LA TEORÍA DEL PUNTO FIJO EN ESPACIOS FUNCIONALES MODULARES.

Sedki Samadi

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Facultad de Matemáticas
Departamento de Análisis Matemático

LA TEORÍA DEL PUNTO FIJO EN ESPACIOS FUNCIONALES MODULARES

Memoria presentada por
Sedki Samadi
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

Sedki Samadi.

Vº Bº del Director

Fdo. Dr. D. Tomas Domínguez Benavides
Catedrático del Departamento de Análisis
Matemático de la Universidad de Sevilla.

Vº Bº del Codirector

Fdo. Dr. D. Mohamed Amine Khamsi
Profesor del Departamento de Matemáticas
de la Universidad de Texas en El Paso.

A mis padres, hermanos y al pequeño Idriss

Agradecimientos

En primer lugar quiero expresar mi agradecimiento a mi director el Catedrático Dr. D. Tomás Domínguez Benavides y mi codirector el Profesor Dr. D. Mohamed Amine Khamsi por el apoyo que me han dado para mejorar mis conocimientos científicos, así como por haberme brindado la oportunidad de realizar mi trabajo de investigación bajo la dirección de ambos.

Mi profunda gratitud a mis queridos padres, hermanos y hermanas que han servido de apoyo en todo momento y sin cuyo empuje, sacrificio, confianza y compresión no hubiese realizado esta memoria.

Mis reconocimientos también para los profesores Dr. D. José Carmona Álvarez y Dr. D. Genaro López Acedo por sus interesantes consejos y sus valiosísimos comentarios.

También quiero agradecer a todos los miembros del departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Sevilla y a los miembros del departamento de Matemáticas de la Universidad de Texas en El Paso la grata acogida manifiesta, consiguiendo que en ningún momento me siéntese extraño entre ellos. De igual manera, hago extensivo este agradecimiento a los profesores que hayan aceptado formar el jurado de esta tesis doctoral.

Por último mis agradecimientos a mis amigos y a todas las personas que han colaborado de cerca o de lejos para que este trabajo salga a la luz.

Índice General

Introducción

Los primeros intentos en generalizar los espacios funcionales clásicos de Lebesgue tipo L^p tuvieron lugar alrededor del año 1930. Birnbaum y Orlicz [BiO] consideraron el espacio funcional definido por:

$$L^\varphi = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ \exists \lambda > 0\ :\ \int_{\mathbb{R}} \varphi\big(\lambda |f(x)|\big)\, dx < +\infty \right\},$$

donde $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ es una función convexa, creciente al infinito, i.e. una función cuyo comportamiento es similar al comportamiento de la función clásica: $\varphi(t) = t^p$. Más tarde se prescindió de la convexidad de la función de Orlicz φ. La posibilidad de dotar los espacios L^φ de una estructura lineal métrica y sus diversas aplicaciones para la resolución de las ecuaciones diferenciales e integrales eran las razones fundamentales para el desarrollo de una nueva teoría en estos espacios que se ha dividido en dos direcciones:

$\diamond$ La primera dirección es la teoría de los espacios funcionales de Banach iniciada en 1955 por Luxemburg [Lu] y desarrollada en una serie de artículos de Luxemburg y Zaanen [LuZ]. La idea principal de esta teoría consiste en considerar el espacio funcional L de todas las funciones $f : X \to \mathbb{R}$, $f \in M(X, \mathbb{R})$, tales que $||f|| < +\infty$, donde (X, Σ, μ) es un espacio medible, $M(X, S)$ denota el espacio de las funciones fuertemente medibles actuando de X hacia un espacio de Banach S y $||.||$ es una función norma que cumple:

$$||f|| \leq ||g|| \quad \text{cuando } |f(x)| \leq |g(x)|\ \mu\text{-a.e.}$$

$\diamond$ La segunda dirección es la teoría de los espacios modulares, inspirada por la exitosa teoría de los espacios de Orlicz. Consiste en reemplazar la forma integral del funcional no-lineal que controla el crecimiento de los elementos del espacio de Orlicz por un funcional abstracto que verifica ciertas condiciones. El primero que inició la teoría de los espacios modulares en relación con la teoría del orden fue Nakano [Na] en 1950. Luego se redefinió y se generalizó por Musielak y Orlicz [MuO] en 1959. En lo que sigue presentamos algunas propiedades básicas de esta teoría.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial en $\mathbb{R}$ (se puede considerar el conjunto de los números complejos como el conjunto escalar para el espacio vectorial). Un funcional $\rho : \mathcal{X} \to [0, +\infty]$ se llama un pseudomodular, si para cualquier $f, g \in \mathcal{X}$, tenemos:

(1) $\rho(0) = 0$;

(2) $\rho(\alpha f) = \rho(f)$ cuando $|\alpha| = 1$,

(3) $\rho(\alpha f + \beta g) \leq \rho(f) + \rho(g)$ para cualquier $\alpha,\ \beta \geq 0$ cumpliendo $\alpha + \beta = 1$.

Si reemplazamos (3) por

(3') $\rho(\alpha f + \beta g) \leq \alpha\rho(f) + \beta\rho(g)$ cuando $\alpha,\ \beta \geq 0$ y $\alpha + \beta = 1$,

entonces el pseudomodular ρ se llama convexo. Si a vez de (1) tenemos

(1') $\rho(0) = 0$; y $\rho(\lambda f) = 0$ para todo $\lambda > 0$ implica $f = 0$,

entonces ρ se llama un semimodular. Mas aún, si tenemos

(1") $\rho(f) = 0$ si y sólo si $f = 0$, entonces ρ se llama un modular. Si ρ es un pseudomodular en $\mathcal{X}$ entonces el conjunto definido por

$$\mathcal{X}_\rho = \{h \in \mathcal{X} \; ; \lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda h) = 0\}$$

se llama un espacio modular. $\mathcal{X}_\rho$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{X}$. Para un pseudomodular ρ en $\mathcal{X}$ definimos una F-seminorma por la siguiente fórmula:

$$||f||_\rho = \inf \left\{ t > 0 \; ; \rho\left(\frac{f}{t}\right) \leq t \right\}.$$

Si ρ es un pseudomodular convexo, entonces el funcional dado por:

$$||f||_\rho = \inf \left\{ t > 0 \; ; \rho\left(\frac{f}{t}\right) \leq 1 \right\}$$

es una seminorma. Obsérvese que las dos formulas anteriores definen respectivamente una F-norma y una norma, si ρ es un modular. Se puede comprobar fácilmente (ver [Mu]) que

$$||f_n - f||_\rho \to 0 \text{ es equivalente a } \rho\big(t(f_n - f)\big) \to 0 \text{ para todo } t > 0.$$

También sabemos que $\rho(f) \leq ||f||_\rho$ cuando $||f||_\rho < 1$.

Se dice que la sucesión (f_n) converge modularmente (brevemente: ρ-converge) a $f \in \mathcal{X}_\rho$ si existe $\lambda > 0$ tal que $\rho\big(\lambda(f_n - f)\big) \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

Se dice que un modular ρ es:

(a) Continuo a la derecha, si para todo $f \in \mathcal{X}_\rho$, tenemos

$$\lim_{t \to 1+} \rho(tf) = \rho(f)$$

(b) Continuo a la izquierda, si para todo $f \in \mathcal{X}_\rho$, tenemos

$$\lim_{t \to 1-} \rho(tf) = \rho(f)$$

(c) Continuo, si es continuo a la vez a la derecha y a la izquierda.

De esta manera, un espacio de Orlicz define un espacio modular, donde $\mathcal{X} = M(X, \mathbb{R})$ y el modular ρ es dado por:

$$\rho(f) = \int_{\mathbb{R}} \varphi\Big(|f(x)|\Big) dx.$$

Basándose sobre la teoría de los espacios modulares Musielak y Orlicz [MuO] desarrollaron en 1959 la teoría de los espacios de Musielak-Orlicz, i.e. los espacios modulares inducidos por modulares de la siguiente forma:

$$\rho(f) = \int_{\mathbb{R}} \varphi\Big(x, |f(x)|\Big) dx.$$

donde $\varphi : X \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es una función, continua y creciente al infinito con respecto a la segunda variable, y es medible con respecto a la primera variable. Tales espacios han sido estudiados hace más de cuarenta años y se conocen muchas aplicaciones de ellos en distintas ramas del Análisis.

Posteriormente en 1988, Kozlowski generalizó los espacios modulares a los espacios funcionales modulares (un estudio detallado de estos espacios se encuentra en su libro [Ko1]). Tomando como modelo los espacios funcionales modulares Khamsi, Kozlowski y Reich [KhKR] desarrollaron en 1990 la teoría del punto fijo para las aplicaciones ρ-contractivas y las aplicaciones ρ-no-expansivas. Este trabajo fue continuado en [Kh]. Nosotros en esta memoria extendemos este estudio a aplicaciones más generales que las ρ-no-expansivas, concretamente, las aplicaciones ρ-asintóticamente regulares, las aplicaciones ρ-k-uniformemente Lipschitzianas y las aplicaciones ρ-asintóticamente no-expansivas. Por ello dividimos la presente memoria en cuatro capítulos:

- En el primer capítulo empezamos la primera sección recordando las definiciones y los resultados básicos de la teoría de los espacios modulares y los espacios funcionales modulares. En la segunda sección definimos la Δ_2-tipo condición, damos ejemplos de funcionales modulares que la cumplen y obtenemos consecuencias de esta definición. En la tercera sección damos los lemas comunes y fundamentales para los siguientes capítulos.

- En el segundo capítulo estudiaremos las aplicaciones ρ-asintóticamente regulares en los espacios funcionales modulares. En la primera sección recordamos algunos teoremas del punto fijo para las aplicaciones asintóticamente regulares en los espacios métricos y los espacios de Banach.

  Sea (M, d) un espacio métrico, se dice que una aplicación $T : M \to M$ es asintóticamente regular si tenemos para cualquier $x \in M$:

$$\lim_{n \to +\infty} d(T^{n+1}x, T^n x) = 0.$$

  Fueron Browder y Petryshyn [BrP] que definieron por la primera vez este concepto. Sea C un subconjunto de un espacio de Banach $(X, ||.||)$ y $T : C \to C$ una aplicación no-expansiva. Entonces la aplicación $T_\lambda = \lambda Id + (1 - \lambda)T$ definida de C en C es no-expansiva y asintóticamente regular (ver [GoK2]). Además el conjunto de sus puntos fijos coincide con el conjunto de los puntos fijos de T. Por tanto, el problema de la existencia de los puntos fijos para las aplicaciones no-expansivas en los espacios de Banach esta relacionado con el problema de la existencia de los puntos fijos para las aplicaciones asintóticamente regulares. En 1987, M. Kruppel [Kru] probó el siguiente teorema:

  Teorema 0.0.1. *Sea $(X, ||.||)$ un espacio de Banach uniformemente convexo, C un subconjunto cerrado, acotado y convexo de X y $T : C \to C$ una aplicación asintóticamente regular tal que $s(T) \leq 1$. Entonces, T tiene un punto fijo.*

$\Big($Aquí usamos la notación:

$$|T| = \sup\left\{\frac{||Tx - Ty||}{||x - y||} : x \neq y,\ x, y \in C\right\} \text{ y } s(T) = \liminf_{n\to+\infty} |T^n|\Big).$$

Desde entonces, se ha abierto una nueva linea de investigación en la teoría del punto fijo para las aplicaciones asintóticamente regulares que consiste en buscar la mejor cota superior del coeficiente $s(T)$ para este tipo de aplicaciones. En 1993, J. Gornicki [Gorl] generalizó el teorema anterior al caso métrico, probando el siguiente teorema:

Teorema 0.0.2. *Sea (M, d) un espacio métrico completo y $T : M \to M$ una aplicación asintóticamente regular tal que $s(T) < \kappa(M)$ y la sucesión $\{T^n x\}$ es acotada para un cierto $x \in M$. Entonces, T tiene un punto fijo.*

$\Big($Aquí $\kappa(M)$ es el coeficiente de Lifshitz definido por:
$\kappa(M) = \sup\big\{b > 0 :$ existe $a > 1$ tal que para todo $x, y \in M$ y $r > 0$ cumpliendo $d(x - y) > r$, existe $z \in M$ tal que $B(x, br) \cap B(y, ar) \subset B(z, r)\big\}$ y $B(x, r)$ es la bola cerrada de centro x y de radio $r\Big)$.
Ultimamente en 1995, T.Dominguez Benavides y H.K. Xu [DX] probaron el siguiente teorema:

Teorema 0.0.3. *Sea X un espacio de Banach y τ una topología arbitraria en X. Sea C un subconjunto acotado, convexo, τ-secuencialmente compacto y $T : C \to C$ una aplicación asintóticamente regular tal que $s(T) < \kappa_\tau(C)$. Entonces, T tiene un punto fijo.*

$\Big($El coeficiente $\kappa_\tau(C)$ de un subconjunto C no vacío, acotado y convexo del espacio de Banach X es definido por:

$\kappa_\tau(C) = \sup\big\{b > 0$: existe $a > 0$ tal que para todo $x, y \in M$ y $r > 0$ cumpliendo $||x-y|| \geq r$ y para cualquier sucesión $\{\xi_n\}_n$ τ-convergente de elementos de M que cumple $\limsup_{n\to+\infty} ||\xi_n - x|| \leq ar$ y $\limsup_{n\to+\infty} ||\xi_n - y|| \leq br$, existe un cierto $z \in M$ tal que $\liminf_{n\to+\infty} ||\xi_n - z|| \leq r\big\}\Big)$. Como $1 \leq \kappa(C) \leq \kappa_\tau(C)$ el coeficiente $\kappa_\tau(C)$ ofrece una cota superior del coeficiente $s(T)$ mejor que el coeficiente de Lifshitz $\kappa(C)$. Además definiendo la τ-característica del espacio de Banach X por: $\kappa_\tau(X) = \inf\big\{\kappa_\tau(C) : C \subset X$ no vacío, acotado y convexo$\big\}$ es fácil de calcular $\kappa_\tau(X)$ cuando el espacio de Banach X es el espacio l^p $(1 < p < +\infty)$ y la topología τ es la topología débil aunque el valor del coeficiente de Lifshitz $\kappa(l^p)$ $(1 < p < +\infty)$ es todavía desconocido. En la segunda sección probaremos dos teoremas del punto fijo para las aplicaciones asintóticamente regulares en los espacios funcionales modulares. Por ello definimos los siguientes conceptos en el caso modular. Sea L_ρ un espacio funcional modular, C un subconjunto de L_ρ y $T : C \to C$ una aplicación. Se dice que T es ρ-asintóticamente regular si

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(T^{n+1}f - T^n f) = 0 \qquad \forall f \in C.$$

Denotamos

$$s(T) = \liminf_{n\to+\infty} |T^n| \ \text{ donde } \ |T| = \sup\left\{\frac{\rho(Tf - Tg)}{\rho(f-g)};\ f, g \in C,\ f \neq g\right\}.$$

Probaremos el siguiente teorema:

Teorema 0.0.4. *Sea ρ un funcional modular cumpliendo la Δ_2-tipo condición, C un subconjunto ρ-acotado, ρ-a.e. secuencialmente compacto de L_ρ. Sea $T : C \to C$ una aplicación ρ-asintóticamente regular tal que $s(T) < 2$. Entonces, T tiene un punto fijo.*

Comprobaremos con un ejemplo que 2 es la mejor cota superior del coeficiente $s(T)$ en este teorema. Luego, probaremos el siguiente teorema:

Teorema 0.0.5. *Sea ρ un funcional modular cumpliendo la Δ_2-tipo condición, C un subconjunto ρ-acotado, ρ-a.e. secuencialmente compacto de L_ρ. Sea $T : C \to C$ una aplicación ρ-asintóticamente regular tal que $s(T) < K_{\rho-a.e.}(C)$. Entonces, T tiene un punto fijo.*

$\Big($Aquí $K_{\rho-a.e.}(C) = \sup\big\{b > 0$: existe $a > 1$ tal que para todo $f, g \in C$ y $r > 0$ cumpliendo $\rho(f-g) \geq r$ y para cualquier $\{h_n\}_n \subset C, h_n \overset{\rho-a.e.}{\to} h \in C$ cumpliendo $\limsup_{n\to+\infty} \rho(h_n - f) \leq ar$ *y* $\limsup_{n\to+\infty} \rho(h_n - g) \leq br$ tenemos $\liminf_{n\to+\infty} \rho(h_n - h) \leq r\big\}\Big)$.

Nótese que la constante 2 en el teorema (0.0.4) es independiente de C y que al contrario el coeficiente $K_{\rho-a.e.}(C)$ en el teorema (0.0.5) depende de C. Sea L_ρ un espacio funcional modular y C un subconjunto ρ-acotado y ρ-a.e. secuencialmente compacto de L_ρ. Definimos los siguientes coeficientes: $h_{\rho-a.e.}(C) = \sup\big\{b > 0$: para todo $f, g \in C$ y $r > 0$ cumpliendo $\rho(f-g) \geq r$ y para toda sucesión $\{h_n\}_n \subset C, h_n \overset{\rho-a.e.}{\to} f \in C$ que cumpliendo $\limsup_{n\to+\infty} \rho(h_n - g) \leq br$ tenemos $\liminf_{n\to+\infty} \rho(h_n - f) \leq r\big\}$.

$h_{\rho-a.e.}(L_\rho) = \inf\big\{h_{\rho-a.e.}(C)$: C ρ-acotado y ρ-a.e. secuencialmente compacto$\big\}$.

$K_{\rho-a.e.}(L_\rho) = \inf\big\{K_{\rho-a.e.}(C)$: C es ρ-acotado y ρ-a.e. secuencialmente compacto$\big\}$.

$r_{\rho-a.e.}(c) = \inf\big\{\liminf_{n\to+\infty} \rho(f + f_n) - 1 :\ \forall f \in L_\rho,$ tal que $c \leq \rho(f) < +\infty$, $\forall \{f_n\}_n \subset L_\rho$ tal que $f_n \overset{\rho-a.e.}{\to} 0$, $\liminf_{n\to+\infty} \rho(f_n) \geq 1$ y existe $k > 0$ cumpliendo $\sup_n \rho(kf_n) < +\infty\big\}$ $\forall c > 0$.

En la tercera sección probaremos en la proposición (2.3.1) que $2 \leq h_{\rho-a.e.}(C)$, en la proposición (2.3.2) que $h_{\rho-a.e.}(C) \leq K_{\rho-a.e.}(C)$ y en la proposición (2.3.3) que

(1) $r_{\rho-a.e.}(c) = c \quad \forall c > 0$

(2) $h_{\rho-a.e.}(L_\rho) = 2$.

- En el tercer capítulo estudiaremos la teoría del punto fijo para las aplicaciones k-uniformemente Lipschitzianas en los espacios funcionales modulares. Por ello empezamos recordando los resultados más destacados de esta teoría en los espacios de Banach y los espacios métricos.

  Sea (M, d) un espacio métrico y C un subconjunto de M. Se dice que una aplicación $T : C \to C$ es k-uniformemente Lipschitziana si existe $k > 0$ tal que para todo $x, y \in C$ y $n \in \mathbb{N}^*$ tenemos

$$d(T^n x, T^n y) \leq k d(x, y).$$

En 1973, Goebel y Kirk [GoK3] estudiaron estas aplicaciones en los espacios de Banach uniformemente convexos probando el siguiente teorema.

Teorema 0.0.6. *Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo con el módulo de convexidad $\delta_X(\cdot)$ y C un subconjunto de X convexo, cerrado y acotado. Si $T : C \to C$ es una aplicación k-uniformemente Lipschitziana con constante k menor que la única solución de la ecuación:*

$$h\left(1 - \delta_X\left(\frac{1}{h}\right)\right) = 1.$$

Entonces, T tiene un punto fijo.

Se sabe (ver [GoK3]) que h es igual a: $\frac{\sqrt{5}}{2}$ cuando el espacio de Banach X es un espacio de Hilbert H. En 1975, Lifshitz [Lif] probó en el caso de un espacio métrico el siguiente teorema:

Teorema 0.0.7. *Sea (M,d) un espacio métrico, acotado y completo. Sea $T : M \to M$ una aplicación k-uniformemente Lipschitziana con constante $k < \kappa(M)$.*

$\Big(\kappa(M)$ es la característica de Lifschitz definida por: $\kappa(M) = \sup\{b > 0 : \exists a > 1$ tal que $\forall x, y \in M, \forall r > 0, \rho(x,y) > r, \exists z \in M$ con $B(x, br) \cap B(y, ar) \subset B(z,r)\}\Big)$.

En 1984, Casini y Maluta [CaM] probaron el siguiente teorema:

Teorema 0.0.8. *Sea X un espacio de Banach que tiene la estructura normal uniforme, C un subconjunto acotado, convexo de X y $T : C \to C$ una aplicación k-uniformemente Lipschitziana con $k < \sqrt{N(X)}$. Entonces, T tiene un punto fijo.*

$\Big($El coeficiente de estructura normal $N(X)$ es definido por: $N(X) = \inf\left\{\dfrac{diam(A)}{r(A)} : A \subset X \text{ convexo, cerrado y acotado con } diam(A) > 0\right\}$

con $\quad r(A) = \inf\{\sup\{||x-y|| : x \in A\} : y \in A\}$

y $\quad diam(A) = \sup\{\sup\{||x-y|| : x \in A\} : y \in A\}\Big)$.

En la segunda sección definimos el concepto de una aplicación ρ-k-uniformemente Lipschitziana en el caso modular como sigue:

Sea C un subconjunto ρ-acotado de L_ρ. Se dice que una aplicación $T : C \to C$ es ρ-k-uniformemente Lipschitziana si

$$\rho(T^n f - T^n g) \leq k\rho(f-g) \qquad \forall f, g \in C \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Probaremos el siguiente teorema del punto fijo para las aplicaciones ρ-k-uniformemente Lipschitzianas en los espacios funcionales modulares:

Teorema 0.0.9. *Sea ρ un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición y B un subconjunto admisible, ρ-a.e. secuencialmente compacto y ρ-acotado de L_ρ.*

Supongamos que $\tilde{N}(L_\rho) < 1$ y sea $T : B \to B$ una aplicación ρ-k-uniformemente Lipschitziana que cumple $k < (\tilde{N}(L_\rho))^{-1/2}$. Entonces, T tiene un punto fijo.

$\Big($El coeficiente $\tilde{\mathrm{N}}(L_\rho)$ es definido por:
$\tilde{\mathrm{N}}(L_\rho) = \sup\left\{\dfrac{R(B)}{\delta(B)}\right.$, B admisible, ρ-acotado y ρ-a.e. secuencialmente compacto$\Big\}$ con $R(B) = \inf\{r(f,B),\ \ f \in B\}$, $\delta(B) = \sup\{r(f,B),\ \ f \in B\}$ y $r(f,B) = \sup\{\rho(f-g),\ \ g \in B\}\Big)$.

En la tercera sección probaremos el siguiente teorema del punto fijo en los espacios funcionales modulares para una familia conmutativa de aplicaciones:

Teorema 0.0.10. *Sea ρ un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición, C un subconjunto ρ-acotado, ρ-a.e. secuencialmente compacto de L_ρ y $\Sigma = \{T_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia conmutativa de aplicaciones que van de C a si mismo. Supongamos que*

$$\sup\left\{|\Pi_{\alpha\in A} T_\alpha^{\phi(\alpha)}| \ : \ \phi \in A^{\mathbb{N}}\right\} < \kappa_\rho(C).$$

Entonces, existe un punto fijo común de la familia Σ.

$\Big($Los coeficiente $|T|$ y $\kappa_\rho(C)$ son definidos respectivamente por:
$|T| = \sup\left\{\dfrac{\rho(Tf - Tg)}{\rho(f-g)} \ : \ f,g \in C\right\}$ y $\kappa_\rho(C) = \sup\Big\{b > 0 :$ existe $a > 1$ tal que para todo $f,g \in C$ y para todo $r > 0$ cumpliendo $\rho(f-g) > r$, existe $h \in C$ tal que $B(f,br) \cap B(g,ar) \subset B(h,r)\Big\}$ donde $B(f,r) = \{g \in L_\rho : \rho(g-f) \le r\}\Big)$.

Cuando la familia Σ es reducida a un elemento, obtenemos el siguiente teorema del punto fijo para las aplicaciones ρ-k-uniformemente Lipschitzianas:

Teorema 0.0.11. *Sea ρ un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición. Sea C un subconjunto ρ-acotado, ρ-a.e. secuencialmente compacto de L_ρ y $T : C \to C$ una aplicación ρ-k-uniformemente Lipschitziana con $k < \kappa_\rho(C)$. Entonces, T tiene un punto fijo.*

- En el cuarto capítulo empezamos la primera sección recordando algunos de los teoremas principales de la teoría del punto fijo para las aplicaciones no-expansivas, asintóticamente no-expansivas y del tipo asintóticamente no-expansivas en los espacios de Banach.

  Sea X un espacio de Banach, C un subconjunto cerrado, acotado, convexo de X y $T : C \to C$ una aplicación.

  (1) Se dice que T es no-expansiva si

  $$||Tx - Ty|| \leq ||x - y|| \quad \forall x, y \in C.$$

  (2) Se dice que T es asintóticamente no-expansiva si existe una sucesión de numeros reales $\{k_n\}_n$ con $\lim_{n\to+\infty} k_n = 1$ tal que

  $$||T^n x - T^n y|| \leq k_n ||x - y|| \quad \forall x, y \in C.$$

  (3) Se dice que T es del tipo asintóticamente no-expansiva si

  $$\limsup_{n\to+\infty} (\sup\{||T^n x - T^n y|| - ||x - y|| \ : \ y \in C\}) \leq 0 \quad \forall x \in C.$$

  En 1965, Browder [Br2] probó el siguiente teorema:

  Teorema 0.0.12. *Sea H un espacio de Hilbert, C un subconjunto cerrado, acotado convexo de H y $T : C \to C$ una aplicación no-expansiva. Entonces, T tiene un punto fijo.*

En este mismo año Browder [Br3], Göhde [Goh] y Kirk [Ki1] probaron que este resultado podia ser mejorado suponiendo una condición más débil, como la de ser X un espacio de Banach uniformemente convexo o un espacio de Banach reflexivo con estructura normal. Siete años después, en 1972, Goebel y Kirk [GoK1], iniciaron la teoría del punto fijo para las aplicaciones asintóticamente no-expansivas mostrando el siguiente teorema:

Teorema 0.0.13. *Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo, C un subconjunto cerrado, acotado, convexo de X y $T : C \to C$ una aplicación asintóticamente no-expansiva. Entonces, T tiene un punto fijo.*

Dos años después, en 1974, Kirk [Ki2] generalizó el resultado anterior probando el siguiente teorema:

Teorema 0.0.14. *Sea X un espacio de Banach con la característica de convexidad inferior estrictamente a 1 i.e. $\varepsilon_0(X) < 1$. Sea C un subconjunto cerrado, acotado y convexo de X y $T : C \to C$ una aplicación del tipo asintóticamente no-expansiva con T^N continua para un cierto entero estrictamente positivo N. Entonces, T tiene un punto fijo.*

Posteriormente, en 1991, H.K. Xu [Xu2] probó el siguiente teorema:

Teorema 0.0.15. *Sea X un espacio de Banach casi uniformemente convexo, C un subconjunto cerrado, acotado, convexo de X y $T : C \to C$ una aplicación del tipo asintóticamente no-expansiva con T^N continua para un cierto entero N. Entonces, T tiene un punto fijo.*

En la segunda sección construiremos una topología τ por la cual la ρ-a.e. compacidad secuencial es equivalente a la compacidad usual de τ. En la

tercera sección definimos el concepto de una aplicación ρ-asintóticamente no-expansiva en el caso modular como sigue:
Sea C un subconjunto ρ-acotado de L_ρ. Se dice que $T : C \to C$ es una aplicación ρ-asintóticamente no-expansiva si existe una sucesión de numeros reales $\{k_n\}_n$ con $\lim_{n\to+\infty} k_n = 1$ tal que

$$\rho(T^n f - T^n g) \leq k_n \rho(f - g) \quad \forall f, g \in C.$$

Demonstraremos algunos lemas técnicos que se usarán para probar los resultados principales. En la ultima sección probaremos los dos teoremas principales del presente capítulo para las aplicaciones ρ-asintóticamente no-expansivas en los espacios funcionales modulares:

Teorema 0.0.16. *Sea ρ un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición y que es σ-finito. Sea C un subconjunto ρ-acotado, ρ-a.e. secuencialmente compacto de L_ρ. Sea $T : C \to C$ una aplicación ρ-asintóticamente no-expansiva y H un subconjunto convexo, ρ-a.e. secuencialmente cerrado de C que cumple las siguientes propiedades:*

(i) si $f \in H$ entonces $\Omega_{\rho-a.e}(f) \subset H$;

(ii) para todo $f \in H$, toda subsucesión $\{T^{n_i}(f)\}_i$ de $\{T^n(f)\}_n$ tiene una subsucesión que es ρ-convergente.

Entonces, T tiene un punto fijo en H.

Teorema 0.0.17. *Sea ρ un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición y que es σ-finito. Sea C un subconjunto ρ-acotado y ρ-a.e. secuencialmente compacto de L_ρ. Sea $T : C \to C$ una aplicación ρ-asintóticamente no-expansiva. Entonces, T tiene un punto fijo.*

Cuando $L_\rho = L_1(\Omega, \mu)$ para una medida σ-finita μ, obtenemos el siguiente corolario que extiende un resultado de Lennard [Le] para las aplicaciones no-expansivas:

Corolario 0.0.18. *Sea C un subconjunto acotado convexo y compacto para la topología de la convergencia en medida de $L_1(\Omega, \mu)$ y $T : C \to C$ una aplicación asintóticamente no-expansiva. Entonces, T tiene un punto fijo.*

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Definiciones y resultados básicos de la teoría de los espacios funcionales modulares

Empezamos recordando algunos conceptos básicos de la teoría de los espacios modulares formulada por Kozlowski [Ko1].

Definición 1.1.1. *Sea X un espacio vectorial. Se dice que un funcional $\rho : X \to [0, +\infty]$ es un modular si para todo x, y en X tenemos,*

(i) $\rho(x) = 0$ *si y sólo si* $x = 0$,

(ii) $\rho(\alpha\, x) = \rho(x)$ *para cualquier escalar real* α *que cumple* $|\alpha| = 1$,

(iii) $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ *si* $\alpha + \beta = 1$ *y* $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$.

Si (iii) es reemplazada por

(iii)' $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\rho(x) + \beta\rho(y)$ *si* $\alpha + \beta = 1$ *y* $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$,

decimos que ρ *es un modular convexo.*

Un modular ρ permite definir el siguiente espacio modular:

$$X_\rho = \{x \in X; \rho(\lambda x) \to 0 \text{ cuando } \lambda \to 0\}.$$

En general el modular ρ no es subaditivo i.e. no cumple la desigualdad triangular y por lo tanto no tiene que comportase como una norma ó una distancia, pero se puede asociar a este modular una F-norma. Recordamos que un funcional $||.|| : X \to [0, +\infty]$ es una F-norma si y sólo si cumple las siguientes propiedades:

(1) $||x|| = 0$ si y sólo si $x = 0$,

(2) $||\alpha x|| = ||x||$ cuando $|\alpha| = 1$,

(3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$,

(4) $||\alpha_n x_n - \alpha x|| \to 0$ si $\alpha_n \to \alpha$ y $||x_n - x|| \to 0$.

Teniendo una F-norma definida en X se puede definir una distancia de la siguiente manera:

$$d(x, y) = ||x - y||.$$

Así obtenemos un espacio lineal métrico (X, d) que se llama un F-espacio cuando la distancia d es completa.

Definición 1.1.2. *Al espacio modular X_ρ se puede asociar una F-norma definida por*

$$||x||_\rho = \inf\left\{\alpha > 0; \rho\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leq \alpha\right\}.$$

Cuando ρ es convexo la fórmula

$$||x|| = \inf\left\{\alpha > 0; \rho\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leq 1\right\}$$

define una norma que se llama la norma de Luxemburg.

Esta claro que $||x_n||_\rho \to 0$ si y sólo si $\rho(\beta x_n) \to 0$ para todo $\beta > 0$ (ver [Mu]). Se puede comprobar fácilmente que $\alpha \to \rho(\alpha x)$ es creciente para todo $x \in X$.

Como un ejemplo clásico se puede mencionar el modular de Orlicz definido para cualquier función real medible f por la siguiente formula:

$$\rho(f) = \rho_\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(|f(t)|)dm(t),$$

donde m es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y $\varphi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ es una función continua que cumple $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(t) \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$.

El espacio modular inducido por el modular de Orlicz ρ_φ se llama el espacio de Orlicz L^φ.

Sea Ω un conjunto no vacío y Σ una σ-algebra no trivial de subconjuntos de Ω. Sea $\mathcal{P}$ un δ-anillo de subconjuntos de Σ, tal que $E \cap A \in \mathcal{P}$ para todo $E \in \mathcal{P}$ y $A \in \Sigma$. Supongamos que existe una sucesión creciente de conjuntos $K_n \in \mathcal{P}$ tal que $\Omega = \bigcup K_n$ (en el caso particular de un espacio medible y σ-finito (Ω, Σ, μ), se puede considerar $\mathcal{P}$ como el δ-anillo de los subconjuntos de medida finita). Por $\mathcal{E}$ denotamos el espacio lineal de todas las funciones simples cuyos soportes pertenecen a $\mathcal{P}$. Por $\mathcal{M}$ denotamos el espacio de todas las funciones medibles de valores reales, i.e. todas las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que existe una sucesión $\{g_n\} \in \mathcal{E}$, $|g_n| \le |f|$ y $g_n(\omega) \to f(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$. Por 1_A denotamos la función característica del conjunto A.

Se dice que una función $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ es una medida σ-subaditiva si

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu(A) \le \mu(B)$ para todo $A, B \in \Sigma$ tal que $A \subset B$,

(iii) $\mu(\bigcup A_n) \le \sum \mu(A_n)$ para cualquier $A_n \in \Sigma$.

Sea μ una medida σ-subaditiva, se dice que μ es orden continuo si $\mu(E_n) \to 0$ para toda sucesión $\{E_n\}_n \subset \Sigma$ tal que $E_n \downarrow \emptyset$.

Definición 1.1.3. *Un funcional $\rho : \mathcal{E} \times \Sigma \to [0, +\infty]$ se llama un funcional modular si*

(P_1) $\rho(0, E) = 0$ para todo $E \in \Sigma$,

(P_2) $\rho(f, E) \leq \rho(g, E)$ cuando $|f(\omega)| \leq |g(\omega)|$ para todo $\omega \in \Omega$, $f, g \in \mathcal{E}$ y $E \in \Sigma$,

(P_3) $\rho(f, .) : \Sigma \to [0, +\infty]$ es una medida σ-subaditiva para todo $f \in \mathcal{E}$,

(P_4) $\rho(\alpha, A) \to 0$ donde α decrece a 0 para todo $A \in \mathcal{P}$, donde $\rho(\alpha, A) = \rho(\alpha 1_A, A)$,

(P_5) si existe $\alpha > 0$ tal que $\rho(\alpha, A) = 0$, entonces $\rho(\beta, A) = 0$ para todo $\beta > 0$,

(P_6) para todo $\alpha > 0$ tenemos $\rho(\alpha, .)$ es orden continuo en $\mathcal{P}$, lo que quiere decir que $\rho(\alpha, A_n) \to 0$ si $\{A_n\} \in \mathcal{P}$ decrece a $\emptyset$.

La definición de ρ se puede extender a cualquier $f \in \mathcal{M}$ de la siguiente manera:

$$\rho(f, E) = \sup\{\rho(g, E); g \in \mathcal{E},\ |g(\omega)| \leq |f(\omega)| \quad \text{para todo} \quad \omega \in \Omega\}.$$

Esto nos permite definir $\rho(\alpha, E)$ no sólo para conjuntos E que están en $\mathcal{P}$ sino también para los de Σ. En lo que sigue denotaremos $\rho(f, \Omega)$ por $\rho(f)$.
Las siguientes propiedades del funcional modular ρ (ver [Ko1]) son consecuencias inmediatas de la definición (1.1.3). Sea $f, g \in \mathcal{M}$ y $E \in \Sigma$, entonces:

(a) $\rho(f, E) \leq \rho(g, E)$ si $|f(\omega)| \leq |g(\omega)|$ para todo $\omega \in E$;

(b) $\rho(f, .) : \Sigma \to [0, +\infty]$ es una medida σ-subaditiva para todo $f \in \mathcal{M}$;

(c) $\rho(f,E)=\rho(g,E)$ cuando $f(\omega)=g(\omega)$ para todo $\omega\in E$;

(d) $\rho(f,E)\leq\rho(g,E)$ si $|f(\omega)|\leq|g(\omega)|$ para todo $\omega\in\Omega$;

(e) $\rho(f,E)=0$ si $f(\omega)=0$ para todo $\omega\in E$;

(f) $\rho(f,E)=\rho\big(f,E\cap\operatorname{supp}(f)\big)$, donde $\operatorname{supp}(f)=\{\omega\in\Omega,\ \ f(\omega)\neq 0\}$;

(g) $\rho(f,E)=\rho(f1_E,E)$.

Definición 1.1.4. *Se dice que un conjunto E es ρ-nulo si y sólo si $\rho(\alpha,E)=0$ para un cierto $\alpha>0$. Se dice que una propiedad $p(\omega)$ se cumple ρ-a.e. si el conjunto $\{\omega\in\Omega;\ p(\omega)\ \ \text{no se cumple}\}$ es ρ-nulo. Por ejemplo decimos frecuentemente que $f_n\to f$ ρ-a.e.*

Nótese que una unión numerable de conjuntos ρ-nulos es ρ-nula. En lo que sigue identificaremos los conjuntos A y B que tienen la diferencia simétrica $A\Delta B$ ρ-nula. También identificaremos las funciones medibles que son iguales ρ-a.e. i.e. para las cuáles el conjunto $\{\omega\in\Omega\ ;\ \ f(\omega)\neq g(\omega)\}$ es ρ-nulo.

Es fácil comprobar que el funcional $\rho:\mathcal{M}\to[0,+\infty]$ definido por $\rho(f)=\rho(f,\Omega)$ es un modular, porque cumple las propiedades de la Definición (1.1.1). Llamaremos al espacio modular inducido por ρ un espacio funcional modular y lo denotaremos L_ρ. Récuerdese que

$$L_\rho=\{f\in\mathcal{M};\ \lim_{\alpha\to 0}\rho(\alpha\, f)=0\}.$$

Ahora que ya están definidos los espacios modulares funcionales recordamos algunos conceptos básicos de estos espacios ver [KhKR, Ko1, Ko2, Ko3].

Teorema 1.1.5. *(1) $(L_\rho,||.||_\rho)$ es un espacio completo y la F-norma $||.||_\rho$ es monótona con respecto al orden natural de $\mathcal{M}$.*

(2) Si existe un escalar $\alpha > 0$ tal que $\rho(\alpha(f_n - f)) \to 0$ entonces existe una subsucesión $\{g_n\}$ of $\{f_n\}$ tal que $g_n \to f$ ρ-a.e.

(3) (Teorema de Egoroff) Si $f_n \to f$ ρ-a.e. entonces existe una sucesión creciente de conjuntos $H_k \in \mathcal{P}$ tal que $\Omega = \bigcup H_k$ y $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en cualquier H_k.

(4) Definimos

$$L_\rho^0 = \{f \in \mathcal{M}; \rho(f,.) \text{ es orden continuo}\}$$

y

$$E_\rho = \{f \in \mathcal{M}; \alpha f \in L_\rho^0 \text{ para todo } \alpha > 0\}.$$

Entonces,

(4.1) $E_\rho \subset L_\rho^0 \subset L_\rho$,

(4.2) E_ρ tiene la propiedad de Lebesgue, i.e. $||f\ 1_{D_n}||_\rho \to 0$ si $f \in E_\rho$ y D_n decrece a $\emptyset$,

(4.3) E_ρ es la clausura de $\mathcal{E}$ (con respecto a $||.||_\rho$).

(5) (Teorema de Vitali) Si $f_n \in E_\rho$ y $f_n \to f \in L_\rho$ ρ-a.e., entonces las siguientes propiedades son equivalentes

(i) $f \in E_\rho$ y $||f_n - f||_\rho \to 0$,

(ii) para todo $\alpha > 0$ las medidas subaditivas $\rho(\alpha f_n, .)$ son equicontinuas, i.e.

$$\lim_{k \to +\infty} \sup_n \rho(\alpha f_n, D_k) = 0,$$

para toda sucesión $\{D_k\} \in \Sigma$ que decrece a $\emptyset$.

(6) (Teorema de Lebesgue) Si $f_n, f \in \mathcal{M}$, $f_n \to f$ ρ-a.e. y existe una función $g \in E_\rho$ tal que $|f_n| \leq |g|$ ρ-a.e. para todo n, entonces $||f_n - f||_\rho \to 0$.

(7) Para $f_n, f \in \mathcal{M}$, las siguientes propiedades son equivalentes

(i) ρ tiene la propiedad de Fatou , i.e.

$$\rho(f_n) \uparrow \rho(f) \quad \textit{cuando} \quad |f_n| \uparrow |f| \quad \rho\text{-a.e.}$$

(ii) ρ es un modular continuo a la izquierda, i.e.

$$\rho(\alpha_n f) \uparrow \rho(f) \quad \textit{cuando} \quad \alpha_n \uparrow 1.$$

(iii) $\rho(f) \leq \liminf \rho(f_n)$ cuando $f_n \to f$ ρ-a.e.

(8) Se dice que un funcional modular cumple la Δ_2-condición si $\sup_{n\geq 1} \rho(2f_n, D_k) \to 0$ cuando $k \to +\infty$ para cualquier sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset L_\rho$ y cualquier sucesión $\{D_k\}_{k\geq 1} \subset \Sigma$ que decrece a $\emptyset$ tal que $\sup_{n\geq 1} \rho(f_n, D_k) \to 0$ cuando $k \to +\infty$.

La Δ_2-condición es equivalente a la igualdad $E_\rho = L_\rho$ (ver [Ko1]). Otra caracterización de la Δ_2-condición es la siguiente: ρ cumple la Δ_2-condición si y sólo si la convergencia en la F-norma y la convergencia en el modular ρ son equivalentes.

Definición 1.1.6. *(a) Se dice que una sucesión $\{f_n\} \subset L_\rho$ es ρ-convergente a $f \in L_\rho$ si $\rho(f_n - f) \to 0$ cuando $n \to +\infty$;*

(a') Se dice que una sucesión $\{f_n\} \subset L_\rho$ es ρ-a.e. convergente a $f \in L_\rho$ si el conjunto $\{\omega \in \Omega; f_n(\omega) \not\to f(\omega)\}$ es ρ-nulo;

(b) Se dice que una sucesión $\{f_n\} \subset L_\rho$ es una ρ-Cauchy sucesión si $\rho(f_n - f_m) \to 0$ cuando n y m tienden a $+\infty$;

(b') Se dice que una sucesión $\{f_n\} \subset L_\rho$ es una ρ-a.e. Cauchy sucesión si $\{\omega \in \Omega; \{f_n(\omega)\}$ no es una sucesión de Cauchy$\}$ es ρ-nulo;

(c) *Se dice que un subconjunto C de L_ρ es ρ-cerrado si el limite de una sucesión de elementos de C que es ρ-convergente pertenece a C;*

(c') *Se dice que un subconjunto C de L_ρ es ρ-a.e. secuencialmente cerrado si el límite de una sucesión de elementos de C que es ρ-a.e. convergente pertenece a C;*

(d) *Se dice que un subconjunto C de L_ρ es ρ-secuencialmente compacto si cualquier sucesión de elementos de C tiene una subsucesión ρ-convergente a un elemento de C;*

(d') *Se dice que un subconjunto C de L_ρ es ρ-a.e. secuencialmente compacto si toda sucesión de elementos de C tiene una subsucesión que es ρ-a.e. convergente a un elemento de C;*

(e) *Se dice que un subconjunto C de L_ρ es ρ-acotado si*

$$\delta_\rho(C) = \sup\{\rho(f-g); f, g \in C\} < +\infty.$$

Aunque las terminologías citadas arriba parecen que son semejantes a aquéllas de los espacios métricos, la falta de la desigualdad triangular en la definición del modular ρ hace que algunos resultados conocidos en el caso métrico fallen en el caso modular, por ejemplo, una sucesión que es ρ-convergente no implica necesariamente que es una ρ-Cauchy sucesión y la bola de centro f y de radio r definida por $B(f,r) = \{g \in L_\rho\ ;\ \ \rho(g-f) \leq r\}$ no es necesariamente ρ-cerrada. Por eso hay que tener cuidado al trabajar con estas nociones en el caso modular.

Para dar ejemplos de espacios funcionales modulares necesitamos la siguiente definición que se encuentra en [Mu]:

Definición 1.1.7. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio medible. Se dice que una función real φ definida en $\Omega \times \mathbb{R}^+$ es una una función de Musielak-Orlicz si cumple las siguientes propiedades:*

(i) $\varphi(\omega, u)$ *es creciente, continua en* u *tal que* $\varphi(\omega, 0) = 0, \varphi(\omega, u) > 0$ *para* $u > 0$ *y* $\varphi(\omega, u) \to +\infty$ *cuando* $u \to +\infty$,

(ii) $\varphi(\omega, u)$ *es una función* Σ*-medible en* ω *para todo* $u \geq 0$,

(iii) $\varphi(\omega, u)$ *es una función convexa en* u, *para todo* $\omega \in \Omega$.

Ejemplos de espacios funcionales modulares.

(1) Es fácil de probar que los espacios de Orlicz son espacios funcionales modulares. También lo son los espacios de Musielak-Orlicz, donde el funcional es definido de la siguiente manera:

$$\rho(f, E) = \int_E \varphi(t, |f(t)|) d\mu(t),$$

y donde φ es una función de Musielak-Orlicz, (para más detalles sobre estos espacios ver [Mu] donde estos espacios se llaman espacios de Orlicz generalizados). En el caso particular en que

$$\varphi(t, s) = s^p, \quad \text{for } 1 \leq p < +\infty,$$

obtenemos los espacios clásicos L^p donde la norma de Luxemburg es la norma clásica de L^p. Aún más, tenemos

$$\rho(f) = ||f||_{L^p}^p.$$

Los espacios de Musielak-Orlicz definidos antes, son espacios completos con respecto al modular.

(2) Supongamos que $\mathcal{M}$ es la familia de las medidas σ-aditivas en (Ω, Σ) y φ es una función de Musielak-Orlicz. Se puede probar que

$$\rho(f, E) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}} \int_E \varphi(t, |f(t)|) d\mu_\tau(t),$$

es un funcional modular. $\big($Aquí μ es una medida σ-finita fija sobre Ω, $\mathcal{T}$ es un conjunto de transformaciones medibles inversibles $\tau : \Omega \to \Omega$ y $\mu_\tau(E) = \mu(\tau^{-1}(E))\big)$.

Como ejemplo de espacios funcionales determinados por un funcional modular de este tipo se mencionan los espacios de Lorentz tipo L^p-espacios, donde

$$\rho(f, E) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \int_E |f(t)|^p d\mu_\tau(t).$$

1.2 Definición de la Δ_2-tipo condición y ejemplos de funcionales modulares que la cumplen

En esta sección definimos una nueva condición que se llama la Δ_2-tipo condición. Visto su importancia durante toda esta memoria, exponemos un método técnico para construir ejemplos de funcionales modulares que cumplen esta condición.

Definición 1.2.1. *Sea ρ un funcional modular. Se dice que ρ cumple la Δ_2-tipo condición si existe $K \geq 0$ tal que $\rho(2f) \leq K\rho(f)$ para cualquier $f \in L_\rho$.*

Esta claro que la Δ_2-tipo condición implica la Δ_2-condición.

En lo que sigue, supondremos que ρ es un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición. De un lado la convexidad de ρ nos permite trabajar con la norma de Luxemburg en vez de la F-norma y de otro lado la Δ_2-tipo condición nos permite asegurar que la convergencia modular y la convergencia en norma son equivalentes. Para dar ejemplos de funcionales modulares que son convexos y que cumplen la Δ_2-tipo condición necesitamos las siguientes definiciones de una N-función que cumple la Δ_2-tipo condición:

Definición 1.2.2. *Se dice que una función $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ es una N-función que cumple la Δ_2-tipo condición si tiene la siguiente representación,*

$$\Phi(u) = \int_0^{|u|} \phi(t)dt \ ,$$

donde la función $\phi : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ cumple las siguientes condiciones:

(a) $\phi(0) = 0$ *;*

(b) $\phi(t) > 0$ *para todo* $t > 0$ *;*

(c) ϕ *es continua a la derecha en cada punto* $t \geq 0$ *;*

(d) ϕ *es creciente en* $(0, +\infty)$

(e) $\phi(+\infty) = +\infty$ *i.e.* $\lim_{t \to +\infty} \phi(t) = +\infty$.

(f) Existe $K > 0$ *tal que* $\phi(2t) \leq K\phi(t)$ *para cualquier* $t \geq 0$.

Definición 1.2.3. *Se dice que una función $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ es una N-función que cumple la Δ_2-tipo condición si satisface las siguientes condiciones:*

(a') $\Phi(0) = 0$,

(b') Φ *es par y continua en* $\mathbb{R}$,

(c') Φ *es convexa en* $\mathbb{R}$,

(d') Φ *es estrictamente creciente en* $(0, +\infty)$,

(e') $\lim_{u\to 0^+} \frac{\Phi(u)}{u} = 0$ *y* $\lim_{u\to +\infty} \frac{\Phi(u)}{u} = +\infty$,

(f') Existe $K > 0$ *tal que* $\Phi(2u) \leq K\Phi(u)$ *para cualquier* $u \in \mathbb{R}$.

Nota 1.2.4. *Como la función* Φ *es continua, la condición* (f') *de la definición (1.2.3) es equivalente a:*

$$\limsup_{u\to 0^+} \frac{\Phi(2u)}{\Phi(u)} < +\infty \quad y \quad \limsup_{u\to +\infty} \frac{\Phi(2u)}{\Phi(u)} < +\infty.$$

Las dos definiciones (1.2.2) y (1.2.3) son equivalentes. En efecto, quitando la condición (f) de la definición (1.2.2) obtenemos la definición de una N-función como viene en [KraR] (ver pagina 6), que es equivalente a la defínción (1.2.3) sin la condición (f'), (ver el mismo libro página 9). Para conseguir la equivalencia requerida bastaría probar que las dos condiciónes (f) y (f') son equivalentes y esto es obvio porque ϕ es la derivada de derecha de Φ.
Nótese que si Φ es una N-función que cumple la Δ_2-tipo condición entonces la función $\Im(\Phi) : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ definida por $\Im(\Phi)(u) = \int_0^{|u|} \Phi(t)dt$ es también una N-función que cumple la Δ_2-tipo condición. En efecto, basta reemplazar ϕ por Φ en la definición (1.2.2). Así seguimos integrando las N-funciones que cumplen la Δ_2-tipo, conseguimos un proceso iterativo que nos permite generar a partir de una N-función inicial que cumple la Δ_2-tipo condición, una familia infinita de N-funciónes que cumplen también la Δ_2-tipo condición.

Ejemplos de N-funciones que cumplen la Δ_2-tipo condición.

$$\Phi_1(t) = |t|^p \quad \text{para} \quad p > 1,$$

$$\Phi_2(t) = t^2 - \log(1 + t^2),$$

$$\Phi_3(t) = -t + (1 + t)\log(1 + t).$$

Para construir mas ejemplos basta iterar aplicando cada vez la transformación $\Im$ sobre una N-función que cumple la Δ_2-tipo condición, por ejemplo

$$\Phi_2(u) = u^2 - \log(1+u^2)$$

$$\Im(\Phi_2)(u) = 2u + \frac{u^3}{3} - 2\arctan(u) - 2\log(1+u^2)$$

$$\Im(\Im(\Phi_2))(u) = \frac{3u^2}{2} + \frac{u^4}{12} - 2u\arctan(u) + \frac{1}{2}\log(1+u^2) - \frac{1}{2}u^2\log(1+u^2)$$

$$\vdots$$

etc.

En lo que sigue veamos como se puede asociar a una N-función que cumple la Δ_2-tipo condición un funcional modular que es convexo y que cumple la Δ_2-tipo condición.

Sea Φ una N-función que cumple la Δ_2-tipo condición y (Ω, Σ, μ) un espacio medible donde μ es una medida finita nonatómica. Sea $\mathcal{M}$ el espacio de todas las funciones medibles de valores reales definidas en Ω. A la función Φ asociamos un modular funcional de la siguiente manera:

$$\rho(f, E) = \int_E \Phi(f(\omega))d\mu(\omega)$$

para cualquier $f \in \mathcal{M}$ y $E \in \Sigma$. Cuando $E = \Omega$ obtenemos el modular clásico de Orlicz $\rho(f)$ definido por la formula

$$\rho(f) = \rho(f, \Omega) = \int_\Omega \Phi(f(\omega))d\mu(\omega).$$

Es fácil de probar que este funcional modular es convexo y cumple la Δ_2-tipo condición. El espacio funcional modular asociado a este modular es el espacio de Orlicz L^Φ definido por

$$L^\Phi = \big\{f \in \mathcal{M}, \;\; \rho(\lambda f) \to +\infty \;\text{ cuando }\; \lambda \to 0\big\},$$

equivalente a

$$L^\Phi = \big\{f \in \mathcal{M}, \;\; \rho(\lambda f) < +\infty \;\text{ para un cierto }\; \lambda > 0\big\}.$$

1.3 Lemas fundamentales

En lo que sigue probaremos algunos lemas útiles en los tres siguientes capítulos. Para ello empezamos definiendo la función del crecimiento ω_ρ de la siguiente manera:

Definición 1.3.1. *Sea ρ un funcional modular. Definimos la función de crecimiento $\omega_\rho : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ por la siguiente fórmula:*

$$\omega_\rho(t) = \sup\left\{\frac{\rho(tf)}{\rho(f)}; \;\; \forall f \in L_\rho \neq \{0\}\right\}.$$

En el siguiente lema mostramos algunas propiedades de la función de crecimiento ω_ρ.

Lema 1.3.2. *Sea ρ un modular funcional convexo que cumple la Δ_2-tipo condición. Entonces, la función de crecimiento ω_ρ tiene las siguientes propiedades:*

1) $\omega_\rho(t) < +\infty, \forall t \in [0,+\infty)$;

2) $\omega_\rho(t) = 0 \quad$ si y sólo si $\quad t = 0$;

3) $\omega_\rho : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ es convexa y estrictamente creciente. Por tanto es continua y biyectiva;

4) $\omega_\rho(\alpha\beta) \leq \omega_\rho(\alpha)\omega_\rho(\beta); \forall \alpha, \beta \in [0,+\infty)$;

5) $\omega_\rho^{-1}(\alpha)\omega_\rho^{-1}(\beta) \leq \omega_\rho^{-1}(\alpha\beta); \forall \alpha, \beta \in [0, +\infty)$*, donde* ω_ρ^{-1} *es la función inversa de* ω_ρ.

Demostración. 1) Sea $t \in [0, +\infty)$. Existe un número natural positivo n_0 tal que $t < 2^{n_0}$. Sea $f \in L_\rho \neq \{0\}$. Gracias a la Δ_2-tipo condición tenemos $\rho(2f) \leq K\rho(f)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \rho(tf) &\leq \rho(2^{n_0} f) \\ &\leq K^{n_0}\rho(f). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\omega_\rho(t) = \sup\left\{\frac{\rho(tf)}{\rho(f)};\ \forall f \in L_\rho \neq \{0\}\right\} < +\infty.$$

2) Si $t = 0$ es obvio que $\omega_\rho(t) = 0$. Ahora veamos que si $\omega_\rho(t) = 0$ entonces $t = 0$. Supongamos por reducción al absurdo que para $t \neq 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \omega_\rho(t) = 0 &\implies \sup\left\{\frac{\rho(tf)}{\rho(f)};\ \forall f \in L_\rho \neq \{0\}\right\} = 0 \\ &\implies \forall f \in L_\rho \neq \{0\},\quad tf = 0 \\ &\implies \forall f \in L_\rho \neq \{0\},\quad f = 0 \end{aligned}$$

lo cual es absurdo.

3) *i)* Probaremos que la función de crecimiento ω_ρ es convexa.

Sean $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $t_1, t_2 \in [0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \omega_\rho(\alpha t_1 + \beta t_2) &= \sup\left\{\frac{\rho\big((\alpha t_1 + \beta t_2)f\big)}{\rho(f)};\ \forall f \in L_\rho \neq \{0\}\right\} \\ &\leq \sup\left\{\frac{\alpha\rho(t_1 f) + \beta\rho(t_2 f)}{\rho(f)};\ \forall f \in L_\rho \neq \{0\}\right\}, (\rho \text{ es convexo}) \\ &\leq \alpha \sup\left\{\frac{\rho(t_1 f)}{\rho(f)};\ \forall f \in L_\rho \neq \{0\}\right\} \\ &\quad + \beta \sup\left\{\frac{\rho(t_2 f)}{\rho(f)};\ \forall f \in L_\rho \neq \{0\}\right\} \\ &\leq \alpha\omega_\rho(t_1) + \beta\omega_\rho(t_2). \end{aligned}$$

ii) Veamos que la función de crecimiento ω_ρ es estrictamente creciente.

Sean $t_1, t_2 \in [0, +\infty)$ tal que $t_1 < t_2$. Distinguimos dos casos:

Primer caso: $t_1 = 0$, gracias a la propiedad (2) de este mismo lema, tenemos

$$\omega_\rho(t_1) = 0 < \omega_\rho(t_2).$$

Segundo caso: $t_1 > 0$, entonces $\omega_\rho(t_1) \leq \omega_\rho(t_2)$ porque $\rho(t_1 f) \leq \rho(t_2 f)$.
Por reducción al absurdo supongamos que $\omega_\rho(t_1) = \omega_\rho(t_2)$. Como la función de crecimiento ω_ρ es convexa. Entonces,

$$\begin{aligned} \omega_\rho(t_1) &= \omega_\rho\left(\frac{t_1}{t_2} t_2\right) \\ &\leq \frac{t_1}{t_2}\omega_\rho(t_2) \\ &\leq \frac{t_1}{t_2}\omega_\rho(t_1). \end{aligned}$$

Como $\omega_\rho(t_1) > 0$ llegamos a un absurdo.
Como la función de crecimiento ω_ρ es convexa y estrictamente creciente, entonces es continua y biyectiva (ver [J] páginas 194,.,196).

4) Veamos que $\omega_\rho(\alpha\beta) \leq \omega_\rho(\alpha)\omega_\rho(\beta)$ para cualquier $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$.
Sean $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \omega_\rho(\alpha\beta) &= \sup\left\{\frac{\rho\big((\alpha\beta)f\big)}{\rho(f)};\ \forall f \in L_\rho \neq \{0\}\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{\rho\big(\alpha(\beta f)\big)}{\rho(\beta f)}\frac{\rho(\beta f)}{\rho(f)};\ \forall f \in L_\rho \neq \{0\}\right\} \\ &\leq \sup\left\{\frac{\rho\big(\alpha(\beta f)\big)}{\rho(\beta f)};\ \forall f \in L_\rho \neq \{0\}\right\} \times \\ &\quad\ \sup\left\{\frac{\rho(\beta f)}{\rho(f)};\ \forall f \in L_\rho \neq \{0\}\right\} \\ &\leq \omega_\rho(\alpha)\omega_\rho(\beta). \end{aligned}$$

5) Veamos que $\omega_\rho^{-1}(\alpha)\omega_\rho^{-1}(\beta) \leq \omega_\rho^{-1}(\alpha\beta)$ para cualquier $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$.
Sean $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$, como la función de crecimiento $\omega_\rho : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$

es biyectiva, existe $\alpha_1, \beta_1 \in [0, +\infty)$ tal que $\alpha = \omega_\rho(\alpha_1)$ i.e. $\alpha_1 = \omega_\rho^{-1}(\alpha)$ y $\beta = \omega_\rho(\beta_1)$ i.e. $\beta_1 = \omega_\rho^{-1}(\beta)$. Aplicando la propiedad (4) obtenemos

$$\omega_\rho(\alpha_1\beta_1) \leq \omega_\rho(\alpha_1)\omega_\rho(\beta_1) \leq \alpha\beta.$$

Aplicando ω_ρ^{-1} en la desigualdad anterior obtenemos

$$\alpha_1\beta_1 \leq \omega_\rho^{-1}(\alpha\beta).$$

Por lo tanto

$$\omega_\rho^{-1}(\alpha)\omega_\rho^{-1}(\beta) \leq \omega_\rho^{-1}(\alpha\beta).$$

$\square$

El siguiente lema muestra que se puede usar la función de crecimiento ω_ρ para dar una cota superior a la norma de Luxemburg de una función que pertenece al espacio funcional modular L_ρ.

Lema 1.3.3 (DKS1). *Sea ρ un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición. Entonces,*

$$||f|| \leq \frac{1}{\omega_\rho^{-1}\left(\dfrac{1}{\rho(f)}\right)} \qquad \forall f \in L_\rho.$$

Demostración. Supongamos que, $\alpha < ||f||$. Entonces $1 < \rho(f/\alpha)$ lo que implica que

$$\frac{1}{\rho(f)} < \omega_\rho\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

y por lo tanto

$$\omega_\rho^{-1}\left(\frac{1}{\rho(f)}\right) < \frac{1}{\alpha}.$$

Cuando $\alpha \to ||f||^-$, obtenemos que $||f|| \leq \dfrac{1}{\omega_\rho^{-1}\left(\dfrac{1}{\rho(f)}\right)}$. $\square$

El siguiente lema que se encuentra en [KhKR] es fundamental, se usará a menudo en esta memoria.

Lema 1.3.4 (KhKR). *Sea ρ un modular funcional cumpliendo la Δ_2-tipo condición y $\{f_n\}_n$ una sucesión en L_ρ tal que $f_n \overset{\rho-a.e.}{\to} f \in L_\rho$ y existe $k > 1$ tal que $\sup_n \rho(k(f_n - f)) < +\infty$. Entonces,*

$$\liminf_{n\to+\infty} \rho(f_n - g) = \liminf_{n\to+\infty} \rho(f_n - f) + \rho(f - g) \text{ para todo } g \in L_\rho$$

y por lo tanto,

$$\rho(f - g) \leq \liminf_{n\to+\infty} \rho(f_n - g) \text{ para todo } g \in L_\rho.$$

Se usara el siguiente lema en el primer capítulo porque falta la desigualdad triangular.

Lema 1.3.5. *Sea $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ dos sucesiones en L_ρ. Entonces,*

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(g_n) = 0 \Longrightarrow \limsup_{n\to+\infty} \rho(f_n + g_n) = \limsup_{n\to+\infty} \rho(f_n).$$

Demostración. De la propiedad (iii) de la definición (1.1.1) del modular ρ, tenemos

$$\rho(f_n + g_n) \leq \rho\left(\frac{f_n}{1-\varepsilon}\right) + \rho\left(\frac{g_n}{\varepsilon}\right), \forall\varepsilon \in (0,1).$$

Entonces,

$$\rho(f_n + g_n) \leq \omega_\rho\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)\rho(f_n) + \omega_\rho\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\rho(g_n)$$

y

$$\limsup_{n\to+\infty} \rho(f_n + g_n) \leq \omega_\rho\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)\limsup_{n\to+\infty} \rho(f_n)$$

Como ε es arbitrario

$$\omega_\rho\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right) \to 1 \text{ cuando } \varepsilon \to 0^+.$$

Así obtenemos

$$\limsup_{n\to+\infty} \rho(f_n + g_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} \rho(f_n).$$

Además, el mismo argumento prueba que

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty} \rho(f_n) &= \limsup_{n\to+\infty} \rho(f_n + g_n - g_n)\\ &\leq \limsup_{n\to+\infty} \rho(f_n + g_n).\end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Aplicaciones asintóticamente regulares en espacios modulares funcionales

El presente capítulo está dividido en tres secciones. En la primera sección insertamos un breve historial de la teoría del punto fijo para aplicaciones asintóticamente regulares en los espacios de Banach y los espacios métricos, recordando algunos de los teoremas más destacados. En la segunda sección presentamos dos nuevos teoremas de la teoría del punto fijo en los espacios funcionales modulares basados en ciertos coeficientes de estos espacios. En la tercera sección estudiaremos la relación existente entre estos coeficientes y calculamos algunos.

2.1 Algunos teoremas del punto fijo para aplicaciones asintóticamente regulares en los espacios métricos y los espacios de Banach

Sea (M, d) un espacio métrico, se dice que una aplicación $T : M \to M$ es asintóticamente regular si y sólo si para todo $x \in M$,

$$\lim_{n \to +\infty} d(T^{n+1}x, T^n x) = 0.$$

Los primeros en definir este concepto fueron Browder y Petryshyn [BrP]. En el caso de los espacios de Banach se sabe que si T es una aplicación no-expansiva entonces $T_\lambda = \lambda Id + (1 - \lambda)T$ es asintóticamente regular (ver [GoK2]) para cualquier $0 < \lambda < 1$. Además $Fix(T) = Fix(T_\lambda)$ donde $Fix(T)$ es el conjunto de los puntos fijos de T. Por tanto, el problema de la existencia del punto fijo para una aplicación no expansiva es equivalente al problema de la existencia del punto fijo para una aplicación asintóticamente regular y no-expansiva.

Sea $(X, ||.||)$ un espacio de Banach uniformemente convexo y C un subconjunto débilmente compacto de X. Se sabe (ver [Br1]) que si $T : C \to C$ es una aplicación no-expansiva. Entonces, T tiene un punto fijo. Ahora siendo $T : C \to C$ una aplicación asintóticamente regular, la pregunta natural que se planteó fue: ¿tiene T un punto fijo?. La respuesta es negativa porque en su artículo [Lin] P.K. Lin ha logrado construir una aplicación asintóticamente regular $T : C \to C$, donde C es un subconjunto débilmente compacto de l_2, que no tiene ningún punto fijo. No obstante, se reformuló la pregunta anterior de la siguiente manera: ¿bajo que condición adicional, una aplicación asintóticamente regular tiene un punto fijo?. En 1987, M. Kruppel [Kru] probó en el siguiente teorema:

Teorema 2.1.1. *Sea $(X, ||.||)$ un espacio de Banach uniformemente convexo,*

C un subconjunto cerrado, acotado y convexo de X y $T : C \to C$ *una aplicación asintóticamente regular tal que* $s(T) \leq 1$. *Entonces, T tiene un punto fijo.*
Donde

$$s(T) = \liminf_{n \to +\infty} |T^n| \ \ y \ \ |T| = \sup \left\{ \frac{||Tx - Ty||}{||x - y||} : x \neq y, \ x, y \in C \right\}.$$

Desde entonces, se ha abierto una nueva línea de investigación en la teoría del punto fijo para aplicaciones asintóticamente regulares que consiste en buscar la mejor cota superior del coeficiente $s(T)$ para este tipo de aplicaciones. Uno de los teoremas más destacados en esta teoría en el caso métrico es el siguiente teorema de J. Gornicki [Gor1]:

Teorema 2.1.2. *Sea (M, d) un espacio métrico completo. Sea* $T : M \to M$ *una aplicación asintóticamente regular tal que* $s(T) < \kappa(M)$ *y la sucesión* $\{T^n x\}$ *es acotada para un cierto* $x \in M$. *Entonces, T tiene un punto fijo.*

$\Big($Aquí $\kappa(M)$ es la constante de Lifshitz definida por :
$\kappa(M) = \sup\{b > 0 :$ existe $a > 1$ tal que para todo $x, y \in M$ y $r > 0$ cumpliendo $d(x-y) > r$, existe $z \in M$ tal que $B(x, br) \cap B(y, ar) \subset B(z, r)\}$ y $B(x, r)$: es la bola cerrada de centro x y de radio $r\Big)$. Ultimamente en 1995, T.Dominguez Benavides y H.K. Xu [DX] probaron el siguiente teorema:

Teorema 2.1.3. *Sea X un espacio de Banach y* τ *una topología arbitraria en X. Sea C un subconjunto acotado, convexo,* τ*-secuencialmente compacto y* $T : C \to C$ *una aplicación asintóticamente regular tal que* $s(T) < \kappa_\tau(C)$. *Entonces, T tiene un punto fijo.*

$\Big($Aquí, el coeficiente $\kappa_\tau(C)$ de un subconjunto C no vacío, acotado y convexo del espacio de Banach X es definido por:

$\kappa_\tau(C) = \sup\{b > 0$: existe $a > 0$ tal que para todo $x, y \in M$ y $r > 0$ cumpliendo $||x - y|| \geq r$ y para cualquier sucesión $\{\xi_n\}_n$ τ-convergente de elementos de M que cumple $\limsup_{n\to+\infty} ||\xi_n - x|| \leq ar$ y $\limsup_{n\to+\infty} ||\xi_n - y|| \leq br$, existe un cierto $z \in M$ tal que $\liminf_{n\to+\infty} ||\xi_n - z|| \leq r\}\Big)$. Como $1 \leq \kappa(C) \leq \kappa_\tau(C)$ (ver [ADL] página 132) el coeficiente $\kappa_\tau(C)$ ofrece una cota superior del coeficiente $s(T)$ mejor que el coeficiente de Lifshitz $\kappa(C)$. Además definiendo la τ-característica del espacio de Banach X por: $\kappa_\tau(X) = \inf\{\kappa_\tau(C) : C \subset X$ no vacío, acotado y convexo$\}$ es más fácil calcular $\kappa_\tau(X)$ que $\kappa(X)$. Por ejemplo cuando $X = l_p$ $(0 < p < 1)$ y τ es la topología débil se tiene $\kappa_\tau(l_p) = \sqrt[p]{2}$, sin embargo $\kappa(l_p)$ es todavía desconocido cuando $(p \neq 2)$.

2.2 Puntos fijos para aplicaciones asintóticamente regulares en los espacios funcionales modulares

En esta sección proponemos el estudio de la teoría del punto fijo para aplicaciones asintóticamente regulares en los espacios funcionales modulares. Para ello empezamos reformulando en el caso modular la definición de algunos coeficientes que ya son conocidos en el caso de los espacios de Banach.

En lo que sigue suponemos que ρ es un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición y C es un subconjunto ρ-acotado y ρ-a.e. secuencialmente compacto de L_ρ definimos:

$K_{\rho-a.e.}(C) = \sup\{b > 0$: existe $a > 1$ tal que para todo $f, g \in C$ y $r > 0$ cumpliendo $\rho(f - g) \geq r$ y para cualquier $\{h_n\}_n \subset C, \{h_n\} \overset{\rho-a.e.}{\rightarrow} h \in C$ cumpliendo $\limsup_{n\to+\infty} \rho(h_n - f) \leq ar$ y $\limsup_{n\to+\infty} \rho(h_n - g) \leq br$ tenemos $\liminf_{n\to+\infty} \rho(h_n - h) \leq r\}$.

$h_{\rho-a.e.}(C) = \sup\{b > 0$: para todo $f, g \in C$ y $r > 0$ cumpliendo $\rho(f-g) \geq r$ para toda sucesión $\{h_n\}_n \subset C, h_n \overset{\rho-a.e.}{\to} f \in C$ cumpliendo $\limsup_{n\to+\infty} \rho(h_n - g) \leq br$ tenemos $\liminf_{n\to+\infty} \rho(h_n - f) \leq r\}$.

$h_{\rho-a.e.}(L_\rho) = \inf\{h_{\rho-a.e.}(C) : C$ ρ-acotado y ρ-a.e. secuencialmente compacto$\}$.

$K_{\rho-a.e.}(L_\rho) = \inf\{K_{\rho-a.e.}(C) : C$ ρ-acotado y ρ-a.e. secuencialmente compacto$\}$.

$r_{\rho-a.e.}(c) = \inf\{\liminf_{n\to+\infty} \rho(f+f_n)-1 : \ \forall f \in L_\rho$ tal que $c \leq \rho(f) < +\infty$, $\forall\{f_n\}_n \subset L_\rho$ tal que $f_n \overset{\rho-a.e.}{\to} 0$, $\liminf_{n\to+\infty} \rho(f_n) \geq 1$ y existe $k > 0$ cumpliendo $\sup_n \rho(kf_n) < +\infty\}$ $\quad \forall c > 0$.

Sea $T : C \to C$ una aplicación. Se dice que T es ρ-asintóticamente regular si y sólo si

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(T^{n+1}f - T^n f) = 0, \ \ \forall f \in C.$$

En lo que sigue presentamos dos teoremas del punto fijo en los espacios funcionales modulares. Para ello denotamos

$$s(T) = \liminf_{n\to+\infty} |T^n| \ \text{ donde } \ |T| = \sup\left\{\frac{\rho(Tf - Tg)}{\rho(f-g)};\ f, g \in C,\ f \neq g\right\}.$$

Teorema 2.2.1. *Sea ρ un funcional modular cumpliendo la Δ_2-tipo condición y C un subconjunto ρ-acotado, ρ-a.e. secuencialmente compacto de L_ρ. Sea T : $C \to C$ una aplicación ρ-asintóticamente regular tal que $s(T) < 2$. Entonces, T tiene un punto fijo.*

Demostración. Elegimos una subsucesión $\{n_k\}_k$ de la sucesión de números positivos enteros $\{n\}_n$tal que $s(T) = \lim_{k\to+\infty} |T^{n_k}| = \liminf_{n\to+\infty} |T^n|$ y definimos un funcional r en C de la siguiente manera:

$$r(f) = \inf\{r > 0 : \text{existe } g \in C \ \text{ tal que } \ \liminf_{k\to+\infty} \rho(f - T^{n_k}g) \leq r\}.$$

Sea $f \in C$. Como $s(T) < 2$, existe $b \in (1,2)$ tal que $s(T) < b < 2$. Sea $\varepsilon \in (0,1)$ tal que $\omega_\rho\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < \frac{1}{b-1}$. Elegimos $\gamma \in (0,1)$ de modo que $\omega_\rho\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) <$

$\dfrac{\gamma}{b-1}$. Debido a que $\gamma + (1-b)\omega_\rho\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) > 0$, se puede encontrar un $\delta \in (0,1)$ satisfaciendo $\delta < \gamma + (1-b)\omega_\rho\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Seleccionamos un número real $\mu \in (0,1)$ que verifica

$$\mu < \min\left\{\frac{\delta}{\omega_\rho\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)}\,,\ \frac{\gamma-\delta+\omega_\rho\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)(1-b)}{\omega_\rho\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)b}\right\}$$

Finalmente, denotamos

$$\alpha = \max\left\{1+\mu-\frac{\delta}{\omega_\rho\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)}\,,\ b(1+\mu)-\frac{\gamma-\delta}{\omega_\rho\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right\}.$$

Entonces $0 < \alpha < 1$. Como $\gamma < 1$, se puede encontrar un número entero positivo k_0 tal que

$$|T^{n_{k_0}}| < b \quad \text{y} \quad \rho(f - T^{n_{k_0}}f) > \gamma\, r(f).$$

Como $\mu > 0$, se puede encontrar un $g \in C$ que cumpla

$$\liminf_{k\to+\infty} \rho(f - T^{n_k}g) \le r(f)(1+\mu).$$

Debido a que C es ρ-a.e. secuencialmente compacto, existe una subsucesión $\{n_{k'}\}$ de $\{n_k\}$ tal que $\{T^{n_{k'}}g\}$ converge ρ-a.e. a un cierto h que pertenece a C, y

$$\lim_{k'\to+\infty} \rho(f - T^{n_{k'}}g) = \liminf_{k\to+\infty} \rho(f - T^{n_k}g).$$

Usando la regularidad ρ-asintótica de la aplicación T obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{k'\to+\infty} \rho(T^{n_{k'}}g - T^{n_{k'}-n_{k_0}}g) &\le \omega_\rho(n_{k_0}) \lim_{k'\to+\infty} \rho\left((T^{n_{k'}}g - T^{n_{k'}-n_{k_0}}g)/n_{k_0}\right) \\
&\le \omega_\rho(n_{k_0}) \lim_{k'\to+\infty} \sum_{i=0}^{i=n_{k_0}-1} \rho\left(T^{(n_{k'}-n_{k_0}+i)}g - T^{(n_{k'}-n_{k_0}+i)+1}g\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\lim_{k'\to+\infty} \rho(T^{n_{k'}}g - T^{n_{k'}-n_{k_0}}g) = 0.$$

Y usando el lema (1.3.5), conseguimos

$$\begin{aligned}
\limsup_{k'\to+\infty} \rho(T^{n_{k_0}} f - T^{n_{k'}} g) &\leq |T^{n_{k_0}}| \limsup_{k'\to+\infty} \rho(f - T^{n_{k'}-n_{k_0}} g) \\
&= |T^{n_{k_0}}| \\
&\quad \times \limsup_{k'\to+\infty} \rho(f - T^{n_{k'}} g + T^{n_{k'}} g - T^{n_{k'}-n_{k_0}} g) \\
&= |T^{n_{k_0}}| \limsup_{k'\to+\infty} \rho(f - T^{n_{k'}} g).
\end{aligned}$$

Veamos que $\liminf\limits_{k'\to+\infty} \rho(T^{n_{k'}} g - h) \leq \alpha r(f)$ para ello, dividimos la prueba en dos casos:

Primer caso. Supongamos que

$$\rho(f - h) \geq \frac{\delta}{\omega_\rho\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)} r(f)$$

Usando el Lema (1.3.4), tenemos

$$\begin{aligned}
\liminf_{k'\to+\infty} \rho(T^{n_{k'}} g - h) &= \liminf_{k'\to+\infty} \rho(T^{n_{k'}} g - f) - \rho(f - h) \\
&\leq (1+\mu) r(f) - \frac{\delta}{\omega_\rho\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)} r(f) \\
&= \left[(1+\mu) - \frac{\delta}{\omega_\rho\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)}\right] r(f) \\
&\leq \alpha\, r(f).
\end{aligned}$$

Segundo caso. Supongamos que

$$\rho(f - h) < \frac{\delta}{\omega_\rho\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)} r(f)$$

Usando de nuevo el Lema (1.3.4), tenemos

$$\liminf_{k'\to+\infty} \rho(T^{n_{k'}} g - h) = \liminf_{k'\to+\infty} \rho(T^{n_{k'}} g - T^{n_{k_0}} f) - \rho(T^{n_{k_0}} f - h).$$

De la propiedad (i.i.i) de la definición (1.1.1) del modular ρ y de la definición la función del crecimiento ω_ρ tenemos

$$\rho(T^{n_{k_0}} f - f) \leq \omega_\rho\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \rho(T^{n_{k_0}} f - h) + \omega_\rho\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right) \rho(h - f)$$

lo que quiere decir que

$$\rho(T^{n_{k_0}}f-h)\geq \frac{1}{\omega_\rho\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\rho(T^{n_{k_0}}f-f)-\frac{\omega_\rho\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)}{\omega_\rho\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\rho(h-f).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\liminf_{k'\to+\infty}\rho(T^{n_{k'}}g-h) &\leq (1+\mu)br(f)-\frac{1}{\omega_\rho\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\rho(T^{n_{k_0}}f-f)\\
&\quad+\frac{\omega_\rho\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)}{\omega_\rho\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\rho(h-f)\\
&\leq (1+\mu)br(f)-\frac{\gamma}{\omega_\rho\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}r(f)+\frac{\delta}{\omega_\rho\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}r(f)\\
&\leq \alpha r(f).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en ambos casos tenemos $r(h)\leq \alpha r(f)$.

Además

$$\begin{aligned}
\rho(h-f) &= \rho\left(2\left(\frac{h-f}{2}\right)\right)\\
&\leq \omega_\rho(2)\rho\left(\frac{h-f}{2}\right)\\
&\leq \omega_\rho(2)\Big(\liminf_{k'\to+\infty}\rho(h-T^{n_{k'}}g)+\liminf_{k'\to+\infty}\rho(T^{n_{k'}}g-f)\Big)\\
&\leq \omega_\rho(2)\Big(\alpha r(f)+(1+\mu)r(f)\Big)\\
&=: Ar(f) \quad \text{donde } A=\alpha+\mu+1.
\end{aligned}$$

Por inducción, construimos una sucesión de la siguiente manera: elegimos $h_0=f$. Supongamos que $h_0,h_1,........,h_{n-1}$ ya están definidos y consideramos h_n como el elemento correspondiente a h_{n-1} en la construcción mencionada arriba. Entonces,

$$r(h_n)\leq \alpha r(h_{n-1})\leq ....\leq \alpha^n r(h_0)$$

y

$$\rho(h_{n+1}-h_n)\leq Ar(h_n).$$

Por lo tanto, existe un número entero positivo N y un número real $0 < \beta < 1$ tal que para $n > N$ tenemos

$$\rho(h_{n+1} - h_n) \leq C\alpha^n \leq \beta^n, \quad \text{donde } C = Ar(h_0)$$

lo que implica

$$\frac{1}{\beta^n} \leq \frac{1}{\rho(h_{n+1} - h_n)}$$

y

$$\omega_\rho{}^{-1}\left(\frac{1}{\beta^n}\right) \leq \omega_\rho{}^{-1}\left(\frac{1}{\rho(h_{n+1} - h_n)}\right).$$

La propiedad (5) en el lema (1.3.2) implica

$$\left(\omega_\rho{}^{-1}\left(\frac{1}{\beta}\right)\right)^n \leq \omega_\rho{}^{-1}\left(\frac{1}{\rho(h_{n+1} - h_n)}\right),$$

y del Lema (1.3.3) deducimos que

$$||h_{n+1} - h_n||_\rho \leq \frac{1}{\omega_\rho{}^{-1}\left(\frac{1}{\rho(h_{n+1}-h_n)}\right)} \leq \frac{1}{\left(\omega_\rho{}^{-1}(\frac{1}{\beta})\right)^n}.$$

Entonces, $\{h_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $(L_\rho, ||.||_\rho)$ y por lo tanto, existe un $h \in L_\rho$ tal que $||h_n - h||_\rho \to 0$, porque $(L_\rho, ||.||_\rho)$ es completo. Como ya sabemos que bajo la Δ_2-condición tipo la convergencia en norma es equivalente a la convergencia modular, $\{h_n\}$ converge en modular a h. Usando la propiedad (2) del teorema (1.1.5), existe una subsucesión $\{g_n\}_n$ de $\{h_n\}_n$ tal que $g_n \to h$ ρ-a.e. y $h \in C$ porque C es ρ-a.e. secuencialmente cerrado. Veamos que $r(h) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos n bastante grande tal que

$$r(h_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \rho(h_n - h) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Existe $g \in C$ tal que $\liminf_{k\to+\infty} \rho(T^{n_k}g - h_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces

$$\liminf_{k\to+\infty} \rho\left(\frac{T^{n_k}g - h}{2}\right) \leq \liminf_{k\to+\infty} \rho(T^{n_k}g - h_n) + \rho(h_n - h) \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto

$$\liminf_{k\to+\infty} \rho(T^{n_k}g - h) \le \omega_\rho(2)\varepsilon$$

lo que implica

$$r(h) \le \omega_\rho(2)\varepsilon.$$

Como ε es arbitraria, obtenemos

$$r(h) = 0.$$

Finalmente, veamos que

$$T(h) = h.$$

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Existe $g \in C$ tal que $\liminf_{k\to+\infty} \rho(h - T^{n_k}g) < \varepsilon$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \rho\left(\frac{1}{3}(h - T(h))\right) &\le \liminf_{k\to+\infty} \rho(h - T^{n_k}g) + \liminf_{k\to+\infty} \rho(T^{n_k}g - T^{n_k+1}g) \\ &\qquad + |T| \liminf_{k\to+\infty} \rho(T^{n_k}g - h) \\ &\le (1 + |T|)\varepsilon. \end{aligned}$$

De nuevo, la arbitrariedad de ε implica que $T(h) = h$. □

Nota 2.2.2. *El siguiente ejemplo prueba que 2 es, en general, la mejor cota superior del coeficiente $s(T)$ en el Teorema (2.2.1).*

Ejemplo. Supongamos que $L_\rho = l^1$ con $\rho(x) = ||x||$ para todo $x \in l^1$.
Entonces, la convergencia ρ-a.e. y la convergencia débil estrella son equivalentes en los subconjuntos acotados de l^1.
Consideramos el conjunto $B = \{x \in l^1; x_1 = 0, x_i \ge 0 \text{ si } i \ge 2 \text{ y } ||x|| \le 1\}$
y

$$S^+ = \{x \in B : ||x|| = 1\}.$$

Como

$$B = B(0,1)\bigcap H_1 \bigcap \left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} H_n\right)$$

donde $H_1 = \{x \in l^1 : x_1 = 0\}$ y $H_n = \{x \in l^1 : x_n \geq 0\}$ para $n \geq 2$, sabemos que B es débil estrella compacto, i.e. ρ-a.e. secuencialmente compacto.
Definimos $S : B \to S^+$ tal que $S(x) = (1 - ||x||)e_1 + x$. Entonces, la aplicacón S es bien definida y es 2-Lipschitziana. Denotamos R la traslación a la derecha definida en l_1 por, $R(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$. Entonces, $\dfrac{I+R}{2}$ esta definida de S^+ en S^+. Además, $T = \left(\dfrac{I+R}{2}\right) S$ definida de B en S^+ es 2-Lipschitziana. Como S es la identidad en S^+, tenemos $T^n = \left(\dfrac{I+R}{2}\right)^n S$ que es 2-Lipschitziana. Por lo tanto T es 2-Uniformemente Lipschitziana. Usando el Teorema de Isikhawa [I], $\left(\dfrac{I+R}{2}\right)$ es asintóticamente regular y T lo es también.
Finalmente, T no tiene punto fijo ninguno. En efecto, $T(x) = x$ implica que $||x|| = 1 \quad (\star)$ y entonces $S(x) = x$, lo que implica $\left(\dfrac{I+R}{2}\right)(x) = x$, esto es equivalente a $R(x) = x$, pero como $x = 0$ es el único punto fijo de R en l_1, llegamos a una contradicción con la propiedad $(\star)$.

Teorema 2.2.3. *Sea ρ un funcional modular cumpliendo la Δ_2-tipo condición y C un subconjunto ρ-acotado, ρ-a.e. secuencialmente compacto de L_ρ. Sea $T : C \to C$ una aplicación ρ-asintóticamente regular tal que $s(T) < K_{\rho-a.e.}(C)$. Entonces, T tiene un punto fijo.*

Demostración. Elegimos una subsucesión $\{n_k\}_k$ de la sucesión de números enteros positivos $\{n\}$ tal que $s(T) = \lim_{k\to+\infty} |T^{n_k}| = \liminf_{n\to+\infty} |T^n|$. Definimos un funcional r en C de la siguiente manera:

$$r(f) = \inf\{r > 0 : \text{ existe } g \in C \text{ tal que } \liminf_{k\to+\infty} \rho(f - T^{n_k} g) \leq r\}.$$

Como $s(T) < K_{\rho-a.e.}(C)$, existe dos números reales $\alpha, \mu \in (0,1)$ cumpliendo la siguiente propiedad (P): para todo $f, g \in C$ cumpliendo $\rho(f-g) \geq (1-\mu)r$ y para toda sucesión $\{h_n\} \subset C$ ρ-a.e. convergente a un elemento de C satisfaciendo $\limsup_{n\to+\infty} \rho(f-h_n) \leq (1+\mu)r$ y $\limsup_{n\to+\infty} \rho(g-h_n) \leq s(T)(1+\mu)r$, existe un cierto elemento $h \in C$ tal que $\liminf_{n\to+\infty} \rho(h-h_n) \leq \alpha r$.
Como $s(T) = \lim_{k\to+\infty} |T^{n_k}|$, existe un número entero positivo K tal que para todo $k \geq K$ tenemos $|T^{n_k}| < (1+\mu)^{\frac{1}{2}} s(T)$.
Sea $f \in C$. Por definición de $r(f)$ existe un número entero positivo K' tal que para todo $k \geq K'$ tenemos $\rho(f - T^{n_k} f) > r(f)(1-\mu)$. Fijamos un número entero k_0 tal que $k_0 \geq K, K'$. Tenemos

$$|T^{n_{k_0}}| < (1+\mu)^{\frac{1}{2}} s(T) \tag{1}$$

y

$$\rho(f - T^{n_{k_0}} f) > r(f)(1-\mu) \tag{2}$$

De nuevo, usando la definición de $r(f)$ existe $g \in C$ tal que

$$\liminf_{k\to+\infty} \rho(f - T^{n_k} g) \leq r(f)(1+\mu)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

Consideramos una subsucesión $\{n_{k'}\}_{k'}$ de $\{n_k\}_k$ tal que

$$\lim_{k'\to+\infty} \rho(f - T^{n_{k'}} g) = \liminf_{k\to+\infty} \rho(f - T^{n_k} g) \tag{4}$$

Podemos suponer que $\{T^{n_{k'}}\}_{k'}$ es ρ-a.e. convergente a un cierto elemento de C porque C es ρ-a.e. compacto. Veamos que

$$\limsup_{k'\to+\infty} \rho(T^{n_{k_0}} f - T^{n_{k'}} g) \leq s(T)(1+\mu) r(f) \tag{5}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\limsup_{k'\to+\infty} \rho(T^{n_{k_0}} f - T^{n_{k'}} g) &\leq |T^{n_{k_0}}| \limsup_{k'\to+\infty} \rho(f - T^{n_{k'}-n_{k_0}} g) \\
&= |T^{n_{k_0}}| \\
&\quad \times \limsup_{k'\to+\infty} \rho(f - T^{n_{k'}} g + T^{n_{k'}} g - T^{n_{k'}-n_{k_0}} g).
\end{aligned}$$

Como T es ρ-asintóticamente regular, tenemos

$$\lim_{k'\to+\infty} \rho(T^{n_{k'}}g - T^{n_{k'}-n_{k_0}}g) = 0.$$

Entonces, por el Lema (1.3.5) obtenemos

$$\limsup_{k'\to+\infty} \rho(T^{n_{k_0}}f - T^{n_{k'}}g) \leq |T^{n_{k_0}}| \limsup_{k'\to+\infty} \rho(f - T^{n_{k'}}g) \qquad (6).$$

Por tanto, la desigualdad (5) que se necesita es una consecuencia de una combinación de (1), (3), (4) y (6). Usando (2), (3), (4) , (5) y la propiedad (P), sabemos que existe $h \in C$ tal que

$$\liminf_{k'\to+\infty} \rho(T^{n_{k'}}g - h) \leq \alpha r(f)$$

se obtiene

$$r(h) \leq \alpha r(f).$$

Además

$$\begin{aligned}
\rho(h-f) &= \rho\left(2\left(\frac{h-f}{2}\right)\right) \\
&\leq \omega_\rho(2)\rho\left(\frac{h-f}{2}\right) \\
&\leq \omega_\rho(2)\Big(\liminf_{k'\to+\infty} \rho(h - T^{n_{k'}}g) + \liminf_{k'\to+\infty} \rho(T^{n_{k'}}g - f)\Big) \\
&\leq \omega_\rho(2)\Big(\alpha r(f) + (1+\mu)r(f)\Big) \\
&= Ar(f), \quad \text{donde } A = \omega_\rho(2)(\alpha + \mu + 1).
\end{aligned}$$

Por inducción, construimos una sucesión de la siguiente manera: elegimos $h_0 = f$. Supongamos que $h_0, h_1, ..., h_{n-1}$ ya están definidos y consideramos h_n como el elemento correspondiente a h_{n-1} en la construcción mencionada arriba. Entonces,

$$r(h_n) \leq \alpha r(h_{n-1}) \leq .... \leq \alpha^n r(h_0)$$

y

$$\rho(h_{n+1} - h_n) \leq Ar(h_n).$$

Por lo tanto, existe un número entero positivo N y un número real $0 < \beta < 1$ tal que para $n > N$ tenemos

$$\rho(h_{n+1} - h_n) \leq C\alpha^n \leq \beta^n, \quad \text{donde } \; C = Ar(h_0).$$

Lo que implica

$$\frac{1}{\beta^n} \leq \frac{1}{\rho(h_{n+1} - h_n)}$$

y

$$\omega_\rho{}^{-1}\left(\frac{1}{\beta^n}\right) \leq \omega_\rho{}^{-1}\left(\frac{1}{\rho(h_{n+1} - h_n)}\right).$$

La propiedad (5) en el lema (1.3.2) implica

$$\left(\omega_\rho{}^{-1}\left(\frac{1}{\beta}\right)\right)^n \leq \omega_\rho{}^{-1}\left(\frac{1}{\rho(h_{n+1} - h_n)}\right),$$

y del Lema (1.3.3) deducimos que

$$||h_{n+1} - h_n||_\rho \leq \frac{1}{\omega_\rho{}^{-1}\left(\frac{1}{\rho(h_{n+1} - h_n)}\right)} \leq \frac{1}{\left(\omega_\rho{}^{-1}(\frac{1}{\beta})\right)^n}.$$

Entonces $\{h_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $(L_\rho, ||.||_\rho)$ y por lo tanto, existe un $h \in L_\rho$ tal que $||h_n - h||_\rho \to 0$, porque $(L_\rho, ||.||_\rho)$ es completo. Como ya sabemos que bajo la Δ_2-tipo condición la convergencia en norma es equivalente a la convergencia modular, $\{h_n\}$ converge en modular a h. Usando la propiedad (2) del teorema (1.1.5), existe una subsucesión $\{g_n\}_n$ de $\{h_n\}_n$ tal que $g_n \to h$ ρ-a.e. y $h \in C$ porque C es ρ-a.e. secuencialmente cerrado. Veamos que $r(h) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos n bastante grande tal que

$$r(h_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \rho(h_n - h) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Existe $g \in C$ tal que $\liminf_{k\to+\infty} \rho(T^{n_k}g - h_n) \le \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces

$$\liminf_{k\to+\infty} \rho\left(\frac{T^{n_k}g - h}{2}\right) \le \liminf_{k\to+\infty} \rho(T^{n_k}g - h_n) + \rho(h_n - h) \le \varepsilon.$$

Por lo tanto

$$\liminf_{k\to+\infty} \rho(T^{n_k}g - h) \le \omega_\rho(2)\varepsilon$$

lo que implica

$$r(h) \le \omega_\rho(2)\varepsilon.$$

Como ε es arbitraria, obtenemos

$$r(h) = 0.$$

Finalmente, veamos que

$$T(h) = h.$$

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Existe $g \in C$ tal que $\liminf_{k\to+\infty} \rho(h - T^{n_k}g) < \varepsilon$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \rho\left(\frac{1}{3}(h - T(h)\right) &\le \liminf_{k\to+\infty} \rho(h - T^{n_k}g) + \liminf_{k\to+\infty} \rho(T^{n_k}g - T^{n_k+1}g) \\ &\quad + |T| \liminf_{k\to+\infty} \rho(T^{n_k}g - h) \\ &\le (1 + |T|)\varepsilon. \end{aligned}$$

De nuevo, la arbitrariedad de ε implica que $T(h) = h$. $\square$

2.3 El cálculo de algunos coeficientes en los espacios funcionales modulares

En lo que sigue supongamos que ρ es un funcional modular que es convexo y que cumple la Δ_2-condición.

Proposición 2.3.1. *Sea C un subconjunto ρ-acotado, ρ-a.e. secuencialmente compacto de L_ρ. Entonces,*

$$2 \leq h_{\rho-a.e.}(C).$$

Demostración. Sea $b < 2$. Dados $f, g \in C$, $r > 0$ con $\rho(f-g) \geq r$ y $\{h_n\}_n \subset C$ tal que $h_n \overset{\rho-a.e.}{\to} f \in C$ y $\limsup_{n\to+\infty} \rho(h_n - g) \leq br$, veamos que $\liminf_{n\to+\infty} \rho(h_n - f) \leq r$. Como C es ρ-acotado sabemos que $\limsup_{n\to+\infty} \rho(h_n - f) < +\infty$. Usando el Lema (1.3.4) tenemos

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} \rho(h_n - f) + r &\leq \liminf_{n\to+\infty} \rho(h_n - f) + \rho(f-g) \\
&= \liminf_{n\to+\infty} \rho(h_n - g) \\
&\leq br
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} \rho(h_n - f) &\leq (b-1)r \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

Por tanto, para todo $b < 2$ tenemos $b \leq h_{\rho-a.e.}(C)$, lo que implica que

$$2 \leq h_{\rho-a.e.}(C).$$

□

Proposición 2.3.2. *Sea C un subconjunto ρ-acotado, ρ-a.e. secuencialmente compacto de L_ρ. Entonces,*

$$h_{\rho-a.e.}(C) \leq K_{\rho-a.e.}(C).$$

Demostración. Sea $0 < b < h_{\rho-a.e.}(C)$, elegimos un número real $0 < d < 1$ tal que $b' := \dfrac{b}{d} < h_{\rho-a.e.}(C)$. Por definición de $h_{\rho-a.e.}(C)$ tenemos: dados $g, h \in C$ y $R > 0$ con $\rho(g-h) \geq R$ y para cualquier sucesión $\{h_n\}_n \subset C$ para la cual se cumple $h_n \overset{\rho-a.e.}{\to} h \in C$ y $\limsup_{n\to+\infty} \rho(h_n - g) \leq b'r$, tenemos $\liminf_{n\to+\infty} \rho(h_n - h) \leq R$.

Sea $0 < \varepsilon < 1$ tal que $\omega_\rho\left(\dfrac{1}{1-\varepsilon}\right)d < 1$. Denotamos $\delta := \dfrac{1-\omega_\rho\left(\dfrac{1}{1-\varepsilon}\right)d}{\omega_\rho\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)} > 0$ y elegimos $a \in (1, 1+\delta)$. Para todo $f, g \in C$, $r > 0$ con $\rho(f-g) \geq r$ y para todo sucesión $\{h_n\}_n \subset C$ que converge ρ-a.e. a un $h \in C$ satisfaciendo $\limsup_{n\to+\infty} \rho(h_n - f) \leq ar$ y $\limsup_{n\to+\infty} \rho(h_n - g) \leq br$ veamos que $\liminf_{n\to+\infty} \rho(h_n - h) \leq r$. Para ello distinguimos dos casos:

Primer caso. Supongamos que $\rho(f-h) < \delta r$. Probaremos que $\rho(g-h) \geq dr$. En efecto, si $\rho(g-h) < dr$ entonces

$$\begin{aligned}
\rho(f-g) &\leq \rho\left(\frac{f-h}{\varepsilon}\right) + \rho\left(\frac{g-h}{1-\varepsilon}\right) \\
&\leq \omega_\rho\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\rho(f-h) + \omega_\rho\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)\rho(g-h) \\
&< \omega_\rho\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\delta r + \omega_\rho\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)dr \\
&= r \quad \text{absurdo.}
\end{aligned}$$

Así obtenemos $\rho(g-h) \geq dr$, como $\{h_n\}_n$ converge ρ-a.e. a $h \in C$ y $\limsup_{n\to+\infty} \rho(h_n - g) \leq b'dr$, usando la definición de $h_{\rho-a.e.}(C)$ para b', obtenemos

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty}(h_n - h) &\leq dr \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

Segundo caso. Supongamos que $\rho(f-h) \geq \delta r$. Usando el lema (1.3.4) obtenemos

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} \rho(h_n - h) + \delta r &\leq \liminf_{n\to+\infty} \rho(h_n - h) + \rho(h-f) \\
&= \liminf_{n\to+\infty} \rho(h_n - f) \\
&\leq ar.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty}\rho(h_n-h) &\leq (a-\delta)r\\ &\leq r.\end{aligned}$$

En ambos casos hemos probado que $\liminf_{n\to+\infty}\rho(h_n-h)\leq r$, por lo tanto $b\leq K_{\rho-a.e.}(C)$ para cualquier numero real b cumpliendo $0<b<h_{\rho-a.e.}(C)$, lo que implica que

$$h_{\rho-a.e.}(C)\leq K_{\rho-a.e.}(C).$$

□

Proposición 2.3.3. *1)* $r_{\rho-a.e.}(c)=c\ \ \forall c>0,$

2) $h_{\rho-a.e.}(L_\rho)=2.$

Demostración. Sea $f\in L_\rho$ y $\{f_n\}_n\subset L_\rho$ que cumplen $c\leq\rho(f)<+\infty$ para un cierto $c>0$, $f_n\overset{\rho-a.e.}{\rightarrow}0$, $\liminf_{n\to+\infty}\rho(f_n)\geq 1$ y existe $k>0$ satisfaciendo $\sup_n\rho(kf_n)<+\infty$. Usando el Lema (1.3.4) obtenemos que

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty}\rho(f+f_n)-1 &= \liminf_{n\to+\infty}\rho(f_n)+\rho(f)-1\\ &\geq \rho(f)\\ &\geq c.\end{aligned}$$

Entonces,

$$r_{\rho-a.e.}(c)\geq c.$$

Como $c\leq\rho(f)<+\infty$, usando la convexidad del modular ρ obtenemos que

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{c}{\rho(f)}f\right) &\leq \frac{c}{\rho(f)}\rho(f)\\ &\leq c\\ &\leq \rho(f).\end{aligned}$$

Definimos una función ϕ en $\left[\frac{c}{\rho(f)}, 1\right]$ de la siguiente manera $\phi(t) = \rho(tf)$. Esta función es convexa y creciente, por tanto continua. Como $\phi\left(\frac{c}{\rho(f)}\right) \leq c \leq \phi(1)$, existe un $\lambda \in \left[\frac{c}{\rho(f)}, 1\right]$ tal que $\phi(\lambda) = \rho(\lambda f) = c$. Ahora elegimos $b = \liminf_{n\to+\infty} \rho(f_n) \geq 1$. Entonces, $\liminf_{n\to+\infty} \rho\left(\frac{f_n}{b}\right) \leq 1 \leq \liminf_{n\to+\infty} \rho(f_n)$. Definimos una función ψ en $\left[\frac{1}{b}, 1\right]$ de la siguiente manera $\psi(t) = \liminf_{n\to+\infty} \rho(tf_n)$. Esta función es convexa y creciente y por tanto continua. Como $\psi\left(\frac{1}{b}\right) \leq 1 \leq \psi(1)$, existe un cierto $\gamma \in \left[\frac{1}{b}, 1\right]$ tal que $\psi(\gamma) = \liminf_{n\to+\infty} \rho(\gamma f_n) = 1$. Como $\lambda f \in L_\rho$, $\rho(\lambda f) = c$, $\{\gamma f_n\}_n \subset L_\rho$, $\gamma f_n \overset{\rho-a.e.}{\to} 0$, $\liminf_{n\to+\infty} \rho(\gamma f_n) = 1$ y $\sup_n \rho\left(\left(\frac{k}{\gamma}\right)\gamma f_n\right) < +\infty$ se tiene

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty} \rho(\lambda f + \gamma f_n) - 1 &= \liminf_{n\to+\infty} \rho(\gamma f_n) + \rho(\lambda f) - 1 \\ &= c.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $r_{\rho-a.e.}(c) \leq c$ y así obtenemos que

$$r_{\rho-a.e.}(c) = c.$$

En lo que sigue demostraremos que

$$h_{\rho-a.e.}(L_\rho) = 2.$$

Hemos probado en la proposición (2.3.1) que $2 \leq h_{\rho-a.e.}(C)$ para cualquier subconjunto C ρ-acotado y ρ-a.e. secuencialmente compacto. Así $2 \leq h_{\rho-a.e.}(L_\rho)$. Falta probar que

$$h_{\rho-a.e.}(L_\rho) \leq 1 + r_{\rho-a.e.}(1).$$

Sea $\varepsilon > 0$, veamos que existe un subconjunto C no vacío, ρ-acotado y ρ-a.e. secuencialmente compacto de L_ρ tal que

$$h_{\rho-a.e.}(C) \leq 1 + r_{\rho-a.e.}(1) + \varepsilon \qquad (\spadesuit).$$

Denotamos $b = 1+r_{\rho-a.e.}(1)+\varepsilon$. Por definición de $r_{\rho-a.e.}(1)$ existe una sucesión $\{f_n\}_n \subset L_\rho$ tal que $f_n \overset{\rho-a.e.}{\to} 0$, $\liminf_{n\to+\infty} \rho(f_n) \geq 1$ y $\limsup_{n\to+\infty} \rho(kf_n) < +\infty$ para un cierto $k > 0$ y también existe un $f \in L_\rho$ verificando $1 \leq \rho(f) < +\infty$ tal que $\liminf_{n\to+\infty} \rho(f_n - f) < 1+r_{\rho-a.e.}(1)+\frac{\varepsilon}{2}$. Tomando $C = (\{f_n\}_n \bigcup\{f\}\bigcup\{0\})$, es obvio que C es un subconjunto ρ-acotado y ρ-a.e. secuencialmente compacto. Veamos que C cumple la propiedad (♠). Para ello, basta comprobar que b no satisface la siguiente propiedad (♣): para todo $g, h \in C$, $r > 0$ con $\rho(g - h) \geq r$, para toda sucesión $\{g_n\}_n \subset C$ cumpliendo $g_n \overset{\rho-a.e.}{\to} g \in C$ y $\limsup_{n\to+\infty} \rho(g_n - h) \leq br$ tenemos $\liminf_{n\to+\infty} \rho(g_n - g) \leq r$. En efecto, tomando $g = 0$, $h = f$, $r = \dfrac{1 + r_{\rho-a.e.}(1) + \frac{\varepsilon}{2}}{1 + r_{\rho-a.e.}(1) + \varepsilon} < 1$ y $\{g_n\}_n$ una subsucesión de $\{f_n\}_n$ por la cual se tiene $\lim_{n\to+\infty} \rho(g_n - f) = \liminf_{n\to+\infty} \rho(f_n - f)$, sabemos que $\{g_n\}_n$ converge ρ-a.e. a 0. Además

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to+\infty} \rho(g_n - h) &= \limsup_{n\to+\infty} \rho(g_n - f) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \rho(g_n - f) \\
&= \liminf_{n\to+\infty} \rho(f_n - f) \\
&< 1 + r_{\rho-a.e.}(1) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= br.
\end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} \rho(g_n - g) &= \liminf_{n\to+\infty} \rho(g_n) \\
&\geq \liminf_{n\to+\infty} \rho(f_n) \\
&\geq 1 \\
&> r.
\end{aligned}$$

Entonces, b no cumple la propiedad (♣) y por lo tanto, para cualquier $\varepsilon > 0$

tenemos

$$\begin{aligned} h_{\rho-a.e.}(C) &\leq b \\ &= 1 + r_{\rho-a.e.}(1) + \varepsilon \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} h_{\rho-a.e.}(L_\rho) &\leq 1 + r_{\rho-a.e.}(1) \\ &= 2. \end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Aplicaciones k-uniformemente Lipschitzianas en los espacios funcionales modulares

3.1 Introducción

En este capítulo estudiaremos la teoría del punto fijo para aplicaciones uniformemente Lipschitzianas en los espacios funcionales modulares. Para ello empezamos recordando algunos resultados de esta teoría en los espacios de Banach y los espacios métricos.

Definición 3.1.1. *Sea (M, d) un espacio de métrico y C un subconjunto de M. Se dice que una aplicación $T : C \to C$ es k-uniformemente Lipschitziana si existe $k > 0$ tal que*

$$d(T^n x, T^n y) \leq k d(x, y)$$

para cualquier $x, y \in C$, $n \in \mathbb{N}^*$.

El estudio de la teoría del punto fijo para aplicaciones k-uniformemente Lipschitzianas fue iniciado en 1973 por Goebel y Kirk [GoK3] quienes probaron el siguiente resultado:

Teorema 3.1.2. *Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo con el módulo de convexidad $\delta_X(\cdot)$ y C un subconjunto convexo, cerrado y acotado de X. Si $T : C \to C$ es una aplicación k-uniformemente Lipschitziana con constante k menor que la única solución de la ecuación:*

$$h\left(1-\delta_X\left(\frac{1}{h}\right)\right)=1.$$

Entonces, T tiene un punto fijo.

Espontáneamente surge la siguiente pregunta: ¿es la única solución de la ecuación $h\left(1-\delta_X\left(\frac{1}{h}\right)\right)=1$ la mejor cota superior de la constante k por la cual el teorema anterior sigue siendo cierto?

Nota 3.1.3. *Cuando el espacio de Banach X es un espacio de Hilbert H, la constante h es igual a: $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (ver [GoK3]).*

Dos años más tarde, Lifshitz [lif] introdujo la siguiente constante:

Definición 3.1.4. *Sea (M,d) un espacio métrico. Se define la característica de Lifshitz $\kappa(M)$ como:*

$$\kappa(M)=\sup\big\{b>0:\exists a>1 \textit{ tal que } \forall x,y\in M, \forall r>0, d(x,y)>r,$$

$$\exists z\in M \textit{ con } B(x,br)\cap B(y,ar)\subset B(z,r)\big\}.$$

$\Big($Aquí, $B(x,r)$ denota la bola cerrada centrada en x y de radio $r\Big)$.
Esta claro que $\kappa(M)\geq 1$. En [lif] es probado el siguiente teorema:

Teorema 3.1.5. *Sea (M, d) un espacio métrico, acotado, completo y $T : M \to M$ una aplicación k-uniformemente Lipschitziana con constante $k < \kappa(M)$. Entonces, T tiene un punto fijo.*

Para un espacio de Banach X se define la constante de Lifshitz de la siguiente manera:

$$\kappa_0(X) = \inf\{\kappa(M) : M \subset X \text{ convexo, cerrado y acotado}\}.$$

Como consecuencia del teorema (3.1.5) obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.1.6. *Sea X un espacio de Banach, C un subconjunto convexo, cerrado, acotado de X y $T : C \to C$ una aplicación k-uniformemente Lipschitziana con constante $k < \kappa_0(X)$. Entonces, T tiene un punto fijo.*

En [ADL] esta probado que si X es un espacio de Banach y h la solución de la ecuación $h\,(1 - \delta_X(1/h)) = 1$ entonces $h \leq \kappa_0(X)$, además cuando X es un espacio de Hilbert H tenemos $\kappa_0(H) = \sqrt{2}$. Así obtenemos una respuesta negativa a la pregunta anterior porque la constante de Lifschitz $\kappa_0(X)$ es una cota superior de k mejor que h en el teorema (3.1.2). Desde entonces se ha abierto una amplia línea de investigación que consiste en mejorar cada vez más la cota superior de la constante k de una aplicación k-uniformemente Lipschitziana para que siga teniendo un punto fijo. Una de estas cotas superiores como hemos visto, es la constante de Lipschitz $\kappa_0(X)$. Algunos autores han conseguido dar cotas inferiores a esta constante en espacios de Banach específicos (ver [AX], [Gor2] y [WZ]), sin embargo, todavía es desconocido el valor exacto de esta constante en un espacio de Banach general.
En el siguiente teorema (ver [ADL]) recordamos algunos resultados significativos en este sentido:

Teorema 3.1.7. *Sea X un espacio de Banach. Entonces,* *(1)* $\kappa_0(X) \leq N(X)$, *En particular* $\kappa_0(X) \leq \sqrt{2}$

(2) $\dfrac{1}{1-\delta_X(1)} \leq \kappa_0(X)$,

dónde, $N(X)$ *es el coeficiente de estructura normal del espacio de Banach* X *y* $\delta_X(.)$ *es el modulo de convexidad de* X.

En 1975 Lipschitz [Lif] mostró el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.1.8. *Sea* C *un subconjunto acotado, cerrado y convexo de* l^2. *Entonces, existe una aplicación* $T : C \to C$, $\frac{\pi}{2}$*-uniformemente Lipschitziana que no tiene ningún punto fijo.*

Dicho ejemplo muestra que en el caso de un espacio de Hilbert la mejor cota superior para la constante k de una aplicación k-uniformemente Lipschitziana se encuentra en el intervalo $[\sqrt{2}, \frac{\pi}{2})$ aunque su valor exacto es todavía desconocido. Hemos citado anteriormente algunos resultados de la teoría del punto fijo para las aplicaciones k-uniformemente Lipschitzianas que están relacionados con el módulo de Clarkson y la constante de Lipschitz de un espacio de Banach. No obstante, en 1984 Casini y Maluta han estudiado la misma teoría relacionandola con el coeficiente de la estructura normal de los espacios de Banach dando luz al siguiente teorema [CaM]:

Teorema 3.1.9. *Sea* X *un espacio de Banach que tiene estructura normal uniforme,* C *un subconjunto acotado, convexo de* X *y* $T : C \to C$ *una aplicación* k*-uniformemente Lipschitziana con* $k < \sqrt{N(X)}$. *Entonces,* T *tiene un punto fijo.*

Nuestro objetivo en el presente capítulo es estudiar en el caso modular la teoría del punto fijo para aplicaciones ρ-k-uniformemente Lipschitzianas en los espacios funcionales modulares.

- En la sección (3.2) definimos en el caso modular, el coeficiente de estructura normal $\tilde{N}(L_\rho)$ del espacio funcional modular L_ρ; luego damos un nuevo teorema del punto fijo para aplicaciones uniformemente Lipschitzianas en dichos espacios usando el coeficiente anterior y por último buscamos ejemplos de espacios modulares funcionales L_ρ que tienen estructura normal uniforme i.e. $\tilde{N}(L_\rho) < 1$.

- En la sección (3.3) definimos en el caso modular el coeficiente de Lifshitz $\kappa_\rho(C)$ para un subconjunto ρ-acotado de L_ρ y luego damos un teorema del punto fijo para una familia conmutativa de aplicaciones usando este coeficiente. En el caso particular de que la familia conmutativa de aplicaciones es reducida a un elemento, obtenemos un teorema del punto fijo para aplicaciones ρ-k-uniformemente Lipschitzianas semejante al teorema de Lifchitz en los espacios métricos.

3.2 Estructura normal uniforme y Teorema del punto fijo en espacios funcionales modulares

Sea B un subconjunto acotado de L_ρ. Definimos la ρ-bola de centro $f \in L_\rho$ y de radio $r > 0$ por

$$B(f,r) = \{g \in L_\rho, \ \ \rho(g-f) \le r\}.$$

Denotaremos

$$r(f,B) = \sup\{\rho(f-g), \ \ g \in B\}$$

$$\delta(B) = \sup\{r(f,B), \ \ f \in B\}$$

$$R(B) = \inf\{r(f,B), \quad f \in B\}.$$

Definimos la envoltura admisible de B como la intersección de las ρ-bolas que contienen B, i.e:

$$ad(B) = \bigcap\{A : B \subset A \subset L_\rho, \quad \text{donde } A \text{ es una } \rho\text{-bola}\}.$$

Cuando $ad(B) = B$ se dice que B es admisible. Definimos el coeficiente de estructura normal $\tilde{\mathrm{N}}(L_\rho)$ de L_ρ por:
$\tilde{\mathrm{N}}(L_\rho) = \sup\left\{\dfrac{R(B)}{\delta(B)}, \quad B \text{ es admisible, } \rho\text{-acotado y } \rho\text{-a.e. secuencialmente compacto}\right\}$. Cuando $\tilde{\mathrm{N}}(L_\rho) < 1$ se dice que el espacio funcional modular L_ρ tiene estructura normal uniforme. Dividimos la presente sección en los tres siguientes apartados:

- Lemas fundamentales
- El teorema principal
- Espacios funcionales modulares con estructura normal uniforme.

<u>Lemas fundamentales</u>

Lema 3.2.1. *Sea ρ un funcional modular, B un subconjunto ρ-acotado de L_ρ y $f \in L_\rho$. Entonces,*

(1) $r(f, ad(B)) = r(f,B)$.

(2) $\delta(ad(B)) = \delta(B)$.

Demostración. (1) Como $B \subset ad(B)$ entonces, $r(f,B) \leq r(f, ad(B))$. Supongamos por reducción al absurdo que $r(f,B) < r(f, ad(B))$. Existe un número real r tal que $r(f,B) < r < r(f, ad(B))$. La desigualdad $r(f,B) < r$ significa que $\sup\limits_{g\in B} \rho(f-g) < r$ lo que quiere decir que $B \subset B(f,r)$, por lo tanto

$ad(B) \subset B(f,r)$ lo que nos lleva a la siguiente contradicción $r(f, ad(B)) \leq r$. Por consiguiente

$$r(f,B) = r(f, ad(B)).$$

(2) Esta claro que $\delta(B) \leq \delta(ad(B))$. Supongamos por reducción al absurdo que $\delta(B) < \delta(ad(B))$, usando la propiedad *(1)* obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\delta(ad(B)) &= \sup_{f\in ad(B)} r(f, ad(B)) \\
&= \sup_{f\in ad(B)} r(f,B) \\
&= \sup_{f\in ad(B)} \sup_{g\in B} \rho(f-g) \\
&= \sup_{g\in B} \sup_{f\in ad(B)} \rho(f-g) \\
&= \sup_{g\in B} r(g, ad(B)) \\
&= \sup_{g\in B} r(g,B) \\
&= \delta(B).
\end{aligned}$$

□

Lema 3.2.2 (DKS2). *Sea ρ un funcional modular cumpliendo la Δ_2-tipo condición, B un subconjunto ρ-acotado, ρ-a.e. secuencialmente cerrado de L_ρ y $\{g_n\}_n$ una sucesión de B tal que $g_n \overset{\rho-a.e}{\rightarrow} g$. Entonces,*

(1) $\rho(g) \leq \liminf_{n\to+\infty} \rho(g_n)$.

(2) $B(0,r) \cap B$ *es ρ-a.e. secuencialmente cerrado.*

(3) $ad(A) \cap B$ *es ρ-a.e. secuencialmente cerrado, para todo $A \subset L_\rho$.*

Demostración. La condición *(1)* es una consecuencia directa del lema (1.3.4) aplicado a la sucesión $\{g_n\}$ que converge ρ-a.e. a g y a la función nula. Las condiciones *(2)* y *(3)* se deducen directamente de *(1)*. □

El siguiente lema es fundamental en nuestro resultado del punto fijo.

Lema 3.2.3. *Sea ρ un funcional modular que cumple la Δ_2-tipo condición y B un subconjunto ρ-acotado y ρ-a.e. secuencialmente compacto de L_ρ. Sea $\{f_n\}_n$ y $\{g_n\}_n$ dos sucesiones de B. Entonces, existe $g \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} ad(g_j,\ j \geq n) \cap B$ tal que*

$$\limsup_{n\to+\infty} \rho(g - f_n) \leq \limsup_{j\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \rho(g_j - f_n).$$

Demostración. Sea $\{f_n\}_n$ y $\{g_n\}_n$ dos sucesiones de B. Definimos $\theta(h) = \limsup_{n\to+\infty} \rho(h - f_n)$ para todo $h \in B$. Como B es ρ-secuencialmente compacto y ρ-acotado, existe una subsucesión $\{g_{\phi(n)}\}_n \subset \{g_n\}_n$ tal que $g_{\phi(n)} \overset{\rho-a.e.}{\to} g$ y una subsucesión $\{f_{\psi(n)}\}_n \subset \{f_n\}_n$ cumpliendo $\lim_{n\to+\infty} \rho(f_{\psi(n)} - g) = \limsup_{n\to+\infty} \rho(f_n - g)$ y $f_{\psi(n)} \overset{\rho-a.e.}{\to} f \in B$. Como $g_{\phi(n)} \in ad(g_j\ ,\ j \geq n) \cap B$ que es ρ-a.e. secuencialmente cerrado (propiedad *(3)* del lema (3.2.2)) y $g_{\phi(n)} \overset{\rho-a.e.}{\to} g$, obtenemos $g \in ad(g_j\ ,\ j \geq n) \cap B$ para todo $n \geq 1$. Veamos que $\theta(g) \leq \limsup_{j\to+\infty} \theta(g_j)$. En efecto, del lema (1.3.4) tenemos

$$\begin{aligned}
\theta(g_j) &= \limsup_{n\to+\infty} \rho(f_n - g_j) \\
&\geq \liminf_{n\to+\infty} \rho(f_{\psi(n)} - g_j) \\
&= \liminf_{n\to+\infty} \rho(f_{\psi(n)} - f) + \rho(f - g_j).
\end{aligned}$$

Entonces, usando de nuevo el lema (1.3.4) obtenemos

$$\begin{aligned}
\limsup_{j\to+\infty} \theta(g_j) &\geq \liminf_{n\to+\infty} \rho(f_{\psi(n)} - f) + \limsup_{j\to+\infty} \rho(f - g_j) \\
&\geq \liminf_{n\to+\infty} \rho(f_{\psi(n)} - f) + \liminf_{j\to+\infty} \rho(f - g_{\phi(j)}) \\
&= \liminf_{n\to+\infty} \rho(f_{\psi(n)} - f) + \liminf_{j\to+\infty} \rho(g_{\phi(j)} - g) + \rho(f - g).
\end{aligned}$$

De otro lado

$$\begin{aligned}\theta(g) &= \limsup_{n\to+\infty} \rho(f_n - g)\\ &= \liminf_{n\to+\infty} \rho(f_{\psi(n)} - g)\\ &= \liminf_{n\to+\infty} \rho(f_{\psi(n)} - f) + \rho(f - g).\end{aligned}$$

Entonces,

$$\theta(g) \leq \limsup_{j\to+\infty} \theta(g_j).$$

□

El siguiente lema es similar a un lema en [CaM] en el caso de un espacio de Banach reflexivo. El mismo lema sigue siendo cierto en el caso de un espacio métrico con algunas condiciones adicionales $\big($ver [LiX] lema (6)$\big)$.

Lema 3.2.4. *Sea ρ un funcional modular cumpliendo la Δ_2-tipo condición y B un subconjunto admisible, ρ-acotado y ρ-a.e. secuencialmente compacto de L_ρ. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de B y c una constante tal que $c > \tilde{N}(L_\rho)$. Entonces, existe $f \in B$ tal que*

(1) $\limsup_{n\to+\infty} \rho(f - f_n) \leq c\, \delta(\{f_n\}_n)$.

(2) $\rho(f - g) \leq \limsup_{n\to+\infty} \rho(f_n - g)$ *para todo* $g \in B$.

Demostración. Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de B. Denotamos $A_m = ad(f_j : j \geq m) \subset B$ y $A = \bigcap_{m=1}^{+\infty} A_m$. Como B es ρ-a.e. secuencialmente compacto, existe una subsucesión de $\{f_n\}_n$ ρ-a.e. convergente a un elemento $h \in A$ y entonces $A \neq \emptyset$. Además sabemos por la propiedad (2) del lema (3.2.1) que

$$\delta(A_n) = \delta(\{f_j\}_{j\geq n}).$$

De otro lado, sea $f \in A$ y $g \in B$ tenemos

$$\begin{aligned}
\rho(g-f) &\leq r(g, A) \\
&\leq r(g, A_n) \\
&= r(g, \{f_j : j \geq n\}) \\
&= \sup_{j \geq n} \rho(g - f_j).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\rho(g-f) \leq \limsup_{n \to +\infty} \rho(g - f_n) \quad \text{para todo } \; g \in B \text{ y } f \in A.$$

Veamos que existe $f \in A$ cumpliendo *(1)*. Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $\delta(\{f_n\}_n) > 0$. Elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $\tilde{\mathrm{N}}(L_\rho)\delta(\{f_n\}_n) + \varepsilon \leq c\,\delta(\{f_n\}_n)$. Por definición de $R(A_n)$, existe $g_n \in A_n$ tal que

$$\begin{aligned}
r(g_n, A_n) &< R(A_n) + \varepsilon \\
&\leq \tilde{\mathrm{N}}(L_\rho)\delta(A_n) + \varepsilon \\
&\leq \tilde{\mathrm{N}}(L_\rho)\delta(\{f_n\}_n) + \varepsilon \\
&\leq c\,\delta(\{f_n\}_n).
\end{aligned}$$

Como $r(g_n, A_n) = r(g_n, \{f_j\}_{j \geq n}) = \sup_{j \geq n} \rho(g_n - f_j)$, tenemos

$$\limsup_{j \to +\infty} \rho(g_n - f_j) \leq c\,\delta(\{f_n\}_n) \qquad (A).$$

Usando el Lema (3.2.3), existe $f \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} ad(g_i,\ i \geq n)$ tal que

$$\limsup_{j \to +\infty} \rho(f - f_j) \leq \limsup_{n \to +\infty} \limsup_{j \to +\infty} \rho(g_n - f_j) \qquad (B).$$

Comprobaremos que $f \in A$. En efecto, para todo i, n enteros tal que $i \geq n$ tenemos $g_i \in A_i \subset A_n$. Entonces, $\{g_i\}_{i \geq n} \subset A_n$ lo que implica que $ad(g_i,\ i \geq n) \subset A_n$ y $f \in A$. Usando las desigualdades (A) y (B) esta claro que

$$\limsup_{j \to +\infty} \rho(f - f_j) \leq c\,\delta(\{f_n\}_n). \qquad \square$$

El teorema principal

Definimos el concepto de una aplicación ρ-k-uniformemente Lipschitziana en el caso modular como sigue:

Sea B un conjunto ρ-acotado de L_ρ. Se dice que una aplicación $T : B \to B$ es ρ-k-uniformemente Lipschitziana si y sólo si:

$$\rho(T^n f - T^n g) \leq k\rho(f - g) \qquad \forall f, g \in B \ \text{ y } \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Teorema 3.2.5. *Sea ρ un funcional modular convexo cumpliendo la Δ_2-tipo condición y B un subconjunto admisible, ρ-a.e. secuencialmente compacto y ρ-acotado de L_ρ. Supongamos que $\tilde{N}(L_\rho) < 1$ y sea $T : B \to B$ una aplicación ρ-k-uniformemente Lipschitziana cumpliendo $k < (\tilde{N}(L_\rho))^{-1/2}$. Entonces, T tiene un punto fijo.*

Demostración. Se puede suponer que $k > 1$. En otro caso T sería ρ-no-expansiva y la existencia del punto fijo es una consecuencia de $\big($[KhKR], teorema (3.5)$\big)$. Elegimos un número real c tal que $\tilde{N}(L_\rho) < c < 1$ y $1 < k < c^{-1/2}$. Fijamos $f_0 \in B$. Por el lema (3.2.4), se puede construir una sucesión $\{f_j\}_{j\geq 0} \subset B$ cumpliendo las dos siguientes propiedades:

(1) $\limsup\limits_{n\to+\infty} \rho(T^n(f_j) - f_{j+1}) \leq c\,\delta(\{T^n(f_j)\}_n)$

(2) $\rho(f_{j+1} - g) \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} \rho(T^n(f_j) - g)$

para todo $j \geq 0$ y $g \in B$. Denotamos $D_j = \limsup\limits_{n\to+\infty} \rho(T^n(f_j) - f_{j+1})$ y $h = ck^2 < 1$. Para $n \geq m \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
\rho(T^m f_j - T^n f_j) &\leq k\rho(f_j - T^{n-m} f_j) \\
&\leq k \limsup_{i\to+\infty} \rho(T^i f_{j-1} - T^{n-m} f_j) \\
&\leq k^2 \limsup_{i\to+\infty} \rho(T^{i-(n-m)} f_{j-1} - f_j) \\
&\leq k^2 D_{j-1}.
\end{aligned}$$

Como $D_j = \limsup_{n\to+\infty} \rho(T^n(f_j) - f_{j+1}) \leq c\ \delta(\{T^n(f_j)\}_n)$, obtenemos $D_j \leq c\, k^2\ D_{j-1} = hD_{j-1}$. Entonces,

$$D_j \leq h^j\ D_0$$

por lo tanto la sucesión $\{D_j\}_j$ converge a zero. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\rho(f_{j+1} - f_j) &\leq \omega_\rho(2)\big(\rho(f_{j+1} - T^n f_j) + \rho(f_j - T^n f_j)\big)\\
&\leq \omega_\rho(2)\big(\rho(f_{j+1} - T^n f_j) + \limsup_{m\to+\infty} \rho(T^m f_{j-1} - T^n f_j)\big)\\
&\leq \omega_\rho(2)\big(\rho(f_{j+1} - T^n f_j) + k \limsup_{m\to+\infty} \rho(T^{m-n} f_{j-1} - f_j)\big)\\
&\leq \omega_\rho(2)\big(\rho(f_{j+1} - T^n f_j) + kD_{j-1}\big).
\end{aligned}$$

Pasando al lim sup cuando $n \to +\infty$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\rho(f_{j+1} - f_j) &\leq \omega_\rho(2)(D_j + kD_{j-1})\\
&\leq \omega_\rho(2)(h^j + kh^{j-1})D_0\\
&\leq \omega_\rho(2)(h + k)h^{j-1}D_0\\
&\leq Ah^j, \quad \text{donde } A = \omega_\rho(2)\frac{h+k}{h}D_0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, existe un cierto número entero N y un cierto número real β cumpliendo $0 < \beta < 1$ tal que para $j > N$ tenemos $\rho(f_{j+1} - f_j) \leq \beta^j$, lo que implica que $\dfrac{1}{\beta^j} \leq \dfrac{1}{\rho(f_{j+1} - f_j)}$. Usando las propiedades (3) y (5) del lema (1.3.2) obtenemos

$$\omega_\rho{}^{-1}\left(\frac{1}{\beta^j}\right) \leq \omega_\rho{}^{-1}\left(\frac{1}{\rho(f_{j+1} - f_j)}\right)$$

y

$$\left(\omega_\rho{}^{-1}\left(\frac{1}{\beta}\right)\right)^j \leq \omega_\rho{}^{-1}\left(\frac{1}{\rho(f_{j+1} - f_j)}\right).$$

por consiguiente, del lema (1.3.3) tenemos

$$||f_{j+1} - f_j||_\rho \leq \frac{1}{\omega_\rho{}^{-1}\left(\frac{1}{\rho(f_{j+1} - f_j)}\right)} \leq \frac{1}{\left(\omega_\rho{}^{-1}(\frac{1}{\beta})\right)^j}.$$

por lo tanto $\{f_j\}_j$ es una sucesión de Cauchy en $(L_\rho, ||.||_\rho)$. Entonces, existe $f \in L_\rho$ tal que $||f_j - f||_\rho \to 0$, porque $(L_\rho, ||.||_\rho)$ es completo. Como bajo la Δ_2-condición la convergencia en norma y la convergencia modular son equivalentes, obtenemos que $\{f_j\}_j$ es ρ-convergente a $f \in L_\rho$. Por lo tanto, existe una subsucesión de $\{f_j\}_j$ que converge ρ-a.e. a f $\big($ver propiedad (2) del teorema (1.1.5)$\big)$ y f pertenece a B porque B es ρ-a.e. secuencialmente cerrado. Veamos que f es un punto fijo de T. En efecto,

$$\begin{aligned}
\rho(f - Tf) &\leq \omega_\rho(3)\big(\rho(f - f_{j+1}) + \rho(f_{j+1} - T^n f_j) + \rho(T^n f_j - Tf)\big) \\
&\leq \omega_\rho(3)\big(\rho(f - f_{j+1}) + \rho(f_{j+1} - T^n f_j) + k\rho(T^{n-1} f_j - f)\big) \\
&\leq \omega_\rho(3)\Big(\rho(f - f_{j+1}) + \rho(f_{j+1} - T^n f_j) \\
&\quad + k\omega_\rho(2)\big(\rho(T^{n-1} f_j - f_{j+1}) + \rho(f_{j+1} - f)\big)\Big).
\end{aligned}$$

Pasando al limsup cuando $n \to +\infty$, tenemos

$$\rho(f - Tf) \leq \omega_\rho(3)\Big(\rho(f - f_{j+1}) + D_j + k\omega_\rho(2)\big(D_j + \rho(f_{j+1} - f)\big)\Big).$$

Ahora, pasando al lim cuando $j \to +\infty$, obtenemos

$$\rho(f - Tf) = 0, \quad \text{i.e. } T(f) = f.$$

□

Espacios funcionales modulares con estructura normal uniforme

Nuestro objetivo en esta sección es dar una clase de espacios funcionales modulares cuyos coeficientes de estructura normal cumplen

$$\tilde{\mathrm{N}}(L_\rho) < 1.$$

Empezamos recordando la definición del ρ-módulo de convexidad uniforme (ver [KhKS]). Sean $\varepsilon, r > 0$. Se define el ρ-módulo de convexidad uniforme por:

$$\begin{aligned}
\delta_\rho(r, \varepsilon) &= \inf\left\{1 - \frac{1}{r}\rho\left(\frac{f+g}{2}\right) \; ; \; \rho(f) \leq r, \rho(g) \leq r, \rho\left(\frac{f-g}{2}\right) \geq r\varepsilon\right\}. \\
&= \inf\left\{1 - \frac{1}{r}\rho\left(f + \frac{h}{2}\right) \; ; \; \rho(f) \leq r, \rho(f+h) \leq r; \rho\left(\frac{h}{2}\right) \geq r\varepsilon\right\}.
\end{aligned}$$

El siguiente lema nos permite relacionar el coeficiente de estructura normal $\tilde{\mathrm{N}}(L_\rho)$ con el ρ-módulo de convexidad uniforme.

Lema 3.2.6. *Sea ρ un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición. Entonces,*

$$\tilde{N}(L_\rho) \le 1 - \inf_{d>0} \delta_\rho(d,\gamma) \quad \textit{para todo} \quad \gamma \in \left(0, \frac{1}{\omega_\rho(2)}\right).$$

Demostración. Sea B un subconjunto admisible, ρ-acotado y ρ-a.e. secuencialmente compacto de L_ρ. Sabemos que B es convexo porque es una intersección de ρ-bolas que son convexas, como consecuencia de la convexidad de ρ. Denotamos $d = \delta(B)$ y $r = R(B)$. Sea $\varepsilon \in (0,1)$. Existe $f, g \in B$ tal que $\rho(f-g) \ge \varepsilon\delta(B)$. Entonces $\rho\left(\frac{f-g}{2}\right) \ge \frac{\rho(f-g)}{\omega_\rho(2)} \ge \frac{d\varepsilon}{\omega_\rho(2)}$. Sea $h \in B$. Sabemos que $\rho(h-f) \le d$, $\rho(h-g) \le d$ y $\rho\left(\frac{(h-f)-(h-g)}{2}\right) \ge \frac{d\varepsilon}{\omega_\rho(2)}$. Por definición de $\delta_\rho\left(d, \frac{\varepsilon}{\omega_\rho(2)}\right)$ tenemos

$$\begin{aligned} \rho\left(h - \frac{f+g}{2}\right) &= \rho\left(\frac{(h-f)+(h-g)}{2}\right) \\ &\le d\left(1 - \delta_\rho\left(d, \frac{\varepsilon}{\omega_\rho(2)}\right)\right), \end{aligned}$$

para todo $h \in B$. Entonces,

$$\frac{r}{d} \le 1 - \delta_\rho\left(d, \frac{\varepsilon}{\omega_\rho(2)}\right).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{N}}(L_\rho) &\le \sup_{d>0}\left(1 - \delta_\rho\left(d, \frac{\varepsilon}{\omega_\rho(2)}\right)\right) \\ &\le 1 - \inf_{d>0} \delta_\rho\left(d, \frac{\varepsilon}{\omega_\rho(2)}\right). \end{aligned}$$

$\square$

Recordamos la siguiente definición de función uniformemente convexa.

Definición 3.2.7. *Se dice que una aplicación $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ es uniformemente convexa, si para todo $\varepsilon \in (0,1)$ existe $\delta(\varepsilon) \in (0,1)$ tal que:*

$$0 \leq u \;\; y \;\; v \leq \varepsilon\, u \quad \textit{implica} \quad \Phi\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq (1-\delta(\varepsilon))\frac{\Phi(u)+\Phi(v)}{2}.$$

Algunas otras definiciones de aplicaciones uniformemente convexas se encuentran en [Ka, Kh]. En lo que sigue vamos a suponer que Φ es una N-función que cumple la Δ_2-tipo condición y que es uniformemente convexa. El siguiente lema permite relacionar el coeficiente de estructura normal uniforme de Φ con el ρ-módulo de convexidad del modular de Orlicz asociado a Φ (ver capítulo 1 páginas 28,29), donde Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$, Σ es la σ-algebra de Lebesgue y μ es la medida de Lebesgue.

Lema 3.2.8. *Sea Φ una N-función que cumple la Δ_2-tipo condición y que es uniformemente convexa. Sea ρ el funcional modular de Orlicz asociado a Φ. Entonces, existe $\varepsilon_0 \in (0,1)$, tal que para todo $\varepsilon \in (\varepsilon_0, 1)$ existe $\gamma(\varepsilon) \in \left(0, \frac{1}{\omega_\rho(2)}\right)$ con $\inf_{r>0} \delta_\rho(r, \gamma(\varepsilon)) > 0$.*

Demostración. Se puede encontrar $\varepsilon_0 \in (0,1)$ tal que $\dfrac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} < \dfrac{1}{\omega_\rho(2)}$ para todo $\varepsilon \in (\varepsilon_0, 1)$. Elegimos un $\varepsilon \in (\varepsilon_0, 1)$. Por definición de la convexidad uniforme de Φ, existe $\delta(\varepsilon) \in (0,1)$ tal que

$$0 \leq u \;\; \text{y} \;\; v \leq \varepsilon\, u \quad \text{implica} \quad \Phi\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq (1-\delta(\varepsilon))\frac{\Phi(u)+\Phi(v)}{2}.$$

Elegimos $\gamma(\varepsilon) > 0$ tal que $\dfrac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} < \gamma(\varepsilon) < \dfrac{1}{\omega_\rho(2)}$. Sea $r > 0$ y sean $f, h \in L_\rho$ tal que $\rho(f) \leq r$, $\rho(f+h) \leq r$ y $\rho\left(\dfrac{h}{2}\right) \geq r\gamma(\varepsilon)$.

Consideramos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{t \in \Omega \,/\, 0 \leq f(t)\,,\ f(t) < \varepsilon(f(t)+h(t))\}\,. \\
\Omega_2 &= \{t \in \Omega \,/\, 0 \leq f(t)\,,\ f(t)+h(t) < \varepsilon f(t)\}\,. \\
\Omega_3 &= \{t \in \Omega \,/\, f(t) < 0\,,\ \varepsilon(f(t)+h(t)) \leq f(t)\}\,. \\
\Omega_4 &= \{t \in \Omega \,/\, f(t) < 0\,,\ \varepsilon f(t) \leq f(t)+h(t)\}\,.
\end{aligned}$$

Tenemos

$$\rho\left(f+\frac{h}{2}\right) = \int_{\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{i=4}\Omega_i} \Phi\left(f(t)+\frac{h(t)}{2}\right)dt + \int_{\bigcup_{i=1}^{i=4}\Omega_i} \Phi\left(f(t)+\frac{h(t)}{2}\right)dt.$$

Usando la definición de la convexidad uniforme de la función Φ en $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ y Ω_4 obtenemos,

$$\Phi\left(\frac{f(t)+(f(t)+h(t))}{2}\right) \leq (1-\delta(\varepsilon))\,\frac{\Phi(f(t))+\Phi(f(t)+h(t))}{2}$$

para todo $t \in \cup_{i=1}^{i=4}\Omega_i$. Entonces, usando la convexidad de Φ en $\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{i=4}\Omega_i$ tenemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi\left(f(t)+\frac{h(t)}{2}\right)dt &\leq \int_{\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{i=4}\Omega_i} \Phi\left(f(t)+\frac{h(t)}{2}\right)dt \\
&\quad +(1-\delta(\varepsilon))\int_{\bigcup_{i=1}^{i=4}\Omega_i} \frac{\Phi(f(t))+\Phi(f(t)+h(t))}{2}dt \\
&\leq \int_{\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{i=4}\Omega_i} \frac{\Phi(f(t))+\Phi(f(t)+h(t))}{2}dt \\
&\quad +(1-\delta(\varepsilon))\int_{\bigcup_{i=1}^{i=4}\Omega_i} \frac{\Phi(f(t))+\Phi(f(t)+h(t))}{2}dt \\
&= \int_\Omega \frac{\Phi(f(t))+\Phi(f(t)+h(t))}{2}dt \\
&\quad -\delta(\varepsilon)\int_{\bigcup_{i=1}^{i=4}\Omega_i} \frac{\Phi(f(t))+\Phi(f(t)+h(t))}{2}dt \\
&\leq r-\delta(\varepsilon)\int_{\bigcup_{i=1}^{i=4}\Omega_i} \Phi\left(\frac{h(t)}{2}\right)dt, \qquad \text{(I)}
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es también una consecuencia de la convexidad y de la paridad de Φ, porque

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{h(t)}{2}\right) &= \Phi\left(\frac{(f(t)+h(t))-f(t)}{2}\right)\\ &\leq \frac{\Phi(f(t)+h(t))+\Phi(-f(t))}{2}\\ &= \frac{\Phi(f(t)+h(t))+\Phi(f(t))}{2}.\end{aligned}$$

Veamos que

$$\Phi\left(\frac{h(t)}{2}\right) \leq \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}\Phi(f(t)) \qquad \text{(II)}$$

para todo $t \in \Omega \setminus \cup_{i=1}^{i=4}\Omega_i$. Para probar esta desigualdad discutiremos dos casos:

Primer caso. Supongamos $f(t) \geq 0$. Como $t \in \Omega \setminus \cup_{i=1}^{i=4}\Omega_i$ tenemos

$$-\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}f(t) \leq \frac{h(t)}{2} \leq \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}f(t).$$

Por tanto, gracias a la paridad y la convexidad de Φ, obtenemos

$$\Phi\left(\frac{h(t)}{2}\right) = \Phi\left(\left|\frac{h(t)}{2}\right|\right) \leq \Phi\left(\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}f(t)\right) \leq \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}\Phi(f(t)).$$

Segundo caso. Supongamos $f(t) < 0$. Como $t \in \Omega \setminus \cup_{i=1}^{i=4}\Omega_i$, tenemos

$$-\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon}f(t) < \frac{h(t)}{2} < \frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon}f(t)$$

y conseguimos

$$\Phi\left(\frac{h(t)}{2}\right) = \Phi\left(\left|\frac{h(t)}{2}\right|\right) < \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}\Phi(f)$$

como arriba.

Así la desigualdad (II) queda probada. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus\cup_{i=1}^{i=4}\Omega_i}\Phi\left(\frac{h(t)}{2}\right)dt &\leq \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}\int_{\Omega\setminus\cup_{i=1}^{i=4}\Omega_i}\Phi(f(t))dt\\ &\leq \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}r\end{aligned}$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\bigcup_{i=1}^{i=4}\Omega_i} \Phi\left(\frac{h(t)}{2}\right) dt &= \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{h(t)}{2}\right) dt - \int_{\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{i=4}\Omega_i} \Phi\left(\frac{h(t)}{2}\right) dt \\ &\geq r\gamma(\varepsilon) - \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} r \qquad \text{(III)}. \end{aligned}$$

De las desigualdades (I) y (III) se obtiene

$$\rho\left(f + \frac{h}{2}\right) \leq r\left(1 - \delta(\varepsilon)\left(\gamma(\varepsilon) - \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}\right)\right)$$

y

$$\delta(\varepsilon)\left(\gamma(\varepsilon) - \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}\right) \leq 1 - \frac{\rho\left(f + \frac{h}{2}\right)}{r}.$$

Entonces

$$\delta(\varepsilon)\left(\gamma(\varepsilon) - \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}\right) \leq \delta_\rho\big(r, \gamma(\varepsilon)\big) \quad \text{para todo} \quad r > 0$$

por lo tanto

$$\inf_{r>0} \delta_\rho\big(r, \gamma(\varepsilon)\big) \geq \delta(\varepsilon)\left(\gamma(\varepsilon) - \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}\right) > 0.$$

□

Usando el lema (3.2.6) y el lema (3.2.8) obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.2.9. *Sea Φ una N-función que cumple la Δ_2-tipo condición y que es uniformemente convexa. Entonces, el espacio funcional modular de Orlicz L_ρ asociado a Φ cumple $\tilde{N}(L_\rho) < 1$.*

Para dar ejemplos de funciones que cumplen las condiciones del corolario (3.2.9) necesitamos el siguiente resultado [HKM]: si $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una aplicación que cumple $\limsup_{t\to 0} \frac{\Phi'(at)}{\Phi'(t)} < 1$ y $\limsup_{t\to\infty} \frac{\Phi'(at)}{\Phi'(t)} < 1$ para todo $a \in (0,1)$ entonces, Φ es uniformemente convexa. Es fácil de probar que las siguientes funciones

$$\Phi_1(t) = |t|^p \quad \text{para} \quad p > 1,$$

$$\Phi_2(t) = t^2 - \log(1+t^2),$$

$$\Phi_3(t) = -t + (1+t)\log(1+t).$$

son N-funciones que cumplen la Δ_2-tipo condición y que son uniformemente convexas.

3.3 Teorema del punto para una familia conmutativa de aplicaciones

Sea C un subconjunto ρ-acotado del espacio funcional modular L_ρ y sea $T : C \to C$ una aplicación. Definimos los coeficientes $|T|$ y $\kappa_\rho(C)$ respectivamente por:
$|T| = \sup\left\{\dfrac{\rho(Tf - Tg)}{\rho(f-g)} \ : \ f,g \in C\right\}$ y $\kappa_\rho(C) = \sup\{b > 0 :$ existe $a > 1$ tal que para todo $f,g \in C$ y para todo $r > 0$ cumpliendo $\rho(f-g) > r$, existe $h \in C$ tal que $B(f,br) \cap B(g,ar) \subset B(h,r)\}$ donde $B(f,r) = \{g \in L_\rho : \rho(g-f) \leq r\}$.
El siguiente teorema es un teorema del punto fijo para una familia conmutativa de aplicaciones.

Teorema 3.3.1. *Sea ρ un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición, C un subconjunto ρ-acotado, ρ-a.e. secuencialmente compacto de L_ρ y $\Sigma = \{T_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia conmutativa de aplicaciones que van de C en si mismo. Supongamos que*

$$\sup\left\{|\Pi_{\alpha\in A} T_\alpha^{\phi(\alpha)}| \ : \ \phi \in A^{\mathbb{N}}\right\} < \kappa_\rho(C).$$

Entonces, existe un punto fijo común de la familia Σ.

Demostración. Sea $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup\left\{|\Pi_{\alpha\in A} T_\alpha^{\phi(\alpha)}| \ : \ \phi \in A^{\mathbb{N}}\right\} < b_1 < b_2 < \kappa_\rho(C). \tag{1}$$

Definimos un numero positivo $r(f)$ para todo $f \in C$ por

$$r(f) = \inf\{r > 0 : \exists g \in C \; / \; \forall \phi \in A^{\mathbb{N}} \;\; \rho(\Pi_{\alpha\in A} T_\alpha^{\phi(\alpha)} g - f) \leq r\}.$$

Es fácil de probar que $r(f) = 0$ si y sólo si $T_\alpha(f) = f$ para todo $\alpha \in A$. En efecto: supongamos que $r(f) = 0$, sea $\varepsilon > 0$. Existe $g \in C$ tal que

$$\rho(\Pi_{\alpha\in A} T_\alpha^{\phi(\alpha)} g - f) \leq \varepsilon \;\text{ para todo } \phi \in A^{\mathbb{N}}. \tag{2}$$

Fijamos $\alpha_0 \in A$ y elegimos en (1) y (2) $\phi : A \to \mathbb{N}$ tal que

$$\phi(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \alpha_0 \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \alpha_0 \,. \end{cases}$$

Obtenemos

$$|T_{\alpha_0}| < b_1 \;\text{ y }\; \rho(T_{\alpha_0}(g) - f) \leq \varepsilon.$$

Ahora elegimos en (2), $\phi : A \to \mathbb{N}$ tal que $\phi(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in A$. Obtenemos $\rho(f - g) \leq \varepsilon$. Entonces,

$$\begin{aligned} \rho(T_{\alpha_0} f - f) &\leq \omega(2)\Big(\rho(T_{\alpha_0} f - T_{\alpha_0} g) + \rho(T_{\alpha_0} g - f)\Big) \\ &\leq \omega(2)\Big(|T_{\alpha_0}|\rho(f - g) + \rho(T_{\alpha_0} g - f)\Big) \\ &\leq \omega(2)(b_1 + 1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Como ε es arbitrario obtenemos $\rho(T_{\alpha_0} f - f) = 0$. Por lo tanto

$$T_{\alpha_0} f = f \;\text{ para un arbitrario } \alpha_0 \in A.$$

Ahora supongamos que $T_\alpha(f) = f$ para todo $\alpha \in A$, entonces $T_\alpha^{\phi(\alpha)}(f) = f$ para todo $\phi \in A^{\mathbb{N}}$ y $\rho(\Pi_{\alpha\in A} T_\alpha^{\phi(\alpha)} f - f) = 0 < \varepsilon$ para todo $\phi \in A^{\mathbb{N}}$ y $\varepsilon > 0$. Así $r(f) \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, lo que implica que $r(f) = 0$.
Veamos que existe $h_0 \in C$ tal que $r(h_0) = 0$ y por tanto h_0 es un punto fijo

común de Σ. Supongamos que f_0 es arbitrario y que $f_1, f_2, ..., f_n$ son elementos que ya están construidos en C. Vamos a construir f_{n+1} de modo que $r(f_{n+1}) \leq \lambda r(f_n)$ y $\rho(f_{n+1} - f_n) \leq \omega(2)(\lambda + \gamma) r(f_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para ciertos números reales λ, γ tal que $\lambda \in (0,1)$ y $\gamma \in (1, +\infty)$. Según la definición de $\kappa_\rho(C)$, tenemos la siguiente propiedad (P): existe $a > 1$ tal que para todo $f, g \in C$ y $r > 0$ con $r < \rho(f - g)$ existe $h \in C$ tal que $B(f, b_2 r) \cap B(g, ar) \subset B(h, r)$. Como $a > 1$ y $\dfrac{b_2}{b_1} > 1$ elegimos $\lambda \in (0,1)$ y $\gamma \in (1, +\infty)$ tal que $\gamma = \min\left(a\lambda, \dfrac{b_2}{b_1}\lambda\right) > 1$. Si $r(f_n) = 0$ entonces f_n es un punto fijo común de Σ. Si $r(f_n) > 0$ tenemos $\lambda r(f_n) < r(f_n) < \gamma r(f_n)$. Entonces

$$\forall g \in C \ \exists \psi \in A^{\mathbb{N}} \text{ tal que } \rho(\Pi_{\alpha \in A} T_\alpha^{\psi(\alpha)} g - f_n) > \lambda r(f_n) \tag{3}$$

y

$$\exists g \in C \text{ tal que } \forall \phi \in A^{\mathbb{N}} \text{ se tiene } \rho(\Pi_{\alpha \in A} T_\alpha^{\phi(\alpha)} g - f_n) \leq \gamma r(f_n). \tag{4}$$

Tomamos en (3), $g = f_n$. Entonces existe $\psi \in A^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\rho(\Pi_{\alpha \in A} T_\alpha^{\psi(\alpha)} f_n - f_n) > \lambda r(f_n). \tag{5}$$

Sabemos por la propiedad (4) que existe $g_0 \in C$ tal que para todo $\varphi \in A^{\mathbb{N}}$ tenemos

$$\rho(\Pi_{\alpha \in A} T_\alpha^{\varphi(\alpha)} g_0 - f_n) \leq \gamma r(f_n). \tag{6}$$

Denotamos $h_0 = \Pi_{\alpha \in A} T_\alpha^{\psi(\alpha)} g_0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\rho(\Pi_{\alpha \in A} T_\alpha^{\varphi(\alpha)} h_0 - \Pi_{\alpha \in A} T_\alpha^{\psi(\alpha)} f_n) &= \rho(\Pi_{\alpha \in A} T_\alpha^{(\varphi+\psi)(\alpha)} g_0 - \Pi_{\alpha \in A} T_\alpha^{\psi(\alpha)} f_n) \\
&= \rho\Big(\Pi_{\alpha \in A} T_\alpha^{\psi(\alpha)} (\Pi_{\alpha \in A} T_\alpha^{\varphi(\alpha)} g_0) \\
&\quad - \Pi_{\alpha \in A} T_\alpha^{\psi(\alpha)} (f_n)\Big) \\
&\leq |\Pi_{\alpha \in A} T_\alpha^{\psi(\alpha)}| \ \rho(\Pi_{\alpha \in A} T_\alpha^{\varphi(\alpha)} g_0 - f_n) \\
&\leq b_1 \gamma r(f_n) \\
&\leq b_2 \gamma r(f_n).
\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\rho(\Pi_{\alpha\in A}T_\alpha^{\varphi(\alpha)}h_0 - \Pi_{\alpha\in A}T_\alpha^{\psi(\alpha)}f_n) \le b_2\gamma r(f_n). \tag{7}$$

Gracias a las propiedades (5),(6) y (7) tenemos, para todo $\varphi \in A^{\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} \rho(\Pi_{\alpha\in A}T_\alpha^{\psi(\alpha)}f_n - f_n) > \lambda r(f_n) \\ \rho(\Pi_{\alpha\in A}T_\alpha^{\varphi(\alpha)}h_0 - f_n) \le a\lambda r(f_n) \\ \rho(\Pi_{\alpha\in A}T_\alpha^{\varphi(\alpha)}h_0 - \Pi_{\alpha\in A}T_\alpha^{\psi(\alpha)}f_n) \le b_2\lambda r(f_n) \end{cases}$$

Entonces, $\Pi_{\alpha\in A}T_\alpha^{\varphi(\alpha)}h_0 \in B\Big(f_n, a\lambda r(f_n)\Big)\bigcap B\Big(\Pi_{\alpha\in A}T_\alpha^{\psi(\alpha)}f_n, b_2\lambda r(f_n)\Big)$.
La propiedad (P) implica que existe $f_{n+1} \in C$ tal que

$$B\Big(f_n, a\lambda r(f_n)\Big)\bigcap B\Big(\Pi_{\alpha\in A}T_\alpha^{\psi(\alpha)}f_n, b_2\gamma r(f_n)\Big) \subset B\Big(f_{n+1}, \lambda r(f_n)\Big).$$

Por lo tanto para todo $\varphi \in A^{\mathbb{N}}$ tenemos

$$\rho(\Pi_{\alpha\in A}T_\alpha^{\varphi(\alpha)}h_0 - f_{n+1}) \le \lambda r(f_n), \tag{8}$$

lo que implica que $r(f_{n+1}) \le \lambda r(f_n)$. Tomando $\varphi = \psi$ en (6) se tiene $\rho(h_0 - f_n) \le \gamma r(f_n)$ y tomando $\varphi = 0$ (la función nula) en (8) se tiene $\rho(h_0 - f_{n+1}) \le \lambda r(f_n)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \rho(f_{n+1} - f_n) &\le \omega(2)\big(\rho(f_{n+1} - h_0) + \rho(h_0 - f_n)\big) \\ &\le \omega(2)(\gamma + \lambda)r(f_n). \end{aligned}$$

Así obtenemos

$$r(f_n) \le \lambda r(f_{n-1}) \le \lambda^2 r(f_{n-2}) \ldots\ldots \le \lambda^{n-1} r(f_1)$$

y

$$\rho(f_{n+1} - f_n) \le \omega(2)(\lambda + \gamma)\lambda^{n-1} r(f_1).$$

Por lo tanto, existe un cierto número entero positivo N y un cierto número real β cumpliendo $0 < \beta < 1$ tal que para todo $n > N$ tenemos

$$\rho(f_{n+1} - f_n) \leq \beta^n,$$

lo que implica que

$$\frac{1}{\beta^n} \leq \frac{1}{\rho(f_{n+1} - f_n)}$$

y

$$\omega_\rho{}^{-1}\left(\frac{1}{\beta^n}\right) \leq \omega_\rho{}^{-1}\left(\frac{1}{\rho(f_{n+1} - f_n)}\right).$$

La propiedad (5) en el lema (1.3.2) implica que

$$\left(\omega_\rho{}^{-1}\left(\frac{1}{\beta}\right)\right)^n \leq \omega_\rho{}^{-1}\left(\frac{1}{\rho(f_{n+1} - f_n)}\right),$$

y del Lema (1.3.3) deducimos que

$$||f_{n+1} - f_n||_\rho \leq \frac{1}{\omega_\rho{}^{-1}\left(\frac{1}{\rho(f_{n+1}-f_n)}\right)} \leq \frac{1}{\left(\omega_\rho{}^{-1}(\frac{1}{\beta})\right)^n}.$$

Entonces, $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $(L_\rho, ||.||_\rho)$ donde $||.||_\rho$ es la norma de Luxemburg asociada a ρ. Como $(L_\rho, ||.||_\rho)$ es completo, existe $h_0 \in L_\rho$ tal que $\lim_{n\to+\infty} ||f_n - h_0||_\rho = 0$. Entonces $\lim_{n\to+\infty} \rho(f_n - h_0) = 0$ porque bajo la Δ_2-tipo condición la convergencia en norma y la convergencia modular son equivalentes en L_ρ. Comprobaremos que $h_0 \in C$. Como $\{f_n\}_n$ es un modular convergente a h_0 existe $\{f_{n_k}\}_k$ una subsucesión de $\{f_n\}_n$ tal que $f_{n_k} \overset{\rho-a.e}{\to} h_0$ (ver la propiedad (2) del teorema (1.1.5)). Como $f_{n_k} \in C$ y C es ρ-a.e. secuencialmente cerrado, entonces obtenemos que $h_0 \in C$. Finalmente, probaremos que $r(h_0) = 0$. Elegimos $\varepsilon > 0$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r(f_n) < \varepsilon/2$ y $\rho(f_n - h_0) < \varepsilon/2$. Entonces existe $g \in C$ tal que $\rho(\Pi_{\alpha\in A} T_\alpha^{\phi(\alpha)} g - f_n) \leq \varepsilon/2$ para todo $\phi \in A^{\mathbb{N}}$ lo que implica que para todo $\phi \in A^{\mathbb{N}}$ tenemos

$$\begin{aligned} \rho(\Pi_{\alpha\in A} T_\alpha^{\phi(\alpha)} g - h_0) &\leq \omega(2)\Big(\rho(\Pi_{\alpha\in A} T_\alpha^{\phi(\alpha)} g - f_n) + \rho(f_n - h_0)\Big) \\ &\leq \omega(2)\varepsilon. \end{aligned}$$

Entonces,

$$r(h_0) \leq \omega(2)\varepsilon \quad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

Por lo tanto

$$r(h_0) = 0.$$

□

Nota 3.3.2. *Cuando la familia Σ en el teorema (3.3.1) se reduce a un único elemento, obtenemos el siguiente teorema del punto fijo para aplicaciones ρ-k-uniformemente Lipschitzianas:*

Teorema 3.3.3. *Sea ρ un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición. Sea C un subconjunto ρ-acotado, ρ-a.e. secuencialmente compacto de L_ρ y $T : C \to C$ una aplicación ρ-k-uniformemente Lipschitziana con $k < \kappa_\rho(C)$. Entonces, T tiene un punto fijo.*

Capítulo 4

Aplicaciones asintóticamente no-expansivas en espacios funcionales modulares

4.1 Introducción

Definición 4.1.1. *Sea X un espacio de Banach, C un subconjunto cerrado, acotado, convexo de X y $T : C \to C$ una aplicación.*

(1) Se dice que T es no-expansiva si

$$||T^n x - T^n y|| \leq ||x - y|| \quad \forall x, y \in C.$$

(2) Se dice que T es asintóticamente no-expansiva si existe una sucesión de numeros reales $\{k_n\}_n$ con $\lim_{n \to +\infty} k_n = 1$ tal que

$$||T^n x - T^n y|| \leq k_n ||x - y|| \quad \forall x, y \in C.$$

(3) Se dice que T es del tipo asintóticamente no-expansiva si

$$\limsup_{n\to+\infty}\left(\sup\{||T^n x - T^n y|| - ||x-y|| \ : \ y \in C\}\right) \leq 0 \quad \forall x \in C.$$

Es facíl de probar que una aplicación no-expansiva es asintóticamente no-expansiva y a su vez, una aplicación asintóticamente no-expansiva es del tipo asintóticamente no-expansiva.
En 1965, Browder [Br2] probó el siguiente teorema:

Teorema 4.1.2. *Sea H un espacio de Hilbert, C un subconjunto cerrado, acotado convexo de H y $T : C \to C$ una aplicación no-expansiva. Entonces, T tiene un punto fijo.*

En este mismo año Browder [Br3], Göhde [Goh] y Kirk [Ki1] probaron que este resultado podía ser mejorado suponiendo una condición más débil, como la de ser X un espacio de Banach uniformemente convexo o un espacio de Banach reflexivo con estructura normal. Siete años después, en 1972, Goebel y Kirk [GoK1], mostraron el siguiente teorema:

Teorema 4.1.3. *Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo, C un subconjunto cerrado, acotado, convexo de X y $T : C \to C$ una aplicación asintóticamente no-expansiva. Entonces, T tiene un punto fijo.*

Este teorema, es por tanto, una generalización a la familia de aplicaciones asintóticamente no-expansiva del teorema de Kirk [Ki1] e inicia la teoría del punto fijo para aplicaciones asintóticamente no-expansivas en los espacios de Banach.
Dos años después, en 1974, Kirk [Ki2] probó el siguiente teorema:

Teorema 4.1.4. *Sea X un espacio de Banach con la característica de convexidad inferior estrictamente a 1 i.e. $\varepsilon_0(X) < 1$. Sea C un subconjunto cerrado,* *acotado y convexo de X y $T : C \to C$ una aplicación del tipo asintóticamente no-expansiva con T^N continua para un cierto entero N. Entonces, T tiene un punto fijo.*

A su vez, este teorema es una generalización del teorema (4.1.3) a la familia de aplicaciones del tipo asintóticamente no-expansivas. En 1986, Yu y Dai [YD] extendieron el teorema (4.1.3) de Goebel y Kirk a los espacios de Banach (2-UR) 2-uniformemente rotundos. Posteriormente en su artículo [Xu1] Xu probó que el teorema de Yu y Dai es cierto también para las aplicaciones del tipo asintóticamente no-expansivas en los espacios de Banach (k-UR) k-uniformemente rotundos para $0 < k < +\infty$. En 1991, Xu [Xu2] mostró el siguiente teorema:

Teorema 4.1.5. *Sea X un espacio de Banach (N.U.C) casi uniformemente convexo, C un subconjunto cerrado, acotado, convexo de X y $T : C \to C$ una aplicación del tipo asintóticamente no-expansiva con T^N continua para un cierto entero N. Entonces, T tiene un punto fijo.*

Como los espacios uniformemente convexos y los espacios k-uniformemente rotundos para $0 < k < +\infty$ son espacios (N.U.C) casi uniformemente convexos y como las aplicaciones no-expansivas y las aplicaciones asintóticamente no-expansivas son aplicaciones del tipo asintóticamente no-expansivas, este último teorema es una geneneralización de todos los teoremas anteriores.
Restringiéndonos a las aplicaciones asintóticamente no-expansiva, haremos en lo que sigue un estudio de la teoría del punto fijo de este tipo de aplicaciones en los espacios funcionales modulares, probando los dos siguientes teoremas:

Teorema 4.1.6. *Sea ρ un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición y que es σ-finito. Sea C un subconjunto ρ-acotado, ρ-a.e. secuen-*

cialmente compacto de L_ρ. Sea $T : C \to C$ una aplicación ρ-asintóticamente no-expansiva y H un subconjunto de C que cumple las siguientes propiedades:

(i) si $f \in H$ entonces $\Omega_{\rho-a.e}(f) \subset H$;

(ii) para todo $f \in H$, toda subsucesión $\{T^{n_i}(f)\}_i$ de $\{T^n(f)\}_n$ tiene una subsucesión que es ρ-convergente.

Entonces, T tiene un punto fijo en H.

Teorema 4.1.7. *Sea ρ un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición y que es σ-finito. Sea C un subconjunto ρ-acotado y ρ-a.e. secuencialmente compacto de L_ρ. Sea $T : C \to C$ una aplicación ρ-asintóticamente no-expansiva. Entonces, T tiene un punto fijo.*

Cuando $L_\rho = L_1(\Omega, \mu)$ para una medida σ-finita μ, obtenemos el siguiente corolario que extiende un resultado de Lennard [Le] para las aplicaciones no-expansivas:

Corolario 4.1.8. *Sea C un subconjunto acotado convexo y compacto para la topología de la convergencia local en medida de $L_1(\Omega, \mu)$ y $T : C \to C$ una aplicación asintóticamente no-expansiva. Entonces, T tiene un punto fijo.*

4.2 Topologías equivalentes

El concepto de conjuntos ρ-a.e. cerrados, ρ-a.e. compactos ha sido extensivamente estudiado en el caso secuencial. Uno de los problemas que bastantes autores han encontrado difícil de superar es, si estas nociones provienen de una topología. En esta sección discutimos este problema. En particular, construimos una topología τ por la cual la ρ-a.e. compacidad secuencial es equivalente a la compacidad usual de τ. Esto será imprescindible para el uso del lema de

Zorn.

En lo que sigue suponemos que ρ es un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición y que es σ-finito i.e. $\Omega = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$, donde $\{K_n\}_n$ es una sucesión creciente de elementos de $\mathcal{P}$ con $0 < \rho(1_{K_n}) < +\infty$, para cualquier entero no nulo n.

Consideramos un funcional $d : L_\rho \times L_\rho \to \mathbb{R}^+$ definido por:

$$d(f,g) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{1}{\rho(1_{K_k})} \rho\left(\frac{|f-g|}{1+|f-g|} 1_{K_k}\right).$$

En la siguiente proposición veamos algunas propiedades básicas que cumple el funcional d.

Proposición 4.2.1. *Sea ρ un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición y que es σ-finito. Entonces el funcional d cumple las siguientes propiedades:*

(1) $d(f,g) = 0$ *si y sólo si* $f = g$,

(2) $d(f,g) = d(g,f)$,

(3) $d(f,g) \leq \frac{\omega_\rho(2)}{2}\big(d(f,h) + d(h,g)\big)$.

Demostración. Las dos propiedades *(1)* y *(2)* son obvias. Para probar *(3)* se usa la definición de la función de crecimiento ω_ρ y la siguiente desigualdad:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

válida para todo $a, b \in \mathbb{R}$. □

En la siguiente proposición discutimos la relación existente entre la ρ-a.e. convergencia y la d-convergencia.

Proposición 4.2.2. *Sea ρ un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición y que es σ-finito. Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones medibles. Si $\{f_n\}_n$ converge ρ-a.e. a f, entonces*

$$\lim_{n\to+\infty} d(f_n, f) = 0.$$

Además, si $\{f_n\}_n$ es d-convergente a f, i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} d(f_n, f) = 0,$$

entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_k$ que converge ρ-a.e. a f.

Demostración. Supongamos que $\{f_n\}_n$ converge ρ-a.e. a f, veamos que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(f_n, f) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1$, existe un entero N tal que para todo $k > N$ tenemos $\sum\limits_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} d(f_n, f) &\leq \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} \frac{1}{\rho(1_{K_k})} \rho\left(\frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} 1_{K_k} \right) + \varepsilon \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{1}{\rho(1_{K_k})} \rho\left(\frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} 1_{K_k} \right) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Para cualquier entero no nulo k tenemos

$$\frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} 1_{K_k} \overset{\rho-a.e.}{\to} 0 \qquad \text{cuando} \qquad n \to +\infty,$$

además $\frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} 1_{K_k} \leq 1_{K_k}$ ρ-a.e. Usando el Teorema de Lebesgue (ver el teorema (1.1.5) propiedad (6)), obtenemos $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho\left(\frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} 1_{K_k} \right) = 0$ para todo entero no nulo k, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} d(f_n, f) \leq \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$, lo que implica que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(f_n, f) = 0$.

Ahora veamos que si $\lim\limits_{n\to+\infty} d(f_n, f) = 0$ entonces, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_k$

de $\{f_n\}_n$ que converge ρ-a.e. a f. Supongamos que $\{f_n\}_n$ es d-convergente a f, i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} d(f_n, f) = 0.$$

Entonces, para todo entero no nulo k tenemos

$$\lim_{n\to+\infty} \rho\left(\frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|} 1_{K_k}\right) = 0. \qquad (\star)$$

Usando la propiedad $(\star)$ obtenemos $\lim_{n\to+\infty} \rho\left(\frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|} 1_{K_1}\right) = 0$, lo que implica, usando la propiedad (2) del teorema (1.1.5), que existe una subsucesión $\{f_n^1\}_n$ de $\{f_n\}_n$ tal que $f_n^1 \to f$ ρ-a.e. en K_1 i.e. $\lim_{n\to+\infty} f_n^1(x) = f(x)$ cuando $x \in K_1 \setminus A_1$ donde $A_1 \subset K_1$ y $\rho(1_{A_1}) = 0$. Usando de nuevo $(\star)$ obtenemos $\lim_{n\to+\infty} \rho\left(\frac{|f_n^1 - f|}{1+|f_n^1 - f|} 1_{K_2}\right) = 0$, lo que implica que existe una subsucesión $\{f_n^2\}_n$ de $\{f_n^1\}_n$ tal que $f_n^2 \to f$ ρ-a.e. en K_2 i.e. $\lim_{n\to+\infty} f_n^2(x) = f(x)$ cuando $x \in K_2 \setminus A_2$ donde $A_2 \subset K_2$ y $\rho(1_{A_2}) = 0, \ldots$, siguiendo este método iterativo, construimos una subsucesión diagonal $\{f_n^n\}_n$ de $\{f_n\}$ que converge ρ-a.e. a f. En efecto, sea $x \in \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$. Existe un entero no nulo N tal que $x \in K_N \setminus A_N$. Como $\{f_n^n\}_{n\geq N}$ es una subsucesión de $\{f_n^N\}_n$ y $\lim_{n\to+\infty} f_n^N(x) = f(x)$ obtenemos $\lim_{n\to+\infty} f_n^n(x) = f(x)$, por lo tanto $\{f_n^n\}_n$ es una subsucesión de $\{f_n\}_n$ que converge ρ-a.e. a f. □

Definición 4.2.3. *Sea ρ un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición y que es σ-finito. Sea C un subconjunto de L_ρ.*

(a) Se dice que C es d-cerrado si y sólo si para toda sucesión $\{f_n\}_n$ de C tal que $\lim_{n\to+\infty} d(f_n - f) = 0$ tenemos $f \in C$.

(b) Se dice que C es d-abierto si y sólo si su complementario es un subconjunto d-cerrado de L_ρ.

(c) *Se dice que C es d-secuencialmente compacto si y sólo si para toda sucesión $\{f_n\}_n$ de C existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que es d-convergente en C.*

(d) *Se dice que C es totalmente acotado si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, C puede ser cubierto por una familia finita de subconjuntos cuyos diámetros son inferiores a ε. Donde $diam(A) = sup\{d(x,y) : x,y \in A\}$ para cualquier $A \subset C$.*

Es fácil de probar que la familia de todos los subconjuntos d-abiertos de L_ρ forma una topología τ en L_ρ que se llamara la topología generada por d. Aunque el funcional d no cumple la desigualdad triangular, sigue teniendo algunas propiedades similares a las de una distancia. En lo que sigue para evitar la confusion entre las ρ-bolas y las d-bolas denotaremos

$$B^d(x,r) = \{y \in L_\rho, \quad d(y-x) \leq r\}.$$

Lema 4.2.4. *Sea ρ un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición y que es σ-finito. Sea C un subconjunto de L_ρ que es d-secuencialmente compacto. Entonces, C es totalmente acotado.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos que C no puede ser cubierto por un numero finito de subconjuntos de L_ρ con diámetro inferior a ε. Entonces C no puede ser cubierto por un número finito de d-bolas de radio $\varepsilon/2$. Así se puede construir una sucesión infinita $a_1, a_2, ...$ en C tal que

$$a_2 \notin B^d_{\varepsilon/2}(a_1)$$

$$a_3 \notin B^d_{\varepsilon/2}(a_1) \cup B^d_{\varepsilon/2}(a_2),$$

$$\vdots$$

Para todo m y n con $m \neq n$, tenemos $d(a_m, a_n) > \varepsilon/2$. Entonces, la sucesión $a_1, a_2, ...$ no puede tener una subsucesión d-convergente. En efecto, supongamos que $\{a_{\varphi(n)}\}_n$ es una subsucesión de $\{a_n\}_n$ que es d-convergente a un punto $a \in C$. Entonces, para cualquier n, m numeros enteros tal que $n \neq m$ tenemos

$$\omega_\rho(2)\big(d(a_{\varphi(m)}, a) + d(a, a_{\varphi(n)})\big) \geq d(a_{\varphi(m)}, a_{\varphi(n)}) > \varepsilon/2.$$

Cuando n y m tienden a $+\infty$ obtenemos una contradición. □

Lema 4.2.5. *Sea ρ un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición y que es σ-finito. Sea C un subconjunto de L_ρ. Entonces, las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

(a) C es compacto para la topología generada por d.

(b) C es d-secuencialmente compacto.

Demostración. Sea C un subconjunto de L_ρ.
Recordamos la siguiente definición: se dice que una familia ζ de subconjuntos de C tiene la propiedad de la intersección finita si cualquier subfamilia finita de ζ tiene una intersección no vacía. Es bien conocido el siguiente resultado tópologico: C es compacto para la topología generada por d si y sólo si para toda familia de subconjuntos d-cerrados de C que tiene la propiedad de la intersección finita tiene una intersección no vacía
$(b) \implies (a)$ Sea ζ una familia de subconjuntos d-cerrados de C que tiene la propiedad de la intersección finita. Veamos que ζ tiene una intersección no vacía. Sea $\varepsilon > 0$. Como C es totalmente acotado (ver el lema (4.2.4)), se puede cubrir C por un numero finito de d-bolas de radio ε, llamadas, $B_1^d, B_2^d, ..., B_M^d$. Probaremos que existe $m \in \{1, 2, ..., M\}$ tal que la intersección de B_m^d con cualquier elemento de ζ es no vacía. En efecto, por reducción al absurdo,

supongamos que para todo $m \in \{1, 2, ..., M\}$ existe $A_m \in \zeta$ tal que $B^d_m \cap A_m = \emptyset$. Como $A_1 \cap A_2 ... \cap A_M$ es no vacío entonces contiene un punto z. Como z pertenece a A_m para cualquier $m \in \{1, 2, ..., M\}$ entonces no pertenece a ningún B^d_m, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, para cualquier $n \in \mathbb{N}^*$, existe $x_n \in C$ tal que para cualquier $A \in \zeta$

$$B^d_{1/n}(x_n) \cap A \neq \emptyset \qquad (\star).$$

Así obtenemos una sucesión $x_1, x_2, ...$ de elementos de C. Como C es d-secuencialmente compacto entonces $\{x_n\}_n$ tiene una subsucesión $\{x_{\varphi(n)}\}$ que es d-convergente a un punto $a \in C$. Veamos que $a \in A$ para cualquier $A \in \zeta$. En efecto, sea $A \in \zeta$. Probaremos que a es adherente a A, por lo tanto $a \in A$ porque A es d-cerrado. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $n \in \mathbb{N}$ bastante grande tal que $x_{\varphi(n)} \in B^d_{\varepsilon/2\omega_\rho(2)}(a)$ y $\dfrac{1}{\varphi(n)} < \dfrac{\varepsilon}{2\omega_\rho(2)}$. Entonces,

$$B^d_{1/\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \subset B^d_\varepsilon(a),$$

y usando la propiedad $(\star)$ obtenemos, $B^d_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$.

$(a) \Longrightarrow (b)$ Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de elementos de C. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, sea A_n la clausura de $\{x_n, x_{n+1}, ...\}$ con respecto a la topología generada por d. Entonces, $\{A_1, A_2, ...\}$ es una familia de subconjuntos d-cerrados de C que tiene la propiedad de la intersección finita porque $A_1 \supset A_2 \supset .....$ y los A_n son no vacíos. Entonces, existe $a \in C$ tal que $a \in A_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}^*$. Vamos a construir una subsucesión $\{x_{\varphi(n)}\}_n$ de $\{x_n\}_n$que es d-convergente al punto a. Como $a \in A_1$, existe $\varphi(1) \in \mathbb{N}^*$ tal que $d(x_{\varphi(1)}, a) < 1$. Como $a \in A_{\varphi(1)+1}$, existe $\varphi(2) \in \mathbb{N}^*$ tal que $\varphi(2) \geq \varphi(1) + 1$ y $d(x_{\varphi(2)}, a) < \dfrac{1}{2}$. De la misma manera existe $\varphi(3) \in \mathbb{N}^*$ tal que $\varphi(3) \geq \varphi(2) + 1$ y $d(x_{\varphi(3)}, a) < \dfrac{1}{3}$, siguiendo este método iterativo, obtenemos una subsucesión $\{x_{\varphi(n)}\}_n$ de $\{x_n\}_n$ tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} d(x_{\varphi(n)}, a) = 0$. □

Sea ρ un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición y que es σ-finito. Es fácil de probar usando el lema (4.2.2) que si C es un subconjunto de L_ρ entonces, C es ρ-a.e. secuencialmente compacto si y sólo si C es d-secuencialmente compacto y por el lema (4.2.5) obtenemos la siguiente equivalencia: C es ρ-a.e. secuencialmente compacto si y sólo si C es compacto para la topología generada por d.

4.3 Lemas técnicos

En lo que sigue supongamos que ρ es un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición y que es σ-finito. Sea C es un subconjunto convexo, ρ-acotado y ρ-a.e. secuencialmente compacto del espacio funcional modular L_ρ y $T : C \to C$ una aplicación ρ-asintóticamente no-expansiva, i.e. existe una sucesión de numeros reales $\{k_n\}_n$ con $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n = 1$ tal que

$$\rho(T^n f - T^n g) \leq k_n \rho(f-g) \quad \forall f, g \in C.$$

Supongamos que K es un subconjunto convexo, ρ-a.e. secuencialmente cerrado de C que cumple la siguiente propiedad:

$$f \in K \quad \text{implica} \quad \Omega_{\rho-a.e.}(f) \subset K \tag{A}$$

donde $\Omega_{\rho-a.e.}(f) = \{g \in L_\rho : g = \lim\limits_{i\to+\infty} T^{n_i}(f)$ ρ-a.e. para un cierto $n_i \uparrow +\infty\}$. Denotamos $\Im$ la familia de todos los subconjuntos K arriba mencionados. Ordenando $\Im$ por inclusión y usando el lema de Zorn (ver [Br]), existe un elemento no vacío minimal de $\Im$ denotado H que cumple la propiedad (A).

Lema 4.3.1 (DKS3). *Sea ρ un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición y C un subconjunto ρ-acotado, ρ-a.e. secuencialmente compacto de L_ρ. Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de elementos de C y $\Phi : C \to \mathbb{R}^+$ un funcional* *definido por* $\Phi(g) = \limsup_{n\to+\infty} \rho(f_n - g)$. *Entonces,*

$$\Phi(g) \leq \liminf_{m\to+\infty} \Phi(g_m) \qquad \textit{cuando} \qquad \{g_m\}_m \subset C \ \ y \ \ g_m \overset{\rho-a.e.}{\to} g \in C.$$

Demostración. Como C es secuencialmente ρ-a.e. compacto, existe una subsucesión $\{f_{\phi(n)}\}_n$ de $\{f_n\}_n$ tal que $f_{\phi(n)} \overset{\rho-a.e.}{\to} f \in C$ y $\lim_{n\to+\infty} \rho(f_{\phi(n)} - g) = \limsup_{n\to+\infty} \rho(f_n - g)$. Tenemos,

$$\begin{aligned} \Phi(g_m) &= \limsup_{n\to+\infty} \rho(f_n - g_m) \\ &\geq \limsup_{n\to+\infty} \rho(f_{\phi(n)} - g_m) \\ &\geq \liminf_{n\to+\infty} \rho(f_{\phi(n)} - g_m). \end{aligned}$$

Usando el lema (1.3.4), tenemos $\liminf_{n\to+\infty} \rho(f_{\phi(n)} - g_m) = \liminf_{n\to+\infty} \rho(f_{\phi(n)} - f) + \rho(f - g_m)$. Entonces, $\Phi(g_m) \geq \liminf_{n\to+\infty} \rho(f_{\phi(n)} - f) + \rho(f - g_m)$ y $\liminf_{m\to+\infty} \Phi(g_m) \geq \liminf_{n\to+\infty} \rho(f_{\phi(n)} - f) + \liminf_{m\to+\infty} \rho(f - g_m)$. De nuevo usando el lema (1.3.4), tenemos $\liminf_{m\to+\infty} \rho(f - g_m) = \liminf_{m\to+\infty} \rho(g_m - g) + \rho(g - f)$. Por lo tanto

$$\liminf_{m\to+\infty} \Phi(g_m) \geq \liminf_{n\to+\infty} \rho(f_{\phi(n)} - f) + \liminf_{m\to+\infty} \rho(g_m - g) + \rho(g - f) \quad \text{(I)}.$$

De otro lado,

$$\begin{aligned} \Phi(g) &= \limsup_{n\to+\infty} \rho(f_n - g) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \rho(f_{\phi(n)} - g) \\ &= \liminf_{n\to+\infty} \rho(f_{\phi(n)} - g) \\ &= \liminf_{n\to+\infty} \rho(f_{\phi(n)} - f) + \rho(f - g) \qquad \text{(II)}. \end{aligned}$$

De (I) y (II) esta claro que $\qquad \Phi(g) \leq \liminf_{m\to+\infty} \Phi(g_m)$. □

Lema 4.3.2. *Sea ρ un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición y C un subconjunto ρ-acotado y ρ-a.e. secuencialmente compacto de L_ρ. Sea $T : C \to C$ una aplicación ρ-asintóticamente no-expansiva y H un* *subconjunto de L_ρ definido como se indicó antes. Para todo $f \in H$ definimos el funcional $r_f(g) = \limsup_{n\to+\infty} \rho(T^n f - g)$ para todo $g \in C$. Entonces, el funcional $r_f(.)$ es constante en H y esta constante es independiente de f en H.*

Demostración. Sea $t > 0$ y $f \in H$. Consideremos el conjunto

$$H_t(f) = \{\ g \in H, \quad r_f(g) \le t\ \}\ .$$

es fácil de probar que $H_t(f)$ es convexo. Veamos que $H_t(f)$ es ρ-a.e secuencialmente cerrado y por lo tanto sera ρ-a.e. secuencialmente compacto. Supongamos que $\{g_m\}_m \subset H_t(f)$ y $g_m \overset{\rho-a.e.}{\to} g \in H$. Usando el lema (4.3.1) tenemos $\limsup_{n\to+\infty} \rho(T^n f - g) \le \liminf_{m\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \rho(T^n f - g_m) \le t$. Entonces $g \in H_t(f)$ y por lo tanto $H_t(f)$ es ρ-a.e. secuencialmente compacto.

Veamos que $H_t(f)$ cumple la propiedad (A). Sea $g \in H_t(f)$ y $h \in \Omega_{\rho-a.e.}(g)$. Probaremos que $h \in H_t(f)$. Como existe una subsucesión $\{n_i\}_i$ de $\{n\}_n$ tal que $T^{n_i}(g) \overset{\rho-a.e.}{\to} h$, usando el lema (4.3.1) y la no-expansividad ρ-asintótica de T, obtenemos

$$\begin{aligned}
r_f(h) &= \limsup_{n\to+\infty} \rho(T^n f - h) \\
&\le \liminf_{i\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \rho(T^n f - T^{n_i} g) \\
&\le \liminf_{i\to+\infty} r_f\big(T^{n_i}(g)\big) \\
&\le \limsup_{i\to+\infty} r_f\big(T^{n_i}(g)\big) \\
&\le \limsup_{m\to+\infty} r_f\big(T^{m}(g)\big) \\
&\le \limsup_{m\to+\infty} \big(\limsup_{n\to+\infty} \rho(T^n f - T^m g)\big) \\
&\le \limsup_{m\to+\infty} \big(k_m \limsup_{n\to+\infty} \rho(T^{n-m} f - g)\big) \\
&\le \limsup_{m\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \rho(T^n f - g) \\
&\le t.
\end{aligned}$$

Por tanto, $h \in H_t(f)$ y por consiguiente $H_t(f)$ cumple la propiedad (A). Como $H_t(f) \neq \emptyset$, la minimalidad de H implica que $H_t(f) = H$. Veamos que el funcional $r_f(.)$ es constante en H. En efecto, supongamos que $r_f(.)$ no es constante en H. Entonces, existen $h_1, h_2 \in H$ tal que $r_f(h_1) < r_f(h_2)$ lo que significa que existe un numero real t tal que $r_f(h_1) < t < r_f(h_2)$ entonces $h_1 \in H_t(f) = H$ y $h_2 \notin H_t(f) = H$. Esta contradicción muestra que $r_t(.)$ es constante en H. Probaremos que r_f es en realidad independiente de f en H. Sea $f, g \in H$ y $\{T^n(g)\}_n$ una sucesión de elementos de C. Usando la ρ-a.e. compacidad secuencial de C existe una subsucesión $\{T^{n_i}(g)\}_i$ de $\{T^n(g)\}_n$ tal que $T^{n_i}(g) \overset{\rho-a.e.}{\to} h$ con $h \in H$ porque H tiene la propiedad (A). Usando el lema (1.3.4), tenemos $\rho(T^n f - h) \leq \liminf\limits_{i \to +\infty} \rho(T^n f - T^{n_i} g)$ entonces,

$$\begin{aligned}
r_f &= r_f(h) \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \rho(T^n f - h) \\
&\leq \limsup_{n\to+\infty} \liminf_{i\to+\infty} \rho(T^n f - T^{n_i} g) \\
&\leq \limsup_{n\to+\infty} \limsup_{m\to+\infty} \rho(T^n f - T^m g) \\
&\leq \limsup_{m\to+\infty} \rho(f - T^m g) \\
&= r_g(f) \\
&= r_g.
\end{aligned}$$

Como f, g juegan simétricos papeles. Entonces, tenemos $r_g \leq r_f$ y por lo tanto $r_g = r_f$. $\square$

En lo que sigue recordamos que la ρ-convergencia y la convergencia en norma coinciden cuando el funcional modular ρ cumple la Δ_2-tipo condición.

Lema 4.3.3. *Sea ρ un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición. Sea S un subconjunto no vacío , norma-compacto de L_ρ con $diam_\rho(S) > 0$. Entonces, existe $f \in \overline{co}(S)$ tal que* $\sup\{\rho(g - f) : g \in S\} < diam_\rho(S)$.

Demostración. Como S es un subconjunto compacto y ρ es norma continuo, podemos encontrar $f_0, f_1 \in S$ tal que

$$\rho(f_0 - f_1) = \operatorname{diam}_\rho(S) = \sup\{\rho(f-g);\ f, g \in S \text{ con } f \neq g\}.$$

Sea $S_0 \subset S$ maximal tal que $\{f_0, f_1\} \subset S_0$ y para todo $f, g \in S_0$ $(f \neq g)$ tenemos $\rho(f-g) = \operatorname{diam}_\rho(S)$. S_0 debe ser finito porque en otro caso existe una sucesión infinita $\{f_n\}_n \subset S_0$ tal que $\operatorname{Sep}_\rho\{f_n\} = \inf\limits_{n \neq m} \rho(f_n - f_m) = \operatorname{diam}_\rho(S)$ y por lo tanto $\{f_n\}_n$ no tiene ninguna subsucesión que es ρ-convergente, lo que es contradictorio con el hecho de que S es compacto. Denotamos $S_0 = \{f_0, f_1, f_2, \ldots.., f_n\}$ y definimos $h = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{n+1}\right) f_k$, como S es compacto encontramos $g_0 \in S$ tal que $\rho(g_0 - h) = \sup\{\rho(g-h) : g \in S\}$. De otro lado usando la convexidad de ρ tenemos

$$\begin{aligned}
\rho(g_0 - h) &= \rho\left(\sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{1}{n+1}\right) g_0 - \sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{1}{n+1}\right) f_k\right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{1}{n+1}\right) \rho(g_0 - f_k) \\
&\leq \operatorname{diam}_\rho(S).
\end{aligned}$$

Si $\rho(g_0 - h) = \operatorname{diam}_\rho(S)$, tenemos $\sum\limits_{k=0}^{k=n}\left(\frac{1}{n+1}\right) \rho(g_0 - f_k) = \operatorname{diam}_\rho(S)$ lo que implica que $\rho(g_0 - f_k) = \operatorname{diam}_\rho(S)$ cuando $k \in \{0, 1, \ldots., n\}$ y eso contradice la máximidad de S_0. Entonces $\sup\{\rho(g-h) : g \in S\} = \rho(g_0 - h) < \operatorname{diam}_\rho(S)$. $\square$

4.4 Resultados principales

Teorema 4.4.1. *Sea ρ un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición y que es σ-finito y C un subconjunto ρ-acotado, ρ-a.e. secuencialmente compacto de L_ρ. Sea $T : C \to C$ una aplicación ρ-asintóticamente* *no-expansiva y H un subconjunto convexo, ρ-a.e. secuencialmente cerrado de C que cumple las siguientes propiedades:*

(i) si $f \in H$ entonces $\Omega_{\rho-a.e.}(f) \subset H$;

(ii) para todo $f \in H$, toda subsucesión $\{T^{n_i}(f)\}_i$ de $\{T^n(f)\}_n$ tiene una subsucesión que es ρ-convergente.

Entonces, T tiene un punto fijo en H.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ la familia de los subconjuntos no vacíos, ρ-a.e. secuencialmente compactos de H que cumplen la propiedad (i). La familia $\mathcal{F}$ es no vacía porque $H \in \mathcal{F}$. De los resultados anteriores, $\mathcal{F}$ tiene un elemento minimal. Sea K el elemento minimal de $\mathcal{F}$. Primero probaremos que si K es unitario entonces, T tiene un punto fijo. En efecto supongamos que $K = \{f\}$. Tenemos $\Omega_{\rho-a.e.}(f) = \{f\}$. Entonces, existe una subsucesión $\{n_i\}_i$ de $\{n\}_n$ tal que $T^{n_i}(f) \overset{\rho-a.e.}{\to} f$. De *(ii)* se puede suponer que $\{T^{n_i}(f)\}_i$ es ρ-convergente a f y usando la continuidad de T tenemos $\{T^{n_i+1}(f)\}_i$ es ρ-convergente a $T(f)$ lo que implica que $T(f) \in \Omega_{\rho-a.e.}(f)$. Por lo tanto $T(f) = f$. En segundo lugar probaremos por reducción al absurdo que K es unitario y por consiguiente obtenemos un punto fijo para T.
Supongamos que K tiene más de un elemento, i.e. $\operatorname{diam}_\rho(K) > 0$. Sea $f \in K$. Consideramos

$$S = \Omega_{||.||}(f) = \{g \in H;\ T^{n_i}(f) \text{ es } ||.||\text{-convergente a } g \text{ para un cierto } n_i \uparrow +\infty\}.$$

Es fácil de probar que $S \subset K$. Veamos que $S = T(S)$. En efecto, sea $g \in S$. Entonces, existe una sucesión $\{T^{n_i}(f)\}_i$ que es $||.||$-convergente a g. Como T es continua, tenemos $T^{n_i+1}(f) \overset{||.||}{\to} T(g)$. Por definición de S, obtenemos $T(g) \in S$, por tanto $T(S) \subset S$. Ahora veamos la otra inclusión, i.e. $S \subset T(S)$.

Sea $g \in S$. De nuevo por definición de S, existe una sucesión $\{T^{n_i}(f)\}_i$ que es $||.||$-convergente a g. La sucesión $\{T^{n_i-1}(f)\}_i$ tiene una subsucesión $\{T^{n_{\phi(i)}-1}(f)\}_i$ que es norma convergente, cuyo limite se denominara h. Como T es continua, obtenemos

$$T(h) = T(\lim_{i\to+\infty} T^{n_{\phi(i)}-1}(f)) = \lim_{i\to+\infty} T^{n_{\phi(i)}}(f) = g.$$

Entonces, $g \in T(S)$ y por tanto $S \subset T(S)$. Por consiguiente $T(S) = S$.

Veamos que S es norma compacto. Para ello, basta probar que cada sucesión de elementos de S tiene una subsucesión que es norma convergente a un elemento de S. Sea $\{f_j\}_{j\geq 1}$ una sucesión de elementos de S. Entonces, $f_j \overset{||.||}{=} \lim_{i\to+\infty} T^{n_{i,j}}(f)$ para una cierta sucesión de numeros enteros $\{n_{i,j}\}_i \uparrow +\infty$. Podemos suponer, sin perdida de generalidad, que $||T^{n_{i,j}}f - f_j|| \leq \dfrac{1}{j}$ para todo $i, j \in \mathbb{N}^*$. Consideramos la sucesión diagonal $\{T^{n_{j,j}}f\}_{j\geq 1}$. Por la propiedad (ii) esta sucesión tiene una subsucesión $\{T^{n_{\varphi(j),\varphi(j)}}f\}_{j\geq 1}$ que converge en norma a $\tilde{f} \in H$, donde $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ es una función estrictamente creciente. Veamos que $\{f_{\varphi(j)}\}_{j\geq 1}$ converge en norma a $\tilde{f}$. En efecto,

$$\begin{aligned} ||f_{\varphi(j)} - \tilde{f}|| &\leq ||f_{\varphi(j)} - T^{n_{\varphi(j),\varphi(j)}}f|| + ||T^{n_{\varphi(j),\varphi(j)}}f - \tilde{f}|| \\ &\leq \frac{1}{\varphi(j)} + ||T^{n_{\varphi(j),\varphi(j)}}f - \tilde{f}||. \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\lim_{j\to+\infty} ||f_{\varphi(j)} - \tilde{f}|| = 0.$$

El lema (4.3.3) implica que existe $f_0 \in \overline{conv}(S) \subset K$ tal que

$$\sup\{\rho(g - f_0) : g \in S\} < diam_\rho(S).$$

Sea $r = \sup\{\rho(g - f_0) : g \in S\}$. Consideramos

$$D = \{h \in K;\ \sup_{g\in S} \rho(g - h) \leq r\}.$$

Como $f_0 \in D$ y ρ es convexo, D es un subconjunto no vacío y convexo de K. Veamos que $D = K$. En efecto, empezamos probando que D es ρ-a.e. secuencialmente compacto. De la condición *(ii)*, basta probar que D es ρ-a.e. cerrado. Sea $\{h_n\}_n$ una sucesión en D tal que $h_n \overset{\rho-a.e.}{\longrightarrow} h \in L_\rho$. Fijamos $g \in S$. Como $g - h_n \overset{\rho-a.e.}{\longrightarrow} g - h$, el lema (1.3.4) implica que

$$\rho(g-h) \leq \liminf_{n\to+\infty} \rho(g-h_n).$$

Entonces,

$$\rho(g-h) \leq \liminf_{n\to+\infty} \Big(\sup\{\rho(f-h_n) : f \in S\} \Big) \leq r.$$

Por lo tanto $\sup\{\rho(h-g) : g \in S\} \leq r$, i.e. $h \in D$. Ahora veamos que D cumple la propiedad (i). En efecto, sea $f \in D$ y $g \in \Omega_{\rho-a.e.}(f)$. Entonces existe una sucesión $\{T^{n_i}(f)\} \overset{\rho-a.e.}{\longrightarrow} g$. Usando el lema (1.3.4) obtenemos

$$\rho(g-h) \leq \liminf_{n\to+\infty} \rho(T^{n_i}(f) - h) \leq \limsup_{n\to+\infty} \rho(T^n f - h)$$

para todo $h \in S$. Como $T(S) = S$, existe una sucesión $\{u_n\}_n$ en S tal que $h = T^n(u_n)$, para todo $n \geq 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \rho(g-h) &\leq \limsup_{n\to+\infty} \rho(T^n f - T^n u_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} k_n \rho(f-u_n) \\ &\leq \limsup_{n\to+\infty} \rho(f-u_n) \leq \sup\{\rho(f-u) : u \in S\} \leq r. \end{aligned}$$

Así obtenemos $\sup\{\rho(g-h) : h \in S\} \leq r$ lo que implica que $g \in D$. Por consiguiente D cumple la propiedad (i) y usando la minimalidad de K, obtenemos $D = K$. Pero como tenemos

$$diam_\rho(D) \leq r < diam_\rho(S) \leq diam_\rho(K),$$

llegamos a una contradaucción. Por lo tanto, K es unitario. □

Ahora presentamos el resultado principal de este capítulo.

Teorema 4.4.2. *Sea ρ un funcional modular convexo que cumple la Δ_2-tipo condición y que es σ-finito. Sea C un subconjunto convexo ρ-acotado y ρ-a.e. secuencialmente compacto de L_ρ. Sea $T : C \to C$ una aplicación ρ-asintóticamente no-expansiva. Entonces, T tiene un punto fijo.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de C que son no vacíos, convexos y que cumplen la propiedad (A). $\mathcal{F}$ es no vacío porque $C \in \mathcal{F}$. Usando el Lema de Zorn, $\mathcal{F}$ tiene un elemento minimal. Sea H el elemento minimal de $\mathcal{F}$. Veamos que H cumple las hipótesis del teorema (4.4.1). Basta comprobar que H cumple la propiedad *(ii)*. Sea r definido en H como en el lema (4.3.2). Si $r = 0$ tenemos

$$\lim_{n\to+\infty} T^n f = g$$

para todo $f, g \in H$, lo que implica que H cumple la propiedad *(ii)*. Supongamos que $r > 0$. Sea $f \in H$ tal que existe una sucesión $\{T^{n_i} f\}_i$ que no tiene ninguna subsucesión que es norma-convergente. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $\{T^{n(k)} f\}_k$ tal que

$$\mathrm{Sep}(\{T^{n(k)} f\}_k) = \inf\{\rho(T^{n(k)} f - T^{n(k')} f)\ ,\ k \neq k'\} \geq \varepsilon.$$

Como H es ρ-a.e. secuencialmente compacto, podemos suponer que existe $f_\infty \in H$ tal que $T^{n(k)} f \overset{\rho-a.e.}{\longrightarrow} f_\infty \in H$ cuando $k \to +\infty$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$\lim_{k\to+\infty} \rho(T^{n(k)} f - f_\infty) = l < +\infty.$$

Como $\limsup\limits_{n\to+\infty} \rho(T^n f - f) = r$, elegimos $\eta > 0$ tal que $\eta < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y un entero $n_0 \geq 1$ tal que para todo $n \geq n_0$ tenemos

$$\rho(T^n f - f) < r + \eta.$$

Fijamos $n \geq n_0$. Existe $k_0 \geq 1$ tal que para todo $k \geq k_0$, tenemos $n(k) \geq n+n_0$ y

$$\begin{aligned} \rho(T^n f - T^{n(k)} f) &= \rho\left(T^n f - T^{n+(n(k)-n)} f\right) = \rho\left(T^n f - T^n(T^{n(k)-n} f)\right) \\ &\leq k_n \rho\left(f - T^{n(k)-n} f\right) < k_n(r+\eta). \end{aligned}$$

Nótese que si $g_n \overset{\rho-a.e.}{\longrightarrow} g$ y $\mathrm{Sep}\{g_n\}_n \geq \varepsilon$, entonces por el lema (1.3.4), tenemos

$$\varepsilon \leq \liminf_{m\to+\infty} \liminf_{n\to+\infty} \rho(g_n - g_m) \leq 2 \liminf_{n\to+\infty} \rho(g_n - g).$$

Combinado con el lema (1.3.4), obtenemos

$$\liminf_{n\to+\infty} \rho(g_n) = \liminf_{n\to+\infty} \rho(g_n - g) + \rho(g) \geq \frac{\varepsilon}{2} + \rho(g).$$

Por consiguiente

$$\rho(g) \leq \liminf_{n\to+\infty} \rho(g_n) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particular, como $\{T^{n(k)} f - T^n f\}_k$ es ρ-a.e. convergente a $f_\infty - T^n f$ cuando $k \to +\infty$ y satisface $\mathrm{Sep}(\{T^{n(k)} f - T^n f\}_k) \geq \varepsilon$, entonces

$$\rho(T^n f - f_\infty) \leq \liminf_{k\to+\infty} \rho(T^{n(k)} f - T^n f) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto

$$\rho(f_\infty - T^n f) \leq k_n(r+\eta) - \frac{\varepsilon}{2}$$

lo que implica que

$$r = \limsup_{n\to+\infty} \rho(f_\infty - T^n f) \leq r + \eta - \frac{\varepsilon}{2} < r.$$

Esta contradicción completa la prueba del teorema (4.4.2). □

Supongamos que $L_\rho = L_p(\Omega, \mu)$ donde μ es una medida σ-finita. Si C es un subconjunto cerrado, acotado, convexo de L_p para $1 < p < +\infty$ y $T : C \to C$ es una aplicación asintóticamente no-expansiva , es bien conocido que T tiene un punto fijo porque L_p es uniformemente convexo. Sin embargo, este resultado no es cierto para $p = 1$, incluso para las aplicaciones no-expansivas ver [A]. Como L_1 es un espacio modular, el teorema (4.4.2) implica la existencia del punto fijo para $p = 1$ cuando C es ρ-a.e. secuencialmente compacto. El siguiente corolario extiende un resultado de Lennard [Le] para aplicaciones no-expansivas:

Corolario 4.4.3. *Sea (Ω, μ) como mencionado arriba, $C \subset L_1(\Omega, \mu)$ convexo, acotado y compacto para la topología de la convergencia local en medida y $T : C \to C$ una aplicación asintóticamente no-expansiva. Entonces, T tiene un punto fijo.*

Demostración. Bajo las hipótesis mencionados arriba, los subconjuntos ρ-a.e. compactos y los subconjuntos compactos para la topología de la convergencia local en medida son idénticos en $L_1(\Omega, \mu)$. □

Bibliografía

[A] D.E. Alspach. *A fixed point free nonexpansive map.* Proc. Am. Math. Soc. **82**(1981), 423-424.

[ADL] J.M.Ayerbe, T.Dominguez Benavides, G.Lopez Acedo. *Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory.* Bikhauser: Basel, 1997.

[AX] J.M. Ayerbe and H.K. Xu. *On certain geometric coefficients of Banach spaces relating to fixed point theory,* Panamerican J. Math. **3** **(3)**(1993), 47-59.

[BiO] Z. Birnbaum, W. Orlicz. *Uber die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen,* Studia Math. **3**(1931), 1-67.

[Br] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications.* Masson, Paris, 1983.

[Br1] F.E. Browder. *Nonexpansive nonlinear operators in Banach space,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **54**(1965), 1041-1044.

[Br2] F.E. Browder. *Fixed points theorems for noncompact mappings in Hilbert spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **43** (1965), 1272-1276.

[Br3] F.E. Browder. *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **54**(1965), 1041-1044.

[BrP] F.E. Browder and V.W. Petryshyn. *The solution by iteration of non-linear functional equations in Banach spaces*, Bull. Am. Math. Soc. **72**(1966), 571-576.

[CaM] E. Casini and E. Maluta. *Fixed points of uniformly Lipschitzian mappings in spaces with uniformly normal structure,* Nonlinear Anal. **9** (1985), 103-108.

[DKS1] T.Dominguez Benavides, M.A.Khamsi, S.Samadi. *Asymptotically regular mappings in modular function spaces,* Scientiae Math. Jap. **(Aceptado)**.

[DKS2] T.Dominguez Benavides, M.A.Khamsi, S.Samadi. *Uniformly Lipschitzian mappings in modular function spaces,* Nonlinear Anal. **(Aceptado)**.

[DKS3] T.Dominguez Benavides, M.A.Khamsi, S.Samadi. *Asymptotically nonexpansive mappings in modular function spaces,* J. Math. Anal. Appl. **(Aceptado)**.

[DX] T. Domínguez Benavides, H.K. Xu. *A new geometrical coefficient for Banach spaces and its applications in fixed point theory*, Nonlinear Anal. **25 (3)** (1995), 311-325.

[GoK1] K. Goebel and W.A. Kirk. *A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings,* Proc. Am. Math. Soc. **35** (1972), 171-174.

[GoK2] K. Goebel and W.A. Kirk. *Topics in Metric Fixed Point Theory,* Cambridge University Press, 1990.

[GoK3] K. Goebel and W.A. Kirk. *A fixed point theorem for transformations whose iterates have uniform Lipschitz constant,* Studia Math. **47** (1973), 135-140.

[Goh] D. Göhde. *Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung*, Math. Nach. **30** (1965), 251-258.

[Gor1] J. Gornicki. *A fixed point theorem for asymptotically regular mappings,* Colloquium Mathematicum, **64 (1)** (1993), 55-57.

[Gor2] J. Gornicki. *Fixed point theorems for asymptotically regular mappings in L^p spaces,* Nonlinear Anal. **17** (1991), 153-159.

[HKM] H. Hudzik, A. Kaminska and J. Musielak. *On the convexity coefficient of Orlicz spaces*, Math. Z. **197** (1988), 291-295.

[I] S. Ishikawa. *Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space,* Proc. Amer. Math. Soc. **59** (1970), 65-71.

[J] M.A. Jiménez. *Medida, integración y funcionales*, Editorial pueblo y educación, Habana, 1989.

[Ka] A.Kaminska. *On uniform convexity of Orlicz spaces.* Mathematics, Proceedings. Konink. Nederl, Ak. Wet. Amsterdam, **A 85 (1)** (1982), 27-36.

[Kh] M.A.Khamsi. *Fixed point theory in modular function spaces.* Recent Advances on Metric Fixed Point Theory. Universidad de Sevilla, Sevilla (1996), 31-58.

[KhKR] M.A. Khamsi, W.M. Kozlowski, S. Reich. *Fixed point theory in modular function spaces*, Nonlinear Anal. **14** (1990), 935-953.

[KhKS] M.A. Khamsi, W.M. Kozlowski, C. Shutao. *Some geometrical properties and fixed point theorems in Orlicz Spaces*, J. Math. Anal. Appl. **155 (2)** (1991), 393-412.

[Ki1] W.A. Kirk. *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly, **72** (1964), 1004-1006.

[Ki2] W. A. Kirk. *Fixed point theorems for non-Lipschitzian mappings of asymptotically nonexpansive type,* Israel J. Math. **17** (1974), 339-346.

[Ko1] W.M. Kozlowski. *Modular function spaces,* Dekker, New York, Basel, 1988.

[Ko2] W.M. Kozlowski. *Notes on modular function spaces I,* Commentat. Math. **28** (1988), 91-104.

[Ko3] W.M. Kozlowski. *Notes on modular function spaces II,* Commentat. Math. **28** (1988), 105-120.

[KraR] M.A. Krasnosel'skii, Ya.B. Rutickii. *Convex Fuctions and Orlicz Spaces,* Noordhoff, Groningen, 1961.

[Kru] M. Kruppel. *Ein Fixpunktsatz fur asymptotisch regulare Operatoren,* Wiss. Z. Padagog. Hochsch. "Liselotte Herrmann" Gustrow Math.-Natur. Fak. **25** (1987), 241-246.

[Le] C. Lennard. *A new convexity property that implies a fixed point property for L_1*, Studia Math. **100 (2)** (1991), 95-108.

[Lif] E. A. Lifshitz. *Fixed point theorems for operators in strongly convex spaces*, Voronez. Gos. Univ. Trudy Mat. Fak. **16** (1975), 23-28. (En ruso).

[Lin] P.K.Lin. *A uniformly asymptotically regular mapping without fixed points,* Canad. Math. Bull. **30** (1987), 481-483.

[LiX] T.C.Lim, H.K.Xu. *Uniformly Lipschitzian mappings in metric spaces with uniform normal structure,* Nonlinear Anal. **25 (11)** (1995), 1231-1235.

[Lu] W.A.J. Luxemburg. *Banach function spaces,* Thesis, Delft 1955.

[LuZ] W.A.J. Luxemburg, A.C. Zaanen. *Notes on Banach function spaces I-XII,* Proc. Acad. Sci. Amsterdam, (1963) A-66, 135-153, 239-263-, 496-504, 655-681, (1964) A-64, 101-119, (1964) A-67, 360-376, 493-543.

[Mu] J. Musielak. *Orlicz spaces and Modular spaces,* Lecture Notes in Math. 1034, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.

[MuO] J. Musielak, W. Orlicz. *On modular spaces,* Studia Math. **18** (1959), 49-65.

[Na] H. Nakano. *Modulared semi-ordered spaces,* Tokyo, 1950.

[WZ] J.R.L. Webb and W. Zhao. *On connections between set and ball measures of noncompactness,* Bull. London Math. Soc. **22** (1990), 471-477.

[Xu1] H.K. Xu. *k-Uniform rotundity and fixed points of mappings of asymptotically nonexpansive type.* (Aparecerá en chino).

[Xu2] H.K. Xu. *Existence and convergence for fixed points of mappings of asymptotically nonexpansive type,* Nonlinear Anal. **16 (12)** (1991), 1139-1146.

[YD] X. Yu and X. Dai. *A fixed point theorem of asymptotically nonexpansive mappings,* J. Math. (PRC) **6** (1986), 255-262.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. SEDKI SAMADI
titulada LA TEORÍA DEL PUNTO FIJO EN ESPACIOS FUNCIONALES MODULARES.

acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente "Cum laude" (por unanimidad)

Sevilla, 9 de Febrero 2001.

El Vocál, El Vocal, El Vocal,

El Doctorado

El Presidente El Secretario,

501358713