .....	37
2.3	Los Juegos No Cooperativos. Equilibrio de Nash .....	38
3	Juego No Cooperativo en la Contaminación con Origen en la Agricultura .....	40
3.1	Supuestos del Juego No Cooperativo .....	40
3.1.1	El Juego entre el Gobierno y los Agricultores.....	41
3.1.2	El Juego entre el Gobierno y las Empresas Municipales.....	43
3.2	Sugerencia de Política .....	45
3.3	Conclusiones .....	46
4	Juego Cooperativo en el Tratamiento de Aguas Residuales.....	48
4.1	El Problema de las Plantas Residuales, Distribución de Costos.....	48
4.2	Explicación de la Metodología a Seguir .....	49
4.2.1	Análisis del Sistema, Supuestos del Juego Cooperativo .....	50
4.2.2	Definición del Juego Cooperativo: identificación de los agentes independientes y formación de coaliciones. ....	51
4.2.3	Cálculo de la Función Característica .....	55
4.2.4	El Conjunto de Imputaciones.....	56
4.2.5	El Core como Solución.....	57
5	Conclusiones.....	63
	Referencias .....	64
	Referencias Literarias.....	64
	Referencias Electrónicas .....	65
	Índice de Definiciones.....	66
	Índice de Teoremas .....	67
	Índice de Axiomas .....	68

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

<i>Figura 1: El consumo de agua en España .....</i>	<i>21</i>
<i>Figura 2: Contaminación del agua, ejemplo de fuentes puntuales .....</i>	<i>24</i>
<i>Figura 3: Uso de pesticidas y fertilizantes en la agricultura.....</i>	<i>25</i>
<i>Figura 4: Ejemplo de suelo erosionado y resultante de la sedimentación .....</i>	<i>26</i>
<i>Figura 5: Ejemplo de ganadería intensiva y erosión del suelo consecuente.....</i>	<i>26</i>
<i>Figura 6: El consumo de agua por la agricultura en España .....</i>	<i>27</i>
<i>Figura 7: Evolución del gasto de la PAC en Europa.....</i>	<i>28</i>
<i>Figura 8: El dilema del prisionero.....</i>	<i>39</i>
<i>Figura 9 .....</i>	<i>50</i>
<i>Figura 10: Representación del Core.....</i>	<i>60</i>

# ÍNDICE DE TABLAS

---

<i>Tabla 1: organización de los servicios de agua en España</i> .....	20
<i>Tabla 2: el juego entre el gobierno y los agricultores</i> .....	41
<i>Tabla 3: el juego entre el gobierno y las empresas municipales</i> .....	44
<i>Tabla 4: coste total mensual de construir y mantener una nueva planta</i> .....	50
<i>Tabla 5: número de familias por comunidad durante el periodo</i> .....	51
<i>Tabla 6: comunidad 1</i> .....	52
<i>Tabla 7: comunidad 2</i> .....	52
<i>Tabla 8: comunidad 3</i> .....	53
<i>Tabla 9: coalición {C1, C2}</i> .....	53
<i>Tabla 10: coalición {C1, C3}</i> .....	54
<i>Tabla 11: coalición {C2, C3}</i> .....	54
<i>Tabla 12: Coalición {C1, C2, C3}</i> .....	55

# 1 INTRODUCCIÓN

---

En este documento se presenta una investigación sobre las aplicaciones que puede tener la Teoría de Juegos a temas relacionados con la problemática del agua.

Existe una creciente competencia por los recursos de agua de la que derivan conflictos y disputas. Más tarde, esto trasciende a otros problemas relacionados con otras materias diferentes, esto en conjunto supone una dificultad añadida en todo avance que se intenta llevar a cabo en todo lo relacionado con los recursos hídricos.

Como sabemos, el agua es un bien escaso, esto ha sido y sigue siendo un núcleo de disputas a la hora de realizar acuerdos entre partes que, comparten un recurso de agua, que tienen que distribuir costes al hacer un análisis económico del recurso, que comparten la tierra en la que se haya, etc. En este documento se realiza un análisis de diferentes casos de utilización del agua que acarrear consigo disputas y enfrentamientos, tales como la agricultura y la contaminación a causa de las aguas rurales o el tratamiento de aguas residuales. Aunque no sean objeto de esta investigación, hay otras ramas que forman parte de la problemática del agua ocasionando conflictos locales, nacionales e internacionales, como son; el tratamiento del agua multiobjetivo, aguas subterráneas o aguas transfronterizas.

Muchas actividades económicas derivadas de los casos anteriormente mencionados están sujetas a una gestión estratégica por parte de particulares, así como por parte de empresas, otras compañías, localidades, países etc. La teoría de juegos sirve de gran ayuda a la hora de tomar decisiones en diversos sectores como pueden ser comunicación, transporte, aeronáutica o energía entre otros.

En el caso específico de los recursos de agua, la Teoría de Juegos no está del todo explotada, es decir, expertos y especialistas no han hecho uso de su máxima capacidad a la hora de aplicarla. Esto se debe a que es complicado de hacer una justa distribución de costes en lo que se refiere al agua, si queremos tener en cuenta la contaminación. Medir lo que un particular, la agricultura o un negocio contamina el agua en un lugar y momento determinado es difícil de evaluar además de requerir un trabajo de inspección constante y de alto precio.

Dentro de la Teoría de Juegos, en este documento se estudian los dos juegos que definen esta teoría, el juego cooperativo y el no cooperativo. Estos dos juegos se aplican a casos diferentes, casos en los que se requiere un trabajo cooperativo constantemente y casos en los que no sería de gran utilidad. En lo que se refiere al agua, es cierto que se hace especial énfasis en aquellas tareas que conllevan un trabajo cooperativo. Esto ocurre por dos razones principales, la primera, el significativo impacto de las economías de escala, esto hace atractiva la idea de apostar por grandes proyectos hidráulicos antes que por proyectos pequeños; la segunda es que, debido a la gran cantidad de externalidades negativas en este campo asociadas a la utilización del agua, hay una evidente tendencia a cooperar para solventar el problema y reducir por tanto los consecuentes impactos al medioambiente.

Además de proporcionar ejemplos de soluciones cooperativas a problemas de distribución de costes, la conclusión de esta investigación sugiere, que, la cooperación en cuestiones de escasez de agua es posible en una variedad de condiciones físicas y de acuerdos institucionales. También llegamos a la conclusión de que los diversos enfoques que se pueden dar a la distribución de los costes y a la asignación de la infraestructura física del agua y el flujo pueden proporcionar una base sólida para encontrar acuerdos estables y eficientes, de modo que las inversiones a largo plazo en

proyectos de agua resulten rentables y sostenibles.

Aplicar la Teoría de Juegos Cooperativos, del inglés “Cooperative Game Theory” (CGT), en la mayoría de los casos consiste en repartir beneficios y/o costes. Estos vienen tanto de un ahorro en inversiones y costes operativos, como de un aumento del bienestar asociado al uso de este medio, nuevas oportunidades que surgen gracias a un trabajo colaborativo. Lo que ofrece la CGT en general, es una justa distribución de los beneficios obtenidos a partir de un trabajo cooperativo que, dependiendo de la solución, cumple una serie de requisitos previamente conocidos.

Los juegos no cooperativos, como se verá más adelante, cumplen una función de herramienta estratégica de apoyo a la hora de tomar decisiones, muy útil en temas relacionados con los organismos que se encargan de los distintos servicios del agua y las tasas de recuperación.

Antes de empezar con la teoría en sí, vamos a introducirnos un poco más en el marco general de ideas que hay que tener en cuenta al hablar de los recursos hídricos.

## 1.1 Evolución de los servicios del agua

El agua, bien básico por su condición de elemento imprescindible para la vida y factor indispensable de desarrollo social, se considera desde hace muchos años como un “bien social” en contraposición a un bien puramente económico. El incremento de las obras hidráulicas que caracterizó el desarrollo del siglo XX de casi todos los países europeos ha tenido como objetivos la protección de bienes y personas y el aumento de la disponibilidad del recurso a bajo coste, para sostener el crecimiento de la población y fomentar la competitividad de ciertas actividades económicas como la agricultura y la producción energética.

Los cambios ocurridos en las últimas décadas, tanto el fuerte aumento demográfico y de bienestar económico, junto con el masivo proceso de urbanización de las zonas costeras, así como la expansión de los sectores agrícola, turístico y recreativo, han llevado a situaciones cada vez más frecuentes de escasez del recurso y empeoramiento de su calidad.

La creciente afirmación de la conciencia ambiental de los ciudadanos, los conflictos políticos entre administraciones y los factores técnicos relacionados con la carencia de sitios idóneos para nuevas infraestructuras, plantean la necesidad de nuevas inversiones en la mejora del estado ecológico de las masas de agua y originan enormes dificultades en la realización de nuevas obras de regulación y transporte, lo que resalta la necesidad de una mayor eficiencia y coordinación en la gestión y planificación de los recursos hídricos.

Por otro lado, la implantación de nuevas políticas económicas más restrictivas, por parte de los gobiernos nacionales y de los organismos financieros europeos, impone sensibles restricciones al tradicional modelo de financiación del dominio público hidráulico basado principalmente en subvenciones públicas.

La fase actual, común a muchos países desarrollados, se denomina economía madura del agua (Randall 1981) y se caracteriza por:

- Costes elevados para el incremento de la oferta de agua que se deben a la directa e intensa competencia entre los usuarios
- Interdependencia entre usos y fuertes limitaciones medioambientales
- Limitada disponibilidad de recursos financieros públicos, recuperación de los costes de los servicios del agua

Los problemas que esta fase plantea imponen nuevas políticas de gestión que superen el enfoque tradicional, orientado principalmente a la maximización de la oferta, y comprendan aspectos fundamentales como la internalización de los costes relacionados con el uso del agua, la gestión de la demanda y la racionalización y eficiencia económica de las inversiones públicas.

La reciente normativa europea en materia de recursos hídricos (Directiva Marco de Aguas 2000/60/CE) trata de responder a estas nuevas necesidades impulsando el principio de recuperación de costes de los servicios del agua con el objetivo de promover la mejora ambiental del medio hídrico mediante un aumento de la eficiencia y racionalidad en la asignación del recurso y en la realización de nuevas infraestructuras hidráulicas.

También hay que destacar que históricamente en España la tarifa agregada del agua representa una parte minoritaria de los costes de los servicios; por eso las políticas tarifarias han tenido una importancia solo relativa en la gestión del agua, siendo una parte importante de las preocupaciones de los gestores la captación de subvenciones que paliasen las deficiencias de financiación (Fernández y Revilla, 1994). La progresiva aplicación del principio de autosuficiencia tarifaria acabará otorgando a las tarifas del agua un papel central en la gestión y un mayor protagonismo en la financiación de las obras hidráulicas, una vez suprimidas las subvenciones públicas.

En este contexto, el establecimiento de unas políticas tarifarias solidamente fundamentadas a través de un estudio detallado de asignación de costes se considera una tarea fundamental para garantizar la viabilidad financiera de las inversiones y lograr acuerdos vinculantes entre los usuarios en la gestión de los servicios hidráulicos.

En el presente trabajo, se ha llevado a cabo una revisión de los distintos criterios que guían los procesos de asignación de costes y se ha propuesto una metodología basada en la Teoría de Juegos que responde a los requisitos de garantizar la eficiencia económica de las actuaciones y fomentar el consenso entre los usuarios.

## **1.2 Breve Introducción a la Teoría de Juegos**

### **1.2.1 Juegos Cooperativos**

La Teoría de Juegos Cooperativos (en adelante TJC) ha demostrado ser una herramienta eficaz en la tarea de asignación de costes comunes y reparto de beneficios. Su fortaleza reside en la capacidad de implementar, a través de formulaciones matemáticas, los principios de eficiencia, equidad y aceptabilidad que guían los procesos de reparto justo de costes o beneficios.

El planteamiento teórico de la Teoría de Juegos Cooperativos consiste en la modelización de un sistema de varios agentes que interactúan en la gestión de un servicio o producción de un bien de manera racional (con el objetivo de maximizar el beneficio individual) y, por lo tanto, están interesados en agruparse formando coaliciones en la medida que puedan obtener un beneficio en términos de reducción de costes o mejora de la eficiencia económica. La Teoría de Juegos Cooperativos permite analizar los procesos de negociación, en los que se fundamentan los acuerdos de cooperación, a través de la axiomatización de las expectativas de los usuarios e interpretar y adelantarse a la toma de decisiones.

Como se ha destacado antes, la aplicación de la Teoría de Juegos, en general, se ha limitado hasta ahora al ámbito de las ciencias económicas o matemáticas, quedando en ocasiones muy distante de la complejidad y de la heterogeneidad de los problemas de carácter ingenieril.

El cálculo de la función característica de un juego cooperativo requiere un análisis del coste mínimo asociado a cada posible coalición del sistema, lo que implica un proceso de optimización, cuya magnitud crece exponencialmente con el número de agentes que formen el sistema. La necesidad de disponer de adecuadas herramientas de modelización para simular la generación de escenarios de coalición ha sido el principal obstáculo a la hora de abordar los problemas de asignación de costes en sistemas complejos.

### **1.2.2 Juegos no Cooperativos**

En la Teoría de Juegos, un juego no cooperativo es aquel en el cual los jugadores toman decisiones de manera independiente para su beneficio personal, lo cual no impide que en algunos casos dicha toma de decisiones pueda favorecerlos a todos, como se busca en los juegos cooperativos.

El equilibrio de Nash fue planteado por primera vez por el economista francés Cournot en 1838 al tratar de buscar la solución al problema de varias empresas que compiten por un mismo bien y en el que cada una de ellas intenta determinar la cantidad óptima que deben producir para maximizar sus ganancias individuales. Cournot únicamente pudo plantear el problema en estrategias puras, lo que implicaba por un lado un planteamiento de suma cero (lo que ganaba uno lo perdía el otro) y no permitía poder elegir a cada individuo más de una estrategia de manera simultánea.

Lo verdaderamente interesante sería resolver el problema de maximizar el beneficio cuando cada uno de los participantes puede elegir varias estrategias simultáneas, lo que se conoce como estrategias mixtas; y fue el matemático John Forbes Nash el que desarrolló en su tesis doctoral este concepto. Nash demostró en 1951, que cualquier juego con un número finito de estrategias tiene al menos un punto de equilibrio, punto en que cada uno de los competidores maximiza su beneficio en estrategias mixtas. Nash sería galardonado en 1994 con el premio nobel de economía por la ingente cantidad de aplicaciones que tuvo su principio en diversas ciencias.

## **1.3 Herramientas para el Análisis Económico de los Recursos Hídricos**

El proceso de asignación de coste de los servicios hidráulicos a escala de cuenca hidrográfica está caracterizado por una elevada interconexión entre los elementos del sistema (el entorno físico, las infraestructuras, las demandas), una regla de gestión establecida y por la variabilidad aleatoria de los recursos disponibles. Una excesiva simplificación de estos factores puede conducir a una incorrecta interpretación del funcionamiento del sistema, y finalmente a errores significativos en los resultados económicos.

La metodología añadida que requeriría la aplicación de la Teoría de Juegos desarrollada para distintos casos en este documento sería la optimización de la gestión de los sistemas hídricos o de los recursos de agua.

La nueva propuesta metodológica realiza una integración de los aspectos económicos en los tradicionales modelos de gestión de recursos hídricos. Sus principales características son:

- Análisis económico integrado a escala de cuenca. La cuenca hidrográfica es considerada la escala ideal para la estimación del coste del recurso (Directiva Marco de Aguas, 2000/60/CE)
- Caracterización económica de los servicios del agua. Las infraestructuras del sistema son caracterizadas por un coste de amortización de la inversión, de mantenimiento y de explotación que se repercute a los usuarios del sistema según el nivel de utilización de la infraestructura, dependiendo de la localización de la infraestructura y del estado

hidrológico de la cuenca.

- Responsabilidad de los usuarios en el uso de los servicios del agua. Se pretende determinar las condiciones que relacionan los niveles de servicio requeridos por un usuario del agua con el coste que estos implican en términos de infraestructuras y servicios hidráulicos. [1]

El uso de modelos de simulación y de optimización de recursos hídricos a escala de cuenca permite la implementación de los algoritmos de la Teoría de Juegos en sistemas hídricos complejos y contribuye al proceso de asignación de costes, beneficios y definición de tarifas de los servicios del agua.

## 1.4 Organización de los Servicios de Agua en España

La prestación de los servicios del agua en España está caracterizada por la participación de numerosos agentes públicos y privados, como se muestra en la siguiente tabla.

Servicio	Agentes (Competentes o financiadores de infraestructuras)	Instrumentos de "Recuperación de Costes"
Embalses y transporte en alta (aguas superficiales)	Organismos de Cuenca, Sociedades Estatales y otros agentes	Canon de Regulación Tarifa de Utilización de Agua
Aguas subterráneas	Organismos de Cuenca, colectivos de riego y usuarios privados (autoservicios)	Las fijadas por los ayuntamientos Las fijadas por las CCRR
Abastecimiento urbano	Ayuntamientos, Mancomunidades, Comunidades Autónomas y otros	Tarifa de abastecimiento
Recogida de Aguas Residuales Urbanas	Ayuntamientos, Mancomunidades, Comunidades Autónomas y otros	Tasa de Alcantarillado
Tratamiento de Aguas Residuales Urbanas	Ayuntamientos, Mancomunidades, Comunidades Autónomas y otros	Canon de saneamiento Tarifas de servicio
Distribución de agua de riego	t	Derramas y tarifas/cuotas de los colectivos de riego (Que incluyen el importe del pago de Canon y Tarifa a los Organismos de Cuenca)
Control de vertidos	Organismos de Cuenca	Canon de Control de Vertidos

Tabla 1: organización de los servicios de agua en España

Aunque en el documento no analicen ejemplos referidos a todos los organismos, es importante saber a la hora de aplicar la Teoría de Juegos, que aquel jugador que representa un organismo de la cuenca hidrográfica, ha de actuar de manera diferente dependiendo del tipo de servicio al que se enfrente en lo que se refiere a tasas de recuperación, pero éticamente debería actuar de igual manera sin tener en cuenta el lugar de la cuenca estudiado.

## 1.5 Contaminación del Agua

El agua es un bien esencial para el desarrollo de actividades económicas y recreativas. Además, es un recurso vital para garantizar la salud y la supervivencia de los seres vivos. Por tanto, el uso sostenible y la gestión integral de los recursos hídricos debe ser un tema prioritario. La siguiente figura presenta los porcentajes asociados al consumo del agua en España en 2014 según El Instituto de Agua:



Figura 1: El consumo de agua en España

Fuente: Iagua

La identificación y el estudio de problemas asociados a los diferentes usos del agua, se hace cada vez más necesario ante los problemas de escasez relativa y la creciente contaminación. De acuerdo con la ONU (2009) la desertificación, la degradación del suelo y la sequía provocan impactos negativos en la disponibilidad, cantidad y calidad de los recursos hídricos.

El problema más importante que deriva de repartir costes asignados al agua en diversas situaciones, más allá de los conflictos y la pérdida económica, es la contaminación del agua y los problemas que acarrea. Aunque no nos resulte notorio a la hora de hacer un análisis económico de un determinado caso, la contaminación de agua producida se ve directamente involucrada a la hora de tomar decisiones sobre una distribución de costes o una planificación estratégica. Como se verá más adelante, esto no siempre se tiene en cuenta, lo que resultará en un grave

inconveniente para ciertas regiones.

Empezaremos haciendo un análisis general sobre la contaminación del agua, qué es, por qué y cómo sucede, distinguiremos entre varios tipos de contaminación, también debatiremos sobre las consecuencias y los peligros que conlleva la contaminación del agua.

La contaminación del agua ocurre cuando sustancias nocivas, a menudo productos químicos o microorganismos, que vienen de vertidos como resultado de actividades humanas, contaminan una corriente, río, lago, océano, acuífero u otro cuerpo de agua, degradando la calidad de esta y haciéndola perjudicial para los seres vivos y el medio ambiente.

De manera ilustrativa, si se vierte un vaso de tinta negra en un río, la tinta desaparecerá rápidamente en el volumen mucho mayor de agua limpia del río. La tinta aún estaría allí en el río, pero en una concentración tan baja que no podría apreciarse. A niveles tan bajos, los componentes químicos en la tinta probablemente no presentarían ningún problema real. Sin embargo, si vierte litros y litros de tinta en un río cada segundo a través de una tubería, el río se volverá negro rápidamente. Los componentes químicos en la tinta podrían tener un efecto muy rápido en la calidad del agua. Esto, a su vez, podría afectar a la salud de todas las plantas, animales y humanos cuyas vidas dependen del río. Por ejemplo, la liberación de aguas residuales tratadas inadecuadamente en cuerpos de agua naturales puede conducir a la degradación de los ecosistemas acuáticos. A su vez, esto puede conducir a problemas de salud pública para las personas que viven río abajo. Pueden usar la misma agua de río contaminada para beber, bañarse o para regadío. La contaminación del agua es la principal causa mundial de muerte y enfermedad, debido a enfermedades transmitidas por este medio.

Sabemos que la contaminación es un problema humano porque surge a partir de un desarrollo relativamente reciente en la historia del planeta: antes de la Revolución Industrial del siglo XIX, las personas vivían en armonía con el entorno que les rodeaba. A medida que la industrialización se ha extendido por todo el mundo, también se ha extendido el problema de la contaminación. Cuando la población de la Tierra era mucho más pequeña, nadie creía que la contaminación presentara un problema grave. De hecho, la fluidez de los ríos y la dimensión de los océanos llevaban al popular pensamiento de que una contaminación considerable de estos no sería posible. Hoy, con alrededor de 7 mil millones de personas en el planeta, se ha hecho evidente que existen límites. La contaminación es una de las señales de que los humanos han excedido esos límites.

Durante la Revolución Industrial (entre la segunda mitad del siglo XVIII y los primeros años del siglo XIX), el aumento de los bienes de consumo y sus procesos de producción requieren una gran cantidad de agua para la transformación de las materias primas. A su vez, los restos de dichos procesos productivos eran vertidos en los cauces naturales de agua sin ningún tipo de depuración, con sus residuos contaminantes correspondientes. Aquí comenzó a extenderse el grave problema de la contaminación del agua. Volviendo al ejemplo anterior de la tinta, identificamos esos primeros procesos productivos durante unos años como el vaso de tinta que volcamos en el río, 120 años más tarde, con un planeta en continuo desarrollo industrial, tenemos un río de tinta negra, en el cuál las condiciones de vida para los seres vivos que lo habitan son extremadamente dañinas, así como para la salud humana. Llegamos de esta manera a la conclusión de que la contaminación del agua tiene que ver con las cantidades, es decir, la cantidad de sustancia contaminante que se libera y la cantidad de agua en la que se libera. Una pequeña cantidad de una sustancia química tóxica puede tener poco impacto si se vierte al océano desde un barco. Pero la misma cantidad de la misma sustancia química puede tener un impacto mucho mayor bombeado a un lago o río, donde hay menos agua limpia para dispersarlo.

Si se analizase esta tinta contaminante del ejemplo propuesto anteriormente, ¿qué es realmente esa tinta?, ¿cuáles son los agentes contaminantes más importantes?

Hay varias clases de contaminantes del agua. Los primeros son agentes causantes de enfermedades, agentes patógenos, tales como bacterias, virus, protozoarios, parásitos que entran al agua provenientes de desechos orgánicos, que incluyen heces y otros materiales que pueden ser descompuestos por bacterias aerobias.

Una segunda categoría de contaminantes del agua son los desechos demandantes de oxígeno, en su mayor parte materia orgánica cuya descomposición ocasiona la desoxigenización del agua, esto hace que organismos que habitan en el agua, mueran.

Una tercera clase de contaminantes del agua son los contaminantes inorgánicos solubles en agua, como ácidos, sales y metales tóxicos. Grandes cantidades de estos compuestos harán que el agua no sea apta para beber y causará la muerte de la vida acuática.

La cuarta clase de contaminantes del agua son los nutrientes; nitratos y fosfatos solubles en agua que causan un crecimiento excesivo de algas y otras plantas acuáticas, agotan el suministro de oxígeno del agua. Esto mata a los peces y, cuando se trata de agua potable, puede matar a los niños pequeños.

El agua también puede estar contaminada por una serie de compuestos orgánicos como el aceite, los plásticos y los pesticidas, que son perjudiciales para los humanos y todas las plantas y animales que habitan en el agua, que definimos como una quinta categoría de contaminantes del agua.

La sexta clase de agentes contaminantes, siendo muy peligrosa para la vida acuática, es el sedimento suspendido. Estas partículas causan el agotamiento de la absorción de luz del agua y las partículas esparcen compuestos peligrosos como los pesticidas a través del agua.

Finalmente, los compuestos radiactivos solubles en agua pueden causar cáncer, defectos de nacimiento y daños genéticos y, por lo tanto, son agentes contaminantes muy peligrosos del agua.

Volviendo al ejemplo de la tinta y el vaso, hemos analizado la tinta, sabemos que hay diferentes tipos de agentes contaminantes causantes de diferentes problemas, ahora vamos a analizar el vaso, ¿qué son en realidad los vasos que tiran la tinta al agua?

En general vamos a hacer diferencia entre dos fuentes de contaminación principales, fuentes puntuales y fuentes no puntuales.

Cuando la contaminación se origina en una sola fuente, se llama contaminación de fuente puntual. Esta contaminación incluye aguas residuales (también llamadas efluentes) descargadas legal o ilegalmente por un fabricante, refinería de petróleo o instalación de tratamiento de aguas residuales, así como la contaminación por fugas de sistemas sépticos, derrames químicos y de petróleo y vertidos ilegales. La EPA (Environmental Protection Agency), regula la contaminación de fuentes puntuales al establecer límites sobre lo que una instalación puede descargar directamente en un cuerpo de agua. Si la contaminación de origen puntual se origina en un lugar específico, puede afectar a kilómetros de canales y océanos. Ejemplos de fuentes puntuales más específicos incluyen plantas de tratamiento de aguas residuales, refinerías de petróleo, fábricas de papel y pulpa, fabricantes de productos químicos, automóviles y electrónica, y fábricas. Los contaminantes regulados de fuentes puntuales incluyen desechos, suelos, rocas, productos químicos, bacterias, sólidos en suspensión, metales pesados, pesticidas y más.



Figura 2: Contaminación del agua, ejemplo de fuentes puntuales

Por otro lado, la contaminación de fuentes no puntuales es la contaminación derivada de fuentes difusas. Esta puede incluir la contaminación proveniente de la agricultura, de aguas pluviales o de escombros arrastrados a las vías fluviales desde la tierra. La contaminación de fuentes no puntuales es la causa principal de la contaminación del agua en algunos sitios, como por ejemplo en EE. UU. Es difícil de regular, ya que no existe un único culpable identificable.

Cuando la lluvia cae y se filtra profundamente en la tierra, llena las grietas, y otros espacios porosos de acuíferos (depósito subterráneo de agua), se convierte en agua subterránea, uno de nuestros recursos naturales menos visibles, pero más importantes. Casi el 40 por ciento de los estadounidenses dependen del agua subterránea, bombeada a la superficie de la tierra, para utilizarla como agua potable, agua de pozo. Para algunas personas en zonas rurales, ocurre que esta sea su única fuente de agua dulce.

El agua subterránea se contamina cuando los contaminantes, desde pesticidas y fertilizantes hasta desechos provenientes de vertederos y sistemas sépticos, llegan a un acuífero, lo que lo hace perjudicial para el uso humano. Librar el agua subterránea de contaminantes acostumbra a ser difícil o imposible, además de costoso. Una vez contaminado, un acuífero puede ser inutilizable durante décadas, o incluso miles de años. El agua subterránea también puede propagar la contaminación lejos de la fuente contaminante original a medida que se filtra en arroyos, lagos y océanos.

## 1.6 El Agua en la Agricultura

El desarrollo de medios de cultivo y agricultura es la razón por la cual el ser humano vive en el mundo de hoy. Es un medio necesario de supervivencia, sin el cual habría hambrunas en todo el mundo. Durante miles de años, la agricultura fue un proceso natural que no dañaba el entorno que nos rodea, o incluso a nosotros mismos. De hecho, los agricultores pudieron transferir su tierra durante generaciones siendo esta fértil, aún habiendo sido previamente explotada para su cultivo. Sin embargo, las prácticas agrícolas modernas han comenzado un ciclo de contaminación agrícola difícil de cortar. Este proceso provoca la degradación del ecosistema, la tierra y el medio ambiente debido a los subproductos de la agricultura moderna.

No se puede atribuir una única causa general a la contaminación agrícola a la que nos enfrentamos hoy. La agricultura es una actividad compleja en la que el crecimiento de los cultivos y el ganado debe equilibrarse perfectamente. El proceso de contaminación agrícola proviene de las muchas etapas y fuentes que atraviesa su crecimiento.

La primera fuente de contaminación son los pesticidas y fertilizantes. Los pesticidas y fertilizantes modernos tienen que lidiar con las plagas locales que han existido durante cientos de años junto con las nuevas especies invasoras. Estos productos están cargados de sustancias químicas nunca vistas por la naturaleza anteriormente. Una vez el producto ha sido rociado, no desaparece por completo. Parte de él se mezcla con el agua y se filtra en el suelo. El resto es absorbido por la planta misma. Como resultado, las corrientes locales que reciben agua del suelo se contaminan, al igual que los animales que se alimentan de estos cultivos y plantas.



Figura 3: Uso de pesticidas y fertilizantes en la agricultura

El agua contaminada utilizada para el riego es otra fuente de contaminación. Gran parte del agua que utilizamos proviene de depósitos de agua subterránea, canales y lluvias, cuya contaminación fue comentada anteriormente. Si bien gran parte es agua limpia y pura, otras fuentes están contaminadas con compuestos orgánicos y metales pesados. Esto sucede por la eliminación de residuos industriales y agrícolas en cuerpos de agua locales. Como resultado, los cultivos están expuestos al agua que tiene pequeñas cantidades de mercurio, arsénico, plomo y cadmio disueltos. El proceso de contaminación agrícola se vuelve más difícil de combatir aún cuando el agua envenena al ganado y provoca el fracaso de los cultivos.

Otros problemas son causados por la erosión del suelo y la sedimentación. El suelo se compone de

muchas capas y sólo la capa superior puede soportar la agricultura o el pastoreo. Debido a las prácticas agrícolas ineficientes, este suelo queda abierto a la erosión y conduce a una disminución de la fertilidad cada año. Ya sea erosionado por el agua o el viento, todo este suelo debe depositarse en algún lugar. La sedimentación resultante hace que el suelo se acumule en áreas como ríos, arroyos, zanjas y campos circundantes. Y así, el proceso de contaminación agrícola impide el movimiento natural de agua, animales acuáticos y nutrientes a otras áreas fértiles.



Figura 4: Ejemplo de suelo erosionado y resultante de la sedimentación

En los viejos tiempos, los agricultores conservaban tanta cantidad de ganado como sus tierras podían soportar. El ganado vacuno, las ovejas, los cerdos, los pollos y otros animales fueron alimentados con dietas naturales, que se complementaron con los desechos que quedaron de los cultivos. Como resultado, los animales contribuyeron a mantener una granja saludable en ese aspecto. Hoy en día, el ganado se cría en condiciones de aglomeramiento, se alimenta con dietas no naturales y se envía a los mataderos de forma regular. Como resultado, esto se suma al proceso de contaminación agrícola a través de las emisiones.



Figura 5: Ejemplo de ganadería intensiva y erosión del suelo consecuente

Las plagas y malezas debidas al cultivo exótico masivo y a la reducción del cultivo de las especies naturales en un área determinada son otra importante fuente de contaminación en la agricultura, ya que esto, se ha convertido en la norma general para la misma. Lo cierto es que, simplemente se

suma al proceso de contaminación agrícola. Con la llegada de nuevos cultivos, la población nativa tiene que lidiar con nuevas enfermedades, plagas y malezas que no es capaz de combatir. Como resultado, las especies invasoras destruyen la vegetación y la vida silvestre de especies locales, alterando el ecosistema permanentemente. Este es especialmente el caso de los alimentos modificados genéticamente, que crean especies de plantas y animales que pueden eliminar las especies existentes en cuestión de años.

Además de encontrarnos con problemas de contaminación en los seres vivos y en el medio producidos por el agua, otro gran problema es la cantidad de agua empleada en todo el mundo para desarrollar la agricultura.

En promedio, en la agricultura utiliza el 70 % del agua que se extrae en el mundo, y las actividades agrícolas representan una proporción aún mayor del "uso consuntivo del agua" debido a la evapotranspiración de los cultivos. A nivel mundial, más de 330 millones de hectáreas cuentan con instalaciones de riego. La agricultura de regadío representa el 20 % del total de la superficie cultivada y aporta el 40 % de la producción total de alimentos en todo el mundo.

En España, la agricultura consume actualmente entre el 60 y el 70% del agua dulce, una cifra que puede incrementarse hasta un 19% en 2050, según la Unesco, siempre y cuando la apuesta científica para mejorar la eficiencia hídrica no resulte suficiente ante el aumento de la población mundial. Las actividades agrarias son sin lugar a duda las que más agua consumen en España, en torno al 70%.

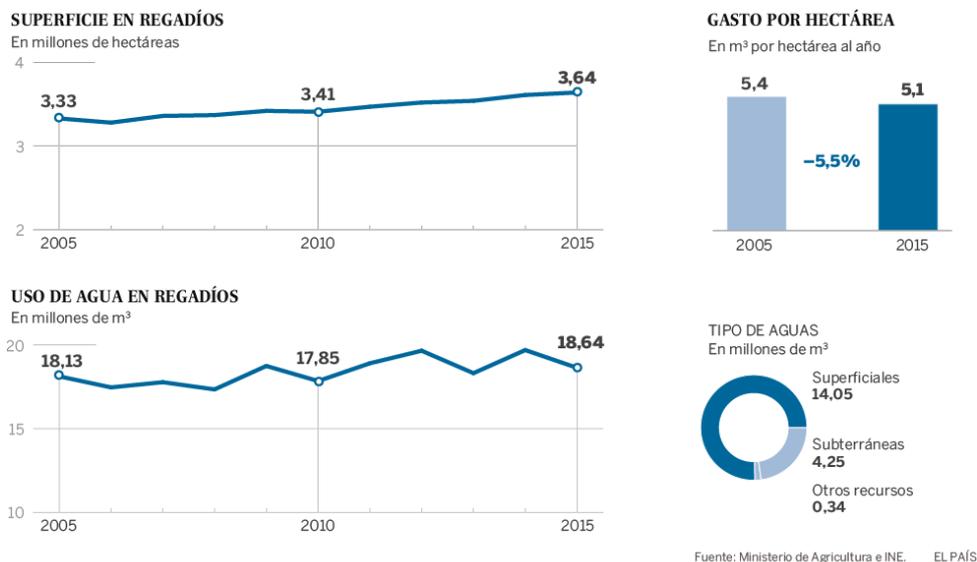


Figura 6: El consumo de agua por la agricultura en España

Fuente: Ministerio de Agricultura e INE

### 1.6.1 Economía del Agua de Riego: Escasez, Calidad e Instrumentos Económicos

No es arriesgado afirmar que si todos los productores españoles tuvieran un acceso económico a un río o pozo no existiría agricultura de secano en ninguna parte de nuestra geografía, exceptuando posiblemente el norte peninsular o partes de Galicia.

El motor no sería tanto la mejora del beneficio esperado, que al integrar el coste de capital de las instalaciones no lo hace tan diferente del secano, como la posibilidad de estabilizar las rentas y facilitar una producción de calidades más controlables y por tanto más fáciles de comercializar. Para las explotaciones mixtas, agrícolas-ganaderas o integradas en SATs o cooperativas, las ventajas serían cuantiosas. La nueva Política Agraria Común (PAC), que busca una mayor orientación de la agricultura al mercado, y el escenario de precios mundiales a medio plazo van a acrecentar la presión y la demanda del agua de riego. Desde esta perspectiva, la presión por emplear más caudales va a existir siempre, alimentada por el estímulo a mejorar la productividad del trabajo y del capital.

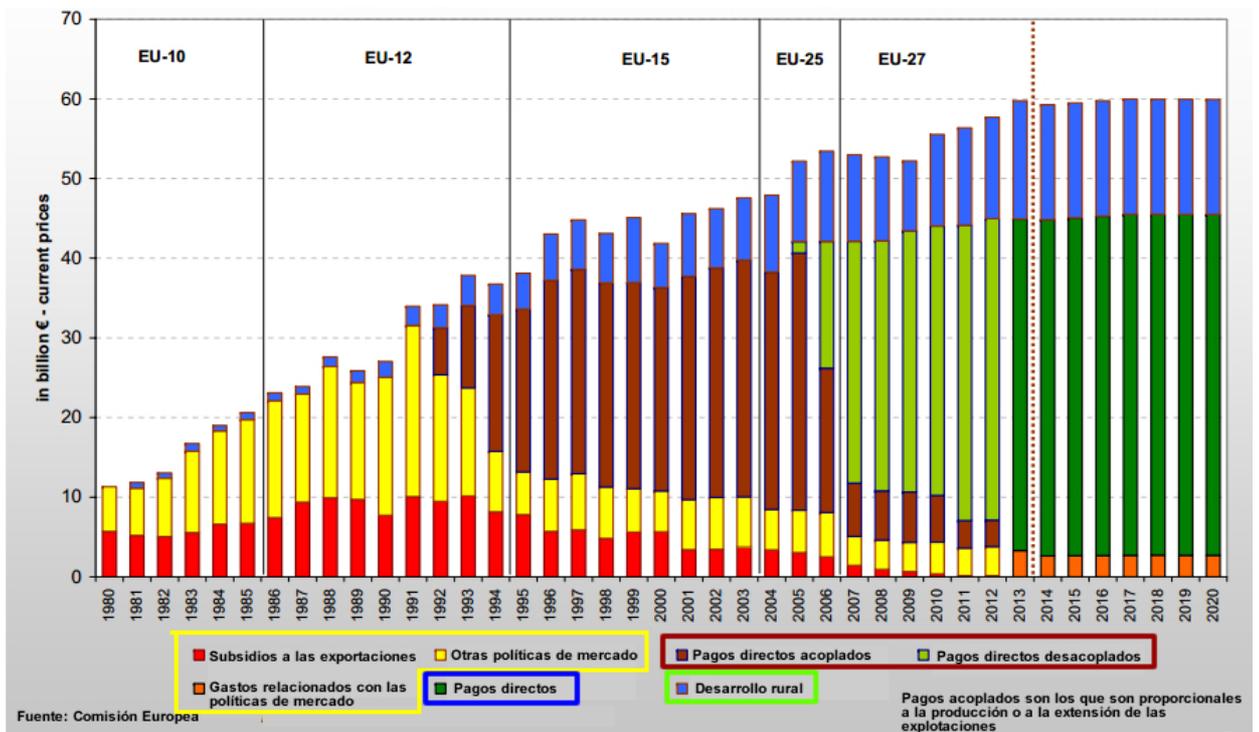


Figura 7: Evolución del gasto de la PAC en Europa

Fuente: Comisión Europea

La distribución del agua en España es irregular en el espacio y en el tiempo. Realmente en estas irregularidades subyace el origen de la búsqueda de un equilibrio de Nash, que brevemente hemos introducido en la sección 1.2.2.

### 1.6.2 Regadío y Asignación de Costes

En lo que se refiere a la agricultura de regadío, la distribución de los costes asociados a la contaminación resulta de grave problemática, lo que más tarde se verá resuelto en un caso específico gracias a la Teoría de Juegos y el equilibrio de Nash.

Si todas las cuencas tuvieran exactamente la misma agua y en el mismo momento probablemente no habría que plantear este problema por un criterio claro de sostenibilidad. Si todo el mundo recibe la misma agua y aún así “alguien” gasta más agua de la que recibe no parecería a priori lógico dejar que ese alguien gastara su agua y la de los demás. Pero la situación del agua en España no es así. Recibimos las precipitaciones de forma irregular en el

espacio y en el tiempo. Y de partida, todos los españoles tendríamos derecho a recibir la misma cantidad de agua.

El agua que se consideraría para este reparto no sería toda la disponible. En primer lugar habría que deducir la conocida como “demanda ambiental”, que la legislación española no considera un uso, sino una restricción establecida para la protección de zonas y periodos de las funciones naturales del agua mediante preservación de flujos y niveles.

Por otro lado, habría que considerar la relación en los usos que establece la legislación de aguas para determinar, una vez satisfechas las demandas en cada cuenca conforme a esa relación, el excedente/déficit final real existente.

La variable a optimizar no sería de unidades de volumen del agua sino unidades económicas. Por eso no es un juego de suma cero. No consiste en que una cuenca cediera a otra una cantidad de agua determinada, sino el aprovechamiento económico que se haga de un excedente determinado.

## 1.7 Aguas Urbanas

El uso del agua en el medio urbano constituye la relación más directa de la gestión del agua con el ser humano en su condición de ciudadano. En las ciudades se concentran principalmente el uso doméstico y el uso industrial del agua y, aunque éstos no representan un volumen importante de utilización en relación con otros usos, son sin duda los que están vinculados con un porcentaje mayoritario de la sociedad, asentada en las ciudades, ofreciendo un amplio campo para la sensibilización y la puesta en valor del agua. Dada la importancia del uso doméstico, que abarca funciones esenciales como el abastecimiento de agua a la población, está reconocido a nivel normativo su prioridad frente a otros usos en la planificación y asignación de recursos y derechos.

Múltiples estudios coinciden en la tendencia mundial de aglomeración de población en los entornos urbanos. Según UN-Habitat, en 1950, un tercio de la población del mundo vivía en ciudades. Sólo 50 años más tarde, esta proporción ha aumentado a la mitad y seguirá creciendo a dos terceras partes, o 6.400 mil millones de personas, en 2050. Las ciudades son ahora el hogar de más de la mitad de la humanidad. Esto pone aún más énfasis en la necesidad de generar una reflexión sobre los modelos de ciudad actuales y su impacto sobre los ecosistemas acuáticos, así como sobre la relación de los ciudadanos de las urbes con los servicios de abastecimiento y saneamiento, probablemente uno de los espacios más directos de aproximación de los individuos con la gestión del agua.

¿Qué recursos consumimos para disponer de agua en nuestras casas, evacuarlas, depurarlas, regenerarlas? ¿Qué relaciones de interdependencia se generan a nivel territorial para mantener estos servicios? ¿Cómo afectan los actuales modelos de desarrollo urbano al ciclo natural del agua? Estas primeras reflexiones sobre los metabolismos urbanos y los modelos de ciudad apuntan hacia la necesidad de enfoques eointegradores que consideren los múltiples impactos territoriales del uso y consumo del agua en las ciudades.

Además, las mayores exigencias de los ciudadanos con respecto a los servicios de abastecimiento y saneamiento obligan a plantearse unas nuevas consideraciones a nivel de eficiencia, garantía de servicios y gestión de riesgos, así como un nuevo paradigma de

sostenibilidad ambiental, que requieren la incorporación de nuevas herramientas y modos de gestión de los servicios urbanos.

Por otra parte, en el marco de este nuevo paradigma de sostenibilidad ambiental, impulsado por la necesidad de cumplimiento de los objetivos de la Directiva Marco del Agua, surgen nuevos retos en los entornos urbanos, que requieren de la aplicación de estrategias innovadoras para la minimización de los impactos de las aguas residuales urbanas en los ecosistemas acuáticos receptores: la mejora en la calidad de los efluentes de las Estaciones Depuradoras, el fomento de la gestión de la demanda de agua a través de la regeneración de las aguas residuales, o la disminución de los impactos en las aguas receptoras por descargas directas de los sistemas de saneamiento en eventos de tormenta son temas sin resolver en la mayoría de las ciudades españolas.

En este sentido, una vez se han conseguido en un porcentaje razonable los objetivos prioritarios de servicio a la ciudadanía y minimización del riesgo de inundaciones en los entornos urbanos, se hace necesaria una gestión de los sistemas de saneamiento y drenaje urbano que integre las distintas partes del mismo de tal manera que las intervenciones que se realicen en los distintos ámbitos conduzcan a la consecución de un mismo objetivo común todavía por cumplir, véase, el buen estado ecológico de los ecosistemas acuáticos. Esta gestión avanzada de los sistemas de saneamiento y drenaje urbano requiere de una mejora técnica y tecnológica pero también de la incorporación de nuevas formas de gestión que rebasen dichos aspectos e introduzcan nuevas variables como las herramientas económicas, normativas, urbanísticas o la participación ciudadana.

Finalmente, en este nuevo contexto de crisis económica, y a la luz de las presiones por la privatización de los servicios de agua en las ciudades, una última reflexión se hace necesaria. ¿Cuáles son los elementos clave en el debate sobre la gestión pública o privada de estos servicios? Trataremos de dar luz en un debate que actualmente cuestiona de manera dogmática aspectos clave como la eficiencia de los servicios públicos de abastecimiento y saneamiento, o genera confusión entre la recuperación de costes, herramienta para la sostenibilidad económica de los servicios y el lucro de las empresas privadas en la gestión de un servicio básico del ciudadano bajo el negocio del monopolio.

Como vemos, son muchas las cuestiones que se prestan a reflexión en los entornos urbanos. La mayoría de ellas rebasan las cuestiones puramente técnicas e incorporan múltiples aspectos territoriales, urbanísticos, económicos, ambientales, sociales y éticos, generando un debate cada vez más complejo que requiere de soluciones integrales, coordinadas e innovadoras.

La Teoría de Juegos presenta soluciones cooperativas y no cooperativas posibles aplicadas a casos determinados, que ayudan a distribuir los costes relacionados con el consumo de aguas urbanas, así como con el tratamiento de estas. Más adelante en el documento se hace referencia a ejemplos de la aplicación de la teoría, en este caso será el tratamiento de las aguas residuales urbanas.

De los tres usos generales del agua, agrícola, ambiental y urbano, el consumo urbano presenta una serie de características que la diferencia de los precedentes y por las que, al plantear análisis integrados, menos condicionado está. Las principales son:

- Es la demanda prioritaria, indiscutible incluso en épocas de escasez.
- Representa, pese a una población que crece sin cesar, una cantidad muy inferior a la de los otros dos usos.

- Desde la visión de la calidad sucede justo lo contrario. Es, con diferencia, la más exigente porque el agua de consumo urbano debe cumplir unos requisitos cada vez más exigentes, sólo alcanzables con un coste razonable cuando la calidad del agua bruta de partida es buena.
- Las inversiones requeridas por todo el ciclo urbano son, por metro cúbico de agua utilizado, las más elevadas. Y al tiempo es el uso por el que el usuario puede pagar un precio unitario mayor. Por ello se puede afirmar (Briscoe, 1996) que en el abastecimiento urbano el coste de uso es alto (es mucho menor en el regadío) mientras que el coste de oportunidad es reducido, dado su elevado valor económico (el coste de oportunidad es alto en el regadío cuando compite con el uso urbano o industrial).

Si a ello se añade el hecho probado de que la recuperación integra de costes contribuye de manera definitiva a mejorar la eficiencia y la sostenibilidad, parece evidente que el precio medio que por el agua deben pagar los abonados deben permitir satisfacer este principio, mayormente cuando, además, es una exigencia de la Directiva Marco del Agua. Llegados a este punto, de inmediato surge la cuestión del agua derecho universal del hombre que incluso ha originado una respuesta específica de la Comisión Europea (EC, 2014) ante el primer requerimiento ciudadano que ha alcanzado las firmas necesarias. El comunicado manifiesta un hecho que nadie discute: “el acceso a un agua potable segura y al saneamiento está inextricablemente ligado al derecho a la vida y a la dignidad humana, así como a la necesidad de garantizar un nivel de vida adecuado” Es, pues, menester compatibilizar el derecho humano al agua con una recuperación completa de costes que garantice la sostenibilidad económica del servicio, algo perfectamente posible con una tarificación progresiva y social.

Del mismo modo que la sostenibilidad económica de un país se fundamenta en recaudar con los impuestos (indirectos más directos) una cantidad igual a los gastos que debe asumir, con independencia del régimen fiscal, más o menos progresivo, que se quiera implantar, la recuperación de costes del agua urbana exige que el ciudadano pague un precio medio del metro cúbico del agua que permita atender todos los costes del sistema. Y ello con independencia de que, incluso, la cantidad mínima que garantice el derecho a la vida y a la dignidad sea casi gratis.

Para las tasas de recuperación del agua, los costes que la definen según la DMA son los siguientes:

- Costes del recurso. Término esencial para la DMA integrado por tres sumandos:
  - Coste por la compra del agua en alta (bruta o depurada) a otro operador.
  - Coste temporal de oportunidad. Asociado al lucro cesante.
  - Costes variables generados por externalidades.
- Costes de operación y mantenimiento (O&M). Básicamente coste (fijo) del personal más los variables ligados a la producción (reactivos) y distribución (energía).
- Coste del capital. La anualidad que permite reponer las infraestructuras.
- Costes ambientales.
- Costes sociales. Para compensar los inconvenientes (la apertura de una zanja frente a un restaurante) que personas ajenas al desarrollo de la actividad soportan (Coase, 1960).

# 2 TEORÍA DE JUEGOS

---

## 2.1 Introducción a los Juegos

Un juego es una situación con ciertas reglas que envuelve a un grupo de agentes que pueden obtener ciertos beneficios. En un juego cada agente intenta conseguir el mejor resultado posible, teniendo en cuenta que el resultado del juego depende tanto de sus acciones como de las acciones de otros agentes. Esta es la característica principal de los juegos: tomar las decisiones que más convienen para ganar, teniendo que cumplir las reglas del juego, y sabiendo que los demás agentes también influyen en los resultados con sus decisiones.

En economía se estudian a menudo situaciones de decisión individual, en las que el agente intenta maximizar su utilidad, sin importar lo que hagan los otros. Por ejemplo:

- Elección de cantidades de cada bien a comprar por parte de un consumidor. Se suponen como dato los precios de los bienes, así como la renta del consumidor.
- Elección de cantidades de un bien a producir por parte de una empresa. Se suponen dados los precios del bien y de los factores de producción y conocida la función de producción.
- Elección del precio de un bien por monopolista. Se suponen dados los precios de los factores de producción y la curva de demanda de dicho bien y conocida la función de producción. Sin embargo, hay muchas otras situaciones en que la utilidad del resultado final no depende solo de la acción del agente, sino también de los otros agentes, por ejemplo: elección por la empresa A de la cantidad a producir de un bien o del precio de dicho bien, si también los produce la empresa B y ninguna más (duopolio). Los resultados finales para la empresa A dependen de sus propias decisiones y de las de B.
- Elección por una empresa de automóviles de un nivel de gasto en publicidad. Las consecuencias finales de dicho gasto dependen del gasto realizado en publicidad por las empresas competidoras.
- Elección por un coleccionista de su puja (cantidad de dinero que ofrece) en la subasta de un cuadro. Los resultados (consigue o no que se adjudiquen el cuadro subastado) dependen también de la puja de otros participantes.

El planteamiento según el cual no importa lo que hagan otros agentes es más bien una simplificación de la realidad. La teoría de juegos se ocupa, por tanto, del análisis riguroso y sistemático de esas situaciones, donde interfieren las acciones de los agentes. Así pues, la Teoría de Juegos podría llamarse teoría de la decisión interactiva, que es diferente de la teoría de la decisión individual. Fue introducida por Von Neumann y Morgenstern en 1944 y numerosos premios Nobel de economía han trabajado sobre ello, Aumann, Sentel, Shapley.

Algunos aspectos básicos en un juego son los siguientes:

Se denominan jugadores a los agentes del juego que toman las decisiones con el fin de maximizar su utilidad. Son dos o más.

Las acciones de cada jugador son las decisiones que puede tomar cada jugador en cada momento que le toque jugar.

El conjunto de acciones de un jugador en cada momento del juego puede ser finito o infinito. Una estrategia de un jugador es un plan completo de acciones con las que éste podría proponerse participar en dicho juego. Un perfil de estrategias es un conjunto de estrategias, una por cada jugador.

Los jugadores pueden formar grupos que realicen acciones y estrategias conjuntas. A estos grupos se les llama coaliciones.

Los resultados del juego son los distintos modos en los que puede concluir un juego. Cada resultado lleva aparejado unas consecuencias para cada agente.

Cada jugador recibe un pago al acabar el juego, que depende de cuál haya sido el resultado del juego. El significado de dicho pago es la utilidad que cada jugador atribuye a dicho resultado; es decir, la valoración que para el jugador tienen las consecuencias de alcanzar un determinado resultado en el juego.

Hay dos tipos de juegos básicos, o, dicho de otro modo, dos enfoques diferentes en el análisis de un juego: cooperativos y no cooperativos.

En el enfoque cooperativo se analizan las posibilidades de que algunos o todos los jugadores lleguen a un acuerdo sobre qué decisiones tomaría cada jugador en ausencia de acuerdo previo. Dos aspectos son vitales en dicho análisis: qué coaliciones se formarán y cómo se repartirán los beneficios obtenidos.

Entre los juegos no cooperativos caben dos distinciones básicas: los juegos estáticos o dinámicos, y juegos con o sin información completa.

En los juegos estáticos los jugadores toman sus decisiones simultáneamente (cada jugador decide sin saber que han decidido los demás), mientras que en los dinámicos puede darse el caso de que un jugador conozca ya las decisiones de otro antes de decidir.

En los juegos con información completa, todos los jugadores conocen las consecuencias, para sí mismos y para los demás, del conjunto de decisiones tomadas, mientras que, en los juegos con información incompleta, algún jugador desconoce algunas de las consecuencias.

## 2.2 Los Juegos Cooperativos

Como se comentó antes existe la posibilidad de que algunos jugadores puedan llegar a acuerdos vinculantes, que denominamos coaliciones. Si en el juego las únicas acciones posibles de los jugadores son la realización de cooperaciones con otros el juego se reduce a estudiar los resultados que puede obtener cada una de las coaliciones de jugadores que se puedan formar. Se trata de analizar cómo puede actuar un grupo de jugadores, interesándonos en los comportamientos colectivos y sin que haya falta de detenerse en las acciones individuales de cada uno de los miembros de la coalición. Dos preguntas han de responderse ante una situación como ésta: qué coaliciones se formarán y cómo se repartirán los beneficios obtenidos. En esta sección veremos cómo la teoría de juegos cooperativos responde a la segunda pregunta.

Sea  $J = \{1, 2, \dots, N\}$  un conjunto finito de jugadores. Sea el conjunto de las partes de  $J$ ,  $P(J)$ , que está formado por cada una de las posibles coaliciones que se pueden formar, incluyendo la coalición sin jugadores que es  $\emptyset$ .

Haremos dos suposiciones más con la idea de reducir el problema.

Consideramos que cada coalición puede determinar la mejor consecuencia que sus componentes pueden asegurarse teniendo en cuenta sus acciones y la de los jugadores exteriores. Supongamos además que las utilidades de los jugadores son transferibles, lo cual quiere decir que las ganancias o pérdidas que se obtienen al actuar como coalición pueden repartirse entre los jugadores que la componen; en ocasiones este reparto no es posible por lo que no existe una forma de transferir la unidad, problemas que no serán objeto del estudio. En un juego cooperativo de unidad transferible, se llama *función característica* a una función que asigna a cada coalición un número real, asignando al conjunto de vacío el valor cero, es decir:

$$v: P(J) \rightarrow R,$$

$$S \rightarrow v(S)$$

Verificando que  $v(\emptyset) = 0$ . Esta última imposición sin interpretación posible es sólo una condición técnica.

Para una coalición  $S \in P(J)$ , al número  $v(S)$ , se le llama *valor de la coalición* y se interpreta como el valor mínimo que puede obtener la coalición si todos sus miembros se asocian y juegan en equipo. Se trata por tanto del valor que una coalición toma sus decisiones de forma adecuada. En este caso utilizaremos la interpretación de  $v(S)$  como beneficio, aunque podría interpretarse como costos.

*Definición 1:*

Un juego cooperativo de unidad transferible consiste, por tanto, en un par  $G = (J, v)$ , dado por:

- Un conjunto finito de jugadores  $J = \{1, 2, \dots, n\}$
- Una función característica,  $v$ , que asocia a cada subconjunto  $S$  de  $J$  (o coalición) un número real  $v(S)$  (valor de la coalición), siendo  $v(\emptyset) = 0$ .

*Definición 2:*

Se dice que un juego  $G = (J, v)$  es monótono si para todo par de coaliciones  $S, T \subseteq J$ , con  $S \subseteq T$  se verifica siendo  $T \geq S$ , que:

$$v(S) \leq v(T)$$

Hablamos de un juego cooperativo monótono cuando al crecer el número de jugadores que forman una coalición el beneficio o pago de esta coalición no disminuye.

*Definición 3:*

Se dice que un juego  $G = (J, v)$  es superaditivo si para todo par de coaliciones  $S, T \subseteq J$ , con  $S \cap T = \emptyset$  se verifica que:

$$v(S) + v(T) \leq v(T \cup S)$$

Es decir, si dos coaliciones disjuntas deciden unirse para formar una coalición mayor, el beneficio de la nueva coalición será igual o superior que la suma de los beneficios de las coaliciones originales. Nos interesan, por lo tanto, los juegos superaditivos. Si extendemos la condición de superaditivo a coaliciones no disjuntas obtenemos un tipo de juegos con grandes propiedades.

Uno de los problemas a resolver en este tipo de juegos es qué coaliciones se formarán. Para simplificar el problema consideramos que la coalición que se formará será  $J$ . Sin embargo, la monotonía de  $v$  no garantiza el interés de los jugadores en  $J$  de que se forme la misma, ya que pondrían de mutuo acuerdo grupos más pequeños cuya suma de pagos fuese superior.

*Definición 4:*

*Se dice que un juego  $G = (J, v)$  es convexo si para todo par de coaliciones  $S, T \subseteq J$  se verifica que:*

$$v(S) + v(T) \leq v(T \cup S) + v(S \cap T)$$

Esta inecuación se expresa de la forma:

$$v(S) + v(T) - v(S \cap T) \leq v(T \cup S)$$

Es decir, si dos coaliciones no disjuntas deciden unirse para formar una coalición mayor, el beneficio de la nueva coalición será igual o superior que la suma de los beneficios de las coaliciones originales menos el valor de intersección entre dichas coaliciones.

Ambos conceptos son aplicables también a juegos de costos sin más que cambiar las desigualdades.

*El juego  $(J, v)$  se dice subaditivo si para todo par de coaliciones  $S, T \subseteq J$  donde se cumple que  $S \cap T = \emptyset$ . Se verifica que:*

$$v(S) + v(T) \geq v(T \cup S)$$

### 2.2.1 El Conjunto de Imputaciones

Sea  $G = (J, v)$  un juego cooperativo de utilidad transferible, en cual  $J = \{1, 2, \dots, n\}$  es el conjunto de jugadores y  $v$  es la función característica. Si como hemos supuesto en el juego los jugadores deciden trabajar conjuntamente, es decir, cooperar, el único problema que se presenta consiste en cómo repartir el valor  $v(J)$  entre los jugadores.

Sea  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  un vector de distribución de pagos, donde para cada  $i=1, 2, \dots, n$ ,  $x_i$  representa el pago que recibe el jugador  $i$ . Para cualquier coalición  $S \subset J$ , se utilizará la siguiente notación:

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i$$

Si deseamos hacer un reparto del valor de  $J$ , entonces debemos exigir el *principio de eficiencia*, esto es que:

$$x(J) = v(J)$$

Por otro lado, ningún jugador admitiría que su situación individual fuese mejor que su pago en la coalición, esto quiere decir que, para todo, se verifica el *principio de racionalidad individual*.

$$x_i \geq v(\{i\}).$$

*Definición 5:*

*El conjunto de imputaciones de un juego cooperativo en su forma coalicional es:*

$$I(J, v) = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x(J) = v(J), x_i \geq v(\{i\}) \forall i \in J \}$$

Sin embargo, la exigencia de más condiciones puede no ser básica para todas las situaciones de beneficios y costos. Por ello, hablamos en esos casos de conceptos de solución.

En las siguientes secciones, (2.2.2 y 2.2.3), veremos dos conceptos distintos de soluciones.

## 2.2.2 El Core

Siguiendo el principio de racionalidad individual, podemos pensar exigir la racionalidad condicional, esto es, para todo  $S \subseteq J$  ocurre que,  $x(S) \geq v(S)$ .

*Definición 6:*

*El Core de un juego cooperativo  $G = (J, v)$  de beneficio en su forma coalicional es:*

$$C(J, v) = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x(J) = v(J), x(S) \geq v(S) \forall S \subset J \}$$

El Core anterior es utilizado para problemas de beneficios. Cuando el problema es de costos;

*Definición 7:*

*El Core de un juego cooperativo  $G = (J, v)$  de costos en su forma coalicional es:*

$$C(J, v) = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x(J) = v(J), x(S) \geq v(S) \forall S \subset J \}$$

Sea  $G = (J, v)$ , un juego cooperativo:

El Core,  $C(J, v)$ , del inglés “Núcleo”, es un conjunto cerrado, acotado y convexo. Sin embargo, el principal problema del Core es que puede ser o muy grande o bien incluso vacío. Si el core es vacío tendremos que olvidar la búsqueda de soluciones racionales para todas las coaliciones. Si es grande, la cuestión es cuál de sus vectores de pago escoger.

Veamos una condición equivalente a que el Core sea no vacío. Una familia  $\{S_1, \dots, S_p\}$  de

subconjuntos de  $J$ , disjuntos y no vacíos, es *equilibrada* sobre  $J$  si existen números positivos,  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$  denominados pesos, tales que para todo  $i \in J$  verifican lo siguiente:

$$\sum_{\{j, i \in S_j\}} \alpha_j = 1$$

Se dice que un juego es equilibrado si para toda familia equilibrada  $\{S_1, \dots, S_m\}$  partición de  $J$  con pesos  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$  dse tiene que:

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j v(S_j) \leq v(J)$$

Esto es, ninguna partición ponderada de  $J$  obtiene mejores beneficios.

*Teorema 1:*

*Un juego es equilibrado si y sólo si El Core es no vacío.*

### 2.2.3 El Valor de Shapley

Se trata de hacer una distribución de pagos entre los jugadores de manera que se cumplan determinados criterios, llamados axiomas, previamente establecidos.

Sea  $G(J, v)$  un juego en forma coalicional, donde  $J = \{1, \dots, n\}$ , se considera la siguiente asignación de pago para los  $n$  jugadores:

$$\phi(J, v) = (\phi_1(J, v), \dots, \phi_n(J, v)) \in \mathbb{R}^n$$

La función de asignación de pagos  $\phi(J, v)$  debe cumplir los siguientes axiomas o principios:

*Axioma 1:*

*Eficiencia:* La función de asignación  $\phi(v)$  debe distribuir el pago total del juego. Es decir, la función debe ser:

$$\sum_i \phi_i(J, v) = v(J)$$

*Axioma 2:*

*Simetría:* Para cualquier par de jugadores que realicen aportaciones equivalentes para cada coalición, es decir, tales que cumplan que:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \forall S \subset J, \text{ con } i, j \notin S$$

Se tiene que:  $\phi_i(J, v) = \phi_j(J, v)$

*Axioma 3:*

*Tratamiento del jugador pasivo:* Si un jugador no aporta ningún beneficio adicional al resto de los jugadores, no debe recibir ningún pago coalicional. Es decir, para cada jugador  $i \in J$  se verifica entonces que:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S), \forall S \subset J, \text{ se tiene que } \phi_i(J, v) = v(\{i\})$$

*Axioma 4:*

*Aditividad.* La función de de asignación  $\phi$  debe ser invariante a cualquier descomposición arbitraria del juego. Formalmente, dados dos juegos cualesquiera  $v$  y  $w$ , se tiene que

$$\phi_i(J, v + w) = \phi_i(J, v) + \phi_i(J, w), \forall i \in J$$

A continuación, teniendo en cuenta lo anterior, podemos enunciar el siguiente teorema:

*Teorema 2:*

*La única asignación que verifica los 4 axiomas anteriores es el Valor de Shapley, que tiene la siguiente expresión:*

$$\phi_i(J, v) = \sum_{\{S \subset N: i \in S\}} q(s)[v(S) - v(S \setminus i)], \forall i \in J$$

donde  $q(s) = \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}$ , siendo  $s = |S|$ , el número de jugadores que hay en la coalición  $S$ .

*Definición 8:*

El *Valor de Shapley* de un juego  $G(J, v)$  puede interpretarse como la contribución marginal esperada de cada jugador al entrar en una coalición al azar. En efecto, el valor  $v(S) - v(S \setminus i)$  es la contribución marginal efectiva de  $i$  al incorporarse a  $S$ , mientras que el factor  $q(S)$  es la probabilidad de que a  $i$  le toque incorporarse precisamente a  $S$ .

*Teorema 3:*

*Si es un juego convexo entonces el valor de Shapley pertenece al Core de  $v$ .*

## 2.3 Los Juegos No Cooperativos. Equilibrio de Nash.

Los equilibrios de Nash se definen como la combinación de estrategias para las cuales no hay incentivo alguno para que los jugadores se desvíen de su elección. Esta será la mejor opción que un jugador puede tomar, teniendo en cuenta la decisión de los otros jugadores y donde un cambio en la decisión de un jugador sólo conducirá a un resultado peor si los otros jugadores se adhieren a su estrategia.

Uno de los equilibrios de Nash más conocidos se encuentra en el dilema del prisionero. Este concepto pertenece a la Teoría de Juegos, específicamente para los juegos no cooperativos, y toma el nombre de John Nash que lo desarrolló en el siglo XX.

Hay unos pocos requisitos de coherencia que deben tenerse en cuenta cuando se trata de equilibrios de Nash. Uno de ellos es conocido como el conocimiento común, que complementa la necesidad de información completa. Por lo tanto, las expectativas sobre las estrategias de otros jugadores deben ser racionales.

Decimos que, un equilibrio de Nash es una combinación de creencias acerca de las estrategias y las opciones del otro jugador. Es bastante fácil entender esto con un ejemplo, en este caso del dilema del prisionero, representado en la siguiente matriz de juego:

		PRISIONERO 2	
		Confesar	Mentir
PRISIONERO 1	Confesar	<u>-8</u> , <u>-8</u>	0 , -10
	Mentir	-10 , 0	<u>-1</u> , <u>-1</u>

Figura 8: El dilema del prisionero

El prisionero 1 (P1) tiene analizar lo que el prisionero 2 (P2) va a hacer, con el fin de elegir la mejor estrategia. Si P2 confiesa (P2<sub>C</sub>), P1 obtendrá un pago de -8 o 0, y si miente (P2<sub>M</sub>) obtendrá -10 o -1. Se puede ver fácilmente que P2 elegirá confesar, ya que le resulta más conveniente. Por lo tanto, P1 debe elegir la mejor estrategia dado que P2 elegirá a confesar: P1 puede confesar (P1<sub>C</sub>, con un pago de -8) o mentir (P1<sub>M</sub>, con un pago de -10). Lo racional para P1 es confesar. Procediendo a la inversa, se analizan las creencias que P2 tiene sobre las estrategias de P1, lo que nos lleva al mismo punto: lo racional para P2 es confesar. Por lo tanto, P1<sub>C</sub>, P2<sub>C</sub> es el equilibrio de Nash en este juego (subrayado en rojo)

Los equilibrios Nash se pueden utilizar para predecir el resultado de juegos finitos, siempre que exista tal equilibrio. Por otra parte, el equilibrio se puede encontrar utilizando el método de eliminación de las estrategias dominadas, lo que nos ayudará a encontrar el equilibrio de Nash mediante la exclusión de equilibrios de Nash 'irracionales'.

Sin embargo, nos encontramos con el problema que surge cuando se trata de un equilibrio de Nash que no es ni social ni ético, y donde la eficiencia puede ser subjetiva, que es el caso en el dilema del prisionero. En este juego, el equilibrio de Nash no cumple con los criterios para ser óptimo de Pareto. Además, la posibilidad de equilibrios múltiples hace que el resultado final del juego sea menos predecible.

# 3 JUEGO NO COOPERATIVO EN LA CONTAMINACIÓN CON ORIGEN EN LA AGRICULTURA

---

Una de las fuentes de contaminación del agua no puntuales que más problemas acarrea es la agricultura, en esta sección incluiremos algunas aplicaciones de juegos no cooperativos a temas relacionados con la industria agrícola, la contaminación del agua que conlleva y el tratamiento de esta. El agua residual producida por los agricultores es de por vida, el agua residual producida por las empresas del municipio es de producción industrial. Entonces, esta sección analiza el juego entre el gobierno y los agricultores, el gobierno y las empresas municipales, respectivamente.

## 3.1 Supuestos del Juego No Cooperativo

Los supuestos del juego no cooperativo son los siguientes:

1. Suponemos que hay tres participantes: agricultores, empresas municipales y gobierno (el gobierno aquí es un concepto relativamente amplio, representa los intereses del público).
2. El gobierno, los agricultores y las empresas municipales son "hombres económicos" racionales.
3. El gobierno elige verificar o no verificar la situación del control de la contaminación del agua rural, los agricultores eligen mejorar o no mejorar la emisión de residuos rurales, las empresas municipales eligen tratar o no tratar la contaminación del agua rural.

Con el fin de estudiar más a fondo la interacción y la relación entre el gobierno, los agricultores y las empresas municipales en el control de la contaminación del agua rural, realizamos un diseño variable adicional:

1.  $J$  es el incentivo del gobierno para los agricultores que eligen mejorar;  $H$  es el incentivo del gobierno para las empresas municipales que eligen tratar la contaminación.
2.  $C_1$  es el costo de inspección del gobierno para obtener información sobre los agricultores y  $C_2$  es el costo de inspección del gobierno para obtener información sobre las empresas del municipio.
3.  $S_1$  es el bienestar social de los agricultores para elegir mejorar;  $S_2$  es el bienestar social de las empresas municipales que eligen tratar la contaminación del agua.
4.  $E_1$  es una pérdida del bienestar social de los agricultores que eligen no mejorar;  $E_2$  es una pérdida del bienestar social de las empresas del municipio que eligen no tratar la contaminación del agua.
5.  $D$  es el costo del tiempo y la pérdida de conveniencia en la vida para que los agricultores

elijan mejorar.  $B$  es el costo de las empresas municipales en el tratamiento de la contaminación del agua.

6.  $F$  es el castigo de los agricultores cuando se determinó que no mejoraron. La probabilidad de ser encontrado es  $r_1$  (la probabilidad es 50%).
7.  $W$  es el castigo de las empresas del municipio cuando se determina que eligen no tratar la contaminación del agua. La probabilidad de ser encontrado es  $r_2$  (la probabilidad es 50%).
8.  $R$  es una pérdida de imagen social y reputación de las empresas del municipio.

### 3.1.1 El Juego entre el Gobierno y los Agricultores

La probabilidad de inspección gubernamental es  $p$ , la probabilidad de que no haya inspección gubernamental es  $1 - p$ . La probabilidad de mejora del agricultor es  $q$ , la probabilidad de no mejorar es  $1 - q$ .

Sobre la base de los supuestos anteriores, se estableció la matriz de juego del gobierno y los agricultores en el control de la contaminación del agua rural.

Como se muestra en la Tabla 2:

Gobierno	Agricultor	
	mejora	No mejora
Se realiza inspección	$S_1 - J - C_1, J - D$	$r_1 - C_1 - E_1, -r_1 F$
No se realiza inspección	$S_1, -D$	$-E_1, 0$

Tabla 2: el juego entre el gobierno y los agricultores

Cuando los agricultores eligen mejorar, porque  $S_1 - J - C_1 < S_1$ , el gobierno decide no verificar; cuando el gobierno decide no verificar, porque  $-D < 0$ , los agricultores eligen no mejorar.

Cuando los agricultores deciden no mejorar, si  $r_1F > C_1$ , el gobierno decide verificar; de lo contrario, el gobierno elige no verificar. En este momento, ambas partes pueden obtener una estrategia pura de equilibrio de Nash (sin inspección, sin mejora).

Cuando el gobierno decide verificar, si  $J - D > -r_1F$ , los agricultores eligen mejorar. De lo contrario, los agricultores eligen no mejorar, en este momento, si también cumplen con  $r_1F > C_1$ , entonces el juego de ambas partes puede obtener una estrategia pura de equilibrio de Nash (inspección, no mejora).

No existe una estrategia pura de equilibrio de Nash para el control de la contaminación del agua rural.

Aquí analizamos el juego de los dos lados del equilibrio de Nash de estrategia mixta.

El gobierno espera ganar:

$$\mu_1 = p[q[S_1 - J - C_1] + (1 - q)(r_1F - C_1 - E_1)] + (1 - p)[qS_1 + (1 - q)(-E_1)]$$

El máximo beneficio por parte del gobierno por consiguiente será:

Derivando la ecuación anterior e igualando a cero, obtenemos el valor que tendría el beneficio máximo que podría obtener el gobierno a partir de los resultados obtenidos.

$$\frac{d\mu_1}{dp} = q(-J - r_1F) + r_1F - C_1 = 0$$

Solución:

$$q^* = r_1F - \frac{C_1}{r_1F} + J$$

La ganancia esperada por un agricultor es la siguiente:

$$\mu_2 = q[p[J - D] + (1 - p)(-D)] + (1 - q)[p(-r_1F) + (1 - p) \cdot 0]$$

Para optimizar el beneficio esperado por el agricultor volvemos a realizar el mismo procedimiento, derivamos la ecuación anterior e igualamos a cero.

$$\frac{d\mu_2}{dq} = p(J + r_1F) - D = 0$$

La solución es la siguiente:

$$p^* = \frac{D}{r_1F} + J$$

$(p^*, q^*)$  es una estrategia mixta de equilibrio de Nash en el juego del gobierno y los agricultores. Muestra que cuando la probabilidad de mejora de los agricultores es  $q^* < r_1F - \frac{C_1}{r_1F} + J$ , la estrategia óptima del gobierno es verificar; por el contrario, no se verifica la política óptima. Cuando la probabilidad de inspección del gobierno es  $p^* < \frac{D}{r_1F} + J$ , la estrategia óptima del

agricultor no es mejorar; por el contrario, la estrategia óptima es mejorar.

Como  $\frac{dq^*}{dr_1} > 0$ ,  $\frac{dp^*}{dr_1} < 0$ . Entonces, a medida que aumenta  $r_1$ , la probabilidad de que los agricultores elijan mejorar,  $q$ , aumentará; a la inversa, se reducirá la probabilidad  $p$  de que los agricultores decidan mejorar. Al mismo tiempo, cuanto mayor sea la probabilidad  $r_1$  de que los agricultores decidan no mejorar en una inspección, el número de inspecciones gubernamentales será menor, por el contrario, el número será mayor. Como  $\frac{dq^*}{dF} > 0$ ,  $\frac{dq^*}{dC_1} < 0$ ,  $\frac{dq^*}{dJ} < 0$ .

Por lo tanto, cuanto mayor sea el castigo  $F$  para los agricultores que no han mejorado, menor será el costo  $C_1$  de la inspección del gobierno, mayor será la probabilidad de que los agricultores terminen el trabajo de control de la contaminación del agua rural. Cuanto menor sea la probabilidad de que los agricultores completen el trabajo de control de la contaminación del agua rural, mayor será el incentivo del gobierno  $J$  para los agricultores que han finalizado el objetivo. Porque  $\frac{dp^*}{dD} > 0$ ,  $\frac{dp^*}{dF} < 0$ ,  $\frac{dp^*}{dJ} < 0$ .

Por lo tanto, cuanto mayor sea la probabilidad de inspección gubernamental, mayor será el costo de entrada  $D$  de los agricultores. Sin embargo, cuanto mayor es el incentivo del gobierno  $J$  para los agricultores cuyo trabajo de control de la contaminación del agua rural se completó bien, mayor es el castigo  $F$  para los agricultores que no han mejorado la forma de descarga de desechos rurales, menor es la probabilidad de inspección gubernamental en control rural de la contaminación del agua.

### 3.1.2 El Juego entre el Gobierno y las Empresas Municipales

La probabilidad de inspección gubernamental es  $a$ , la probabilidad de no verificar es  $1 - a$ . La probabilidad de tratar la contaminación del agua por parte de las empresas municipales es  $b$ , la probabilidad de no tratarla es  $1 - b$ .

Sobre la base de los supuestos anteriores, se estableció la matriz de juego de las empresas gubernamentales y municipales en el control de la contaminación del agua rural.

Como se muestra en la siguiente tabla:

Gobierno	Empresa municipal	
	Trata las aguas	No trata las aguas
Se realiza inspección	$S_2 - C_2 - H, H - B$	$r_2W - C_2 - E_2, -r_2W - R$
No se realiza inspección	$S_2, -B$	$-E_2, 0$

Tabla 3: el juego entre el gobierno y las empresas municipales

Cuando las empresas municipales eligen gobernar, porque  $S_2 - C_2 - H < S_2$ , el gobierno decide no controlar; cuando el gobierno decide no verificar, porque  $-B < 0$ , las empresas del municipio deciden no gobernar. En este momento, el juego de ambas partes puede obtener una estrategia pura de equilibrio de Nash (sin inspección, sin gobierno).

Cuando el gobierno decide verificar, si  $H - B > -r_2W - R$ , las empresas del municipio deciden gobernar. De lo contrario, las empresas municipales eligen no gobernar, en este momento, si cumplen  $r_2W > C_2$ , el juego de ambas partes puede obtener una estrategia pura de equilibrio de Nash (inspección, no gobierno).

No existe una estrategia pura de equilibrio de Nash para el trabajo de control de la contaminación del agua rural. Aquí analizamos el juego de los dos lados del equilibrio de Nash de estrategia mixta.

El retorno esperado del gobierno es:

$$\mu_3 = \alpha[\beta(S_2 - C_2 - H) + (1 - \beta)(r_2W - C_2 - E_2)] + (1 - \alpha)[\beta S_2 + (1 - \beta)(-E_2)]$$

La primera condición para obtener el beneficio gubernamental es:

$$\frac{d\mu_3}{d\alpha} = \beta(-r_2W - H) + r_2W - C_2 = 0$$

El beneficio gubernamental máximo que se puede esperar es:

$$\beta^* = r_2W - \frac{C_2}{r_2W} + H$$

El retorno esperado de las empresas es: es una estrategia mixta en el juego de equilibrio de Nash entre el gobierno y las empresas municipales:

$$\mu_4 = \beta[\alpha(H - B) + (1 - \alpha)(-B)] + (1 - \beta)[\alpha(-r_2W - R) + (1 - \alpha) \cdot 0]$$

La primera condición de beneficio óptimo es:

$$\frac{d\mu_4}{d\beta} = \alpha(r_2W + H + R) - B = 0$$

y la solución es:

$$\alpha^* = \frac{B}{r_2W} + H + R$$

$(\beta^*, \alpha^*)$  es una estrategia mixta en el juego de equilibrio de Nash entre el gobierno y las empresas municipales. Se muestra que cuando la probabilidad de implicación de una empresa es  $\beta^* < r_2W - \frac{C_2}{r_2W} + H$ , la estrategia óptima de gobierno es inspeccionar, pero la estrategia política es lo contrario. Igualmente, cuando la probabilidad de inspección es  $\alpha^* < \frac{B}{r_2W} + H + R$ , la estrategia óptima de la empresa es no gobernar; por el contrario, la estrategia política es hacerlo.

### 3.2 Sugerencia de Política

Desde arriba podemos ver que las medidas de control de la contaminación del agua rural deben ser diversas e integrales. Evaluando los resultados del juego, se sugiere lo siguiente:

1. Se deben tomar medidas para promover todos los niveles de gobierno para tratar seriamente la contaminación del agua rural. Porque  $-D < 0$ ,  $-B < 0$ , cuando no se verifica la estrategia del gobierno, la estrategia óptima de los agricultores, las empresas municipales no es la gobernanza. En este punto alcanzará lo más desfavorable para el control de la contaminación del agua rural de los dos equilibrios  $(-D, 0)$ ,  $(-B, 0)$ . Es decir, el gobierno no controla, los agricultores no gobiernan; el gobierno no verifica, las empresas municipales no gobiernan. Por lo tanto, es necesario desarrollar medidas apropiadas para regular el comportamiento del gobierno, fortalecer la construcción de un equipo profesional de control de la contaminación del agua rural para el buen progreso del

control de la contaminación del agua rural.

2. Establecer el sistema de recompensa y castigo para cumplir con los requisitos de perspectiva científica sobre el desarrollo. La perspectiva científica sobre el desarrollo requiere una cierta gama de recursos hídricos que pueden satisfacer las necesidades de la gente contemporánea, sin poner en peligro la capacidad de las generaciones futuras para satisfacer sus necesidades. La evaluación actual del desempeño se basa en el crecimiento del PIB, este criterio de evaluación también está preocupado por la realización de varios indicadores económicos, ignorando la protección del medio ambiente. Por lo tanto, es necesario diseñar un sistema de recompensa y castigo científico, este sistema debe ser una base importante para evaluar si el gobierno, los agricultores y las empresas municipales completaron el trabajo de control de la contaminación del agua rural.
3. Desarrollar vigorosamente la ciencia y la tecnología relacionadas con el control de la contaminación del agua. A partir de los resultados del juego  $q^* = r_1F - \frac{C_1}{r_1F} + J$ ,  $\beta^* = r_2W - \frac{C_2}{r_2W} + H$  se puede ver: cuanto mayor es la probabilidad ( $r_1$ ) de que los agricultores decidan no mejorar, menor será el costo de inspección del gobierno ( $C_1$ ), mayor es la probabilidad de que los agricultores logren el control de la contaminación del agua rural; cuanto mayor sea la probabilidad ( $r_2$ ) de que las empresas del municipio decidan no gobernar, menor será el costo de inspección del gobierno ( $C_2$ ), mayor será la probabilidad de que las empresas del municipio logren el control de la contaminación del agua en las zonas rurales. Para mejorar  $r_1$ ,  $r_2$ ; reducir  $C_1$ ,  $C_2$ . Debemos desarrollar tecnologías y equipos relacionados con el control de la contaminación del agua; mejorar los métodos de inspección del gobierno, mejorar los medios de inspección del gobierno.
4. Establecer un sistema de participación pública con divulgación de información. A partir de los resultados del juego  $\alpha^* = \frac{B}{r_2W} + H + R$  se puede ver que, cuanto más atención presten las empresas del municipio a la imagen y reputación social ( $R$ ), se prestará más atención al control de la contaminación del agua. La contaminación del agua no puede depender únicamente del gobierno, las empresas municipales, los agricultores, la participación pública también es muy importante. La transparencia de la información tiene un gran impacto en los resultados del juego. Por lo tanto, en el proceso de control de la contaminación del agua rural, cuanto más transparente sea la información del gobierno, las empresas municipales, es más probable que controlen la contaminación del agua.

### 3.3 Conclusiones

El control de la contaminación del agua rural es un proyecto complejo, que involucra los intereses del gobierno, las empresas municipales, los agricultores. En el proceso de control de la contaminación del agua en las zonas rurales, para salvaguardar sus propios intereses, debe haber un juego entre las partes interesadas. Para coordinar mejor los intereses entre las partes interesadas, a fin de resolver mejor el problema de la contaminación del agua rural, estudiamos el juego entre el gobierno y las empresas municipales, el gobierno y los agricultores. Sobre la base de un análisis

en profundidad del comportamiento de estos juegos, descubrimos que el progreso sin problemas del control de la contaminación del agua en las zonas rurales también necesita políticas y medidas relevantes.

# 4 JUEGO COOPERATIVO EN EL TRATAMIENTO DE AGUAS RESIDUALES

---

## 4.1 El Problema de las Plantas Residuales, Distribución de Costos.

Actualmente, no hay una fórmula clara y justa, basada en una estructura homogénea y empíricamente demostrada, que pueda calcular una tasa ecológica sobre aguas residuales como impuesto de contaminación en los centros que se dedican específicamente a tal tarea.

En algunos municipios, se cobra una cantidad por titular de cuenta, independientemente del volumen de aguas residuales producidas. Es decir, un hogar habitado por dos personas paga lo mismo que uno habitado por cinco, lo mismo que un negocio, una cafetería o un almacén donde se lava la fruta, aunque cada uno es responsable de un volumen de agua residual y un grado de contaminación muy diferente.

Pueden darse algunos casos en los que, los ingresos se recaudan en función del volumen de agua facturado a cada cliente, sin embargo, en la mayoría de los municipios de España, el impuesto consiste en una tasa fija más una tasa variable que está vinculada a los  $m^3$  registrados en la cuenta de gasto de agua del titular de esta. En ningún caso, el importe cobrado depende del volumen de las aguas residuales y de la carga de contaminación.

Los impuestos recaudados en los municipios no tienen en cuenta los efectos sobre la ecología de las masas de agua que suponen los altos volúmenes de aguas residuales que la contaminan.

Dadas las diferentes estructuras de las tasas aplicadas, se puede decir que, un hogar de cuatro miembros residente en la provincia de Jaén puede pagar cantidades muy diferentes por el servicio de tratamiento de aguas residuales, dependiendo del municipio en el que viven. Además, según fuentes de La SER: “hay varias depuradoras obsoletas que no están funcionando y otras que no funcionan a pleno rendimiento porque a los ayuntamientos les sale más rentable y barato pagar las multas que poner en funcionamiento esas depuradoras de aguas residuales. Las tasas que se suelen establecer, los impuestos que pagan los ciudadanos para depurar el agua son insuficientes por lo general y el sistema además está desordenado y no es proporcional; es decir, no paga más quien más contamina.”

Esto da lugar a la creación de una red intraprovincial entre los usuarios del servicio tratamiento de estas aguas, que sirva, en cualquier caso, tanto a familias como a empresas.

Una adecuada gestión de las aguas residuales urbanas aporta grandes beneficios a la sociedad, tanto en cuanto a salud humana como al medio ambiente. En consecuencia, es evidente la necesidad de conocer los costes totales del servicio de una planta de tratamiento de aguas residuales urbana. Estos pueden variar ampliamente dependiendo de varios factores.

El volumen de agua realmente tratada, el tamaño de la planta, el tipo de equipo instalado y el modelo de gestión de la planta son algunos de los factores que determinan el coste total por  $m^3$  de agua facturado al contribuyente. Este coste puede variar entre 0,30 euros por  $m^3$  y 0,88 euros por

$m^3$  en las instalaciones de la provincia de Jaén.

Un adecuado sistema de información y cuantificación de costes, diseñado según criterios económicos, permitirá que se tomen decisiones acertadas con respecto a la financiación segura y a largo plazo, ayudando a prevenir el mal funcionamiento o el cierre de la planta, como ha ocurrido en el 41% de las ciudades de la provincia de Jaén.

En la demarcación hidrográfica del Guadalquivir, que abarca el 99% del territorio de la provincia de Jaén, se estima una recuperación de costes del 84,36% para el servicio conjunto de alcantarillado y tratamiento de aguas residuales.

Según análisis realizados, la mayoría de los municipios no pueden cubrir el 80% de los costes para el tratamiento adecuado de las aguas residuales y, en algunos casos, la tasa de recuperación de costes es inferior a 20%. Como resultado, un número considerable de gobiernos locales están subvencionando parte de los costos incurridos para la prestación del servicio de la WWT municipal, lo que afecta al equilibrio de los presupuestos municipales.

Como modelo resultado de análisis de los beneficios de una supuesta planta propuesta como coalición entre municipios, se utiliza la teoría de juegos cooperativos.

En la siguiente sección, se plantea un problema ejemplo, en el que se supone un caso de una alianza entre municipios para la construcción de una planta de tratamiento de aguas residuales independiente de la de la ciudad a la que actualmente desvían sus aguas. En este problema ejemplo, que resolveremos con la TJC y una buena gestión del sistema hídrico presente, analizaremos la situación de regiones como Jaén, donde el problema es real y transitorio.

## 4.2 Explicación de la Metodología a Seguir

En esta sección, se explica la metodología a seguir en la asignación de coste de una nueva planta de tratamiento de aguas residuales supuesta, basada en la aplicación conjunta de modelos de gestión de sistemas hídricos y de la TJC.

La metodología desarrollada se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Análisis del sistema, supuestos del juego.
2. Definición del juego cooperativo: identificación de los agentes independientes y formación de coaliciones.
3. Cálculo de la función característica: de tal manera que se llegue a las alternativas de gestión de menor coste para cada coalición.
4. Definición del conjunto de imputaciones
5. El Core como solución al problema

En la figura que se encuentra a continuación se muestra el proceso de la aplicación de la metodología esquemáticamente:

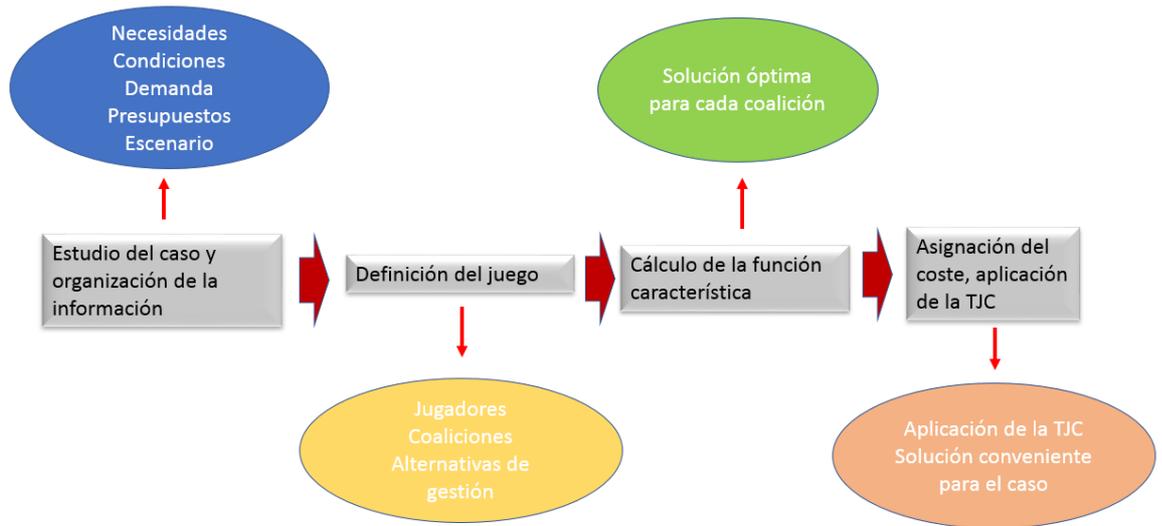


Figura 9: metodología a seguir en el juego cooperativo

#### 4.2.1 Análisis del Sistema, Supuestos del Juego Cooperativo

Tres comunidades cercanas a la ciudad de Jaén contemplan la posibilidad de desarrollar su propio sistema de tratamiento de aguas residuales.

Actualmente, estas comunidades desvían sus aguas residuales a una planta de tratamiento de aguas residuales perteneciente a la ciudad, pagando por ello a las autoridades una tasa mensual.

Un estudio estima que estos pagos a lo largo del tiempo de vida útil de la planta, serían de unos 100€ por familia de la comunidad cada mes. Para construir y mantener una planta de tratamiento de aguas residuales independiente de la existente para el mismo periodo, se ha estimado el valor del coste de la siguiente manera:

Coste mensual de construir y mantener la planta	Número de familias implicadas
$500.000 = q_1$	$0 \leq NFI \leq 5.000$
$600.000 = q_2$	$5.000 \leq NFI \leq 10.000$
$700.000 = q_3$	$10.000 \leq NFI \leq 15.000$

Tabla 4: coste total mensual de construir y mantener una nueva planta

Siendo  $q_1$ , el importe de construir y mantener una nueva planta de tratamiento de aguas residuales para el uso de una única comunidad,  $q_2$  es el importe de una nueva planta compartida por dos comunidades, y  $q_3$ , el importe de construir y mantener una nueva planta que sería para el uso compartido de las tres comunidades supuestas.

$NFI$  es el número total de familias implicadas al llevar a cabo el plan de la nueva planta de aguas.

Durante el periodo sujeto al estudio, se hace un recuento de las familias que componen cada comunidad que se ha supuesto en el problema. En la siguiente tabla se muestra el número de familias servidas por cada comunidad en ese periodo:

Comunidad	Número de familias durante el periodo de estudio
$C_1$	5.000
$C_2$	3.000
$C_3$	4.000

Tabla 5: número de familias por comunidad durante el periodo

#### 4.2.2 Definición del Juego Cooperativo: identificación de los agentes independientes y formación de coaliciones.

Siendo  $J = \{1,2,3\}$ , dónde el jugador 1 es la  $C_1$ , el jugador 2 es  $C_2$  y el jugador 3 es  $C_3$ .

Como vimos en la sección 2.2 de este documento: “Sea el conjunto de las partes de  $J$ ,  $P(J)$ , que está formado por cada una de las posibles coaliciones que se pueden formar dentro de (incluyendo la coalición sin jugadores que es  $\emptyset$ ). Para una coalición  $S \in P(J)$ , al número  $v(S)$ , se le llama valor de la coalición y se interpreta como el valor mínimo que puede obtener la coalición si todos sus miembros se asocian y juegan en equipo. Se trata por tanto del valor que una coalición toma sus decisiones de forma adecuada.”

En este caso utilizaremos la interpretación de  $v(S)$  como beneficio. Aunque  $v(S)$  sea calculado como una diferencia, el valor a de ser mayor o igual a 0 ya que sólo serán tenidos en cuenta beneficios, no costes.

A continuación, se definirá el juego cooperativo, analizando las posibles coaliciones que pueden formarse y estudiando para cada una su valor de coalición.

Para obtener la función característica: supongamos en primer lugar que la comunidad 1,  $C_1$ , va sola, sin formar coalición con ninguna otra comunidad. Como esta comunidad está formada por 5.000 familias, el valor presente de los pagos que están realizando (contando el período de tiempo de vida habitual de una planta de tratamiento) será de 5.000 (nº de familias) por 100 € (pago por familia), igual a 500.000 €. Si se deciden a construir y mantener una planta propia, el valor presente del coste es igual a 500.000 €, por tratarse de 5.000 familias.

A la comunidad 1 le cuesta lo mismo seguir como está que construir una planta propia, por lo que no gana nada construyendo una nueva planta y el valor de la coalición formada exclusivamente por la comunidad 1 es cero.

En la siguiente tabla se resumen los datos para  $C_1$  llevando a cabo el plan en solitario:

$C_1$		Valor en cientos de miles de €
Actualmente	$5.000 \times 100$	5
Construye en solitario	$q_1 = 500.000$	5
Valor de coalición $v(C_1)$	$500.000 - 500.000$	0

Tabla 6: comunidad 1

Si fuese la comunidad 2 la que decidiese construir la planta en solitario, necesitaría 500.000 € para construir y mantener la planta de tratamiento de aguas, mientras que actualmente soporta un coste de 3.000 (nº de familias) por 100 (pago por familia) igual a 300.000 €. Por tanto le conviene seguir como está y eso supone que el valor de la coalición formada exclusivamente por la comunidad 2 es igual cero. Aún siendo la diferencia negativa para el valor de coalición decimos que es 0, ya que en este problema estamos tomando el valor de coalición como beneficio.

En la siguiente tabla se resumen los datos para  $C_2$  llevando a cabo el plan en solitario:

$C_2$		Valor en cientos de miles de €
Actualmente	$3.000 \times 100$	3
Construye en solitario	$q_1 = 500.000$	5
Valor de coalición $v(C_2)$	$300.000 - 500.000$	0

Tabla 7: comunidad 2

Análogamente, la comunidad 3 soporta actualmente un coste de 400.000 €, mientras que si tuviera que construir y mantener una planta propia tendría un coste de 500.000. Le conviene seguir como está pues el Proyecto en solitario a  $C_3$  también le ocasiona pérdidas y por tanto el valor que toma la coalición es también también igual a cero.

En la siguiente tabla se resumen los datos para  $C_3$  llevando a cabo el plan en solitario:

$C_3$		Valor en cientos de miles de €
Actualmente	$4.000 \times 100$	4
Construir en solitario	$q_1 = 500.000$	5
Valor de coalición $v(C_3)$	$400.000 - 500.000$	0

Tabla 8: comunidad 3

Como conclusión de esta primera evaluación tenemos que:

$$v(C_1) = v(C_2) = v(C_3) = 0$$

A continuación, se evalúan los distintos casos en los que ocurriese que dos comunidades decidieran cooperar a la hora del relizar el proyecto y compartir una nueva planta independiente de la actual planta de la ciudad.

Consideremos la coalición formada por las comunidades 1 y 2. Ello supone que hay 8.000 familias implicadas. Actualmente soportan un coste de 8.000 multiplicando por 100 (pago por familia), igual a 800.000 €. Si construyen una planta propia que sirva a las 8.000 familias implicadas y la mantienen, asumirían entre todos un coste de 600.000. Por tanto, les convendrá construir la nueva planta lo cual les supone una ganancia de 2 (en cientos de miles de €).

En la siguiente tabla se resumen los datos para la coalición  $\{C_1, C_2\}$ :

$\{C_1, C_2\}$		Valor en cientos de miles de €
Actualmente	$8.000 \times 100$	8
Construir en solitario	$q_2 = 600.000$	6
Valor de coalición $v(\{C_1, C_2\})$	$800.000 - 600.000$	2

Tabla 9: coalición  $\{C_1, C_2\}$

Consideremos ahora la coalición formada por las comunidades 1 y 3. Ello supone que hay 9.000 familias implicadas. Actualmente soportan un coste de 9.000 multiplicando por 100 € (pago por familia), igual a 900.000 €. Si construyen una planta propia que sirva a las 9.000 familias implicadas y la mantienen, asumirían entre todos un coste de 600.000. Por tanto, les convendrá construir la nueva planta lo cual les supone una ganancia de 3 (en cientos de miles de €).

En la siguiente tabla se resumen los datos para la coalición  $\{C_1, C_3\}$ :

$\{C_1, C_3\}$		Valor en cientos de miles de €
Actualmente	$9.000 \times 100$	9
Construir en solitario	$q_2 = 600.000$	6
Valor de coalición $v(\{C_1, C_3\})$	$900.000 - 600.000$	3

Tabla 10: coalición  $\{C_1, C_3\}$

Análogamente, estudiamos que pasaría si la coalición estuviera formada por las comunidades 2 y 3. Supondría un total de 7.000 familias implicadas. Actualmente soportan un coste de 7.000 multiplicando por 100 € (pago por familia), igual a 700.000 €. Si construyen una planta propia que sirva a las 7.000 familias implicadas y la mantienen, asumirían entre todos un coste de 600.000 €. Por tanto, les convendrá construir la nueva planta lo cual les supone una ganancia de 1 (en cientos de miles de €).

En la siguiente tabla se resumen los datos para la coalición  $\{C_2, C_3\}$ :

$\{C_2, C_3\}$		Valor en cientos de miles de €
Actualmente	$7.000 \times 100$	7
Construir en solitario	$q_2 = 600.000$	6
Valor de coalición $v(\{C_2, C_3\})$	$700.000 - 600.000$	1

Tabla 11: coalición  $\{C_2, C_3\}$

Como conclusión de esta segunda evaluación tenemos lo siguiente:

$$v(C_1, C_2) = 2;$$

$$v(C_1, C_3) = 3;$$

$$v(C_2, C_3) = 1;$$

Por último, se analiza la triple coalición posible. Una única planta de tratamiento de aguas residuales compartida por las tres comunidades supuestas de esta provincia. El número total de

familias es 12.000, que, multiplicado por 100 € (pago por familia) es igual a 1,200.000 €. El precio de construir y mantener una nueva planta para tres comunidades es de 700.000 €. Por lo tanto, les conviene llevar a cabo el proyecto de esta manera puesto que el valor de la coalición es el más alto hasta ahora calculado, en total, 5 (en cientos de miles de €).

En la siguiente tabla se resumen los datos para la triple coalición  $\{C_1, C_2, C_3\}$ :

$\{C_1, C_2, C_3\}$		Valor en cientos de miles de €
Actualmente	$12.000 \times 100$	12
Construir en solitario	$q_2 = 700.000$	7
Valor de coalición $v(\{C_1, C_2, C_3\})$	$1,200.000 - 700.000$	5

Tabla 12: coalición  $\{C_1, C_2, C_3\}$

Entonces el valor de la triple coalición será:

$$v(C_1, C_2, C_3) = 5$$

Como se explicaba al comienzo del Capítulo de Juegos, capítulo 2:

*El juego  $(J, v)$  se dice subaditivo si para todo par de coaliciones  $S, T \subseteq J$  donde se cumple que  $S \cap T = \emptyset$ . Se verifica que:*

$$v(S) + v(T) \geq v(T \cup S)$$

En nuestro ejemplo;

$$v(C_1, C_2) + v(C_1, C_3) + v(C_2, C_3) \geq v(C_1, C_2, C_3)$$

Nos encontramos ante un juego de costos subaditivo o juego de beneficio. Para este tipo de juego se plantea El Core como solución óptima.

#### 4.2.3 Cálculo de la Función Característica

Por tanto, la representación del juego de costos subaditivo en su forma coalicional es  $(J, v)$ , donde:

$$J = \{1, 2, 3\}$$

$$\begin{aligned}
v: P(J) &\rightarrow \mathbb{R} \\
v(\emptyset) &= 0 \\
V(\{1\}) &= 0 \\
V(\{2\}) &= 0 \\
V(\{3\}) &= 0, \\
V(\{1,2\}) &= 2 \\
V(\{1,3\}) &= 3 \\
V(\{2,3\}) &= 1 \\
V(\{1,2,3\}) &= 5
\end{aligned}$$

Con los valores de la función característica tomados en cientos de miles de €.

#### 4.2.4 El Conjunto de Imputaciones

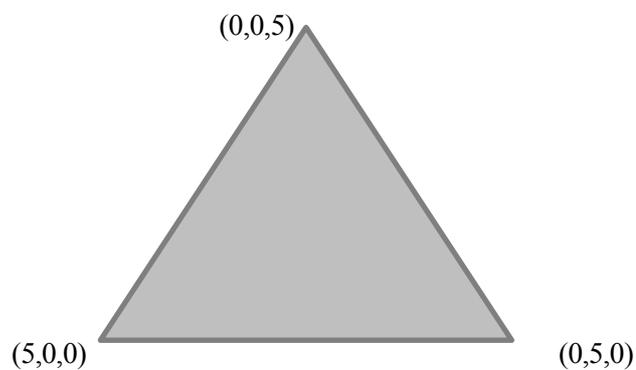
El conjunto de imputaciones de un juego cooperativo en su forma coalicional es:

$$I(J, v) = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x(J) = v(J), x_i \geq v(\{i\}) \forall i \in J \}$$

En nuestro caso, el conjunto de imputaciones para nuestro juego cooperativo propuesto:

$$\begin{aligned}
J &= \{1,2,3\} \\
v: P(J) &\rightarrow \mathbb{R} \\
v(\emptyset) &= 0 \\
V(\{1\}) &= 0, V(\{2\}) = 0, V(\{3\}) = 0, \\
V(\{1,2\}) &= 2, V(\{1,3\}) = 3, V(\{2,3\}) = 1, \\
V(\{1,2,3\}) &= 5
\end{aligned}$$

Conjunto de imputaciones:



El conjunto de imputaciones, tal y como se expone en la sección 2.2.1 no basta como solución,

pues existen otras exigencias que obligan a que el reparto de beneficios no sea una solución tan básica.

#### 4.2.5 El Core como Solución

Recordando la definición de la teoría del Core vista en el capítulo de juegos, sección 2.2.2, decimos que;

*El Core de un juego cooperativo de beneficio en su forma coalicional es:*

$$C(J, v) = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n : x(J) = v(J), x(S) \geq v(S) \forall S \subset J \}$$

“El Core conjunto es cerrado, acotado y convexo. Sin embargo, su principal problema es que puede ser o muy grande o bien incluso vacío. Si el core es vacío tendremos que olvidar la búsqueda de soluciones racionales para todas las coaliciones. Si es grande, la cuestión es cuál de sus vectores de pagos escoger.”

Para dibujar el Core, debemos delimitarlo con diferentes restricciones, basadas en los principios y teorías estudiados en el capítulo de juegos.  $x_1, x_2$  y  $x_3$  es considerado el beneficio que obtiene cada comunidad en general por participar en el juego cooperativo entre las 3 poblaciones.

Pertenecerán al Core los puntos  $x_1, x_2, x_3$  que satisfagan lo siguiente:

*Principio de eficiencia:*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

*Racionalidad individual:*

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

*Racionalidad para las coliciones formadas por dos jugadores:*

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 + x_3 \geq 3$$

$$x_2 + x_3 \geq 1$$

Es decir, los elementos del Core son aquellos puntos que pertenecen al conjunto de imputaciones del juego y, además, verifican las restricciones correspondientes a la racionalidad para las coaliciones de dos jugadores.

Sistema propuesto:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\x_1 + x_2 &\geq 2 \\x_1 + x_2 &\geq 3 \\x_2 + x_3 &\geq 1 \\x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

Despejando y sustituyendo en las ecuaciones del sistema propuesto, llegamos a las siguientes conclusiones;

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\geq 2; 5 - x_3 \geq 2; x_3 \leq 3 \\x_1 + x_3 &\geq 3; 5 - x_2 \geq 3; x_2 \leq 2 \\x_2 + x_3 &\geq 1; 5 - x_1 \geq 1; x_1 \leq 4\end{aligned}$$

Con estas tres nuevas restricciones somos capaces de definir nuestro conjunto numérico donde debe cumplirse lo siguiente;  $x_3 \in [0,3]$ ,  $x_2 \in [0,2]$  y  $x_1 \in [0,4]$ . En este juego la eficiencia del juego estaría representada por la siguiente igualdad:

$$x_1 + x_2 + x_3 = v(N)$$

A su vez, para que el juego cooperativo tenga sentido, debe cumplirse que:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\geq v(1,2) \\x_1 + x_3 &\geq v(1,3) \\x_2 + x_3 &\geq v(2,3) \\v(\{1,2,3\}) &= 5\end{aligned}$$

Para dibujar las restricciones, y calcular el centro del conjunto, se utiliza la herramienta Matlab. El código que se presenta a continuación, muestra las funciones que calculan el centro y dibuja el conjunto:

#### 1. Programa Coalition

```
function A1=coalition(n);  
% This program calculates the 2^2-2 coalition constraints for  
% cooperative game. If the no of players are more than 15 the execution  
% time will be more.  
for i=1:n-1  
k(i)=nchoosek(n,i);  
end
```

```

A=zeros(2^n-2,n);
A1=A;
k1=1:n;
nn1=1;
for i=1:n
x=nchoosek(k1,i);
[n1 n2]=size(x);
A(nn1:nn1+n1-1,1:n2)=x;
nn1=nn1+n1;
end
m=sum(k);
for i=1:m
for j=1:n
kk=A(i,j);
if kk>0
A1(i,kk)=1;
else
end
end
end
end

```

## 2. Programa Core

```

A=[0 0 0 0 7 7 7 7 7 7 12 12 12 12 22];
% The game
clf
for a=[2 7:11 12:0.2:12.6 13:16]
% the values for the parameter a
c2=max([0 a-7]);
juego=[0 0 0 0 c2 c2 c2 c2 c2 c2 a-2 a-2 a-2 a-2 22];
% drawing the imputation set
clf
imputationset(juego);
title(['A=[ ', num2str(juego), ' ]'])
hold on,axis(axis)
% drowing the core
coreset(juego);
if a==14

```

```

% The Communities example
pause
[Sh,marginales]=Shapley(A);
Hold on,axis(axis)      plot3(marginales(:,1),marginales(:,2),marginales(:,3),'*b');
weberset(A)
end
pause
end

```

La representación del Core sobre el conjunto de imputaciones ya definido que devuelve Matlab por pantalla es la siguiente:

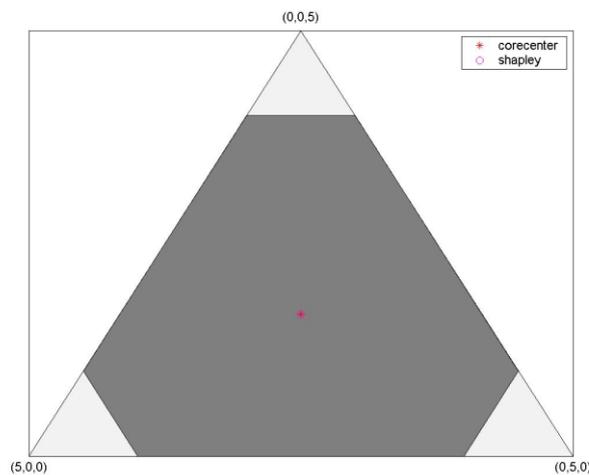


Figura 10: Representación del *Core* por Matlab

El centro del conjunto Core que nos da Matlab es (1.6667 1.6667 1.6667), que saldría de dividir a partes iguales el beneficio entre comunidades, este valor coincide con el Valor de Shapley. Los vértices de la región que son los puntos de corte entre vectores de pago:

$$V_1 = (0,4,1)$$

$$V_2 = (1,0,4)$$

$$V_3 = (4,,1)$$

$$V_4 = (1,4,0)$$

$$V_5 = (4,1,0)$$

El cálculo del Valor de Shapley se ha calculado a partir de la siguiente función en Matlab:

### 3. Programa Shapley Value

```
function S=shap1(n,v);
```

```

% This program determines the shapley value. Shapley value is one of
% important solution concept for Transferable utility cooperative game cooperative game.
m=2^n-1;
% The 2^n-1 coalition constrains of the transferable utility game.
A=coalition(n);
ss=ones(1,n);
A=[A' ss'];
for k=1:n
k1=zeros(1,m);
k2=k1;
A2=0*A;
for i=1:m
if A(i,k)>0
k1(i)=v(i);
A2(i,:)=A(i,:);
else
end
end
A3=A2;
A3(:,k)=0;
for i=1:m
for j=1:m
if A3(i,1:n)==A(j,1:n);
k2(i)=v(j);
else
end
end
end
k3=k1-k2;
k4=sum(A2. ');
r=zeros(1,m);
mm=factorial(n-1);
for i=1:m
if k4(i)>0
r(i)=mm./nchoosek(n-1,k4(i)-1);
else
end
end

```

```

end
S(k)=sum(k3.*r)/sum(r);
End

```

A continuación, un ejemplo de los comandos que llamarían a ambas funciones:

#### 4. *Command window*

```

clear;
clc
% n is the number of players
n=5;
m=2^n-1;
A=coalition(n);
ss=ones(1,n);
A=[A' ss'];
% v1=round(10*rand(n,1));
v1=[1 2 3 4 5]';
r=round(2*rand(m,1));
%Creating an pure additive game and adding some noise.
v=(A*v1)+r;
% determining shapley value
S=shap1(n,v)

```

Como conclusión tenemos que el costo asociado a los jugadores debe estar dentro de este polígono. Observar que el valor de Shapley está en el baricentro del triángulo y podría ser una solución. Sin embargo puede no ser la adecuada debido a que las distintas comunidades no sean simétricas o exista alguna característica que las diferencie sustancialmente.

## 5 CONCLUSIONES

---

En este trabajo se han abordado dos diferentes casos a los que se le han aplicado la Teoría de Juegos. En el primer caso, se llega a la conclusión de que tanto los agricultores, como las empresas municipales que tratan las aguas rurales, han de ceñirse a una estrategia de manera que les sea más fácil mejorar su economía. Esta estrategia se rige mediante un juego no cooperativo y puede ahorrar tanto a órganos públicos como privados grandes cantidades de dinero. Por otra parte, para proteger al agua rural de la contaminación, además de mirar por los intereses de cada jugador, hay que tener en cuenta medidas y políticas que sean aplicables de manera directa a la contaminación a causa de la agricultura. Como se ha explicado, la imagen pública y la transparencia de información entre otros, podría afectar a tomar decisiones en el juego no cooperativo para definir una estrategia.

En el juego cooperativo analizado, que es fruto de infinitos conflictos en todo el mundo, de manera mas cercana en Andalucía, nos lleva a la conclusión de que, cooperar ante problemas como el tratamiento de aguas residuales, tras un análisis económico previo, puede dar un resultado positivo que serviría de solución en muchas regiones de nuestro país.

# REFERENCIAS

---

## Referencias Literarias

- [1] AGUILERA F. (1997) Economía del agua: reflexiones ante un nuevo contexto. En López Gálvez J. y Naredo J. M. (eds.), La gestión del agua de riego, 235-259. Fundación Argentaria-Visor, Madrid.
- [2] Gibbons, Robert, 1997. Un primer curso de teoría de juegos. Barcelona. Bosch.
- [3] de la Orden Gómez, J.A. (2006). El análisis económico en la Directiva Marco del Agua: Incidencias e implicaciones para España, Instituto Geológico y minero de España.
- [4] Shapiro, Carl, 1989. "The theory of business strategy". RANO Journal of Economics. v. 20 (1). pp. 123-136
- [5] Robert Axelrod, The evolution of cooperation (1984).
- [6] Richard Dawkins, El gen egoísta, (Salvat, 1985).
- [7] J. Hofbauer and K. Sigmund, Evolutionary games and population dynamics, (Cambridge, 1998).
- [8] Kenneth Prestwich, Game theory,
- [9] John Maynard Smith, Evolution and the theory of games, (Cambridge, 1982).
- [10] John Maynard Smith, The theory of games and the evolution of animal conflicts, J. Theor. Biol. 47, 209-221 (1974).
- [11] B. Sinervo and C. M. Lively, The rock-scissors-paper game and the evolution of alternative male strategies, Nature 380, 240 (1996).
- [12] John Von Neumann and Oskar Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, (Princeton University Press, 1944).
- [13] Jørgen W. Weibull, Evolutionary game theory, (MIT Press, 1995).

## Referencias Electrónicas

<https://www.iagua.es/blogs/eduardo-echeverria/equilibrio-nash-gestion-agua-espana>

<https://wateractiondecade.org/2017/12/09/water-pollution-from-and-to-agriculture/>

<https://www.conserve-energy-future.com/causes-and-effects-of-agricultural-pollution.php>

<http://economicsandsciencegroup.org/briefings/agricultural-pollution>

<https://www.epa.vic.gov.au/your-environment/water/protecting-victorias-waters/point-and-nonpoint-sources-of-water-pollution>

<https://wateractiondecade.org/2017/12/09/water-pollution-from-and-to-agriculture/>

<https://www.iagua.es/blogs/eduardo-echeverria/equilibrio-nash-gestion-agua-espana>

<https://www.conserve-energy-future.com/causes-and-effects-of-agricultural-pollution.php>

<http://economicsandsciencegroup.org/briefings/agricultural-pollution>

[https://cadenaser.com/emisora/2018/10/23/radio\\_ubeda/1540318868\\_071643.html](https://cadenaser.com/emisora/2018/10/23/radio_ubeda/1540318868_071643.html)

<https://www.somajasa.es/index.php?opcionSelec=195>

[http://www.agenda21jaen.com/export/sites/default/galerias/galeriaDescargas/agenda21/Aplicaciones/documentacion/Diagnosis-provincial/16.\\_Ciclo\\_integral\\_agua.pdf](http://www.agenda21jaen.com/export/sites/default/galerias/galeriaDescargas/agenda21/Aplicaciones/documentacion/Diagnosis-provincial/16._Ciclo_integral_agua.pdf)

[http://www.holycross.edu/departments/biology/kprestwi/behavior/ESS/ESS\\_index\\_fmset.html](http://www.holycross.edu/departments/biology/kprestwi/behavior/ESS/ESS_index_fmset.html)

# ÍNDICE DE DEFINICIONES

---

Definición 1: .....	34
Definición 2: .....	34
Definición 3: .....	34
Definición 4: .....	35
Definición 5: .....	36
Definición 6: .....	36
Definición 7: .....	36
Definición 8: .....	38

# ÍNDICE DE TEOREMAS

---

<i>Teorema 1:</i> .....	37
<i>Teorema 2:</i> .....	38
<i>Teorema 3:</i> .....	38

# ÍNDICE DE AXIOMAS

---

<i>Axioma 1:</i> .....	37
<i>Axioma 2:</i> .....	37
<i>Axioma 3:</i> .....	38
<i>Axioma 4:</i> .....	38





