

18713804

167 158

10 de enero de 2002

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Facultad de Matemáticas

Rosa María

043
379

APROXIMACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES PRIMITIVAS DEL OCÉANO MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

SECRETARÍA DE SEVILLA
de Matemáticas
Diferencial y Análisis Matemático
esta U. de Sevilla el día 11/01/02
29/01/02
11 de enero
2002

Vº.Bº: El DIRECTOR DEL
TRABAJO

Fdo. Tomás Chacón Rebollo.
Catedrático de Universidad.

Memoria presentada por
David Rodríguez Gómez,
para optar al grado de Doctor
en Matemáticas.

Sevilla, 2001.

Fdo. David Rodríguez Gómez.

Índice

0	Introducción	5
0.1	Ecuaciones de base de la circulación oceánica.	10
0.1.1	Escalas espacio-temporales.	10
0.1.2	Leyes de Conservación y Difusión. Aproximación de Boussinesq. . .	12
0.1.3	Tratamiento de la turbulencia	15
0.1.4	Aproximación hidrostática.	18
0.1.5	Integración vertical.	22
0.2	Resolución numérica de modelos 3D.	23
0.2.1	Discretización espacial. Transformación σ	23
0.2.2	Discretización temporal. Modo externo y modo interno.	26
0.2.3	La hipótesis de techo rígido.	29
0.3	Modelo reducido de Ecuaciones Primitivas.	29
0.3.1	Formulación reducida del problema hidrostático.	29
0.3.2	Dificultades del análisis de las Ecuaciones Primitivas.	31
0.3.3	Algunos resultados previos.	33
0.4	Contenido de la memoria.	38
1	Caso estacionario: Métodos Mixtos.	43
1.1	Introducción	43
1.2	Formulación débil del problema estacionario	44
1.3	Discretización mediante EF Prismáticos.	50
1.3.1	Elementos de Taylor-Hood.	51
1.3.2	Estabilización mediante adición de burbujas.	53
1.4	Análisis de estabilidad y convergencia.	55
1.5	Estabilidad del par \mathbb{P}_1 -burbuja/ \mathbb{P}_1	61
1.6	Problemas abiertos.	69
2	Caso estacionario: Estabilización Término a Término.	73
2.1	Introducción.	73
2.2	Planteamiento del Método.	73
2.3	Análisis de estabilidad y convergencia.	75
2.4	Regularidad aumentada para la presión.	85
2.5	Estimaciones de error.	88

3	Caso estacionario: Métodos Estabilizados Consistentes.	95
3.1	Introducción.	95
3.2	Métodos Estabilizados Consistentes.	96
3.3	Análisis de estabilidad y convergencia.	98
3.4	Estimaciones de error.	105
4	Caso evolutivo: Aproximación en espacio-tiempo	111
4.1	Introducción.	111
4.2	Preliminares.	112
4.3	Formulación débil.	113
4.4	Discretización espacio-temporal.	114
4.5	Desigualdades de energía.	116
4.6	Convergencia.	121
4.6.1	Convergencia espacial.	123
4.6.2	Convergencia de la semi-discretización en tiempo.	132
4.7	Recuperación de la presión.	136
4.8	Conclusión.	138
4.9	Convergencia de la presión en el Problema de Stokes Hidrostático.	139
5	Resultados Numéricos.	145
5.1	Preliminares.	145
5.2	Tests numéricos sobre el Modelo Estacionario.	151
5.3	Tests numéricos sobre el Modelo Evolutivo.	156
5.4	Discusión de resultados.	159
5.5	Figuras	161
	Apéndice A	187

Introducción.

La presente memoria está dedicada al Análisis y Resolución Numérica de un modelo tridimensional de Ecuaciones Primitivas del Océano mediante el Método de los Elementos Finitos.

Los flujos geofísicos presentan un carácter fuertemente tridimensional debido a diversas causas: asimetría de costas y fondo, fuerza de Coriolis y diferentes mecanismos de afloramiento (*upwelling*) y convergencia (*downwelling*). Históricamente, las primeras simulaciones numéricas de flujos geofísicos utilizaron aproximaciones bidimensionales (Hansen, 1956). De hecho, las llamadas Ecuaciones de Aguas Poco Profundas (*Shallow Water Equations*, *Équations de Saint-Venant*) siguen siendo utilizadas en casos especiales donde los efectos 3D no son esenciales, sobre todo en la simulación de flujos de marea, tsunamis y flujos multicapa, i.e., con una fuerte estratificación del fluido. En este último caso, cabe utilizar ecuaciones de Shallow Water para cada capa (Cf. Castro et al. [22]).

Sin embargo, y gracias al desarrollo de la capacidad de cálculo de los ordenadores, la tendencia general desde los años 70 es el diseño de modelos 3D para su posterior resolución numérica, básicamente por dos razones. En primer lugar, la aproximación 2D falla en flujos gobernados por variaciones de densidad. En segundo lugar, el conocimiento de la estructura tridimensional es esencial para el estudio de fenómenos de afloramiento o transporte-difusión de salinidad, temperatura, contaminantes, sedimentos, etc.

La simulación numérica de flujos geofísicos es hoy día utilizada en numerosas aplicaciones de interés práctico, pues constituye una potente herramienta de análisis y predicción de fenómenos con y sin intervención humana.

El espectro de escalas de resolución espacio-temporales es muy amplio, abarcando desde procesos locales como la dispersión de contaminantes en estuarios y puertos durante días a modelos de circulación global y su influencia en el cambio climático a lo largo de siglos.

La relevancia actual de la simulación numérica aplicada a la Oceanografía queda patente en los principales programas internacionales de estudio y modelado del cambio climático global. Citemos a este respecto los programas CLIVAR (Climate Variability and Predictability, <http://www.clivar.org>), GAIM (Global Analysis Interpretation and Modelling, <http://gaim.unh.edu>) y GLOBEC (Global Ocean Ecosystem Dynamics, <http://www.globec.org>), patrocinados por los principales organismos nacionales e internacionales de investigación. Estos dos últimos programas están encuadrados en el IGBP (International Geosphere-Biosphere Program, <http://www.igbp.kva.se>). Algunas áreas de aplicación de la simulación numérica que quedan recogidas en estos programas son, a modo de ejemplo:

• PRODUCCIÓN BIOLÓGICA EN LOS OCÉANOS.

La producción biológica de los océanos depende directamente de la llamada *producción primaria*, que puede definirse como el proceso de transformación de materiales inorgánicos (nitratos, fosfatos) en nuevos compuestos orgánicos (lípidos, proteínas) mediante la fotosíntesis. Éstos compuestos orgánicos sirven como *pilares de construcción* del tejido vegetal, que se encuentra en la base de la cadena trófica en los océanos. El productor primario principal es el fitoplankton, término genérico bajo el que se incluyen diversas especies de plantas y algas.

La intensidad de la luz y la concentración de nutrientes son los dos mecanismos principales que controlan la producción primaria. La intensidad de la luz en el océano decrece de forma aproximadamente exponencial desde la superficie hacia el fondo. Se denomina *zona eufótica* la región oceánica donde hay luz suficiente para el desarrollo y reproducción de las plantas. La zona eufótica suele estar restringida a las capas superiores.

Por contra, la concentración de nutrientes es generalmente mayor en las capas profundas del océano (*nivel trófico béntico*) y menor en superficie. Ello se debe al proceso de mineralización que tiene lugar en los fondos oceánicos a partir de los deshechos orgánicos que caen por acción de la gravedad desde capas superiores. Como resultado, la *nutriclina* (zona donde la concentración de nutrientes varía rápidamente con la profundidad) se encuentra por debajo de la zona eufótica.

Por tanto, para la producción biológica son imprescindibles flujos de agua verticales. Hay toda una gama de fenómenos que resultan en un transporte vertical de masa de agua, entre los que destacamos el afloramiento de aguas profundas (*upwelling*) y la mezcla turbulenta debida a flujos de marea u ondas internas (referimos al apartado 0.2.2 para una descripción breve de dichas ondas). Aunque, sin duda, el mecanismo físico más relevante en este aspecto es el afloramiento. Las regiones de afloramiento constituyen un 0,1 % de la superficie oceánica total. Sin embargo, en este área tan reducida se encuentra el 40 % de la pesca comercial a nivel mundial (Cf. Massel [61]).

La influencia de la hidrodinámica del océano en la producción primaria no sólo se manifiesta a través del aporte de nutrientes a la zona eufótica, también en el transporte y distribución espacio-temporal del fitoplancton y zooplancton (agregado de animales pequeños como crustáceos y protozoos). Los procesos hidrodinámicos responsables son aquéllos cuya escala temporal coincide con la del florecimiento y desarrollo del plancton (entre un día y varios meses). Los procesos hidrodinámicos cuyo desarrollo coincide con esta banda temporal (*procesos resonantes*) son los encuadrados en las llamadas *mesoescala*, *escala sinóptica* y *escala estacional* (ver Tabla 0.1).

La distribución espacial del plankton viene marcada fundamentalmente por la extensión típica de los procesos resonantes. Por ejemplo, son procesos resonantes en el ciclo de florecimiento y producción del plankton la estratificación impuesta por el flujo térmico diario de luz solar, la variabilidad de la mezcla inducida por el viento,

la circulación vertical del plankton forzada por las ondas internas o la turbulencia vertical.

Se pone de manifiesto la necesidad de modelar y simular los procesos hidrodinámicos y su influencia en el ecosistema marino (*ajuste ecohidrodinámico*). Ejemplos actuales de investigación en este sentido viene dado por el programa GLOBEC [49] o el proyecto CANIGO [42].

• INFLUENCIA DEL CICLO DEL CARBONO EN EL EFECTO INVERNADERO.

El clima es el resultado de un sistema circulatorio a escala planetaria caracterizado por los movimientos de la masa de aire que rodea al globo, la circulación oceánica, la radiación solar y el constante intercambio de energía entre océano, atmósfera y suelo. Todo ello forma un equilibrio dinámico muy complejo que apenas empezamos a comprender.

Ya a principios del siglo pasado empezó a intuirse que atmósfera y océano tenían un papel muy importante en la temperatura media del planeta y que parte de la energía que llegaba del Sol era, de alguna forma, retenida por la atmósfera. No mucho más tarde (1861) se atribuyó al vapor de agua y al dióxido de carbono (CO_2) esta absorción parcial, e incluso algunos científicos llegaron a aventurar que pequeños cambios en la proporción de estos gases podían tener efectos climáticos considerables. Este es el fenómeno comúnmente denominado *efecto invernadero*. La analogía se debe a que H_2O y CO_2 (también metano, óxido nitroso,...) actúan como el vidrio en un invernadero: la radiación solar atraviesa la atmósfera y llega hasta la superficie donde se transforma en calor, que es remitido nuevamente a través de ella como radiación infrarroja; una parte de esta radiación es absorbida por los gases de efecto invernadero. La energía retenida hace que la temperatura media de la superficie del globo sea de unos 15°C en lugar de los -18°C que corresponden a la radiación que sale del planeta.

Dependiendo de la cantidad de emisiones de CO_2 en los próximos años y de qué fracción de éste permanezca en la atmósfera cabe esperar futuras transformaciones del clima. Aproximadamente la mitad del CO_2 emitido se transfiere al océano, al suelo y a la vegetación donde queda almacenado. Sobre el proceso de acumulación en los océanos se sabe poco, y el único modo que tienen los científicos del clima de hacerse una idea de las consecuencias es elaborar modelos matemáticos en ordenador.

Como ya hemos citado, en las últimas décadas el notable avance de los computadores ha permitido poner a punto modelos 3D de circulación oceánica global. Ésto ha ayudado a arrojar luz sobre la Biogeoquímica del Océano, que se ve profundamente afectada por los patrones de circulación oceánica. En particular, dichos modelos proporcionan ideas sobre cómo opera el ciclo del carbono en el océano. También proporciona herramientas de interpolación y predicción espacio-temporal.

Los modelos del ciclo del carbono oceánico ofrecen medios que ayudan a sintetizar nuestra comprensión de la redistribución del carbono en el océano y el efecto resultante en el ciclo del carbono global. La necesidad de desarrollo y comparación de

estos modelos llevó a cuatro grupos de investigación de Francia, Alemania, Reino Unido y Estados Unidos a colaborar desde 1995 en el marco del OCMIP (Ocean Carbon-Cycle Model Intercomparison Project), dentro del GAIM (ver [66]). Cada uno de estos grupos desarrolla un modelo 3D propio de estudio del ciclo del Carbono. Concretamente, el estudio se centra en la predicción de la distribución y flujo aire-mar de niveles de CO₂ pre-industrial y antropogénico. Por otro lado, se usan mediciones de C¹⁴ (Carbono 14) para validar los resultados proporcionados por los modelos para flujos oceánicos en aguas profundas.

Los cuatro modelos comparados usan mallas en Diferencias Finitas 3D, con número de elementos entre las decenas de miles y el millón. La talla horizontal se estrecha en el ecuador. Verticalmente, estos modelos usan de 2 a 10 capas para discretizar los primeros 100 metros y de 12 a 30 para la columna total. Otras diferencias residen en el sistema de coordenadas utilizado, los esquemas de advección, los flujos superficiales impuestos de calor y agua y la descripción de la turbulencia. En casi todos, el modelo básico de ecuaciones son las llamadas *Ecuaciones Primitivas*. Son estas diferencias las que marcan las discrepancias finales en el cálculo de la circulación global oceánica y la consiguiente distribución del CO₂.

Digamos finalmente que en la distribución del CO₂ interviene no sólo la hidrodinámica del océano, también la componente termodinámica, pues la solubilidad del dióxido de carbono depende de la temperatura del agua. Por otro lado, existen implicaciones biológicas, pues el CO₂ se ve reducido por la acción del fitoplancton.

• PREDICCIÓN DE *EL NIÑO* Y LOS MONZONES.

El Niño y la Oscilación Austral (abreviado como ENSO, del inglés *El Niño-Southern Oscillation*) constituyen las fluctuaciones interanuales del clima dominantes a escala global en nuestro planeta. En las llamadas *Condiciones Normales*, la región norte del Perú, de aguas relativamente frías, acoge una de las zonas pesqueras más productivas del mundo debido a fenómenos de afloramiento costero de aguas más profundas, frías y ricas en nutrientes.

Paralelamente, los vientos alisios soplan de este a oeste a lo largo del trópico, lo que tiene dos efectos fundamentales: (1) empujar las aguas superficiales hacia el Pacífico occidental (la elevación de la superficie del mar en las islas Filipinas es normalmente de unos 60 cm. más alta que la superficie del mar en las costa meridional de Panamá) y (2) permiten que agua que fluye hacia el oeste permanezca cerca de la superficie y que así se caliente y eleve su temperatura. Esto hace que la zona a donde se dirigen estas aguas -la parte occidental del Pacífico ecuatorial- sea la región oceánica con las aguas superficiales más cálidas de nuestro planeta: esta *piscina de agua caliente* (del inglés *warm pool*) se encuentra, a veces, a una temperatura de hasta 31,5°C. La acumulación de estas aguas cálidas en el Pacífico occidental tiende a hundir la termoclina (zona de fuerte gradiente de temperatura, que separa las aguas más cálidas de superficie de las aguas frías más profundas). El máximo de calor superficial que se produce en los alrededores de Indonesia y otras islas del Pacífico Occidental produce frecuentes tormentas y lluvias muy intensas.

Para completar su circulación, después de la elevación del aire caliente en el Pacífico Occidental, el aire vuelve al este a gran altitud y desciende sobre el Pacífico Oriental. Este ciclo atmosférico se conoce como *circulación de Walker*.

La distribución de la temperatura de la superficie del mar es pues la responsable del aumento de las lluvias y de una circulación de Walker más intensa, lo que provoca a su vez vientos alisios más fuertes. Dichos alisios, como ya se ha citado, son los responsables de la distribución de la Temperatura Superficial del Mar (TSM). La atmósfera fuerza pues al océano y este influye en la atmósfera, poniendo de manifiesto un comportamiento verdaderamente acoplado.

Todos los años, al inicio de la Primavera, una corriente cálida que fluye hacia el sur a lo largo de las costas de Perú modifica las aguas superficiales, normalmente frías, elevando su temperatura. Ocurre que, cada cierto tiempo, este aumento de la temperatura comienza antes (en diciembre), es mucho más importante y puede durar entre 1 y 2 años. Cuando esto ocurre, caen lluvias torrenciales en regiones normalmente áridas de esta parte de Sudamérica, lo que vino a llamarse *años de abundancia*. Sin embargo, la misma corriente cálida provoca un descenso de la termoclina, impidiendo el afloramiento de aguas profundas, con consecuencias desastrosas para la fauna marina y la economía local. Este fenómeno fue bautizado como *El Niño*, por su usual ocurrencia a finales de diciembre. Viene normalmente acompañado de un cambio a escala global de la circulación atmosférica conocida como la *Oscilación Austral*.

Las predicciones dinámicas del ENSO consisten en la utilización de modelos numéricos para reproducir la física del océano y de la atmósfera durante la evolución de estos eventos. Esto ha sido posible desde que la capacidad de cálculo de los ordenadores ha sido lo suficientemente potente como para que las interacciones océano-atmósfera puedan ser tenidas en cuenta en los grandes modelos climáticos de gran escala. Tales modelos han sido capaces de reproducir muchos de los efectos atmosféricos y oceánicos del ENSO en el Pacífico tropical. En los años 90, se alcanzaba un hito en la simulación del fenómeno ENSO, cuando se logró simular con éxito El Niño que comenzó al final de aquel año con unos meses de antelación. Asimismo, se simuló exitosamente el último evento ENSO en el 97/98 (referimos, en este sentido, a la página web <http://www.clivar.org>).

En estrecha conexión con el ENSO se encuentran los Monzones asio-australianos. Estudios estadísticos y de modelos de circulación atmosférica general muestran que las anomalías positivas de TSM en el Pacífico Este y negativas en Indonesia (medidas ambas respecto a una temperatura de referencia) durante el ENSO influyen en el Monzón a través de diversos mecanismos. De modo que para predecir el Monzón, las anomalías TSM deben ser previamente previstas. Para ello, es necesario simular diferentes procesos oceanográficos incluyendo efectos no lineales de las corrientes en el Pacífico Oeste y el Índico Norte, mezcla debido a la marea y afloramiento gobernado por el viento, flujos superficiales cuya parametrización es incierta,...

La elaboración de esta memoria tiene su origen en el desarrollo del Proyecto MAR97-

1055-C02-02 del Programa de Ciencia y Tecnologías Marinas de la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología. Éste se desarrolló durante el período 1997-2000 a cargo de grupos de investigación de las Universidades de Sevilla y Málaga y el Instituto Español de Oceanografía. Su finalidad global era la puesta a punto de un modelo realista de las corrientes del Estrecho de Gibraltar que tuviese en cuenta la interacción entre los fenómenos relevantes a diferentes escalas espacio-temporales. Uno de los objetivos marcados a tal efecto fue el desarrollo de un modelo numérico tridimensional de intercambio promedio entre las cuencas mediterránea y atlántica a través del Estrecho.

A tal efecto, se planteó la necesidad del desarrollo de un resolutor 3D con un coste computacional abordable. El propósito final de este trabajo va en esta dirección: diseñar métodos numéricos con coste computacional reducido, capaces de reproducir de forma precisa el comportamiento de los flujos geofísicos. En lo que refiere al flujo en el Estrecho de Gibraltar, éste está gobernado en parte por efectos de densidad variable. En este trabajo sólo abordaremos flujos con densidad constante, dejando el caso variable para una etapa posterior.

0.1 Ecuaciones de base de la circulación oceánica.

0.1.1 Escalas espacio-temporales.

Como hemos comentado, el flujo marino se desarrolla en una extensa gama de escalas espacio-temporales. Ningún modelo puede representar todo el espectro de sucesos, desde procesos moleculares hasta variaciones climáticas. Existen ciertas escalas espacio-temporales (*Spectral Windows*) asociadas a determinados fenómenos relevantes en Oceanografía. Una representación esquemática de las escalas de tiempo correspondientes a esta variabilidad viene dada por la Tabla 0.1. Es preceptivo, pues, a la hora de diseñar un modelo, fijar ambas escalas, que habitualmente van asociadas: según el modelo sea *local*, *regional* o *global*, el tiempo de observación irá de modificaciones en corto espacio de tiempo a evolución a largo plazo.

Al modelar un fenómeno determinado, la resolución elegida debe adaptarse a la escala correspondiente. Esta elección determina qué fenómenos quedan sin ser resueltos por tener una variación demasiado rápida en tiempo y espacio (lo que Nihoul y Djenidi [65] llaman *fluctuaciones de fondo*). Dichos fenómenos deben ser parametrizados como efectos de submalla "contribuyendo a la difusión de las propiedades del sistema" (Cf. Nihoul y Djenidi [65]). Por otro lado, los fenómenos de mayor escala no son directamente representados por el modelo pero pueden estar subyacentes en las condiciones iniciales y de contorno que se impongan.

En los tests numéricos expuestos en este trabajo, la escala horizontal a considerar variará entre las decenas y el millar de kilómetros. En todo el trabajo asumiremos que la *razón de aspecto* entre la longitud horizontal y profundidad características del dominio ocupado por el flujo,

$$\epsilon = \frac{L_v}{L_H},$$

es *pequeña*, con objeto de utilizar modelos asintóticos deducidos de las Ecuaciones de Navier-Stokes cuando $\epsilon \rightarrow 0$. En la práctica, el parámetro ϵ toma valores en el rango $10^{-2} - 10^{-4}$. Cuando estemos interesados en la evolución temporal del sistema, el tiempo de observación (\mathcal{T}) será del orden del día. Ambas escalas espacio-temporales nos sitúan en la *mesoescala*. En particular, nos interesaremos por un proceso característico de mesoescala, las *fluctuaciones de inercia*.

Escala Temporal	Frecuencia (s^{-1})	Ventana Espectral	Procesos Relevantes
1 segundo	1	Microescala	<i>eddys</i> turbulentos 3D Ondas de Poincaré
1 minuto	10^{-2}	Pequeña Escala	Ondas Internas
1 hora	10^{-4}	Mesoescala	Oscilaciones de Inercia Mareas
1 día	10^{-5}		Fenómenos debidos a la alternancia día-noche
1 semana	10^{-6}	Escala Sinóptica	Turbulencia de <i>Rossby</i>
1 mes	10^{-7}	Escala Estacional	-
1 año	10^{-8}	Escala Global	ENSO
		Escala Paleoclimática	-

Tabla 0.1. Representación esquemática de la variabilidad marina (adaptada de [65]).

Mención aparte merece la resolución del caso estacionario. Los resultados en este caso responden a un comportamiento típico, en algún sentido a precisar, del sistema. La escala en la que se encuadre dicho comportamiento puede ser muy variable. Por ejemplo, Deleersnijder utiliza el modelo estacionario para simular la circulación general estival en el Estrecho de Bering (lo que entra en el marco de la Escala Estacional). Concretamente, la intención del autor es simular el flujo de fondo (*background flow*), es decir, la circulación libre de variabilidad inducida por el viento durante el período estival.

Parecido enfoque adopta M. Espino [43], al calcular la componente permanente del flujo bajo la acción de diversos vientos característicos del Golfo de Sant Jordi. Habida cuenta de la variabilidad del viento en la zona, entre el día y la semana, aquí se podría hablar de Escala Sinóptica.

Por último, uno de los objetivos marcados en el Proyecto MAR97-1055-C02-02 es resolver las Ecuaciones Primitivas 3D a escala climática en una amplia región del Océano Atlántico y del Mar Mediterráneo en torno al Estrecho. El intercambio promedio se entiende dado por la solución estacionaria correspondiente a una inicialización con separación de densidades característica en cada cuenca, y se suponen separadas en el Estrecho. Este experimento, denominado *lock exchange*, fue propuesto por Speich (1992).

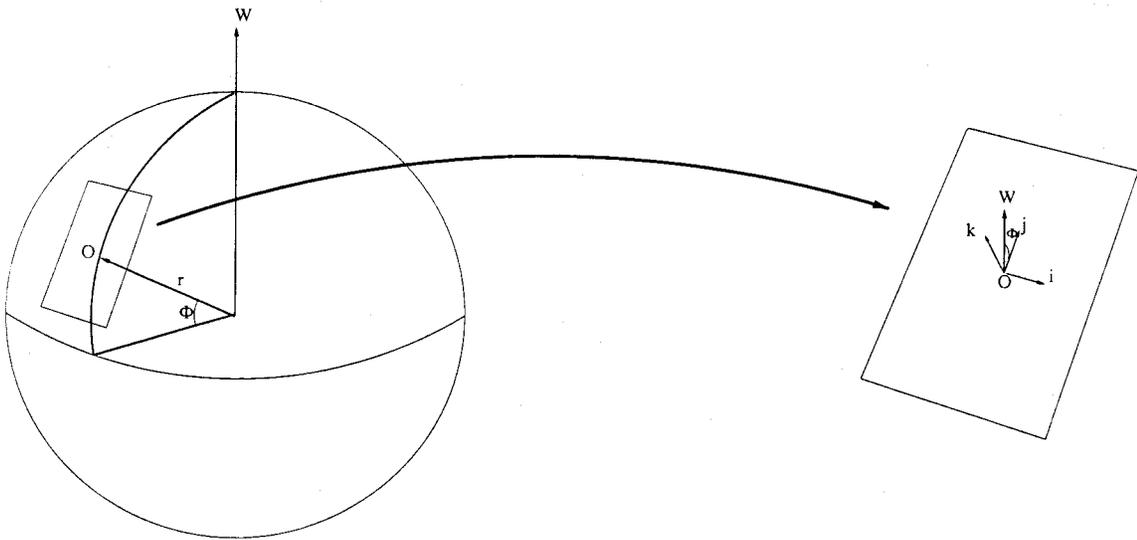


Figura 1: Sistema de coordenadas rectangular.

0.1.2 Leyes de Conservación y Difusión. Aproximación de Boussinesq.

Los efectos de la curvatura terrestre en la evolución de un flujo con escala horizontal $L_H \leq 1000$ (km) pueden ser despreciados (según Kowalik y Murty [54]). Para describir dicha evolución usaremos un sistema de coordenadas rectangular en un plano tangente al dominio de estudio en un punto, simplificando significativamente la exposición. El eje x apuntará hacia el Este, el eje y hacia el Norte y el eje z hacia la vertical (ver Figura 1). Indistintamente, utilizaremos la notación x_1, x_2, x_3 .

Notemos en todo caso que en estudios de la circulación oceánica global se utilizan coordenadas esféricas -por ejemplo, Bermejo [11], Bryan [20] o el modelo OPA, desarrollado en el LODYC (Laboratoire d'Océanographie Dynamique et de Climatologie)-.

Consideremos un abierto conexo $\omega \subset \mathbb{R}^2$. Supondremos que el fluido ocupa el dominio

$$\Omega = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^3; \mathbf{x} = (x, y) \in \omega, -D(\mathbf{x}) < z < \eta(\mathbf{x}, t)\}, \quad (0.1)$$

donde $D: \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}_+$ denota la profundidad y $\eta: \bar{\omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ la superficie libre.

Las magnitudes físicas que describen la evolución y estado del océano son:

- la velocidad \mathbf{U} del flujo

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} + u_3 \mathbf{k} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}$$

Aquí \mathbf{u} es la velocidad horizontal y u_3 la vertical;

- la densidad ρ ,
- la temperatura T y la salinidad S ,

- la presión p .

Denotamos también:

- $\mathcal{K}_c^t, \mathcal{K}_c^s$ los coeficientes de difusión molecular para la temperatura y la salinidad,
- c_p el coeficiente de calor específico,
- $g \approx 9.81 \text{ (m/s}^{-2}\text{)}$ la aceleración de la gravedad.

Utilizaremos la notación Δ_H para el operador laplaciano horizontal y Δ para el laplaciano 3D. El mismo criterio se seguirá para el gradiente (∇) y la divergencia ($\nabla \cdot$).

En general, se acepta que el agua oceánica es ligeramente compresible (cf. Gill [47]) aunque los efectos de compresibilidad sólo son relevantes para grandes profundidades, a partir de unos 3 kilómetros. Por otra parte, debido a la rotación terrestre, el flujo se encuentra sometido a la fuerza de Coriolis. Por ambas razones la circulación oceánica viene modelada por las ecuaciones siguientes (Cf. [37, 47, 68]):

- **La ley de conservación del momento:**

$$\rho \partial_t \mathbf{U} + \rho (\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) + 2 \rho \mathbf{W} \times \mathbf{U} + \rho \mathbf{W} \times (\mathbf{W} \times \mathbf{r}) - \nabla \cdot \sigma = -\rho \mathbf{g} \quad (0.2)$$

donde σ es el *tensor de esfuerzos*, $\mathbf{W} = \theta(0, \cos \Phi, \sin \Phi)$ el vector de rotación terrestre, θ la velocidad angular terrestre y $\Phi(y)$ la latitud. $\mathbf{W} \times \mathbf{U}$ es la aceleración de Coriolis, \mathbf{r} el radio terrestre, $\mathbf{W} \times (\mathbf{W} \times \mathbf{r})$ la aceleración centrípeta y $\mathbf{g} = (0, 0, g)$ la aceleración de la gravedad. Tanto la aceleración de Coriolis como la aceleración centrípeta resultan de expresar las ecuaciones del momento en un sistema de coordenadas rotatorio.

- **La ley de conservación de la masa:**

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0. \quad (0.3)$$

- **La ley de conservación de la energía:**

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} + T \left(\frac{\partial_T \rho}{\rho} \right) \left(\frac{Dp}{Dt} \right) = \mathcal{K}_c^t \Delta T. \quad (0.4)$$

- **La ley de conservación de la sal:**

$$\frac{D(\rho S)}{Dt} = \mathcal{K}_c^s \Delta S. \quad (0.5)$$

Tanto en (0.4) como en (0.5) se denota por $\frac{D}{Dt}$ la *derivada total*

$$\frac{D}{Dt} = \partial_t + \mathbf{U} \cdot \nabla.$$

- **Una ley de estado para la presión:** La experiencia muestra que la densidad ρ depende de salinidad, temperatura y presión. Basándonos en este hecho, escribimos:

$$\rho = \rho(S, T, p). \quad (0.6)$$

Los ejemplos que se encuentran en Gill [47], muestran que esta ley, obtenida mediante medidas experimentales, es por lo general polinómica en S, T, p . En la mayoría de las aplicaciones se desprecia la influencia de p y se toma una ley lineal en T y S . Por ejemplo en Kowalik y Murty [54]:

$$\rho = \rho_0 - \beta_T T + \beta_S (S - S_0), \quad (0.7)$$

donde ρ_0 y S_0 son, respectivamente una densidad y salinidad de referencia, y β_T, β_S coeficientes positivos.

En cuanto a la fuerza de Coriolis, un fácil cálculo muestra

$$2\rho \mathbf{W} \times \mathbf{U} = 2(u_3\theta \cos \Phi - u_2\theta \sin \phi, u_1\theta \sin \Phi, -u_1 \cos \Phi).$$

Al ser en el medio oceánico la velocidad vertical del orden de las milésima parte de la horizontal, se suele simplificar:

$$2\rho \mathbf{W} \times \mathbf{U} \approx (-f u_2, f u_1, -2 u_1 \cos \Phi),$$

con $f = 2\theta \sin \Phi$. Denotaremos para abreviar $\mathbf{C} = (-f u_2, f u_1, -2 u_1 \cos \Phi)$.

Por otro lado, la aceleración centrípeta puede ser expresada mediante un potencial Φ_c (Cf. Pedlosky):

$$\mathbf{W} \times (\mathbf{W} \times \mathbf{r}) = -\nabla \Phi_c; \quad \Phi_c = \frac{\|\mathbf{W} \times \mathbf{r}\|^2}{2}.$$

Una de las características notables del océano es que las variaciones de densidad son solamente significativas en el balance de momento cinético vertical. Esto se debe a que los efectos de flotabilidad tienden a eliminar los gradientes horizontales de densidad. La aproximación consistente en considerar $\rho = \rho_0$ constante en los demás términos es la llamada *Aproximación de Boussinesq* y tiene como consecuencia inmediata la anulación de ciertos términos:

- en (0.3): $\partial_t \rho = \partial_t \rho_0 = 0$ y $\nabla \rho = \nabla \rho_0 = 0$ de donde

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0; \quad (0.8)$$

- en (0.4): $\frac{\partial_T \rho}{\rho} = \frac{\partial_T \rho_0}{\rho_0} = 0;$

- en (0.5): $\frac{D(\rho S)}{Dt} = \frac{D(\rho_0 S)}{Dt} = \rho_0 \frac{DS}{Dt}.$

Por otra parte, para un fluido Newtoniano viscoso incompresible, el tensor de esfuerzos σ se escribe como

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij},$$

siendo

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (0.9)$$

el tensor de esfuerzos viscosos y μ la viscosidad molecular. De este modo, llegamos a las llamadas *Ecuaciones de Boussinesq*:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (a) & \partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} - \nu \Delta \mathbf{U} + \mathbf{C} + \frac{\nabla p}{\rho_0} = -\frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} \quad \text{en }]0, \mathcal{T}[\times \Omega \\ (b) & \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad \text{en }]0, \mathcal{T}[\times \Omega \\ (c) & \rho = \rho(S, T, p) \quad \text{en }]0, \mathcal{T}[\times \Omega \\ (d) & \partial_t T + \mathbf{U} \cdot \nabla T - \mathcal{K}_T \Delta T = 0 \quad \text{en }]0, \mathcal{T}[\times \Omega \\ (e) & \partial_t S + \mathbf{U} \cdot \nabla S - \mathcal{K}_S \Delta S = 0 \quad \text{en }]0, \mathcal{T}[\times \Omega. \end{array} \right. \quad (0.10)$$

Aquí $\nu = (\mu/\rho_0)$ denota la viscosidad cinemática. Además $\mathcal{K}_T = (\mathcal{K}_c^t/(\rho_0 c_p))$, $\mathcal{K}_S = (\mathcal{K}_c^s/\rho_0)$. Por último, el gradiente $\nabla \Phi_c$ ha sido incluido en ∇p .

0.1.3 Tratamiento de la turbulencia

El sistema de ecuaciones (0.10) describe el movimiento instantáneo de un flujo turbulento para un fluido Newtoniano viscoso. Dicho sistema puede resolverse únicamente para movimientos a pequeña escala en ciertos casos simplificados. En el caso de la Oceanografía, los números de Reynolds alcanzados son demasiado elevados para poder utilizar esta descripción. Para dar una idea de dicha magnitud consideremos una talla característica de la velocidad horizontal que denotamos por \mathbf{u}_{car} e introduzcamos los siguientes parámetros adimensionales:

- El número de Reynolds horizontal $Re_H = \frac{\mathbf{u}_{car} L_H}{\nu}$;
- El número de Rossby $Ro = \frac{\mathbf{u}_{car}}{f L_H}$;
- El número de Ekman vertical $E_v = \frac{\nu}{f L_v^2}$.

Es fácil comprobar que $Re_H = \frac{Ro}{E_v} \epsilon^{-2}$. Para valores típicos en Oceanografía, como $f = 10^{-4}$ (s⁻¹), $L_v = 100$ (m), $L_H = 100$ (km), $u_{car} = 1$ (m/s), y habida cuenta que $\nu = 10^{-6}$ (m²/s), se obtendría:

$$Ro = 10^{-1}, \quad E_v = 10^{-6}, \quad \epsilon = 10^{-3}, \quad Re_H = 10^{11}.$$

El flujo es, pues, muy turbulento. La vía utilizada para abordar el problema en el ámbito de la Oceanografía (por ejemplo [54, 80]) consiste en separar las ecuaciones en dos subconjuntos: uno que exprese el flujo medio a lo largo de un período de tiempo \overline{T} (*parte promediada*) y otro que describa las fluctuaciones en torno a este flujo medio (*parte turbulenta*). El significado concreto de promedio y variación en torno al promedio dependerá del período en el que se tome la media; según sea este período se filtrarán fenómenos particulares.

Para una variable cualquiera ϕ , denotemos:

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad \text{con} \quad \bar{\phi} = \frac{1}{\overline{T}} \int_{t_0}^{\overline{T}+t_0} \phi dt \quad \text{y} \quad \overline{\phi'} = 0. \quad (0.11)$$

Introduciendo (0.11) en (0.10)(b) obtenemos

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{U}} = 0.$$

Debido a la no linealidad de (0.10)(a), una vez que se introduce (0.11) aparecen interacciones cruzadas entre el promedio y la fluctuación:

- Ecuación del Promedio:

$$\partial_t \bar{\mathbf{U}} + (\bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{U}} + \nabla \cdot \bar{R} - \nu \Delta \bar{\mathbf{U}} + \bar{C} + \frac{\nabla \bar{p}}{\rho_0} = -\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \mathbf{g} \quad (0.12)$$

donde R es el tensor de Reynolds, dado por:

$$R = \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'},$$

es decir,

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$$

componente a componente.

- Ecuación de la fluctuación:

$$\partial_t \mathbf{U}' + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{U}} \otimes \mathbf{U}' + (\bar{\mathbf{U}} \otimes \mathbf{U}')^t) - \nu \Delta \mathbf{U}' + C' + \frac{\nabla p'}{\rho_0} = -\frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g} + \nabla \cdot R' \quad (0.13)$$

donde $R' = R - \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}$.

Como puede observarse, la influencia de la parte turbulenta sobre el flujo medio viene expresada completamente por el tensor de Reynolds R .

La turbulencia juega un importante papel en el proceso disipativo de los flujos que consideramos. Habitualmente (Cf. [54]), la acción disipativa de la turbulencia se modela asumiendo que el tensor de esfuerzos turbulentos de Reynolds es proporcional al gradiente de velocidades promediadas, en analogía al caso de los esfuerzos viscosos para un flujo laminar (ver (0.9)). En analogía a la viscosidad molecular, dicha constante de proporcionalidad es denominada *viscosidad turbulenta*. Habida cuenta de la anisotropía que induce la diferencia de longitudes características, la viscosidad turbulenta vertical es mucho menor que la horizontal. Escribiremos pues

$$R_{ij} = \nu^t(j) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \nu^t(i) \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \quad (0.14)$$

siendo $\nu^t(i) = \nu_H^t$ si $i \neq 3$ y $\nu^t(3) = \nu_v^t$. Esta expresión de R proporciona

$$(\nabla \cdot R)_i = \sum_{j=1}^3 \partial_j (\nu^t(j) \partial_j \bar{u}_i + \nu^t(i) \partial_i \bar{u}_j) = \sum_{j=1}^3 \nu^t(j) \partial_j^2 \bar{u}_i,$$

lo que permite reescribir (0.12) como

$$\partial_t \bar{\mathbf{U}} + (\bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{U}} - (\nu + \nu_H^t) \Delta_H \bar{\mathbf{U}} - (\nu + \nu_v^t) \partial_{zz}^2 \bar{\mathbf{U}} + \bar{\mathbf{C}} + \frac{\nabla \bar{p}}{\rho_0} = -\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \mathbf{g}. \quad (0.15)$$

Por otro lado, asumiendo las parametrizaciones (curiosamente, también llamadas *Hipótesis de Boussinesq*)

$$\overline{\mathbf{u}'T'} = -\mathcal{K}_{T,H}^t \nabla_H \bar{T}, \quad \overline{u'_3 T'} = -\mathcal{K}_{T,v}^t \partial_z \bar{T},$$

se llega a ecuaciones para los promedios de temperatura y salinidad \bar{T} y \bar{S} con difusividades aumentadas:

$$\mathcal{K}_T + \mathcal{K}_{T,H}^t, \quad \mathcal{K}_T + \mathcal{K}_{T,v}^t, \quad \mathcal{K}_S + \mathcal{K}_{S,H}^t, \quad \mathcal{K}_S + \mathcal{K}_{S,v}^t.$$

En las zonas de turbulencia, las viscosidades y difusividades turbulentas son mucho más grandes que las constantes laminares correspondientes, que usualmente son despreciadas. La expresión de ν_H^t y ν_v^t se deduce siguiendo argumentos de naturaleza física. Por ejemplo, la expresión de ν_v^t en un modelo de cierre con cero ecuaciones es:

$$\nu_v^t(\mathbf{x}, z) = l_m^2(z) \left[\sum_{i=1,2} \sum_{j=3} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]^{1/2} \quad (0.16)$$

donde $l_m(z)$ denota la talla característica de los torbellinos verticales.

Citemos que la parametrización (0.16) puede ser afinada utilizando modelos de cierre utilizando la *energía cinética turbulenta* k y la *tasa de disipación turbulenta* ε (modelos

de cierre con una o dos ecuaciones). En este caso, el sistema de ecuaciones se completa utilizando (0.13).

La definición del coeficiente ν_H^t aparece generalmente en la literatura (Cf. [54, 65, 80]) asociada a la parametrización de fenómenos de submalla. El razonamiento es el siguiente: la discrepancia entre las escalas espaciales horizontal y vertical impone, en la mayoría de los casos, pasos de malla horizontal mucho más grandes que los verticales. La discretización de las ecuaciones puede entenderse como un segundo promedio, en este caso espacial, de forma que las interacciones no lineales de las fluctuaciones respecto a dicho promedio son responsables de una adición de difusión horizontal que debe parametrizarse. Por ejemplo, en las ecuaciones del océano a escala climática, la influencia de los fenómenos de mesoescala se interpretan como fenómenos de submalla, y por tanto dicha influencia se expresa a través del coeficiente ν_H^t .

De acuerdo con estas ideas, Smagorinsky (1963) propuso expresar el transporte de submalla mediante un coeficiente ν_H^t relacionado con los pasos de malla horizontal y el gradiente de velocidad:

$$\nu_H^t(\mathbf{x}, z) = C_h \Delta x \Delta y \left[\sum_{i,j=1}^2 (\partial_j \bar{u}_i + \partial_i \bar{u}_j)^2 \right]^{1/2}. \quad (0.17)$$

Aquí, C_h denota una constante empírica, y $\Delta x, \Delta y$ los pasos de malla en las direcciones x e y .

En esta memoria consideraremos valores constantes para ν_H^t, ν_v^t que coincidan con valores típicos proporcionados por las expresiones (0.16), (0.17) en aras de un tratamiento matemático más cómodo de las ecuaciones. En particular, tomaremos $\nu_v^t / \nu_H^t = \epsilon^2$ siguiendo el trabajo de Besson y Laydi [10].

El análisis matemático de modelos de turbulencia más complejos, incluso para las ecuaciones de Navier-Stokes, está aún en desarrollo. Consecuentemente, el análisis de su aproximación numérica, especialmente para las Ecuaciones Primitivas, es aún prematuro.

En adelante, omitiremos el superíndice t y la barra horizontal $\bar{}$ del operador promedio, y supondremos que trabajamos con variables promediadas.

0.1.4 Aproximación hidrostática.

La fuerte anisotropía de los dominios considerados en Oceanografía induce velocidades verticales muy inferiores a las horizontales. En efecto,

$$\frac{u_3^{car}}{u^{car}} \approx \frac{L_v}{\mathcal{T}} \frac{\mathcal{T}}{L_H} = \epsilon \approx 0.001. \quad (0.18)$$

La consecuencia inmediata es una simplificación en (0.10) (donde ya consideramos viscosidades turbulentas) que constituye uno de los rasgos distintivos del modelado matemático en Oceanografía. En efecto, puede justificarse mediante un análisis de órdenes de magnitud en (0.10) que los términos largamente dominantes en la componente vertical son $\partial_z p$ y $g\rho$. Para ello, introducimos el siguiente reescalamiento, que puede encontrar, con ligeras diferencias de un autor a otro, en [37],[55] o [68]:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^* = \frac{x}{L_H}, \quad y^* = \frac{y}{L_H}, \quad z^* = \frac{z}{L_v}, \quad t^* = \frac{t}{\mathcal{T}}, \\ \mathbf{u}^*(x^*, y^*, z^*, t^*) = \frac{\mathcal{T}}{L_H} \mathbf{u}(x, y, z, t), \quad u_3^*(x^*, y^*, z^*, t^*) = \frac{\mathcal{T}}{L_v} u_3(x, y, z, t), \\ p^*(x^*, y^*, z^*, t^*) = \frac{Ro\mathcal{T}^2}{L_H^2 \rho_0} p(x, y, z, t), \quad \rho^*(x^*, y^*, z^*, t^*) = \frac{\rho(x, y, z, t)}{\rho_0}, \\ g' = \frac{\epsilon \mathcal{T}^2 Ro}{L_H} g. \end{array} \right. \quad (0.19)$$

Tras introducir el reescalamiento en:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu_h \Delta_H \mathbf{u} - \nu_v \partial_{zz}^2 \mathbf{u} + f \mathbf{u}^\perp + \frac{\nabla_H p}{\rho_0} &= 0; \\ \partial_t u_3 + (\mathbf{U} \cdot \nabla) u_3 - \nu_h \Delta_H u_3 - \nu_v \partial_{zz}^2 u_3 - u_1 \theta \cos \Phi + \partial_z p &= -\rho g; \\ \partial_x u_1 + \partial_y u_2 + \partial_z u_3 &= 0; \end{aligned} \quad (0.20)$$

resulta

$$\begin{aligned} Ro (\partial_t \mathbf{u}^* + (\mathbf{U}^* \cdot \nabla_*) \mathbf{u}^*) - \left(\frac{E_H}{2} \Delta_H^* \mathbf{u}^* + \frac{E_v}{2} \partial_{z^* z^*} \mathbf{u}^* \right) + (\mathbf{u}^*)^\perp + \nabla_H^* p^* &= 0; \\ \epsilon^2 Ro (\partial_t u_3^* + (\mathbf{U}^* \cdot \nabla_*) u_3^*) - \epsilon^2 \left(\frac{E_H}{2} \Delta_H^* u_3^* + \frac{E_v}{2} \partial_{z^* z^*} u_3^* \right) \\ - \epsilon u_1^* \frac{\cos \Phi}{\sin \Phi} + \rho_0 (\partial_z p^* + g' \rho^*) &= 0; \\ \frac{1}{\mathcal{T}} (\partial_x u_1^* + \partial_y u_2^* + \partial_z u_3^*) &= 0, \end{aligned}$$

donde denotamos

$$\begin{aligned} Ro &= \frac{1}{f\mathcal{T}} && \text{el número de Rossby,} \\ E_H &= 2 \frac{\nu_h}{f L_H^2} && \text{el número de Ekman horizontal,} \\ E_v &= 2 \frac{\nu_v}{f L_v^2} && \text{el número de Ekman vertical.} \end{aligned}$$

En la práctica, los valores $\epsilon^2 Ro$, $\epsilon^2 E_H$, $\epsilon^2 E_v$ y ϵ son inferiores a 0.001. Por tanto, en lo que refiere a la ecuación vertical (0.20), es claro que los términos dominantes son $\partial_z p$ y

$g\rho$. La justificación matemática de este hecho se puede encontrar en Besson y Laydi [10] para el caso estacionario y Azérad y Guillén [6] para el caso evolutivo.

En adelante, como estamos suponiendo que L_H es mucho más pequeña que el radio terrestre, tomamos Φ (y por tanto f) constante.

La *aproximación hidrostática* consiste en suprimir los términos en $\epsilon^2 Ro$, obteniéndose la *ecuación hidrostática*:

$$\partial_z p = -\rho g. \quad (0.21)$$

Atendiendo a esta simplificación llegamos finalmente a las Ecuaciones Primitivas del Océano:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (a) & \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu_h \Delta_H \mathbf{u} - \nu_v \partial_{zz}^2 \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} + \frac{\nabla_H p}{\rho_0} = 0 \quad \text{en }]0, \mathcal{T}[\times \Omega; \\ (b) & \partial_z p = -\rho g \quad \text{en }]0, \mathcal{T}[\times \Omega; \\ (c) & \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad \text{en }]0, \mathcal{T}[\times \Omega; \\ (d) & \rho = \rho(S, T) \quad \text{en }]0, \mathcal{T}[\times \Omega; \\ (e) & \partial_t T + \mathbf{U} \cdot \nabla T - \mathcal{K}_T \Delta T = 0 \quad \text{en }]0, \mathcal{T}[\times \Omega; \\ (f) & \partial_t S + \mathbf{U} \cdot \nabla S - \mathcal{K}_S \Delta S = 0 \quad \text{en }]0, \mathcal{T}[\times \Omega. \end{array} \right. \quad (0.22)$$

Adjuntaremos las siguientes condiciones iniciales y de contorno al sistema (0.22):

• **Condiciones en la frontera libre.-**

Denotemos por $\Gamma_s = \{(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x}, t)) : \mathbf{x} \in \omega, t \in [0, \mathcal{T}]\}$ a la superficie del océano.

– **Condición para la velocidad vertical.-**

Para una partícula en superficie se tiene

$$z(t) = \eta(\mathbf{x}(t), t).$$

Admitiendo la hipótesis de que las partículas de la superficie se mantienen en ella en todo instante, y derivando respecto al tiempo en la igualdad anterior:

$$u_3(t) = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} u_1 + \frac{\partial \eta}{\partial y} u_2 = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_H \eta \quad \text{en } \Gamma_s \times]0, \mathcal{T}[. \quad (0.23)$$

– **Condiciones para la velocidad horizontal.-**

La condición de continuidad de los esfuerzos tangenciales en la superficie libre se escribe, idealmente, como

$$\rho(R \cdot \mathbf{n})_T(\mathbf{x}, z) = \boldsymbol{\tau}^a(\mathbf{x}, z), \quad \forall (\mathbf{x}, z) \in \Gamma_s,$$

donde \mathbf{n} denota la normal a la superficie y el subíndice T proyección sobre el plano tangente a la superficie. El vector $\boldsymbol{\tau}^a$ representa la tensión inducida por el viento. Obsérvese que se ha utilizado el tensor de Reynolds R en lugar del tensor de esfuerzos viscosos $(\tau_{ij})_{i,j=1}^3$ (Cf. Pedloski [68]).

Para simplificar la fórmula, se suele asumir $\mathbf{n} \approx (0, 0, 1)$ (débil variación de la superficie libre), resultando:

$$\rho(\nu_v \partial_z \mathbf{u} + \nu_h \nabla_H u_3)|_{\Gamma_s} = \boldsymbol{\tau}^a.$$

Los mismos argumentos de la aproximación hidrostática demuestran que u_3 es despreciable en la anterior expresión. Por otro lado, se encuentra experimentalmente (Cf. [54]):

$$\boldsymbol{\tau}^a = \rho_a C_f |\mathbf{v}_{10}^a| \mathbf{v}_{10}^a, \quad C_f = (0.8 + 0.065 \cdot 10^{-2} |\mathbf{v}_{10}^a|) 10^{-3}, \quad (0.24)$$

siendo \mathbf{v}_{10}^a la velocidad del aire medida 10 metros por encima de la superficie del mar. En este trabajo, simplificaremos $C_f = 0.8 \cdot 10^{-3}$.

Para una deducción de (0.24) con argumentos matemáticos formales remitimos a [55]. Abreviando la notación, resulta

$$\nu_v \partial_z \mathbf{u}|_{\Gamma_s} = \boldsymbol{\tau}, \quad (0.25)$$

con $\boldsymbol{\tau} = \rho^{-1} \boldsymbol{\tau}^a$.

– Condición para la presión.-

$$p = p_a \quad \text{en } \Gamma_s \times]0, \mathcal{T}[.$$

siendo $p_a(\mathbf{x}, t)$ la presión atmosférica.

• Condiciones en el fondo.-

Denotemos por $\Gamma_b = \{(\mathbf{x}, -D(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in \omega\}$ el fondo oceánico:

– Condición para la velocidad vertical.-

Por los mismos argumentos usados para (0.23), y puesto que D no depende del tiempo:

$$u_3 = -\mathbf{u} \cdot \nabla_H D \quad \text{en } \Gamma_b \times]0, \mathcal{T}[.$$

– **Condiciones para la velocidad horizontal.**

La condición de continuidad de los esfuerzos tangenciales en el fondo se deduce con los mismos argumentos usados para la condición (0.25)

$$\nu_v \partial_z \mathbf{u}|_{\Gamma_b} = \boldsymbol{\tau}^b. \quad (0.26)$$

En este caso, la fricción en el fondo toma la expresión (Cf. [54])

$$\boldsymbol{\tau}^b = r |\mathbf{u}| \mathbf{u},$$

con r un coeficiente de arrastre, función de la rugosidad y de las propiedades de la capa límite del fondo.

Remarquemos que las condiciones de contorno anteriores se aplican en fronteras ficticias. En efecto, en el caso de la superficie modelan la capa límite turbulenta atmósfera-océano, que comprende en torno a 1 km. en atmósfera y 10-100 m. en la superficie oceánica [55]. En el caso del fondo, el coeficiente de arrastre r y la velocidad de la corriente se toma 1 m. sobre el fondo [54]. Estas condiciones de contorno equivalentes se justifican parcialmente en Achdou et al. [3].

En este trabajo, nos limitaremos a imponer $\mathbf{u}|_{\Gamma_b} = 0$, $u_3 n_3|_{\Gamma_b} = 0$.

- **Condición inicial.**- Añadimos una condición inicial para la velocidad:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, z, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, z), \quad \text{en } \Omega_0,$$

donde

$$\Omega_0 = \left\{ (\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^3; \mathbf{x} = (x, y) \in \omega, -D(\mathbf{x}) < z < \eta(\mathbf{x}, 0) \right\}, \quad (0.27)$$

esto es, el dominio ocupado por el fluido en el instante inicial.

No entraremos a detallar las posibles condiciones de contorno para la temperatura y salinidad, que no forman parte del estudio de esta memoria. Referimos a Lewandowski [55] para una deducción de dichas condiciones.

0.1.5 Integración vertical.

La aproximación hidrostática permite integrar (0.22)(b) desde una profundidad arbitraria z hasta la superficie libre $\eta(\mathbf{x}, t)$. Denotemos

$$\rho(\mathbf{x}, z, t) = \rho_0 + \rho'(\mathbf{x}, z, t).$$

Se obtiene

$$p(\mathbf{x}, z, t) = p_a(\mathbf{x}, t) + g\rho_0(\eta(\mathbf{x}, t) - z) + g \int_z^\eta \rho' dz. \quad (0.28)$$

De este modo, hemos expresado la presión como una suma de términos relacionados con la presión atmosférica, la superficie libre y la estratificación de densidad. Introduciendo (0.28) en (0.22)(a), se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu_h \Delta_H \mathbf{u} - \nu_v \partial_{zz}^2 \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} = & -\frac{\nabla_H p_a}{\rho_0} - g \nabla_H \eta - \\ & -\frac{g}{\rho_0} \nabla_H \left(\int_z^\eta \rho' dz \right). \end{aligned} \quad (0.29)$$

El término $g \nabla_H \eta$ se denomina *contribución barotrópica* del gradiente de presión, mientras que $\frac{g}{\rho_0} \nabla_H \left(\int_z^\eta \rho' dz \right)$ es la *contribución baroclínica*.

La ecuación de continuidad (0.22)(c) puede ser integrada a lo largo de toda la columna. Aplicando las condiciones de contorno en superficie y fondo obtenemos

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \langle u_1 \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle u_2 \rangle = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_H \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0 \quad \text{en } \omega, \quad (0.30)$$

siendo

$$\langle u_i \rangle(\mathbf{x}, z, t) = \int_z^{\eta(\mathbf{x}, t)} u_i(\mathbf{x}, z', t) dz'. \quad (0.31)$$

El sistema (0.29)-(0.30) (más las ecuaciones (0.22) (d),(e) y (f) para la ley de estado, la temperatura y la salinidad) es el que se utiliza usualmente para resoluciones numéricas tridimensionales con superficie libre. Obsérvese que para ello es necesario adjuntar condiciones de contorno e iniciales para η , que no vamos a tratar aquí porque usaremos a lo largo de la memoria la hipótesis *de techo rígido*.

0.2 Resolución numérica de modelos 3D.

0.2.1 Discretización espacial. Transformación σ .

El método más extendido de discretización espacial del sistema (0.22) es, con mucho, el de Diferencias Finitas (MDF). En particular, se usan clásicamente mallas decaladas con cuatro posibles distribuciones de las incógnitas: son las denominadas mallas de tipo A,B,C y D, según la clasificación de Arakawa (Arakawa y Lamb, 1977). Por ejemplo, el modelo clásico GDFL (Geophysical Fluid Dynamics Laboratory) de Bryan [20] y Cox [36] se basa en una malla de tipo B. Otros, como el modelo OPA del LODYC usan la malla C. Ésta es la más usada en la mayoría de los modelos de aguas poco profundas. La malla B parece estar mejor adaptada para grandes escalas y modelos de baja resolución, pero parece ser también más sensible a perturbaciones numéricas (Cf. Deleersnijder et al. [39]).

Una dificultad intrínseca de las Diferencias Finitas viene del carácter estructurado de las mallas que se usan. Éste dificulta, por un lado, las aproximaciones precisas de la costa

y la batimetría y la imposición de las condiciones de contorno -en especial aquellas que implican derivadas normales-. Por otro lado, la regularidad de las mallas hace difícil añadir más puntos de discretización en las zonas del dominio de cálculo donde es necesaria una resolución mayor o suprimirlos en zonas donde los fenómenos a simular requieren menos precisión (por ejemplo, en un modelo de dos cuencas unidas por un estrecho, se necesitaría mayor resolución en el estrecho).

Como ventaja, citemos su fácil programación. También la posibilidad de resolver los sistemas lineales originados por la discretización mediante técnicas de direcciones alternadas (ADI), lo que permite su paralelización. Dicha técnica se usa, por ejemplo en Smaoui [76].

Las dificultades de las Diferencias Finitas se encuentran también en la técnica de Volúmenes Finitos, usados por ejemplo en Deleersnijder [38] sobre una malla de tipo C. Este método aporta, como gran ventaja, la conservatividad de las distintas variables calculadas.

Menos frecuente que las Diferencias Finitas es el uso de Métodos Espectrales. En este caso, las funciones de base 3D se toman como producto de funciones de base 2D horizontales por 1D verticales. Varias opciones han sido propuestas para las funciones de base verticales, por ejemplo polinomios de Legendre en [43], o funciones trigonométricas en [13, 40]. La elección de estas funciones puede forzarse para que se adaptan a las condiciones de contorno en superficie y fondo, a los perfiles de viscosidad vertical o para que verifiquen relaciones de ortogonalidad.

La elección de las funciones horizontales bien puede ser mediante Elementos Finitos (por ejemplo, en Espino [43]), lo que entra en la categoría de *métodos semi-espectrales*, o mediante una descomposición en modos, lo que da una discretización enteramente espectral. Este es el caso de Bosseur et al. [13] y Di Martino y Orenca [40].

En los tres métodos citados cabe el uso de coordenadas curvilíneas para la discretización horizontal. Asimismo, es frecuente realizar un *alisado* de la batimetría cuando ésta es demasiado abrupta. Sin embargo, la técnica más utilizada para solventar el problema del mallado en las capas de superficie y fondo es, con mucho, el uso de la coordenada σ (Phillips [69]). Se trata simplemente de introducir la transformación

$$\sigma(\mathbf{x}, z, t) = \frac{z - \eta(\mathbf{x}, t)}{D(\mathbf{x}) + \eta(\mathbf{x}, t)}$$

en las ecuaciones, donde $z = \eta(\mathbf{x}, t)$ parametriza la superficie libre y $z = -D(\mathbf{x})$ el fondo. Esta transformación lleva la columna de agua $[-D(\mathbf{x}), \eta(\mathbf{x}, t)]$ a $[-1, 0]$. Una discretización vertical del dominio tomando $\sigma = \text{cte.}$ permite seguir suavemente el perfil de la topografía quedando el número de capas verticales constante a lo largo de cualquier columna (ver Figura 2).

Es obvio que la transformación σ no sólo afecta a la dirección vertical sino también a las coordenadas horizontales. En particular, los términos difusivos horizontales dan lugar a varios nuevos términos tras la transformación, lo que lo hace muy costoso de programar. En este punto, se pueden encontrar al menos dos opciones: incluir el operador

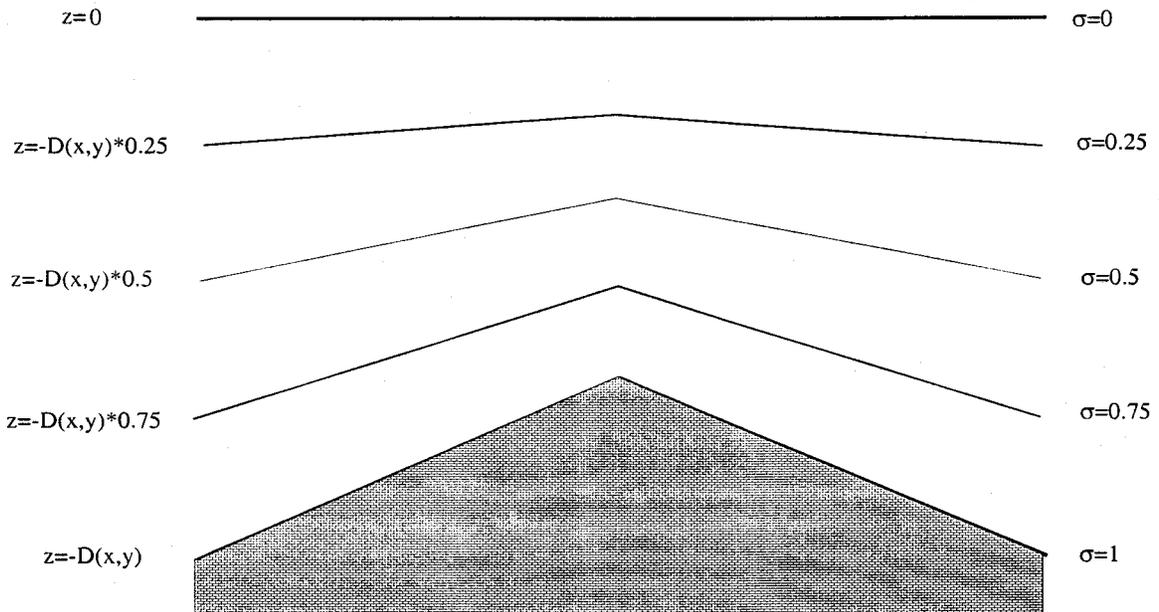


Figura 2: Dominio Ω y superficies iso- σ .

transformado completamente (por ejemplo, [13, 40]) o truncarlo (para una discusión en este sentido referimos a [38]).

Por su parte, el Método de Elementos Finitos presenta las siguientes ventajas sobre el Método de Diferencias Finitas:

- Es una técnica adaptada al estudio de regiones costeras de geometría irregular por permitir una mejor aproximación a la misma y una imposición natural de las condiciones de contorno.
- Permite desarrollar estrategias de mallado adaptativo.
- Por ser una técnica muy estructurada, facilita la programación en forma modular.
- Permite un análisis de estabilidad y convergencia sistemático basado en herramientas del Análisis Funcional.

Citemos como desventaja la mayor complejidad de los Sistemas Lineales resultantes, que requieren un mayor costo computacional.

Aunque pueden encontrarse discretizaciones a base de tetraedros (M.J. Castro y J. Macías [21]), lo habitual es el uso de prismas de base triangular o rectangular (por ejemplo, Bermejo [11], Besson [9] o el código TELEM3D [7] desarrollado por Electricité de France). Bermejo aplica la coordenada σ de forma clásica. En el caso de Azérad y Besson, el uso de la coordenada σ es *implícito*, al utilizar capas verticales de elementos siguiendo las superficies iso- σ .

Nótese que, salvo en el caso de Elementos tetraédricos, en todos los demás es preceptiva la inclusión de un *talud* artificial, bien para que la transformación σ esté bien definida, bien para que los elementos prismáticos no degeneren en el borde. Remitimos al Capítulo 1 para más detalles.

0.2.2 Discretización temporal. Modo externo y modo interno.

Por lo general, el Análisis Numérico de los MDF aplicados a Oceanografía se suele centrar en el caso evolutivo. Al ser el sistema (0.22) no lineal analizar la estabilidad es un problema muy delicado. El método más utilizado es el de Von Neumann aplicado a ciertos subsistemas lineales de (0.22). Ello conduce, según el fenómeno que se aísle y la discretización temporal utilizada, a diferentes condiciones CFL. Por ejemplo, en Vreughdenil [80] puede encontrarse una tabla con condiciones CFL impuestas por diferentes procesos físicos al aplicar un método explícito en tiempo junto con DF del tipo C en espacio.

Sin duda, la restricción de estabilidad más exigente proviene de las *ondas de inercia-gravedad*. El flujo oceánico a gran escala obedece, en primera aproximación, al *equilibrio geostrófico*

$$f \mathbf{k} \times \mathbf{u} = -g \nabla_H p.$$

Cuando aparece alguna perturbación, el equilibrio es restituido por medio de ondas de inercia-gravedad. Supongamos p_a y ρ constantes ($\rho' = 0$). En este caso, se habla de *ondas de inercia-gravedad externas* (u *ondas de Poincaré*). Son gobernadas por las ecuaciones

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} = -g \nabla_H \eta \\ \partial_t \eta + \nabla_H \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0. \end{cases} \quad (0.32)$$

El análisis de estabilidad de Von Neumann para las discretizaciones de (0.32) suele aplicarse en casos simplificados. Por ejemplo, en el caso unidimensional con profundidad D constante, para las ondas de gravedad puras (sin término de Coriolis):

- Algoritmo de Fischer (1959):

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}_j^{m+1} - \mathbf{u}_j^m}{\Delta t} &= -g \frac{\eta_j^m - \eta_{j-1}^m}{\Delta x} \\ \frac{\eta_j^{m+1} - \eta_j^m}{\Delta t} &= -D \frac{\mathbf{u}_{j+1}^{m+1} - \mathbf{u}_j^{m+1}}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Se prueba sin dificultad que el algoritmo es condicionalmente estable bajo la condición CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{gD}},$$

siendo \sqrt{gD} la velocidad característica de las perturbaciones.

- Esquema Leap-frog:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{u}_j^{m+1} - \mathbf{u}_j^{m-1}}{2\Delta t} &= -g \frac{\eta_j^m - \eta_{j-1}^m}{\Delta x} \\ \frac{\eta_j^{m+1} - \eta_j^{m-1}}{2\Delta t} &= -D \frac{\mathbf{u}_{j+1}^{m+1} - \mathbf{u}_j^{m+1}}{\Delta x}.\end{aligned}$$

En este caso, la condición CFL es menos restrictiva:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{2}{\sqrt{gD}}.$$

- Esquema implícito:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m}{\Delta t} &= -\frac{g}{2} \left(\frac{\partial \eta^{m+1}}{\partial x} + \frac{\partial \eta^m}{\partial x} \right) \\ \frac{\eta^{m+1} - \eta^m}{\Delta t} &= -\frac{D}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^{m+1}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}^m}{\partial x} \right).\end{aligned}$$

El esquema es incondicionalmente estable, independientemente (en teoría) de la discretización espacial. De todos modos, las limitaciones prácticas (debidas, por ejemplo, a los errores de redondeo que hacen que las identidades anteriores no sean exactas) hacen que Δt no se pueda tomar arbitrariamente grande.

Éstas y otras variantes se generalizan al caso 3D para la resolución del sistema (0.32). A modo de ejemplo si $\Delta x = 5$ (km) y $D = 100$ (m) el paso de tiempo Δt estará limitado, *grosso modo*, a 5 minutos. Para tiempos de evolución del orden del día y cálculos 3D esto puede ser muy costoso.

Señalemos que en flujos con fuerte estratificación de densidad, las ondas de inercia-gravedad producidas en las interfases entre capas de distinta densidad característica se denominan *ondas internas*. Aunque los principios físicos que las rigen son esencialmente los mismos que en las ondas de Poincaré, el CFL impuesto por las internas es mucho menos restrictivo. Como referencia, en el citado ejemplo de Vreugdenhil [80], un mismo esquema leap-frog 3D en una malla C lleva a una limitación $\Delta t \leq 400$ (s) para las ondas externas mientras que $\Delta t \leq 6000$ (s) para las internas.

Este mismo fenómeno se pone de manifiesto en modelos de Shallow-Water bicapa (por ejemplo, Parés et al. [67]), donde la velocidad de las perturbaciones internas depende de la *gravedad reducida*:

$$g' = \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)g,$$

siendo ρ_i las densidades características de las respectivas capas. En el Estrecho de Gibraltar, por ejemplo, $(\rho_1/\rho_2) \approx 1$ y $g' \ll g$, lo que hace que la velocidad de las ondas internas sea notablemente inferior a las externas.

La estrategia principal para abordar el problema del CFL de las ondas de Poincaré es la descomposición del flujo en *modo externo/modo interno*. El modo externo (o *componente barotrópica*) viene descrito por las ecuaciones (0.29) promediadas en vertical junto con (0.30):

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{A} - f \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{u}} = -\frac{\nabla_H p_a}{\rho_0} - g \nabla_H \eta - \mathbf{B} - \mathbf{Q} + \nu_h \Delta_H \tilde{\mathbf{u}}; \\ \partial_t \eta + \nabla_H \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0, \end{cases} \quad (0.33)$$

donde, por simplificar la notación, denotamos:

- $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{D(\mathbf{x}) + \eta(\mathbf{x}, t)} \langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{x}, t)$;
- \mathbf{A} el promedio de los términos no lineales;
- \mathbf{B} el promedio del gradiente de densidad $\nabla_H \rho'$;
- \mathbf{Q} términos que incluyen las condiciones de arrastre en superficie y fondo.

Para obtener las ecuaciones del modo interno se define la velocidad total como la suma de la velocidad promedio en vertical más las fluctuaciones:

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'. \quad (0.34)$$

Restando (0.33) de (0.29) se obtienen las ecuaciones para el modo interno (*componente baroclínica*):

$$\partial_t \mathbf{u}' + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{A} - f \mathbf{k} \times \mathbf{u}' = \mathbf{B} - \frac{g}{\rho_0} \nabla_H \left(\int_z^\eta \rho' dz \right) + \nu_h \Delta_H \mathbf{u}' + \nu_v \partial_{zz}^2 \mathbf{u}' - \mathbf{Q}. \quad (0.35)$$

Obsérvese que la contribución barotrópica del gradiente de presión queda en el sistema (0.33), y por tanto las limitaciones de CFL, mientras que en el sistema (0.35) no quedan contribuciones barotrópicas explícitas. El sistema (0.33) debe ser resuelto con un paso de tiempo corto, mientras que el sistema (0.35) será resuelto con un paso que puede llegar a ser 10 veces mayor. Finalmente, la velocidad global viene dada por (0.34).

Los campos T y S presentan una variación lo suficientemente lenta como para no requerir descomposición y pueden ser calculados mediante un método explícito utilizando el mismo paso de tiempo del modo interno. Sin embargo, son necesarias discretizaciones en tiempo muy poco difusivas numéricamente para predecir correctamente los efectos difusivos físicos: difusión molecular y turbulenta.

Citemos por último que se pueden utilizar discretizaciones temporales de tipo semi-lagrangiano. Es el caso de Bermejo [11], que introduce también un fraccionamiento del paso de tiempo en etapa convectiva y difusiva.

0.2.3 La hipótesis de techo rígido.

Una alternativa más radical para evitar el CFL de las ondas de inercia-gravedad consiste en asumir la hipótesis de *techo rígido* (*rigid-lid*). Introducida por Bryan [20], consiste en suponer que la velocidad vertical de la superficie libre es nula. Concretamente,

$$\eta = 0 \quad \text{en } \omega \times]0, \mathcal{T}[; \quad u_3 = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_H \eta = 0 \quad \text{en } \Gamma_s. \quad (0.36)$$

Esto provoca, de hecho, la eliminación de las ondas de gravedad (aunque no las de inercia) del sistema (0.33). El paso de tiempo puede ser entonces incrementado a cambio de un modelado menos realista del flujo. Por ejemplo, esta hipótesis no puede ser aplicada en situaciones donde la contribución de la marea sea esencial.

Las igualdades (0.36) corresponden a una solución particular estacionaria de (0.30).

La ecuación de continuidad (0.30) queda ahora como

$$\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0 \quad \text{en } \omega \times]0, \mathcal{T}[. \quad (0.37)$$

Bryan utilizó (0.37) para introducir una función de corriente $\psi(\mathbf{x}, t)$ de forma que

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \nabla_H \psi \quad \text{en } \omega \times]0, \mathcal{T}[. \quad (0.38)$$

Recordemos que, en realidad, Bryan trabajó con coordenadas esféricas.

Incorporando (0.38) a (0.33) se obtiene una sola ecuación para ψ , que se complementa con ecuaciones para la fluctuación en torno a la media vertical, que ahora se escribe como

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, z, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, z, t) - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, z, t) - \frac{1}{D(\mathbf{x})} \int_{-D(\mathbf{x})}^0 \mathbf{u} dz.$$

El modelo numérico de Bryan tiene aún hoy numerosas aplicaciones en Oceanografía. Destaquemos que la discretización espacial se lleva a cabo mediante Diferencias Finitas de tipo B y el esquema temporal se basa en la técnica *leap-frog*.

0.3 Modelo reducido de Ecuaciones Primitivas.

0.3.1 Formulación reducida del problema hidrostático.

Introduciremos en el modelo a tratar en esta memoria ciertas simplificaciones en aras de un tratamiento numérico más cómodo. Concretamente, haremos uso de las aproximaciones de Boussinesq e hidrostática y supondremos un océano sin estratificación de densidad, es decir, con $\rho = \rho_0$ y $\rho' = 0$. Esto permite desacoplar el cálculo de T y S de \mathbf{U} y p . Consideraremos posibles efectos de T y S sólo a través de un término fuente \mathbf{f} .

Además haremos uso de la hipótesis de techo rígido. De este modo, la variable η deja de ser una incógnita, lo que además de permitir un incremento del paso de tiempo, simplifica la discretización espacial.

Puesto que ahora la superficie es $z = 0$, integrando en vertical en (0.22)(b):

$$\frac{p(\mathbf{x}, z)}{\rho_0} = p_s(\mathbf{x}) + \int_z^0 g dz = p_s(\mathbf{x}) - g z$$

y obtenemos

$$\frac{\nabla_H p}{\rho_0} = \nabla_H p_s,$$

donde p_s es una nueva variable definida en ω que llamaremos *presión superficial*.

Si además tenemos en cuenta la ecuación de continuidad en caso de techo rígido (0.37), el sistema (0.22) puede ser sustituido por un nuevo problema que retenga sólo las incógnitas esenciales:

Hallar $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $p_s : \omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} (a) & \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \Delta_{\nu} \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} + \nabla_H p_s = \mathbf{f} & \text{en } \Omega \times]0, T[, \\ (b) & \nabla_H \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0 & \text{en } \omega \times]0, T[, \\ (c) & \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Gamma_b \times]0, T[, \quad \nu_z \partial_z \mathbf{u} = \boldsymbol{\tau} & \text{en } \Gamma_s \times]0, T[, \\ (d) & \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 & \text{en } \Omega; \end{cases} \quad (0.39)$$

donde $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, u_3)$, con $u_3 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u_3(\mathbf{x}, z) = \int_z^0 \nabla_H \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds, \quad (0.40)$$

y $\Delta_{\nu} = \nu_x \partial_{xx}^2 + \nu_y \partial_{yy}^2 + \nu_z \partial_{zz}^2$ denota el operador laplaciano con viscosidad anisótropa, siendo $\nu_x, \nu_y, \nu_z > 0$ los coeficientes de viscosidad turbulenta.

En cuanto a la velocidad vertical, obsérvese que:

- De (0.40) $u_3|_{\Gamma_s} = 0$.
- La condición $\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0$ en ω es equivalente a $u_3 \cdot \mathbf{n}_3 = 0$ en Γ_b . De hecho, puesto que $\mathbf{u} = 0$ en Γ_b se tiene

$$\begin{aligned} \nabla_H \cdot \left(\int_{-D(\mathbf{x})}^0 \mathbf{u}(\mathbf{x}, z) dz \right) &= \int_{-D(\mathbf{x})}^0 \nabla_H \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, z) dz + \mathbf{u}(\mathbf{x}, -D(\mathbf{x})) \cdot \nabla_H D(\mathbf{x}) \\ &= \int_{-D(\mathbf{x})}^0 \nabla_H \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, z) dz. \end{aligned}$$

Por tanto, $u_3(\mathbf{x}, -D(\mathbf{x})) = \nabla_H \cdot \langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in \omega$. Esta equivalencia se demuestra de modo riguroso en T. Chacón et al. [29].

Hagamos algunas precisiones sobre el papel jugado por las incógnitas en el nuevo sistema reducido (0.39). La variable \mathbf{u} es una *variable de pronóstico*, es decir, está afectada por una derivada temporal y, por lo tanto, necesita datos iniciales. Por otro lado, las

variables de diagnóstico son aquellas que pueden ser determinadas en cada instante de tiempo como funciones de las variables de pronóstico. Entran en esta categoría p_s (y por tanto p) y u_3 .

En particular, desde el punto de vista del Análisis Matemático, la presión superficial p_s resulta ser el Multiplicador de Lagrange asociado a la condición $\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0$ en ω . Este hecho es explotado en [6, 55, 57], donde se utilizan Lemmas de De Rham adaptados a (0.39).

Numéricamente, sólo en ciertos casos actúa p_s como una verdadera *variable de diagnóstico*. En efecto, éste es el caso en que la presión discreta p_h se computa como parte del postproceso, tras haber calculado la velocidad discreta \mathbf{u}_h . Para ello, deben construirse funciones de base de divergencia nula para la velocidad, y plantear un Método de Galerkin puro. Esta técnica, aunque poco frecuente se utiliza en ([13, 40]).

En términos físicos, aunque al introducir la hipótesis de techo rígido no se está calculando η explícitamente, no se está despreciando el efecto del gradiente $\nabla_H \eta$ en las ecuaciones del momento. De hecho, la presión superficial p_s soportada por el techo rígido puede ser relacionada con una *sobreelevación virtual* η . Más aún, esta sobreelevación equivalente η puede ser extraída del modelo una vez conocida la profundidad en algún punto de ω y la presión atmosférica mediante su gradiente:

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla_H (p_a + g\eta) = \nabla_H p_s \longrightarrow \nabla_H \eta = g^{-1} \nabla_H (\rho_0 p_s - p_a),$$

luego

$$\eta = g^{-1} (\rho_0 p_s - p_a) + f(t).$$

Citando a Deleersnijder [39]:

“En un contexto de aproximación rigid-lid, la elevación superficial puede ser considerada una función lineal de la presión actuando sobre el techo rígido situado al nivel de referencia $z = 0$ de la superficie del océano.”

En cuanto a las velocidades calculadas con rigid-lid, se pueden dar por válidas siempre que la elevación virtual η sea *pequeña*.

0.3.2 Dificultades del análisis de las Ecuaciones Primitivas.

Las principales dificultades que presenta el análisis matemático del problema (0.39) se pueden resumir en

- **Falta de regularidad del término convectivo.-**

El término convectivo en (0.39) es más delicado de tratar que en el caso de Navier-Stokes. En efecto, la velocidad vertical u_3 es menos regular que la velocidad horizontal (según dicta la igualdad (0.40)), lo que hace que el término de convección vertical $u_3 \partial_z \mathbf{u}$ sea menos regular que en las ecuaciones de Navier-Stokes.

Por ello, la formulación débil de (0.39) requerirá una regularidad aumentada de las funciones test en velocidad \mathbf{v} para definir apropiadamente $\int_{\Omega} (u_3 \partial_z \mathbf{u}) \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \, dz$. Dicha

formulación resultará entonces no hilbertiana. Ello dificulta tanto la existencia de solución fuerte global como la unicidad de solución débil.

- **Tratamiento específico de la presión superficial.-**

Otro punto que convierte el sistema (0.39) en un problema no estándar es la definición de la presión únicamente en superficie, junto con la condición de incompresibilidad no local (0.39)(b) (obsérvese que la divergencia afecta a un campo promediado). Tanto si la existencia de solución para p_s se demuestra mediante un lema de tipo De Rham como mediante una condición inf-sup, ambos resultados deben ser adaptados a este marco. Además, la pérdida de regularidad del término convectivo repercutirá (salvo que se asuma la existencia de talud) en una pérdida de regularidad de la variable p_s .

- **Falta de regularidad del dominio.-**

El dominio Ω que manejamos no es de clase C^1 (ya que aparecen picos entre Γ_s y Γ_b). Esta falta de regularidad limita la obtención de ciertos resultados teóricos (por ejemplo, los referentes a unicidad y regularidad de solución).

Cualquier aproximación de Galerkin de (0.39) debe afrontar la contrapartida *discreta* de estas dificultades. En particular, si se trabaja con una Formulación Mixta será necesario abordar los siguientes obstáculos:

- **Obtención de desigualdades inf-sup discretas específicas.-**

El análisis de estabilidad de la presión pasa por la obtención de condiciones inf-sup discretas. Es en este punto donde confluyen las dificultades antes citadas. En efecto, en estas desigualdades debe tenerse en cuenta el carácter bidimensional de la presión y la condición de incompresibilidad no local para las velocidades. Además, en conexión con la formulación no hilbertiana del problema continuo, debemos utilizar normas L^r para la presión y $W^{1,r'}$ para la velocidad, siendo r, r' exponentes conjugados y $r \in (1, 2]$.

Por otro lado, en el caso de que aproximemos el dominio original Ω por subdominios Ω_h con talud, deberemos estudiar el comportamiento de la desigualdad inf-sup cuando dicho talud tiende a 0.

- **Inestabilidad por convección dominante.-**

Otra restricción de estabilidad puede darse en éstos métodos a causa de la convección dominante. El *síntoma* es la aparición de oscilaciones espúreas en la velocidad obtenida por el Método de Galerkin. Dichas oscilaciones desaparecen para mallas suficientemente finas, llevando al incremento de coste computacional.

La reducción de este coste cabe ser afrontada mediante la introducción de Métodos Estabilizados. Dichos métodos reemplazan la formulación débil estándar de los Métodos Mixtos por formulaciones aumentadas *ad hoc*, con el propósito de estabilizar la discretización.

El análisis de estos métodos se había centrado hasta ahora en las Ecuaciones de transporte-difusión, Stokes y Navier-Stokes, fundamentalmente para el caso estacionario (ver el apartado **Métodos Estabilizados** de la Sección 0.3.3 para más detalles). Los trabajos de Chacón Rebollo [27] y Chacón Rebollo y Domínguez Delgado [28] muestran que algunos de estos métodos pueden ser analizados en paralelo a los Mixtos gracias al concepto de condensación estática en *Espacios de Burbujas* (Cf. Baiocchi et al. [8]). Esta técnica se basa fuertemente en que la formulación del problema es hilbertiana y los espacios de discretización afín-equivalentes.

Se plantea la dificultad de extender esta técnica a las Ecuaciones Primitivas, donde la formulación del problema ya no es hilbertiana, y, en nuestro caso, los Elementos Finitos a utilizar isoparamétricos. Nos proponemos además abordar el caso evolutivo.

- **Tratamiento de las orillas.-**

Como se observó en el apartado 0.2.1, en un contexto de Elementos Finitos lo habitual es el uso de prismas de base triangular o rectangular. En tal caso, es preceptiva la inclusión de un *talud* artificial en las orillas para que los elementos prismáticos no degeneren en el borde. Se plantea entonces el problema de dar una justificación matemática rigurosa del uso de un talud artificial. Dicho de otro modo, ¿si el talud artificial introducido en el dominio tiende a 0 cuando el parámetro de discretización h tiende a cero, convergen las soluciones discretas a la solución exacta en el dominio original sin talud?

0.3.3 Algunos resultados previos.

Problema Estacionario.-

Introduzcamos los espacios

$$\begin{aligned}
 H_b^1(\Omega) &= \{v \in H^1(\Omega); v|_{\Gamma_b} = 0\}, \\
 H(\partial_z, \omega) &= \{\varphi \in L^2(\Omega), \partial_z \varphi \in L^2(\Omega)\}, \\
 H_0(\partial_z, \omega) &= \{\phi \in H(\partial_z, \omega); \phi n_3|_{\partial\Omega} = 0\}, \\
 L_D^r(\omega) &= \{q_s : \omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible, } \int_{\omega} D(\mathbf{x}) |q_s(\mathbf{x})|^r dx < \infty\}, \\
 L_{D,0}^r(\omega) &= L_D^r(\omega)/\mathbb{R}.
 \end{aligned}
 \tag{0.41}$$

En el trabajo de T. Chacón y F. Guillén [30], se hace un análisis de existencia de solución de las ecuaciones (0.39) estacionarias mediante una aproximación interna por Elementos Finitos tetraédricos. Este tipo de elemento permite prescindir de la introducción de un talud artificial en $\partial\omega$. El citado análisis proporciona al mismo tiempo un resultado de estabilidad y convergencia de la formulación utilizada, concretamente de tipo Mixto en velocidad-presión. La construcción del par de velocidad-presión (\mathbf{u}_h, p_{sh}) se hace como sigue: se parte del clásico \mathbb{P}_1 -iso $\mathbb{P}_2 / \mathbb{P}_1$ para la velocidad \mathbf{U}_h y la presión hidrostática p_h en la malla de tetraedros 3D. Dicho par de espacios cumple la condición inf-sup discreta 3D en todo el dominio y en norma L^r , $1 < r < \infty$.

Seguidamente, se retienen las componentes horizontales de las velocidades y las presiones discretas que no dependen de z . Si los respectivos espacios se denotan como X_h y M_{sh} se demuestra

$$\|q_{sh}\|_{L^r_{D,0}(\omega)} \leq \beta \sup_{\mathbf{v}_h \in X_h} \frac{(q_{sh}, \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle)_\omega}{\|\mathbf{v}_h\|_{W^{1,r'}(\Omega)^2}}, \quad \forall q_{sh} \in M_{sh}, \quad \forall 1 < r < \infty. \quad (0.42)$$

El Teorema que demuestran los autores proporciona la existencia de una solución $(\mathbf{u}, p_s) \in [H^1_b(\Omega)]^2 \times L^{3/2}_{D,0}(\omega)$.

Un resultado equivalente se obtiene en Besson y Laydi [10], en este caso mediante un análisis asintótico al pasar al límite $\epsilon \rightarrow 0$ en la versión estacionaria de (0.22)(a)-(b). Para ello, es fundamental asumir

$$\frac{\nu_v}{\nu_h} = \epsilon^2, \quad \tau = \epsilon \tau_0, \quad \tau_0 = O(1).$$

También para el problema (0.22)(a)-(b) estacionario, pero en el caso lineal (*Stokes hidrostático*), se encuentra en Azérad [5] el análisis numérico de una aproximación mixta. Se supone la existencia de talud y condiciones Dirichlet homogéneas en toda la frontera. A continuación, resumimos los principales aspectos de este análisis:

Tomemos un mallado \mathcal{T}_h de Ω por Elementos Prismáticos de base triangular y denotemos $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}})$ las coordenadas en el prisma de referencia \widehat{K} . Supondremos que cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$ es el transformado de \widehat{K} por una aplicación de $\mathbb{P}_1(\hat{\mathbf{x}}) \otimes \mathbb{P}_1(\hat{\mathbf{z}})$.

Consideremos el espacio de velocidades horizontales

$$V_h = \left\{ \phi \in C(\overline{\Omega})^2 \cap H^1_0(\Omega)^2 \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, \widehat{\phi}|_K \in (\mathbb{P}_1(\hat{\mathbf{x}}) \otimes \mathbb{P}_1(\hat{\mathbf{z}}))^2 \right\},$$

y verticales

$$W_h = \left\{ \chi \in C(\overline{\Omega}) \cap H_0(\partial_z, \Omega) \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, \widehat{\chi}|_K \in \mathbb{P}_1(\hat{\mathbf{x}}) \otimes \mathbb{P}_1(\hat{\mathbf{z}}) \right\}. \quad (0.43)$$

Para la presión no se pide la continuidad global, sólo la continuidad en las interfases verticales de los prismas:

$$P_h = \left\{ \psi \in L^2_0(\Omega) \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, \widehat{\psi}|_K \in \mathbb{P}_1(\hat{\mathbf{x}}) \otimes \mathbb{P}_0(\hat{\mathbf{z}}) \text{ y } \psi \text{ continua en las interfases verticales} \right\}. \quad (0.44)$$

La distribución de grados de libertad para la velocidad y la presión del llamado *Elemento Finito Hidrostático* es la que se expone en la Figura 3.

Dicho par cumple dos condiciones sobre las que recae el análisis de estabilidad. Bajo las hipótesis: 1) la malla prismática es regular y 2) satisface la hipótesis inversa *vertical*

$$\frac{h_{min}}{h_{max}} \geq \mu > 0,$$

donde h_{min} (resp. h_{max}) designa la menor (resp. la mayor) arista vertical de los elementos de la malla, se tiene

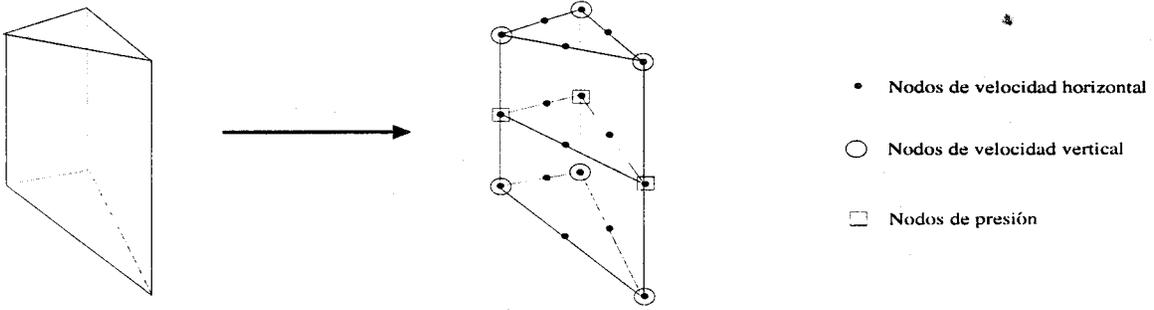


Figura 3: Distribución de nodos del Elemento Finito Hidrostático de Azérad y Besson [5].

- La desigualdad inf-sup: Existe una constante C_1 independiente de h tal que

$$\|p_h\|_{0,\Omega} \leq C_1 \sup_{(\mathbf{v}_h, w_{3h}) \in V_h \times W_h - \{0\}} \frac{(\nabla \cdot (\mathbf{v}_h, w_{3h}), p_h)_\Omega}{\|(\mathbf{v}_h, w_{3h})\|_{1,\Omega}} \quad \forall p_h \in P_h. \quad (0.45)$$

- La desigualdad *hidrostática*: Existe una constante C_2 independiente de h tal que

$$\|\partial_z v_{3h}\|_{0,\Omega} \leq C_2 \sup_{q_h \in P_h - \{0\}} \frac{(\partial_z v_{3h}, q_h)_\Omega}{\|q_h\|_{0,\Omega}} \quad \forall v_{3h} \in W_h.$$

Se prueban también estimaciones de error para este par: si la solución del problema continuo satisface $\mathbf{u} \in H^3(\Omega)^2$, $u_3, \partial_z u_3 \in H^2(\Omega)$, $p \in H^2(\Omega)$ se tiene

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \|\partial_z u_3 - \partial_z u_{3h}\|_{0,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} = O(h).$$

En cuanto a resultados de regularidad fuerte, citemos los resultados de M. Ziane [81, 82] para el problema de Stokes hidrostático en caso de talud. En ellos se demuestra, bajo ciertas condiciones de regularidad de los datos y condiciones de contorno mixtas de tipo Dirichlet-Neumann, que la única solución del problema de Stokes hidrostático es de clase H^2 para la velocidad y H^1 para la presión. El hecho de que el dominio no sea de clase C^1 es importante cuando coinciden condiciones de tipo Dirichlet con condiciones de tipo Neumann en las intersecciones de Γ_s , Γ_l y Γ_b (como se muestra en la Figura 2, dichas intersecciones dan lugar a *esquinas*). En ese caso, para obtener regularidad para la velocidad de tipo H^2 en espacio se impone que el ángulo de las esquinas sea $\pi/2$.

Finalmente, en la tesis de M.A. Rodríguez Bellido [60] se demuestra la existencia y unicidad de solución fuerte $(\mathbf{u}, p_s) \in [H^2(\Omega)]^2 \times H^1(\Omega)$ para el problema (0.39) estacionario bajo hipótesis de pequeñez sobre los datos.

Problema Evolutivo.-

Usando una técnica similar a la usada para las ecuaciones de Navier-Stokes, Lions, Temam y Wang obtienen en [57] un resultado de existencia de solución débil global en tiempo

para el sistema (0.39). En concreto, se supone la existencia de talud y una velocidad inicial $\mathbf{u}_0 \in [L^2(\Omega)]^2$, y se obtiene la existencia de

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^2) \cap L^2(0, T; [H^1(\Omega)]^2), p_s \in L^2(0, T; H^{-2}(\omega)) \quad \forall T > 0.$$

En las mismas condiciones, Lewandowsky [55] obtiene una solución débil global en tiempo

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^2) \cap L^2(0, T; [H^1(\Omega)]^2), p_s \in \mathcal{D}'((0, T); W^{-1,2}(\omega)) \quad \forall T > 0.$$

Para salvar el escollo que supone la falta de regularidad del operador de convección, Lewandowski introduce el truncamiento del operador de convección, regularizando el problema.

En la Tesis de P. Azérad [5] se obtienen para la versión linealizada de (0.22)(a)-(b) (con velocidad de convección dada), resultados de continuidad de la solución respecto de los datos iniciales y unicidad de solución. Concretamente, se demuestra que cuando la velocidad de convección está en $L^\infty(0, T; \Omega)$, entonces existe una solución $(\mathbf{U}, P) \in L^2(0, T; H_b^1(\Omega) \times H_b^1(\Omega) \times H(\partial_z; \Omega)) \times W^{-1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$.

Para el caso del problema de evolución no lineal, P. Azérad y F. Guillén [6] usan un argumento asintótico (similar al de Besson y Laydi [10] en el caso estacionario) para justificar el modelo y además obtener existencia de solución débil

$$(\mathbf{U}, P) \in L^2(0, T; H_b^1(\Omega) \times H_b^1(\Omega) \times H_0(\partial_z; \Omega)) \times W^{-1,\infty}(0, T; L^{3/2}(\Omega)) \text{ en ausencia de talud.}$$

En la tesis de M.A. Rodríguez Bellido [60] se introduce un nuevo tipo de estimaciones (llamadas **estimaciones anisótropas**) que permite obtener resultados de regularidad fuerte para el sistema (0.39). En concreto, se obtiene existencia de solución fuerte global en tiempo para datos pequeños. Por solución fuerte entendemos

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; [H^1(\Omega)]^2) \cap L^2(0, T; [H^2(\Omega)]^2), \quad \partial_t \mathbf{u} \in L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^2).$$

Para datos cualesquiera se obtiene existencia de solución fuerte local en tiempo (para tiempos pequeños).

Se dan resultados de unicidad de solución débil en los casos 2D y 3D siempre que exista al menos una solución débil con determinada regularidad adicional, verificada en particular si la solución es fuerte. Esta es la denominada **unicidad débil/fuerte**.

Se demuestra además un resultado de convergencia cuando el tiempo tiende a infinito (bajo determinadas condiciones sobre las fuerzas externas y la tensión del viento en superficie) de la solución del problema de Ecuaciones Primitivas de evolución hacia la solución del problema de Ecuaciones Primitivas estacionario.

Por último, citar que se estudia la obtención y estudio de un modelo de Ecuaciones Primitivas con condiciones de tipo fricción en el fondo.

Métodos Estabilizados.-

Como ya indicamos en el apartado 0.3.2, la resolución numérica de flujos incompresibles por el Método de Elementos Finitos puede presentar oscilaciones espúreas para la

presión y/o la velocidad debido, respectivamente, a la restricción de incompresibilidad y a una posible convección dominante. Los Métodos Mixtos pueden estabilizar la primera de estas restricciones, supuesto que el par de espacios discretos de velocidad-presión satisfaga la condición inf-sup (Cf. Brezzi y Fortin [18]). La segunda restricción sólo es abordable para mallas muy finas.

Los Métodos Estabilizados afrontan ambas fuentes de inestabilidad para una amplia gama de espacios de discretización (en particular, para pares de espacios discretos que no satisfacen condición inf-sup) y sin restricciones en la talla de la malla. Esencialmente, estos métodos consisten en la adición de un término estabilizante a la formulación Galerkin original del problema. Excepto para variantes muy concretas (como la usada en los Capítulos 2 y 4), este término puede ser escrito como

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K \mathcal{R}(\mathbf{U}_h|_K) \mathcal{P}(\mathbf{V}_h|_K) \, dx \, dz,$$

donde $\mathcal{R}(\mathbf{U}_h|_K)$ es el residuo de la ecuación diferencial a resolver, $\mathcal{P}(\mathbf{V}_h|_K)$ es un cierto operador aplicado a la función test \mathbf{V}_h y $\tau_K > 0$ son coeficientes que, eventualmente, pueden depender de $\mathbf{U}_h|_K$. La elección de \mathcal{P} y $\tau_K > 0$ determina cada método.

El primero de tales esquemas, conocido como SUPG (*Streamline-Upwind Petrov-Galerkin*), fue introducido en Brooks y Hughes [19] para discretizaciones afines de la velocidad y la presión. También para estas discretizaciones se introdujo el Método de Brezzi y Pitkäranta [17]. Posteriormente, aparecieron generalizaciones para interpolaciones de mayor orden en el contexto de las ecuaciones de Stokes y Navier-Stokes. Destacamos el GaLS (*Galerkin Least-Squares*) introducido en Hughes et al. [50] y Hughes y Franca [51], y el AdS (*Adjoint Stabilized*) (Cf. Douglas y Wang [41]).

Históricamente, estos métodos han sido objeto de un análisis específico, diferente del de los Métodos Mixtos. En concreto, los argumentos usados se apoyaban fuertemente en la regularidad a trozos de las funciones de base empleadas en Elementos Finitos, lo que permite el uso de desigualdades inversas del tipo

$$\|\nabla \chi\|_{0,T} \leq Q h_T^{-1} \|\chi\|_{0,T}.$$

Basándose en esta desigualdad y argumentos de dualidad, Brezzi y Douglas [16] llevan a cabo un análisis de error para GaLS en el caso de las ecuaciones de Stokes. Este análisis se generaliza en Franca y Stenberg [46] para GaLS y AdS, análisis que se resume en Franca et al. [45].

Posteriormente, Tobiska y Verfürth [84] desarrollan un análisis de estabilidad y convergencia para SUPG, GaLS y AdS para Navier-Stokes. Se analiza también la expresión de los coeficientes de estabilidad. Tanto en este trabajo como en los anteriores, la expresión de los coeficientes τ_K es independiente de $\mathbf{U}_h|_K$.

Otra vía de análisis viene sugerida por la relación con los Métodos Mixtos. El camino se abre en Brezzi et al. [15] relacionando el método SUPG con el uso de funciones burbuja para estabilizar discretizaciones lineales de las ecuaciones de transporte-difusión.

Posteriormente, Franca y Frey [44] relacionan la discretización Galerkin mediante el mini-elemento (Cf. Arnold et al. [4]) con el método SUPG, en este caso para las ecuaciones

de Oseen. Esta equivalencia se entiende en el sentido de que ambos métodos dan lugar a la misma formulación si los grados de libertad asociados a las burbujas se eliminan mediante *condensación estática*.

Este resultado se formaliza en un marco abstracto en Baiocchi et al. [8], donde se muestra la equivalencia entre métodos de tipo GaLS y métodos de Galerkin con burbujas. Concretamente, existe una equivalencia entre coeficientes de estabilización τ_K para el GaLS y un conjunto de *burbujas virtuales* para el método de Galerkin, sin limitaciones en el grado de interpolación. Ello sugiere, por un lado, una vía de análisis de estabilidad y convergencia para una amplia gama de métodos ya establecidos y, por otro, una vía de diseño de nuevos métodos mediante la condensación estática de burbujas diseñadas *ad hoc*.

La primera de estas aplicaciones se explota en los trabajos de Chacón Rebollo [27] y Chacón Rebollo y Domínguez Delgado [28].

En [27] se analiza de forma unificada la estabilidad del SUPG (generalizado a interpolaciones de alto orden), GaLS y AdS para las ecuaciones de Oseen, a partir de una condición inf-sup discreta *subyacente* entre los espacios de velocidad+burbujas virtuales y presión. La convergencia de dichos métodos se prueba cómodamente usando las propiedades de los espacios de burbujas. Se recogen además aplicaciones de esta técnica a Métodos Espectrales y Ecuaciones Primitivas.

Finalmente, en [28] se extiende el estudio de estabilidad y convergencia de [27] al caso Navier-Stokes con coeficientes de estabilización no lineales $\tau_K = \tau_K(\mathbf{U}_h)$.

0.4 Contenido de la memoria.

El propósito del presente trabajo es el análisis y resolución numérica del sistema (0.39) mediante Métodos de Elementos Finitos Mixtos y Estabilizados. En particular, para algunos de éstos métodos de coste computacional reducido, incluimos la validación mediante tests numéricos. A continuación, exponemos los resultados originales obtenidos.

• Capítulo 1.- Caso estacionario: Métodos Mixtos.

Tratamos en este caso la versión estacionaria de (0.39):

$$\begin{cases} (a) & (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \Delta \nu \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} + \nabla_H p_s = \mathbf{f} & \text{en } \Omega, \\ (b) & \nabla_H \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0 & \text{en } \omega, \\ (c) & \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Gamma_b, \quad \nu_z \partial_z \mathbf{u} = \tau & \text{en } \Gamma_s. \end{cases} \quad (0.46)$$

donde $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, u_3)$, con $u_3 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, viene definida por (0.40).

En este Capítulo analizamos la discretización de (0.46) mediante Métodos Mixtos. En concreto, bajo hipótesis bastante generales sobre los espacios de discretización, damos un resultado de estabilidad y convergencia de una subsucesión de soluciones aproximadas a la solución de (0.46). Dicha convergencia se entiende en sentido débil en los espacios $\mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L_{D,0}^{3/2}(\omega)$.

Para afrontar la restricción de estabilidad impuesta por la incompresibilidad del flujo, proponemos dos pares de espacios aptos para la Discretización Mixta de (0.46). Asumiendo la hipótesis de existencia de talud, la dificultad asociada a los irregularidades del fondo se solventa de forma *natural* con el uso de Elementos Finitos Prismáticos Isoparamétricos siguiendo las superficies iso- σ . De este modo, no es necesario aplicar la transformación σ al Sistema (0.46).

El primero está basado en el par introducido en Azérad [5] para el sistema (0.22). Basta retener las componentes horizontales de las velocidades y las presiones discretas que no dependen de z para obtener un par $\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_1$ - iso $\mathbb{P}_2 \otimes \mathbb{P}_2$ 3D para la velocidad y \mathbb{P}_1 2D para la presión superficial. La condición inf-sup se deduce de la probada en [5] para el par original.

Puesto que uno de los objetivos generales de este trabajo es el diseño de métodos de complejidad computacional reducida, nos planteamos introducir un par estable y más económico que el anterior. Para ello, adaptamos el par \mathbb{P}_1 -burbuja en velocidad, \mathbb{P}_1 en presión (Cf. Arnold et al. [4]) a nuestro marco funcional. En concreto, consideramos únicamente componentes horizontales de las velocidades y presiones discretas independientes de z .

Bajo hipótesis bastante generales sobre los espacios de discretización, damos un resultado de estabilidad y convergencia de una subsucesión de soluciones aproximadas a la solución de (0.46).

Además, damos una justificación matemática rigurosa del uso de un talud artificial como técnica orientada a la computación. En concreto, probamos convergencia de las soluciones discretas a la solución exacta en el dominio original sin talud cuando el talud artificial introducido en el dominio tiende a 0.

- **Capítulo 2.- Caso estacionario: Método Estabilizado Término a Término.**

La adición de nodos extra en velocidad propia de los Métodos Mixtos puede aumentar extraordinariamente la cantidad de grados de libertad, dada la naturaleza tridimensional de la velocidad.

Concretamente, en este Capítulo tratamos las restricciones de estabilidad debidas a incompresibilidad y convección dominante mediante un método penalizado *término a término*, que permite una interpolación $\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_1$ para la velocidad y \mathbb{P}_1 2D para la presión. Esto permite una reducción de incógnitas del orden de 9 a 1 frente al par de Azérad [5].

También extendemos la técnica de análisis para Métodos Estabilizados introducida en Chacón Rebollo [27] para deducir la estabilidad, convergencia y estimaciones de error de nuestro esquema numérico. Esta prueba tiene un interés intrínseco, al requerir ciertas extensiones no triviales de [27]. En particular, deducimos la estructura de los términos estabilizantes para convección y presión, y probamos una condición inf-sup específica para nuestros Elementos Finitos Prismáticos.

Este capítulo, junto con los tests numéricos correspondientes (Capítulo 5) constituye la publicación [31].

• **Capítulo 3.- Caso estacionario: Métodos Estabilizados Consistentes.**

La principal desventaja del Método Estabilizado Término a Término es la limitación de precisión que impone su carácter de Método de Penalización. Esto hace inútil aumentar el grado de interpolación, pues la falta de consistencia fuerte del método (en el sentido de que la solución exacta no verifica la formulación discreta) limita la precisión al primer orden para velocidad y presión.

Por Métodos Estabilizados Consistentes designamos aquellos en los que el término estabilizante se construye ponderando el residuo completo:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K \mathcal{R}(\mathbf{u}_h|_K, p_h|_K) \mathcal{P}(\mathbf{v}_h|_K, q_h|_K) \, d\mathbf{x} \, dz,$$

con

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}_h|_K, p_h|_K) = (\mathbf{U}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h - \Delta_{\nu} \mathbf{u}_h + f \mathbf{k} \times \mathbf{u}_h + \nabla_{HP} p_h - \mathbf{f}.$$

Por definición, estos métodos son consistentes y otorgan una mayor precisión al cálculo.

La principal dificultad en su análisis estriba en la confección de una desigualdad inf-sup específica. En efecto, la falta de regularidad en (0.46) de la derivada convectiva y el hecho de que el término de estabilización incluya a la vez convección y gradiente de presión impiden usar la condición inf-sup del Capítulo 2 para estimar uniformemente las presiones discretas. Ésto fuerza a asumir simplificaciones en el modelo que permitan regularizar la derivada convectiva. Concretamente, supondremos la velocidad de convección dada, con regularidad $W^{1,3}(\Omega) \times W^{1,3}(\Omega) \times L^3(\Omega)$, en lugar de la regularidad $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ habitual, con lo que se analiza un problema lineal con formulación variacional hilbertiana.

Demostramos la existencia y unicidad de solución del problema discreto, así como convergencia fuerte a una solución del problema continuo en norma $[H_b^1(\Omega)]^2 \times L^2(\omega)$.

• **Capítulo 4.- Caso evolutivo: Aproximación en espacio-tiempo.**

En este Capítulo estudiamos un esquema espacio-temporal destinado a la resolución numérica de (0.39). Más concretamente, combinamos el método introducido en el Capítulo 2 para aproximar el modelo estacionario con un esquema de Euler semi-implícito en tiempo.

Se muestra en la Sección 4.5 que dicho esquema es incondicionalmente estable. Las estimaciones de energía son suficientes para pasar al límite sólo en el parámetro de discretización espacial h , recuperando una semi-discretización en tiempo genuina de las ecuaciones originales. En una segunda etapa se toma límite en el paso de tiempo.

Finalmente, se analiza el caso lineal. En este caso, es posible estimar directamente la sucesión $\{p_{h,\Delta t}\}_{h,\Delta t}$, lo que simplifica notablemente el análisis.

Este capítulo, junto con los tests numéricos correspondientes (Capítulo 5) constituye la prepublicación [32].

- **Capítulo 5.- Resultados Numéricos.**

Este Capítulo recoge tests numéricos relativos a los métodos analizados en los Capítulos 2 y 4. La programación e implantación efectiva se realizó mediante un código F77/C++ usando los medios informáticos del Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico de la Universidad de Sevilla.

La intención es contrastar ciertos aspectos de especial interés del análisis numérico llevado a cabo y comprobar que el código simula correctamente ciertos efectos previstos por la teoría clásica de flujos geofísicos.

Entre los tests de carácter cuantitativo, figuran:

- el comportamiento de la norma $L_0^2(\omega)$ de la presión superficial en dominios con talud artificial tendiendo a 0;
- el estudio de la velocidad vertical *residual* en el fondo Γ_b cuando $h \rightarrow 0$;
- la descripción de la capa de Ekman en casos simples;
- la medición de la frecuencia de inercia en flujos evolutivos.

En los tests de carácter cualitativo se muestra la validez de los EF Prismáticos Estabilizados para reproducir efectos relevantes 3D como la generación de efectos de afloramiento e inmersión provocados por la interacción entre viento y fuerza de Coriolis.

Capítulo 1

Caso estacionario: Métodos Mixtos.

1.1 Introducción

En este Capítulo desarrollamos y analizamos la discretización de las Ecuaciones Primitivas Estacionarias (0.46) mediante Métodos Mixtos construidos con Elementos Finitos Prismáticos.

Comenzamos formulando débilmente las ecuaciones (0.46). A continuación, se introducen pares de espacios capaces de afrontar la restricción de estabilidad impuesta por la incompresibilidad del flujo y las condiciones de contorno sobre u_3 . El primero está basado en el clásico Elemento de Taylor-Hood. También puede ser obtenido a partir del elemento hidrostático de Azérad [5] sin más que retener las componentes horizontales de las velocidades y las presiones discretas independientes de z . Su estabilidad se demuestra a partir de (0.45) del mismo modo: reteniendo las componentes horizontales de las velocidades y las presiones discretas independientes de z .

Puesto que uno de los objetivos generales de este trabajo es el diseño de métodos de complejidad computacional reducida, nos planteamos introducir un par estable y más económico que el anterior. Para ello, adaptamos el par \mathbb{P}_1 -burbuja en velocidad, \mathbb{P}_1 en presión (Cf. Arnold et al. [4]) a nuestro marco funcional. En concreto, consideramos únicamente componentes horizontales de las velocidades y presiones discretas independientes de z .

Bajo hipótesis bastante generales sobre los espacios de discretización, damos un resultado de estabilidad y convergencia de una subsucesión de soluciones aproximadas a la solución de (0.46). Buscaremos una presión con regularidad $L^{3/2}$. En efecto, la falta de regularidad del operador de convección combinado con el hecho $D|_{\partial\omega} = 0$ fuerza a el uso de desigualdades inf-sup *generalizadas* en espacios $L^\alpha(\Omega) \times W_0^{1,\alpha'}(\Omega)$ con $1 < \alpha < 2$ y $\alpha^{-1} + (\alpha')^{-1} = 1$. Probamos que este resultado se aplica a los dos pares de elementos introducidos.

Por último, damos una justificación matemática rigurosa del uso de un talud artificial como técnica orientada a la computación, puesto que el talud artificial introducido en el dominio tiende a 0 cuando el parámetro de discretización h tiende a cero.

1.2 Formulación débil del problema estacionario

Consideraremos en este Capítulo un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ descrito por

$$\Omega = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^3; \mathbf{x} = (x, y) \in \omega, -D(\mathbf{x}) < z < 0\}, \quad (1.1)$$

donde ω es un abierto acotado conexo de \mathbb{R}^2 y $D : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}_+$ es la función profundidad. Por razones técnicas, supondremos que D es C^1 a trozos en $\bar{\omega}$. En particular, se tiene $D \in W^{1,\infty}(\bar{\omega})$. La función D puede anularse parcial o totalmente en $\partial\omega$; en tal caso, pedimos que el gradiente no se anule en el borde para que $\partial\Omega$ sea Lipschitz-continua.

Una formulación débil del Problema (0.46) pasa por formular variacionalmente en primer lugar la versión estacionaria de (0.22)(a)-(b) con las respectivas condiciones de contorno. Denotemos

$$P(\mathbf{x}, z) = \frac{p(\mathbf{x}, z)}{\rho_0} + g z.$$

Se trata entonces de hallar $\mathbf{U} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $P : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} (a) & (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \Delta_{\nu}\mathbf{u} + f \mathbf{u}^{\perp} + \nabla_H P = \mathbf{f} & \text{en } \Omega; \\ (b) & \partial_z P = 0 & \text{en } \Omega; \\ (c) & \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 & \text{en } \Omega; \\ (d) & u_3 = 0, \nu_z \partial_z \mathbf{u} = \boldsymbol{\tau} & \text{en } \Gamma_s; \\ (e) & \mathbf{u} = 0, u_3 n_3 = 0 & \text{en } \Gamma_b. \end{cases} \quad (1.2)$$

Supongamos que $\mathbf{U} \in (C^2(\bar{\Omega}))^3$ y $P \in C^1(\bar{\Omega})$ son soluciones regulares del problema. Asimismo, sea $\boldsymbol{\tau} \in C^1(\bar{\Gamma}_s)$ y

$$\mathbf{V} = (\mathbf{v}, v_3) = (v_1, v_2, v_3) \in (C^1(\bar{\Omega}))^3, \quad q \in C^0(\bar{\Omega})$$

tales que

$$v_3|_{\Gamma_s} = 0, \quad \mathbf{V}|_{\Gamma_b} = 0.$$

Si multiplicamos

- (1.2)(a) por \mathbf{v}
- (1.2)(b) por v_3
- (1.2)(c) por q

e integramos en Ω podemos realizar las siguientes integraciones por partes:

- Gracias a $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$, $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_s} = 0$:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u}) \mathbf{v} = - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{U})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - \int_{\Omega} (\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{v}) \mathbf{u} + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) = - \int_{\Omega} (\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{v}) \mathbf{u}.$$

- Gracias a $\mathbf{v}|_{\Gamma_b} = 0$ $\mathbf{n}|_{\Gamma_s} = (0, 0, 1)$, $\partial_z \mathbf{u}|_{\Gamma_s} = \nu_z^{-1} \boldsymbol{\tau}$:

$$-\int_{\Omega} \Delta \nu \mathbf{u} \mathbf{v} = \int_{\Omega} \nabla \nu \mathbf{u} : \nabla \nu \mathbf{v} - \int_{\partial \Omega} \mathbf{v} \cdot ((\nabla \nu \mathbf{u}) \mathbf{n}) = \int_{\Omega} \nabla \nu \mathbf{u} : \nabla \nu \mathbf{v} - \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{\tau} \mathbf{v}.$$

- Por $\mathbf{v}|_{\Gamma_b} = \mathbf{n}_H|_{\Gamma_s} = 0$:

$$\int_{\Omega} \nabla_H P \cdot \mathbf{v} = - \int_{\Omega} P (\nabla_H \cdot \mathbf{v}) + \int_{\partial \Omega} P (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_H) = - \int_{\Omega} P \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

- Por $v_3 n_3|_{\partial \Omega} = 0$:

$$\int_{\Omega} \partial_z P \cdot v_3 = - \int_{\Omega} P \partial_z v_3 + \int_{\partial \Omega} P v_3 n_3 = - \int_{\Omega} P \partial_z v_3.$$

Por tanto

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad - \int_{\Omega} (\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{v}) \mathbf{u} + \int_{\Omega} \nabla \nu \mathbf{u} : \nabla \nu \mathbf{v} + \\ \quad \quad \quad f \int_{\Omega} \mathbf{u}^\perp \mathbf{v} - \int_{\Omega} P (\nabla_H \cdot \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{\tau} \mathbf{v} \\ (b) \quad \quad \quad \int_{\Omega} \partial_z P v_3 = 0 \\ (c) \quad \quad \quad \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{U}) q = 0 \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Consideremos

$$C_b^\infty = \{v \in C^\infty(\bar{\Omega}) \text{ tal que } v = 0 \text{ en un entorno de } \Gamma_b\}.$$

Introduzcamos los espacios:

$$\begin{aligned} H_b^1(\Omega) &= \{v \in H^1(\Omega); v|_{\Gamma_b} = 0\}, \\ H(\partial_z, \Omega) &= \{\varphi \in L^2(\Omega), \partial_z \varphi \in L^2(\Omega)\}, \\ H_0(\partial_z, \Omega) &= \{\phi \in H(\partial_z, \Omega); \phi n_3|_{\partial \Omega} = 0\}, \\ H^3(\partial_z, \Omega) &= \{\varphi \in L^3(\Omega), \partial_z \varphi \in L^3(\Omega)\}, \\ H_0^3(\partial_z, \Omega) &= \{\phi \in H^3(\partial_z, \Omega); \phi n_3|_{\partial \Omega} = 0\}, \\ L_D^r(\omega) &= \{q_s : \omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible, } \int_{\omega} D(\mathbf{x}) |q_s(\mathbf{x})|^r dx < \infty\}, \\ L_{D,0}^r(\omega) &= L_D^r(\omega) / \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Consideremos un exponente $1 < r < \infty$ y su conjugado r' ($1/r + 1/r' = 1$), y definamos los espacios

$$W_b^{1,r}(\Omega) = \{v \in W^{1,r}(\Omega); v|_{\Gamma_b} = 0\}; \quad W_b^{-1,r'}(\Omega) = [W_b^{1,r}(\Omega)]'.$$

En particular $H_b^1(\Omega) = W_b^{1,2}(\Omega)$. Dado un espacio V , denotaremos $\mathbf{V} = V^2$. Así, $\mathbf{H}_b^1(\Omega) = H_b^1(\Omega)^2$, $\mathbf{H}_b^{-1}(\Omega) = ([H_b^1(\Omega)]')^2$, etc.

Notemos que la clausura de C_b^∞ en norma $W_b^{1,r}(\Omega)$ coincide con $W_b^{1,r}(\Omega)$.

Los espacios $L_D^r(\omega)$ y $L_{D,0}^r(\omega)$ son espacios de Banach dotados respectivamente de las normas

$$\|q_s\|_{L_D^r} = \left(\int_\omega D(\mathbf{x}) |q_s(\mathbf{x})|^r dx \right)^{1/r}, \quad \text{y} \quad \|q_s\|_{L_{D,0}^r} = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|q_s + c\|_{L_D^r}.$$

Utilizaremos la siguiente notación abreviada para las normas:

$$|\cdot|_{1,r,\Omega} = \|\cdot\|_{W_b^{1,r}(\Omega)}, \quad |\cdot|_{1,\Omega} = |\cdot|_{1,2,\Omega}, \quad \|\cdot\|_{0,\Omega} = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)},$$

tanto para espacios escalares como vectoriales. Más aún, denotamos $(\cdot, \cdot)_\Omega$ la dualidad $L^r(\Omega) \leftrightarrow L^{r'}(\Omega)$. Usaremos notaciones similares para espacios de Sobolev definidos en cualquier otro dominio.

Estas notaciones serán válidas a lo largo de toda la memoria.

Para formular débilmente el sistema (1.3) consideramos $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_b^1(\Omega)$ por analogía con las Ecuaciones de Navier-Stokes. La igualdad $\partial_z u_3 = -\nabla_H \cdot \mathbf{u}$ y la condición de contorno (1.2)(e) indican en este caso $u_3 \in H_0(\partial_z, \Omega)$. Por tanto u_3 sólo pertenece a $L^2(\Omega)$, en lugar de la regularidad $H^1(\Omega)$.

La formulación débil (1.3) requerirá entonces una regularidad aumentada de las funciones test en velocidad \mathbf{v} con respecto a \mathbf{u} para definir apropiadamente $\int_\Omega (u_3 \partial_z \mathbf{u}) \mathbf{v} dx dz$.

Este punto se formaliza en el Lema (Cf. [30]):

Lema 1.1 *Sea $\mathbf{W} = (w_1, w_2, w_3)$ una función medible en Ω , tal que*

$$\begin{cases} \mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbf{H}^1(\Omega), \mathbf{w}|_{\Gamma_b} = 0, \\ w_3(\mathbf{x}, z) = \int_z^0 \nabla_H \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}, s) ds, \quad w_3|_{\Gamma_s} = 0, \quad w_3 \cdot \mathbf{n}_3|_{\Gamma_b} = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Entonces, $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_b^1(\Omega)$, $(\mathbf{W} \cdot \nabla) \mathbf{u} \in \mathbf{W}_b^{-1,3/2}(\Omega)$, definida como

$$\langle (\mathbf{W} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = - \int_\Omega (\mathbf{W} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} dx dz, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_b^{1,3}(\Omega). \quad (1.6)$$

Además, existe una constante positiva $C = C(\Omega) > 0$ tal que

$$\|(\mathbf{W} \cdot \nabla) \mathbf{u}\|_{-1,3/2,\Omega} \leq C |\mathbf{w}|_{1,\Omega} |\mathbf{u}|_{1,\Omega}. \quad (1.7)$$

La elección $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_b^{1,3}(\Omega)$ determina, a priori, que se debe buscar $P \in L_0^{3/2}(\Omega)$ para dotar de sentido la integral $\int_\Omega P(\nabla_H \cdot \mathbf{v})$ en (1.3)(a).

Finalmente, (1.3)(c) indica que se debe tomar $q \in L^2(\Omega)$. Por tanto, el sistema (1.3) sigue teniendo sentido para

$$\mathbf{u} \in \mathbf{H}_b^1(\Omega), \quad u_3 \in H_0(\partial_z, \Omega), \quad P \in L_0^{3/2}(\Omega), \quad \mathbf{v} \in \mathbf{W}_b^{1,3}(\Omega), \quad v_3 \in H_0^3(\partial_z, \Omega), \quad q \in L^2(\Omega).$$

Como se hizo formalmente en el apartado 0.3.1, es posible realizar una reducción de la incógnita u_3 , el sistema (1.3). Concretamente, se demuestra en [29]:

Lema 1.2 Dada $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_b^1(\Omega)$, existe una velocidad vertical $u_3 \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}, u_3) = 0 \text{ en } \Omega, \quad u_3|_{\Gamma_s} = 0 \text{ y } u_3 \cdot \mathbf{n}_z|_{\Gamma_b} = 0$$

si y sólo si

$$u_3(\mathbf{x}, z) = \int_z^0 \nabla_H \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds \quad \text{en } \Omega, \quad (1.8)$$

y

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0 \quad \text{en } \omega. \quad (1.9)$$

Restringiéndonos a las presiones $P \in L_0^{3/2}(\Omega)$ y $q \in L^2(\Omega)$ independientes de z , obtenemos (0.46):

Hallar $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $p_s : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} (a) & (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \Delta_{\nu} \mathbf{u} + f \mathbf{u}^{\perp} + \nabla_H p_s = \mathbf{f} \text{ en } \Omega, \\ (b) & \nabla_H \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0 \text{ en } \omega, \\ (c) & \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Gamma_b, \quad \nu_z \partial_z \mathbf{u} = \boldsymbol{\tau} \text{ en } \Gamma_s, \end{cases} \quad (1.10)$$

donde $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, u_3)$, estando $u_3 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$u_3(\mathbf{x}, z) = \int_z^0 \nabla_H \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds. \quad (1.11)$$

El siguiente resultado es necesario para la formulación débil de este problema:

Lema 1.3 Sea $2 \leq \alpha' < +\infty$ y α el exponente conjugado de α' . Entonces, se verifican las propiedades:

i) Dado $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_b^{1, \alpha'}(\Omega)$ arbitrario, $\langle \mathbf{v} \rangle \in \mathbf{W}_0^{1, \alpha'}(\omega)$ y

$$|\langle \mathbf{v} \rangle|_{1, \alpha', \omega} \leq \|D\|_{L^\infty(\omega)}^{1/\alpha} |\mathbf{v}|_{1, \alpha', \Omega}. \quad (1.12)$$

ii) Para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_b^{1, \alpha'}(\Omega)$, $\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v} \rangle \in L_{(1/D)}^{\alpha'}(\omega)$ y

$$\|\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v} \rangle\|_{L_{(1/D)}^{\alpha'}(\omega)} \leq |\mathbf{v}|_{1, \alpha', \Omega}. \quad (1.13)$$

iii) Para todos $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_b^{1, \alpha'}(\Omega)$, $q \in L_D^\alpha(\omega)$:

$$\int_{\omega} \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v} \rangle q dx \leq |\mathbf{v}|_{1, \alpha', \Omega} \|q\|_{L_D^\alpha(\omega)}.$$

Demostración.-

i) Consideremos en principio $\mathbf{w} \in [C_b^\infty(\Omega)]^2$. Entonces

$$\partial_x \langle \mathbf{w} \rangle (\mathbf{x}) = \langle \partial_x \mathbf{w} \rangle (\mathbf{x}) + \partial_x D(\mathbf{x}) \mathbf{w}(\mathbf{x}, -D(\mathbf{x})) = \langle \partial_x \mathbf{w} \rangle (\mathbf{x}), \quad (1.14)$$

puesto que $\mathbf{w}|_{\Gamma_b} = 0$, lo que anula $\mathbf{w}(\mathbf{x}, -D(\mathbf{x}))$. Gracias a la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned} \|\partial_x \langle \mathbf{w} \rangle\|_{L^{\alpha'}(\omega)}^{\alpha'} &= \int_{\omega} \left| \int_{-D(\mathbf{x})}^0 \partial_x \mathbf{w} dz \right|^{\alpha'} dx \\ &\leq \int_{\omega} \left(\int_{-D(\mathbf{x})}^0 |\partial_x \mathbf{w}|^{\alpha'} dz \right) \left(\int_{-D(\mathbf{x})}^0 1 dz \right)^{\alpha'/\alpha} dx \\ &\leq \|D\|_{L^\infty(\omega)}^{\alpha'/\alpha} \|\partial_x \mathbf{w}\|_{L^{\alpha'}(\omega)}^{\alpha'}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

La derivada parcial $\partial_y \langle \mathbf{w} \rangle$ se acota de la misma forma. Puesto que $\mathbf{w} = 0$ en un entorno de Γ_b , $\langle \mathbf{w} \rangle = 0$ en un entorno de $\partial\omega$. Se sigue entonces el apartado i) para funciones regulares.

Para $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_b^{1,\alpha'}(\Omega)$, se razona del siguiente modo:

- En primer lugar, de $\mathbf{v}, \partial_x \mathbf{v} \in \mathbf{L}^{\alpha'}(\Omega)$ se tiene que $\langle \mathbf{v} \rangle$ y $\langle \partial_x \mathbf{v} \rangle$ pertenecen a $\mathbf{L}^{\alpha'}(\omega)$.
- En principio, sólo sabemos $\partial_x \langle \mathbf{v} \rangle \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^2$. Usando la densidad del subespacio $[C_b^\infty(\Omega)]^2$ en $\mathbf{W}_b^{1,\alpha'}(\Omega)$ se prueba la igualdad (1.14) para \mathbf{v} :

$$\partial_x \langle \mathbf{v} \rangle (\mathbf{x}) = \langle \partial_x \mathbf{v} \rangle (\mathbf{x}) \quad \text{e.c.t. } \mathbf{x} \in \omega. \quad (1.16)$$

En particular, se tiene $\partial_x \langle \mathbf{v} \rangle \in \mathbf{L}^{\alpha'}(\omega)$ (y $\partial_y \langle \mathbf{v} \rangle \in \mathbf{L}^{\alpha'}(\omega)$ de forma análoga). Por tanto $\langle \mathbf{v} \rangle \in \mathbf{W}^{1,\alpha'}(\omega)$.

- De la igualdad (1.16) se tiene (1.15) para \mathbf{v} de forma idéntica a como se hizo para \mathbf{w} . En particular, se tiene

$$|\langle \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{w}_n \rangle|_{1,\alpha',\omega} \leq \|D\|_{L^\infty(\omega)}^{1/\alpha} \|\nabla_H \mathbf{v} - \nabla_H \mathbf{w}_n\|_{L^{\alpha'}(\omega)},$$

para cualquier sucesión de aproximantes $\{\mathbf{w}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [C_b^\infty(\Omega)]^2$ de \mathbf{v} . Puesto que $\{\langle \mathbf{w}_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{W}_0^{1,\alpha'}(\omega)$, y este último espacio es completo, se tiene $\langle \mathbf{v} \rangle \in \mathbf{W}_0^{1,\alpha'}(\omega)$.

ii) Consideremos de nuevo $\mathbf{w} \in [C_b^\infty(\Omega)]^2$. Observemos que $\alpha' - 1 = \alpha'/\alpha$. Por las operaciones del apartado anterior, se sigue fácilmente:

$$\begin{aligned} \|\partial_x \langle \mathbf{w} \rangle\|_{L^{\alpha'}_{(1/D)^{\alpha'-1}(\omega)}}^{\alpha'} &\leq \int_{\omega} \left(\int_{-D(\mathbf{x})}^0 |\partial_x \mathbf{w}|^{\alpha'} dz \right) \left(\int_{-D(\mathbf{x})}^0 1 dz \right)^{\alpha'/\alpha} \frac{1}{D^{\alpha'/\alpha}} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\omega} \int_{-D(\mathbf{x})}^0 |\partial_x \mathbf{w}|^{\alpha'} dz d\mathbf{x} = \|\partial_x \mathbf{w}\|_{L^{\alpha'}(\omega)}^{\alpha'}. \end{aligned}$$

La derivada parcial $\partial_y \langle \mathbf{w} \rangle$ se acota de la misma forma, de donde se sigue (1.13) para funciones regulares. De nuevo, el resultado se tiene para $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_b^{1,\alpha'}(\Omega)$ por un argumento de densidad.

iii) De $q \in L_D^\alpha(\omega)$ se sigue $q D^{1/\alpha} \in L^\alpha(\omega)$.

De $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_b^{1,\alpha'}(\Omega)$, se tiene $\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v} \rangle D^{-1/\alpha} \in L^{\alpha'}(\omega)$ por el apartado ii). Por tanto $\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v} \rangle q \in L^1(\omega)$, y la desigualdad del enunciado se sigue inmediatamente usando la desigualdad de Hölder.

■

La formulación débil de (1.10), deducida de (1.3), es

Dado $\mathbf{f} \in \mathbf{H}_b^{-1}(\Omega)$ y $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_s)$, hallar $(\mathbf{u}, p_s) \in \mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L_{D,0}^{3/2}(\omega)$ tales que,

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \langle (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + (\nabla_{\nu} \mathbf{u}, \nabla_{\nu} \mathbf{v})_{\Omega} + f(\mathbf{u}^{\perp}, \mathbf{v})_{\Omega} + \\ \quad \quad \quad - (p_s, \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v} \rangle)_{\omega} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} - \langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_s}, \\ (b) \quad \quad \quad (\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u} \rangle, q_s)_{\omega} = 0, \end{array} \right. \quad (1.17)$$

para todo $(\mathbf{v}, q_s) \in \mathbf{W}_b^{1,3}(\Omega) \times L_{D,0}^2(\omega)$. Abreviaremos la formulación variacional mixta anterior con la notación:

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}; (\mathbf{u}, p_s), (\mathbf{v}, q_s)) = \langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall (\mathbf{v}, q_s) \in \mathbf{W}_b^{1,3}(\Omega) \times L_{D,0}^2(\omega); \quad (1.18)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{w}; (\mathbf{u}, p_s), (\mathbf{v}, q_s)) &= \langle (\mathbf{W} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + (\nabla_{\nu} \mathbf{u}, \nabla_{\nu} \mathbf{v})_{\Omega} + f(\mathbf{u}^{\perp}, \mathbf{v})_{\Omega} \\ &\quad - (p_s, \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v} \rangle)_{\omega} - (\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u} \rangle, q_s)_{\omega}; \end{aligned}$$

con

$$\langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} - \langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_s}. \quad (1.19)$$

El Lema 1.1 implica que, definiendo los operadores:

$$\mathcal{A}_{\mathbf{w}} \mathbf{u} = (\mathbf{W} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \Delta_{\nu} \mathbf{u} + f \mathbf{u}^{\perp}, \quad \mathcal{A}_{\mathbf{w}}^* \mathbf{u} = -(\mathbf{W} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \Delta_{\nu} \mathbf{u} - f \mathbf{u}^{\perp},$$

se tiene

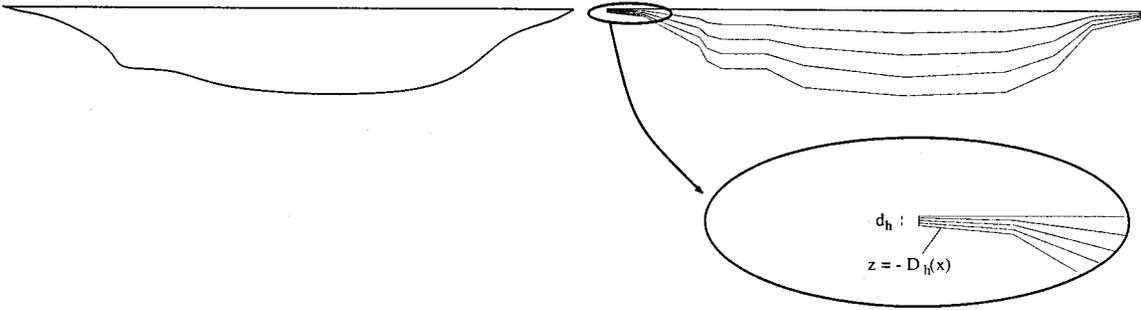


Figura 1.1: Dominio Ω (izquierda); dominio Ω_h y superficies iso- σ (derecha).

$$\mathcal{A}_w \mathbf{u} \in \mathbf{W}_b^{-1,3/2}(\Omega) \text{ y } |\langle \mathcal{A}_w \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq C(\Omega, \nu, f)(|\mathbf{w}|_{1,\Omega} + 1)|\mathbf{u}|_{1,\Omega}|\mathbf{v}|_{1,3,\Omega}, \quad (1.20)$$

$$\mathcal{A}_w^* \mathbf{u} \in \mathbf{W}_b^{-1,3/2}(\Omega) \text{ y } |\langle \mathcal{A}_w^* \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq C(\Omega, \nu, f)(|\mathbf{w}|_{1,\Omega} + 1)|\mathbf{u}|_{1,\Omega}|\mathbf{v}|_{1,3,\Omega}. \quad (1.21)$$

Usaremos los operadores $\mathcal{A}_w \mathbf{u}$ y $\mathcal{A}_w^* \mathbf{u}$ en lo sucesivo.

Dedicamos la siguiente Sección a la discretización del Problema (1.18).

1.3 Discretización mediante EF Prismáticos.

Realizaremos una aproximación del dominio Ω a través de subdominios poligonales Ω_h como sigue: supongamos que la superficie ω viene aproximada por subdominios poligonales ω_h tales que ω_h tienden a ω cuando $h \rightarrow 0$. Seguidamente, tomamos una malla \mathcal{C}_h de ω_h por triángulos. Consideremos una función afín a trozos D_h soportada por la triangulación \mathcal{C}_h (y, por tanto, definida en $\overline{\omega_h}$) tal que

- i) La prolongación de D_h por cero a ω converge hacia D en $W^{1,\infty}(\omega)$ cuando $h \rightarrow 0$;
- ii) $D_h \leq D$ en $\overline{\omega_h}$;
- iii) $\min_{\mathbf{x} \in \overline{\omega_h}} D_h(\mathbf{x}) = d_h > 0$.

Entonces, Ω_h estará formado por prismas verticales extendidos desde ω_h hasta el fondo (descrito por $z = -D_h(\mathbf{x})$). De este modo, si h tiende a 0, Ω_h completa Ω .

Tomemos $l \in \mathbb{N}$ el número de capas verticales. Dados $0 \leq k \leq l$ y $T \in \mathcal{C}_h$, denotemos

$$T^k = \left\{ \left(\mathbf{x}, -\frac{k}{l} D_h(\mathbf{x}) \right) : \mathbf{x} \in T \right\}.$$

Definimos las superficies iso-sigma (ver Figura 1.1) como $C_h^k = \bigcup_{T \in \mathcal{C}_h} T^k$.

Seguidamente, construimos la malla \mathcal{T}_h de Ω_h mediante prismas con bases triangulares en C_h^k , $0 \leq k \leq l$. Consideraremos Elementos Finitos soportados por \mathcal{T}_h contruidos como productos tensoriales de un elemento finito triangular 2D soportado por \mathcal{C}_h y un elemento finito 1D soportado por la subdivisión en capas verticales iso-sigma.

Concretamente, tomemos K un prisma arbitrario de \mathcal{T}_h con base superior T^k , y base inferior T^{k+1} ,

$$K = \{(\mathbf{x}, z) : \mathbf{x} \in T, \xi_1(\mathbf{x}) \leq z \leq \xi_2(\mathbf{x})\}, \text{ con } \xi_1(\mathbf{x}) = -\frac{k+1}{l}D_h(\mathbf{x}), \xi_2(\mathbf{x}) = -\frac{k}{l}D_h(\mathbf{x}).$$

Consideremos las bases $\{\Psi_r(\mathbf{x})\}_{r=1}^{N_1}$ del espacio $\mathbb{P}_{k_1}(T)$, y $\{\zeta_s(\sigma)\}_{s=1}^{N_2}$ del espacio $\mathbb{P}_{k_2}([0, 1])$, siendo k_1 y k_2 enteros positivos. Una base de nuestro espacio de Elementos Finitos, que denotamos $R_{k_1, k_2}(K)$, viene dada por las funciones

$$\Psi_r(\mathbf{x}) \zeta_s(\sigma_k(\mathbf{x}, z)), \quad r = 1, \dots, N_1, \quad s = 1, \dots, N_2, \quad \text{con } \sigma_k(\mathbf{x}, z) = \frac{z + \frac{k+1}{l}D_h(\mathbf{x})}{D_h(\mathbf{x})/l}.$$

Obsérvese que $0 \leq \sigma_k(\mathbf{x}, z) \leq 1$ cuando (\mathbf{x}, z) está situado entre las capas C_h^{k+1} y C_h^k . De hecho, C_h^{k+1} viene parametrizada por $\sigma_k(\mathbf{x}, z) = 0$ y C_h^k por $\sigma_k(\mathbf{x}, z) = 1$. Entonces, $R_{k_1, k_2}(K)$ está definido por

$$R_{k_1, k_2}(K) = \left\{ \sum_{r=1}^{N_1} \sum_{s=1}^{N_2} \alpha_{rs} \Psi_r(\mathbf{x}) \zeta_s(\sigma_k(\mathbf{x}, z)), \quad \alpha_{rs} \in \mathbb{R} \right\}. \quad (1.22)$$

Definamos el elemento de referencia $\widehat{K} = \widehat{T} \times [0, 1]$ (ver Figura 1.4). Es inmediato comprobar que cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$ es el transformado de \widehat{K} por una aplicación de $\mathbb{P}_1(\widehat{\mathbf{x}}) \otimes \mathbb{P}_1(\widehat{z})$. Esta transformación no es afín, salvo en el caso $D_h|_T$ constante, donde la aplicación es $\mathbb{P}_1(\widehat{\mathbf{x}}) \otimes \mathbb{P}_0(\widehat{z})$.

En esta memoria trataremos con frecuencia el caso $k_1 = k_2 = 1$, con $\nabla_H D_h|_T \neq (0, 0)$ (a priori). Tendremos entonces una familia de Elementos Finitos Isoparamétricos.

Una aproximación mixta de la formulación (1.18) consiste en sustituir los espacios continuos originales por espacios de dimensión finita adecuados. Al igual que para las ecuaciones de Navier-Stokes, la condición de incompresibilidad impone severas restricciones de estabilidad. Proponemos dos formas de tratar tales restricciones.

1.3.1 Elementos de Taylor-Hood.

Una primera forma de proceder consiste en usar Elementos de Taylor-Hood *reducidos* adaptados a nuestro problema:

$$\begin{aligned} V_h^k &= \left\{ \phi \in C(\overline{\Omega}_h) \cap \mathbf{H}_b^1(\Omega_h) \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, \widehat{\phi}|_K \in (\mathbb{P}_k(\widehat{\mathbf{x}}) \otimes \mathbb{P}_k(\widehat{z}))^2 \right\} \\ &= \left\{ \phi \in C(\overline{\Omega}_h) \cap \mathbf{H}_b^1(\Omega_h) \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, \phi|_K \in R_{k,k}(K)^2 \right\}, \\ M_h^{k-1} &= \left\{ q_h \in C(\overline{\omega}_h) \mid \forall T \in \mathcal{C}_h, \widehat{q_h}|_T \in \mathbb{P}_{k-1}(\widehat{\mathbf{x}}) \text{ y } \int_{\omega} q_h D_h d\mathbf{x} = 0 \right\}, \quad k \geq 2. \end{aligned} \quad (1.23)$$

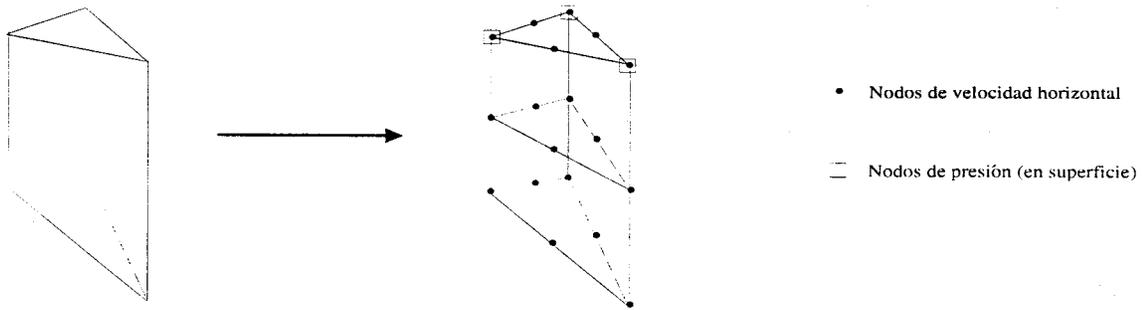


Figura 1.2: Disposición de grados de libertad a lo largo de una columna de prismas para el par (1.23) con $k = 2$.

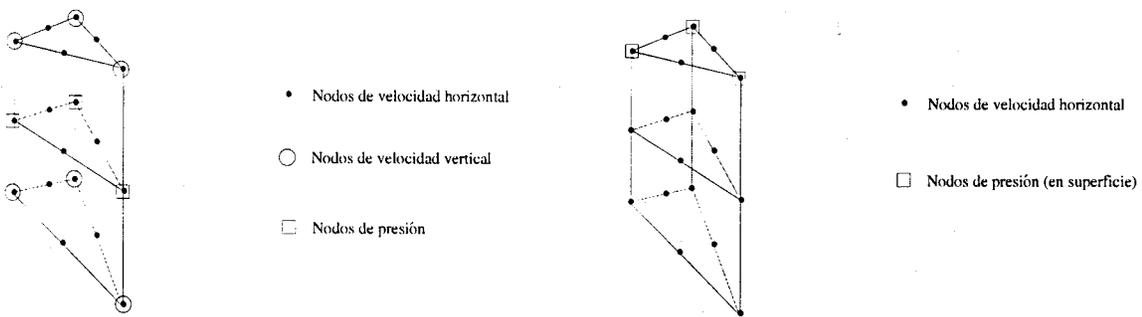


Figura 1.3: Elemento Finito Hidrostático de [5] frente al par (1.23) con $k = 2$.

La Figura 1.2 muestra la disposición de grados de libertad para este par en el caso $k = 2$. Resulta de especial interés comparar el coste en grados de libertad de este par con el Elemento Finito Hidrostático de [5]. Recordemos (ver el apartado 0.3.3) que en [5] se introducen espacios de Elementos Finitos para discretizar (1.3). Nuestra formulación reducida (1.18) permite un ahorro de grados al suprimir los nodos de velocidad vertical y reducir los nodos de presión a la superficie (ver Figura 1.3).

Para ilustrar este punto tomaremos momentáneamente como dominio un paralelepípedo. Supondremos que cada arista de dicho paralelepípedo se ha subdividido en N partes iguales, con lo que es fácil comprobar:

- número de nodos en superficie: $(N + 1)^2$,
- número de triángulos en superficie: $2N^2$,
- número de aristas en superficie: $3N^2 + 2N$,
- número de capas verticales: N .

De acuerdo con la distribución de grados de libertad de la Figura 1.3 se obtiene para el Elemento Hidrostático:

- número de grados de libertad por capa para u_{ih} , $i = 1, 2$: $((N + 1)^2 + 3N^2 + 2N) \times 2$,

- número de grados de libertad por capa para u_{3h} : $(N + 1)^2$,
- número de grados de libertad por capa para p_h : $(N + 1)^2$,

mientras que para el par de Taylor-Hood reducido

- número de grados de libertad por capa para u_{ih} , $i = 1, 2$: $((N + 1)^2 + 3N^2 + 2N) \times 2$,
- número de grados de libertad en superficie para p_h : $(N + 1)^2$.

Sumando por capas verticales obtenemos

- número de grados de libertad del Elemento Hidrostático: $18N^3 + O(N^2)$,
- número de grados de libertad del Elemento de Taylor-Hood reducido: $16N^3 + O(N^2)$.

Asintóticamente, la reducción de grados de libertad es de 8:9, o sea, un 11%.

El par (V_h^2, M_h^1) se obtiene a partir del elemento hidrostático de Azérad [5] sin más que retener las componentes horizontales de las velocidades y las presiones discretas independientes de z . Esta técnica (introducida en [30]), sirve también para demostrar la estabilidad del par. En efecto, consideremos $p_h \in M_h^1$ y su extensión \hat{p}_h a Ω_h como función independiente de la variable z . Entonces, $\hat{p}_h \in P_h$ y la desigualdad (0.45) proporciona

$$\|\hat{p}_h\|_{0,\Omega_h} \leq C_1 \sup_{(\mathbf{v}_h, w_{3h}) \in \mathbf{V}_h \times W_h - \{0\}} \frac{(\nabla \cdot (\mathbf{v}_h, w_{3h}), \hat{p}_h)_{\Omega_h}}{|(\mathbf{v}_h, w_{3h})|_{1,\Omega_h}}, \quad (1.24)$$

Se sigue (ver la demostración del Teorema 1.8 más adelante):

$$\|p_h\|_{0,D,\omega_h} \leq C_1 \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h - \{0\}} \frac{(\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle, p_h)_{\omega_h}}{|\mathbf{v}_h|_{1,\Omega_h}}. \quad (1.25)$$

Con esta desigualdad se puede llevar a cabo el análisis de la discretización mixta de (1.18) para el caso con talud. Las técnicas necesarias para ello están contenidas en este Capítulo y el Capítulo 2.

Sin embargo, por su originalidad y economía, en este Capítulo nos centraremos en demostrar la estabilidad del par de Elementos Finitos que exponemos a continuación.

1.3.2 Estabilización mediante adición de burbujas.

La adición de grados de libertad internos a través de funciones burbuja proporciona un método sistemático de diseño de pares de Elementos Finitos estables. En nuestro caso, permite además rebajar los grados de libertad del par expuesto en el epígrafe 1.3.1.

Más concretamente, consideraremos el par $(\mathbb{P}_1 + \text{burbuja}, \mathbb{P}_1)$ sobre una malla \mathcal{M}_h de tetraedros de Ω_h . Para definir la malla \mathcal{M}_h , nos apoyaremos en la ya definida \mathcal{T}_h . Cada prisma K se divide en tres tetraedros según el patrón que mostramos para el elemento de referencia \widehat{K} : expresamos \widehat{K} como la unión de los tetraedros

$$\begin{aligned}\widehat{K}_1 &= \{(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \mid (\hat{x}, \hat{y}) \in \widehat{T}, 1 - \hat{y} \leq \hat{z} \leq 1\}, \\ \widehat{K}_2 &= \{(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \mid (\hat{x}, \hat{y}) \in \widehat{T}, 0 \leq \hat{z} \leq \hat{x}\}, \\ \widehat{K}_3 &= \{(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \mid (\hat{x}, \hat{y}) \in \widehat{T}, \hat{x} \leq \hat{z} \leq 1 - \hat{y}\}.\end{aligned}$$

Como se observa en la Figura 1.4,

$$\bigcap_{i=1}^3 \text{int}(\widehat{K}_i) = \emptyset, \quad \bigcup_{i=1}^3 \widehat{K}_i = \widehat{K}.$$

Dividiendo según este patrón los prismas de \mathcal{T}_h se obtiene un malla de tetraedros de Ω_h , que denotaremos \mathcal{M}_h .

En cada tetraedro \widehat{K}_i definimos la clásica *función burbuja* mediante el producto de las coordenadas baricéntricas escalado para que alcance el máximo valor 1 en el baricentro. Ello conduce a las expresiones:

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}^1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 3^4 (1 - \hat{z}) (1 - \hat{x} - \hat{y}) \hat{x} (\hat{y} + \hat{z} - 1), \\ \widehat{\beta}^2(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 3^4 (1 - \hat{x} - \hat{y}) \hat{y} \hat{z} (\hat{y} - \hat{z}), \\ \widehat{\beta}^3(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 3^4 (1 - \hat{y} - \hat{z}) \hat{x} \hat{y} (\hat{z} - \hat{x}).\end{aligned}$$

Así definidas $\widehat{\beta}^i \in H_0^1(\widehat{K}_i)$. Denotemos ahora

$$\mathbf{B}_h = \left\{ \phi \in \mathbf{C}(\overline{\Omega}_h) \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, \widehat{\phi}|_K \in [\widehat{\beta}^1 \oplus \widehat{\beta}^2 \oplus \widehat{\beta}^3]^2 \right\}.$$

Finalmente, consideramos el tetraedro de referencia \widehat{M} y el espacio de velocidades horizontales:

$$\mathbf{J}_h = \left\{ \phi \in \mathbf{C}(\overline{\Omega}_h) \cap \mathbf{H}_b^1(\Omega_h) \mid \forall M \in \mathcal{M}_h, \widehat{\phi}|_M \in \mathbf{P}_1(\hat{x}, \hat{z})^2 \right\}, \quad (1.26)$$

y el espacio de velocidades aumentado:

$$\mathbf{V}_h = \mathbf{J}_h \oplus \mathbf{B}_h.$$

Probaremos en la sección 1.5 que la adición del espacio \mathbf{B}_h proporciona la estabilidad deseada al par (\mathbf{V}_h, M_h^1) . Además, el recuento de grados de libertad globales conduce en este caso a:

- número de grados de libertad por capa para u_{ih} , $i = 1, 2$: $(N + 1)^2 + 3 \times (2N^2)$,
- número de grados de libertad en superficie para p_h : $(N + 1)^2$.

Sumando por capas verticales obtenemos

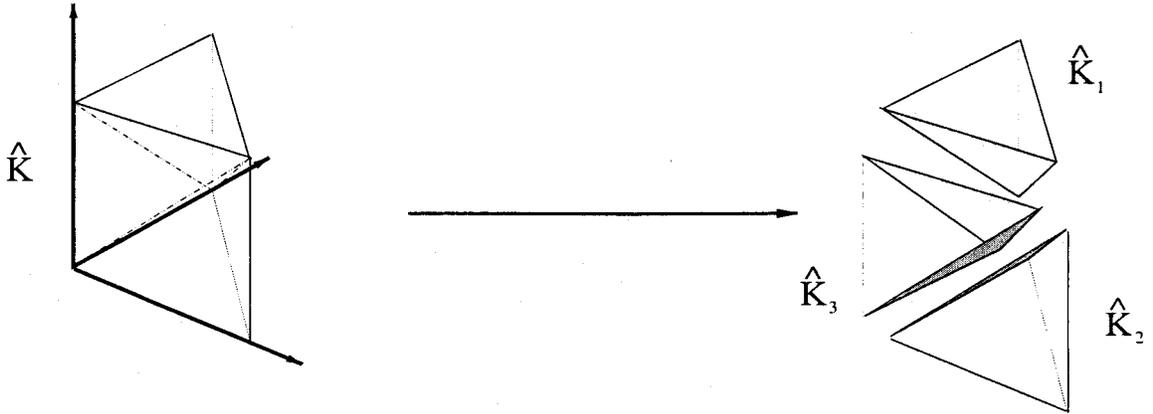


Figura 1.4: Descomposición del prisma de referencia en tetraedros.

- número de grados de libertad total: $14N^3 + O(N^2)$.

Asintóticamente, la reducción de grados de libertad frente al Elemento de Taylor-Hood reducido es de 7:8, o sea, un 12.5%.

1.4 Análisis de estabilidad y convergencia.

Consideremos una familia de espacios de dimensión finita $\{(\mathbf{V}_h, M_h)\}_{h \geq 0}$ tales que $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{H}_b^1(\Omega_h)$, $M_h \subset L_{D,0}^{3/2}(\omega_h)$. Para ser rigurosos, dado $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times M_h$ debemos considerar en (1.18) las prolongaciones $(\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{p}_h)$ por cero a $\Omega \times \omega$, puesto que las integrales que aparecen en la definición de B hacen intervenir dichos dominios. Así, nos planteamos el problema:

Hallar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times M_h$ tales que,

$$\mathbf{B}(\widetilde{\mathbf{u}}_h; (\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{p}_h), (\widetilde{\mathbf{v}}_h, \widetilde{q}_h)) = \langle \mathbf{l}, \widetilde{\mathbf{v}}_h \rangle, \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times M_h, \quad (1.27)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\widetilde{\mathbf{w}}_h; (\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{p}_h), (\widetilde{\mathbf{v}}_h, \widetilde{q}_h)) &= \int_{\Omega} (\widetilde{\mathbf{W}}_h \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{u}}_h \cdot \widetilde{\mathbf{v}}_h + (\nabla_{\nu} \widetilde{\mathbf{u}}_h, \nabla_{\nu} \widetilde{\mathbf{v}}_h)_{\Omega} + f(\widetilde{\mathbf{u}}_h^{\perp}, \widetilde{\mathbf{v}}_h)_{\Omega} \\ &\quad - (\widetilde{p}_h, \nabla_H \cdot \langle \widetilde{\mathbf{v}}_h \rangle)_{\omega} - (\nabla_H \cdot \langle \widetilde{\mathbf{u}}_h \rangle, \widetilde{q}_h)_{\omega}; \end{aligned}$$

y $\mathbf{W}_h = (\mathbf{w}_h, w_{3h})$ con

$$w_{3h}(\mathbf{x}, z) = \int_z^0 \nabla_H \cdot \mathbf{w}_h(\mathbf{x}, s) ds \quad \text{en } \Omega. \quad (1.28)$$

Supondremos que se verifican las hipótesis:

H1) Dado $q \in L^2_{D,0}(\omega)$, existe una sucesión $\{q_h\}_{h>0}$, donde cada $q_h \in M_h$, tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|q - \widetilde{q}_h\|_{L^2_{D,0}(\omega)} = 0.$$

H2) Dado $2 \leq \alpha' \leq 4$ y $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_b^{1,\alpha'}(\Omega)$, existe una sucesión $\{\mathbf{v}_h\}_{h>0}$, donde cada $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$, tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\mathbf{v} - \widetilde{\mathbf{v}}_h|_{1,\alpha',\Omega} = 0.$$

H3) Existe una constante $\beta > 0$ independiente de h tal que $\forall q_h \in M_h$,

$$\|q_h\|_{L^{3/2}_{D,0}(\omega_h)} \leq \beta \left[\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h - \{0\}} \frac{(\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle, q_h)_{\omega_h}}{|\mathbf{v}_h|_{1,3,\Omega_h}} \right]. \quad (1.29)$$

Con estas hipótesis es posible probar el

Teorema 1.4 *Se verifica:*

- i) El Problema (1.27) admite una única solución $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times M_h$, tal que $\{\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{p}_h\}_{h>0}$ está acotada en $\mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L^{3/2}_{D,0}(\omega)$.
- ii) La sucesión $\{\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{p}_h\}_{h>0}$ contiene al menos una subsucesión débilmente convergente en $\mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L^{3/2}_{D,0}(\omega)$ a una solución (\mathbf{u}, p_s) de (1.18) que verifica

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}|_{1,\Omega} &\leq C \underline{\nu}^{-1} \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega}, \\ \|p_s\|_{L^{3/2}_{D,0}(\omega)} &\leq C(\underline{\nu}^{-1} \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega} + 1) \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

donde C es una constante positiva independiente de h y $\underline{\nu} = \min(\nu_x, \nu_y, \nu_z)$. Si dicha solución es única, toda la sucesión converge a ella.

Demostración.-

Procedemos por etapas.

Eta 1.- Linealización de (1.27).

Reemplacemos en (1.27) la velocidad de convección \mathbf{U}_h por $\mathbf{W}_h = (\mathbf{w}_h, w_{3h}) \in \mathbf{V}_h \times L^2(\Omega_h)$ satisfaciendo

$$w_{3h}(\mathbf{x}, z) = \int_z^0 \nabla_H \cdot \mathbf{w}_h(\mathbf{x}, s) ds, \quad w_{3h}|_{\Gamma_s} = 0, \quad w_{3h} \cdot \mathbf{n}_3|_{\Gamma_b} = 0. \quad (1.31)$$

Evidentemente, (1.31) proporciona $\nabla \cdot \mathbf{W}_h = 0$.

Buscamos pues $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times M_h$ tal que,

$$\mathbf{B}(\widetilde{\mathbf{w}}_h; (\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{p}_h), (\widetilde{\mathbf{v}}_h, \widetilde{q}_h)) = \langle \mathbf{1}, \widetilde{\mathbf{v}}_h \rangle, \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times M_h. \quad (1.32)$$

Etapa 2.- Existencia de solución del Problema discreto.

Puesto que (1.32) es equivalente a un sistema lineal de dimensión $\dim(\mathbf{V}_h) + \dim(M_h)$, la existencia de solución seguirá de su unicidad. Supongamos que (1.32) tiene una solución $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times M_h$ que estimaremos en términos de las normas de los datos.

Estimación de la velocidad.

Tomemos $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$ y $q_h = -p_h$ en (1.32) como funciones test :
De

$$\int_{\Omega} (\widetilde{\mathbf{W}}_h \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{u}}_h \cdot \widetilde{\mathbf{v}}_h = 0; \quad \underline{\nu} |\widetilde{\mathbf{u}}_h|_{1,\Omega}^2 \leq (\nabla_{\nu} \widetilde{\mathbf{u}}_h, \nabla_{\nu} \widetilde{\mathbf{u}}_h)_{\Omega}; \quad f(\widetilde{\mathbf{u}}_h^{\perp}, \widetilde{\mathbf{u}}_h)_{\Omega} = 0;$$

se sigue la coercitividad de \mathbf{B} :

$$\underline{\nu} |\widetilde{\mathbf{u}}_h|_{1,\Omega}^2 \leq \mathbf{B}(\widetilde{\mathbf{w}}_h; (\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{p}_h), (\widetilde{\mathbf{u}}_h, -\widetilde{p}_h)).$$

Luego

$$\underline{\nu} |\widetilde{\mathbf{u}}_h|_{1,\Omega}^2 \leq \langle \mathbf{1}, \widetilde{\mathbf{u}}_h \rangle \leq \|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega} |\widetilde{\mathbf{u}}_h|_{1,\Omega}, \quad (1.33)$$

y,

$$|\widetilde{\mathbf{u}}_h|_{1,\Omega} \leq \underline{\nu}^{-1} \|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega}. \quad (1.34)$$

Estimación de la presión.

Usamos la condición inf-sup (1.29) para obtener una cota uniforme de p_h . Para abreviar la notación, denotamos:

$$T_1 = \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h - \{0\}} \frac{(\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle, p_h)_{\omega_h}}{|\mathbf{v}_h|_{1,3,\Omega_h}}.$$

Estimamos T_1 :

$$\begin{aligned} (\widetilde{p}_h, \nabla_H \cdot \langle \widetilde{\mathbf{v}}_h \rangle)_{\omega} &= -\mathbf{B}(\widetilde{\mathbf{w}}_h; \widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{p}_h, \widetilde{\mathbf{v}}_h, 0) + \langle \mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{\mathbf{v}}_h \rangle \\ &= -\langle \mathbf{1}, \widetilde{\mathbf{v}}_h \rangle + \langle \mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{\mathbf{v}}_h \rangle. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Acotamos el segundo miembro de (1.35) usando (1.20):

$$-\langle \mathbf{l}, \widetilde{\mathbf{v}}_h \rangle + \langle \mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{\mathbf{v}}_h \rangle \leq C(\Omega, \nu, f) [(|\widetilde{\mathbf{w}}_h|_{1,\Omega} + 1)|\widetilde{\mathbf{u}}_h|_{1,\Omega} + \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega}] |\widetilde{\mathbf{v}}_h|_{1,3,\Omega}. \quad (1.36)$$

Entonces, combinando (1.35) y (1.36),

$$(\widetilde{p}_h, \nabla_H \cdot \langle \widetilde{\mathbf{v}}_h \rangle)_\omega \leq C(\Omega, \nu, f) [(|\widetilde{\mathbf{w}}_h|_{1,\Omega} + 1)|\widetilde{\mathbf{u}}_h|_{1,\Omega} + \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega}] |\widetilde{\mathbf{v}}_h|_{1,3,\Omega}. \quad (1.37)$$

Por último, usando esta vez (1.29), (1.34) y (1.37), se tiene:

$$\|\widetilde{p}_h\|_{L^3_{D,0}(\omega)} \leq C(\Omega, \nu, f, \beta) (|\widetilde{\mathbf{w}}_h|_{1,\Omega} + 1) \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega}, \quad (1.38)$$

donde C es una constante independiente de h .

Concluimos que existe una única solución de (1.32), que verifica:

$$|\widetilde{\mathbf{u}}_h|_{1,\Omega} \leq \nu^{-1} \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega}; \quad \|\widetilde{p}_h\|_{L^3_{D,0}(\omega)} \leq C(|\widetilde{\mathbf{w}}_h|_{1,\Omega} + 1) \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega}. \quad (1.39)$$

Etapa 3 : Existencia de solución de (1.27)

Definamos la aplicación $\mathcal{F} : \mathbf{V}_h \rightarrow \mathbf{V}_h$, que lleva cada $\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h$ sobre \mathbf{u}_h , la solución del Problema (1.32). Las estimaciones (1.39) y la unicidad de soluciones de (1.32) permiten usar el siguiente argumento para probar la continuidad de \mathcal{F} .

Sea $\{\mathbf{w}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{V}_h$ una sucesión convergente a \mathbf{w} . Consideremos la sucesión de imágenes $\{\mathcal{F}(\mathbf{w}_n)\}_{n \in \mathbb{N}} = \{\mathbf{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{V}_h$. Las estimaciones (1.39) permiten extraer una subsucesión, que denotamos de la misma forma, fuertemente convergente (por la finitodimensionalidad de \mathbf{V}_h) a $\mathbf{t} \in \mathbf{V}_h$. Asimismo, se puede extraer una subsucesión $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M_h$ fuertemente convergente a $p \in M_h$.

Tomemos límite $n \rightarrow +\infty$ en la igualdad

$$\mathbf{B}(\widetilde{w}_n; (\widetilde{u}_n, \widetilde{p}_n), (\widetilde{\mathbf{v}}_h, \widetilde{q}_h)) = \langle \mathbf{l}, \widetilde{\mathbf{v}}_h \rangle, \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times M_h. \quad (1.40)$$

De

$$\widetilde{w}_n \rightarrow \widetilde{w} \text{ en } \mathbf{H}_b^1(\Omega),$$

se sigue

$$\widetilde{w}_{3n} \rightarrow \widetilde{w}_3 \text{ en } L^2(\Omega),$$

de donde

$$\widetilde{\mathbf{W}}_n \rightarrow \widetilde{\mathbf{W}} \text{ en } [L^2(\Omega)]^3.$$

Puesto que en dimensión finita todas las normas son equivalentes podemos suponer también

$$\widetilde{\mathbf{u}}_n \rightarrow \widetilde{\mathbf{t}} \text{ en } [W^{1,4}(\Omega)]^2, \quad (1.41)$$

de donde

$$\nabla \tilde{\mathbf{u}}_n \longrightarrow \nabla \tilde{\mathbf{t}} \quad \text{en } [\mathbf{L}^4(\Omega)]^3.$$

Con estas convergencias, es inmediato

$$\int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{W}}_n \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}_n \cdot \tilde{\mathbf{v}}_h \longrightarrow \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{W}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{t}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_h.$$

Los términos $(\nabla_{\nu} \tilde{\mathbf{u}}_n, \nabla_{\nu} \tilde{\mathbf{v}}_h)_{\Omega}$ y $f(\tilde{\mathbf{u}}_n^{\perp}, \tilde{\mathbf{v}}_h)_{\Omega}$ pasan al límite de forma estándar, como en las ecuaciones de Navier-Stokes.

Además, de (1.41)

$$\nabla_H \cdot \langle \tilde{\mathbf{u}}_n \rangle \longrightarrow \nabla_H \cdot \langle \tilde{\mathbf{t}} \rangle \quad \text{en } L^4(\omega),$$

por lo que

$$(\nabla_H \cdot \langle \tilde{\mathbf{u}}_n \rangle, \tilde{q}_h)_{\omega} \longrightarrow (\nabla_H \cdot \langle \tilde{\mathbf{t}} \rangle, \tilde{q}_h)_{\omega}.$$

Por último, de

$$\tilde{p}_n \longrightarrow \tilde{p} \quad \text{en } L_{D,0}^{3/2}(\omega), \quad \nabla_H \cdot \langle \tilde{\mathbf{v}}_h \rangle \in L^3(\omega_h),$$

se obtiene

$$-(\tilde{p}_n, \nabla_H \cdot \langle \tilde{\mathbf{v}}_h \rangle)_{\omega} \longrightarrow -(\tilde{p}, \nabla_H \cdot \langle \tilde{\mathbf{v}}_h \rangle)_{\omega}.$$

En definitiva, se verifica

$$\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{w}}; (\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{p}), (\tilde{\mathbf{v}}_h, \tilde{q}_h)) = \langle \mathbf{1}, \tilde{\mathbf{v}}_h \rangle, \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times M_h.$$

la unicidad de soluciones de (1.32) permite concluir $\mathcal{F}(\mathbf{w}) = \mathbf{t}$. Además, es toda la sucesión $\{\mathcal{F}(\mathbf{w}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ la que tiende a $\mathcal{F}(\mathbf{w})$ y, por tanto, \mathcal{F} es continua.

Las estimaciones (1.39) muestran también que \mathcal{F} lleva $B_{\mathbf{V}_h}(0, \underline{\nu}^{-1} \|\mathbf{1}\|_{-1, \Omega})$ en un subconjunto propio. Por tanto, el Teorema de Brouwer da la existencia de al menos un punto fijo, solución de (1.27), verificando:

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathbf{u}}_h|_{1, \Omega} &\leq \underline{\nu}^{-1} \|\mathbf{1}\|_{-1, \Omega}; \\ \|\tilde{p}_h\|_{L_{D,0}^{3/2}(\omega)} &\leq C(\underline{\nu}^{-1} \|\mathbf{1}\|_{-1, \Omega} + 1) \|\mathbf{1}\|_{-1, \Omega}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Etapas 4 : Conclusión.

Gracias a (1.42), la sucesión $\{(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{p}_h)\}_{h > 0}$ está acotada en $\mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L_{D,0}^{3/2}(\omega)$, que es un espacio reflexivo. Luego existe una subsucesión, que denotamos de la misma forma,

débilmente convergente en $\mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L_{D,0}^{3/2}(\omega)$ a un par (\mathbf{u}, p) . Veamos que este par es solución del Problema (1.18).

Tomemos $q \in L_{D,0}^2(\omega)$ y $\varphi \in \mathbf{W}_b^{1,4}(\Omega)$. Consideremos dos sucesiones $\{q_h\}_{h>0}$ y $\{\varphi_h\}_{h>0}$ en las condiciones de las hipótesis H1) y H2). Entonces

$$\nabla \tilde{\varphi}_h \longrightarrow \nabla \varphi \quad \text{en } [\mathbf{L}^4(\Omega)]^3.$$

Para una subsucesión de $\{\tilde{\mathbf{u}}_h\}_{h>0}$, por las inyecciones de Sobolev

$$\tilde{\mathbf{u}}_h \longrightarrow \mathbf{u} \quad \text{en } \mathbf{L}^4(\Omega).$$

Se sigue

$$u_{3h} \longrightarrow u_3 \quad \text{débil en } L^2(\Omega),$$

de donde

$$\mathbf{U}_h \longrightarrow \mathbf{U} \quad \text{débil en } [\mathbf{L}^2(\Omega)]^3.$$

Estas convergencias permiten concluir

$$\langle (\tilde{\mathbf{U}}_h \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\varphi}_h \rangle \longrightarrow \langle (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \varphi \rangle.$$

Los términos $(\nabla_{\nu} \tilde{\mathbf{u}}_h, \nabla_{\nu} \tilde{\varphi}_h)_{\Omega}$ y $f(\tilde{\mathbf{u}}_h^{\perp}, \tilde{\varphi}_h)_{\Omega}$ pasan al límite de forma estándar, como en las ecuaciones de Navier-Stokes.

Por la desigualdad (1.13), se tiene la acotación de $\nabla_H \cdot \langle \tilde{\mathbf{u}}_h \rangle$ en $L_{1/D}^2(\omega)$. Se puede suponer entonces que

$$\nabla_H \cdot \langle \tilde{\mathbf{u}}_h \rangle D^{-1/2} \longrightarrow \nabla_H \cdot \langle \mathbf{u} \rangle D^{-1/2} \quad \text{débil en } L^2(\omega).$$

Como

$$\tilde{q}_h D^{1/2} \longrightarrow q D^{1/2} \quad \text{en } L^2(\omega),$$

se tiene

$$(\nabla_H \cdot \langle \tilde{\mathbf{u}}_h \rangle, \tilde{q}_h)_{\omega} \longrightarrow (\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u} \rangle, q)_{\omega}.$$

Con los mismos argumentos se tiene que

$$\nabla_H \cdot \langle \tilde{\varphi}_h \rangle D^{-2/3} \longrightarrow \nabla_H \cdot \langle \tilde{\varphi} \rangle D^{-2/3} \quad \text{débil en } L^3(\omega),$$

$$\tilde{p}_h D^{2/3} \longrightarrow p D^{2/3} \quad \text{débil en } L^{3/2}(\omega).$$

Se obtiene así

$$-(\tilde{p}_h, \nabla_H \cdot \langle \tilde{\varphi}_h \rangle)_{\omega} \longrightarrow -(p, \nabla_H \cdot \langle \tilde{\varphi} \rangle)_{\omega}.$$

Para terminar la prueba, combinamos la semicontinuidad débil de la norma en espacios de Banach reflexivos con las estimaciones (1.42), obteniendo (3.11). Además, por reducción al absurdo, si la solución de (1.18) es única, la sucesión completa $\{\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{p}_h\}_{h>0}$ debe converger a ella. ■

1.5 Estabilidad del par \mathbb{P}_1 -burbuja/ \mathbb{P}_1 .

El resultado central de esta Sección (Teorema 1.8) es la comprobación de la hipótesis H3) para el par (\mathbf{J}_h, M_h^1) .

En adelante, denotaremos $h = \max_{M \in \mathcal{M}_h} h_M$, e impondremos la clásica condición de regularidad de la malla \mathcal{M}_h (Cf. Ciarlet [33]):

- H4) Sea $\rho_M = \sup \{diam(S); S \text{ esferas contenidas en } M\}$. Existe una constante $\sigma^* > 0$ independiente de h tal que

$$\sigma^* \leq \frac{\rho_M}{h_M}, \quad \forall M \in \bigcup_h \mathcal{M}_h.$$

La regularidad de la malla de tetraedros \mathcal{M}_h implica, de hecho, la de la malla de prismas \mathcal{T}_h .

Para demostrar el Teorema 1.8 necesitamos varias definiciones y resultados previos. Definamos

$$\begin{aligned} Q_h &= \{q_h \in C^0(\overline{\Omega}_h) \mid q_h|_K \in R_{1,1}(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \\ A_h &= \{r_h \in C^0(\overline{\Omega}_h) \mid r_h|_M \in \mathbb{P}_1(M), \forall M \in \mathcal{M}_h\}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Exponemos en primer lugar un resultado de interpolación que será usado a lo largo de la memoria.

Recordemos que en [33] se construye un operador de interpolación para funciones continuas en espacios de Elementos Finitos afín-equivalentes. Se supone además que el dominio Ω es poliédrico, a fin de que las triangulaciones sean *exactas*. Estas condiciones son demasiado restrictivas para nuestros intereses. En concreto, el espacio de funciones $W_b^{1,3}(\Omega_h)$ no se inyecta en $C^0(\overline{\Omega}_h)$, y la profundidad D no es afín a trozos.

Para los espacios que acabamos de introducir es necesaria una generalización, basada en el trabajo de Bernardi [12], del resultado clásico de interpolación de Ciarlet [33]:

Lema 1.5 *Supongamos que se verifica H4). Entonces:*

- i) *Existe un operador de interpolación lineal $P_h^A : W_0^{1,3}(\Omega_h) \rightarrow A_h \cap W_0^{1,3}(\Omega_h)$ que satisface, para cierta constante $\widehat{C} = C(\widehat{M})$,*

$$\left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} h_M^{-3} \|P_h^A v - v\|_{0,3,M}^3 \right)^{1/3} \leq \widehat{C} |v|_{1,3,\Omega_h}, \quad (1.44)$$

$$|P_h^A v - v|_{1,3,\Omega_h} \leq \widehat{C} |v|_{1,3,\Omega_h}. \quad (1.45)$$

ii) Existe un operador de interpolación lineal $P_h^Q : W_0^{1,3}(\Omega_h) \rightarrow Q_h \cap H_0^1(\Omega_h)$ que satisface, para cierta constante $\widehat{C} = C(\widehat{K})$,

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{-2} \|P_h^Q v - v\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \leq \widehat{C} |v|_{1,\Omega_h}, \quad (1.46)$$

$$|P_h^Q v - v|_{1,3,\Omega_h} \leq \widehat{C} |v|_{1,3,\Omega_h}. \quad (1.47)$$

■

Idea de la demostración.-

La construcción en detalle de los operadores P_h^A y P_h^Q es muy técnica, por lo que la omitimos. En su lugar, expondremos sucintamente las hipótesis de las que se hace uso en [12] y lo que allí se demuestra. Justificaremos también por qué las técnicas contenidas en [12] son suficientes para llevar a cabo la construcción de P_h^A y P_h^Q .

El primer hecho destacable en [12] es que se construye un interpolante para funciones que pueden no estar definidas en todos los puntos del dominio. Es por tanto imposible definir el interpolante a partir de valores nodales. Este inconveniente se solventa recurriendo a proyecciones L^2 locales por macroelementos.

Esta técnica se aplica a Elementos Finitos curvos, entre los que se comprenden familias de Elementos Finitos Afines e Isoparamétricos. Para simplificar la exposición la autora trabaja con símlices. Sin embargo, es obvio que la proyección local L^2 se puede definir igualmente en Elementos Prismáticos.

A la frontera de Ω sólo se le exige ser C^1 a trozos y Lipschitziana. Esta es justamente nuestra hipótesis de partida sobre $\partial\Omega$ en este capítulo.

En caso de interpolación sin condiciones de contorno, sólo se pide que los subdominios Ω_h tiendan a Ω cuando $h \rightarrow 0$. Este requerimiento también se cumple en nuestro caso por construcción.

En caso de que el interpolante deba verificar condiciones de contorno, la autora trabaja con triangulaciones exactas de Ω sólo para simplificar la exposición. Sin embargo, esto no es siempre necesario. En el caso que nos ocupa, la condición Dirichlet afecta a toda la frontera, y basta dar el valor 0 a los nodos que pertenecen a $\partial\Omega_h$.

De este modo, es posible al menos definir los operadores P_h^A y P_h^Q del enunciado.

Para demostrar las estimaciones (1.44)-(1.47) se exige una condición de regularidad a las triangulaciones.

En el caso de familias afin-equivalentes, en el que se incluye el apartado i), la condición es justamente H4). El resultado que se obtiene entonces es: existe $\widehat{C} = C(\widehat{M})$ tal que

$$\|P_h^A v - v\|_{m,3,M} \leq \widehat{C} h_M^{1-m} |v|_{1,3,\Delta}, \quad \forall v \in W_0^{1,3}(\Omega_h),$$

para $1 \geq m \geq 0$. Δ denota la reunión de elementos que rodean a K . Por la hipótesis de regularidad de la malla, el número de elementos de Δ está acotado uniformemente en

h . Ello permite sumar en la anterior estimación en todos los elementos de \mathcal{M}_h , lo que da la estimación en Ω_h :

$$\left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} h_M^{-3(1-m)} \|P_h^A v - v\|_{m,3,M}^3 \right)^{1/3} \leq \widehat{C} |v|_{1,3,\Omega_h}, \quad \forall v \in W_0^{1,3}(\Omega_h).$$

Esta desigualdad demuestra (1.44)-(1.45).

En el caso de familias isoparamétricas, en el que se incluye el apartado *ii*), la condición de regularidad sobre \mathcal{T}_h es más técnica. La transformación F_K que lleva \widehat{K} en K debe poder expresarse como

$$F_K = \widetilde{F}_K + \Phi_K,$$

donde \widetilde{F}_K es afín, Φ de clase C^1 y

$$c_K = \sup_{\widehat{x} \in \widehat{K}} \|D\Phi_K(\widehat{x}) \circ D\widetilde{F}_K^{-1}\| < 1.$$

Dicho de otro modo, K debe ser una *pequeña deformación* (dada por Φ_K) de un prisma con bases paralelas \widehat{K} (el transformado de \widehat{K} por \widetilde{F}_K).

Además, se debe verificar,

$$\sup_h \sup_{K \in \mathcal{T}_h} c_K \leq c < 1.$$

Esta condiciones se verifican por la construcción de \mathcal{T}_h llevada a cabo en la Sección 1.3. De manera intuitiva, al tender $h \rightarrow 0$, localmente las capas iso-sigma tienden a hacerse paralelas, y los prismas de \mathcal{T}_h tienden a tener las bases paralelas.

El resultado que se obtiene entonces es: existe $\widehat{C} = C(\widehat{K})$ tal que

$$\|P_h^Q v - v\|_{m,2,K} \leq \widehat{C} h_K^{1-m} |v|_{1,\Delta}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_h),$$

$$\|P_h^Q v - v\|_{m,3,K} \leq \widehat{C} h_K^{1-m} |v|_{1,3,\Delta}, \quad \forall v \in W_0^{1,3}(\Omega_h).$$

Sumando en $K \in \mathcal{T}_h$ se obtiene (1.46)-(1.47). ■

El siguiente Lema técnico es necesario para la Proposición 1.7:

Lema 1.6 Sea $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,3}(\Omega_h)$. Bajo la hipótesis H_4), existe α_M vector de \mathbb{R}^2 dependiente sólo de \mathbf{v} y M verificando

$$i) \int_M \alpha_M \beta_M \cdot \nabla_H q_h = \int_M (\mathbf{v} - \mathbf{P}_h^A \mathbf{v}) \cdot \nabla_H q_h, \quad \forall q_h \in \mathbb{P}_1(M), \forall M \in \mathcal{M}_h.$$

ii) Existe $C_2(\sigma^*) > 0$ independiente de h tal que

$$|\alpha_M \beta_M|_{1,3,M} \leq C_2 \frac{1}{h_M} \|\mathbf{v} - \mathbf{P}_h^A \mathbf{v}\|_{0,3,M}. \quad (1.48)$$

Demostración.-

Sea $M \in \mathcal{M}_h$. Definamos

$$\alpha_M = \frac{\int_K (\mathbf{v} - \mathbf{P}_h^A \mathbf{v})}{\int_K \beta_K}.$$

Puesto que $\nabla_H q_h$ es constante en M , se tiene por construcción

$$\int_M \alpha_M \beta_M \cdot \nabla_H q_h = \int_M (\mathbf{v} - \mathbf{P}_h^A \mathbf{v}) \cdot \nabla_H q_h, \quad \forall q_h \in \mathbb{P}_1(M),$$

lo que prueba el apartado *i*). Para demostrar *ii*), denotemos A_M la matriz jacobiana de la transformación afín F_M que lleva el tetraedro de referencia \widehat{M} en M . Como es sabido $|\det(A_M)| = \frac{|M|}{|\widehat{M}|}$, donde $|M|$ denota el volumen de M . Se tiene entonces

$$\|\nabla(\alpha_M \beta_M)\|_{0,3,M}^3 = |\alpha_M|^3 \|\nabla \beta_M\|_{0,3,M}^3 = \frac{|\int_M (\mathbf{v} - \mathbf{P}_h^A \mathbf{v})|^3}{|\int_M \beta_M|^3} \|\nabla \beta_M\|_{0,3,M}^3.$$

Ahora bien,

$$\left| \int_M \beta_M \, d\mathbf{x} \right|^3 = \frac{|M|^3}{|\widehat{M}|^3} \left| \int_{\widehat{M}} \widehat{\beta} \, d\widehat{\mathbf{x}} d\widehat{\mathbf{z}} \right|^3 = C_1(\widehat{M}) |M|^3,$$

y por otro lado,

$$\left| \int_M (\mathbf{v} - \mathbf{P}_h^A \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} d\mathbf{z} \right|^3 \leq \left(\int_M |\mathbf{v} - \mathbf{P}_h^A \mathbf{v}|^3 \, d\mathbf{x} d\mathbf{z} \right) (|M|^2) = \|\mathbf{v} - \mathbf{P}_h^A \mathbf{v}\|_{0,3,M}^3 |M|^2.$$

Nos queda por acotar la norma $\|\nabla \beta_M\|_{0,3,M}^3$. Recordamos antes la desigualdad de Jensen (ver, por ejemplo [48], pág. 103). Para todo índice $I \in \mathbb{N}$, exponentes $r \geq q$ y números reales $\{a_i\}_{i=1}^I$:

$$\left[\sum_{i=1}^I |a_i|^r \right]^{1/r} \leq \left[\sum_{i=1}^I |a_i|^q \right]^{1/q}.$$

Se sigue

$$\begin{aligned} \|\nabla \beta_M\|_{0,3,M}^3 &= \int_M [(\partial_x \beta_M)^3 + (\partial_y \beta_M)^3 + (\partial_z \beta_M)^3] \, d\mathbf{x} d\mathbf{z} \\ &\leq \int_M [(\partial_x \beta_M)^2 + (\partial_y \beta_M)^2 + (\partial_z \beta_M)^2]^{3/2} \, d\mathbf{x} d\mathbf{z} \quad (\text{por la desigualdad de Jensen}) \\ &= \int_M (|\nabla \beta_M|^2)^{3/2} \, d\mathbf{x} d\mathbf{z} = \frac{|M|}{|\widehat{M}|} \int_{\widehat{M}} |A_M^{-t} \widehat{\nabla} \widehat{\beta}|^2)^{3/2} \, d\widehat{\mathbf{x}} d\widehat{\mathbf{z}} \\ &\leq \frac{|M|}{|\widehat{M}|} \int_{\widehat{M}} (\|A_M^{-t}\|_s^2 |\widehat{\nabla} \widehat{\beta}|^2)^{3/2} \, d\widehat{\mathbf{x}} d\widehat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{|M|}{|\widehat{M}|} \|A_M^{-t}\|_s^3 \int_{\widehat{M}} (|\widehat{\nabla}\widehat{\beta}|^2)^{3/2} d\widehat{x}d\widehat{z} \\
 &= C_2(\widehat{M})|M| \|A_M^{-t}\|_s^3,
 \end{aligned}$$

donde $\|\cdot\|_s$ denota la norma espectral de matrices. Siguiendo la teoría clásica de interpolación por Elementos Finitos (Cf. [33]),

$$\|A_M^{-t}\|_s \leq C_3(\widehat{M})\rho_M^{-1}.$$

Gracias a la hipótesis de regularidad de la malla:

$$|M| \|A_M^{-t}\|_s^3 \leq C_4(\widehat{M}) \frac{h_M^3}{\rho_M^3} \leq C_5(\widehat{M}, \sigma^*) \frac{h_M^3}{h_M^3} = C_5(\widehat{M}, \sigma^*).$$

Por tanto,

$$\|\nabla\beta_M\|_{0,3,M}^3 \leq C_6(\widehat{M}, \sigma^*).$$

Resulta así

$$\|\nabla(\alpha_M\beta_M)\|_{0,3,M}^3 \leq C_7(\widehat{M}, \sigma^*) \frac{\|J_M(\mathbf{v} - \mathbf{P}_h\mathbf{v})\|_{0,3,M}^3}{|M|} \leq C_8(\widehat{M}, \sigma^*) \frac{\|J_M(\mathbf{v} - \mathbf{P}_h\mathbf{v})\|_{0,3,M}^3}{h_M^3}.$$

Tomando la raíz cúbica en la anterior expresión se sigue el apartado *ii*). ■

El siguiente resultado es una adaptación del Lema de Fortin (Cf. Brezzi y Fortin [18]) a nuestro marco funcional:

Proposición 1.7 *Bajo la hipótesis H_4) existe un operador de interpolación $\Pi_h : \mathbf{W}_0^{1,3}(\Omega_h) \rightarrow \mathbf{V}_h$ verificando*

$$i) \int_{\Omega_h} \mathbf{v} \cdot \nabla_H q_h = \int_{\Omega_h} \Pi_h \mathbf{v} \cdot \nabla_H q_h, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,3}(\Omega_h), \forall q_h \in A_h.$$

ii) Existe $C(\widehat{M}, \sigma^) > 0$ independiente de h tal que*

$$|\Pi_h \mathbf{v}|_{1,3,\Omega_h} \leq C |\mathbf{v}|_{1,3,\Omega_h}. \quad (1.49)$$

Demostración.-

Construyamos Π_h . Situémonos en un elemento $M \in \mathcal{M}_h$ y busquemos $\Pi_h \mathbf{v}$ de la forma

$$\Pi_h \mathbf{v} = \mathbf{P}_h^A \mathbf{v} + \alpha_M \beta_M \quad (1.50)$$

donde α_M designa un vector de \mathbb{R}^2 dependiente sólo de \mathbf{v} y M .

El apartado *i*) del Lema 1.6 y la definición (1.50) proporcionan de forma inmediata

$$\int_M \mathbf{v} \cdot \nabla_H(q_h|_M) = \int_M \Pi_h \mathbf{v} \cdot \nabla_H(q_h|_M), \quad \forall q_h \in A_h. \quad (1.51)$$

Sumando en $M \in \mathcal{M}_h$ se obtiene el apartado *i*).

En cuanto al apartado *ii*), observemos que

$$\begin{aligned} |\Pi_h \mathbf{v}|_{1,3,\Omega_h} &\leq |\Pi_h \mathbf{v} - \mathbf{v}|_{1,3,\Omega_h} + |\mathbf{v}|_{1,3,\Omega_h} \\ &= |(\mathbf{P}_h^A \mathbf{v} - \mathbf{v}) + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \alpha_M \beta_M|_{1,3,\Omega_h} + |\mathbf{v}|_{1,3,\Omega_h} \\ &\leq |(\mathbf{P}_h^A \mathbf{v} - \mathbf{v})|_{1,3,\Omega_h} + \left| \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \alpha_M \beta_M \right|_{1,3,\Omega_h} + |\mathbf{v}|_{1,3,\Omega_h} \\ &= |\mathbf{P}_h^A \mathbf{v} - \mathbf{v}|_{1,3,\Omega_h} + \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} |\alpha_M \beta_M|_{1,3,M}^3 \right)^{1/3} + |\mathbf{v}|_{1,3,\Omega_h}. \end{aligned}$$

El apartado *ii*) del Lema 1.6 conduce a

$$|\Pi_h \mathbf{v}|_{1,3,\Omega_h} \leq |\mathbf{P}_h^A \mathbf{v} - \mathbf{v}|_{1,3,\Omega_h} + C \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \frac{1}{h_M^3} \|\mathbf{v} - \mathbf{P}_h^A \mathbf{v}\|_{0,3,M}^3 \right)^{1/3} + |\mathbf{v}|_{1,3,\Omega_h}.$$

Finalmente, de (1.44)-(1.45):

$$|\Pi_h \mathbf{v}|_{1,3,\Omega_h} \leq C(\widehat{M}, \sigma^*) |\mathbf{v}|_{1,3,\Omega_h},$$

con lo que se tiene el apartado *ii*) del enunciado. ■

Estamos ya en disposición de probar el resultado central de esta Sección. La demostración combina, por un lado, técnicas de Chacón y Guillén [30] (remitimos al apartado 0.3.3 para una síntesis de este trabajo) y, por otro, la Proposición 1.7 (inspirada en el Lema de Fortin [18]).

Teorema 1.8 *Existe una constante $\beta > 0$ independiente de h tal que $\forall q_h \in M_h^1$,*

$$\|q_h\|_{L_{D,0}^{3/2}(\omega_h)} \leq \beta \left[\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h - \{0\}} \frac{(\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle, q_h)_{\omega_h}}{|\mathbf{v}_h|_{1,3,\Omega_h}} \right]. \quad (1.52)$$

Demostración.-

Consideremos el espacio

$$\widehat{M}_h = \{ \widehat{q}_h : \Omega \mapsto \mathbf{R}, \widehat{q}_h(\mathbf{x}, z) = q_h(\mathbf{x}), \text{ para algún } q_h \in M_h^1 \}. \quad (1.53)$$

Es inmediato comprobar

$$\widehat{M}_h = \{ p_h \in A_h, \text{ independientes de } z, \int_{\Omega_h} p_h = 0 \}. \quad (1.54)$$

Sea $q_h \in M_h^1$. Consideremos la presión tridimensional asociada $\widehat{q}_h \in \widehat{M}_h$. Es evidente que

$$\|q_h\|_{L_{D,0}^{3/2}(\omega_h)} = \|\widehat{q}_h\|_{L_0^{3/2}(\Omega_h)}.$$

La condición inf-sup continua en norma $L^{3/2}$, (Cf. [2]) proporciona:

$$\|\widehat{q}_h\|_{L_0^{3/2}(\Omega_h)} \leq C(\Omega_h) \sup_{(\mathbf{v}, w) \in [W_0^{1,3}(\Omega_h)]^3 - \{0\}} \frac{(\nabla \cdot (\mathbf{v}, w), \widehat{q}_h)_{\Omega_h}}{|(\mathbf{v}, w)|_{1,3,\Omega_h}}. \quad (1.55)$$

Puesto que \widehat{q}_h es continua podemos integrar por partes:

$$(\nabla \cdot (\mathbf{v}, w), \widehat{q}_h)_{\Omega_h} = (\nabla_H \cdot \mathbf{v}, \widehat{q}_h)_{\Omega_h} - (w, \partial_z \widehat{q}_h)_{\Omega_h},$$

y por ser \widehat{q}_h independiente de z :

$$(w_h, \partial_z \widehat{q}_h)_{\Omega_h} = 0$$

luego,

$$(\nabla \cdot (\mathbf{v}, w), \widehat{q}_h)_{\Omega_h} = (\nabla_H \cdot \mathbf{v}, \widehat{q}_h)_{\Omega_h}.$$

Además, es obvio que $|\mathbf{v}|_{1,3,\Omega_h} \leq |(\mathbf{v}, w)|_{1,3,\Omega_h}$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \|q_h\|_{L_{D,0}^{3/2}(\omega_h)} &\leq C(\Omega_h) \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,3}(\Omega_h) - \{0\}} \frac{(\nabla_H \cdot \mathbf{v}, \widehat{q}_h)_{\Omega_h}}{|\mathbf{v}|_{1,3,\Omega_h}} \\ &\leq C(\Omega_h) \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,3}(\Omega_h) - \{0\}} \frac{(\mathbf{v}, \nabla_H \widehat{q}_h)_{\Omega_h}}{|\mathbf{v}|_{1,3,\Omega_h}}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Sabemos por la Proposición 1.7 que para $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,3}(\Omega_h)$ arbitrario:

$$\int_{\Omega_h} \mathbf{v} \cdot \nabla_H \widehat{q}_h = \int_{\Omega_h} \Pi_h \mathbf{v} \cdot \nabla_H \widehat{q}_h, \quad (1.57)$$

$$|\Pi_h \mathbf{v}|_{1,3,\Omega_h} \leq C_1 |\mathbf{v}|_{1,3,\Omega_h}. \quad (1.58)$$

Introduciendo (1.57) y (1.58) en (1.56):

$$\begin{aligned} \|q_h\|_{L_{D,0}^{3/2}(\omega_h)} &\leq C_1 C(\Omega_h) \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,3}(\Omega_h) - \{0\}} \frac{\int_{\Omega_h} \Pi_h \mathbf{v} \cdot \nabla_H \widehat{q}_h}{|\Pi_h \mathbf{v}|_{1,3,\Omega_h}} \\ &\leq C_1 C(\Omega_h) \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega_h) - \{0\}} \frac{\int_{\Omega_h} \mathbf{v}_h \cdot \nabla_H \widehat{q}_h}{|\mathbf{v}_h|_{1,3,\Omega_h}} \\ &\leq C_1 C(\Omega_h) \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h - \{0\}} \frac{\int_{\Omega_h} \mathbf{v}_h \cdot \nabla_H \widehat{q}_h}{|\mathbf{v}_h|_{1,3,\Omega_h}}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Sólo resta observar que, una vez más por ser \hat{q}_h continua e independiente de z :

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h - \{0\}} \frac{\int_{\Omega_h} \mathbf{v}_h \cdot \nabla_H \hat{q}_h}{|\mathbf{v}_h|_{1,3,\Omega_h}} = \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h - \{0\}} \frac{\int_{\Omega_h} (\nabla_H \cdot \mathbf{v}_h) \hat{q}_h}{|\mathbf{v}_h|_{1,3,\Omega_h}} = \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h - \{0\}} \frac{(\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle, q_h)_{\omega_h}}{|\mathbf{v}_h|_{1,3,\Omega_h}}.$$

Se tiene pues la desigualdad (1.52) con una constante $\beta_h = C_1 C(\Omega_h)$. Recordemos que C_1 es independiente de h por la Proposición 1.7. Por su parte, la constante $C(\Omega_h)$ aparece en la condición inf-sup continua en el dominio Ω_h . El comportamiento de dicha constante respecto al dominio es un aspecto del Análisis Numérico escasamente estudiado. La intuición indica que si la sucesión de dominios $\{\Omega_h\}_{h>0} \subset \Omega$ tiende de forma *razonable* a Ω la sucesión de constantes $\{C(\Omega_h)\}_{h>0}$ debe estar acotada.

El siguiente resultado, obra de L. Tartar [77], da una idea para estimar las constantes $\{C(\Omega_h)\}_{h>0}$ independientemente de h :

Teorema 1.9 Sean Ω y $\hat{\Omega}$ abiertos de \mathbb{R}^N acotados, conexos, tales que $\hat{\Omega} \subset \Omega$. Sean p y p' exponentes conjugados. Supongamos además:

1) Existe una constante $C_\Omega > 0$ tal que si $\mathbf{f} \in [W^{-1,p}(\Omega)]^N$ verifica

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{[W^{-1,p}(\Omega)]^N, [W_0^{1,p'}(\Omega)]^N} = 0$$

para todo $\mathbf{u} \in [W_0^{1,p'}(\Omega)]^N$ con $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, entonces existe $p \in L^p(\Omega)$ tal que $\nabla p = \mathbf{f}$ y

$$\|p\|_{L^p(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C_\Omega \|\mathbf{f}\|_{[W^{-1,p}(\Omega)]^N}.$$

2) Existe un operador \mathcal{R} lineal y continuo de $[W_0^{1,p'}(\Omega)]^N$ en $[W_0^{1,p'}(\hat{\Omega})]^N$ tal que:

- si $u \in [W_0^{1,p'}(\Omega)]^N$ y $\nabla \cdot u = 0$ en Ω , entonces $\nabla \cdot \mathcal{R}(u) = 0$ en $\hat{\Omega}$.
- si \mathcal{P} es el operador de prolongación por 0 de $\hat{\Omega}$ a Ω , entonces $\mathcal{R} \circ \mathcal{P} = Id$.

En estas condiciones, se cumple la hipótesis 1) para $\hat{\Omega}$, y se tiene la acotación

$$C_{\hat{\Omega}} \leq C_\Omega \|\mathcal{R}\|_{\mathcal{L}([W_0^{1,p'}(\Omega)]^N; [W_0^{1,p'}(\hat{\Omega})]^N)}.$$

Nota.- El resultado que se puede encontrar en [77] está enunciado para $p = p' = 2$, pero la demostración se extiende fácilmente al caso $p \neq p'$. Por ello, hemos preferido enunciar el resultado en el caso general. ■

Aplicaremos el resultado anterior en nuestro caso identificando $\Omega_h = \widehat{\Omega}$. Las constantes $C_{\widehat{\Omega}}$ y C_{Ω} del enunciado son precisamente las que aparecen en la condición inf-sup continua para Ω_h y Ω .

Actualmente, se trabaja en encontrar condiciones suficientes sobre la regularidad de la frontera para poder aplicar el resultado anterior. En particular, la regularidad de la frontera de Ω es decisiva para que se verifique la hipótesis 1) y para poder construir explícitamente el operador \mathcal{R} que exige la hipótesis 2) del enunciado.

Para la hipótesis 1) es bien conocido que basta con $\partial\Omega$ lipschitziana.

En cuanto al apartado 2), J. Casado y F. Murat [25] demuestran de forma constructiva:

Teorema 1.10 *Supongamos que $\partial\Omega_h$ se construye mediante una interpolación P_1 a trozos de $\partial\Omega$, y se verifica una de las dos condiciones siguientes:*

- la dimensión $N = 2$ o $N = 3$ y $\partial\Omega$ es P_1 a trozos.

o bien

- la dimensión $N = 2$, Ω es convexo y $\partial\Omega$ es C^1 a trozos.

Entonces, existe un operador \mathcal{R} satisfaciendo las condiciones requeridas en el apartado 2) del Teorema 1.9. Más aún, las normas $\|\mathcal{R}\|_{\mathcal{L}([W_0^{1,p'}(\Omega)]^N; [W_0^{1,p'}(\Omega_h)]^N)}$ están acotadas independientemente de h .

La construcción de \mathcal{R} para casos más generales referentes a la regularidad de la frontera del dominio y la dimensión N están aún en proceso.

Recordemos que las hipótesis establecidas de partida sobre $\partial\Omega$ eran $D \in W^{1,\infty}(\overline{\omega})$ y $\partial\Omega$ Lipschitz. Además, puesto que $N = 3$ en nuestro caso, las hipótesis del Teorema 1.10 se cumplirían si D fuese afín.

En el caso general $D \in W^{1,\infty}(\overline{\omega})$, aunque el Teorema 1.10 no es aplicable, pensamos que podemos asumir razonablemente como hipótesis de trabajo que el operador \mathcal{R} puede ser construido.

Supondremos por tanto que las constantes $C(\Omega_h)$ se puede estimar uniformemente en h , lo que implica que las constantes β_h están acotadas uniformemente en h por cierta constante positiva $\beta(\Omega, \widehat{M}, \sigma^*)$. ■

1.6 Problemas abiertos.

1) Adición de burbujas al espacio V_h^1 .

En este Capítulo hemos usado la adición de burbujas a elementos \mathbb{P}_1 tetraédricos para la velocidad. De este modo se contruyó el espacio de velocidades discreto $\mathbf{J}_h \oplus \mathbf{B}_h$.

Cabe estudiar la adición de burbujas directamente al espacio *prismático* V_h^1 , definido en (1.23). Existen experimentos numéricos en el caso hexaédrico para Navier-Stokes

(Cf. Nakajima y Karahawa [63]) que indican que la adición de una sólo burbuja por prisma sería insuficiente para obtener una discretización mixta estable.

De hecho, siguiendo trabajos anteriores (Cf. Mons y Rogé [62]), una posibilidad con visos de éxito es añadir tres burbujas a cada prisma, de la forma que se describe en la Sección 1.3.2. Tendríamos en ese caso el espacio discreto de velocidades

$$\mathbf{V}_h = \mathbf{V}_h^1 \oplus \mathbf{B}_h.$$

Este espacio, por la construcción de las mallas \mathcal{T}_h y \mathcal{M}_h llevada a cabo en la Sección 1.3, tendría exactamente el mismo número de grados de libertad que el espacio \mathbf{J}_h . Presentaría sin embargo una ventaja computacional, al ser las funciones de base (salvo las burbujas) $\mathbb{P}_1(x, y) \otimes \mathbb{P}_1(z)$ en cada elemento, lo que permite descomponer el cómputo de las integrales en horizontal y vertical.

2) Adición de burbujas superficiales.-

El hecho de que en la formulación (1.27) sólo intervengan presiones superficiales, junto con la estructura prismática de la malla \mathcal{T}_h , sugiere la posibilidad de estabilizar las presiones discretas añadiendo sólo burbujas superficiales.

Consideremos la burbuja cúbica

$$\widehat{\beta}(\widehat{x}, \widehat{y}) = 3^3 (1 - \widehat{x} - \widehat{y}) \widehat{x} \widehat{y}, \quad \forall (\widehat{x}, \widehat{y}) \in \widehat{T}.$$

Sea

$$V_h^B = \left\{ \phi \in C(\overline{\Omega}_h) \cap \mathbf{H}_b^1(\Omega_h) \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, \widehat{\phi}|_K \in (\mathbb{P}_1(\widehat{\mathbf{x}}) \oplus \beta(\widehat{\mathbf{x}})) \otimes \mathbb{P}_1(\widehat{z})^2 \right\}.$$

La cuestión a investigar es si el par (V_h^B, M_h^1) es estable para la formulación (1.27). De serlo, estaríamos ante el par más económico posible.

3) Otro tratamiento de las orillas.-

Sugerimos en este apartado una estrategia para evitar el problema de la introducción del talud artificial, siempre explotando el uso de Elementos Prismáticos. Supondremos, para simplificar la presentación, que ω es poligonal.

Tomemos un mallado \mathcal{C}_h de $\overline{\omega}$ por triángulos y una interpolación $D_h : \overline{\omega}_h \rightarrow \mathbb{R}^+$, \mathbb{P}_1 a trozos, del fondo D .

Para construir un mallado \mathcal{T}_h con prismas de bases paralelas (ver Figura 1.5), un inconveniente mayor reside en los elementos que completan la frontera. En efecto, es posible, en las condiciones anteriores, que se dé la configuración de la Figura 1.5, donde prismas, tetraedros y pentaedros son adyacentes.

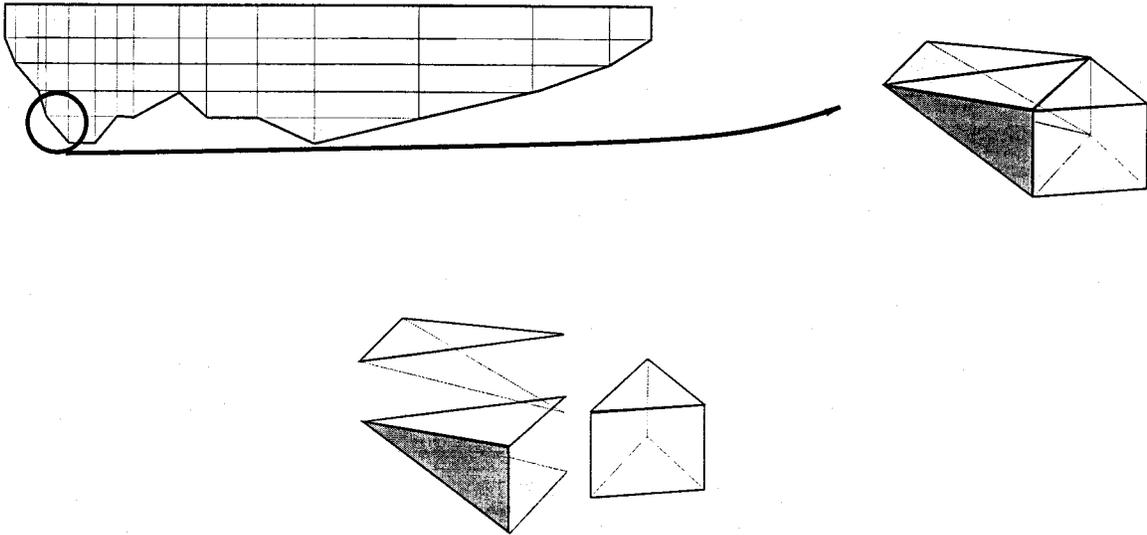


Figura 1.5: Mallado por capas paralelas (izquierda); Macroelemento compuesto por tetraedro, pentaedro y prisma (derecha y abajo); las caras sombreadas pertenecen a la frontera.

Si ya es difícil encontrar en los textos clásicos sobre Elementos Finitos referencias explícitas a prismas de bases triangular, el lector puede fácilmente imaginar la ausencia de trabajos previos sobre pentaedros. Sería necesario, pues, diseñar funciones de base (originales, a nuestro entender) para pentaedros que complementen las ya conocidas para los prismas y tetraedros adyacentes en las caras comunes.

Otro inconveniente es que, para poder construir capas paralelas, las profundidades en los nodos de los triángulos no pueden ser arbitrarias. De hecho, si se fija el número de capas verticales $l \in \mathbb{N}$, debe considerarse un rango de profundidades $\{z_k\}_{k=1}^l$ fijo. Para construir un mallado como el de la Figura 1.5, las profundidades en los nodos de los triángulos $T \in \mathcal{C}_h$ deben estar en el conjunto $\{z_k\}_{k=1}^l$. Esta restricción no se da con el uso de capas iso-sigma.

Señalemos que las principales ventajas de una discretización como la de la Figura 1.5 serían

- la no necesidad de introducir un talud artificial y
- los cálculos elementales se simplifican notablemente al ser, la mayoría de los elementos, prismas rectos.

Capítulo 2

Caso estacionario: Estabilización Término a Término.

2.1 Introducción.

En este Capítulo tratamos las restricciones de estabilidad debidas a incompresibilidad y convección dominante mediante un método penalizado *término a término*, que permite una interpolación $\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_1$ para la velocidad y \mathbb{P}_1 2D para la presión. Esto permite una reducción de incógnitas del orden de 9 a 1 frente al par de Azérad [5].

En la Sección 2.3 extendemos la técnica de análisis para Métodos Estabilizados introducida en Chacón Rebollo [27] para deducir la estabilidad y convergencia en normas $\mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L_{D,0}^{3/2}(\omega)$ de nuestro esquema numérico. Esta prueba tiene un interés intrínseco, al requerir ciertas extensiones no triviales de [27] (especialmente el Teorema 2.2). En particular, deducimos la estructura de los términos estabilizantes para convección y presión, y probamos una condición inf-sup específica para nuestros Elementos Finitos Prismáticos.

En la Sección 2.4 se obtiene una presión superficial con regularidad L^2 bajo la hipótesis adicional $D|_{\partial\omega} > 0$ (i.e., si Ω tiene *talud*). En este caso es posible beneficiarse de la desigualdad inf-sup estándar $L^2(\omega) \times H_0^1(\omega)$.

Por último, se demuestran estimaciones de error de orden óptimo en el apartado 2.5.

2.2 Planteamiento del Método.

Consideremos de nuevo la aproximación del dominio Ω a través de subdominios poligonales Ω_h introducida en la Sección 1.3.

Seguimos suponiendo que la superficie ω viene aproximada por subdominios poligonales ω_h tales que ω_h tienden a ω cuando $h \rightarrow 0$. Consideramos igualmente las triangulaciones \mathcal{C}_h y \mathcal{T}_h de ω_h y Ω_h respectivamente, así como los espacios de Elementos Finitos $R_{k_1,k_2}(K)$ definidos en (1.22).

Recordemos las definiciones:

$$\begin{aligned}
 V_h^k &= \left\{ \phi \in C(\bar{\Omega}) \cap \mathbf{H}_b^1(\Omega) \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, \widehat{\phi}|_K \in (\mathbb{P}_k(\hat{\mathbf{x}}) \otimes \mathbb{P}_k(\hat{z}))^2 \right\}, \\
 M_h^k &= \left\{ q_h \in C(\bar{\Omega}) \mid \forall T \in \mathcal{C}_h, \widehat{q_h}|_T \in \mathbb{P}_k(\hat{\mathbf{x}}) \text{ y } \int_{\omega} q_h D = 0 \right\}, \quad k \geq 1, \\
 Q_h &= \left\{ q_h \in C^0(\bar{\Omega}_h) \mid q_h|_K \in R_{1,1}(K) \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

En contraste con los Métodos Mixtos, los Métodos Estabilizados permiten interpolación del mismo grado para velocidad y presión a cambio de incrementar la complejidad de la formulación. Nos centraremos en el Método de Penalización Término a Término, por ser el de más fácil implantación. Para la estricta penalización de la presión, este método fue introducido por Brezzi y Pitkäranta [17]. Incluyendo la estabilización de la convección, fue introducido en [26].

De este modo, buscamos $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h^1 \times M_h^1$ tales que,

$$\mathbf{B}_{TT}(\mathbf{u}_h; (\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) = \langle \mathbf{1}, \widetilde{\mathbf{v}}_h \rangle, \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h^1 \times M_h, \tag{2.2}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_{TT}(\mathbf{w}_h; (\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) &= \mathbf{B}(\widetilde{\mathbf{w}}_h; (\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{p}_h), (\widetilde{\mathbf{v}}_h, \widetilde{q}_h)) - \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \tau_T \int_T \nabla_H p_h \cdot \nabla_H q_h \, dx \\
 &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K (\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h)(\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h) D_h \, dx \, dz,
 \end{aligned}$$

y τ_K, τ_T son coeficientes de estabilización dados.

Notemos que si

$$u_{3h}(\mathbf{x}, z) = \int_z^0 \nabla_H \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, z') \, dz',$$

entonces u_{3h} pertenece a un Espacio de Elementos Finitos no conforme. En concreto, $u_{3h}|_K \in R_{1,2}(K)$, siendo u_{3h} continua en las interfases verticales de los prismas, y discontinua en las interfases horizontales. Remitimos al apartado *ii)* del Lema .1 del Apéndice para la demostración.

En la definición de \mathbf{B}_{TT} , el segundo sumando está destinado a estabilizar la discretización de la presión, mientras que el tercero proporciona cierta estabilización de la derivada convectiva. Por razones técnicas, éste último término incluye la función de profundidad D_h . Obsérvese que el segundo sumando se extiende a elementos bidimensionales de superficie, mientras que el tercero se extiende a elementos tridimensionales.

Como es usual en el marco de los Métodos Estabilizados, los coeficientes τ_K y τ_T deben tomarse, respectivamente de orden h_K^2 y h_T^2 para conseguir la estabilidad del esquema. De todos modos, en nuestro caso debemos tener en cuenta la fuerte anisotropía del dominio, lo que aconseja incluir la dependencia de los coeficientes τ_T con respecto a la profundidad.

Al igual que en Chacón [27], tomaremos

$$\tau_T = C \frac{\int_T D_h(x, y)}{|T|} h_T^2. \tag{2.3}$$

Por otra parte, los coeficientes τ_K son habitualmente funciones continuas del número de Reynolds local en K . Vienen dados por

$$\tau_K(Re_K) = \gamma \frac{h_K}{U_K^n} \min(Re_K, P); \quad \text{con} \quad Re_K = \frac{U_K^n h_K}{\nu}, \quad (2.4)$$

donde $U_K^n = [\int_K |U_h^n|^2]^{1/2}$, $\nu = \sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2 + \nu_z^2}$. Además, γ denota una constante numérica que *modula* la estabilización, y P es una talla característica del número de Reynolds que distingue los flujos en régimen de *convección dominante* de aquellos en régimen de *difusión dominante*. Esta definición de τ_K toma en cuenta el balance local entre convección y difusión, proporcionando cierta estabilización numérica en casos de fuerte convección.

Razonando como en la Sección 1.3, el costo efectivo del par (V_h^1, M_h^1) es

- número de grados de libertad por capa para u_{ih} , $i = 1, 2$: $(N + 1)^2$,
- número de grados de libertad en superficie para p_h : $(N + 1)^2$.

Sumando por capas verticales obtenemos

- número de grados de libertad total: $2N^3 + O(N^2)$.

De forma que, asintóticamente, la reducción efectiva de grados de libertad frente al Elemento de Taylor-Hood reducido es de 1:8, o sea, un 87.5%.

Nuestro análisis del método (2.2) abordará los problemas de estabilidad, consistencia y precisión de la aproximación.

2.3 Análisis de estabilidad y convergencia.

La dificultad principal del análisis del Método Penalizado (2.2) reside en el tratamiento del término estabilizante.

Como se citó en el epígrafe **Métodos Estabilizados**, de la Sección 0.3.3, se prueba en [28] que los espacios de burbujas proporcionan una forma sistemática de análisis de estos métodos. Seguiremos este enfoque en nuestro análisis. Uno de los puntos clave es el Teorema 2.2, que permite reescribir los términos de penalización como formas bilineales definidas en espacios de burbujas construidos *ad - hoc* en nuestro contexto de aproximaciones mediante Elementos Finitos Prismáticos. Otro punto esencial es la condición inf-sup específica (Lemma 2.3) para la presión superficial.

Supondremos que se verifican las hipótesis:

H1) Dado $q \in L^2_{D,0}(\omega)$, existe una sucesión $\{q_h\}_{h>0}$, donde cada $q_h \in M_h$, tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|q - \widetilde{q}_h\|_{L^2_{D,0}(\omega)} = 0.$$

H2) Dado $2 \leq \alpha' \leq 4$ y $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_b^{1,\alpha'}(\Omega)$, existe una sucesión $\{\mathbf{v}_h\}_{h>0}$, donde cada $\mathbf{v}_h \in V_h$, tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\mathbf{v} - \widetilde{\mathbf{v}}_h|_{1,\alpha',\Omega} = 0.$$

H3) La malla de prismas \mathcal{T}_h es regular en el siguiente sentido:

– Existe una constante $\chi > 0$ tal que

$$\chi \leq \frac{\rho_K}{h_K}, \quad \forall K \in \bigcup_h \mathcal{T}_h.$$

– Dado $K \in \mathcal{T}_h$, denotemos h_3^K y h_1^K la menor y mayor arista vertical de K . entonces, existe $\mu > 0$ independiente de h y K tal que

$$\mu \leq \frac{h_3^K}{h_1^K}.$$

El resultado principal de nuestro estudio es:

Teorema 2.1 *Bajo las hipótesis H1)-H3), se verifica:*

i) *El Problema (2.2) admite una única solución $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h^1 \times M_h^1$, tal que $(\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{p}_h)$ permanece acotada en $\mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L_{D,0}^{3/2}(\omega)$.*

ii) *La sucesión $\{\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{p}_h\}_{h>0}$ contiene una subsucesión débilmente convergente en $\mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L_{D,0}^{3/2}(\omega)$ a una solución de (1.18) que satisface las estimaciones:*

$$|\mathbf{u}|_{1,\Omega} \leq C \underline{\nu}^{-1} \|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega}, \tag{2.5}$$

$$\|p_s\|_{L_{D,0}^{3/2}(\omega)} \leq C(\underline{\nu}^{-1} \|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega} + 1) \|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega}, \tag{2.6}$$

donde $C > 0$ es independiente de h y $\underline{\nu} = \min(\nu_x, \nu_y, \nu_z)$. Si tal solución es única, toda la sucesión converge a ella.

Demostración.-

Procedemos por etapas.

Eta 1.- Linealización de (2.2).

Reemplazamos en (2.2) \mathbf{U}_h por $\mathbf{W}_h = (\mathbf{w}_h, w_{3h}) \in \mathbf{V}_h^1 \times L^2(\Omega_h)$ satisfaciendo

$$w_{3h}(\mathbf{x}, z) = \int_z^0 \nabla_H \cdot \mathbf{w}_h(\mathbf{x}, s) ds, \quad w_{3h}|_{\Gamma_s} = 0, \quad w_{3h} \cdot \mathbf{n}_3|_{\Gamma_b} = 0. \tag{2.7}$$

Obviamente, (2.7) implica $\nabla \cdot \mathbf{W}_h = 0$.

Por tanto, buscamos $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h^1 \times M_h^1$ tal que,

$$\mathbf{B}_{TT}(\mathbf{w}_h; (\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) = \langle \mathbf{1}, \widetilde{\mathbf{v}}_h \rangle, \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h^1 \times M_h^1. \quad (2.8)$$

Etapla 2.- Representación de los términos de estabilización mediante Espacios de Burbujas.

Introducimos a continuación el concepto de *operador de condensación estática*. Consideremos una familia de subespacios $\{\mathbf{Z}_{1h}\}_{h>0}$ de $\mathbf{H}_0^1(\Omega_h)$ (resp. $\{\mathbf{Z}_{2h}\}_{h>0}$ de $\mathbf{H}_0^1(\omega_h)$) de dimensión finita. Consideremos asimismo la familia $\{\mathbf{S}_{1h}(\cdot, \cdot)\}_{h>0}$ de formas bilineales y continuas en $\mathbf{H}_0^1(\Omega_h) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega_h)$ (resp. $\{\mathbf{S}_{2h}(\cdot, \cdot)\}_{h>0}$ en $\mathbf{H}_0^1(\omega_h) \times \mathbf{H}_0^1(\omega_h)$). Supondremos que dichas formas son coercitivas y \mathbf{Z}_{1h} -elípticas (resp. \mathbf{Z}_{2h} -elípticas).

Denotemos por \mathcal{R}_{1h} el *operador de condensación estática*

$$\mathcal{R}_{1h} : \mathbf{H}^{-1}(\Omega_h) \rightarrow \mathbf{Z}_{1h},$$

definido como sigue: Dado $\varphi \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega_h)$, $\mathcal{R}_{1h}(\varphi)$ es el único elemento de \mathbf{Z}_{1h} que satisface

$$\mathbf{S}_{1h}(\mathcal{R}_{1h}(\varphi), \mathbf{z}_h) = \langle \varphi, \mathbf{z}_h \rangle, \quad \forall \mathbf{z}_h \in \mathbf{Z}_{1h}. \quad (2.9)$$

Definimos de forma análoga

$$\mathcal{R}_{2h} : \mathbf{H}^{-1}(\omega_h) \rightarrow \mathbf{Z}_{2h}.$$

La representación de los términos de estabilización se lleva a cabo en el siguiente Teorema (que demostramos en el Apéndice A):

Teorema 2.2 *Supongamos que se cumple H3) y la hipótesis:*

- Los coeficientes τ_K, τ_T verifican

$$\gamma_1 h_K^2 \leq \tau_K \leq \gamma_2 h_K^2, \quad \alpha_1 h_T^2 \frac{\int_T D_h}{|T|} \leq \tau_T \leq \alpha_2 h_T^2 \frac{\int_T D_h}{|T|}, \quad (2.10)$$

para ciertas constantes $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2 > 0$.

Entonces, existen espacios de Elementos Finitos Burbuja $\{\mathbf{Z}_{ih}\}_{h>0}$ y formas bilineales continuas y coercitivas $\{\mathbf{S}_{ih}\}_{h>0}$, $i = 1, 2$ tales que,

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K (\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h)(\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h) D_h dx dz = \mathbf{S}_{1h}(\mathcal{R}_{1h}((\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h) D_h), \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h) D_h)),$$

$$\sum_{T \in \mathcal{C}_h} \tau_T \int_T \nabla_{HP_h} \cdot \nabla_{HQ_h} dx = \mathbf{S}_{2h}(\mathcal{R}_{2h}(\nabla_{HP_h}), \mathcal{R}_{2h}(\nabla_{HQ_h})), \quad (2.11)$$

para todos $\mathbf{w}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h$ en \mathbf{V}_h^1 y p_h, q_h en M_h^1 . Más aún, ambas familias \mathbf{S}_{ih} son uniformemente elípticas en h .

La segunda desigualdad en (2.10) se comprueba fácilmente a partir de (2.3). Además, de (2.4) se deduce tras algunos simples cálculos

$$\gamma_1 h_K^2 \leq \tau_K \leq \gamma_2 h_K^2,$$

con

$$\gamma_1 = \frac{\gamma}{\nu}, \gamma_2 = \frac{\gamma}{\nu} \min \left\{ \frac{P}{\text{diam}(\Omega)} \frac{\nu}{\|\mathbf{W}_h\|_{0,\Omega}}, 1 \right\} = \gamma_2(\mathbf{W}_h).$$

Para simplificar la presentación, supondremos $\|\mathbf{W}_h\|_{0,\Omega} \leq C$, siendo C una constante independiente de h , de tal modo que (2.10) se verifica con una constante γ_2 independiente de \mathbf{W}_h . De todas formas, nuestra demostración puede ser ampliada al caso $\gamma_2 = \gamma_2(\mathbf{W}_h)$, gracias a que estimaremos el campo de velocidades uniformemente en h en norma $L^3(\Omega)$. Para las Ecuaciones de Navier-Stokes, esto se lleva a cabo en [28].

Consecuentemente, denotaremos a lo largo de la demostración

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{TT}(\mathbf{w}_h; (\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) &= \mathbf{B}(\widetilde{\mathbf{w}}_h; (\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{p}_h), (\widetilde{\mathbf{v}}_h, \widetilde{q}_h)) - S_{2h}(\mathcal{R}_{2h}(\nabla_H p_h), \mathcal{R}_{2h}(\nabla_H q_h)) \\ &\quad + \mathbf{S}_{1h}(\mathcal{R}_{1h}((\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h) D_h), \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h) D_h)). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Etapa 3.- Condición inf-sup discreta.

El siguiente resultado prueba una condición inf-sup discreta *débil* adaptada a nuestro análisis:

Lema 2.3 Dado $\alpha \in (1, 2]$, existe una constante $\beta > 0$ independiente de h tal que $\forall q_h \in M_h^1$,

$$\begin{aligned} \|q_h\|_{L_{D_h,0}^\alpha(\omega_h)} &\leq \beta \left[\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^1 - \{0\}} \frac{(\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle, q_h)_{\omega_h}}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\alpha',\Omega_h}} \right. \\ &\quad \left. + [S_{2h}(\mathcal{R}_{2h}(\nabla_H q_h), \mathcal{R}_{2h}(\nabla_H q_h))]^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde α' es el exponente conjugado de α .

Demostración.

Para probar (2.13) es suficiente con

$$\begin{aligned} \|r_h\|_{L_0^\alpha(\Omega_h)} &\leq \beta' \sup_{(\mathbf{v}_h, v_{3h}) \in (Q_h \cap H_0^1(\Omega_h))^3 - \{0\}} \frac{(\nabla \cdot (\mathbf{v}_h, v_{3h}), r_h)_\Omega}{\|(\mathbf{v}_h, v_{3h})\|_{1,\alpha',\Omega_h}} \\ &\quad + \beta' \left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla r_h\|_{0,K}^2 \right]^{1/2}, \quad \forall r_h \in Q_h \cap L_0^\alpha(\Omega_h), \end{aligned} \quad (2.14)$$

con $\beta' > 0$ independiente de h .

En efecto, consideremos el espacio

$$\widehat{M}_h = \{ \widehat{q}_h : \Omega \mapsto \mathbf{R}, \widehat{q}_h(\mathbf{x}, z) = q_h(\mathbf{x}), \text{ para algún } q_h \in M_h^1 \}.$$

Sea $q_h(\mathbf{x}, y) \in M_h^1$. Consideremos \widehat{q}_h . Es obvio que $\widehat{q}_h \in Q_h \cap L_0^\alpha(\Omega_h)$ y $\|\widehat{q}_h\|_{L_0^\alpha(\Omega_h)} = \|q_h\|_{L_{D,0}^\alpha(\omega_h)}$. También, si $(\mathbf{v}_h, v_{3h}) \in (Q_h \cap H_0^1(\Omega_h))^3$,

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot (\mathbf{v}_h, v_{3h}), q_h)_{\Omega_h} &= (\nabla_H \cdot \mathbf{v}_h, q_h)_{\Omega_h} - (v_{3h}, \partial_z q_h)_{\Omega_h} = (\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle, q_h)_{\omega_h}, \\ |\mathbf{v}_h|_{1,\alpha',\Omega_h} &\leq |(\mathbf{v}_h, v_{3h})|_{1,\alpha',\Omega_h}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\sup_{(\mathbf{v}_h, v_{3h}) \in (Q_h \cap H_0^1(\Omega_h))^3 - \{0\}} \frac{(\nabla \cdot (\mathbf{v}_h, v_{3h}), q_h)_{\Omega_h}}{|(\mathbf{v}_h, v_{3h})|_{1,\alpha',\Omega_h}} \leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^1 - \{0\}} \frac{(\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle, q_h)_{\omega_h}}{|\mathbf{v}_h|_{1,\alpha',\Omega_h}}.$$

Más aún, puesto que la familia \mathcal{T}_h se supone regular,

$$0 < \chi \leq \frac{\rho_K}{h_K} \leq \frac{h_T}{h_K}$$

(véase la Figura .1 para una ilustración bidimensional de estos parámetros geométricos).

Por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \chi^{-2} h_T^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \\ &= \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \chi^{-2} h_T^2 |\nabla q_h|^2 \int_T \left(\int_{-D_h(\mathbf{x})}^0 dz \right) d\mathbf{x} \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \chi^{-2} \alpha_1^{-1} \frac{\tau_T}{\int_T D_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} |T| \|\nabla_H q_h\|^2 \int_T D_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{de (2.10)}) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \chi^{-2} \alpha_1^{-1} \tau_T |T| \|\nabla_H q_h\|^2 \\ &= \chi^{-2} \alpha_1^{-1} \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \tau_T \|\nabla_H q_h\|_{0,T}^2 \\ &= \chi^{-2} \alpha_1^{-1} \mathbf{S}_{2h}(\mathcal{R}_{2h}(\nabla_H q_h), \mathcal{R}_{2h}(\nabla_H q_h)). \quad (\text{de (2.11)}) \end{aligned}$$

Ahora, denotando $\beta = \beta' \max \{1, \chi^{-1} \alpha_1^{-1/2}\}$, (2.13) sigue de (2.14).

Para probar (2.14), sea $r_h \in Q_h \cap L_0^\alpha(\Omega_h)$. Gracias a que $\partial\Omega_h$ es Lipschitz, la condición inf-sup continua en norma $L^\alpha(\Omega_h)$ se satisface (Cf. Amrouche and Girault [2]) : Existe $C_1(\alpha, \Omega_h)$ tal que

$$\|q\|_{L_0^{\alpha}(\Omega_h)} \leq C_1 \sup_{(\mathbf{v}, v_3) \in [W_0^{1, \alpha'}(\Omega_h)]^3 - \{0\}} \frac{(\nabla \cdot (\mathbf{v}, v_3), q)_{\Omega_h}}{|(\mathbf{v}, v_3)|_{1, \alpha', \Omega_h}}, \quad \forall q \in L_0^{\alpha}(\Omega_h). \quad (2.15)$$

Puesto que $[\mathcal{D}(\Omega_h)]^3$ es denso en $[W_0^{1, \alpha'}(\Omega_h)]^3$, existe $(\mathbf{v}_{0h}, v_{30h}) \in [\mathcal{D}(\Omega_h)]^3$ tal que

$$\frac{1}{2} \|q_h\|_{L_0^{\alpha}(\Omega_h)} \leq C_1 (\nabla \cdot (\mathbf{v}_{0h}, v_{30h}), q_h)_{\Omega_h}, \quad |(\mathbf{v}_{0h}, v_{30h})|_{1, \alpha', \Omega_h} = 1.$$

Por la Proposición 1.5, existe un interpolado $(\overline{\mathbf{v}_{0h}}, \overline{v_{30h}}) \in (Q_h \cap H_0^1(\Omega_h))^3$ tal que

$$|(\overline{\mathbf{v}_{0h}}, \overline{v_{30h}})|_{1, \alpha', \Omega_h} \leq C_2 |(\mathbf{v}_{0h}, v_{30h})|_{1, \alpha', \Omega_h}; \quad (2.16)$$

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{-2} \|(\overline{\mathbf{v}_{0h}}, \overline{v_{30h}}) - (\mathbf{v}_{0h}, v_{30h})\|_{0, K}^2 \right)^{1/2} \leq C_2 |(\mathbf{v}_{0h}, v_{30h})|_{1, \Omega_h}; \quad (2.17)$$

con $C_2 > 0$ independiente de h . Entonces, puesto que q_h es continua,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|q_h\|_{L_0^{\alpha}(\Omega_h)} &\leq C_1 (\nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}_{0h}}, \overline{v_{30h}}), q_h)_{\Omega_h} + C_1 ((\overline{\mathbf{v}_{0h}}, \overline{v_{30h}}) - (\mathbf{v}_{0h}, v_{30h}), \nabla q_h)_{\Omega_h} \\ &\leq C_1 C_2 \frac{|(\nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}_{0h}}, \overline{v_{30h}}), q_h)_{\Omega_h}|}{|(\overline{\mathbf{v}_{0h}}, \overline{v_{30h}})|_{1, \alpha', \Omega_h}} + \\ &\quad + C_1 \left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{-2} \|(\overline{\mathbf{v}_{0h}}, \overline{v_{30h}}) - (\mathbf{v}_{0h}, v_{30h})\|_{0, K}^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0, K}^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Puesto que $\alpha' \geq 2$, (2.17) implica

$$\left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{-2} \|(\overline{\mathbf{v}_{0h}}, \overline{v_{30h}}) - (\mathbf{v}_{0h}, v_{30h})\|_{0, K}^2 \right]^{1/2} \leq C_3 |(\mathbf{v}_{0h}, v_{30h})|_{1, \alpha', \Omega_h} = C_3.$$

Finalmente, (2.14) sigue con $\beta' = \max\{C_1 C_2, C_1 C_3\}$.

Notemos por último que las mismas consideraciones del Teorema 1.8 respecto a la dependencia de la constante β' respecto de h son válidas en este caso: la constante $C_1(\alpha, \Omega_h)$ de la condición inf-sup continua en Ω_h permanece uniformemente acotada en h , mientras que C_2 sólo depende del elemento de referencia de la familia \mathcal{T}_h y de la constante χ . De modo que se puede suponer β' , y por tanto β , independiente de h . ■

Etapa 4.- Existencia de solución del problema (2.8).

Puesto que (2.8) es equivalente a un sistema lineal con $\dim(\mathbf{V}_h^1) + \dim(M_h^1)$ ecuaciones e incógnitas, la existencia de soluciones sigue de su unicidad. Supongamos que (2.8) tiene

solución $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h^1 \times M_h^1$ y estimémosla en términos de la norma del segundo miembro.

Acotación de la velocidad.

Denotemos

$$\mathbf{c}_h = \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h) D_h), \quad \mathbf{d}_h = \mathcal{R}_{2h}(\nabla_H p_h). \quad (2.18)$$

Tomemos $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$ y $q_h = -p_h$ en (2.12) como funciones test:

$$\mathbf{B}_{TT}(\mathbf{w}_h; (\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{u}_h, -p_h)) = \mathbf{B}(\widetilde{\mathbf{w}}_h; (\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{p}_h), (\widetilde{\mathbf{u}}_h, -\widetilde{p}_h)) + \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_h, \mathbf{d}_h) + \mathbf{S}_{1h}(\mathbf{c}_h, \mathbf{c}_h).$$

De

$$\langle (\widetilde{\mathbf{W}}_h \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{\mathbf{u}}_h \rangle = 0; \quad \nu |\widetilde{\mathbf{u}}_h|_{1,\Omega}^2 \leq (\nabla_\nu \widetilde{\mathbf{u}}_h, \nabla_\nu \widetilde{\mathbf{u}}_h)_\Omega; \quad f(\widetilde{\mathbf{u}}_h^\perp, \widetilde{\mathbf{u}}_h)_\Omega = 0;$$

sigue la coercitividad de \mathbf{B} :

$$\nu |\widetilde{\mathbf{u}}_h|_{1,\Omega}^2 \leq \mathbf{B}(\widetilde{\mathbf{w}}_h; (\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{p}_h), (\widetilde{\mathbf{u}}_h, -\widetilde{p}_h)).$$

Luego

$$\nu |\widetilde{\mathbf{u}}_h|_{1,\Omega}^2 + \mathbf{S}_{1h}(\mathbf{c}_h, \mathbf{c}_h) + \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_h, \mathbf{d}_h) \leq \langle \mathbf{l}, \widetilde{\mathbf{u}}_h \rangle \leq \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega} |\widetilde{\mathbf{u}}_h|_{1,\Omega}. \quad (2.19)$$

Por ser las formas \mathbf{S}_{ih} coercitivas, con constantes ν_{is} ,

$$\begin{aligned} |\widetilde{\mathbf{u}}_h|_{1,\Omega} &\leq \nu^{-1} \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega}, \\ \nu_{1s} |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega_h}^2 &\leq \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega} |\widetilde{\mathbf{u}}_h|_{1,\Omega} \leq \nu^{-1} \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega}^2, \\ \nu_{2s} |\mathbf{d}_h|_{1,\Omega_h}^2 &\leq \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega} |\widetilde{\mathbf{u}}_h|_{1,\Omega} \leq \nu^{-1} \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Acotación de la presión.

Usaremos (2.13) para obtener una estimación uniforme de p_h . Para aligerar la notación, denotemos:

$$T_1 = \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^1 - \{0\}} \frac{(\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle, p_h)_{\omega_h}}{|\mathbf{v}_h|_{1,3,\Omega_h}} \quad T_2 = \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_h, \mathbf{d}_h).$$

Gracias a (2.13), basta con estimar T_1 y T_2 separadamente. T_2 está acotado por (2.19) y (2.20):

$$|T_2| \leq \nu^{-1} \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega}^2. \quad (2.21)$$

La cota de T_1 sigue de

$$\begin{aligned} (\widetilde{p}_h, \nabla_H \cdot \langle \widetilde{\mathbf{v}}_h \rangle)_\omega &= -\mathbf{B}_{TT}(\mathbf{w}_h; \mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{v}_h, 0) + \langle \mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{\mathbf{v}}_h \rangle \\ &\quad + \mathbf{S}_{1h}(\mathbf{c}_h, \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h) D_h)) \\ &= -\langle \mathbf{1}, \widetilde{\mathbf{v}}_h \rangle + \langle \mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{\mathbf{v}}_h \rangle + \mathbf{S}_{1h}(\mathbf{c}_h, \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h) D_h)). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Estimamos los dos primeros términos del segundo miembro de (2.22) usando (1.20):

$$-\langle \mathbf{1}, \widetilde{\mathbf{v}}_h \rangle + \langle \mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{\mathbf{v}}_h \rangle \leq C(\Omega, \nu, f) [(|\widetilde{\mathbf{w}}_h|_{1,\Omega} + 1)|\widetilde{\mathbf{u}}_h|_{1,\Omega} + \|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega}] |\widetilde{\mathbf{v}}_h|_{1,3,\Omega}. \quad (2.23)$$

En cuanto al término de estabilización de la convección:

$$\begin{aligned} |\mathbf{S}_{1h}(\mathbf{c}_h, \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h) D_h))| &= \langle (\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h) D_h, \mathbf{c}_h \rangle_{\Omega_h} \\ &\leq C(\Omega) \|D_h\|_{\infty, \omega_h} (\|\widetilde{\mathbf{w}}_h\|_{0,4,\Omega} \|\nabla_H \widetilde{\mathbf{v}}_h\|_{0,\Omega} \|\widetilde{\mathbf{c}}_h\|_{0,4,\Omega} \\ &\quad + \|\widetilde{w}_{3h}\|_{0,\Omega} \|\nabla_H \widetilde{\mathbf{v}}_h\|_{0,3,\Omega} \|\widetilde{\mathbf{c}}_h\|_{0,6,\Omega}) \\ &\leq C(\Omega) \|D\|_{\infty, \omega} |\widetilde{\mathbf{w}}_h|_{1,\Omega} |\widetilde{\mathbf{c}}_h|_{1,\Omega} |\widetilde{\mathbf{v}}_h|_{1,3,\Omega}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ahora, combinando (2.22), (2.23) y (4.16),

$$(\widetilde{p}_h, \nabla_H \cdot \langle \widetilde{\mathbf{v}}_h \rangle)_\omega \leq C(\Omega, \nu, f) [|\widetilde{\mathbf{w}}_h|_{1,\Omega} (|\widetilde{\mathbf{u}}_h|_{1,\Omega} + |\widetilde{\mathbf{c}}_h|_{1,\Omega}) + \|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega}] |\widetilde{\mathbf{v}}_h|_{1,3,\Omega}. \quad (2.25)$$

Finalmente, usando esta vez (2.13), (2.20) y (2.25), se sigue:

$$\|\widetilde{p}_h\|_{L^3_{D,0}(\omega)} \leq C(|\widetilde{\mathbf{w}}_h|_{1,\Omega} + 1) \|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega}, \quad (2.26)$$

siendo C una constante independiente de h .

Se deduce entonces que existe una única solución del Problema (2.8), que verifica:

$$|\widetilde{\mathbf{u}}_h|_{1,\Omega} \leq \underline{\nu}^{-1} \|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega}; \quad \|\widetilde{p}_h\|_{L^3_{D,0}(\omega)} \leq C(|\widetilde{\mathbf{w}}_h|_{1,\Omega} + 1) \|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega}. \quad (2.27)$$

Etapas 5 : Existencia de solución de (2.2)

Definamos la aplicación $\mathcal{F} : V_h \rightarrow V_h$, que lleva cada $\mathbf{w}_h \in V_h$ sobre \mathbf{u}_h , la solución del Problema (2.8). Las estimaciones (2.27) y la unicidad de soluciones de (2.8) permiten probar la continuidad de \mathcal{F} . Basta para ello proceder como en la demostración del Teorema 2.1.

Las mismas estimaciones muestran también que \mathcal{F} lleva $B_{V_h}(0, \underline{\nu}^{-1} \|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega})$ en un subconjunto propio. Por tanto, el Teorema de Brouwer da la existencia de al menos un punto fijo, solución de (2.2), verificando:

$$\begin{aligned}
|\widetilde{\mathbf{u}}_h|_{1,\Omega} &\leq \underline{\nu}^{-1} \|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega}; \\
|\mathbf{c}_h|_{1,\Omega_h} &\leq (\nu_{1s}\underline{\nu})^{-1/2} \|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega}; \\
|\mathbf{d}_h|_{1,\Omega_h} &\leq (\nu_{2s}\underline{\nu})^{-1/2} \|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega}; \\
\|\widetilde{\mathbf{p}}_h\|_{L^2_{D,0}(\omega)} &\leq C(\underline{\nu}^{-1} \|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega} + 1) \|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Etapa 6 : Conclusión.

Gracias a (2.28), la sucesión $\{(\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{\mathbf{p}}_h)\}_{h>0}$ está uniformemente acotada en $\mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L^2_{D,0}(\omega)$, un espacio reflexivo. Luego existe una subsucesión, que denotamos de la misma forma, débilmente convergente en $\mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L^2_{D,0}(\omega)$ a un par (\mathbf{u}, p) . Veamos que este par es solución del Problema (1.18).

Tomemos $q \in L^2_{D,0}(\omega)$ y $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_b^{1,4}(\Omega)$. Consideremos dos sucesiones $\{q_h\}_{h>0}$ y $\{\mathbf{v}_h\}_{h>0}$ en las condiciones de las hipótesis H1) y H2). Entonces

$$\nabla \widetilde{\mathbf{v}}_h \rightarrow \nabla \mathbf{v} \text{ in } [\mathbf{L}^4(\Omega)]^3; \quad \widetilde{\mathbf{u}}_h \rightarrow \mathbf{u} \text{ in } \mathbf{L}^4(\Omega); \quad \mathbf{U}_h \rightarrow \mathbf{U} \text{ débil en } [\mathbf{L}^2(\Omega)]^3,$$

lo que implica

$$\langle (\widetilde{\mathbf{U}}_h \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{\mathbf{v}}_h \rangle \rightarrow \langle (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Para pasar al límite en los términos estabilizantes, necesitamos la siguiente propiedad de los espacios de Elementos Finitos Burbuja:

Lema 2.4 *Supongamos que se cumplen la hipótesis H3). Consideremos una familia $\{Z_h\}_{h>0}$ de Elementos Finitos Burbuja contenida en $H_0^1(\Omega_h)$, generada por un espacio de referencia Z^* . Entonces, se verifica.*

i) Para todo $q \in [2, 6]$, existe una constante $C_q > 0$ tal que

$$\|z_h\|_{0,q} \leq C_q h^\beta |z_h|_{1,\Omega_h}, \quad \forall z_h \in Z_h; \quad \text{donde } \frac{\beta}{2} + \frac{1-\beta}{6} = \frac{1}{q}. \tag{2.29}$$

ii) Si una sucesión $\{\widetilde{z}_h\}_{h>0}$, con $z_h \in Z_h$, $\forall h > 0$, permanece acotada en $H_0^1(\Omega_h)$, entonces converge a 0 débil en $H_0^1(\Omega_h)$.

Este Lema se prueba en el Apéndice A. Lo usamos en la acotación:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{S}_{1h}(\mathbf{c}_h, \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{U}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h) D_h))| &= |\langle (\mathbf{U}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h) D_h, \mathbf{c}_h \rangle_{H^{-1}-H_0^1}| \\
&= \left| \int_{\Omega_h} (\mathbf{U}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{c}_h D_h \, dx \, dx_3 \right| \\
&\leq C_3 \|D\|_{\infty,\omega} (\|\widetilde{\mathbf{u}}_h\|_{L^4(\Omega)} |\widetilde{\mathbf{v}}_h|_{1,\Omega} \|\widetilde{\mathbf{c}}_h\|_{L^4(\Omega)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \|\widetilde{u}_{3h}\|_{0,\Omega} \|\partial_3 \widetilde{v}_h\|_{L^4(\Omega)} \|\widetilde{c}_h\|_{L^4(\Omega)} \\
 \leq & C_4 \|D\|_{\infty,\omega} |\widetilde{u}_h|_{1,\Omega} |\widetilde{v}_h|_{1,4;\Omega} \|\widetilde{c}_h\|_{L^4(\Omega)} \\
 \leq & C_5 \|D\|_{\infty,\omega} |\widetilde{u}_h|_{1,\Omega} |\widetilde{v}_h|_{1,4;\Omega} |\widetilde{c}_h|_{1;\Omega} h^{1/4} \quad ((2.29) \text{ con } q = 4) \\
 \leq & C_6 \|D\|_{\infty,\omega} |\widetilde{v}_h|_{1,4;\Omega} \|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega}^2 h^{1/4} \quad (\text{gracias a (2.28)}).
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{S}_{1h}(\mathbf{c}_h, \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{U}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h)D_h)) = 0.$$

Por otro lado, gracias a (2.28) la sucesión $\{\widetilde{\mathbf{d}}_h\}_{h>0}$ está acotada en $\mathbf{H}_0^1(\omega)$. por tanto converge débilmente a 0 en dicho espacio. Así,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{S}_{2h}(\mathcal{R}_{2h}(\nabla_H q_h), \mathbf{d}_h) = \lim_{h \rightarrow 0} (-\widetilde{q}_h, \nabla_H \cdot \widetilde{\mathbf{d}}_h)_\omega = 0.$$

Para terminar la prueba, combinamos la semicontinuidad débil de la norma en espacios de Banach reflexivos con las estimaciones (2.28), obteniendo (3.11)-(2.6). Además, por reducción al absurdo, si la solución de (1.18) es única, la sucesión completa $\{\widetilde{u}_h, \widetilde{p}_h\}_{h>0}$ debe converger a ella. ■

Nota.- En el apartado *Acotación de la velocidad* se obtuvieron las estimaciones (2.20), de entre las que destacamos:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega_h} & \leq (\nu_{1s}\underline{\nu})^{-1/2} \|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega}, \\
 |\mathbf{d}_h|_{1,\Omega_h} & \leq (\nu_{2s}\underline{\nu})^{-1/2} \|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega}.
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Como vimos en el apartado *Acotación de la presión*, la estimación de \mathbf{d}_h se usa para estabilizar la presión a través de la desigualdad (2.13).

Por otro lado, la estimación de \mathbf{c}_h pone de manifiesto cierta estabilización de la derivada convectiva. Damos a continuación una interpretación de este mecanismo.

Es bien conocido que, en caso de convección dominante, las velocidades proporcionadas por el método de Galerkin estándar pierden la estabilidad H^1 . El *síntoma* es la aparición de oscilaciones de pequeña amplitud, del orden del paso de malla. Dichas oscilaciones desaparecen para mallas suficientemente finas, lo que puede ser inabordable para altos números de Reynolds.

Un principio heurístico entre los investigadores en este campo es que estas oscilaciones espúreas se deben a una *acumulación de energía* a nivel de las escalas más pequeñas de la malla. En otras palabras, cuando la malla no es suficientemente fina, la viscosidad inicial del problema ν no puede disipar toda la energía, y el flujo produce *altas frecuencias* (oscilaciones de corta amplitud) que se acumulan a pequeña escala. Esta acumulación de energía se trata de contrarrestar en el método (2.2) con el término

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K (\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h)(\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h) D_h \, dx \, dz,$$

que es, al fin y al cabo, un término difusivo. Estamos intentando pues añadir disipación artificial a las escalas más pequeñas de la malla.

En nuestro caso, el espacio de altas frecuencias de la solución numérica viene representado por el espacio de burbujas \mathbf{Z}_{1h} . Esto es coherente con lo antes expuesto; ya que las burbujas elementales se anulan en las interfases de los prismas, una función de \mathbf{Z}_{1h} varía rápidamente de nodo a nodo. El condensado \mathbf{c}_h representa la componente de alta frecuencia de la derivada convectiva. A igualdad de mallas, la estimación de $|\mathbf{c}_h|_{1,\Omega_h}$ significa que obtenemos un control *extra* sobre las altas frecuencias de la derivada convectiva que no se obtiene, a priori, en el Método de Galerkin usual. Este control lo proporciona la adición de viscosidad numérica que antes citamos.

Para una explotación numérica de estas ideas remitimos a [28], donde se elabora un proceso de *filtrado* a posteriori de altas frecuencias. ■

2.4 Regularidad aumentada para la presión.

Cuando Ω presenta un talud lateral, es posible probar una condición inf-sup discreta con mayor regularidad para la presión. Para ello, introduzcamos los espacios auxiliares:

$$Y_h = \left\{ \mathbf{y}_h \in [C^0(\bar{\omega}_h)]^2 \text{ tales que } \forall T \in C_h, \mathbf{y}_h|_T \in [\mathbb{P}_1(T)]^2, \mathbf{y}_h|_{\partial\omega_h} = 0 \right\},$$

$$Y_{h,D_h} = \{ \mathbf{y}_h(\mathbf{x}) D_h(\mathbf{x}); \mathbf{y}_h \in Y_h \}, \quad \langle \mathbf{V}_h^1 \rangle = \{ \langle \mathbf{v}_h \rangle(\mathbf{x}); \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^1 \}.$$

Probemos algunas propiedades relevantes de estos espacios:

Proposición 2.5 *Se tienen las siguientes propiedades:*

i) $\langle \mathbf{V}_h^1 \rangle = Y_{h,D_h}$

ii) *Sea $2 < \alpha' \leq 3$. Si existe d_0 tal que $d_h = \min_{\mathbf{x} \in \bar{\omega}_h} D_h \geq d_0$ cuando $h \rightarrow 0^+$, entonces existe una constante C_0 tal que*

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^1 - \{0\}} \frac{(\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle, q_h)_{\omega_h}}{|\mathbf{v}_h|_{1,\Omega_h}} \leq C_0 \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h^1 - \{0\}} \frac{(\nabla_H \cdot \langle \mathbf{w}_h \rangle, q_h)_{\omega_h}}{\|\nabla_H \mathbf{w}_h\|_{0,\Omega_h} + \|\partial_z \mathbf{w}_h\|_{0,\alpha',\Omega_h}}, \forall q_h \in M_h^1 \quad (2.31)$$

Demostración.-

i) Consideremos $\mathbf{y}_h \in Y_h$ y $\mathbf{v}_h = \mathbf{y}_h a$, donde $a(\mathbf{x}, z) = 2(z + D_h(\mathbf{x}))/D_h(\mathbf{x})$. Así definido, $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^1$. En efecto, es obvio que $\mathbf{v}_h \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathbf{H}_b^1(\Omega)$. Además $\mathbf{v}_h|_K \in R_{1,1}(K)$ puesto que

$$\mathbf{v}_h|_K = \left(\mathbf{y}_h(\mathbf{x}) 2 \frac{z + D_h(\mathbf{x})}{D_h(\mathbf{x})} \right) \Big|_K = 2 \mathbf{y}_h(\mathbf{x})|_T \frac{z + D_h(\mathbf{x})}{D_h(\mathbf{x})} \Big|_{T \times I_k},$$

con $I_k = [-\frac{k}{l} D_h(\mathbf{x}), -\frac{k-1}{l} D_h(\mathbf{x})]$.

Obsérvese que existen unos únicos coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$2 \frac{z + D_h(\mathbf{x})}{D_h(\mathbf{x})} = a\sigma_k(\mathbf{x}, z) + b(1 - \sigma_k(\mathbf{x}, z)).$$

Basta para ello desarrollar la anterior expresión, llegando a un sistema 2×2 compatible determinado. Se tiene entonces por la definición (1.22) que $\mathbf{v}_h|_K \in R_{1,1}(K)$.

Es fácil comprobar que $\langle \mathbf{v}_h \rangle = \mathbf{y}_h D_h \in Y_{h,D_h}$. Esto proporciona $Y_{h,D_h} \subset \langle \mathbf{V}_h^1 \rangle$.

Consideremos ahora $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^1$ y $\mathbf{x} \in T \in \mathcal{C}_h$. Entonces

$$\langle \mathbf{v}_h \rangle(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^l \int_{I_k} \mathbf{v}_h dz.$$

Para $i = 1, 2$:

$$\int_{I_k} v_{ih}(\mathbf{x}) dz = \sum_{n=1}^2 p_n(\mathbf{x}) \int_{I_k} \zeta_n(\sigma(\mathbf{x}, z)) dz, \quad \text{para algún } p_n \in \mathbb{P}_1(T), n = 1, 2.$$

Puesto que $\int_{I_k} \zeta_n(\sigma(\mathbf{x}, z)) dz = D_h(\mathbf{x})/(2l)$, se sigue

$$\int_{I_k} v_{ih}(\mathbf{x}) dz = p_k(\mathbf{x}) D_h(\mathbf{x})$$

para cierto $p_k \in \mathbb{P}_1(T)$. Sumando a lo largo de las capas verticales $\langle \mathbf{v}_h \rangle \in Y_{h,D_h}$, luego $\langle \mathbf{V}_h^1 \rangle \subset Y_{h,D_h}$.

ii) Tomemos $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^1$ y denotemos

$$\mathbf{w}_h(\mathbf{x}, z) = \langle \mathbf{v}_h \rangle(\mathbf{x}) a(\mathbf{x}, z) / D_h(\mathbf{x}).$$

Entonces $\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h^1$ y $\langle \mathbf{v}_h \rangle = \langle \mathbf{w}_h \rangle$. Más aún, si se calculan separadamente las integrales verticales y horizontales, resulta:

$$\begin{aligned} \|\nabla_H \mathbf{w}_h\|_{L^2(\Omega_h)}^2 &\leq C_1 \left[\int_{\omega_h} |\nabla_H \langle \mathbf{v}_h \rangle|^2 D_h^{-1} + \int_{\omega_h} |\langle \mathbf{v}_h \rangle|^2 |\nabla_H D_h|^2 D_h^{-3} \right] \\ &\leq C_1 \left[d_h^{-1} \|\nabla_H \langle \mathbf{v}_h \rangle\|_{L^2(\omega_h)}^2 + \right. \\ &\quad \left. d_h^{-3} \|\nabla_H D_h\|_{L^\infty(\omega_h)}^2 \|\langle \mathbf{v}_h \rangle\|_{L^2(\omega_h)}^2 \right]; \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\|\partial_z \mathbf{w}_h\|_{L^{\alpha'}(\Omega_h)}^{\alpha'} = \int_{\omega} |\langle \mathbf{v}_h \rangle|^{\alpha'} D_h^{-2\alpha'-1} \leq d_h^{-2\alpha'-1} \|\langle \mathbf{v}_h \rangle\|_{L^{\alpha'}(\omega_h)}^{\alpha'}; \tag{2.33}$$

donde C_1 es una constante numérica. Gracias a la desigualdad (Cf. Brézis [14]):

$$\|\langle \mathbf{v}_h \rangle\|_{L^{\alpha'}(\Omega_h)} \leq C_2(\alpha', \omega_h) \|\langle \mathbf{v}_h \rangle\|_{1, \omega_h},$$

se deduce de (2.32), (2.33):

$$\|\nabla_H \mathbf{w}_h\|_{0,\Omega_h} + \|\partial_z \mathbf{w}_h\|_{L^{\alpha'}(\Omega_h)} \leq C_3 |\langle \mathbf{v}_h \rangle|_{1,\omega_h},$$

donde $C_3 = C_1^{1/2}(d_h^{-1/2} + d_h^{-3/2}|D_h|_{1,\infty,\Omega_h}) + C_2 d_h^{\frac{-1-2\alpha'}{\alpha'}}$. Si $d_h \geq d_0 > 0$ entonces C_3 está acotada independiente de h . Si $d_h \rightarrow 0$, entonces $C_3 = O(d_h^{\frac{-1-2\alpha'}{\alpha'}})$.

Además, del apartado *i*) del Lema 1.3,

$$|\langle \mathbf{v}_h \rangle|_{1,\omega} \leq \|D_h\|_{L^\infty(\omega)}^{1/2} |\mathbf{v}_h|_{1,\Omega}.$$

Por tanto,

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^1 - \{0\}} \frac{(\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle, q_h)_{\omega_h}}{|\mathbf{v}_h|_{1,\Omega_h}} \leq C_4 \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h^1 - \{0\}} \frac{(\nabla_H \cdot \langle \mathbf{w}_h \rangle, q_h)_{\omega_h}}{\|\nabla_H \mathbf{w}_h\|_{0,\Omega_h} + \|\partial_z \mathbf{w}_h\|_{0,\alpha',\Omega_h}}, \quad (2.34)$$

con $C_4 = C_3 \|D_h\|_{L^\infty(\omega_h)}^{1/2}$.

Finalmente, por construcción $\|D_h\|_{L^\infty(\omega_h)}^{1/2}$ está acotada en h y $C_4 \leq C_0 < +\infty$ cuando $d_h \geq d_0$. ■

El resultado anterior permite obtener mayor regularidad de la presión en el

Teorema 2.6 *Supongamos que Ω tiene talud, en el sentido de que $D \geq d_0 > 0$. Entonces, existe al menos una subsucesión $\{\tilde{\mathbf{u}}_h, p_h\}_{h>0}$ de soluciones del Problema (1.27) débilmente convergente en $\mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L_0^2(\omega)$ a una solución del Problema (1.18), satisfaciendo las cotas*

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leq C \nu^{-1} \|\mathbf{I}\|_{-1,\Omega}, \quad (2.35)$$

$$\|p_s\|_{L_0^2(\omega)} \leq C(\nu^{-1} \|\mathbf{I}\|_{-1,\Omega} + 1) \|\mathbf{I}\|_{-1,\Omega}. \quad (2.36)$$

Demostración.-

Tomemos $\alpha = \alpha' = 2$ en (2.13) y usemos (2.31). Resulta:

$$\begin{aligned} \|p_h\|_{L_{D,0}^2(\omega_h)} &\leq C_0 \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h^1 - \{0\}} \frac{(\nabla_H \cdot \langle \mathbf{w}_h \rangle, p_h)_{\omega_h}}{\|\nabla_H \mathbf{w}_h\|_{0,\Omega_h} + \|\partial_z \mathbf{w}_h\|_{0,3,\Omega_h}} \\ &\quad + [\mathbf{S}_{2h}(\mathcal{R}_{2h}(\nabla_H p_h), \mathcal{R}_{2h}(\nabla_H p_h))]^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Esto ocurre porque $\min_{\bar{\omega}_h} D_h \geq \min_{\bar{\omega}} D \geq d_0 > 0$. La cota $D \geq d_0 > 0$ también implica

$$\|p_h\|_{L_0^2(\omega)} \leq C_1 \|p_h\|_{L_{D,0}^2(\omega)}$$

para alguna constante C_1 independiente de h . Entonces, la sucesión $\{p_h\}_{h>0}$ pertenece a $L^2_0(\omega)$, así como cualquier límite de posibles subsucesiones convergentes. Las estimaciones (2.35) siguen de manera análoga al Teorema 2.1. En este caso deberemos usar las estimaciones (más finas que (1.20)-(1.21)):

$$|\langle \mathcal{A}_w \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq C(\Omega, \nu, f)(\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} + 1)|\mathbf{u}|_{1,\Omega}(\|\nabla_H \mathbf{v}\|_{0,\Omega_h} + \|\partial_z \mathbf{v}\|_{0,3,\Omega_h}), \quad (2.38)$$

$$|\langle \mathcal{A}_w^* \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq C(\Omega, \nu, f)(\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} + 1)|\mathbf{u}|_{1,\Omega}(\|\nabla_H \mathbf{v}\|_{0,\Omega_h} + \|\partial_z \mathbf{v}\|_{0,3,\Omega_h}); \quad (2.39)$$

para cualesquier $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_b^1(\Omega)$, $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_b^1(\Omega)$, $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_b^{1,3}(\Omega)$. ■

Nótese que cuando Ω carece de talud, las estimaciones anteriores explotan cuando $h \rightarrow 0^+$, y no se puede deducir convergencia alguna en $L^2(\omega)$ para la presión.

2.5 Estimaciones de error.

En esta sección probamos estimaciones de error en el caso lineal. Supongamos dada una velocidad de convección $\mathbf{w} \in \mathbf{W}_b^{1,6}(\Omega)$. A nuestro entender, esta es la menor regularidad requerida para obtener estimaciones de error óptimas en términos de h .

Buscamos $(\mathbf{u}, p_s) \in \mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L^2_{D,0}(\omega)$ tal que,

$$\mathbf{B}(\mathbf{w}; (\mathbf{u}, p_s), (\mathbf{v}, q_s)) = \langle \mathbf{1}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall (\mathbf{v}, q_s) \in \mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L^2_{D,0}(\omega). \quad (2.40)$$

Notemos que el aumento de regularidad de \mathbf{W} permite tomar funciones test en $\mathbf{H}_b^1(\Omega)$. En este caso, el buen planteamiento del Problema (2.40) se prueba de forma estándar, usando la condición inf-sup (2.15) con $\alpha = \alpha' = 2$.

También reemplazamos en (2.2) la velocidad de convección \mathbf{U}_h en el término estabilizante por una aproximación de \mathbf{W} , digamos $\mathbf{W}_h = (\mathbf{w}_h, w_{3h}) \in \mathbf{V}_h^1 \times L^2(\Omega_h)$ satisfaciendo

$$\begin{aligned} w_{3h}(\mathbf{x}, z) &= \int_z^0 \nabla_H \cdot \mathbf{w}_h(\mathbf{x}, s) ds, \quad w_{3h}|_{\Gamma_s} = 0, \quad w_{3h} \cdot \mathbf{n}_3|_{\Gamma_b} = 0, \\ |\mathbf{w}_h|_{1,6,\Omega_h} &\leq \tilde{C} \|\mathbf{w}\|_{1,6,\Omega}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

para cierta constante $C > 0$ independiente de h . Por tanto, buscamos $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h^1 \times M_h^1$ tal que,

$$\mathbf{B}_{TT}(\mathbf{w}; (\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) = \langle \mathbf{1}, \tilde{\mathbf{v}}_h \rangle, \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h^1 \times M_h^1, \quad (2.42)$$

donde ahora denotamos

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{TT}(\mathbf{w}; (\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) &= \mathbf{B}(\mathbf{w}; (\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{p}_h), (\tilde{\mathbf{v}}_h, \tilde{q}_h)) + S_{2h}(\mathcal{R}_{2h}(\nabla_H p_h), \mathcal{R}_{2h}(\nabla_H q_h)) \\ &\quad + \mathbf{S}_{1h}(\mathcal{R}_{1h}((\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h) D_h), \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h) D_h)). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Las etapas 2, 3 y 4 de la demostración del Teorema 2.1 proporcionan la existencia y unicidad de solución de (2.42).

El resultado que demostramos en esta sección es el siguiente:

Teorema 2.7 *Supongamos que $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ y $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_s)$. Supongamos que existe solución $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_b^1(\Omega)$, $p_s \in H^1(\omega) \cap L_{D,0}^2(\omega)$ de (2.40).*

Entonces, existe $C > 0$ tal que

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|p_s - p_h\|_{L_{D,0}^2(\omega)} + |\mathbf{l}_h|_{1,\omega_h} \leq C h, \quad |\mathbf{z}_h|_{1,\Omega_h} \leq C h^{1/2},$$

donde

$$\mathbf{z}_h = \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h) D_h), \quad \mathbf{l}_h = \mathcal{R}_{2h}(\nabla_{HP} p_h).$$

Demostración.-

En aras de aligerar la notación, omitiremos el símbolo \sim usado hasta ahora para denotar la extensión de las funciones definidas en ω_h, Ω_h por cero a ω, Ω .

Etapas 1: Estimación del error de consistencia.

Definamos el error de consistencia como la forma lineal ϵ_h en $\mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L_{D,0}^2(\omega)$ dada por

$$\langle \epsilon_h, (\mathbf{v}, q) \rangle = \mathbf{B}_{TT}(\mathbf{w}; (\mathbf{u}, p_s); (\mathbf{v}, q)) - \langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle,$$

$$\forall (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L_{D,0}^2(\omega).$$

Entonces, como (\mathbf{u}, p_s) es solución de (2.40):

$$\langle \epsilon_h, (\mathbf{v}, q) \rangle = S_{2h}(\mathcal{R}_{2h}(\nabla_{HP} p_s), \mathcal{R}_{2h}(\nabla_{HQ} q)) + \mathbf{S}_{1h}(\mathcal{R}_{1h}((\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{u}) D_h), \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{v}) D_h)).$$

Denotemos $\mathbf{t}_h = \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{u}) D_h)$, $\mathbf{r}_h = \mathcal{R}_{2h}(\nabla_{HP} p_s)$. Usando (2.29) con $q = 3$,

$$\begin{aligned} |S_{1h}(\mathbf{t}_h, \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{v}) D_h))| &= \left| - \int_{\Omega_h} (\mathbf{W}_h \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_h D_h \right| \\ &\leq \|D_h\|_{\infty, \Omega} |\mathbf{w}_h|_{1,6,\Omega_h} |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \|\mathbf{t}_h\|_{L^3(\Omega_h)} \\ &\leq \|D\|_{\infty, \Omega} |\mathbf{w}_h|_{1,6,\Omega_h} |\mathbf{v}|_{1,\Omega} |\mathbf{t}_h|_{1,\Omega_h} h^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Eligiendo $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ en la expresión anterior se obtiene

$$\nu_{1s} |\mathbf{t}_h|_{1,\Omega_h} \leq \|D\|_{\infty, \Omega} |\mathbf{w}_h|_{1,6,\Omega_h} |\mathbf{u}|_{1,\Omega} h^{1/2}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} |S_{1h}(\mathbf{t}_h, \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{v}) D_h))| &\leq \|D\|_{\infty, \Omega}^2 \nu_{1s}^{-1} |\mathbf{w}_h|_{1,6,\Omega}^2 |\mathbf{u}|_{1,\Omega} |\mathbf{v}|_{1,\Omega} h \\ &\leq C(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \nu_{1s}, D) |\mathbf{v}|_{1,\Omega} h. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Si usamos ahora (2.29) con $q = 2$,

$$\begin{aligned} |S_{2h}(\mathbf{r}_h, \mathcal{R}_{2h}(\nabla_H q))| &= |(\nabla_H p_s, \mathcal{R}_{2h}(\nabla_H q))_{\omega_h}| \leq |p_s|_{1,\omega} \|\mathcal{R}_{2h}(\nabla_H q)\|_{0,\omega_h} \\ &\leq C |p_s|_{1,\omega} |\mathcal{R}_{2h}(\nabla_H q)|_{1,\omega_h} h \leq C' |p_s|_{1,\omega} \|\nabla_H q\|_{-1,\omega_h} h \leq C'' |p_s|_{1,\omega} \|q\|_{0,\omega} h. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Así

$$|\langle \epsilon_h(\mathbf{v}, q) \rangle| \leq C (\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} + \|q\|_{0,\omega}) h. \quad (2.47)$$

Etapa 2: Estimaciones de error para la velocidad.

Tomemos $\{\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{p}_h\}_{h \geq 0}$ tal que $\hat{\mathbf{u}}_h \in \mathbf{V}_h^1, \hat{p}_h \in M_h^1$ y:

$$\|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega} \leq C h, \quad \|p_s - \hat{p}_h\|_{L_0^2(\omega)} \leq C h. \quad (2.48)$$

La interpolación de la presión es posible gracias a los resultados de interpolación estándar para Elementos Finitos (Cf. Ciarlet [33]), y porque $p_s \in H^1(\omega)$.

Para la interpolación de la velocidad se razona siguiendo los argumentos de la Proposición 1.5, usando que $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_b^1(\Omega)$.

Dados $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^1, q_h \in M_h^1$, tenemos

$$\langle \epsilon_h, (\mathbf{v}_h, q_h) \rangle = \mathbf{B}_{TT}(\mathbf{w}; (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p_s - p_h); (\mathbf{v}_h, q_h)),$$

luego

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{TT}(\mathbf{w}; (\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h), (\hat{p}_h - p_h); \mathbf{v}_h, q_h) &= \langle \epsilon_h, (\mathbf{v}_h, q_h) \rangle + \\ &\mathbf{B}_{TT}(\mathbf{w}; (\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}), (\hat{p}_h - p_s); \mathbf{v}_h, q_h). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Sean

$$\mathbf{c}_h = \mathcal{R}_{1h}(\mathbf{W}_h \cdot \nabla(\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) D_h), \quad \mathbf{d}_h = \mathcal{R}_{2h}(\nabla_H(\hat{p}_h - p_h)).$$

Testamos (2.49) con $\mathbf{v}_h = \hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h, q_h = -(\hat{p}_h - p_h)$. Se sigue:

$$\begin{aligned} \nu |\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega}^2 + \mathbf{S}_{1h}(\mathbf{c}_h, \mathbf{c}_h) + \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_h, \mathbf{d}_h) &\leq \langle \epsilon_h, (\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h, -(\hat{p}_h - p_h)) \rangle \\ &+ \langle \mathbf{W} \cdot \nabla(\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}), \hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h \rangle \\ &+ (\nabla_{\nu}(\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}), \nabla_{\nu}(\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h)) \\ &- (\nabla_H \cdot \langle \hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}, -(\hat{p}_h - p_h) \rangle)_{\omega} \\ &- (\nabla_H \cdot \langle \hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h, \hat{p}_h - p_s \rangle)_{\omega} \\ &+ \mathbf{S}_{1h}(\mathcal{R}_{1h}(\mathbf{W}_h \cdot \nabla(\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) D_h), \mathbf{c}_h) \\ &+ \mathbf{S}_{2h}(\mathcal{R}_{2h}(\nabla_H(\hat{p}_h - p_s)), \mathbf{d}_h). \end{aligned}$$

Acotemos el segundo miembro de la anterior desigualdad:

$$\begin{aligned}
|\langle \epsilon_h, (\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h, -(\hat{p}_h - p_h)) \rangle| &\leq C (|\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|\hat{p}_h - p_h\|_{L_0^2(\omega)}) h; \\
|\langle \mathbf{W} \cdot \nabla(\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}), \hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h \rangle| &\leq C |\mathbf{W}|_{1,6,\Omega} |\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}|_{1,\Omega} |\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} \leq C |\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} h; \\
|\langle \nabla_{\mathcal{V}}(\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}), \nabla_{\mathcal{V}}(\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) \rangle| &\leq \bar{\nu} |\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}|_{1,\Omega} |\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} \leq C |\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} h; \\
|\langle \nabla_H \cdot \langle \hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u} \rangle, -(\hat{p}_h - p_h) \rangle_{\omega}| &\leq C |\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}|_{1,\Omega} \|\hat{p}_h - p_h\|_{L_0^2(\omega)} \leq C \|\hat{p}_h - p_h\|_{L_0^2(\omega)} h; \\
|\langle \nabla_H \cdot \langle \hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h \rangle, \hat{p}_h - p_s \rangle_{\omega}| &\leq C |\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} \|\hat{p}_h - p_s\|_{L_0^2(\omega)} \leq C |\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} h; \\
|\mathbf{S}_{1h}(\mathcal{R}_{1h}(\mathbf{W}_h \cdot \nabla(\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) D_h), \mathbf{c}_h)| &\leq |\langle \mathbf{W}_h \cdot \nabla(\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) D_h, \mathbf{c}_h \rangle| \\
&\leq C \|D\|_{\infty,\Omega} |\mathbf{w}_h|_{1,6,\Omega} |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega_h} |\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}|_{1,\Omega} \leq C |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega_h} h; \\
|\mathbf{S}_{2h}(\mathcal{R}_{2h}(\nabla_H(\hat{p}_h - p_s)), \mathbf{d}_h)| &\leq C |\mathcal{R}_{2h}(\nabla_H(\hat{p}_h - p_s))|_{1,\omega} |\mathbf{d}_h|_{1,\omega_h} \\
&\leq C \|\hat{p}_h - p_s\|_{0,\omega} |\mathbf{d}_h|_{1,\omega_h} \leq C |\mathbf{d}_h|_{1,\omega_h} h.
\end{aligned}$$

Esto proporciona

$$\begin{aligned}
\nu |\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega}^2 + \nu_{1s} |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega_h}^2 + \nu_{2s} |\mathbf{d}_h|_{1,\omega_h}^2 &\leq \\
C (|\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|\hat{p}_h - p_h\|_{0,\omega} + |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega_h} + |\mathbf{d}_h|_{1,\omega_h}) h. &\quad (2.50)
\end{aligned}$$

Etapas 3: Estimaciones de error para la presión.

Seguidamente, adaptamos los argumentos usados en el epígrafe **Acotación de la presión** de la demostración del Teorema 2.1 para acotar la norma $\|\hat{p}_h - p_h\|_{0,\omega}$. En primer lugar, observamos que

$$\begin{aligned}
(\hat{p}_h - p_h, \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle)_{\omega} &= -\mathbf{B}_{TT}(\mathbf{w}; (\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h, \hat{p}_h - p_h), (\mathbf{v}_h, 0)) + \langle \mathcal{A}_{\mathbf{w}}(\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h), \mathbf{v}_h \rangle \\
&\quad + \mathbf{S}_{1h}(\mathbf{c}_h, \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h) D_h)) \\
&= -\langle \epsilon_h, (\mathbf{v}_h, 0) \rangle - \mathbf{B}_{TT}(\mathbf{w}; (\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}, \hat{p}_h - p_s), (\mathbf{v}_h, 0)) \\
&\quad + \langle \mathcal{A}_{\mathbf{w}}(\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h), \mathbf{v}_h \rangle + \mathbf{S}_{1h}(\mathbf{c}_h, \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h) D_h)). \quad (2.51)
\end{aligned}$$

Ahora estimamos el segundo miembro de (2.51):

$$\begin{aligned}
|\langle \epsilon_h, (\mathbf{v}_h, 0) \rangle| &\leq C |\mathbf{v}_h|_{1,\Omega} h; \\
|\mathbf{B}_{TT}(\mathbf{w}; \hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}, \hat{p}_h - p_s, \mathbf{v}_h, 0)| &\leq C (|\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}|_{1,\Omega} + \|\hat{p}_h - p_s\|_{0,\omega}) |\mathbf{v}_h|_{1,\Omega} \\
&\leq C |\mathbf{v}_h|_{1,\Omega} h; \\
\langle \mathcal{A}_{\mathbf{w}}(\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h), \mathbf{v}_h \rangle &\leq C |\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} |\mathbf{v}_h|_{1,\Omega}; \\
\mathbf{S}_{1h}(\mathbf{c}_h, \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h) D_h)) &= \langle (\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h) D_h, \mathbf{c}_h \rangle \\
&\leq C \|D_h\|_{\infty,\omega} |\mathbf{w}_h|_{1,\Omega} |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega_h} |\mathbf{v}_h|_{1,\Omega} \\
&\leq C |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega_h} |\mathbf{v}_h|_{1,\Omega}.
\end{aligned}$$

Se sigue,

$$(\widehat{p}_h - p_h, \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle)_\omega \leq C (|\mathbf{c}_h|_{1,\Omega_h} + |\widehat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + h) |\mathbf{v}_h|_{1,\Omega}. \quad (2.52)$$

Seguidamente, usamos (2.13) con $\alpha = \alpha' = 2$, obteniendo:

$$\|\widehat{p}_h - p_h\|_{L^2_{D,0}(\omega_h)} \leq C \left[\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^1 - \{0\}} \frac{(\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle, \widehat{p}_h - p_h)_{\omega_h}}{|\mathbf{v}_h|_{1,\Omega_h}} + |\mathbf{d}_h|_{1,\omega_h} \right]. \quad (2.53)$$

Relacionando (2.52) y (2.53),

$$\|\widehat{p}_h - p_h\|_{L^2_{D,0}(\omega_h)} \leq C [|\widehat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega_h} + |\mathbf{d}_h|_{1,\omega_h} + h]. \quad (2.54)$$

Etapa 4: Conclusión.

Insertando la estimación (2.54) en el segundo miembro de (2.50),

$$\begin{aligned} \nu |\widehat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega}^2 + \nu_{1s} |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega_h}^2 + \nu_{2s} |\mathbf{d}_h|_{1,\omega_h}^2 \leq \\ C (|\widehat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega_h} + |\mathbf{d}_h|_{1,\omega_h} + h) h. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Consecuentemente,

$$|\widehat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega_h} + |\mathbf{d}_h|_{1,\omega_h} \leq C h, \quad (2.56)$$

y (2.54) con (2.56) proporcionan:

$$\|\widehat{p}_h - p_h\|_{L^2_{D,0}(\omega_h)} \leq C h. \quad (2.57)$$

Es ahora inmediato, usando (2.48), (2.56) y (2.57)

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|p_s - p_h\|_{L^2_{D,0}(\omega)} \leq C h.$$

Además, tomado $q = p_s$ en (2.46):

$$|\mathbf{r}_h|_{1,\omega_h} \leq C_1 |p_s|_{1,\omega} h. \quad (2.58)$$

Usamos esta estimación en:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{l}_h|_{1,\omega_h} &= |\mathbf{d}_h + \mathcal{R}_{2h}(\nabla_H(\hat{p}_h - p_s)) + \mathbf{r}_h|_{1,\omega_h} \\
&\leq |\mathbf{d}_h|_{1,\omega_h} + |\mathcal{R}_{2h}(\nabla_H(\hat{p}_h - p_s))|_{1,\omega_h} + |\mathbf{r}_h|_{1,\omega_h} \\
&\leq C(h + \|\hat{p}_h - p_s\|_{0,\omega_h} + h) \leq Ch.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
|\mathbf{z}_h|_{1,\Omega_h} &= |-\mathbf{c}_h + \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{W}_h \cdot \nabla(\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}))D_h) + \mathbf{t}_h|_{1,\Omega_h} \\
&\leq |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega_h} + |\mathcal{R}_{1h}((\mathbf{W}_h \cdot \nabla(\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}))D_h)|_{1,\Omega_h} + |\mathbf{t}_h|_{1,\Omega_h} \\
&\leq Ch + \|D\|_{\infty,\omega} |\mathbf{w}_h|_{1,6,\Omega_h} |\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}|_{1,\Omega_h} + Ch^{1/2} \\
&\leq Ch^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Nota.- La regularidad $W^{1,6}(\Omega)$ exigida a \mathbf{w}_h se justifica en la estimación (2.45). En efecto, de haber supuesto una regularidad $W^{1,r}(\Omega)$ con $2 < r < 6$ se obtendría en (2.44) una potencia h^β con $0 < \beta < \frac{1}{2}$. Consecuentemente, en (2.45) se tendría $h^{2\beta}$, corrompiendo la estimación del error de consistencia en $O(h)$.

Por otra parte, si $\mathbf{w} \in W_b^{1,\infty}(\Omega)$, entonces después de (2.44) se llega a

$$|\mathbf{t}_h|_{1,\Omega_h} \leq C(\mathbf{w}, \nu_s, \mathbf{u}, D) h,$$

lo que implica en (2.59), $|\mathbf{z}_h|_{1,\Omega_h} \leq Ch$.

Capítulo 3

Caso estacionario: Métodos Estabilizados Consistentes.

3.1 Introducción.

Por Métodos Estabilizados Consistentes designamos aquellos en los que el término estabilizante se construye ponderando el residuo completo:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K \mathcal{R}(\mathbf{u}_h|_K, p_h|_K) \mathcal{P}(\mathbf{v}_h|_K, q_h|_K) dx dz, \quad (3.1)$$

con

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}_h|_K, p_h|_K) = (\mathbf{U}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h - \Delta_{\nu} \mathbf{u}_h + f \mathbf{k} \times \mathbf{u}_h + \nabla_H p_h - \mathbf{f}.$$

Entran en esta categoría métodos ya clásicos como el SUPG, GALS y Adjunto Estabilizado. Por definición, estos métodos son consistentes y otorgan una mayor precisión al cálculo.

La inclusión en 3.1 del residuo completo constituye la principal dificultad en el análisis de estos métodos. En efecto, como veremos, al estar el residuo de la ecuación completo en el término estabilizador, los términos de velocidad y gradiente de presión aparecen acoplados en las estimaciones, lo que unido a la falta de regularidad en (0.46) de la derivada convectiva, impide estimar la presión como en el Capítulo 2. Ello fuerza a asumir simplificaciones en el modelo que permitan regularizar la derivada convectiva. Concretamente, supondremos la velocidad de convección dada, con regularidad $W^{1,3}(\Omega) \times W^{1,3}(\Omega) \times L^3(\Omega)$, en lugar de la regularidad $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ habitual.

Demostramos la existencia y unicidad de la solución dada por estos esquemas en el Teorema 3.2. Posteriormente, en el Teorema 3.3, demostramos convergencia fuerte de las soluciones aproximadas a una solución del problema continuo en norma $[H_b^1(\Omega)]^2 \times L^2(\omega)$ para (\mathbf{u}, p_s) y en $H(\partial_z; \Omega)$ para u_3 , así como estimaciones de error suponiendo regularidad aumentada de la solución del problema continuo.

3.2 Métodos Estabilizados Consistentes.

En esta sección supondremos que el dominio Ω es cilíndrico y poliédrico. El mismo análisis se aplica, esencialmente, al caso de un fondo variable con talud. En este caso, la dependencia respecto de la función D_h de los términos estabilizadores resulta aún más complicada que en el Capítulo 2. Dado que el tratamiento de profundidades variables y la aproximación de Ω por subdominios poliédricos están realizados en Capítulos anteriores, nos limitaremos aquí al caso $D_h = D$ constante y ω poligonal para evitar complejidades técnicas no esenciales.

Sea $\mathbf{w} \in \mathbf{W}_b^{1,3}(\Omega)$ una velocidad de convección dada para el Problema (1.10). A nuestro entender, esta es la menor regularidad isotrópica que debe imponerse para realizar nuestro análisis. Tomaremos también $\mathbf{f} = 0$ para evitar complejidades técnicas no esenciales.

Abordamos en este Capítulo la aproximación del Problema

$$\begin{cases} (a) & (\mathbf{W} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \Delta_{\nu} \mathbf{u} + f \mathbf{u}^{\perp} + \nabla_H p_s = 0 & \text{en } \Omega, \\ (b) & \nabla_H \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0 & \text{en } \omega, \\ (c) & \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Gamma_b, \quad \nu_z \partial_z \mathbf{u} = \boldsymbol{\tau} & \text{en } \Gamma_s, \end{cases} \quad (3.2)$$

donde $\mathbf{W} = (\mathbf{w}, w_3)$, con $w_3 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, viene definida por

$$w_3(\mathbf{x}, z) = \int_z^0 \nabla_H \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}, s) ds. \quad (3.3)$$

Nótese que la regularidad impuesta para \mathbf{w} permite, para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_b^1(\Omega)$, definir $(\mathbf{W} \cdot \nabla) \mathbf{u} \in \mathbf{H}_b^{-1}(\Omega)$ como

$$\langle (\mathbf{W} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = - \int_{\Omega} (\mathbf{W} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} dx dz, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_b^1(\Omega). \quad (3.4)$$

La integral del segundo miembro de (3.4) se puede acotar en este caso como sigue

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (\mathbf{W} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} dx dz \right| &\leq \| \mathbf{w} \|_{0,4,\Omega} \| \nabla_H \mathbf{v} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{u} \|_{0,4,\Omega} + \\ &\| w_3 \|_{0,3,\Omega} \| \partial_z \mathbf{v} \|_{0,\Omega} \| \mathbf{u} \|_{0,6,\Omega}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_b^1(\Omega). \end{aligned}$$

La desigualdad de Hölder da:

$$\begin{aligned} \| w_3 \|_{0,3,\Omega} &= \left(\int_{\omega} \int_{-D(\mathbf{x})}^0 \left| \int_z^0 \nabla_H \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}, s) ds \right|^3 dz d\mathbf{x} \right)^{1/3} \\ &\leq \left(\int_{\omega} \int_{-D(\mathbf{x})}^0 \left(\int_z^0 1 ds \right)^2 \left(\int_z^0 |\nabla_H \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}, s)|^3 ds \right) dz d\mathbf{x} \right)^{1/3}, \end{aligned}$$

y la desigualdad de Young

$$\| w_3 \|_{0,3,\Omega} \leq \left(\int_{\omega} \int_{-D}^0 |z|^2 \left(\int_{-D}^0 |\nabla_H \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}, s)|^3 ds \right) dz d\mathbf{x} \right)^{1/3} \quad (3.5)$$

$$\leq C D \left(\int_{\omega} \int_{-D}^0 |\nabla_H \mathbf{w}(\mathbf{x}, s)|^3 ds d\mathbf{x} \right)^{1/3} = C D | \mathbf{w} |_{1,3,\Omega}. \quad (3.6)$$

Por tanto, gracias a las inyecciones de Sobolev, existe una constante positiva $C = C(\Omega) > 0$ tal que

$$\|(\mathbf{W} \cdot \nabla)\mathbf{u}\|_{-1,\Omega} \leq C |\mathbf{w}|_{1,3,\Omega} |\mathbf{u}|_{1,\Omega}. \quad (3.7)$$

Seguimos denotando

$$\mathcal{A}_{\mathbf{w}}\mathbf{u} = (\mathbf{W} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \Delta_{\nu}\mathbf{u} + f\mathbf{u}^{\perp}, \quad \mathcal{A}_{\mathbf{w}}^*\mathbf{u} = -(\mathbf{W} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \Delta_{\nu}\mathbf{u} - f\mathbf{u}^{\perp}.$$

De (3.7), se sigue fácilmente

$$\mathcal{A}_{\mathbf{w}}\mathbf{u} \in \mathbf{H}_b^{-1}(\Omega) \text{ y } |\langle \mathcal{A}_{\mathbf{w}}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq C(\Omega, \nu, f) (|\mathbf{w}|_{1,3,\Omega} + 1) |\mathbf{u}|_{1,\Omega} |\mathbf{v}|_{1,\Omega}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_b^1(\Omega), \quad (3.8)$$

$$\mathcal{A}_{\mathbf{w}}^*\mathbf{u} \in \mathbf{H}_b^{-1}(\Omega) \text{ y } |\langle \mathcal{A}_{\mathbf{w}}^*\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq C(\Omega, \nu, f) (|\mathbf{w}|_{1,3,\Omega} + 1) |\mathbf{u}|_{1,\Omega} |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_b^1(\Omega). \quad (3.9)$$

Consideraremos en este capítulo el operador

$$\mathbf{B}_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = -(\mathbf{W} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \delta \Delta_{\nu}\mathbf{v} - f\mathbf{v}^{\perp},$$

donde $\delta \in \mathbb{R}$ será un parámetro a determinar más adelante.

Teniendo en cuenta la nueva regularidad de \mathbf{w} , los mismos argumentos usados en la Sección 1.2 para obtener la formulación débil de (0.39), llevan al Problema:

Dado $\tau \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_s)$, hallar $(\mathbf{u}, p_s) \in \mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L_0^2(\omega)$ tales que,

$$\mathbf{B}(\mathbf{w}; (\mathbf{u}, p_s), (\mathbf{v}, q_s)) = \langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall (\mathbf{v}, q_s) \in \mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L_0^2(\omega). \quad (3.10)$$

Nota.- La hipótesis $D = \text{cte.}$ permite el uso de los espacios $L_0^r(\omega)$ en lugar de los $L_{D,0}^r(\omega)$ en nuestro análisis, sin pérdida de generalidad. ■

La formulación (3.10) es hilbertiana y tiene la misma estructura que las ecuaciones de Oseen (o de *Navier-Stokes generalizadas*) estacionarias, de modo que la existencia y unicidad de solución de (3.10) puede ser fácilmente demostrada usando el Lema de Lax-Milgram. Dicha solución verifica además las estimaciones:

$$|\mathbf{u}|_{1,\Omega} \leq \nu^{-1} \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega}, \quad (3.11)$$

$$\|p_s\|_{L_0^2(\omega)} \leq C(\Omega, f, \nu) (|\mathbf{w}|_{1,3,\Omega} + 1) \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega}, \quad (3.12)$$

donde $\nu = \min(\nu_x, \nu_y, \nu_z)$.

Consideremos de nuevo los espacios (\mathbf{V}_h^k, M_h^l) , $k \geq l \geq 1$ definidos en (1.23). Tomemos una aproximación de \mathbf{w} , digamos $\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h^k$ tal que

$$|\mathbf{w}_h|_{1,3,\Omega} \leq C |\mathbf{w}|_{1,3,\Omega}, \quad (3.13)$$

para alguna constante $C > 0$ independiente de h . Definimos, como es habitual,

$$w_{3h}(\mathbf{x}, z) = \int_z^0 \nabla_H \cdot \mathbf{w}_h(\mathbf{x}, s) ds. \quad (3.14)$$

De (3.14) se deduce inmediatamente $w_{3h}|_{\Gamma_s} = 0$. Es más, razonando como en (3.5):

$$\|w_{3h}\|_{0,3,\Omega} \leq C D |\mathbf{w}_h|_{1,3,\Omega} \leq C D |\mathbf{w}|_{1,3,\Omega}. \quad (3.15)$$

Denotaremos

$$Q_h^l = \{q_h \in C^0(\bar{\Omega}) \mid q_h|_K \in \mathbb{P}_l(\mathbf{x}) \otimes \mathbb{P}_l(z), \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (3.16)$$

Una vez introducidas estas definiciones, planteamos el siguiente problema:

Hallar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h^k \times M_h^l$ tal que,

$$\mathbf{B}_h(\mathbf{w}_h; (\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) = \langle \mathbf{l}, \mathbf{v}_h \rangle, \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h^k \times M_h^l. \quad (3.17)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_h(\mathbf{w}_h; (\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) &= \mathbf{B}(\mathbf{w}_h; (\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) - \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K (\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h + \nabla \widehat{p}_h) (\mathcal{B}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{v}_h + \nabla \widehat{q}_h) \, dx \, dz \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{W}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h + (\nabla_{\nu} \mathbf{u}_h, \nabla_{\nu} \mathbf{v}_h)_{\Omega} + f(\mathbf{u}_h^{\perp}, \mathbf{v}_h)_{\Omega} \\ &\quad - (p_h, \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle)_{\omega} - (\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u}_h \rangle, q_h)_{\omega} \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K (\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h + \nabla \widehat{p}_h) (\mathcal{B}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{v}_h + \nabla \widehat{q}_h) \, dx \, dz. \end{aligned}$$

Los τ_K son los coeficientes de estabilidad dados por (2.4) y $\widehat{p}_h, \widehat{q}_h$ son las extensiones de p_h y q_h de ω a todo Ω como funciones constantes en z .

Se tienen métodos estabilizados particulares para determinados valores de δ . Concretamente, los métodos SUPG Generalizado, Adjunto Estabilizado (AdS) y Galerkin-Mínimos Cuadrados (GaLS) corresponden respectivamente a $\delta = 0$, $\delta = 1$, y $\delta = -1$. Tomaremos $\delta = 1$ para nuestro análisis (en este caso $\mathcal{B}_{\mathbf{w}_h} = \mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}^*$). Los mismos argumentos son válidos con ligeras modificaciones para $\delta = 0, -1$.

3.3 Análisis de estabilidad y convergencia.

Recurriremos a los espacios de burbujas para un análisis sistemático del método (3.17). El principal resultado en el que nos apoyaremos es la siguiente extensión del Teorema 2.2:

Teorema 3.1 Sean $k \geq l \geq 1$. Supongamos que:

- i) La familia de triangulaciones \mathcal{T}_h es regular.
- ii) Los coeficientes τ_K verifican

$$\gamma_1 h_K^2 \leq \tau_K \leq \gamma_2 h_K^2, \quad (3.18)$$

para ciertas constantes $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.

Entonces,

1. Existen espacios de Elementos Finitos Burbuja $\{\mathbf{Z}_h\}_{h>0} \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ y formas bilineales continuas y coercitivas $\{\mathbf{S}_h\}_{h>0}$ definidas en $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, tales que,

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K (\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h + \nabla t_h)(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}^* \mathbf{v}_h + \nabla s_h) dx dz = \mathbf{S}_h(\mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h + \nabla t_h), \mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}^* \mathbf{v}_h + \nabla s_h)), \quad (3.19)$$

para todos $\mathbf{w}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h$ en \mathbf{V}_h^k y t_h, s_h en Q_h^l . Más aún, las \mathbf{S}_h son uniformemente coercitivas en h .

2. Existe una constante $C_0 > 0$ independiente de h tal que:

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_h|_{1,\Omega} + |\mathbf{z}_h|_{1,\Omega} &\leq C_0 |\mathbf{v}_h + \mathbf{z}_h|_{1,\Omega} & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^k, \mathbf{z}_h \in \mathbf{Z}_h, \forall h > 0, \\ \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{z}_h\|_{0,\Omega} &\leq C_0 \|\mathbf{v}_h + \mathbf{z}_h\|_{0,\Omega} & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^k, \mathbf{z}_h \in \mathbf{Z}_h, \forall h > 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

3. Se satisface la condición inf-sup discreta:

$$\begin{aligned} \|r_h\|_{L_0^2(\Omega)} &\leq \beta' \sup_{(\mathbf{v}_h, v_{3h}) \in (Q_h^k \cap H_0^1(\Omega))^3 - \{0\}} \frac{(\nabla \cdot (\mathbf{v}_h, v_{3h}), r_h)_\Omega}{|(\mathbf{v}_h, v_{3h})|_{1,\Omega}} \\ &+ \beta' [\mathbf{S}_h(\mathcal{R}_h(\nabla r_h), \mathcal{R}_h(\nabla r_h))]^{1/2}, \forall r_h \in Q_h^l \cap L_0^2(\Omega), \end{aligned} \quad (3.21)$$

con $\beta' > 0$ independiente de h .

Demostración.-

La demostración de los apartados 1 y 2 se realiza siguiendo la demostración de un resultado similar publicado en [27]. En aquel caso, sólo se consideraron familias de Elementos Finitos afín-equivalentes. Puesto que consideramos en este Capítulo un dominio Ω cilíndrico, la malla \mathcal{T}_h se compone de prismas con bases paralelas. Por ello, \mathbf{V}_h^k es en este caso un espacio de Elementos Finitos afín-equivalentes, lo que permite aplicar el citado resultado de [27].

Demostraremos aquí la desigualdad del apartado 3. En la demostración del Lema 2.3 se probó

$$\begin{aligned} \|r_h\|_{L_0^2(\Omega)} &\leq \beta' \sup_{(\mathbf{v}_h, v_{3h}) \in (Q_h^1 \cap H_0^1(\Omega))^3 - \{0\}} \frac{(\nabla \cdot (\mathbf{v}_h, v_{3h}), r_h)_\Omega}{|(\mathbf{v}_h, v_{3h})|_{1,\Omega}} \\ &+ \beta' \left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla r_h\|_{0,K}^2 \right]^{1/2}, \forall r_h \in Q_h^1 \cap L_0^2(\Omega), \end{aligned} \quad (3.22)$$

con $\beta' > 0$ independiente de h .

El punto fundamental para ello fue que $Q_h^1 \subset C^0(\bar{\Omega})$, lo que permite integrar por partes en $(\nabla \cdot (\mathbf{v}_h, v_{3h}), r_h)_\Omega$ sin que aparezcan términos de borde, y el uso de la desigualdad inf-sup continua. Los mismos argumentos son aplicables si $r_h \in Q_h^l \cap L_0^2(\Omega)$, con $l \geq 1$, de donde se tiene

$$\begin{aligned} \|r_h\|_{L_0^2(\Omega)} \leq & \beta' \sup_{(\mathbf{v}_h, v_{3h}) \in (Q_h^1 \cap H_0^1(\Omega))^3 - \{0\}} \frac{(\nabla \cdot (\mathbf{v}_h, v_{3h}), r_h)_\Omega}{|(\mathbf{v}_h, v_{3h})|_{1,\Omega}} \\ & + \beta' \left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla r_h\|_{0,K}^2 \right]^{1/2}, \quad \forall r_h \in Q_h^l \cap L_0^2(\Omega). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Basta ahora mayorar el anterior supremo teniendo en cuenta $Q^1 \subset Q^k$:

$$\begin{aligned} \|r_h\|_{L_0^2(\Omega)} \leq & \beta' \sup_{(\mathbf{v}_h, v_{3h}) \in (Q_h^k \cap H_0^1(\Omega))^3 - \{0\}} \frac{(\nabla \cdot (\mathbf{v}_h, v_{3h}), r_h)_\Omega}{|(\mathbf{v}_h, v_{3h})|_{1,\Omega}} \\ & + \beta' \left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla r_h\|_{0,K}^2 \right]^{1/2}, \quad \forall r_h \in Q_h^l \cap L_0^2(\Omega). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Por otro lado, de la igualdad (3.19) con $\mathbf{u}_h = \mathbf{v}_h = 0, t_h = s_h = r_h$ tenemos

$$S_h(\mathcal{R}_h(\nabla r_h), \mathcal{R}_h(\nabla r_h)) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K |\nabla r_h|^2(\mathbf{x}) \, dx dz, \quad \forall r_h \in Q_h^l.$$

Gracias a que los coeficientes son de orden h_K^2 :

$$\left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla r_h\|_{0,K}^2 \right]^{1/2} \leq [S_h(\mathcal{R}_h(\nabla r_h), \mathcal{R}_h(\nabla r_h))]^{1/2} \quad \forall r_h \in Q_h.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|r_h\|_{L_0^2(\Omega)} \leq & \beta' \sup_{(\mathbf{v}_h, v_{3h}) \in (Q_h^k \cap H_0^1(\Omega))^3 - \{0\}} \frac{(\nabla \cdot (\mathbf{v}_h, v_{3h}), r_h)_\Omega}{|(\mathbf{v}_h, v_{3h})|_{1,\Omega}} \\ & + \beta' [S_h(\mathcal{R}_h(\nabla r_h), \mathcal{R}_h(\nabla r_h))]^{1/2}, \quad \forall r_h \in Q_h^l \cap L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

■

Este Teorema sienta las bases del Teorema 3.2. En particular, la Desigualdad Triangular Inversa Uniforme (3.20) es necesaria para la estimación de la velocidad y la condición inf-sup (3.21) para la estimación de la presión.

Teorema 3.2 Sea $k \geq l \geq 1$. Denotemos $\underline{\nu}$ y $\bar{\nu}$ respectivamente a la menor y mayor viscosidad turbulenta. Supongamos $\nu_s > \frac{\bar{\nu}^2}{\underline{\nu}}$. Entonces, el Problema (3.17) admite una única solución $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h^k \times M_h^l$ tal que

$$|\mathbf{u}_h|_{1,\Omega} \leq C \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega}, \quad (3.25)$$

$$\|p_h\|_{L_0^2(\omega)} \leq C (|\mathbf{w}_h|_{1,3,\Omega} + 1) \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega}. \quad (3.26)$$

donde C es una constante positiva independiente de h .

Demostración.-

Puesto que (3.17) es equivalente a un sistema lineal con $\dim(\mathbf{V}_h^k) + \dim(M_h^l)$ ecuaciones e incógnitas, la existencia de soluciones sigue de su unicidad. A su vez, puesto que (3.17) es un problema lineal, la unicidad sigue de estimar la norma de la solución en términos de la norma de los datos. Es pues necesario y suficiente para probar el Teorema demostrar las estimaciones (3.25) y (3.31). Como es usual, obtenemos en primer lugar la estimación de la velocidad.

Estimaciones de velocidad.-

Supongamos en principio $\mathbf{V}_h^k \perp \mathbf{Z}_h$ en $\mathbf{H}_b^1(\Omega)$ (en este caso $C_0 = \sqrt{2}$ en (3.20)). Denotemos $\mathbf{c}_h = \mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h + \nabla \widehat{p}_h)$. Por la ortogonalidad entre \mathbf{V}_h^k y \mathbf{Z}_h , $\mathcal{R}_h(\Delta \mathbf{v}_h) = 0$, $\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^k$. Así, $\mathbf{c}_h = -\mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}^* \mathbf{u}_h - \nabla \widehat{p}_h)$. Luego, sustituyendo $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$, $q_h = -p_h$ en (3.17) se obtiene

$$\langle \mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h \rangle + \mathbf{S}_h(\mathbf{c}_h, \mathbf{c}_h) = \mathbf{B}_h(\mathbf{w}_h; (\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{u}_h, -p_h)) = \langle \mathbf{l}, \mathbf{u}_h \rangle.$$

De

$$\underline{\nu} |\mathbf{u}_h|_{1,\Omega}^2 \leq \langle \mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h \rangle,$$

y la coercitividad de \mathbf{S}_h se sigue

$$\underline{\nu} |\mathbf{u}_h|_{1,\Omega}^2 + \nu_s |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega}^2 \leq \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega} |\mathbf{u}_h|_{1,\Omega},$$

de donde

$$|\mathbf{u}_h|_{1,\Omega} \leq \underline{\nu}^{-1} \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega},$$

y

$$|\mathbf{c}_h|_{1,\Omega} \leq (\nu_s \underline{\nu})^{-1/2} \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega}.$$

En el caso general de (3.20), se tiene (Cf. [27]):

$$|(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{c}_h)| \leq (1 - \delta_0) |\mathbf{u}_h|_{1,\Omega} |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega},$$

con $\delta_0 = 2/C_0^2$. Esta desigualdad es más fina que la usual de Cauchy-Schwartz. Ahora,

$$|(\nabla_{\nu} \mathbf{u}_h, \nabla_{\nu} \mathbf{c}_h)| \leq \bar{\nu} (1 - \delta_0) |\mathbf{u}_h|_{1,\Omega} |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega}.$$

Se sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_h(\mathbf{w}_h; (\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{u}_h, -p_h)) &= \langle \mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h \rangle + \mathbf{S}_h(\mathbf{c}_h, \mathbf{c}_h) - 2\mathbf{S}_h(\mathcal{R}_h(\Delta_{\nu} \mathbf{u}_h), \mathbf{c}_h) \\ &= \langle \mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h \rangle + \mathbf{S}_h(\mathbf{c}_h, \mathbf{c}_h) + 2(\nabla_{\nu} \mathbf{u}_h, \nabla_{\nu} \mathbf{c}_h) \\ &\geq \underline{\nu} |\mathbf{u}_h|_{1,\Omega}^2 + \nu_s |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega}^2 - 2\bar{\nu} (1 - \delta_0) |\mathbf{u}_h|_{1,\Omega} |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Gracias a la desigualdad de Young

$$2\bar{\nu} (1 - \delta_0) |\mathbf{u}_h|_{1,\Omega} |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega} \leq \bar{\nu} (1 - \delta_0) \epsilon |\mathbf{u}_h|_{1,\Omega}^2 + \bar{\nu} (1 - \delta_0) \epsilon^{-1} |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega}^2.$$

Introduciendo esta desigualdad en (3.27)

se sigue

$$\tilde{\nu} |\mathbf{u}_h|_{1,\Omega}^2 + \tilde{\nu}_s |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega}^2 \leq \mathbf{B}_h(\mathbf{w}_h; (\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{u}_h, -p_h)),$$

donde denotamos

$$\begin{aligned} \tilde{\nu} &= \underline{\nu} - (1 - \delta_0) \bar{\nu} \epsilon, \\ \tilde{\nu}_s &= \nu_s - (1 - \delta_0) \bar{\nu} \epsilon^{-1}. \end{aligned}$$

Ahora, $\epsilon > 0$ se elige de modo que

$$(1 - \delta_0) \frac{\bar{\nu}}{\nu_s} < \epsilon < (1 - \delta_0)^{-1} \frac{\underline{\nu}}{\bar{\nu}},$$

lo que es posible gracias a la condición $\nu_s > \frac{\bar{\nu}^2}{\underline{\nu}}$. Procediendo como en el caso anterior:

$$|\mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega} \leq C(\nu_s, \underline{\nu}, \bar{\nu}) \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega}, \quad (3.28)$$

lo que, en particular, da (3.25).

Estimación de la presión.-

Partimos de la desigualdad:

$$\begin{aligned} \|r_h\|_{L_0^2(\Omega)} \leq & \beta' \sup_{(\mathbf{v}_h, v_{3h}) \in (Q_h^k \cap H_0^1(\Omega))^3 - \{0\}} \frac{(\nabla \cdot (\mathbf{v}_h, v_{3h}), r_h)_\Omega}{|(\mathbf{v}_h, v_{3h})|_{1,\Omega}} \\ & + \beta' [\mathbf{S}_h(\mathcal{R}_h(\nabla r_h), \mathcal{R}_h(\nabla r_h))]^{1/2}, \quad \forall r_h \in Q_h^l \cap L_0^2(\Omega), \end{aligned} \quad (3.29)$$

Siguiendo el mismo razonamiento del Lema 2.3 deducimos:

$$\begin{aligned} \|q_h\|_{L_0^2(\omega)} \leq & \beta' \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^k - \{0\}} \frac{(\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle, q_h)_\Omega}{|\mathbf{v}_h|_{1,\Omega}} \\ & + \beta' [\mathbf{S}_h(\mathcal{R}_h(\nabla \widehat{q}_h), \mathcal{R}_h(\nabla \widehat{q}_h))]^{1/2}, \quad \forall q_h \in M_h^l. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Consideremos $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^k$. Se tiene

$$\begin{aligned} (\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle, p_h)_\omega = & -\mathbf{B}_h(\mathbf{w}_h; (\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, 0)) \\ & + \langle \mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle - \mathbf{S}_h(\mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}^* \mathbf{v}_h), \mathbf{c}_h). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Por la definición (2.9)

$$\mathbf{S}_h(\mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}^* \mathbf{v}_h), \mathbf{c}_h) = \langle \mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}^* \mathbf{v}_h, \mathbf{c}_h \rangle.$$

Gracias a (3.8)-(3.9):

$$|\langle \mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle - \langle \mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}^* \mathbf{v}_h, \mathbf{c}_h \rangle| \leq C(\Omega, \nu, f) (|\mathbf{w}_h|_{1,3,\Omega} + 1) (|\mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega}) |\mathbf{v}_h|_{1,\Omega} \quad (3.32)$$

Ahora, partiendo de (3.31)

$$\begin{aligned} (\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle, p_h)_\omega \leq & |-\langle \mathbf{l}, \mathbf{v}_h \rangle| + C(\Omega, \nu, f) (|\mathbf{w}_h|_{1,3,\Omega} + 1) (|\mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega}) |\mathbf{v}_h|_{1,\Omega} \\ \leq & C_1(\Omega, \nu, f) (\|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega} + (|\mathbf{w}_h|_{1,3,\Omega} + 1) (|\mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega})) |\mathbf{v}_h|_{1,\Omega} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}_h(\mathcal{R}_h(\nabla \widehat{p}_h), \mathcal{R}_h(\nabla \widehat{p}_h))]^{1/2} & \leq \mathcal{M}_s^{1/2} |\mathcal{R}_h(\nabla \widehat{p}_h)|_{1,\Omega} \\ & = \mathcal{M}_s^{1/2} |\mathbf{c}_h - \mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h)|_{1,\Omega} \\ & \leq \mathcal{M}_s^{1/2} (|\mathbf{c}_h|_{1,\Omega} + |\mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h)|_{1,\Omega}). \end{aligned} \quad (3.34)$$

A continuación, estimamos $|\mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h)|_{1,\Omega}$. De

$$\begin{aligned} \nu_s |\mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h)|_{1,\Omega}^2 &\leq \mathbf{S}_h(\mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h), \mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h)) \\ &= \langle \mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h, \mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h) \rangle \\ &\leq \|\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h\|_{-1,\Omega} |\mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h)|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

se tiene

$$|\mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h)|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\nu_s} \|\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h\|_{-1,\Omega},$$

y de (3.8)

$$|\mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h)|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\nu_s} C(\Omega, \nu, f) (|\mathbf{w}_h|_{1,3,\Omega} + 1) |\mathbf{u}_h|_{1,\Omega}. \quad (3.35)$$

Proseguimos con (3.34):

$$[\mathbf{S}_h(\mathcal{R}_h(\nabla \widehat{p}_h), \mathcal{R}_h(\nabla \widehat{p}_h))]^{1/2} \leq C_2(\Omega, \mathcal{M}_s, \nu_s, f, \nu) [(|\mathbf{w}_h|_{1,3,\Omega} + 1) |\mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega}]. \quad (3.36)$$

Combinando (3.33) y (3.36) con (3.30):

$$\|p_h\|_{L_0^2(\Omega)} \leq C_3(\Omega, \mathcal{M}_s, \nu_s, f, \nu) [(|\mathbf{w}_h|_{1,3,\Omega} + 1) (|\mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega}) + \|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega}].$$

Usando ahora (3.28) concluimos

$$\|p_h\|_{L_0^2(\omega)} \leq C(\Omega, \mathcal{M}_s, \nu_s, f, \nu) (|\mathbf{w}_h|_{1,3,\Omega} + 1) \|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega},$$

que es precisamente (3.31). ■

Observaciones.-

- 1) Es en (3.33) y (3.36) donde se usa la regularidad pedida para \mathbf{w} . En efecto, una menor regularidad de \mathbf{w} se traduce en una acotación $|\mathbf{w}_h|_{1,\alpha',\Omega} \leq C |\mathbf{w}|_{1,\alpha',\Omega}$, con $\alpha' < 3$ en (3.13). Esto se puede resolver en (3.33) acotando en $L^{3/2}$ la presión, pero en (3.36) estaríamos forzados a acotar por $|\mathbf{u}_h|_{1,\gamma,\Omega}$ con $\gamma > 2$. Ello hace insuficiente la estimación de energía (3.28), dificultad que no hemos podido (o sabido) salvar. Es por ello que hemos simplificado el modelo en este Capítulo, asumiendo la velocidad de convección dada con regularidad $W^{1,3}$.

- 2) En el caso $\delta = -1$ se tiene la estabilidad simplemente con $\nu_s > 0$. En efecto, en este caso $\mathcal{B}_{\mathbf{w}_h} = -\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}$. Sustituyendo $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$, $q_h = -p_h$ en (3.17) se obtiene

$$\langle \mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h \rangle + \mathbf{S}_h(\mathbf{c}_h, \mathbf{c}_h) = \mathbf{B}_h(\mathbf{w}_h; (\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{u}_h, -p_h)) = \langle \mathbf{l}, \mathbf{u}_h \rangle,$$

y se obtienen las estimaciones

$$|\mathbf{u}_h|_{1,\Omega} \leq \mathcal{L}^{-1} \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega}, \quad |\mathbf{c}_h|_{1,\Omega} \leq (\nu_s \mathcal{L})^{-1/2} \|\mathbf{l}\|_{-1,\Omega},$$

como en el caso $\mathbf{V}_h^k \perp \mathbf{Z}_h$ de la demostración anterior. Se tiene entonces un método consistente y estable sin restricciones sobre la viscosidad.

La misma observación es válida en el caso $\delta = 0$, con $k = l = 1$, pues en este caso $\Delta \mathbf{u}_h = \Delta \mathbf{v}_h = 0$ y también $\mathcal{B}_{\mathbf{w}_h} = -\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}$. ■

3.4 Estimaciones de error.

El carácter fuertemente consistente de los métodos que aquí consideramos simplifica notablemente la obtención de estimaciones de error en comparación con el apartado 2.5. Definamos antes, de la manera usual, u_3 y u_{3h} como

$$u_3(\mathbf{x}, z) = \int_z^0 \nabla_H \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds, \quad u_{3h}(\mathbf{x}, z) = \int_z^0 \nabla_H \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, s) ds.$$

Teorema 3.3 *En las condiciones del Teorema 3.2:*

1) *Supongamos que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\mathbf{w} - \mathbf{w}_h|_{1,3,\Omega} = 0. \quad (3.37)$$

Entonces, la solución de (3.17) cumple

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|u_{3h} - u_3\|_{H(\partial_z; \Omega)} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|p - p_s\|_{L_0^2(\omega)} = 0,$$

2) Supongamos que la solución de (3.10) cumple $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{k+1}(\Omega) \cap \mathbf{H}_b^1(\Omega)$, $p_s \in H^l(\omega) \cap L_0^2(\omega)$ para ciertos $k \geq 1$, $l \geq 1$ y

$$|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h|_{1,3,\Omega} \leq C h^m, \quad m = \min(k, l). \quad (3.38)$$

Entonces, existe una constante $C(\mathbf{w}, \mathbf{u}, p_s) > 0$ tal que

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|u_{3h} - u_3\|_{H(\partial_z;\Omega)} + \|p - p_s\|_{L_0^2(\omega)} + |\mathbf{z}_h|_{1,\Omega} \leq C h^m$$

$$\text{con } \mathbf{z}_h = \mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u}_h + \nabla \widehat{p}_h).$$

Demostración.-

Paso 1.- Error de Consistencia

Definamos el error de consistencia $\epsilon_h \in (\mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L_0^2(\omega))'$ como

$$\langle \epsilon_h, (\mathbf{v}, q) \rangle = B_h(\mathbf{w}; \mathbf{u}, p_s; \mathbf{v}, q) - \langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L_0^2(\omega).$$

Puesto que (\mathbf{u}, p_s) es solución de (3.10):

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_h, (\mathbf{v}, q) \rangle &= S_h(\mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \mathbf{u} + \nabla \widehat{p}_s), \mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}^* \mathbf{v} + \nabla \widehat{q})) \\ &= S_h(\mathcal{R}_h((\mathbf{W}_h - \mathbf{W}) \cdot \nabla \mathbf{u}), \mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}^* \mathbf{v} + \nabla \widehat{q})) \\ &= \langle (\mathbf{W}_h - \mathbf{W}) \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}^* \mathbf{v} + \nabla \widehat{q}) \rangle \\ &= - \int_{\Omega} ((\mathbf{W}_h - \mathbf{W}) \cdot \nabla) \mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}^* \mathbf{v} + \nabla \widehat{q}) \cdot \mathbf{u} \, dx dz \\ &\leq C |\mathbf{w} - \mathbf{w}_h|_{1,3,\Omega} |\mathbf{u}|_{1,\Omega} |\mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}^* \mathbf{v} + \nabla \widehat{q})|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Los mismos argumentos con los que se dedujo (3.35) permiten acotar del siguiente modo

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}^* \mathbf{v} + \nabla \widehat{q})|_{1,\Omega} &\leq |\mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}^* \mathbf{v})|_{1,\Omega} + |\mathcal{R}_h(\nabla \widehat{q})|_{1,\Omega} \\ &\leq \|\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}^* \mathbf{v}\|_{-1,\Omega} + \|\nabla \widehat{q}\|_{-1,\Omega} \\ &\leq C(|\mathbf{w}_h|_{1,3,\Omega} + 1) |\mathbf{v}|_{1,\Omega} + \|q\|_{0,\omega} \\ &\leq C(|\mathbf{w}|_{1,3,\Omega} + 1) |\mathbf{v}|_{1,\Omega} + \|q\|_{0,\omega}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Concluimos pues

$$\langle \epsilon_h, (\mathbf{v}, q) \rangle \leq C(\mathbf{w}, \Omega, \nu, f, \nu_s) |\mathbf{w} - \mathbf{w}_h|_{1,3,\Omega} |\mathbf{u}|_{1,\Omega} (|\mathbf{v}|_{1,\Omega} + \|q\|_{0,\omega}). \quad (3.40)$$

Paso 2.- Estimaciones de velocidad y presión

Dados $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^k$, $q_h \in M_h^l$, tenemos, por la definición del error de consistencia

$$\langle \epsilon_h, (\mathbf{v}_h, q_h) \rangle = B_h(\mathbf{w}; \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p_s - p_h; \mathbf{v}_h, q_h). \quad (3.41)$$

Para demostrar el apartado 1) del enunciado aplicamos el resultado de estabilidad de la sección anterior al problema (3.41). Se obtiene

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|p_s - p_h\|_{L_0^2(\omega)} \leq C \|\epsilon_h\|_{(\mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L_0^2(\omega))'}.$$

La norma $\|\epsilon_h\|_{(\mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L_0^2(\omega))'}$ se acota mediante (3.40). Se sigue

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|p_s - p_h\|_{L_0^2(\omega)} \leq C |\mathbf{w} - \mathbf{w}_h|_{1,3,\Omega} |\mathbf{u}|_{1,\Omega},$$

de donde, mediando la hipótesis (3.37), se tiene la convergencia de \mathbf{u}_h y p_h . Además, de las definiciones de u_3 y u_{3h} :

$$\|u_{3h} - u_3\|_{0,\Omega} \leq D^{1/2} |\mathbf{u}_h - \mathbf{u}|_{1,\Omega}; \quad (3.42)$$

$$\|\partial_z u_{3h} - \partial_z u_3\|_{0,\Omega} = \|\nabla_H \cdot (\mathbf{u}_h - \mathbf{u})\|_{0,\Omega} \leq C |\mathbf{u}_h - \mathbf{u}|_{1,\Omega}, \quad (3.43)$$

de donde la convergencia de u_{3h} a u_3 en $H(\partial_z; \Omega)$.

Para demostrar el apartado 2) reescribimos (3.41) usando una sucesión de interpolantes $\{\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{p}_h\}_{h \geq 0}$ tales que

$$|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h|_{1,\Omega} \leq C h^k, \quad \|p_s - \tilde{p}_h\|_{0,\omega} \leq C h^l.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} B_h(\mathbf{w}; \tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h, \tilde{p}_h - p_h; \mathbf{v}_h, q_h) &= \langle \epsilon_h, (\mathbf{v}_h, q_h) \rangle + B_h(\mathbf{w}; \tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}, \tilde{p}_h - p_s; \mathbf{v}_h, q_h) \\ &\stackrel{def}{=} G_h(\mathbf{v}_h, q_h). \end{aligned}$$

Aplicando el resultado de estabilidad de la sección anterior al problema:

$$B_h(\mathbf{w}; \tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h, \tilde{p}_h - p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = G_h(\mathbf{v}_h, q_h),$$

resulta

$$|\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|\tilde{p}_h - p_h\|_{L_0^2(\omega)} \leq C \|G_h\|_{(\mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L_0^2(\omega))'}.$$

De (3.40) y la continuidad de la forma B_h :

$$\begin{aligned} |\widetilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|\widetilde{p}_h - p_h\|_{L_0^2(\omega)} &\leq C (|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h|_{1,3,\Omega} + |\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}_h|_{1,\Omega} + \|p_s - \widetilde{p}_h\|_{0,\omega}) \\ &\leq C h^m. \end{aligned} \quad (3.44)$$

De (3.42) y (3.43) se sigue $\|u_{3h} - u_3\|_{H(\partial z; \Omega)} \leq C h^m$.

Paso 3. Estimación del residuo.-

Denotando $\mathbf{d}_h = \mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}(\widetilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) + \nabla(\widetilde{p}_h - p_h))$, y de forma análoga a la deducción de (3.39):

$$|\mathbf{d}_h|_{1,\Omega} \leq C (|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h|_{1,3,\Omega} + |\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}_h|_{1,\Omega} + \|p_s - \widetilde{p}_h\|_{0,\omega}) \leq C h^m. \quad (3.45)$$

Oberveremos que

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_h &= \mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h} \widetilde{\mathbf{u}}_h + \nabla \widetilde{p}_h) - \mathbf{d}_h \\ &= \mathcal{R}_h(\mathcal{A}_{\mathbf{w}_h}(\widetilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) + \nabla(\widetilde{p}_h - p_h) + (\mathbf{W}_h - \mathbf{W}) \cdot \nabla \mathbf{u}) - \mathbf{d}_h. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Acotando el segundo miembro de (3.46),

$$|\mathbf{z}_h|_{1,\Omega} \leq C (|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h|_{1,3,\Omega} + |\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}_h|_{1,\Omega} + \|p_s - \widetilde{p}_h\|_{0,\omega}) + |\mathbf{d}_h|_{1,\Omega}.$$

Finalmente, sigue de (3.44) y (3.45) $|\mathbf{z}_h|_{1,\Omega} \leq C h^m$. ■

Observaciones.-

- 1) La estimación (3.38) se sigue si $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^{m+1}(\Omega)$ con $C = C(K^*, \Omega) |\mathbf{w}|_{\mathbf{H}^{m+1}(\Omega)}$ gracias a las estimaciones estándar de interpolación por Elementos Finitos.
- 2) En el caso $k = l = 1$, el método (2.2) resulta ser más ventajoso que (3.17) para la resolución numérica de nuestro modelo de Ecuaciones Primitivas.

Por un lado, la estabilización término a término de (2.2) permite hacer el análisis en el caso no lineal (remitimos al Capítulo 2). En cambio, como se observó tras la demostración del Teorema 3.2, la estabilización con todo el residuo en (3.17) nos a forzado a linealizar las ecuaciones en este Capítulo.

En segundo lugar, ambos métodos dan una estimación

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|p - p_s\|_{L_0^2(\omega)} \leq C h,$$

siendo el método (2.2) más barato computacionalmente que (3.17). En efecto, suponiendo siempre un dominio cilíndrico, en el primer caso los términos de estabilización a computar son dos:

$$\sum_{T \in \mathcal{C}_h} \tau_T \int_T \nabla_H p_h \cdot \nabla_H q_h \, dx, \quad \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K (\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h)(\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h) \, dx \, dz,$$

mientras que en el segundo son nueve:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K (\mathbf{W}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h + f \mathbf{u}_h^\perp + \nabla \widehat{p}_h)(-\mathbf{W}_h \cdot \nabla) \mathbf{v}_h - f \mathbf{v}_h^\perp + \nabla \widehat{q}_h) \, dx \, dz.$$

■

Capítulo 4

Caso evolutivo: Aproximación en espacio-tiempo

4.1 Introducción.

En este Capítulo estudiamos un esquema espacio-temporal destinado a la resolución numérica de (0.39).

Introducimos una discretización espacio-temporal de las ecuaciones. Más concretamente, combinamos el método introducido en el Capítulo 2 para aproximar el modelo estacionario con un esquema de Euler semi-implícito en tiempo. Probamos que dicho esquema es incondicionalmente estable. Las estimaciones de energía que se obtienen no son suficientes para acotar la familia de presiones discretas $\{p_{h,\Delta t}\}_{h,\Delta t}$ uniformemente en espacio-tiempo. Sin embargo, sí se consigue estimar la familia de condensados $\{\mathcal{R}_{2h}(\nabla_H p_{h,\Delta t})\}_{h,\Delta t}$, lo que resultará fundamental.

Nuestro análisis de convergencia pasa al límite en primer lugar en el parámetro h , recuperando una semi-discretización en tiempo de las ecuaciones originales. Para ello desarrollamos una técnica de paso al límite para los términos de Penalización. Consideramos esta técnica como un elemento innovador de nuestro análisis. Concretamente,

- Mediante una elección especial de funciones test discretas probamos que la velocidad límite es de divergencia nula. Dicha elección viene motivada, una vez más, porque la velocidad discreta calculada en cada paso de tiempo no es de divergencia débilmente nula, contrariamente a los Métodos Mixtos.
- Probamos que los términos de penalización, cuya formulación depende de h , se anulan cuando $h \rightarrow 0$, lo que permite la convergencia del método en espacio-tiempo.

En este primer paso al límite, se usará un resultado de compacidad que involucra derivadas fraccionarias en tiempo. En cambio, al tomar límite en el paso de tiempo Δt , se usará un segundo resultado de compacidad que involucra derivadas de orden 1 en tiempo. A cambio, hay que estimar normas en espacios de dualidad.

Finalmente, analizamos el caso lineal. En este caso, es posible estimar directamente la sucesión $\{p_{h,\Delta t}\}_{h,\Delta t}$, lo que simplifica notablemente el análisis.

4.2 Preliminares.

Para evitar las complejidades técnicas de los Capítulos 1 y 2, supondremos que ω es poligonal y D es afín a trozos en alguna triangulación de $\bar{\omega}$. De este modo, Ω es poliédrico. Supondremos también $D \geq A > 0$ en ω , para cierta constante positiva A . Obsérvese que, así definida, la frontera de Ω es Lipschitz, por ser poliédrica.

Recordemos el Problema (0.39):

Hallar $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $p_s : \omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} (a) & \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \Delta_{\nu} \mathbf{u} + f \mathbf{u}^{\perp} + \nabla_H p_s = \mathbf{f} & \text{en } \Omega \times]0, T[, \\ (b) & \nabla_H \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0 & \text{en } \omega \times]0, T[, \\ (c) & \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Gamma_b \times]0, T[, \quad \nu_z \partial_z \mathbf{u} = \boldsymbol{\tau} & \text{en } \Gamma_s \times]0, T[, \\ (d) & \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 & \text{en } \Omega; \end{cases} \quad (4.1)$$

donde $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, u_3)$, con $u_3 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$u_3(\mathbf{x}, z) = \int_z^0 \nabla_H \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds. \quad (4.2)$$

Para formular débilmente (4.1), consideremos el espacio

$$\mathcal{C}_b^{\infty} = \left\{ \mathbf{v} \in [C^{\infty}(\bar{\Omega})]^2 \text{ tal que } \mathbf{v}|_{\Gamma_b} = 0 \text{ y } \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = 0 \right\}.$$

Sean ahora dos enteros $q \geq 0, p \geq 1$. Denotamos

$$\mathcal{V}^{q,p} = \text{clausura de } \mathcal{C}_b^{\infty} \text{ en } \mathbf{W}_b^{q,p}(\Omega).$$

Para $q \geq 1, p > 1$ se tiene la igualdad (Cf. Lewandowski [55]):

$$\mathcal{V}^{q,p} = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{W}_b^{q,p}(\Omega) \mid \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = 0 \}.$$

Para abreviar notación denotaremos $\mathcal{V}^r = \mathcal{V}^{1,r}$ para todo entero $r \geq 1$, y $\mathcal{V}^{0,2} = \mathbf{H}$. Se demuestran en [55] las inyecciones:

$$\mathcal{V}^2 \hookrightarrow \mathbf{H} \hookrightarrow (\mathcal{V}^3)',$$

siendo ambas continuas y la primera de ellas compacta.

Nos serán necesarios los siguientes resultados para interpretar correctamente la formulación débil de la condición inicial (4.1)(d). El primero de ellos se puede encontrar en [58]:

Teorema 4.1 *Sea X un espacio de Banach. Si $f \in L^p(0, T; X)$ y $\partial_t f \in L^p(0, T; X)$ ($1 \leq p \leq \infty$), entonces f es, salvo modificación en un conjunto de medida nula de $(0, T)$, continua de $[0, T]$ en X .*

El segundo se puede consultar en [78]:

Teorema 4.2 Sean X e Y dos espacios de Banach tales que $X \hookrightarrow Y$ con inyección continua. Si $f \in L^\infty(0, T; X)$ y es débilmente continua con valores en Y , entonces es débilmente continua con valores en X .

Por último, nos serán necesarios dos resultados de compacidad debidos a J. Simon [75]:

Teorema 4.3 Sean X, E e Y tres espacios de Banach tales que

$$X \hookrightarrow E \hookrightarrow Y,$$

con inyecciones continuas, la primera de ellas compacta. Sea $\{u_n\}_{n>0}$ una sucesión acotada en $L^p([0, T], X)$ tal que $\{\partial_t u_n\}_{n>0}$ permanece acotada en $L^q([0, T], Y)$, con $p, q \in [1, \infty)$. Entonces la sucesión $\{u_n\}_{n>0}$ es fuertemente relativamente compacta en $L^{\text{inf}(p,q)}([0, T], E)$.

En lo que sigue, denotaremos $\tau_\eta f(t) = f(t + \eta)$.

Teorema 4.4 Sean X, E e Y tres espacios de Banach tales que

$$X \hookrightarrow E \hookrightarrow Y,$$

con inyecciones continuas, la primera de ellas compacta. Sea $\{f_h\}_{h>0}$ una sucesión acotada en $L^p([0, T], X)$ tal que

$$\|\tau_\eta f_h - f_h\|_{L^p([0, T-\eta], Y)} \leq C \eta^s$$

con C independiente de h y $s > 0$. Entonces la sucesión $\{f_h\}_{h>0}$ es fuertemente relativamente compacta en $L^p([0, T], E)$.

4.3 Formulación débil.

Supongamos $\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{H}_b^{-1}(\Omega))$, $\boldsymbol{\tau} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_s))$ y $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}$. Adoptaremos la siguiente formulación variacional de (4.1):

Hallar $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{V}^2) \cap L^2(0, T; \mathbf{H})$ y $p_s \in W^{-1, \infty}(0, T; L_0^{3/2}(\omega))$ tales que:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad - \int_0^T \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \phi' dt + \int_0^T \langle (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \phi dt + \int_0^T \langle \nabla_\nu \mathbf{u}, \nabla_\nu \mathbf{v} \rangle \phi dt + f \int_0^T \langle \mathbf{u}^\perp, \mathbf{v} \rangle \phi dt \\ \quad - \int_0^T \langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle \phi dt = - \langle \nabla p_s, \mathbf{v} \phi \rangle, \\ (b) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \end{array} \right. \quad (4.3)$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_b^{1,3}(\Omega)$, $\phi \in W_0^{1,1}(0, T)$.

En (4.3) denotamos

$$\langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}_b^{-1}(\Omega), \mathbf{H}_b^1(\Omega)} + \langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}|_{\Gamma_s} \rangle_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_s), \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_s)};$$

y

$$\langle \nabla p_s, \mathbf{v} \phi \rangle = \langle \nabla p_s, \mathbf{v} \phi \rangle_{W^{-1, \infty}(0, T; W_b^{-1, 3/2}(\Omega)), W_0^{1, 1}(0, T; W_b^{1, 3}(\Omega))}.$$

La formulación variacional (4.3) tiene sentido. En efecto, de $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathcal{V}^2)$ y (1.1) se sigue que, para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}^3$, la función $t \rightarrow \langle (\mathbf{U}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(t), \mathbf{v} \rangle$ pertenece a $L^1(0, T)$. Por tanto, si definimos

$$\langle g(t), \mathbf{v} \rangle_{(\mathcal{V}^3)', \mathcal{V}^3} = \langle -(\mathbf{U}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(t) + \Delta_\nu \mathbf{u}(t) - f \mathbf{u}^\perp(t) + \mathbf{l}(t), \mathbf{v} \rangle_{(\mathcal{V}^3)', \mathcal{V}^3},$$

se tiene $\langle g(t), \mathbf{v} \rangle_{(\mathcal{V}^3)', \mathcal{V}^3} \in L^1(0, T)$.

Además, gracias a que $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$, la función $t \rightarrow (\mathbf{u}(t), \mathbf{v})_\Omega$ pertenece a $L^\infty(0, T)$.

Así, puesto que $W_0^{1, 1}(0, T) \hookrightarrow C^0([0, T])$ (Cf. [14]), el miembro izquierdo de la igualdad (4.3)(a):

$$- \int_0^T (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \phi' dt - \int_0^T \langle g(t), \mathbf{v} \rangle_{(\mathcal{V}^3)', \mathcal{V}^3} \phi dt$$

está bien definido para todo $\phi \in W_0^{1, 1}(0, T)$.

Por otro lado, la condición (4.3)(b) es coherente. De hecho, de (4.3)(a):

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{(\mathcal{V}^3)', \mathcal{V}^3} = \langle g(t), \mathbf{v} \rangle_{(\mathcal{V}^3)', \mathcal{V}^3}, \quad \text{c.p.d. en } [0, T].$$

Ello proporciona $\partial_t \mathbf{u} \in L^1(0, T; (\mathcal{V}^3)')$. De $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathcal{V}^2)$ y $\mathcal{V}^2 \hookrightarrow \mathbf{H} \hookrightarrow (\mathcal{V}^3)'$ resulta $\mathbf{u} \in L^2(0, T; (\mathcal{V}^3)')$. Aplicando el Teorema 4.1 con $p = 1$ se tiene que \mathbf{u} es igual en casi todo a función continua definida de $[0, T]$ en $(\mathcal{V}^3)'$. Este hecho, unido a que $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{H})$, permiten aplicar el Teorema 4.2 para concluir que \mathbf{u} es débilmente continua de $[0, T]$ con valores en \mathbf{H} . Tiene por tanto sentido imponer $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}$.

Una prueba de existencia de solución para (4.3) se da, por ejemplo, en Lewandowski [55]. Para más detalles sobre este y otros resultados referentes al análisis matemático de las Ecuaciones Primitivas evolutivas referimos a la Sección 0.3.3.

4.4 Discretización espacio-temporal.

Desconpongamos el intervalo $[0, T]$ en N subintervalos de igual longitud $k = T/N$. Consideremos la partición $t_n = nk$. Denotemos:

$$\mathbf{I}^{n+1} = \frac{1}{k} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{l}(t) dt, \quad 0 \leq n \leq N - 1.$$

Discretizamos (4.1) en tiempo mediante un esquema de Euler semiimplícito con objeto de asegurar su estabilidad incondicional. Más concretamente, se implicitan todos los términos salvo la derivada convectiva:

$$(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u})(t_{n+1}) \approx \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{k} + \mathbf{U}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1}.$$

De este modo, obtendremos un esquema incondicionalmente estable en tiempo.

Para la discretización espacial tomaremos el esquema (2.2) del Capítulo 2.

Consideremos una sucesión de aproximantes $\{\mathbf{u}_{0h}\}_{h>0} \subset \mathbf{H}$ tal que para todo $h > 0$, $\mathbf{u}_{0h} \in \mathbf{V}_h$ y $\lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{u}_{0h} = \mathbf{u}_0$ en \mathbf{H} . Definamos $\mathbf{u}_h^0 = \mathbf{u}_{0h}$.

Entonces, dado $0 \leq n < N - 1$ y (\mathbf{u}_h^n, p_h^n) busquemos $(\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in \mathbf{V}_h \times M_h$ tales que $\forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times M_h$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k}, \mathbf{v}_h \right) + \int_{\Omega} (\mathbf{U}_h^n \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h \, dx \, dz + (\nabla_{\nu} \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla_{\nu} \mathbf{v}_h) + \\ \quad + f(\mathbf{k} \times \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) - (p_h^{n+1}, \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle)_{\omega} + \\ \quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K (\mathbf{U}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1})(\mathbf{U}_h^n \cdot \nabla \mathbf{v}_h) D \, dx \, dz = \langle \mathbf{l}^{n+1}, \mathbf{v}_h \rangle; \\ \\ (\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u}_h^{n+1} \rangle, q_h)_{\omega} + \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \tau_T (\nabla_H p_h^{n+1}, \nabla_H q_h)_T = 0, \end{array} \right. \quad (4.4)$$

donde τ_K, τ_T vienen dados por (2.3)-(2.4), y $\mathbf{U}_h^n = (\mathbf{u}_h^n, u_{3h}^n)$, con

$$u_{3h}^n(\mathbf{x}, z) = \int_z^0 \nabla_H \cdot \mathbf{u}_h^n(\mathbf{x}, s) \, ds. \quad (4.5)$$

El resultado principal de este Capítulo es:

Teorema 4.5 *Supongamos que $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ es una familia regular de Elementos Finitos. Definamos las funciones*

$$\mathbf{u}_{h,k} : [0, T] \rightarrow \mathbf{H}_b^1(\Omega) \text{ tales que } \mathbf{u}_{h,k}(t_n) = \mathbf{u}_h^n, \text{ continuas, lineales en cada subintervalo;}$$

$$p_{h,k} : [0, T] \rightarrow L_0^2(\omega) \text{ tales que } p_{h,k}(t) = p_h^{n+1}, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}.$$

Entonces, existe una subsucesión de índices h_k que tiende a 0 cuando $k \rightarrow 0$, una subsucesión $\{\mathbf{u}_{h_k,k}\}_{k>0}$ y una solución (\mathbf{u}, p_s) de (4.3) tales que:

i) $\mathbf{u}_{h_k,k} \rightharpoonup \mathbf{u}$ débil en $L^2(0, T; \mathbf{H}_b^1(\Omega))$ y $\mathbf{u}_{h_k,k} \rightharpoonup \mathbf{u}$ débil- $*$ en $L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ cuando $k \rightarrow 0$.

ii) Si tomamos:

- $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_b^{1,4}(\Omega)$ arbitraria,
- $\phi \in W_0^{1,1}(0, T)$ arbitraria y,

– una sucesión $\{\mathbf{v}_{h_k}\}_{h_k > 0}$ tal que $\mathbf{v}_{h_k} \in \mathbf{V}_{h_k}$ y $\mathbf{v}_{h_k} \rightarrow \mathbf{v}$ cuando $k \rightarrow 0$ en $\mathbf{W}_b^{1,4}(\Omega)$,

se tiene la convergencia:

$$\langle \nabla p_{h_k, k}, \mathbf{v}_{h_k} \phi \rangle \rightarrow \langle \nabla p_s, \mathbf{v} \phi \rangle \quad \text{cuando } k \downarrow 0.$$

4.5 Desigualdades de energía.

Nuestro análisis comienza con la representación de (4.4) como una aproximación Galerkin de una formulación variacional penalizada del Problema continuo (4.3). Al igual que en el Capítulo 2, recurriremos al Teorema 2.1, que nos proporciona la siguiente expresión de los términos de penalización:

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K (\mathbf{U}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1})(\mathbf{U}_h^n \cdot \nabla \mathbf{v}_h) D \, dx \, dz \\ = \mathbf{S}_{1h}(\mathcal{R}_{1h}((\mathbf{U}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1})D), \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{U}_h^n \cdot \nabla \mathbf{v}_h)D)), \\ \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \tau_T (\nabla_H p_h^{n+1}, \nabla_H q_h)_T = \mathbf{S}_{2h}(\mathcal{R}_{2h}(\nabla_H p_h^{n+1}), \mathcal{R}_{2h}(\nabla_H q_h)). \end{aligned}$$

Denotaremos en adelante

$$\mathbf{c}_h^{n+1} = \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{U}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1})D), \quad \mathbf{d}_h^{n+1} = \mathcal{R}_h(\nabla_H p_h^{n+1}),$$

por brevedad.

Seguidamente, demostramos que el Problema (4.4) está bien puesto. Para ello será necesaria la siguiente condición inf-sup discreta, demostrada en la Sección 2.4:

Existe una constante $\beta > 0$ independiente de h tal que $\forall q_h \in M_h$,

$$\|q_h\|_{L_0^2(\omega)} \leq \beta \left[\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h - \{0\}} \frac{(\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle, q_h)_\omega}{\|\nabla_H \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} + \|\partial_z \mathbf{v}_h\|_{0,3,\Omega}} \right] \quad (4.6)$$

$$+ [\mathbf{S}_{2h}(\mathcal{R}_{2h}(\nabla_H q_h), \mathcal{R}_{2h}(\nabla_H q_h))]^{1/2}. \quad (4.7)$$

Con la desigualdad (4.6), probamos el siguiente

Lema 4.6 *Fijemos $0 \leq n \leq N - 1$ y $h > 0$. Entonces, existe una única solución $(\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in \mathbf{V}_h \times M_h$ del Problema (4.4) verificando las estimaciones:*

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u}_h^{n+1}|_{1,\Omega} &\leq C \underline{\nu}^{-1} (\|\mathbf{I}^{n+1}\|_{-1,\Omega} + \frac{1}{k} \|\mathbf{u}_h^n\|_{0,\Omega}), \\
|\mathbf{c}_h^{n+1}|_{1,\Omega} &\leq C (\nu_s \underline{\nu})^{-1/2} (\|\mathbf{I}^{n+1}\|_{-1,\Omega} + \frac{1}{k} \|\mathbf{u}_h^n\|_{0,\Omega}), \\
|\mathbf{d}_h^{n+1}|_{1,\omega} &\leq C (\nu_s \underline{\nu})^{-1/2} (\|\mathbf{I}^{n+1}\|_{-1,\Omega} + \frac{1}{k} \|\mathbf{u}_h^n\|_{0,\Omega}), \\
\|p_h\|_{L^2_{D,0}(\omega)} &\leq C (\|\mathbf{u}_h^n\|_{1,\Omega} + 1) (\|\mathbf{I}^{n+1}\|_{-1,\Omega} + \frac{1}{k} \|\mathbf{u}_h^n\|_{0,\Omega}),
\end{aligned}$$

donde $\underline{\nu} = \min \{\nu_x, \nu_y, \nu_z\}$ y C sólo depende de los datos.

Demostración.-

Consideremos un paso de tiempo fijo; por tanto \mathbf{U}_h^n es ahora un dato, y el Problema (4.4) es lineal:

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{1}{k} (\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) + \int_{\Omega} (\mathbf{U}_h^n \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h \, dx dz + (\nabla_{\underline{\nu}} \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla_{\underline{\nu}} \mathbf{v}_h) \\
+ f(\mathbf{k} \times \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) - (p_h^{n+1}, \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle)_{\omega} \\
+ \mathbf{S}_{1h}(\mathbf{c}_h^{n+1}, \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{U}_h^n \cdot \nabla \mathbf{v}_h) D)) = \langle \mathbf{I}^{n+1}, \mathbf{v}_h \rangle + \frac{1}{k} (\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h), \\
(\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u}_h^{n+1} \rangle, q_h)_{\omega} + \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_h^{n+1}, \mathcal{R}_{2h}(\nabla_H q_h)) = 0.
\end{aligned} \right. \quad (4.8)$$

Por tanto, (4.8) es equivalente a un sistema lineal de dimensión $\dim(\mathbf{V}_h) + \dim(M_h)$, y la existencia de soluciones se sigue de su unicidad. Supongamos pues que $(\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1})$ es solución de (4.8) y probemos su unicidad acotando su norma en términos de $\|\mathbf{I}\|_{-1,\Omega}$.

Estimaciones para la velocidad.-

Tomemos en la primera ecuación de (4.8) $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h^{n+1}$ y en la segunda $q_h = p_h^{n+1}$. La derivada convectiva y el término de Coriolis se anulan; por tanto, sumando las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 + \underline{\nu} \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_{1,\Omega}^2 + \mathbf{S}_{1h}(\mathbf{c}_h^{n+1}, \mathbf{c}_h^{n+1}) \\
+ \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_h^{n+1}, \mathbf{d}_h^{n+1}) \leq \langle \mathbf{I}^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1} \rangle + \frac{1}{k} (\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n+1}). \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Acotamos el segundo miembro como sigue:

$$\langle \mathbf{I}^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1} \rangle + \frac{1}{k} (\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n+1}) \leq \|\mathbf{I}^{n+1}\|_{-1,\Omega} \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_{1,\Omega} + C_p \frac{1}{k} \|\mathbf{u}_h^n\|_{0,\Omega} \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_{1,\Omega}, \quad (4.10)$$

donde C_p denota la constante de Poincaré. Ahora, de (4.9) y (4.10):

$$|\mathbf{u}_h^{n+1}|_{1,\Omega} \leq \underline{\nu}^{-1} \gamma^n, \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{k} \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 \leq \underline{\nu}^{-1} (\gamma^n)^2, \quad (4.12)$$

$$\nu_s |\mathbf{c}_h^{n+1}|_{1,\Omega}^2 \leq \mathbf{S}_{1h}(\mathbf{c}_h^{n+1}, \mathbf{c}_h^{n+1}) \leq \underline{\nu}^{-1} (\gamma^n)^2, \quad (4.13)$$

$$\nu_s |\mathbf{d}_h^{n+1}|_{1,\omega}^2 \leq \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_h^{n+1}, \mathbf{d}_h^{n+1}) \leq \underline{\nu}^{-1} (\gamma^n)^2. \quad (4.14)$$

con

$$\gamma^n = \|\mathbf{I}^{n+1}\|_{-1,\Omega} + C_p \frac{1}{k} \|\mathbf{u}_h^n\|_{0,\Omega}.$$

Estimaciones para la presión.-

Usamos el Lemma 2.3. Tomemos $q_h = p_h^{n+1}$ en (4.6) y acotemos el supremo en (4.6). Observemos que

$$\begin{aligned} (p_h^{n+1}, \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle)_\omega &= \frac{1}{k} (\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) + \langle (\mathbf{U}_h^n \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h \rangle + (\nabla_{\underline{\nu}} \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla_{\underline{\nu}} \mathbf{v}_h) \\ &\quad + f(\mathbf{k} \times \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) + \mathbf{S}_{1h}(\mathbf{c}_h^{n+1}, \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{U}_h^n \cdot \nabla) \mathbf{v}_h) D)) \\ &\quad - \langle \mathbf{I}^{n+1}, \mathbf{v}_h \rangle - \frac{1}{k} (\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h). \end{aligned} \quad (4.15)$$

El término estabilizante se estima como sigue:

$$\begin{aligned} |\mathbf{S}_{1h}(\mathbf{c}_h^{n+1}, \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{U}_h^n \cdot \nabla) \mathbf{v}_h) D))| &= \langle (\mathbf{U}_h^n \cdot \nabla) \mathbf{v}_h, D, \mathbf{c}_h^{n+1} \rangle_\Omega \\ &\leq C \|D\|_{\infty,\omega} (\|\mathbf{u}_h^n\|_{0,4,\Omega} \|\nabla_H \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} \|\mathbf{c}_h^{n+1}\|_{0,4,\Omega} + \\ &\quad \|\mathbf{u}_{3h}^n\|_{0,\Omega} \|\partial_z \mathbf{v}_h^n\|_{0,3,\Omega} \|\mathbf{c}_h^{n+1}\|_{0,6,\Omega}) \\ &\leq C \|D\|_{\infty,\omega} (\|\mathbf{u}_h^n\|_{1,\Omega} + 1) \|\mathbf{c}_h^{n+1}\| (\|\nabla_H \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} + \|\partial_z \mathbf{v}_h\|_{0,3,\Omega}). \end{aligned}$$

En la última desigualdad se ha usado $\|\mathbf{u}_{3h}^n\|_{0,\Omega} \leq C \|\mathbf{u}_h^n\|_{1,\Omega}$, lo que sigue de (4.5). Los términos restantes en (4.15) se acotan de forma estándar. Dichas acotaciones conducen a

$$\begin{aligned} |(p_h^{n+1}, \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle)_\omega| &\leq [C \frac{1}{k} \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_{0,\Omega} + C (\|\mathbf{u}_h^n\|_{1,\Omega} + 1) \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_{1,\Omega} + \bar{\nu} \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_{1,\Omega} \\ &\quad + f C \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_{0,\Omega} + C \|D\|_{\infty,\omega} (\|\mathbf{u}_h^n\|_{1,\Omega} + 1) \|\mathbf{c}_h^{n+1}\|_{1,\Omega} \\ &\quad + \gamma^n] (\|\nabla_H \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} + \|\partial_z \mathbf{v}_h\|_{0,3,\Omega}). \end{aligned}$$

donde $\bar{\nu} = \max\{\nu_x, \nu_y, \nu_z\}$. Las estimaciones (4.11)-(4.14) implican:

$$\begin{aligned}
|(p_h^{n+1}, \nabla_H \cdot \mathbf{v}_h)_\omega| &\leq [C(k \underline{\nu})^{-1/2} + C \underline{\nu} (|\mathbf{u}_h^n|_{1,\Omega} + 1) + \bar{\nu} \underline{\nu}^{-1} \\
&\quad + f C^2 \underline{\nu}^{-1} + C \nu_s^{1/2} \underline{\nu}^{-1/2} \|D\|_{\infty,\omega} (|\mathbf{u}_h^n|_{1,\Omega} + 1) \\
&\quad + 1] \gamma^n |\mathbf{v}_h|_{1,3,\Omega} \\
&\leq C(k, \nu_s, \nu, \Omega, f) (|\mathbf{u}_h^n|_{1,\Omega} + 1) \gamma^n (\|\nabla_H \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} + \|\partial_z \mathbf{v}_h\|_{0,3,\Omega}). \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Observemos que el segundo término en el segundo miembro de (4.6) se ha estimado en (4.14). Por tanto, gracias a (4.6), el bloque (4.11)-(4.14) y (4.16), se concluye la siguiente estimación de la presión discreta:

$$\begin{aligned}
\|p_h^{n+1}\|_{L_0^2(\omega)} &\leq \beta C(k, \nu_s, \nu, \Omega, f) (|\mathbf{u}_h^n|_{1,\Omega} + 1) \gamma^n \\
&\leq C(k, \beta, \nu_s, \nu, \Omega, f) (|\mathbf{u}_h^n|_{1,\Omega} + 1) (\|I^{n+1}\|_{-1,\Omega} + \frac{1}{k} \|\mathbf{u}_h^n\|_{0,\Omega}). \quad (4.17)
\end{aligned}$$

De (4.11) y (4.17) se deduce la unicidad de solución de (4.8). Como ya hemos reseñado, ello implica a su vez la existencia, por lo que el esquema numérico está bien planteado. ■

A continuación deducimos algunas estimaciones a-priori para la velocidad, el condensado de la derivada convectiva y el gradiente de presión.

Proposición 4.7 *La solución de (4.4) satisface:*

$$\begin{aligned}
i) \max_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_h^n\|_{0,\Omega} \leq C, \quad ii) \sum_{n=0}^{N-1} \|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n\|_{0,\Omega}^2 \leq C, \quad iii) \sum_{n=0}^N k |\mathbf{u}_h^n|_{1,\Omega}^2 \leq C, \\
iv) \sum_{n=0}^{N-1} k |\mathbf{c}_h^{n+1}|_{1,\Omega}^2 \leq C, \quad v) \sum_{n=0}^{N-1} k |\mathbf{d}_h^{n+1}|_{1,\omega}^2 \leq C,
\end{aligned} \quad (4.18)$$

donde C es independiente de k y h .

Demostración.-

En primer lugar, observemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\mathbf{U}_h^n \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h \, dx \, dz &= - \int_\Omega (\mathbf{U}_h^n \cdot \nabla) \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{u}_h^{n+1} \, dx \, dz + \int_\Omega (\nabla \cdot \mathbf{U}_h^n) (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}) \\
&\quad - \int_{\Gamma_b} (\mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n}_x) (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}) - \int_{\Gamma_s} (u_{3h}^n n_z) (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}) \\
&= - \int_\Omega (\mathbf{U}_h^n \cdot \nabla) \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{u}_h^{n+1} \, dx \, dz. \quad (4.19)
\end{aligned}$$

En la anterior igualdad, hemos usado que la velocidad tridimensional \mathbf{U}_h^n es siempre de divergencia nula puesto que la velocidad vertical u_{3h}^n se computa directamente a partir de la divergencia de la velocidad horizontal como en (4.5). Además, las integrales de frontera se anulan debido a las condiciones de contorno $\mathbf{u}_h^n|_{\Gamma_b} = \mathbf{v}_h|_{\Gamma_b} = 0$ y $u_{3h}^n|_{\Gamma_s} = 0$.

Ahora, testemos la primera ecuación en (4.4) con $2k\mathbf{u}_h^{n+1}$ y la segunda con $2kp_h^{n+1}$. Observemos

$$\left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k}, 2k\mathbf{u}_h^{n+1}\right) = 2(\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n+1}) = \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 - \|\mathbf{u}_h^n\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_{0,\Omega}^2.$$

Gracias a (4.19):

$$\int_{\Omega} (\mathbf{U}_h^n \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{u}_h^{n+1} dx dz = 0.$$

Gracias a que las \mathbf{S}_{ih} son coercivas, con constante ν_s ,

$$\begin{aligned} 2k\nu_s |\mathbf{c}_h^{n+1}|_{1,\Omega}^2 &\leq \mathbf{S}_{1h}(\mathbf{c}_h^{n+1}, \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{U}_h^n \cdot \nabla(2k\mathbf{u}_h^{n+1})D))), \\ 2k\nu_s |\mathbf{d}_h^{n+1}|_{1,\omega}^2 &\leq \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_h^{n+1}, \mathcal{R}_{2h}(\nabla_H(2kp_h^{n+1}))). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Así, sumando ambas ecuaciones,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_{0,\Omega}^2 + 2k\underline{\nu} |\mathbf{u}_h^{n+1}|_{1,\Omega}^2 + \\ + 2k\nu_s |\mathbf{d}_h^{n+1}|_{1,\omega}^2 + 2k\nu_s |\mathbf{c}_h^{n+1}|_{1,\Omega}^2 \leq 2k \langle \mathbf{I}^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1} \rangle + \|\mathbf{u}_h^n\|_{0,\Omega}^2, \end{aligned}$$

donde $\underline{\nu} = \min(\nu_x, \nu_y, \nu_z)$. Gracias a la desigualdad de Young:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n\|_{0,\Omega}^2 + k\underline{\nu} |\mathbf{u}_h^{n+1}|_{1,\Omega}^2 + \\ + 2k\nu_s |\mathbf{d}_h^{n+1}|_{1,\omega}^2 + 2k\nu_s |\mathbf{c}_h^{n+1}|_{1,\Omega}^2 \leq \frac{k}{\underline{\nu}} \|\mathbf{I}^{n+1}\|_{-1,\Omega}^2 + \|\mathbf{u}_h^n\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Seguidamente, sumamos en $n = 0, \dots, N-1$ obteniendo:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h^N\|_{0,\Omega}^2 + \underline{\nu} \sum_{n=0}^{N-1} k |\mathbf{u}_h^{n+1}|_{1,\Omega}^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n\|_{0,\Omega}^2 \\ + 2\nu_s \sum_{n=0}^{N-1} k |\mathbf{d}_h^{n+1}|_{1,\omega}^2 + 2\nu_s \sum_{n=0}^{N-1} k |\mathbf{c}_h^{n+1}|_{1,\Omega}^2 \leq \frac{1}{\underline{\nu}} \sum_{n=0}^{N-1} k \|\mathbf{I}^{n+1}\|_{-1,\Omega}^2 + \|\mathbf{u}_{0h}\|_{0,\Omega}^2 \\ \leq C (\|\mathbf{I}\|_{L^2(\mathbf{H}^{-1})}^2 + \|\mathbf{u}_0\|_{0,\Omega}^2), \end{aligned}$$

de donde se siguen las desigualdades *i) – iv)*. ■

Nota.-

- No se ha exigido ninguna restricción al cociente k/h para obtener las estimaciones (4.18). El esquema (4.4) resulta ser incondicionalmente estable. Ello se debe a la discretización semi-implícita del término convectivo y el hecho de que $\nabla \cdot \mathbf{U}_h^n$ es cero. Concretamente, por $\nabla \cdot \mathbf{U}_h^n = 0$ se tiene la antisimetría de (4.19). ■

4.6 Convergencia.

Con objeto de demostrar la convergencia débil de las soluciones de (4.4) hacia una solución de (4.3), definamos las funciones

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_{h,k}^i &: [0, T] \rightarrow \mathbf{H}_b^1(\Omega) \text{ tal que } \mathbf{u}_{h,k}^i(t) = \mathbf{u}_h^{n+i}, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}, \quad i = 0, 1; \\
 u_{3,h,k}^0 &: [0, T] \rightarrow L^2(\Omega) \text{ tal que } u_{3,h,k}^0(t) = u_{3h}^n, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}; \\
 \mathbf{u}_{h,k} &: [0, T] \rightarrow \mathbf{H}_b^1(\Omega) \text{ tal que } \mathbf{u}_{h,k}(t_n) = \mathbf{u}_h^n \text{ continua, lineal en cada subintervalo}; \\
 p_{h,k} &: [0, T] \rightarrow L_0^2(\omega) \text{ tal que } p_{h,k}(t) = p_h^{n+1}, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}; \\
 \mathbf{c}_{h,k} &: [0, T] \rightarrow \mathbf{H}_0^1(\Omega) \text{ tal que } \mathbf{c}_{h,k}(t) = \mathbf{c}_h^{n+1}, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}; \\
 \mathbf{d}_{h,k} &: [0, T] \rightarrow \mathbf{H}_0^1(\omega) \text{ tal que } \mathbf{d}_{h,k}(t) = \mathbf{d}_h^{n+1}, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}; \\
 \mathbf{l}_k &: [0, T] \rightarrow \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \text{ tal que } \mathbf{l}_k(t) = \mathbf{l}^{n+1}, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Todas estas funciones son constantes a trozos, exceptuando $\mathbf{u}_{h,k}$ que es lineal a trozos. Del Lema 4.7 se sigue la estabilidad en el sentido de Temam [78]:

“Un conjunto de funciones E se dice $L^p(0, T; X)$ -estable si E es un subconjunto acotado de $L^p(0, T; X)$.”

Esto se formaliza en el:

Lema 4.8 *Se verifica:*

- Las sucesiones $\{\mathbf{u}_{h,k}^i\}_{h,k>0}$, $i = 0, 1$ y $\{\mathbf{u}_{h,k}\}_{h,k>0}$ son $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}_b^1(\Omega))$ -estables.
- La sucesión $\{u_{3,h,k}^0\}_{h,k>0}$ es $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ -estable.
- Las sucesiones $\mathbf{d}_{h,k}$ y $\mathbf{c}_{h,k}$ son respectivamente $L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\omega))$ y $L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$ -estables.
- Más aún,

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{u}_{h,k}^i - \mathbf{u}_{h,k}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 &\leq Ck, \quad i=0,1, \\
 \|\mathbf{u}_{h,k}^0 - \mathbf{u}_{h,k}^1\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 &\leq Ck.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

■

Una vez introducidas estas funciones auxiliares, el Problema (4.4) puede ser reescrito como

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad - \int_0^T (\mathbf{u}_{h,k}, \mathbf{v}_h) \phi' dt + \int_0^T \left[\int_{\Omega} (\mathbf{U}_{h,k}^0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_{h,k}^1 \cdot \mathbf{v}_h dx dz \right] \phi dt + \int_0^T (\nabla_{\nu} \mathbf{u}_{h,k}^1, \nabla_{\nu} \mathbf{v}_h) \phi dt \\ \quad + f \int_0^T ((\mathbf{u}_{h,k}^1)^{\perp}, \mathbf{v}_h) \phi dt + \int_0^T \mathbf{S}_{1h}(\mathbf{c}_{h,k}, \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{U}_{h,k}^0 \cdot \nabla \mathbf{v}_h) D)) \phi dt \\ \quad - \int_0^T (p_{h,k}, \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle)_{0,\omega} \phi dt = (\mathbf{u}_{0h}, \mathbf{v}_h) \phi(0) + \int_0^T \langle \mathbf{l}_k, \mathbf{v}_h \rangle \phi dt \\ (b) \quad \int_0^T (\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u}_{h,k}^1 \rangle, q_h)_{0,\omega} \psi dt + \int_0^T \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_{h,k}, \mathcal{R}_{2h}(\nabla_H q_h)) \psi dt = 0, \end{array} \right. \quad (4.23)$$

para todo $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$, $q_h \in M_h$, $\phi \in C^1[0, T]$, tal que $\phi(T) = 0$, $\psi \in C_c^0(0, T)$.

El Lema 4.8 permite extraer subsucesiones de $\{\mathbf{u}_{h,k}^i\}_{h>0}$ y $\{\mathbf{u}_{h,k}\}_{h>0}$ débilmente convergentes. Sin embargo, necesitamos convergencia fuerte en algún espacio $L^{\theta}([0, T] \times \Omega)$, con $\theta \geq 1$, para pasar al límite.

Para ello, aplicaremos el resultado de compacidad 4.4. Como paso previo debemos acotar la sucesión de incrementos $\{\tau_{\eta} \mathbf{u}_{h,k}^1 - \mathbf{u}_{h,k}^1\}_{h>0}$ en términos de η en cierto espacio a precisar.

Fijaremos $k > 0$ arbitrario, pero fijo, a lo largo de este apartado y la Sección 4.6.1. Se tiene

Lema 4.9 *Existe una constante $C > 0$ dependiente únicamente de los datos tal que*

$$\|\tau_{\eta} \mathbf{u}_{h,k}^1 - \mathbf{u}_{h,k}^1\|_{L^2([0, T-\eta], L^2(\Omega))} \leq C \eta^{\frac{1}{2}}, \quad \forall 0 < \eta < k.$$

Demostración.-

Sea $0 < \eta < k$. Entonces

$$\|\tau_{\eta} \mathbf{u}_{h,k}^1 - \mathbf{u}_{h,k}^1\|_{L^2([0, T-\eta], L^2(\Omega))}^2 = \int_0^T \|\tau_{\eta} \mathbf{u}_{h,k}^1(s) - \mathbf{u}_{h,k}^1(s)\|_{0,\Omega}^2 ds.$$

Como se puede observar en la Figura 4.1, la función $\tau_{\eta} \mathbf{u}_{h,k}^1 - \mathbf{u}_{h,k}^1$ es escalonada en tiempo. Se sigue

$$\int_0^T \|\tau_{\eta} \mathbf{u}_{h,k}^1(s) - \mathbf{u}_{h,k}^1(s)\|_{0,\Omega}^2 ds = \sum_{n=1}^{N-1} \eta \|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n\|_{0,\Omega}^2.$$

De la acotación (4.18) *ii*) se sigue:

$$\sum_{n=1}^{N-1} \eta \|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n\|_{0,\Omega}^2 \leq C \eta,$$

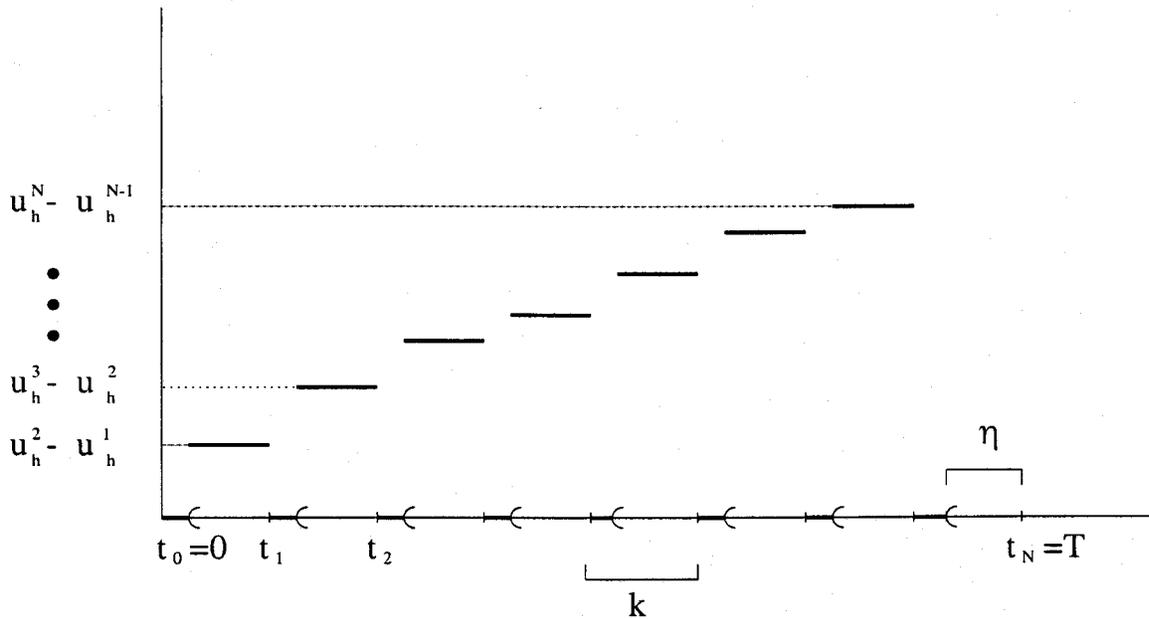


Figura 4.1: Gráfica de la función incremento $\tau_\eta \mathbf{u}_{h,k}^1 - \mathbf{u}_{h,k}^1$.

de donde el resultado tomando la raíz cuadrada.

Aplicando el Teorema 4.4 obtenemos:

Proposición 4.10 *La sucesión $\{\mathbf{u}_{h,k}^1\}_{h>0}$ es fuertemente relativamente compacta en $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.*

Nota.- El mismo resultado es válido para la sucesión $\{\mathbf{u}_{h,k}^0\}_{h>0}$.

4.6.1 Convergencia espacial.

Lema 4.11 *Existen subsucesiones, que denotamos de la misma manera, tales que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{h,k}^i \rightarrow \mathbf{u}_k^i \text{ débil en } L^2(0, T; \mathbf{H}_b^1(\Omega)) \text{ cuando } h \rightarrow 0, \\ \mathbf{u}_{h,k}^i \rightarrow \mathbf{u}_k^i \text{ débil-* en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ cuando } h \rightarrow 0, \\ \mathbf{u}_{h,k} \rightarrow \mathbf{u}_k \text{ débil en } L^2(0, T; \mathbf{H}_b^1(\Omega)) \text{ cuando } h \rightarrow 0, \\ \mathbf{u}_{h,k} \rightarrow \mathbf{u}_k \text{ débil-* en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ cuando } h \rightarrow 0, \end{array} \right. \quad (4.24)$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{u}_{h,k}^i \rightarrow \mathbf{u}_k^i \text{ en } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ cuando } h \rightarrow 0, \\ (\mathbf{u}_{h,k}^0, u_{3,h,k}^0) \rightarrow (\mathbf{u}_k^0, u_{3,k}^0) \text{ débil en } L^2([0, T] \times \Omega)^3 \text{ cuando } h \rightarrow 0. \end{array} \quad (4.25)$$

Demostración

El Lema 4.8 permite extraer subsucesiones, que denotamos de la misma manera, tales que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{h,k}^i \longrightarrow \mathbf{u}_k^i \text{ débil en } L^2(0, T; \mathbf{H}_b^1(\Omega)) \text{ cuando } h \rightarrow 0, \\ \mathbf{u}_{h,k}^i \longrightarrow \mathbf{u}_k^i \text{ débil-* en } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \text{ cuando } h \rightarrow 0, \\ \mathbf{u}_{h,k} \longrightarrow \mathbf{u}_k \text{ débil en } L^2(0, T; \mathbf{H}_b^1(\Omega)) \text{ cuando } h \rightarrow 0, \\ \mathbf{u}_{h,k} \longrightarrow \mathbf{u}_k \text{ débil-* en } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \text{ cuando } h \rightarrow 0. \end{array} \right.$$

Además, de la Proposición 4.10

$$\mathbf{u}_{h,k}^i \longrightarrow \mathbf{u}_k^i \text{ en } L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \text{ cuando } h \rightarrow 0.$$

Por último, de (4.24):

$$(\mathbf{u}_{h,k}^0, u_{3,h,k}^0) \longrightarrow (\mathbf{u}_k^0, u_{3,k}^0) \text{ débil en } L^2([0, T] \times \Omega)^3 \text{ cuando } h \rightarrow 0.$$

El siguiente resultado se deduce de las convergencias anteriores: ■

Lema 4.12 *Existe una subsucesión, que denotamos de la misma forma, tal que:*

i) *Para casi todos $t \in [0, T]$ y $(\mathbf{x}, z) \in \Omega$:*

$$\mathbf{u}_{h,k}^i(t, \mathbf{x}, z) \longrightarrow \mathbf{u}_k^i(t, \mathbf{x}, z) \text{ cuando } h \rightarrow 0. \quad (4.26)$$

ii) *Sea $r \in [1, 2)$. Para casi todo $t \in [0, T]$:*

$$\mathbf{u}_{h,k}^i(t, \mathbf{x}, z) \longrightarrow \mathbf{u}_k^i(t, \mathbf{x}, z) \text{ en } \mathbf{L}^r(\Omega) \text{ cuando } h \rightarrow 0. \quad (4.27)$$

Demostración.-

El punto i) sigue de (4.6.1) y el Teorema de Riesz-Fischer (tras extraer subsucesiones apropiadas que denotamos de la misma forma).

Para el punto ii), observamos que para casi todo $t \in [0, T]$ la sucesión $\{\mathbf{u}_{h,k}^i(t, \mathbf{x}, z)\}_{h>0}$ está acotada en $\mathbf{L}^2(\Omega)$ por la acotación de la sucesión en $L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$. Por tanto, se puede extraer una subsucesión $\{\mathbf{u}_{h',k}^i(t, \mathbf{x}, z)\}_{h'>0}$ fuertemente convergente a cierta función \mathbf{w}^i en $\mathbf{L}^r(\Omega)$. La convergencia en casi todo $(\mathbf{x}, z) \in \Omega$ de $\{\mathbf{u}_{h',k}^i(t, \mathbf{x}, z)\}_{h'>0}$ a $\mathbf{u}_k^i(t, \mathbf{x}, z)$ muestra que, de hecho, $\mathbf{u}_k^i = \mathbf{w}^i$, de donde el resultado. ■

Nuevamente, del Lema 4.8 deducimos

Lema 4.13 *Existen subsucesiones, que denotamos de la misma manera, tales que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d}_{h,k} \longrightarrow 0 \text{ débil en } L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\omega)) \text{ cuando } h \rightarrow 0, \\ \mathbf{c}_{h,k} \longrightarrow 0 \text{ débil en } L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \text{ cuando } h \rightarrow 0. \end{array} \right. \quad (4.28)$$

Demostración.-

Usamos el Lema 2.4. Tomemos $\alpha = 2, \beta = 1$ en (2.29). Se tiene

$$\int_0^T \|\mathbf{d}_{h,k}(t)\|_{0,\omega}^2 dt \leq C h^2 \int_0^T |\mathbf{d}_{h,k}(t)|_{1,\omega}^2 dt \leq C' h^2,$$

de modo que $\mathbf{d}_{h,k} \rightarrow 0$ en $L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\omega))$, y, por tanto, la función límite \mathbf{d}_k que, en principio aparece en (4.28), es 0.

Igualmente, $\mathbf{c}_{h,k} \rightarrow 0$ en $L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$ débil. ■

Las mayores dificultades al tomar límite en (4.23) cuando $h \rightarrow 0$ surgen tanto del término convectivo como del término estabilizante.

En el marco de la aproximación numérica de las Ecuaciones de Navier-Stokes mediante Métodos de Elementos Finitos Mixtos (ver, por ejemplo, Temam [78]), las funciones test de divergencia discreta débilmente nula se usan para estimar las derivadas temporales y para pasar al límite en $h \rightarrow 0$. De poder aplicar esta técnica, se anularía el término

$$\int_0^T (p_{h,k}, \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle)_{0,\omega} \phi dt$$

y sería posible pasar al límite sin estimaciones uniformes sobre $\{p_{h,k}\}_{h,k>0}$.

Para ello es necesario que las funciones de divergencia discreta débilmente nula sean densas en el espacio velocidades con divergencia continua nula. O sea,

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}^4, \text{ existe una sucesión } \{\mathbf{v}_h\}_{h>0} \text{ tal que } \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ \lim_{h \rightarrow 0} |\mathbf{v} - \mathbf{v}_h|_{1,4,\Omega} = 0 \quad \text{y} \quad (q_h, \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle)_{0,\omega} = 0 \quad \forall q_h \in M_h.$$

Esta propiedad de densidad es equivalente a la verificación de la condición inf-sup discreta entre los espacios discretos de velocidad y presión.

Puesto que los espacios $\{\mathbf{V}_h, M_h\}_{h>0}$ no satisfacen tal condición, deberemos pasar forzosamente al límite en el término $\int_0^T (p_{h,k}, \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle)_{0,\omega} \phi dt$.

Para ello, haremos uso de las funciones test que proporciona el:

Lema 4.14 Sea $\mathbf{v} \in [C^\infty(\bar{\Omega})]^2$ tal que $\mathbf{v}|_{\Gamma_b} = 0$. Entonces, existe $(\mathbf{z}_h, r_h) \in \mathbf{V}_h \times M_h$ tal que:

i) $\mathbf{z}_h \rightarrow \mathbf{v}$ en $\mathbf{W}_b^{1,4}(\Omega)$ y $r_h \rightarrow 0$ en $L_0^2(\omega)$.

ii) $(\nabla_H \cdot \langle \mathbf{z}_h \rangle, q_h)_{0,\omega} + \mathbf{S}_{2h}(\mathcal{R}_{2h}(\nabla_H r_h), \mathcal{R}_{2h}(\nabla_H q_h)) = (\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v} \rangle, q_h)_{0,\omega}$ para todo $q_h \in M_h$.

Demostración.-

Consideremos una sucesión $\{\mathbf{t}_h\}_{h>0} \subset \mathbf{V}_h$ de interpolantes de \mathbf{v} verificando $|\mathbf{v} - \mathbf{t}_h|_{1,4,\Omega} \rightarrow 0$ y $|\mathbf{v} - \mathbf{t}_h|_{1,\Omega} \leq Ch$, con C independiente de h . Dicha sucesión existe por los argumentos expuestos en la Proposición 1.5.

Definamos $(\mathbf{e}_h, r_h) \in \mathbf{V}_h \times M_h$ mediante el problema auxiliar:

$$\begin{cases} (\nabla_{\nu} \mathbf{e}_h, \nabla_{\nu} \mathbf{y}_h) - (r_h, \nabla_H \cdot \langle \mathbf{y}_h \rangle)_{\omega} = (\nabla_{\nu} (\mathbf{v} - \mathbf{t}_h), \nabla_{\nu} \mathbf{y}_h) \\ (\nabla_H \cdot \langle \mathbf{e}_h \rangle, q_h)_{0,\omega} + \mathbf{S}_{2h}(\mathcal{R}_{2h}(\nabla_H r_h), \mathcal{R}_{2h}(\nabla_H q_h)) = (\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v} - \mathbf{t}_h \rangle, q_h)_{0,\omega}. \end{cases} \quad (4.29)$$

para todo $(\mathbf{y}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times M_h$.

Los mismos argumentos de la demostración del Lema 4.6 muestran que existe una única solución $(\mathbf{e}_h, r_h) \in \mathbf{V}_h \times M_h$ del Problema (4.29) que verifica las estimaciones

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}_h|_{1,\Omega} + \|r_h\|_{0,\omega} + |\mathcal{R}_{2h}(\nabla_H r_h)|_{1,\omega} &\leq C_1 (|\mathbf{v} - \mathbf{t}_h|_{1,\Omega} + \|\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v} - \mathbf{t}_h \rangle\|_{0,\omega}) \\ &\leq C_2 |\mathbf{v} - \mathbf{t}_h|_{1,\Omega}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

con C_1, C_2 independientes de h .

De $|\mathbf{v} - \mathbf{t}_h|_{1,\Omega} \rightarrow 0$, se sigue $(\mathbf{e}_h, r_h) \rightarrow (0, 0)$ en $\mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L^2(\omega)$.

Definamos $\mathbf{z}_h = \mathbf{e}_h + \mathbf{t}_h \in \mathbf{V}_h$. Siguiendo [33], puede probarse la desigualdad inversa:

$$\begin{aligned} |\mathbf{z}_h - \mathbf{t}_h|_{1,4,\Omega} &\leq \widehat{C}(\widehat{K}) h^{-3/4} |\mathbf{z}_h - \mathbf{t}_h|_{1,\Omega} = \widehat{C}(\widehat{K}) h^{-3/4} |\mathbf{e}_h|_{1,\Omega} \\ &\leq \widehat{C}(\widehat{K}) C_2 h^{-3/4} |\mathbf{v} - \mathbf{t}_h|_{1,\Omega} \leq \widehat{C}(\widehat{K}) C_2 h^{1/4} \end{aligned}$$

siendo \widehat{K} el prisma de referencia. Así,

$$|\mathbf{z}_h - \mathbf{v}|_{1,4,\Omega} \leq |\mathbf{z}_h - \mathbf{t}_h|_{1,4,\Omega} + |\mathbf{t}_h - \mathbf{v}|_{1,4,\Omega} \leq \widehat{C}(\widehat{K}) C_2 h^{1/4} + |\mathbf{t}_h - \mathbf{v}|_{1,4,\Omega}.$$

Esto da *i*). Por otra parte, (4.29) y la definición de \mathbf{z}_h proporcionan

$$(\nabla_H \cdot \langle \mathbf{z}_h \rangle, q_h)_{0,\omega} + \mathbf{S}_{2h}(\mathcal{R}_{2h}(\nabla_H r_h), \mathcal{R}_{2h}(\nabla_H q_h)) = (\nabla_H \cdot \langle \mathbf{v} \rangle, q_h)_{0,\omega},$$

demostrando el aserto *ii*). ■

Seguidamente, tomemos $\mathbf{v} \in C_b^\infty$ arbitraria. El paso al límite en el término de convección se lleva a cabo en el

Lema 4.15 *Consideremos la sucesión $\{\mathbf{z}_h\}_{h>0}$ dada por el Lema 4.14. Entonces, se tiene:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^T \left[\int_{\Omega} (\mathbf{U}_{h,k}^0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_{h,k}^1 \cdot \mathbf{z}_h \, dx dz \right] \phi \, dt = \int_0^T \langle (\mathbf{U}_k^0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_k^1, \mathbf{v} \rangle \phi \, dt, \quad \forall \phi \in L^\infty(0, T). \quad (4.31)$$

Demostración.-

Recopilemos brevemente las estimaciones y convergencias demostradas hasta ahora y que nos llevarán a probar el resultado. El análisis llevado a cabo hasta ahora muestra que las sucesiones $\{\mathbf{u}_{h,k}^i\}_{h>0}$, $i = 0, 1$ están acotadas en $L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ y $L^2(0, T; \mathbf{H}_b^1(\Omega))$ y la sucesión $\{\mathbf{z}_h\phi\}_{h>0}$ está acotada en $L^\infty(0, T; \mathbf{W}^{1,4}(\Omega))$.

Más aún, para subsucesiones adecuadas, que denotamos de la misma manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{h,k}^1(t, \mathbf{x}, z) &\longrightarrow \mathbf{u}_k^1(t, \mathbf{x}, z) && \text{c.p.d. en } [0, T] \times \Omega, \text{ cuando } h \rightarrow 0, \\ \mathbf{u}_{h,k}^0(t, \mathbf{x}, z) &\longrightarrow \mathbf{u}_k^0(t, \mathbf{x}, z) && \text{c.p.d. en } [0, T] \times \Omega, \text{ cuando } h \rightarrow 0, \\ (\mathbf{u}_{h,k}^0, u_{3,h,k}^0) &\longrightarrow (\mathbf{u}_k^0, u_{3,k}^0) && \text{débil en } L^2([0, T] \times \Omega)^3, \text{ cuando } h \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Teniendo en cuenta la convergencia fuerte de $\{(\nabla \mathbf{z}_h)\phi\}_{h>0}$ en $L^\infty(0, T; L^4(\Omega))^3$, para una subsucesión de índices $\{h'\}$ se verifica

$$(\nabla \mathbf{z}_{h'}\phi)(t, \mathbf{x}, z) \longrightarrow (\nabla v\phi)(t, \mathbf{x}, z) \quad \text{c.p.d. en } [0, T] \times \Omega.$$

Renombremos $h' = h$. Descompongamos la integral antes de tomar límite en

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[\int_\Omega (\mathbf{U}_{h,k}^0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_{h,k}^1 \cdot \mathbf{z}_h \, dx dz \right] \phi \, dt &= - \int_0^T \int_\Omega [(\mathbf{u}_{h,k}^0 \cdot \nabla_H)(\mathbf{z}_h\phi) \cdot \mathbf{u}_{h,k}^1] \, dx dz dt \\ &\quad - \int_0^T \int_\Omega [u_{3,h,k}^0 \partial_z(\mathbf{z}_h\phi) \cdot \mathbf{u}_{h,k}^1] \, dx dz dt. \end{aligned}$$

Aligeraremos la notación usando la convención $L^p(0, T; L^q(\Omega)) = L^p(L^q)$. Consideremos subíndices $1 \leq i, j \leq 2$. Tenemos

$$\{(\mathbf{u}_{h,k}^1)_i\}_{h,k>0} \quad \text{acotada en } L^2(L^6) \cap L^\infty(L^2),$$

de donde (Cf. [55])

$$\{(\mathbf{u}_{h,k}^1)_i\}_{h,k>0} \quad \text{acotada en } L^{\frac{2}{1-\theta}}(L^{\frac{6}{1+2\theta}}),$$

para todo $\theta \in (0, 1)$. Particularizando para $\theta = 1/4$

$$\{(\mathbf{u}_{h,k}^1)_i\}_{h,k>0} \quad \text{acotada en } L^{8/3}(L^4).$$

Puesto que

$$\{(\mathbf{u}_{h,k}^0)_j\}_{h,k>0} \quad \text{acotada en } L^2(L^6),$$

se tiene

$$\left\{ (\mathbf{u}_{h,k}^0)_j (\mathbf{u}_{h,k}^1)_i \right\}_{h,k>0} \quad \text{acotada en } L^{8/7}(L^{12/5}),$$

lo que permite extraer una subsucesión, denotada de la misma forma, tal que

$$\left\{ (\mathbf{u}_{h,k}^0)_j (\mathbf{u}_{h,k}^1)_i \right\}_{h,k>0} \rightarrow \chi \quad \text{débil en } L^{8/7}(L^{12/5}).$$

Pero la convergencia c.p.d. de (4.32) indica $\chi = (\mathbf{u}_k^0)_j (\mathbf{u}_k^1)_i$. Por otro lado

$$\left\{ \partial_i (\mathbf{z}_h)_j \phi \right\}_{h,k>0} \rightarrow \partial_i (\mathbf{v}_j) \phi \quad \text{en } L^\infty(L^4) \hookrightarrow L^8(L^{12/7}).$$

Puesto que $L^8(L^{12/7})$ es el dual de $L^{8/7}(L^{12/5})$ concluimos

$$-\int_0^T \int_\Omega \left[(\mathbf{u}_{h,k}^0 \cdot \nabla_H) (\mathbf{z}_h \phi) \cdot \mathbf{u}_{h,k}^1 \right] dx dz dt \rightarrow -\int_0^T \int_\Omega \left[(\mathbf{u}_k^0 \cdot \nabla_H) (\mathbf{v} \phi) \cdot \mathbf{u}_k^1 \right] dx dz dt.$$

Para pasar al límite en la integral que involucra a la derivada vertical de las funciones test razonamos de la siguiente forma: de

$$\left\{ (\mathbf{u}_{h,k}^1)_i \right\}_{h,k>0} \quad \text{acotada en } L^{\frac{2}{1-\theta}}(L^{\frac{6}{1+2\theta}}),$$

tenemos, particularizando para $\theta = 1/10$

$$\left\{ (\mathbf{u}_{h,k}^1)_i \right\}_{h,k>0} \quad \text{acotada en } L^{20/9}(L^5) \quad \text{y convergente c.p.d. a } \mathbf{u}_k^1.$$

Por otro lado,

$$\left\{ \partial_z (\mathbf{z}_h)_j \phi \right\}_{h,k>0} \quad \text{converge en } L^\infty(L^4) \quad \text{a } \partial_z \mathbf{v}_j \phi.$$

Por tanto

$$\left\{ \partial_z (\mathbf{z}_h)_j \phi (\mathbf{u}_{h,k}^1)_i \right\}_{h,k>0} \quad \text{converge en } L^{20/9}(L^{20/9}) \quad \text{y c.p.d. a } \partial_z \mathbf{v}_j \phi \mathbf{u}_k^1.$$

Finalmente, de

$$u_{3,h,k}^0 \rightarrow u_{3,k}^0 \quad \text{débil en } L^2(L^2),$$

se obtiene el límite:

$$-\int_0^T \int_{\Omega} [u_{3,h,k}^0 \partial_z(\mathbf{z}_h \phi) \cdot \mathbf{u}_{h,k}^1] dx dz dt \rightarrow -\int_0^T \int_{\Omega} [u_{3,k}^0 \partial_z(\mathbf{v} \phi) \cdot \mathbf{u}_k^1] dx dz dt,$$

terminando la demostración. ■

Nota.- Hagamos notar que en la anterior demostración bastaba exigir la convergencia

$$\partial_i(\mathbf{z}_h)_j \rightarrow \partial_i \mathbf{v}_j \quad \text{en } L^2(\Omega),$$

a las derivadas horizontales de las funciones test para pasar al límite. Para la derivada vertical es imprescindible elevar dicha convergencia a $L^4(\Omega)$. ■

Podemos ahora determinar el problema límite de (4.23) cuando $h \rightarrow 0$.

Proposición 4.16 Las funciones $\mathbf{u}_k^0, \mathbf{u}_k^1, \mathbf{u}_k$ satisfacen el siguiente problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad -\int_0^T (\mathbf{u}_k, \mathbf{v}) \phi' dt - \int_0^T \left[\int_{\Omega} (\mathbf{U}_k^0 \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k^1 dx dz \right] \phi dt + \int_0^T (\nabla_{\nu} \mathbf{u}_k^1, \nabla_{\nu} \mathbf{v}) \phi dt \\ \quad + f \int_0^T ((\mathbf{u}_k^1)^{\perp}, \mathbf{v}) \phi dt = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) \phi(0) + \int_0^T \langle \mathbf{l}_k, \mathbf{v} \rangle \phi dt \\ \text{(b)} \quad \int_0^T (\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u}_k^1, q \rangle)_{0,\omega} \psi dt = 0, \end{array} \right. \quad (4.33)$$

para todo $\mathbf{v} \in C_b^{\infty}$, $q \in L_0^2(\omega)$, $\phi \in C^1[0, T]$, tal que $\phi(T) = 0$, $\psi \in C_c^0(0, T)$.

Demostración.-

El gradiente de presión pasa al límite usando el aserto *ii*) del Lema 4.14:

$$\begin{aligned} -\int_0^T (p_{h,k}, \nabla_H \cdot \langle \mathbf{z}_h \rangle)_{0,\omega} \phi dt &= \int_0^T \mathbf{S}_{2h}(\mathcal{R}_{2h}(\nabla_H r_h), \mathcal{R}_{2h}(\nabla_H p_{h,k})) \phi dt, \\ &= \int_0^T \mathbf{S}_{2h}(\mathcal{R}_{2h}(\nabla_H r_h), \mathbf{d}_{h,k}) \phi dt \\ &= \int_0^T \phi \langle \nabla_H r_h, \mathbf{d}_{h,k} \rangle_{\mathbf{H}^{-1} - \mathbf{H}_0^1} dt \\ &= \langle \nabla_H(r_h \phi), \mathbf{d}_{h,k} \rangle_{L^2(\mathbf{H}^{-1}) - L^2(\mathbf{H}_0^1)} \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Para pasar al límite en los términos estabilizadores, tomemos en primer lugar q en $L_0^2(\omega)$. Tomemos $\{q_h\}_{h>0} \in M_h$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|q_h - q\|_{L_0^2(\omega)} = 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_{h,k}, \mathcal{R}_{2h}(\nabla_H q_h)) \psi dt &= \int_0^T \psi \langle \nabla_H q_h, \mathbf{d}_{h,k} \rangle_{\mathbf{H}^{-1} - \mathbf{H}_0^1} dt \\ &= \langle \nabla_H(q_h \psi), \mathbf{d}_{h,k} \rangle_{L^2(\mathbf{H}^{-1}) - L^2(\mathbf{H}_0^1)} \longrightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_0^T (\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u}_{h,k}^1, q_h \rangle_{0,\omega}) \psi dt + \int_0^T \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_{h,k}, \mathcal{R}_{2h}(\nabla_H q_h)) \psi dt \right] = \int_0^T (\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u}_k^1, q \rangle_{0,\omega}) \psi dt.$$

Por lo que refiere a la estabilización de la convección:

$$\begin{aligned} \int_0^T |\mathbf{S}_{1h}(\mathbf{c}_{h,k}, \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{U}_{h,k}^0 \cdot \nabla \mathbf{z}_h) D)) \phi| dt &= \int_0^T \left| \int_{\Omega} (\mathbf{U}_{h,k}^0 \cdot \nabla \mathbf{z}_h) \cdot \mathbf{c}_{h,k} D dx dx_3 \right| |\phi| dt \\ &\leq \int_0^T (\|D\|_{\infty,\omega} |\mathbf{u}_{h,k}^0|_{1,\Omega} \|\mathbf{c}_{h,k}\|_{L^4(\Omega)} |\mathbf{z}_h|_{1,4;\Omega}) |\phi| dt \\ &\leq \int_0^T (\|D\|_{\infty,\omega} |\mathbf{u}_{h,k}^0|_{1,\Omega} \|\mathbf{c}_{h,k}\|_{1;\Omega} |\mathbf{z}_h|_{1,4;\Omega}) |\phi| dt h^{1/4} \\ &\leq C \|D\|_{\infty,\omega} |\mathbf{z}_h|_{1,4;\Omega} \|\phi\|_{L^\infty(0,T)} \\ &\quad \|\mathbf{u}_{h,k}^0\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}_b^1(\Omega))} \|\mathbf{c}_{h,k}\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}_b^1(\Omega))} h^{1/4}. \end{aligned}$$

Todas las normas de esta última expresión está uniformemente acotadas en h . Por tanto, el término de estabilización de la convección tiende a 0 cuando $h \rightarrow 0$.

Los términos restantes en (4.23) pasan al límite de forma estándar. ■

Para terminar esta Sección, probaremos que (4.33) es, de hecho, una semi-discretización temporal genuina de (4.1).

Teorema 4.17 *Existen funciones $\mathbf{w}_k^j \in \mathbf{H}_b^1(\Omega)$, $j = 0, \dots, N$, tales que en casi todo $[0, T] \times \Omega$*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k^i(t, \mathbf{x}, z) &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{w}_k^{n+i}(\mathbf{x}, z) 1_{(t_n, t_{n+1}]}, \quad i = 1, 2, \\ \mathbf{u}_k(t, \mathbf{x}, z) &= \sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{w}_k^{n+1}(\mathbf{x}, z) \frac{t - t_n}{k} + \mathbf{w}_k^n(\mathbf{x}, z) \frac{t_{n+1} - t}{k}) 1_{(t_n, t_{n+1}]}. \end{aligned}$$

Más aún, se verifica

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\mathbf{w}_k^{n+1} - \mathbf{w}_k^n}{k}, \mathbf{v} \right) + \int_{\Omega} (\mathbf{W}_k^n \cdot \nabla) \mathbf{w}_k^{n+1} \cdot \mathbf{v} dx dz + \\ & \quad + (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{w}_k^{n+1}, \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{v}) + f(\mathbf{k} \times \mathbf{w}_k^{n+1}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{l}_k^{n+1}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall n = 0, \dots, N-1, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{C}_b^\infty; \\ & \quad \nabla_H \cdot \langle \mathbf{w}_k^n \rangle(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall n = 0, \dots, N, \\ & \quad \mathbf{w}_k^0 = \mathbf{u}_0, \end{aligned} \right. \tag{4.34}$$

Demostración.-

Observamos que las $\mathbf{u}_k^i(t, \mathbf{x}, z)$ son funciones escalonadas en tiempo. En efecto, sea $0 \leq n \leq N-1$ y consideremos dos instantes t_1, t_2 distintos en $(t_n, t_{n+1}]$. Gracias al Lema 4.12 se tiene c.p.t. t_1, t_2 :

$$\|\mathbf{u}_k^i(t_1) - \mathbf{u}_k^i(t_2)\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} = \lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_{h,k}^i(t_1) - \mathbf{u}_{h,k}^i(t_2)\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} = \lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} = 0.$$

Además

$$\|\mathbf{u}_k^1(t) - \mathbf{u}_k^0(t+k)\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} = \lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_{h,k}^1(t) - \mathbf{u}_{h,k}^0(t+k)\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} = \lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} = 0.$$

Tenemos derecho pues a expresar las \mathbf{u}_k^i como funciones escalonadas en tiempo:

$$\mathbf{u}_k^i(t, \mathbf{x}, z) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{w}_k^{n+i}(\mathbf{x}, z) 1_{(t_n, t_{n+1}]}, \quad i = 1, 2.$$

Más aún, por definición

$$\mathbf{u}_{h,k}(t, \mathbf{x}, z) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\mathbf{u}_h^{n+1}(\mathbf{x}, z) \frac{t - t_n}{k} + \mathbf{u}_h^n(\mathbf{x}, z) \frac{t_{n+1} - t}{k} \right) 1_{(t_n, t_{n+1}]}$$

La convergencia en casi todo $[0, T] \times \Omega$ de $\mathbf{u}_{h,k}^i$ cuando $h \rightarrow 0$ que acabamos de demostrar permite a partir de la anterior igualdad identificar en casi todo $[0, T] \times \Omega$ la función \mathbf{u}_k como:

$$\mathbf{u}_k(t, \mathbf{x}, z) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\mathbf{w}_k^{n+1}(\mathbf{x}, z) \frac{t - t_n}{k} + \mathbf{w}_k^n(\mathbf{x}, z) \frac{t_{n+1} - t}{k} \right) 1_{(t_n, t_{n+1}]}, \quad (4.35)$$

En particular, se tiene que, para casi todos $t \in [0, T]$ y $(\mathbf{x}, z) \in \Omega$:

$$\mathbf{u}_{h,k}(t, \mathbf{x}, z) \longrightarrow \mathbf{u}_k(t, \mathbf{x}, z) \quad \text{cuando } h \rightarrow 0. \quad (4.36)$$

El Teorema de Convergencia Dominada proporciona ahora

$$\mathbf{u}_{h,k} \longrightarrow \mathbf{u}_k \quad \text{en } L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \quad \text{cuando } h \rightarrow 0. \quad (4.37)$$

Por otra parte, la igualdad (4.35) permite identificar en cada $(t_n, t_{n+1}]$ la derivada temporal $\partial_t \mathbf{u}_k$ como el cociente incremental $(\mathbf{w}_k^{n+1} - \mathbf{w}_k^n)/k$.

Puesto que la primera ecuación en (4.33)(a) se satisface $\forall \phi \in C_0^1(0, T)$ se tiene la primera ecuación en (4.34).

Es más, sustituyendo $t = 0$ en (4.35) se tiene $\mathbf{u}_k(0, \mathbf{x}, z) = \mathbf{w}_k^0(\mathbf{x}, z)$ en casi todo $(\mathbf{x}, z) \in \Omega$.

Por otro lado, de la formulación (4.33) se recupera la condición inicial $\mathbf{u}_k(0, \mathbf{x}, z) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, z)$ en casi todo Ω mediante el siguiente argumento: Teniendo en cuenta la densidad de \mathcal{C}_b^∞ en \mathcal{V}^3 establecemos (4.33)(a) para funciones test en \mathcal{V}^3 , lo que implica, $\partial_t \mathbf{u}_k \in L^1(0, T; (\mathcal{V}^3)')$. Razonando como en la Sección 4.3 se tiene que $\mathbf{u}_k(0) \in \mathbf{H}$.

Por otro lado, escribiendo la misma expresión para $\phi \in \mathcal{D}(0, T)$, encontramos la siguiente igualdad, válida en el sentido de las distribuciones en $(0, T)$:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}) + \langle (\mathbf{U}_k^0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_k^1, \mathbf{v} \rangle + (\nabla_\nu \mathbf{u}_k^1, \nabla_\nu \mathbf{v}) + f((\mathbf{u}_k^1)^\perp, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle, \quad (4.38)$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}^3$. Multiplicamos ahora (4.38) por $\phi(t) \in C^1([0, T])$ verificando $\phi(T) = 0$, integramos con respecto a t , e integramos por partes. Comparando con (4.33)(a) vemos que

$$(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_k(0), \mathbf{v}) \phi(0) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}^3, \forall \phi \in C^1([0, T]) \text{ tal que } \phi(T) = 0.$$

Por tanto, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_k(0) = \mathbf{w}_k^0$ en casi todo $(\mathbf{x}, z) \in \Omega$.

Hagamos notar por último que, por la condición (4.33)(b), se tiene en casi todos $t \in [0, T], \mathbf{x} \in \omega$:

$$\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u}_k^1 \rangle(t, \mathbf{x}) = 0.$$

Por ser \mathbf{u}_k^1 escalonada en tiempo, lo anterior implica en casi todo $\mathbf{x} \in \omega$:

$$\nabla_H \cdot \langle \mathbf{w}_k^{n+1} \rangle(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall n = 0, \dots, N-1.$$

Además, ya hemos deducido que $\mathbf{w}_k^0 = \mathbf{u}_0$. Por hipótesis $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}$, luego es de divergencia débilmente nula. En definitiva:

$$\nabla_H \cdot \langle \mathbf{w}_k^n \rangle(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall n = 0, \dots, N.$$

Se concluye en particular que para casi todo $t \in [0, T], \mathbf{x} \in \omega$:

$$\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u}_k^i \rangle(t, \mathbf{x}) = \nabla_H \cdot \langle \mathbf{u}_k \rangle(t, \mathbf{x}) = 0.$$

4.6.2 Convergencia de la semi-discretización en tiempo.

La sucesión $\{\mathbf{u}_k\}_{k>0}$ proporcionada por la semi-discretización (4.33) converge a una solución de nuestro problema (4.3). Para ello, probemos en primer lugar el

Lema 4.18 *Las sucesiones $\{\mathbf{u}_k^i\}_{k>0}, \{\mathbf{u}_k\}_{k>0}$ están acotadas en $L^2(0, T; \mathbf{H}_b^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.*

Además se tiene la estimación

$$\|\mathbf{u}_k^1 - \mathbf{u}_k^0\|_{L^2(0, T; \mathbf{H})} \leq Ck.$$

Demostración.-

Para estimar las sucesiones $\{\mathbf{u}_k^i\}_{k>0}$, $\{\mathbf{u}_k\}_{k>0}$ en norma $L^2(0, T; \mathbf{H}_b^1(\Omega))$ uniformemente en k usamos la semicontinuidad inferior débil de la aplicación norma (Cf. Brézis [14]). Concretamente, de las convergencias débiles (4.24) y el Lema 4.8 se obtiene:

$$\|\mathbf{u}_k^i\|_{L^2(0, T; \mathcal{V}^2)} \leq \liminf_h \|\mathbf{u}_{h,k}^i\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}_b^1(\Omega))} \leq C; \quad (4.39)$$

$$\|\mathbf{u}_k\|_{L^2(0, T; \mathcal{V}^2)} \leq \liminf_h \|\mathbf{u}_{h,k}\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}_b^1(\Omega))} \leq C; \quad (4.40)$$

$$\|\mathbf{u}_k^i - \mathbf{u}_k\|_{L^2(0, T; \mathbf{H})} \leq \liminf_h \|\mathbf{u}_{h,k}^i - \mathbf{u}_{h,k}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq Ck; \quad (4.41)$$

$$\|\mathbf{u}_k^1 - \mathbf{u}_k^0\|_{L^2(0, T; \mathbf{H})} \leq \liminf_h \|\mathbf{u}_{h,k}^1 - \mathbf{u}_{h,k}^0\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq Ck.$$

Para la estimación correspondiente en norma $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ usamos la semicontinuidad inferior débil-* de la aplicación norma (Cf. [14]):

$$\|\mathbf{u}_k^i\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{H})} \leq \liminf_h \|\mathbf{u}_{h,k}^i\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C. \quad (4.42)$$

$$\|\mathbf{u}_k\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{H})} \leq \liminf_h \|\mathbf{u}_{h,k}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C.$$

■

Estas estimaciones permiten extraer subsucesiones de $\{\mathbf{u}_k^i\}_{k>0}$ y $\{\mathbf{u}_k\}_{k>0}$ débilmente convergentes. Para obtener convergencia fuerte en algún espacio $L^\theta([0, T] \times \Omega)$, con $\theta \geq 1$, aplicaremos el Teorema 4.3.

Previamente, demostramos el:

Lema 4.19 *La sucesión $\{\partial_t \mathbf{u}_k\}_{k>0}$ está uniformemente acotada en $L^1(0, T; (\mathcal{V}^3)')$.*

Demostración.-

Sea $\mathbf{v} \in \mathcal{V}^3$. Gracias a las inyecciones $\mathcal{V}^2 \hookrightarrow \mathbf{H} \hookrightarrow (\mathcal{V}^3)'$ se tiene

$$\langle \partial_t \mathbf{u}_k, \mathbf{v} \rangle_{(\mathcal{V}^3)', \mathcal{V}^3} = (\partial_t \mathbf{u}_k, \mathbf{v}).$$

A partir de (4.33), y teniendo en cuenta la densidad de C_b^∞ en \mathcal{V}^3 , podemos escribir:

$$\begin{aligned}
 (\partial_t \mathbf{u}_k, \mathbf{v}) &= - \int_{\Omega} (\mathbf{U}_k^0 \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k^1 \, dx dz - (\nabla_{\nu} \mathbf{u}_k^1, \nabla_{\nu} \mathbf{v}) \\
 &\quad - f((\mathbf{u}_k^1)^{\perp}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{l}_k, \mathbf{v} \rangle.
 \end{aligned}$$

Acotando como en la demostración del Lema 4.6 se llega a

$$\begin{aligned}
 |(\partial_t \mathbf{u}_k, \mathbf{v})| &\leq C(\Omega, \nu, D) [|\mathbf{u}_k^0|_{1,\Omega} |\mathbf{u}_k^1|_{1,\Omega} + \bar{\nu} |\mathbf{u}_k^1|_{1,\Omega} \\
 &\quad + f \|\mathbf{u}_k^1\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{l}_k\|_{-1,\Omega}] \|\mathbf{v}\|_{1,3,\Omega}.
 \end{aligned}$$

donde $\bar{\nu} = \max \{\nu_x, \nu_y, \nu_z\}$.
 Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \|\partial_t \mathbf{u}_k\|_{(\mathcal{V}^3)'} &\leq C(\Omega, \nu, D) [|\mathbf{u}_k^0|_{1,\Omega} |\mathbf{u}_k^1|_{1,\Omega} + |\mathbf{u}_k^1|_{1,\Omega} \\
 &\quad + f \|\mathbf{u}_k^1\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{l}_k\|_{\mathbf{H}_b^{-1}(\Omega)}].
 \end{aligned}$$

Se sigue

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \|\partial_t \mathbf{u}_k\|_{(\mathcal{V}^3)'} \, dt &\leq C(\Omega, \nu, D) [\|\mathbf{u}_k^0\|_{L^2(0,T;\mathcal{V}^2)} (\|\mathbf{u}_k^1\|_{L^2(0,T;\mathcal{V}^2)} \\
 &\quad + \sqrt{T} (\|\mathbf{u}_k^1\|_{L^2(0,T;\mathcal{V}^2)} + \|\mathbf{l}_k\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}_b^{-1}(\Omega))}) \\
 &\quad + f T \|\mathbf{u}_k^1\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H})}]. \tag{4.43}
 \end{aligned}$$

Ahora, gracias a las estimaciones (4.39) y (4.42) y la regularidad $L^2(0, T; \mathbf{H}_b^{-1}(\Omega))$ del término fuente \mathbf{l} , el segundo miembro de (4.43) permanece uniformemente acotado en k por una constante independiente de los datos. ■

Notemos que las inyecciones $\mathcal{V}^2 \hookrightarrow \mathbf{H} \hookrightarrow (\mathcal{V}^3)'$ son continuas, la primera de ellas compacta. De la estimación 4.40, el Lema 4.19 y el Teorema 4.3 se tiene:

Proposición 4.20 *La sucesión $\{\mathbf{u}_k\}_{k>0}$ es fuertemente relativamente compacta en $L^1(0, T; \mathbf{H})$.*

Estamos en condiciones de demostrar:

Teorema 4.21 *Existen subsucesiones, que denotamos de la misma forma, tales que*

$$\begin{cases} \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k^i &\longrightarrow \mathbf{u} \text{ débil en } L^2(0, T; \mathbf{H}_b^1(\Omega)) \text{ cuando } k \rightarrow 0, \\ \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k^i &\longrightarrow \mathbf{u} \text{ débil-* en } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \text{ cuando } k \rightarrow 0, \\ \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k^i &\longrightarrow \mathbf{u} \text{ en } \mathbf{L}^2([0, T] \times \Omega) \text{ cuando } k \rightarrow 0. \end{cases} \tag{4.44}$$

donde $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{H}_b^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ es solución de

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad - \int_0^T (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \phi' dt + \int_0^T \langle (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \phi dt + \int_0^T (\nabla_\nu \mathbf{u}, \nabla_\nu \mathbf{v}) \phi dt + \\ \quad f \int_0^T (\mathbf{u}^\perp, \mathbf{v}) \phi dt = \int_0^T \langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \phi \rangle dt, \\ (b) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{array} \right. \quad (4.45)$$

para todo $\mathbf{v} \in C_b^\infty$, $q \in L_0^2(\omega)$, $\phi \in W_0^{1,1}(0, T)$.

Demostración.-

Observemos que de la acotación de $\{\mathbf{u}_k\}_{k>0}$ en $L^2((0, T); \mathbf{L}^6(\Omega))$ y $L^\infty([0, T]; \mathbf{H})$, se obtiene la acotación (usando la desigualdad de Hölder), en

$$L^{2/(1-\theta)}((0, T); \mathbf{L}^{6/(1+2\theta)}(\Omega)) \quad \forall \theta \in (0, 1).$$

Si $\theta = 1/2$, el espacio en cuestión es

$$L^4((0, T); \mathbf{L}^3(\Omega)) \hookrightarrow L^3((0, T); \mathbf{L}^3(\Omega)) \equiv \mathbf{L}^3((0, T) \times \Omega).$$

Aplicamos ahora el siguiente resultado, consecuencia del Teorema de Egorov:

Proposición 4.22 *Sea $\{u_n\}_{n>0}$ una sucesión acotada en $L^p((0, T) \times \Omega)$ convergente en casi todo a $u \in L^p((0, T) \times \Omega)$, con $1 < p \leq \infty$. Entonces, para todo q tal que $1 \leq q < p$, la sucesión $\{u_n\}_{n>0}$ converge a u en $L^q((0, T) \times \Omega)$.*

Según la Proposición 4.20, por ser las inyecciones $\mathbf{H} \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^1(\Omega)$ continuas, la compacidad relativa se da en $L^1(0, T; \mathbf{L}^1(\Omega))$. Así, $\{\mathbf{u}_k\}_{k>0}$ converge en casi todo, tras extraer una subsucesión conveniente, y, por la Proposición 4.22, en $L^r([0, T] \times \Omega)$, con $r \in [1, 3]$; en particular, en $\mathbf{L}^2([0, T] \times \Omega)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_k \longrightarrow \mathbf{u} \text{ en } L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)). \end{array} \right. \quad (4.46)$$

Por otro lado, existen subsucesiones, que denotamos de la misma manera, tales que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_k^i \longrightarrow \mathbf{u}^i \text{ débil en } L^2(0, T; \mathbf{H}_b^1(\Omega)) \text{ cuando } h \rightarrow 0, \\ \mathbf{u}_k^i \longrightarrow \mathbf{u}^i \text{ débil-* en } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \text{ cuando } h \rightarrow 0. \end{array} \right. \quad (4.47)$$

En vista de (4.41), se sigue que $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^1$ y

$$\mathbf{u}_k^1 \longrightarrow \mathbf{u} \text{ en } \mathbf{L}^2([0, T] \times \Omega),$$

$$\mathbf{u}_k^0 \longrightarrow \mathbf{u} \text{ en } \mathbf{L}^2([0, T] \times \Omega).$$

Tomando límite $k \rightarrow 0$ en (4.33)(a), se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} - \int_0^T (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \phi' dt + \int_0^T \langle (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \phi dt + \int_0^T (\nabla_\nu \mathbf{u}, \nabla_\nu \mathbf{v}) \phi dt + \\ f \int_0^T (\mathbf{u}^\perp, \mathbf{v}) \phi dt = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) \phi(0) + \int_0^T \langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \phi \rangle dt, \end{array} \right. \quad (4.48)$$

para todo $\mathbf{v} \in C_b^\infty$, $q \in L_0^2(\omega)$, $\phi \in C^1[0, T]$ tal que $\phi(T) = 0$.

Comprobemos $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$. Teniendo en cuenta la densidad de C_b^∞ en \mathcal{V}^3 establecemos (4.48) para funciones test en \mathcal{V}^3 , lo que implica, $\partial_t \mathbf{u} \in L^1(0, T; (\mathcal{V}^3)')$. Razonando como en la Sección 4.3 se tiene que $\mathbf{u}(0) \in \mathbf{H}$.

Por otro lado, escribiendo la misma expresión para $\phi \in \mathcal{D}(0, T)$, encontramos la siguiente igualdad, válida en el sentido de las distribuciones en $(0, T)$:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + (\nabla_\nu \mathbf{u}, \nabla_\nu \mathbf{v}) + f (\mathbf{u}^\perp, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle, \quad (4.49)$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}^3$. Multiplicamos ahora (4.49) por $\phi(t) \in C^1([0, T])$ verificando $\phi(T) = 0$, integramos con respecto a t , e integramos por partes. Comparando con (4.48)(a) vemos que

$$(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}(0), \mathbf{v}) \phi(0) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}^3, \forall \phi \in C^1([0, T]) \text{ tal que } \phi(T) = 0.$$

Como ya sabemos, $\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}$. Además \mathcal{V}^3 es denso en \mathbf{H} . Se sigue entonces que $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ en \mathbf{H} .

4.7 Recuperación de la presión.

Una vez conocida \mathbf{u} , recuperamos la presión a través del siguiente resultado:

Proposición 4.23 *Sea \mathbf{u} la velocidad límite hallada en el Teorema 4.21. Entonces, existe $p_s \in \mathcal{D}'(0, T; L_0^{3/2}(\omega))$ tal que (\mathbf{u}, p_s) verifica (4.3)(a).*

Demostración.-

Definamos, para todo $t \in (0, T]$, $(\mathbf{x}, z) \in \Omega$

$$\mathcal{U}(t, \mathbf{x}, z) = \int_0^t \mathbf{u}(t', \mathbf{x}, z) dt'.$$

Puesto que $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathcal{V}^2)$, $\mathcal{U} \in C^0([0, T]; \mathcal{V}^2)$. Tomemos $\mathbf{v} \in \mathcal{V}^3$ e integremos (4.49) en el intervalo $[0, t]$. El Teorema de Fubini proporciona:

$$\int_\Omega (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{v} + \left\langle \int_0^t (\mathbf{U}(s) \cdot \nabla) \mathbf{u}(s) ds, \mathbf{v} \right\rangle + \int_\Omega \nabla_\nu \mathcal{U} : \nabla_\nu \mathbf{v} + f \int_\Omega (\mathbf{k} \times \mathcal{U}) \cdot \mathbf{v} = \int_0^t \langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle. \quad (4.50)$$

Más aún, integrando en tiempo las igualdades

$$\mathbf{u}(t, \cdot)|_{\Gamma_b} = 0, \nu_v \partial_z \mathbf{u}(t, \cdot)|_{\Gamma_s} = \tau \quad \text{en casi todo } [0, T], \quad (4.51)$$

se deduce

$$\mathcal{U}|_{\Gamma_b} = 0, \nu_v \partial_z \mathcal{U}|_{\Gamma_s} = \int_0^t \tau.$$

Denotemos

$$\begin{aligned} F(t, \mathbf{x}) &= \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \int_0^t (\mathbf{U}(s, \mathbf{x}) \cdot \nabla) \mathbf{u}(s, \mathbf{x}) ds \\ &\quad - \Delta_\nu \mathcal{U}(t, \mathbf{x}) + f(\mathbf{k} \times \mathcal{U})(t, \mathbf{x}) - \int_0^t \mathbf{l}(s) ds. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Como se dedujo en la Sección 4.3, la función

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \Delta_\nu \mathbf{u} + f \mathbf{u}^\perp - \mathbf{l}$$

tiene regularidad $L^1(0, T; (\mathcal{V}^3)')$, luego la función $F \in C^0([0, T]; (\mathcal{V}^3)')$.

Integrando por partes en (4.50) y usando (4.51):

$$\langle F(t, \cdot), \mathbf{v} \rangle_{(\mathcal{V}^3)', \mathcal{V}^3} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}^3, \quad \text{a.e. in } [0, T]. \quad (4.53)$$

Aplicando la adaptación del Lema de De Rham que se puede encontrar en (Cf. [55]), para todo $t \in [0, T]$ existe $P_s(t, \cdot) \in L_0^{3/2}(\omega)$ tal que

$$\langle F(t, \cdot), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{W}_b^{-1,3/2}(\Omega), \mathbf{W}_b^{1,3}(\Omega)} = (P_s(t, \cdot), \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v} \rangle)_\omega, \quad (4.54)$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_b^{1,3}(\Omega)$.

Si aplicamos en (4.54) la condición inf-sup generalizada (Cf. Amrouche and Girault [2]):

$$\|q\|_{L_0^{3/2}(\omega)} \leq \alpha \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,3}(\Omega)} \frac{(q, \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v} \rangle)_\omega}{|\mathbf{v}|_{1,3;\Omega}} \leq \alpha \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_b^{1,3}(\Omega)} \frac{(q, \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v} \rangle)_\omega}{|\mathbf{v}|_{1,3;\Omega}},$$

se sigue

$$\|P_s(t_1, \cdot) - P_s(t_2, \cdot)\|_{L_0^{3/2}(\omega)} \leq \alpha \|F(t_1, \cdot) - F(t_2, \cdot)\|_{\mathbf{W}_b^{-1,3/2}(\Omega)}.$$

Como $F \in C^0([0, T]; \mathbf{W}_b^{-1,3/2}(\Omega))$, se tiene $P_s \in C^0([0, T]; L_0^{3/2}(\omega))$.

Denotemos $p_s = \partial_t P_s \in \mathcal{D}'([0, T]; L_0^{3/2}(\omega))$. Derivando en tiempo en (4.54):

$$\begin{aligned} \langle \partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \nabla_\nu \mathbf{u}, \nabla_\nu \mathbf{v} \rangle + \\ + f(\mathbf{u}^\perp, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle = \langle \nabla_H p_s, \mathbf{v} \rangle \quad \text{en } \mathcal{D}'(0, T), \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_b^{1,3}(\Omega)$. Esto es equivalente a (4.1)(a) en el sentido de $\mathcal{D}'(0, T; \mathbf{W}_b^{-1,3/2}(\Omega))$. Si a continuación integramos en tiempo en el intervalo $[0, T]$, se obtiene:

$$\begin{cases} - \int_0^T (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \phi' dt + \int_0^T \langle (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \phi dt + \int_0^T (\nabla_\nu \mathbf{u}, \nabla_\nu \mathbf{v}) \phi dt + \\ f \int_0^T (\mathbf{u}^\perp, \mathbf{v}) \phi dt - \int_0^T \langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle \phi dt = - \langle \nabla p_s, \mathbf{v} \phi \rangle, \end{cases} \quad (4.55)$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_b^{1,3}(\Omega)$, $\phi \in W_0^{1,1}(0, T)$, que es precisamente (4.3)(a). ■

4.8 Conclusión.

Podemos ahora concluir la demostración del Teorema 4.5.

Demostración.-

De las convergencias (4.37) y (4.44) existe una subsucesión global de velocidades $\{\mathbf{u}_{h_k, k}\}_{h_k, k > 0}$ tal que

$$\begin{aligned} h_k &\longrightarrow 0 && \text{cuando } k \rightarrow 0, \\ \mathbf{u}_{h_k, k} &\longrightarrow \mathbf{u} && \text{en } L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \text{ cuando } k \rightarrow 0, \\ \mathbf{u}_{h_k, k} &\longrightarrow \mathbf{u} \text{ débil en } L^2(0, T; \mathbf{H}_b^1(\Omega)) && \text{cuando } k \rightarrow 0, \\ \mathbf{u}_{h_k, k} &\longrightarrow \mathbf{u} \text{ débil-* en } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) && \text{cuando } k \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.56)$$

A continuación, consideremos:

- un elemento $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_b^{1,4}(\Omega)$ arbitrario,
- un elemento $\phi \in W_0^{1,1}(0, T)$ arbitrario,
- una sucesión $\{\mathbf{v}_{h_k}\}_{h_k > 0}$ tal que $\mathbf{v}_{h_k} \in \mathbf{V}_{h_k}$ y $\mathbf{v}_{h_k} \longrightarrow \mathbf{v}$ en $\mathbf{W}_b^{1,4}(\Omega)$,

Se puede probar, siguiendo los argumentos de la Sección 4.6, que la expresión

$$\begin{cases} - \int_0^T (\mathbf{u}_{h_k, k}, \mathbf{v}_{h_k}) \phi' dt + \int_0^T \langle (\mathbf{U}_{h_k, k}^0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_{h_k, k}^1, \mathbf{v}_{h_k} \rangle \phi dt + \int_0^T (\nabla_\nu \mathbf{u}_{h_k, k}^1, \nabla_\nu \mathbf{v}_{h_k}) \phi dt \\ + f \int_0^T ((\mathbf{u}_{h_k, k}^1)^\perp, \mathbf{v}_{h_k}) \phi dt + \int_0^T \mathbf{S}_{1h}(\mathbf{c}_{h_k, k}, \mathcal{R}_{1h}((\mathbf{U}_{h_k, k}^0 \cdot \nabla \mathbf{v}_{h_k}) D)) \phi dt \\ - \int_0^T \langle \mathbf{l}_k, \mathbf{v}_{h_k} \rangle \phi dt \end{cases} \quad (4.57)$$

converge cuando k tiende a 0, a la expresión

$$\begin{cases} - \int_0^T (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \phi' dt + \int_0^T \langle (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \phi dt + \int_0^T (\nabla_\nu \mathbf{u}, \nabla_\nu \mathbf{v}) \phi dt \\ + f \int_0^T (\mathbf{u}^\perp, \mathbf{v}) \phi dt - \int_0^T \langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle \phi dt. \end{cases} \quad (4.58)$$

De (4.23)(a) se sigue que (4.57) es igual a $-\langle \nabla p_{h_k, k}, \mathbf{v}_{h_k} \phi \rangle$.
 Análogamente, de (4.55) se sigue que (4.58) es igual a $-\langle \nabla p_s, \mathbf{v} \phi \rangle$.
 Luego,

$$-\langle \nabla p_{h_k, k}, \mathbf{v}_{h_k} \phi \rangle \longrightarrow -\langle \nabla p_s, \mathbf{v} \phi \rangle \quad \text{cuando } k \rightarrow 0.$$

■

4.9 Convergencia de la presión en el Problema de Stokes Hidrostático.

Tratemos ahora el caso en el que no hay término convectivo en (4.1). La formulación débil que consideraremos en este caso es:

Hallar $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathcal{V}^2) \cap L^\infty(0, T; \mathbf{H})$ tal que:

$$\begin{cases} - \int_0^T (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \phi' dt + \int_0^T (\nabla_\nu \mathbf{u}, \nabla_\nu \mathbf{v}) \phi dt + \\ f \int_0^T (\mathbf{u}^\perp, \mathbf{v}) \phi dt + \langle \nabla p_s, \mathbf{v} \phi \rangle = \int_0^T \langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle \phi dt, \end{cases} \quad (4.59)$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_b^1(\Omega)$, $\phi \in W_0^{1,1}(0, T)$, donde ahora la dualidad $\langle \nabla p_s, \mathbf{v} \phi \rangle$ tiene lugar entre los espacios $W^{-1,\infty}(0, T; \mathbf{H}_b^{-1}(\Omega))$ y $W_0^{1,1}(0, T; \mathbf{H}_b^1(\Omega))$.

Obsérvese que, en el caso lineal, las funciones test tienen la misma regularidad espacial que la solución. Además, no hay necesidad en este caso de estabilizar la derivada convectiva, de modo que suponemos $\tau_K = 0$ en nuestro esquema, que formulamos a continuación

Dado $0 \leq n < N - 1$ y (\mathbf{u}_h^n, p_h^n) , obtener $(\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in \mathbf{V}_h \times M_h$ satisfaciendo,

$$\begin{cases} (a) \quad \left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k}, \mathbf{v}_h \right) + (\nabla_\nu \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla_\nu \mathbf{v}_h) + f(\mathbf{k} \times \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) \\ \quad \quad \quad - (p_h^{n+1}, \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle)_\omega = \langle \mathbf{l}^{n+1}, \mathbf{v}_h \rangle \\ (b) \quad (\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u}_h^{n+1} \rangle, q_h)_\omega + \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \tau_T (\nabla_H p_h^{n+1}, \nabla_H q_h)_T = 0, \end{cases} \quad (4.60)$$

para todo $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times M_h$.

Junto a las estimaciones de energía probadas en el Lema 4.7, en este marco se obtiene:

Proposición 4.24 *Supongamos $\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$, $\tau = 0$. Entonces*

$$\sum_{n=0}^{N-1} k \|p_h^{n+1}\|_{L_0^2(\omega)}^2 \leq C \text{ donde } C \text{ depende únicamente de los datos.}$$

Demostración.-

Tomemos $q_h = p_h^{n+1}$ en (4.60)(b) en la etapa $n + 1$ y $q_h = p_h^n$ en (4.60)(b) en la etapa n . Restando ambas ecuaciones resulta

$$(\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, p_h^{n+1} \rangle)_\omega + \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_h^{n+1} - \mathbf{d}_h^n, \mathbf{d}_h^{n+1}) = 0. \quad (4.61)$$

Testando $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n$ en (4.60)(a), y sumando la igualdad resultante con (4.61) queda:

$$\begin{aligned} k \left\| \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k} \right\|_{0,\Omega}^2 + (\nabla_\nu \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla_\nu (\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n))_\Omega + \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_h^{n+1} - \mathbf{d}_h^n, \mathbf{d}_h^{n+1}) \\ = f(\mathbf{k} \times \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n+1}) + (\mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n)_\Omega. \end{aligned}$$

De

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_h^{n+1} - \mathbf{d}_h^n, \mathbf{d}_h^{n+1}) &= \frac{1}{2} \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_h^{n+1}, \mathbf{d}_h^{n+1}) - \frac{1}{2} \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_h^n, \mathbf{d}_h^n) \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_h^{n+1} - \mathbf{d}_h^n, \mathbf{d}_h^{n+1} - \mathbf{d}_h^n); \end{aligned}$$

$$f(\mathbf{k} \times \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n+1}) \leq 4f^2 k \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{4k} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n+1}\|_{0,\Omega}^2;$$

$$(\mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n)_\Omega \leq 4k \|\mathbf{f}^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{4k} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n+1}\|_{0,\Omega}^2$$

y

$$\begin{aligned} (\nabla_\nu \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla_\nu (\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n))_\Omega &= \frac{1}{2} \|\nabla_\nu \mathbf{u}_h^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 - \frac{1}{2} \|\nabla_\nu \mathbf{u}_h^n\|_{0,\Omega}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\nabla_\nu (\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n)\|_{0,\Omega}^2, \end{aligned}$$

deducimos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} k \left\| \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k} \right\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_\nu \mathbf{u}_h^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_\nu (\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n)\|_{0,\Omega}^2 \\ + \frac{1}{2} \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_h^{n+1}, \mathbf{d}_h^{n+1}) + \frac{1}{2} \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_h^{n+1} - \mathbf{d}_h^n, \mathbf{d}_h^{n+1} - \mathbf{d}_h^n) \\ \leq 4f^2 k \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 + 4k \|\mathbf{f}^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_h^n, \mathbf{d}_h^n) + \frac{1}{2} \|\nabla_\nu \mathbf{u}_h^n\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Sumando en $n = 0, \dots, m - 1$ para $m \leq N$ se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} k \left\| \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k} \right\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_\nu \mathbf{u}_h^m\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \|\nabla_\nu (\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n)\|_{0,\Omega}^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_h^m, \mathbf{d}_h^m) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_h^{n+1} - \mathbf{d}_h^n, \mathbf{d}_h^{n+1} - \mathbf{d}_h^n) \\ & \leq C (\|\nabla_\nu \mathbf{u}_h^0\|_{0,\Omega}^2 + \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_h^0, \mathbf{d}_h^0) + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + f^2 T), \end{aligned} \quad (4.63)$$

donde C denota una constante independiente de h y k . (4.63) proporciona, en particular, una cota para $\{\partial_t \mathbf{u}_{h,k}\}_{h,k>0}$ en $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

En este punto, es posible obtener estimaciones uniformes en $L^2(0, T; L_0^2(\omega))$ para la sucesión $\{p_h^n\}_{n,h}$ dada por el esquema (4.60). Usaremos la condición inf-sup (2.3) con $\alpha = \alpha' = 2$.

Usando la primera ecuación en (4.60) (de forma similar al apartado **Estimaciones para la presión** en la prueba del Lema 4.6):

$$\begin{aligned} \|p_h^{n+1}\|_{L_0^2(\omega)} & \leq C \left[\left\| \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k} \right\|_{0,\Omega} + \bar{\nu} |\mathbf{u}_h^{n+1}|_{1,\Omega} + f \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{f}^{n+1}\|_{0,\Omega} + \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_h^{n+1}, \mathbf{d}_h^{n+1}) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} k \|p_h^{n+1}\|_{L_0^2(\omega)}^2 & \leq C \left[\sum_{n=0}^{N-1} k \left\| \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k} \right\|_{0,\Omega}^2 + \bar{\nu} \sum_{n=0}^{N-1} k |\mathbf{u}_h^{n+1}|_{1,\Omega}^2 \right. \\ & \quad \left. + f^2 \max_{0 \leq n \leq N-1} \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_{0,\Omega} \left(\sum_{n=0}^{N-1} k \right) + \sum_{n=0}^{N-1} k \|\mathbf{f}^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 \right. \\ & \quad \left. + \max_{0 \leq n \leq N-1} \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_h^{n+1}, \mathbf{d}_h^{n+1}) \left(\sum_{n=0}^{N-1} k \right) \right]. \end{aligned}$$

Las estimaciones dadas por el Lema 4.7 y (4.63) implican:

$$\sum_{n=0}^{N-1} k \|p_h^{n+1}\|_{L_0^2(\omega)}^2 \leq C \left[\|\nabla_\nu \mathbf{u}_h^0\|_{0,\Omega}^2 + \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_h^0, \mathbf{d}_h^0) + \bar{\nu} + (f^2 + 1) T + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right].$$

Nota.- La hipótesis $\tau = 0$ se justifica en la estimación (4.62). De ser $\tau \neq 0$ se tendría, denotando γ el operador traza:

$$\langle \tau^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n \rangle_{-1/2, 1/2, \Gamma_s} \leq \|\tau^{n+1}\|_{-1/2, \Gamma_s} \|\gamma_s\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H}_b^1(\Omega), \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_s))} \|\nabla \mathbf{u}_h^n - \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}\|_{0,\Omega},$$

término que no hemos sabido controlar en la estimación (4.62).

El anterior Lema permite probar el

Teorema 4.25 *Supongamos que $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ es una familia regular de Elementos Finitos.*

Entonces, la sucesión $(\mathbf{u}_{h,k}, p_{h,k})$ converge a débil en $L^2(0, T; \mathbf{H}_b^1(\Omega)) \times L^2(0, T; L_0^2(\omega))$ a la solución (\mathbf{u}, p_s) de (4.59).

Demostración.-

Consideremos de nuevo las notaciones (4.21). El Problema (4.60) puede ser reescrito como

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad - \int_0^T (\mathbf{u}_{h,k}, \mathbf{v}_h) \phi' dt + \int_0^T (\nabla_\nu \mathbf{u}_{h,k}^1, \nabla_\nu \mathbf{v}_h) \phi dt + f \int_0^T ((\mathbf{u}_{h,k}^1)^\perp, \mathbf{v}_h) \phi dt \\ \quad - \int_0^T \phi (p_{h,k}, \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle)_{0,\omega} dt = (\mathbf{u}_{0h}, \mathbf{v}_h) \phi(0) + \int_0^T \langle \mathbf{l}_k, \mathbf{v}_h \rangle \phi dt \\ (b) \quad \int_0^T \psi (\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u}_{h,k}^1 \rangle, q_h)_{0,\omega} dt + \int_0^T \mathbf{S}_{2h}(\mathbf{d}_{h,k}, \mathcal{R}_{2h}(\nabla_H q_h)) \psi dt = 0, \end{array} \right. \quad (4.64)$$

para todo $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$, $q_h \in M_h$, $\phi \in W^{1,1}(0, T)$ tal que $\phi(T) = 0$, $\psi \in C_c^0(0, T)$.

Las sucesiones $\{\mathbf{u}_{h,k}^1\}_{h,k>0}$ y $\{\mathbf{u}_{h,k}\}_{h,k>0}$ son $L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}_b^1(\Omega))$ -estables.

La sucesión $\{p_{h,k}\}_{h,k>0}$ es $L^2(0, T; L_0^2(\omega))$ -estable, mientras que la sucesión $\{\mathbf{d}_{h,k}\}_{h,k>0}$ es $L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\omega))$ -estable.

Sean

- $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L_0^2(\omega)$,
- $(\phi, \psi) \in W_0^{1,1}(0, T) \times C_c^0(0, T)$,
- $(\mathbf{v}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times M_h$ tal que $(\mathbf{v}_h, q_h) \rightarrow (\mathbf{v}, p_s)$ en $\mathbf{H}_b^1(\Omega) \times L_0^2(\omega)$.

A continuación, extraemos una subsucesión $\{\mathbf{u}_{h',k'}\}_{h',k'>0}$ débilmente convergente a cierta \mathbf{u} en $L^2(0, T; \mathbf{H}_b^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$. A diferencia del análisis llevado a cabo en la Sección 4.6.1, en este caso h' y k' pueden tender independientemente a 0.. Además, extraemos una subsucesión de presiones $\{p_{h',k'}\}_{h',k'>0}$ débilmente convergente en $L^2(0, T; L_0^2(\omega))$ a cierto p_s .

Seguidamente, pasamos al límite en (4.64) como en el apartado 4.6.1. Se verifica:

$$- \int_0^T (p_{h,k}, \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v}_h \rangle)_{0,\omega} \phi dt \rightarrow - \int_0^T (p_s, \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v} \rangle)_{0,\omega} \phi,$$

lo que prueba

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad - \int_0^T (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \phi' dt + \int_0^T (\nabla_\nu \mathbf{u}, \nabla_\nu \mathbf{v}) \phi dt + \\ \quad f \int_0^T (\mathbf{u}^\perp, \mathbf{v}) \phi dt - \int_0^T \phi (p_s, \nabla_H \cdot \langle \mathbf{v} \rangle)_{0,\omega} = \int_0^T \langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle \phi dt, \\ (b) \quad \int_0^T \psi (\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u} \rangle, q)_{0,\omega} dt = 0. \end{array} \right. \quad (4.65)$$

A causa de (4.65)(b), \mathbf{u} pertenece a $L^2(0, T; \mathcal{V}^2) \cap L^\infty(0, T; \mathbf{H})$. Por otro lado, (4.65)(a) es precisamente (4.59).

Finalmente, de ser la solución (\mathbf{u}, p_s) de (4.59) única, toda la sucesión $(\mathbf{u}_{h,k}, p_{h,k})$ converge a (\mathbf{u}, p_s) . ■

Capítulo 5

Resultados Numéricos.

5.1 Preliminares.

El objeto de este Capítulo es exponer una serie de tests numéricos relativos a los métodos analizados en los Capítulos 2 y 4.

La elección del Método Estabilizado Término a Término como esquema de discretización espacial para llevar a cabo experimentos numéricos, viene motivada por su economía en grados de libertad para velocidad y presión. Dicha economía es fundamental dadas las limitaciones de memoria del PC en el que se llevaron a cabo los tests. De esta forma, se pudieron manejar mallas de hasta 10.000 nodos, lo que permitió llevar a cabo diversos tests de comprobación de órdenes de convergencia, en los que es necesario refinar varias veces un mismo mallado. Nótese que en mallas prismáticas, pasar de una talla espacial de discretización h a $h/2$ equivale a multiplicar por 8 el número de elementos.

La programación e implantación efectiva se realizó mediante un código F77/C++. La intención es, bien contrastar ciertos aspectos de especial interés del análisis numérico llevado a cabo, bien comprobar que el código simula correctamente ciertos efectos previstos por la teoría clásica de flujos geofísicos.

Para ilustrar mejor los resultados numéricos obtenidos, recordaremos de forma sucinta algunos aspectos teóricos concernientes a la capa de Ekman en flujos rotatorios. Para una exposición detallada referimos a las ya clásicas referencias [37],[47] y [68].

En la Sección 0.1.4 se llevó a cabo un análisis de órdenes de magnitud para el sistema

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu_h \Delta_H \mathbf{u} - \nu_v \partial_{zz}^2 \mathbf{u} + f \mathbf{u}^\perp + \frac{\nabla_H p}{\rho_0} &= 0; \\ \partial_t u_3 + (\mathbf{U} \cdot \nabla) u_3 - \nu_h \Delta_H u_3 - \nu_v \partial_{zz}^2 u_3 - u_1 \theta \cos \Phi + \partial_z p &= -\rho g; \\ \partial_x u_1 + \partial_y u_2 + \partial_z u_3 &= 0;\end{aligned}\tag{5.1}$$

dando como resultado

$$Ro (\partial_t \cdot \mathbf{u}^* + (\mathbf{U}^* \cdot \nabla_*) \mathbf{u}^*) - \left(\frac{E_H}{2} \Delta_H^* \mathbf{u}^* + \frac{E_v}{2} \partial_{z^* z^*} \cdot \mathbf{u}^* \right) + (\mathbf{u}^*)^\perp + \nabla_H^* p^* = 0;$$

$$\begin{aligned}
\epsilon^2 Ro (\partial_t^* u_3^* + (\mathbf{U}^* \cdot \nabla^*) u_3^*) - \epsilon^2 \left(\frac{E_H}{2} \Delta_H^* u_3^* + \frac{E_v}{2} \partial_{z^* z^*} u_3^* \right) \\
- \epsilon u_1^* \frac{\cos \Phi}{\sin \Phi} + \rho_0 (\partial_{z^*} p^* + g' \rho^*) = 0; \\
\frac{1}{\mathcal{T}} (\partial_{x^*} u_1^* + \partial_{y^*} u_2^* + \partial_{z^*} u_3^*) = 0, \quad (5.2)
\end{aligned}$$

donde denotamos

$$\begin{aligned}
Ro &= \frac{1}{f\mathcal{T}} && \text{el número de Rossby,} \\
E_H &= 2 \frac{\nu_h}{f L_H^2} && \text{el número de Ekman horizontal,} \\
E_v &= 2 \frac{\nu_v}{f L_v^2} && \text{el número de Ekman vertical.}
\end{aligned}$$

Las hipótesis fundamentales que caracterizan los flujos geofísicos son:

- El tiempo de evolución es *grande* en comparación con el periodo de rotación terrestre, lo que se expresa por la relación $\mathcal{T} \gg f^{-1}$.
- La dimensión vertical del dominio es mucho menor que la dimensión horizontal, es decir $L_v \ll L_H$.

Ambas hipótesis se traducen en $Ro \ll 1$ y $\epsilon \ll 1$. Por otro lado, los flujos que se encuentran en Oceanografía proporcionan números de Ekman muy inferiores a la unidad. Tomando como ejemplo los datos del Test 6 (ver más adelante),

$$L_H \approx 65 \text{ km}, \quad \nu_H = 200 \text{ [m}^2/\text{s]}, \quad \nu_v = 4.26 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^2/\text{s]}, \quad f \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1},$$

se tiene $E_H = E_v \approx 9 \cdot 10^{-4}$. Esto indica que, en primera aproximación, los términos dominantes en (5.1) son (suponemos un fluido homogéneo):

$$\begin{aligned}
-f u_2 + \frac{\partial_x p}{\rho_0} &= 0; \\
f u_1 + \frac{\partial_y p}{\rho_0} &= 0; \\
\partial_z p &= -\rho g; \\
\partial_x u_1 + \partial_y u_2 + \partial_z u_3 &= 0; \quad (5.3)
\end{aligned}$$

lo que se conoce como *balance geostrófico*. Como se observa, el orden del sistema de ecuaciones se ha reducido y, en particular, no se pueden cumplir las condiciones de contorno en su totalidad al no estar presentes los términos de fricción. Es pues sólo el *interior* del flujo el que obedece al balance geostrófico.

Un flujo geostrófico cumple algunas propiedades, fáciles de deducir y que merece la pena reseñar:

- La velocidad horizontal es idéntica a lo largo de la columna vertical:

$$\partial_z u_1 = \partial_z u_2 = 0.$$

Este hecho se conoce como *Teorema de Taylor-Proudman*.

- El flujo es *isobárico*, es decir, las líneas de corriente de la velocidad coinciden con las isobaras, lo que viene expresado por la relación:

$$\mathbf{u} \perp \nabla_{HP}.$$

- La velocidad horizontal es *no divergente*, es decir:

$$\partial_x u_1 + \partial_y u_2 = 0.$$

Esto implica inmediatamente $\partial_z u_3 = 0$. En particular, si suponemos el fondo plano y una condición de contorno de deslizamiento resulta un flujo totalmente horizontal.

Consideremos ahora un dominio infinito en la dimensión horizontal, con fondo y superficie planos. La configuración del flujo geostrófico se rompe en presencia de las condiciones de contorno de adherencia en el fondo y tensión de viento en superficie:

$$\mathbf{u} = 0 \text{ en } \Gamma_f, \quad \nu_z \partial_z \mathbf{u} = \boldsymbol{\tau} \text{ en } \Gamma_s.$$

Estas condiciones originan capas límite en la vecindad de la frontera. En estas capas límite (denominadas *capas de Ekman*), la fricción vertical del fluido es fundamental para realizar la transición del flujo geostrófico interior al flujo impuesto por las condiciones de contorno en la frontera.

La longitud vertical de la capa de Ekman se puede deducir mediante argumentos de *scaling*. Básicamente, se arguye que en la capa límite el término de fricción vertical debe tener el mismo orden de magnitud en las ecuaciones adimensionalizadas (5.2) que los términos del balance geostrófico. Por tanto, si denotamos δ_E la longitud vertical de la capa de Ekman, estamos imponiendo que el número de Ekman vertical particularizado a la capa sea del orden de la unidad:

$$\frac{\nu_v}{f \delta_E^2} \approx 1 \quad \Rightarrow \quad \delta_E \approx \sqrt{\frac{\nu_v}{f}}.$$

Así, la estructura del flujo dentro de la capa se rige por

$$\begin{aligned} -\nu_v \partial_{zz}^2 u_1 - f u_2 + \frac{\partial_x p}{\rho_0} &= 0; \\ -\nu_v \partial_{zz}^2 u_2 + f u_1 + \frac{\partial_y p}{\rho_0} &= 0; \\ \partial_z p &= -\rho g; \\ \partial_x u_1 + \partial_y u_2 + \partial_z u_3 &= 0, \end{aligned} \tag{5.4}$$

Para una deducción rigurosa de estas ecuaciones mediante un reescalamiento en la coordenada z en (5.2), remitimos a [68], pág. 204.

Este sistema puede ser resuelto explícitamente. Por ejemplo, para la capa de Ekman superficial, agregamos la condición de contorno

$$\nu_z \partial_z \mathbf{u} = \boldsymbol{\tau} \quad \text{en } \Gamma_s.$$

Suponiendo siempre un flujo estacionario y homogéneo, podemos descomponer la velocidad \mathbf{u} en

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^G + \mathbf{u}^E,$$

donde \mathbf{u}^G y \mathbf{u}^E denotan respectivamente las componentes geostrófica y de Ekman. Para simplificar el escenario, supondremos que el flujo interior se situa en $z = -\infty$. En este límite suponemos que $\mathbf{u} = \mathbf{u}^G$ verificando

$$\begin{aligned} -f u_2^G + \frac{\partial_x p}{\rho_0} &= 0; \\ f u_1^G + \frac{\partial_y p}{\rho_0} &= 0; \\ \partial_z p &= -\rho g; \\ \partial_x u_1^G + \partial_y u_2^G + \partial_z u_3^G &= 0, \end{aligned} \tag{5.5}$$

lo que llevado a (5.4) conduce a

$$\begin{aligned} -\nu_v \partial_{zz}^2 u_1 - f u_2^E &= 0; \\ -\nu_v \partial_{zz}^2 u_2 + f u_1^E &= 0, \\ \nu_z \partial_z u_1 = \tau_1, \quad \nu_z \partial_z u_2 &= \tau_2 \quad \text{en } \Gamma_s, \end{aligned} \tag{5.6}$$

en la capa de Ekman. La solución de (5.6) es

$$\begin{aligned} u_1^E(z) &= \gamma e^\zeta \left[\tau_1 \cos\left(\zeta - \frac{\pi}{4}\right) - \tau_2 \sin\left(\zeta - \frac{\pi}{4}\right) \right]; \\ u_2^E(z) &= \gamma e^\zeta \left[\tau_1 \sin\left(\zeta - \frac{\pi}{4}\right) + \tau_2 \cos\left(\zeta - \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad \gamma = \frac{\sqrt{2}}{\rho_0 f \delta_E}, \quad \zeta = z/\delta_E. \end{aligned} \tag{5.7}$$

A la función \mathbf{u}^E se la conoce como *espiral de Ekman*. Obsérvese que el valor de ν_v incide directamente en el módulo de \mathbf{u}^E a través de δ_E . Concretamente, a menor viscosidad, menor longitud de la capa y mayor módulo de \mathbf{u}^E .

En superficie ($z = 0$) resulta

$$u_1^E(0) = \gamma e^\zeta \left[\tau_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + \tau_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right];$$

$$u_2^E(0) = \gamma e^\zeta \left[-\tau_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + \tau_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right].$$

Es inmediato comprobar que $(u_1^E(0), u_2^E(0))$ forma un ángulo de 45 grados con (τ_1, τ_2) . El transporte horizontal en la capa de Ekman se obtiene integrando en vertical la espiral:

$$U_1^E = \int_{-\infty}^0 u_1^E(z) dz = \beta \tau_2;$$

$$U_2^E = \int_{-\infty}^0 u_2^E(z) dz = -\beta \tau_1, \quad \beta = \frac{1}{\rho_0 f},$$

y resulta ser perpendicular a (τ_1, τ_2) . Tanto $(u_1^E(0), u_2^E(0))$ como (U_1^E, U_2^E) apuntan a la derecha de (τ_1, τ_2) por ser el coeficiente f positivo (Hemisferio Norte). La situación en el Hemisferio Sur es simétrica.

Una de las principales consecuencias de este hecho es el fenómeno de afloramiento costero (*coastal upwelling*). Supongamos que nos encontramos en el Hemisferio Norte y el viento sopla en paralelo a la costa, quedando ésta última a la izquierda del viento. Como se acaba de describir, la combinación de la tensión impuesta por el viento, la fricción vertical y la aceleración de Coriolis fuerzan que el transporte neto de la capa superficial de agua se produzca en dirección perpendicular y alejándose de la costa. La masa superficial de agua desplazada produce el afloramiento de las aguas profundas, creando una recirculación en los planos perpendiculares al viento. Como se podrá observar, recuperaremos este efecto en los cálculos. Recordemos que este fenómeno es uno de los grandes *motores* de producción biológica en los océanos. Remitimos a la Introducción para más detalles.

Reseñemos que la longitud del eje vertical de la espiral es, teóricamente, infinito. Por otro lado, la longitud de la capa de Ekman δ_E se definió como un parámetro del orden de $\sqrt{\frac{\nu_v}{f}}$, lo que no resulta una definición precisa para los tests que realizaremos a continuación.

A efectos prácticos, convendremos en medir la espiral de Ekman hasta la profundidad z tal que $(u_1^E(z), u_2^E(z))$ forme un ángulo de 180 grados con $(u_1^E(0), u_2^E(0))$. Esta convención es coherente con la teoría, pues se comprueba con facilidad a partir de (5.7) que dicha profundidad es $z = -\pi\delta_E$, y

$$\frac{|\mathbf{u}^E(-\pi\delta_E)|}{|\mathbf{u}^E(0)|} \approx 0.04.$$

Por tanto, cuando la espiral ha girado 180 grados la componente de Ekman es tan pequeña que la capa de Ekman se puede dar por finalizada.

Tratemos ahora el caso evolutivo. En el caso de que τ dependa de t la configuración de la estructura de la capa de Ekman es más compleja. Sin embargo, se pueden anticipar algunos hechos. Supongamos que las ecuaciones de la capa son ahora

$$\begin{aligned}\partial_t u_1 - \nu_v \partial_{zz}^2 u_1 - f u_2 + \frac{\partial_x p}{\rho_0} &= 0; \\ \partial_t u_2 - \nu_v \partial_{zz}^2 u_2 + f u_1 + \frac{\partial_y p}{\rho_0} &= 0;\end{aligned}\tag{5.8}$$

$$\partial_z p = -\rho g;$$

$$\partial_x u_1 + \partial_y u_2 + \partial_z u_3 = 0,\tag{5.9}$$

mientras que el flujo interior es *quasi-geostrófico*:

$$\partial_t u_1^G - f u_2^G + \frac{\partial_x p}{\rho_0} = 0;$$

$$\partial_t u_2^G + f u_1^G + \frac{\partial_y p}{\rho_0} = 0;\tag{5.10}$$

$$\partial_z p = -\rho g;$$

$$\partial_x u_1^G + \partial_y u_2^G + \partial_z u_3^G = 0.$$

En esta ocasión, se necesitan nuevas simplificaciones para extraer conclusiones. Supongamos por ejemplo que no existan variaciones de la presión, es decir, $\nabla p = 0$. En tal caso, se sigue

$$(\partial_t u_1^G) u_1^G - f u_2^G u_1^G = 0;$$

$$(\partial_t u_2^G) u_2^G + f u_1^G u_2^G = 0.\tag{5.11}$$

Luego, sumando ambas ecuaciones

$$\frac{1}{2} \partial_t (|u_1^G(t)|^2 + |u_2^G(t)|^2) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Si suponemos que el flujo parte del reposo, tendremos

$$|u_1^G(t)|^2 + |u_2^G(t)|^2 = |u_1^G(0)|^2 + |u_2^G(0)|^2 = 0.$$

Por tanto, la componente de Ekman cumpliría:

$$\partial_t u_1^E - \nu_v \partial_{zz}^2 u_1^E - f u_2^E = 0;$$

$$\partial_t u_2^E - \nu_v \partial_{zz}^2 u_2^E + f u_1^E = 0;$$

$$\nu_z \partial_z u_1^E = \tau_1(t), \quad \nu_z \partial_z u_2^E = \tau_2(t) \quad \text{en } \Gamma_s.\tag{5.12}$$

La resolución detallada de (5.12) se lleva a cabo en [76] para el caso $\tau_1(t) = 0$ (viento en la dirección del eje OY). Resulta

$$\begin{aligned} u_1^E(t, z) &= \gamma e^\zeta \left[\tau_2(t) \cos(ft + \zeta + \frac{\pi}{4}) \right]; \\ u_2^E(t, z) &= \gamma e^\zeta \left[\tau_2(t) \sin(ft + \zeta + \frac{\pi}{4}) \right], \quad \gamma = \frac{\delta_E}{\sqrt{2\rho_0\nu_v}}, \quad \zeta = z/\delta_E. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Si suponemos que la componente $\tau_2(t)$ es constante a partir de un cierto instante, la solución anterior resulta ser periódica, con periodo $\frac{2\pi}{f}$. Este valor es conocido como *periodo de inercia*. Todas las capas de la espiral oscilan con este periodo, pero con amplitudes diferentes que disminuyen con la profundidad. En cuanto al desfase $\frac{\pi}{4} + \frac{z}{\delta_E}$, varía con la profundidad y es más importante cuanto más delgada es la capa de Ekman.

Un análisis detallado de las expresiones (5.13) muestra que la solución $(u_1^E(t, z), u_2^E(t, z))$ se compone por la espiral de Ekman descrita en el caso estacionario más una oscilación periódica conocida como *oscilación de inercia*. En condiciones ideales como las que estamos suponiendo, las oscilaciones de inercia no se amortiguan con el tiempo, y el flujo no llega a estado estacionario alguno.

En el caso más general en que $\nabla p \neq 0$, se pueden extraer conclusiones similares para el transporte de Ekman $(U_1^E(t), U_2^E(t))$. Remitimos en este sentido a [47].

5.2 Tests numéricos sobre el Modelo Estacionario.

Recordemos el modelo estacionario de Ecuaciones Primitivas estudiado en los Capítulos 1, 2 y 3 :

Hallar $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $p_s : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} (a) & (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \Delta_{\nu} \mathbf{u} + f \mathbf{u}^{\perp} + \nabla_H p_s = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega, \\ (b) & \nabla_H \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0 \quad \text{en } \omega, \\ (c) & \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Gamma_b, \quad \nu_z \partial_z \mathbf{u} = \boldsymbol{\tau} \quad \text{en } \Gamma_s. \end{cases} \quad (5.14)$$

donde $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, u_3)$, estando $u_3 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$u_3(\mathbf{x}, z) = \int_z^0 \nabla_H \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds. \quad (5.15)$$

El Método Estabilizado Término a Término estudiado en el Capítulo 2 para la resolución de (5.14) se formulaba como:

Buscar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h^1 \times M_h^1$ tales que

$$\mathbf{B}_{TT}(\mathbf{u}_h; (\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) = \langle \mathbf{l}, \widetilde{\mathbf{v}}_h \rangle, \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h^1 \times M_h^1, \quad (5.16)$$

donde

$$\begin{aligned}
B_{TT}(\mathbf{w}_h; (\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) &= \mathbf{B}(\widetilde{\mathbf{w}}_h; (\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{p}_h), (\widetilde{\mathbf{v}}_h, \widetilde{q}_h)) - \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \tau_T \int_T \nabla_H p_h \cdot \nabla_H q_h \, dx \\
&+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K (\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h)(\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h) D_h \, dx \, dz,
\end{aligned}$$

y τ_K, τ_T son coeficientes de estabilización dados por (2.3) y (2.4).

Test 1.- Capa de Ekman.

Aunque en las deducciones teóricas que hemos expuesto en la Sección 5.1 se supone que el dominio es infinito y no existen fronteras laterales ni difusión horizontal, el método (5.16) está concebido para resolver (5.14) con el operador laplaciano completo, y en un dominio acotado. Nuestra estrategia para aproximarnos al marco teórico ha sido *debilitar* la difusión horizontal efectiva frente a la vertical a través de la elección de los parámetros del problema. Además, se suprime el término convectivo.

Hemos tomado como dominio ω el representado en la Figura 5.1. Fijamos los parámetros:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} &= (0, 0), \quad \boldsymbol{\tau} = \alpha |\mathbf{v}| \mathbf{v}, \quad \alpha = 9.27 \cdot 10^{-7}, \quad \mathbf{v} = (0, 30) \text{ (m/s)}, \\
\nu_x = \nu_y &= 10^3 \text{ (m}^2/\text{s)}, \quad \Phi = 45^\circ N, \quad \theta = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}, \quad f = 2\theta \sin \Phi.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Hagamos notar que el viento se impone en la dirección del eje OY, en el sentido del semieje positivo.

Tomamos a continuación en (5.14) una viscosidad turbulenta vertical creciente

$$\nu_v^1 = 0.1, \quad \nu_v^2 = 0.4, \quad \nu_v^3 = 1.6 \text{ (m}^2/\text{s)}.$$

Obsérvese que, con la elección de datos mencionada, el *número de Ekman horizontal* $E_H = 0.4 \cdot 10^{-4}$ es notablemente menor que los respectivos números de Ekman verticales:

$$E_v^1 = 0.00774, \quad E_v^2 = 0.03099, \quad E_v^3 = 0.12398.$$

Los resultados que se muestran representan la distribución de velocidades a lo largo de la columna vertical tomada en el centro del dominio. Nuestra intención con ello ha sido mostrar la solución en el punto más lejano de la frontera de ω , con objeto de mostrar velocidades que no se vean afectadas por las condiciones de contorno en las fronteras laterales. La altura de dicha columna se ha reescalado a 1 con objeto de una mejor visualización de las espirales.

Concretamente, presentamos en los gráficos la velocidad $\mathbf{u}_h^E(z)$. Podemos observar en la Figura 5.2 que la longitud de las espirales se duplica (aproximadamente) al cuadruplicar E_v . Concretamente, siguiendo el criterio expuesto en la Sección 5.1, se obtiene

$$\delta_E^1 = 125, \quad \delta_E^2 = 265, \quad \delta_E^3 = 500 \text{ (m)}.$$

Obsérvese en la Figura 5.2 que la última espiral no ha llegado a girar 180 grados cuando ha llegado al fondo, por lo que hemos denotado $\delta_E^3 = 500$.

Se puede observar también en la Figura 5.2 que el módulo de la velocidad en superficie decrece al aumentar la viscosidad.

Hemos computado por último la velocidad horizontal integrada para la última espiral de la Figura 5.2:

$$U_h^E = \int_{-500}^0 \mathbf{u}_h^E(z) dz.$$

Tanto \mathbf{u}_h^E en superficie como U_h^E se representan en la Figura 5.3. Podemos observar cómo \mathbf{u}_h^E se desvía 45° a la derecha del eje OY mientras que U_h^E es perpendicular.

Test 2.- Recirculación tridimensional en una cavidad.

En este caso, nos hemos centrado en probar la capacidad de nuestro resolutor para reproducir algunos efectos tridimensionales de los flujos geofísicos. Dichos efectos se generan por la interacción entre la tensión superficial impuesta en superficie por el viento y la aceleración de Coriolis.

A estos efectos, hemos considerado un flujo inducido por el viento en el dominio mostrado en la Figura 5.4. Hemos incluido en el fondo de dicho dominio una rampa que afecta de forma importante al flujo. Imponemos también una tensión de viento superficial en la dirección OX.

La malla \mathcal{T}_h se muestra en la Figura 5.4. Usamos los siguientes datos:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= (0, 0), \quad \boldsymbol{\tau} = \alpha |\mathbf{v}| \mathbf{v}, \quad \alpha = 9.27 \cdot 10^{-7}, \quad \mathbf{v} = (7.5, 0) \text{ (m/s)}, \\ \nu_x &= 100, \nu_y = 10, \nu_z = 10^{-2} \text{ (m}^2/\text{s)}, \quad \Phi = 45^\circ N, \quad \theta = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}, \quad f = 2\theta \sin \Phi. \end{aligned} \quad (5.18)$$

En lo que respecta al dominio computacional:

- Dimensiones Horizontales (m): $\omega = [0, 10^4] \times [0, 5 \times 10^3]$;
- Batimetría (m):

$$D(x, y) = \begin{cases} 50 & \text{si } 0 \leq x \leq 4000 \\ 50 \cdot \frac{5000 - x}{1000} + 100 \cdot \frac{x - 4000}{1000} & \text{si } 4000 \leq x \leq 5000 \\ 100 & \text{si } 5000 \leq x \leq 10000. \end{cases}$$

Los valores usados para ν se pueden encontrar en simulaciones previas (Cf. [9]). Llamamos la atención sobre la anisotropía de ν_x y ν_y , en correspondencia con las distintas dimensiones de ω a lo largo de los ejes OX y OY.

En las siguientes figuras, la profundidad y la velocidad vertical han sido aumentadas 30 veces buscando una mejor visualización de los resultados.

La Figura 5.5 muestra la velocidad superficial, en la que se aprecia el efecto de la aceleración de Coriolis: en el hemisferio Norte, el efecto de la rotación terrestre desvía los flujos a la derecha en el sentido de su avance. También se puede observar, como cabía esperar, que el módulo de la velocidad decrece cerca de la frontera debido a las condiciones de adherencia.

La Figura 5.6 representa la presión superficial. Como consecuencia del patrón de velocidades en superficie antes descrito, la presión superficial aumenta al aumentar x y al decrecer y .

En la Figura 5.7 se representa el perfil de la velocidad a lo largo de un corte longitudinal del dominio (concretamente, el plano $y = 2450$). Se observa una recirculación satisfactoria del flujo a lo largo de la cavidad. En particular, se da una notable aceleración del flujo en profundidad a lo largo de la rampa, en dirección opuesta al viento. Nótese que el flujo presenta un perfil cuasi-parabólico en la parte menos profunda del dominio.

La Figura 5.8 muestra las espirales de Ekman a lo largo de este corte.

Mostramos también en las Figuras 5.9 y 5.10 la proyección de la velocidad $3D$ sobre dos planos perpendiculares a la dirección del viento ($x = 2000$, $x = 6000$ respectivamente). El objeto de estos cortes es apreciar el afloramiento en la costa que queda a la izquierda según avanza el viento (plano $y = 5000$). Los resultados se ajustan al mecanismo de afloramiento costero descrito en la Sección ??.

Se concluye pues que el flujo simulado presenta un carácter netamente tridimensional.

Test 3.- Estudio de la condición $\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u}_h \rangle = 0$ cuando $h \rightarrow 0$.

Hemos usado el mismo flujo simulado en el Test 2 para estudiar el grado de cumplimiento de la condición $\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u}_h \rangle = 0$.

Recordemos que dicha condición se impone en sentido débil en nuestro esquema de la siguiente forma:

$$\int_{\omega} (\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u}_h \rangle) q_h \, dx = - \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \tau_T \int_T \nabla_H p_h \cdot \nabla_H q_h \, dx, \quad \forall q_h \in M_h^1. \quad (5.19)$$

El grado de cumplimiento de la condición $\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u}_h \rangle = 0$ tiene una consecuencia inmediata en la velocidad vertical que se computa en el fondo Γ_b . En efecto, observemos que, de la definición (5.15), la velocidad vertical en el fondo verifica:

$$\begin{aligned} u_{3h}(\mathbf{x}, -D(\mathbf{x})) &= \int_{-D(\mathbf{x})}^0 \nabla_H \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, z) \, dz \\ &= \nabla_H \cdot \langle \mathbf{u}_h \rangle(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, -D(\mathbf{x})) \cdot \nabla_H D(\mathbf{x}) \\ &= \nabla_H \cdot \langle \mathbf{u}_h \rangle(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Se concluye de la igualdad (5.19) que el cumplimiento exacto de la condición

$$u_{3h} = 0 \quad \text{en } \Gamma_b$$

no es posible con el esquema utilizado. Convendremos en llamar a $u_{3h}|_{\Gamma_b}$ *velocidad vertical residual* en el fondo. Es inmediato que la velocidad vertical residual en el fondo será menor cuanto menor sea $\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u}_h \rangle(\mathbf{x})$.

El análisis de convergencia llevado a cabo en el Capítulo 2 demostró que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \tau_T \int_T \nabla_H p_h \cdot \nabla_H q_h \, d\mathbf{x} = 0.$$

De modo que, en el límite $h \rightarrow 0$, se cumple (débilmente) la condición de divergencia de la media vertical nula. Refinando la malla cabe entonces esperar que la velocidad vertical en el fondo tienda a cero en alguna norma a precisar.

Hemos representado en la Tabla 1 la norma $L^2(\omega)$ de $\nabla_H \cdot \langle \mathbf{u}_h \rangle$ correspondiente a un cálculo en el que se refina progresivamente la malla. Se puede observar la convergencia a cero, como es de desear, con orden aproximadamente uno. Este hecho se da también en el caso de los Métodos Mixtos, donde la restricción se impone también débilmente.

$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ (metros)	$\frac{\ \nabla_H \cdot \langle \mathbf{u}_h \rangle\ _{L^2(\omega)}}{\ \nabla_{\nu} \mathbf{u}_h\ _{0,\Omega}}$
1302.1	0.036
651.0	0.019
325.6	0.015

Tabla 1.

Test 4.- Comportamiento de la norma $L_0^2(\omega)$ de la presión superficial en dominios con talud artificial tendiendo a 0.

Usando los mismos datos de los dos tests anteriores, nuestro propósito ahora ha sido analizar el comportamiento asintótico de la norma $L_0^2(\omega)$ de la presión superficial al tender el talud $d_h = \min_{x \in \omega_h} D_h \rightarrow 0$. A nuestro entender, este es un test indispensable dada la discretización llevada a cabo en el Capítulo 2, en la que se aproximaban dominios sin talud por subdominios con talud decreciente. Por otro lado, el análisis llevado a cabo en dicho Capítulo muestra que las estimaciones en norma $L_0^2(\omega)$ explotan al hacer $d_h \rightarrow 0$.

En este caso, el dominio computacional escogido es el representado en la Figura 5.11 (arriba). La profundidad máxima es aún 100 m., pero ahora $d = \min_{x \in \omega} D = 0$. Aproximamos Ω por subdominios Ω_h con talud decreciente (Figura 5.11, abajo). De las consideraciones precedentes, cabe esperar algún tipo de singularidad en la presión superficial cerca del talud según éste decrece. En cierto modo, esta conjetura teórica se ve confirmada en los resultados numéricos, como se observa en la Figura 5.12, donde mostramos las superficies $z = p_h(x, y)$ usando la malla superficial de cada cálculo. Obsérvese el aumento de la pendiente en la proximidad de los taludes anterior y posterior.

Las normas obtenidas se muestran en la Tabla 2. Como era de esperar las normas $L_0^2(\omega)$ de la presión van en aumento, aunque no de forma *explosiva*.

Altura del talud (metros)	h (metros)	$\ p_h\ _{L_0^2(\omega)}$
10	940	3.77
1	497	4.67
0.1	250	4.88

Tabla 2.

Para obtener más información sobre el comportamiento de la presión, hemos usado dominios como el representado en la Figura 5.1 con profundidades decrecientes. En este caso, se ha mantenido la malla fija. A

En este caso, las estimaciones (2.28) pueden ser precisadas. Concretamente, se demuestra en [?]:

$$\|p_h\|_{L_{D,0}^2(\omega)} \leq C(\underline{\nu}^{-1} \|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega} + 1) \|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega}, \quad (5.20)$$

para cierta constante C dependiente de los datos tal que $C = O(d^{-3/2})$ cuando $d \rightarrow 0^+$. La constante $\|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega}$ puede ser estimada a su vez como:

$$\|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega} \leq \|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega} + \|\gamma_s\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H}_b^1(\Omega), \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_s))} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_s)},$$

donde γ_s denota el operador traza de $\mathbf{H}_b^1(\Omega)$ en $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_s)$. En el caso en que Ω es un cilindro de altura d , es fácil demostrar que $\|\gamma_s\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H}_b^1(\Omega), \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_s))} = O(d^{1/2})$.

Suponiendo $\mathbf{f} = 0$, tendríamos $\|\mathbf{1}\|_{-1,\Omega} = O(d^{1/2})$. Esto, combinado con la desigualdad (5.20) proporciona en ausencia de término convectivo:

$$\|p_s\|_{L_{D,0}^2(\omega)} \leq C \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_s)},$$

con $C = O(d^{-1})$ cuando $d \rightarrow 0^+$.

Reproducimos en la Tabla 3 el comportamiento de $\frac{\|p_i\|_{L_{0,D}^2(\omega)}}{\|p_{i-1}\|_{L_{0,D}^2(\omega)}}$ para valores pequeños de D . En este caso sí se recupera con nitidez el comportamiento esperado.

i	D_i	$\ p_i\ _{L_{0,D}^2(\omega)}$	$\frac{\ p_i\ _{L_{0,D}^2(\omega)}}{\ p_{i-1}\ _{L_{0,D}^2(\omega)}}$	i	D_i	$\ p_i\ _{L_{0,D}^2(\omega)}$	$\frac{\ p_i\ _{L_{0,D}^2(\omega)}}{\ p_{i-1}\ _{L_{0,D}^2(\omega)}}$
1	3200	0.00192	-	6	100	0.05508	2.04
2	1600	0.00361	1.87	7	50	0.12355	2.24
3	800	0.00714	1.97	8	25	0.28893	2.33
4	400	0.01347	1.88	9	12.5	0.59476	2.05
5	200	0.02687	1.99	10	6.25	1.17067	1.96

Tabla 3.

5.3 Tests numéricos sobre el Modelo Evolutivo.

Recordemos el modelo estudiado en el Capítulo 4:

Hallar $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $p_s : \omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \Delta_{\nu} \mathbf{u} + f \mathbf{u}^{\perp} + \nabla_H p_s = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega \times]0, T[, \\ (b) \quad \nabla_H \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0 \quad \text{en } \omega \times]0, T[, \\ (c) \quad \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Gamma_b \times]0, T[, \quad \nu_z \partial_z \mathbf{u} = \boldsymbol{\tau} \quad \text{en } \Gamma_s \times]0, T[, \\ (d) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{en } \Omega; \end{array} \right. \quad (5.21)$$

donde $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, u_3)$, con $u_3 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, viene definida por

$$u_3(\mathbf{x}, z) = \int_z^0 \nabla_H \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds. \quad (5.22)$$

Para la discretización temporal dividimos el intervalo $[0, T]$ en N subintervalos de igual longitud $k = T/N$. Discretizamos (5.21) en tiempo mediante un esquema de Euler semiimplícito. En cada etapa de tiempo se emplea el esquema numérico estudiado en la Sección anterior.

Test 5.- Medición de la frecuencia de inercia.

Nuestro primer test está dirigido a analizar la precisión en el cálculo de las oscilaciones de inercia, efecto de la aceleración de Coriolis. Hemos usado para ello de nuevo el dominio simple representado en la Figura 5.1. Fijamos los datos :

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= (0, 0), \quad \boldsymbol{\tau} = \alpha |\mathbf{v}| \mathbf{v}, \quad \alpha = 2.45 \cdot 10^{-6}, \\ \nu_x &= 1000, \quad \nu_y = 1000, \quad \nu_z = 10^{-1} (m^2/s), \quad \Phi = 45^\circ N, \quad \theta = 7.3 \cdot 10^{-5} s^{-1}, \quad f = 2\theta \sin \Phi. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Aunque la dirección y sentido del viento es fija (en la dirección del eje OY, sentido del semieje positivo), el módulo es dependiente del tiempo. La evolución del módulo del viento impuesto en función del tiempo se muestra en la Figura 5.13. Partiendo del reposo, la intensidad del viento se incrementa progresivamente hasta alcanzar un valor constante de 30 m/s:

$$|\mathbf{v}|(t) = 30 (1 - e^{-t/T_0}) (m/s), \quad T_0 = 3600 (s).$$

En esta simulación $\mathcal{T} = 3$ días y medio. El paso de tiempo $k = 10$ minutos.

Con esta elección de datos, obtenemos un número de Rossby $Ro = 10^{-3}$ menor que el número de Ekman vertical $E_v = 8 \cdot 10^{-3}$. A la vista de las ecuaciones adimensionalizadas (5.2) es de esperar el dominio de los términos difusivos sobre el convectivo. El uso de un esquema semi-implícito también contribuye a este comportamiento.

Las Figuras 5.14, 5.15 y 5.16, corroboran esta conjetura. En ellas se aprecia la convergencia hacia una solución estacionaria de la solución calculada. Los resultados se muestran para la columna vertical en el centro del dominio.

En el gráfico 5.14 se muestra la curva $x = u_1(t)$, $y = u_2(t)$ a diferentes profundidades en el centro de Ω . Los puntos límite de las espirales forman a su vez, a lo largo de la vertical, la espiral representada en la Figura 5.2 (arriba, izquierda).

El gráfico 5.15 es un análisis temporal de la evolución de la velocidad horizontal en dos profundidades distintas. Se observa un amortiguamiento progresivo de la amplitud de las oscilaciones de inercia, así como un periodo constante. Este periodo, medible sobre la misma gráfica, es de $17\text{ h }5' \approx \frac{2\pi}{f}$. Este valor se corresponde con el valor teórico del *periodo inercial*.

Finalmente, la Figura 5.16 muestra la evolución temporal de p_s en tres puntos distintos de la superficie. De nuevo, el mismo periodo inercial se puede observar, con un amortiguamiento más suave en la amplitud.

Test 6.- Simulación de las corrientes en el Lago de Ginebra.

Nuestro último test aborda la simulación de las corrientes producidas en el Lago de Ginebra (o Lago Lemán) tras 12 horas de viento. El lago de Ginebra, localizado en el Sudoeste de Suiza, tiene 65 km. de longitud, 13 km de anchura y 300 m de profundidad (ver Figuras 5.17, 5.18, 5.19). Uno de los vientos dominantes en esta región es el viento del Sudoeste.

Las corrientes que se pretenden simular estarán inducidas por la acción de un viento de 7.5 m/s del Sudoeste durante 12 horas seguidas. En ese instante, el viento se para y se simulan las corrientes de inercia durante 12 horas, completando 24 horas de simulación. Usaremos las siguientes constantes (tomadas de [9]):

- $\nu = (200, 20, 4.26 \cdot 10^{-3}) [m^2/s]$;
- $\Phi = 47^\circ N$, $\theta = 7.3 \cdot 10^{-5} s^{-1}$, $f = 2\theta \sin \Phi$;
- $\tau = \alpha |\mathbf{v}| \mathbf{v}$, donde $\mathbf{v} = (7.5 \cos 45^\circ, 7.5 \sin 45^\circ)$ y $\alpha = 2.45 \cdot 10^{-6}$;
- $k = \Delta t = 4$ minutos, 577 nodos en superficie, 9 capas verticales (la malla en superficie y fondo se representa en la Figura 5.20).

Las Figuras 5.21 a 5.26 muestran el resultado tras las primeras 12 horas de cálculo.

La Figura 5.21 muestra la velocidad en superficie. Una vez más, el efecto Coriolis se hace notar en la dirección de la corriente.

La Figura 5.22 representa la presión superficial. Esto es equivalente (remitimos a la Sección 0.3.1 para más consideraciones en este sentido) a una elevación de la superficie en el este y una depresión en el oeste.

En la Figura 5.23 representamos un mapa de la velocidad vertical sobre un plano horizontal a 50 metros de profundidad. Los valores positivos señalan un flujo ascendente, mientras que los negativos flujos descendentes. Se observa pues un afloramiento en la costa norte e inmersión de aguas en la costa sur.

Para conocer más detalles, realizamos tres cortes perpendiculares a la superficie siguiendo las rectas de la Figura 5.24.

En la Figura 5.25 vemos la velocidad u_1 en el corte 3. Los valores de esta componente señalan que en superficie el flujo se produce de oeste a este, mientras que en el interior el sentido es el opuesto.

En la Figura 5.26 observamos la velocidad vertical obtenida en el plano de corte 1. En dicha imagen se confirma el afloramiento de aguas en la costa norte y la inmersión de aguas en la costa sur.

Los gráficos restantes obedecen a la situación después de 24 horas de simulación.

La Figura 5.27 muestra la velocidad superficial, que ha girado en sentido horario las últimas 12 horas.

En la Figura 5.28 vemos la presión superficial. El perfil equivalente de la superficie del agua ha variado: la elevación máxima se encuentra en el centro del lago, mientras que la depresión máxima se encuentra entre el centro y el oeste.

Las zonas de afloramiento e inmersión también han girado, como se observa en 5.29. Dicha observación queda confirmada en la Figura 5.30, donde se observa la velocidad vertical en el plano de corte 2.

Por último, en la Figura 5.31 vemos la componente u_1 en el corte 3. El flujo recircula de oeste a este en superficie, mientras que en el interior el sentido es el opuesto.

5.4 Discusión de resultados.

Globalmente, consideramos satisfactorios los resultados obtenidos en los tests numéricos realizados, en cuanto que muestran un comportamiento cualitativo de las soluciones acorde con los aspectos físicos previstos:

- Los resultados del Test 1 se ajustan a la teoría clásica de Ekman expuesta en la Sección 5.1. La longitud de la capa de Ekman y el módulo, dirección y sentido de la velocidad en superficie se ajustan a las predicciones teóricas, así como la dirección y sentido del transporte horizontal a lo largo de la capa.
- De los resultados del Test 2 se concluye que el flujo simulado presenta un carácter netamente tridimensional. El efecto de la aceleración de Coriolis en el flujo queda patente en los resultados, en particular el mecanismo de afloramiento costero es observable. Por otro lado, el mallado mediante prismas siguiendo las superficies iso-sigma permite resolver el flujo en la rampa aceptablemente.
- El Test 5 da un valor satisfactorio del periodo de inercia. Además, todas las capas de la espiral oscilan con el mismo periodo, y con amplitudes diferentes que disminuyen con la profundidad. Estos resultados se muestran acordes con lo predicho en la Sección 5.1 para condiciones ideales (gradiente de presión y viscosidad horizontal nulas). En dichas condiciones, el movimiento debería ser periódico, mientras que en nuestro caso las oscilaciones de inercia decrecen en amplitud a medida que el tiempo aumenta. Atribuimos esta convergencia hacia un estado estacionario a la inclusión de viscosidad y condiciones de contorno horizontales en nuestro cálculo, así como a la disipación numérica introducida por el esquema semi-implícito.
- El Test 6 proporciona resultados aceptables para la frecuencia de inercia y el fenómeno de afloramiento costero. En este caso, la batimetría elegida es además realista, y el mallado mediante prismas trata de forma aceptable las pendientes de la costa.

Los Tests 3 y 4 muestran un comportamiento cuantitativo de predicciones teóricas (órdenes de convergencia) correcto.

En el Test 3 se pone de manifiesto el que es, a nuestro juicio, el mayor inconveniente del esquema (5.16): la penalización de la condición de divergencia de la media nula produce una velocidad vertical residual en el fondo del dominio. Sin embargo, esta perturbación de la velocidad vertical está controlada, en el sentido de que tiende a cero cuando el parámetro h tiende a cero.

Por otro lado, el Test 4 nos muestra que, en el caso en que el dominio no tenga talud, las estimaciones en norma $L_{D,0}^{3/2}(\omega)$ son indispensables en el análisis numérico llevado a cabo en el Capítulo 2.

Observemos para finalizar que es aún necesario realizar tests de carácter cuantitativo en situaciones realistas con el mencionado código. Este es un proceso largo y sin duda difícil dada la dificultad de contrastar simulaciones numéricas con mediciones experimentales, especialmente en el campo de la Oceanografía. Esta tarea queda para el futuro, junto con la implantación de mejoras como condiciones de contorno de tipo fricción en el fondo, viscosidades turbulentas dependientes de (x, z) , densidad variable, etc.

5.5 Figuras

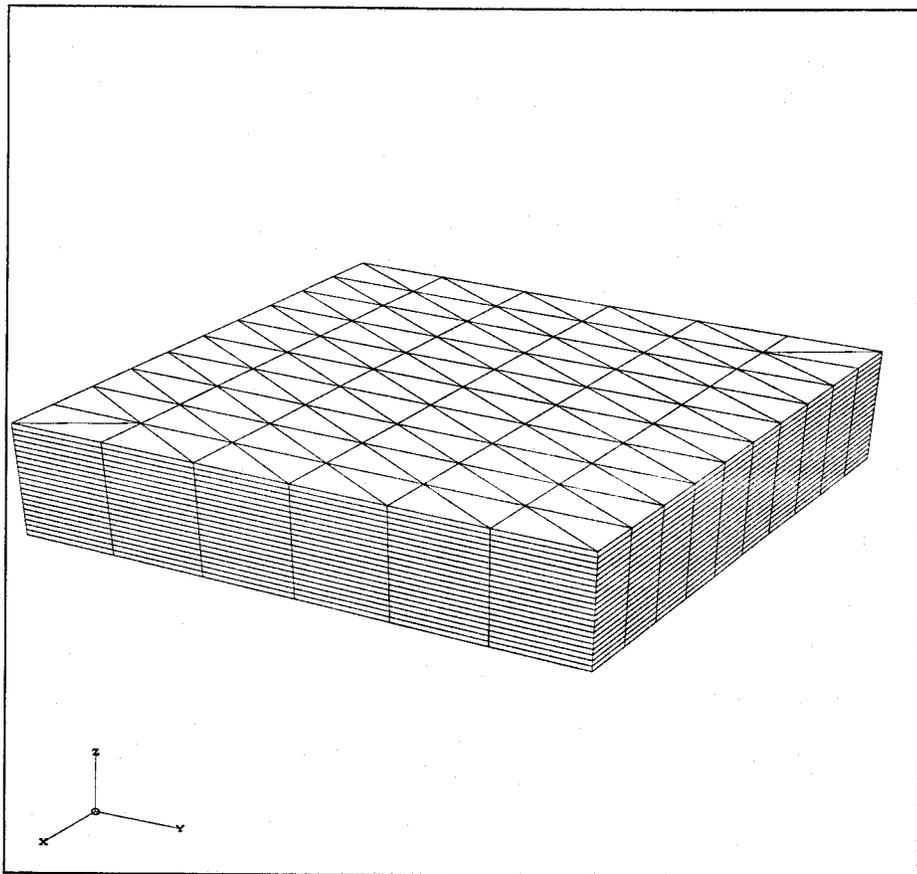


Figura 5.1: Dominio Computacional $\Omega = [0, 10^6]^2 \times [-500, 0]$ (m); 21 capas verticales.

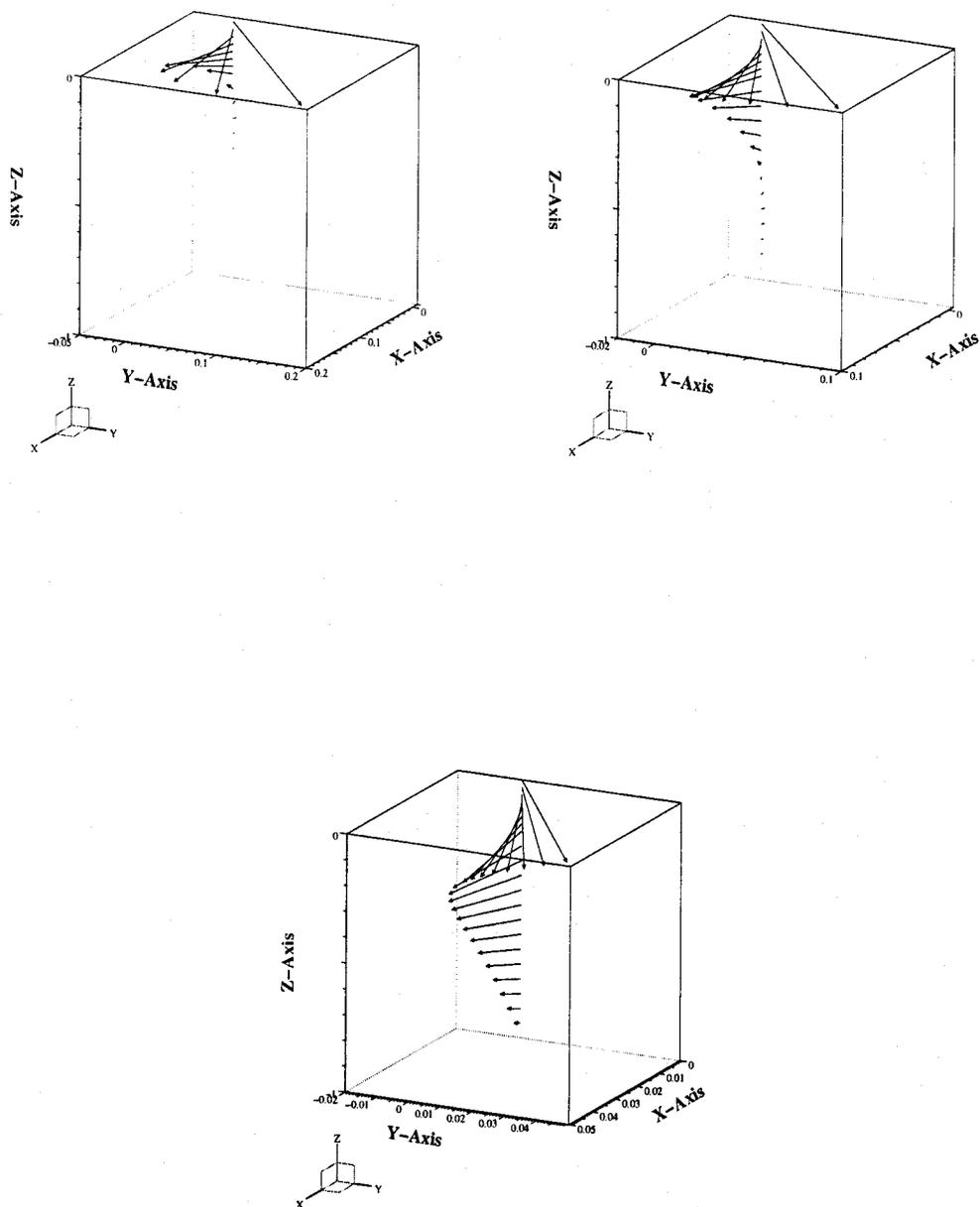


Figura 5.2: Espirales de Ekman correspondientes a los números de Ekman verticales: $E_v = 0.00774$ (arriba-izquierda), $E_v = 0.03099$ (arriba-derecha) y $E_v = 0.12398$ (abajo)

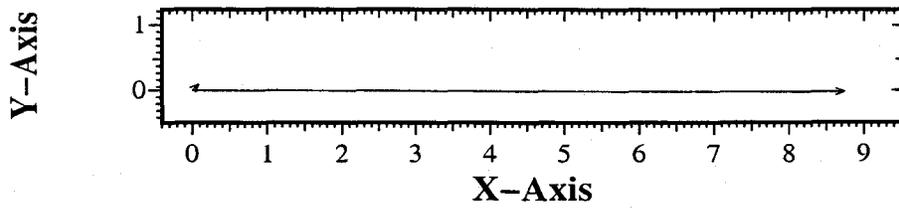


Figura 5.3: Velocidad en superficie y velocidad integrada a lo largo de la capa de Ekman (se han respetado las escalas originales).

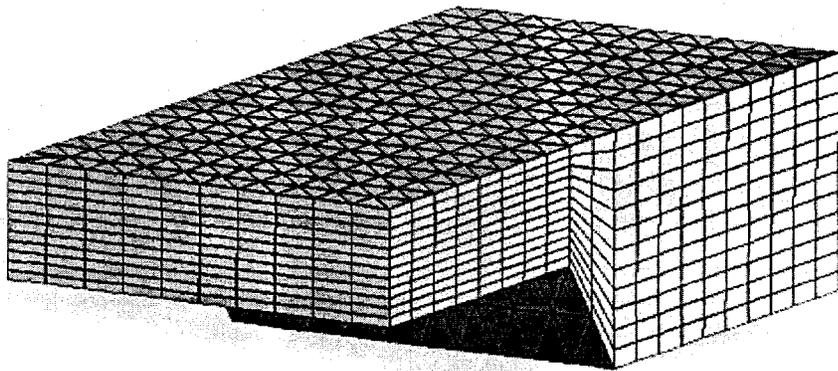


Figura 5.4: Dominio Ω y malla \mathcal{T}_h .

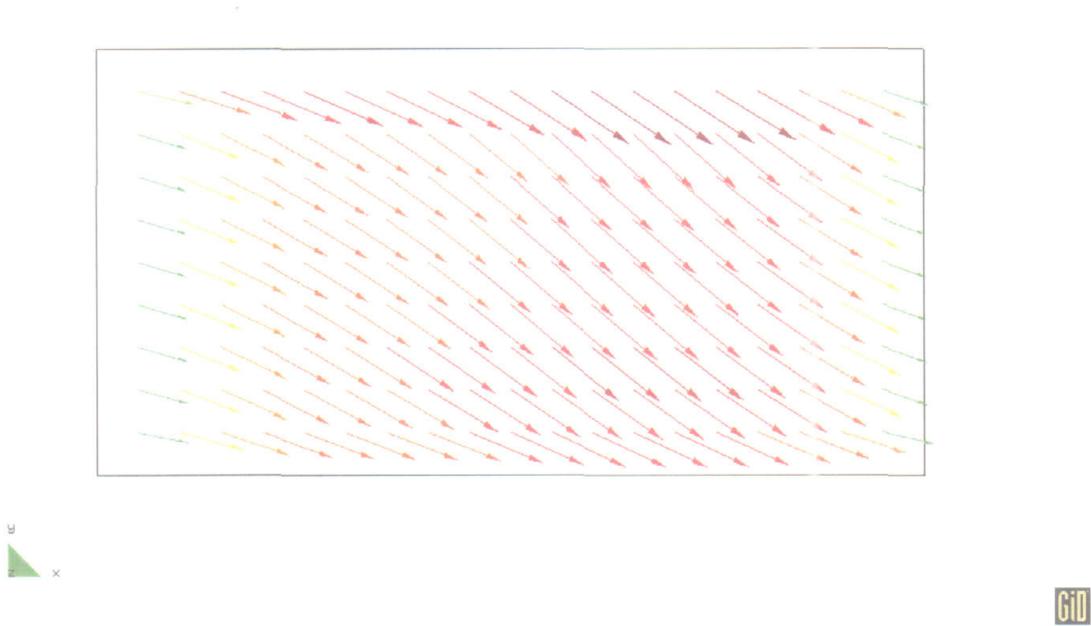
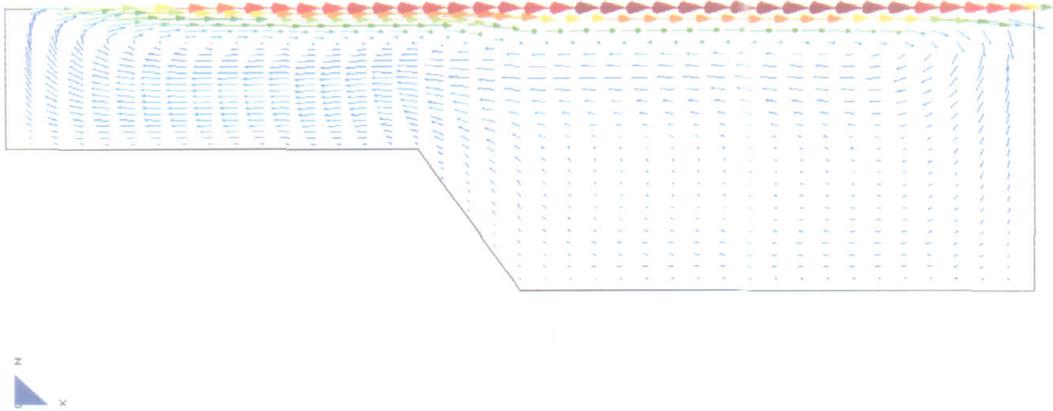


Figura 5.5: Velocidad superficial. Máx. vel.: 5.7 cm/s.

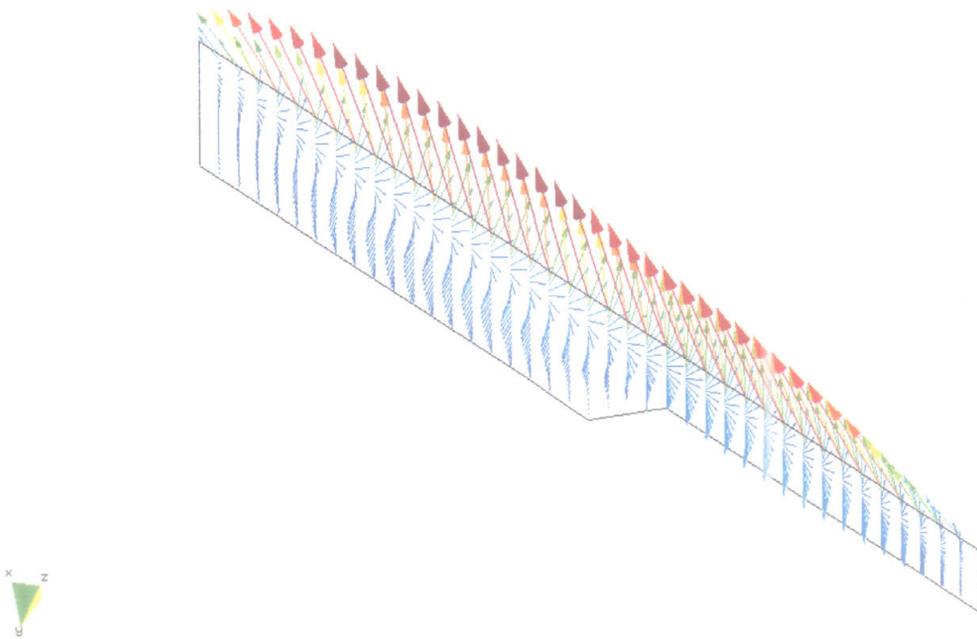


Figura 5.6: Valores de p_s .



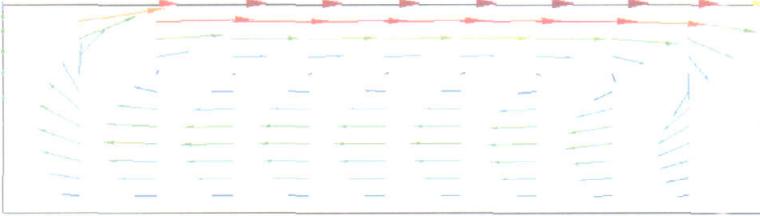
GID

Figura 5.7: Vista lateral de la velocidad tridimensional. Máx. vel.: 5 cm/s.



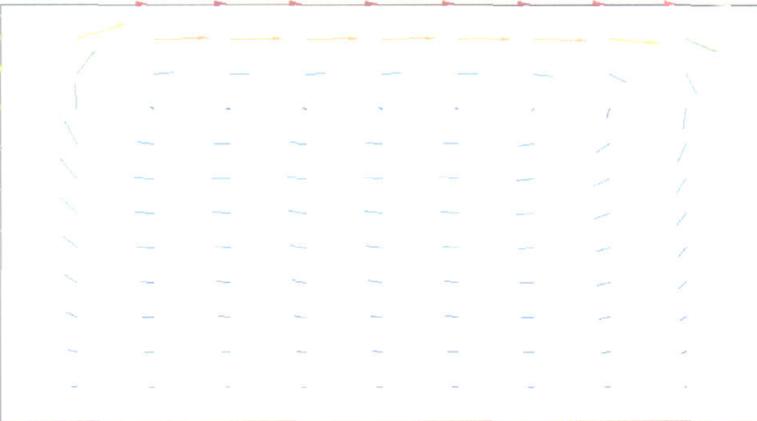
GID

Figura 5.8: Vista cenital de la velocidad tridimensional.



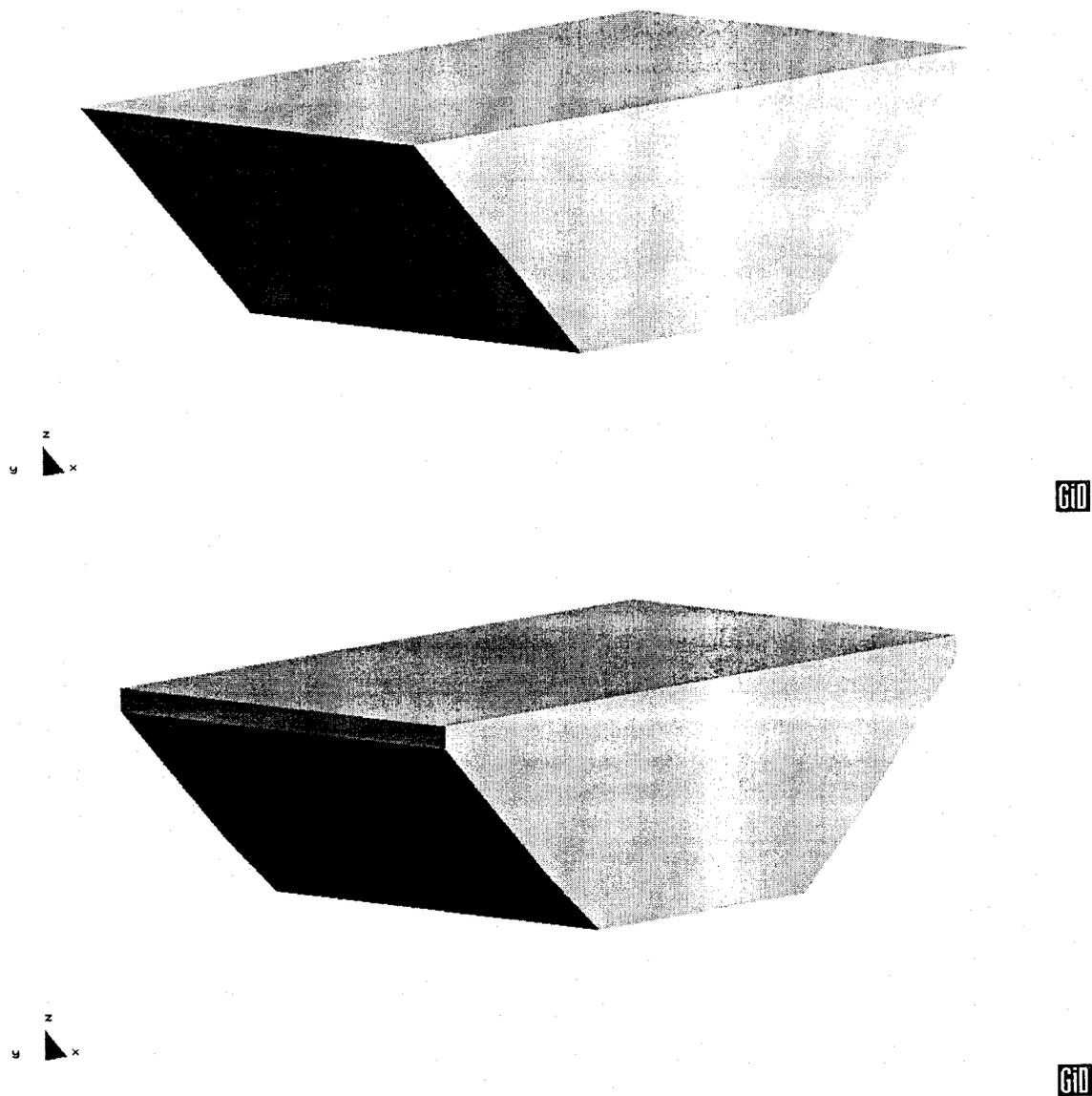
GID

Figura 5.9: Proyección de la velocidad $3D \mathbf{U}_h$ en el plano $x = 2000$. Máx. vel.: 2.1 cm/s.



GID

Figura 5.10: Proyección de la velocidad $3D \mathbf{U}_h$ en el plano $x = 6000$. Máx. vel.: 3.2 cm/s.

Figura 5.11: Dominios Ω y Ω_h .

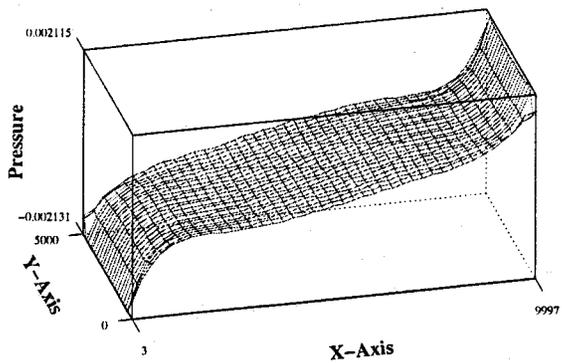
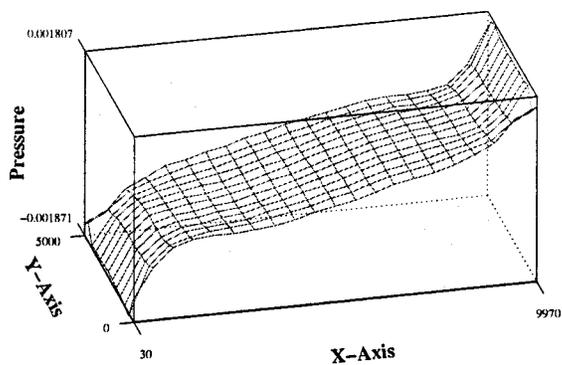
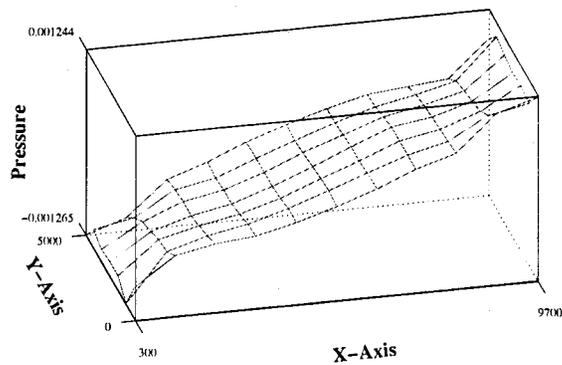


Figura 5.12: Presión superficial correspondiente a los valores del talud: $d_h = 10 m$. (arriba) , $d_h = 1 m$. (centro) y $d_h = 0.1 m$. (abajo)

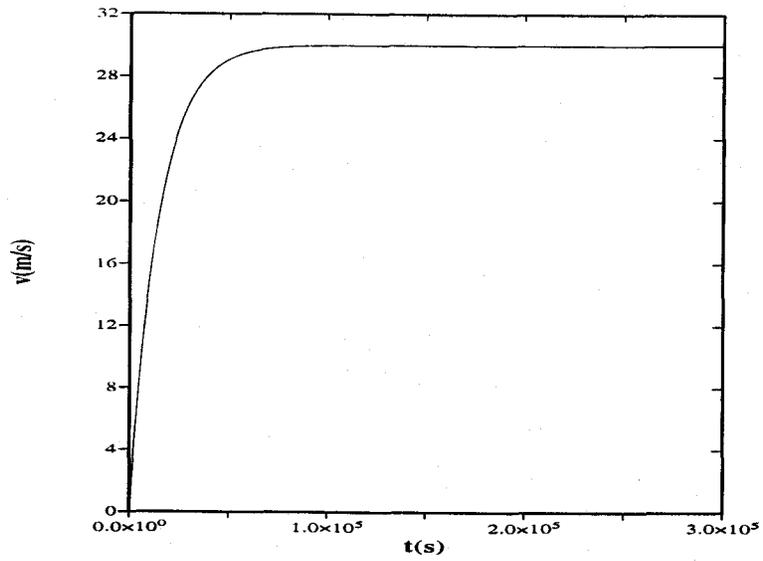
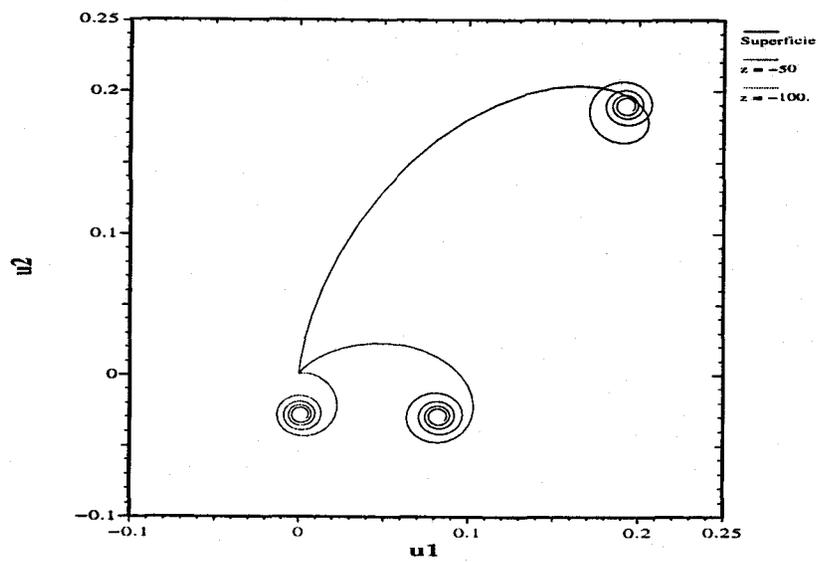


Figura 5.13: Velocidad del viento.

Figura 5.14: Curva $(u_1(t), u_2(t))$.

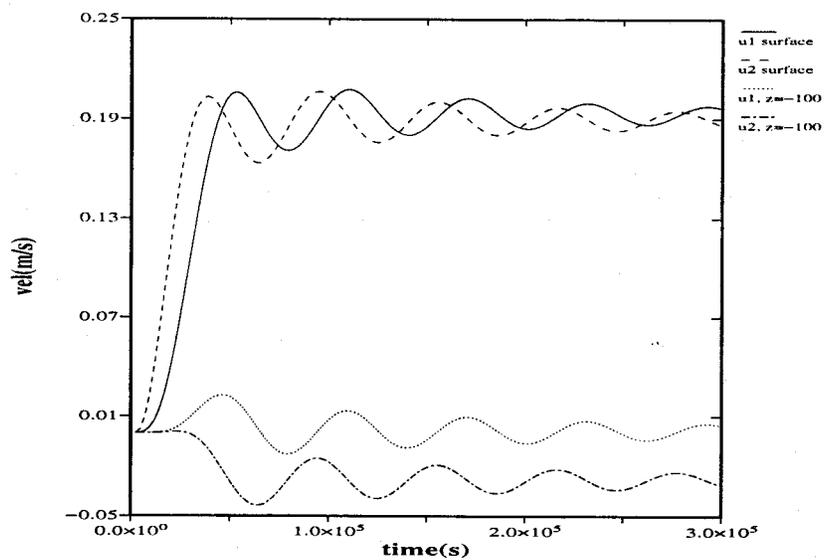


Figura 5.15: Análisis temporal de la velocidad.

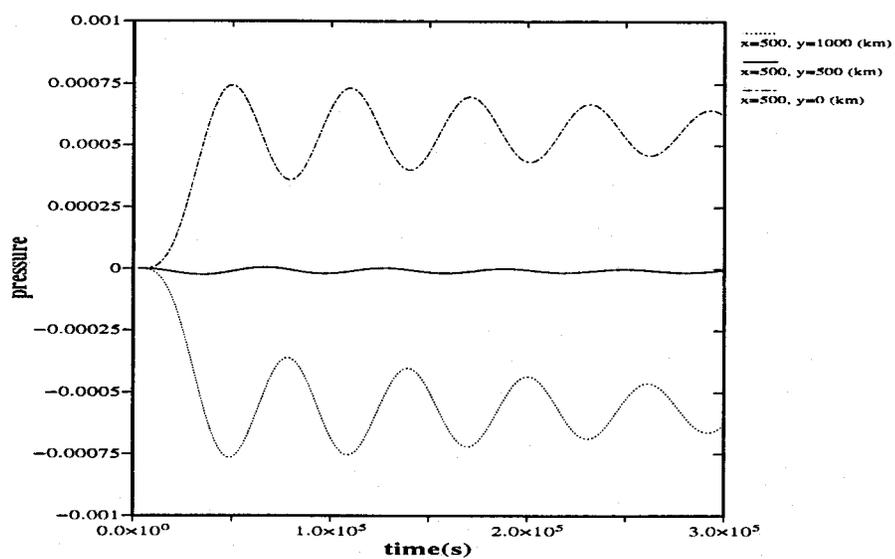


Figura 5.16: Análisis temporal de la presión superficial.

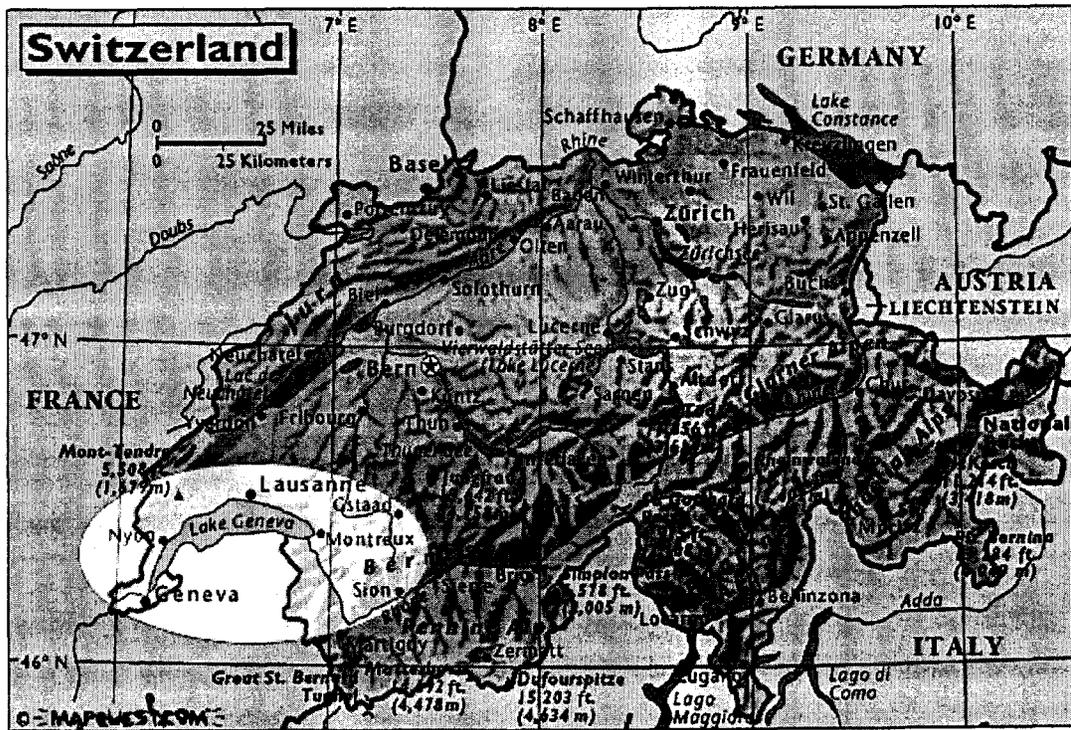


Figura 5.17: Situación geográfica del Lago Lemán.

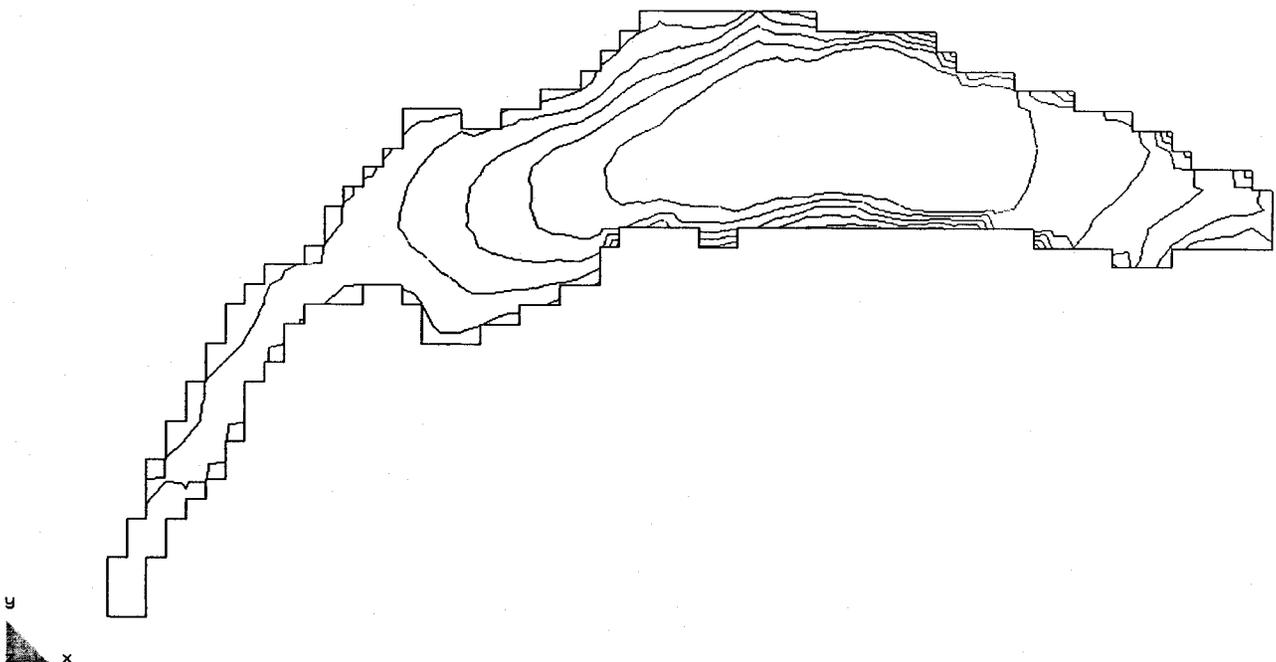


Figura 5.18: Isobatas cada 50 m.

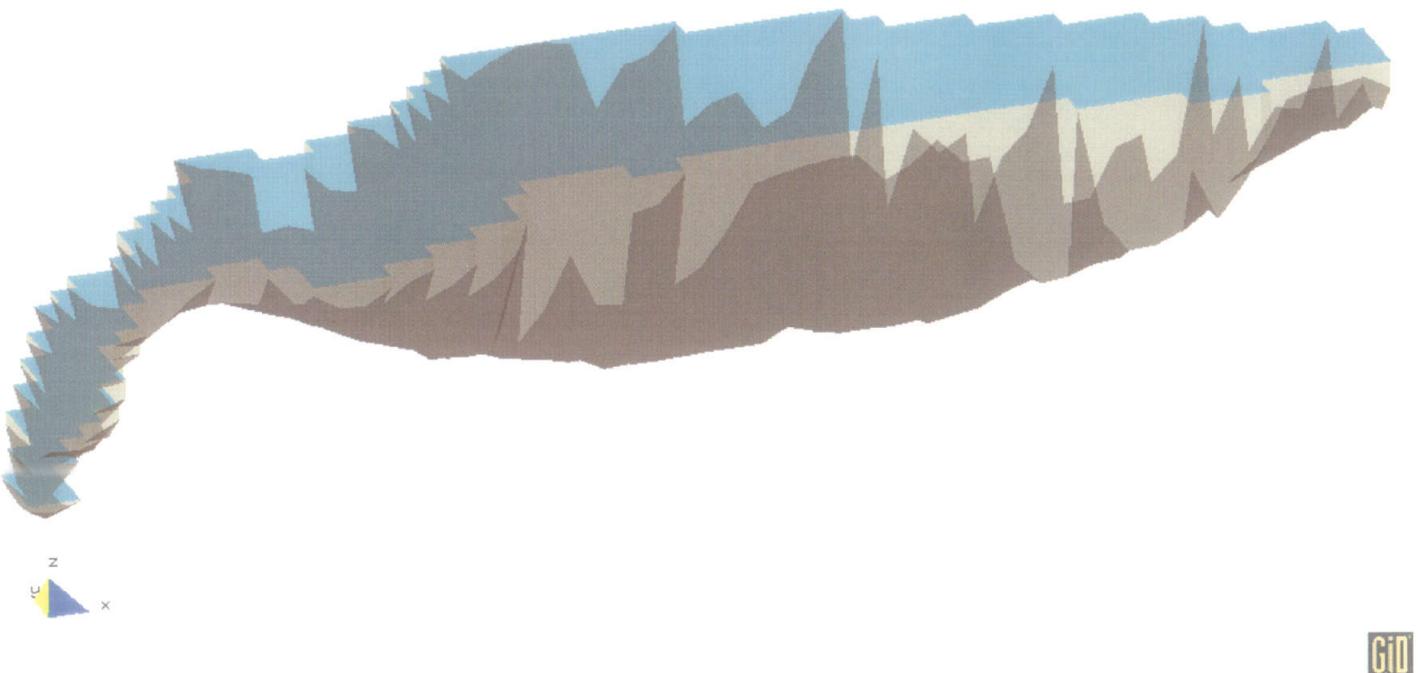


Figura 5.19: *Azul* = Superficie (techo rígido); *Marrón claro* = Talud; *Marrón oscuro* = Fondo

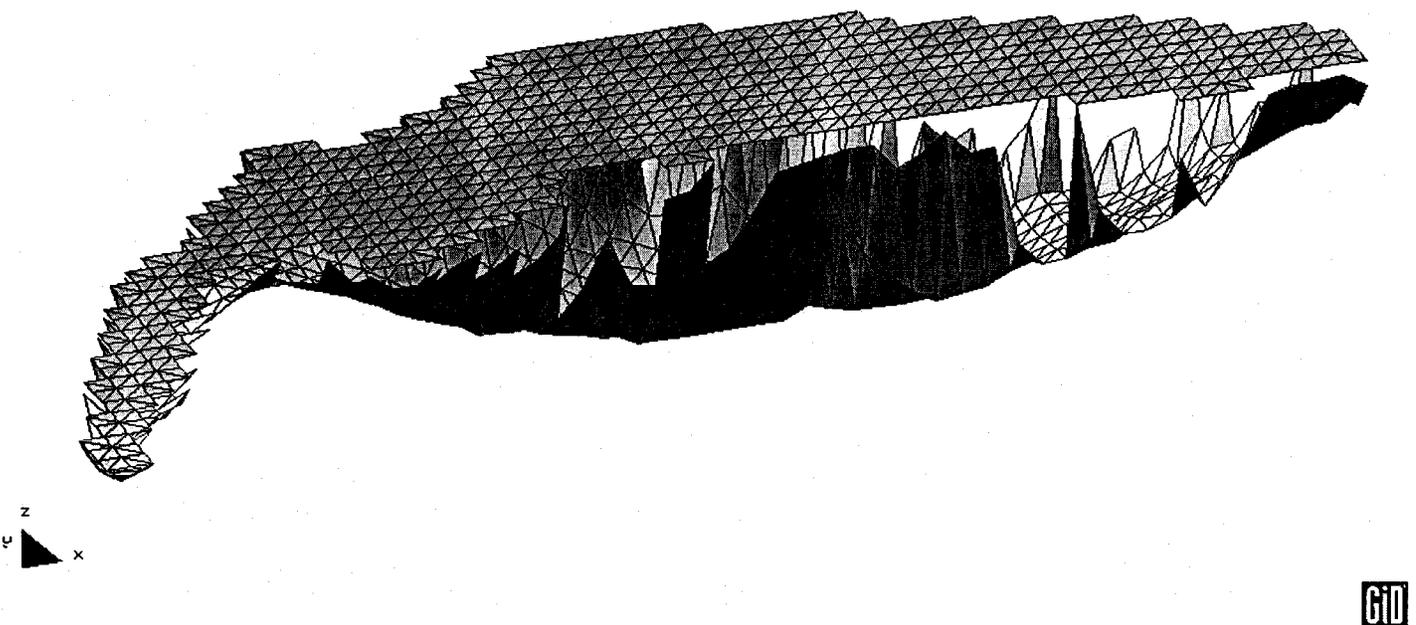


Figura 5.20: Mallas de superficie y fondo.

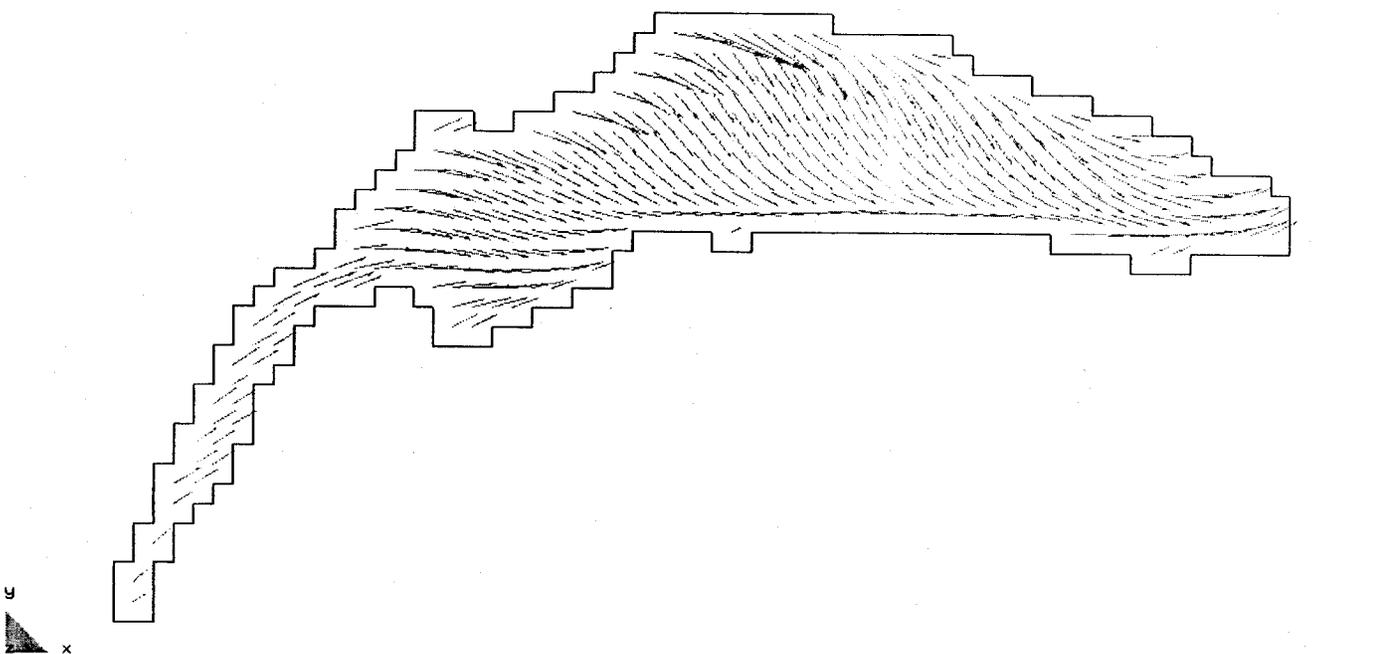


Figura 5.21: Velocidad superficial tras 12 horas. Máx. vel.: 34 cm/s.

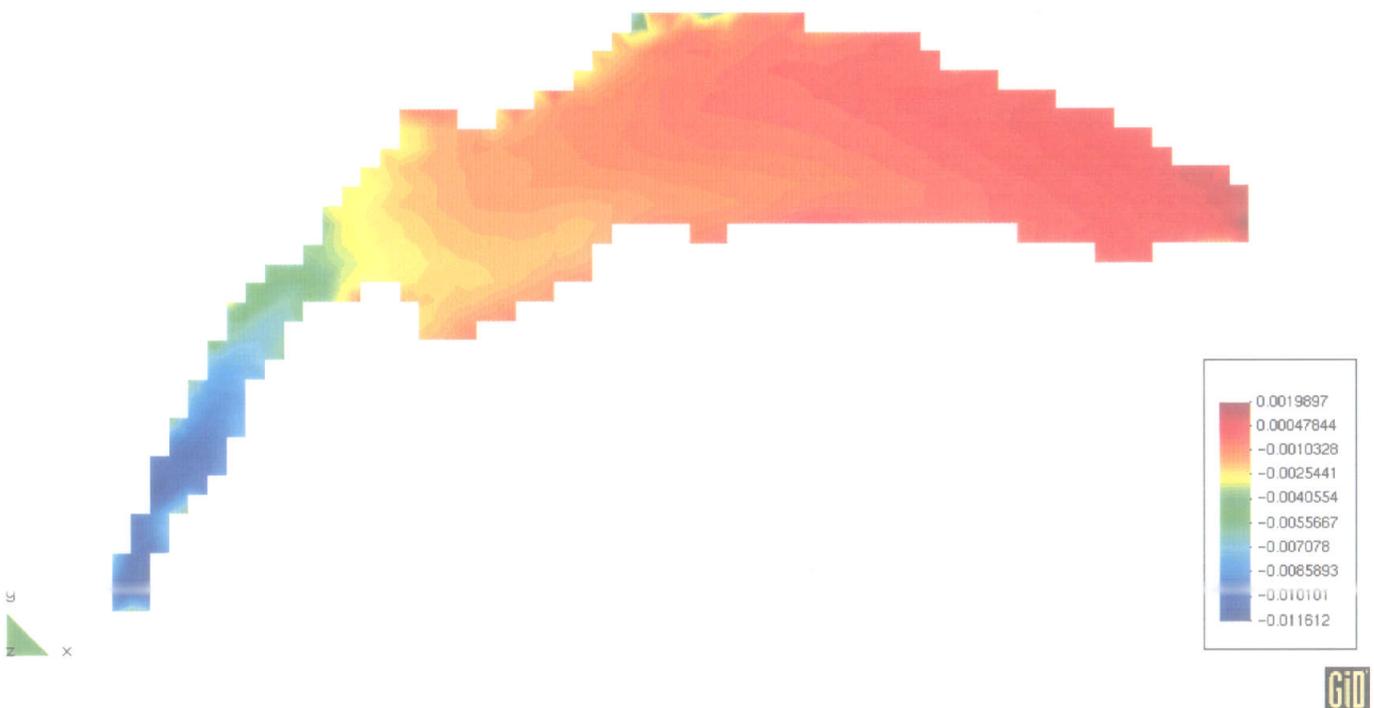


Figura 5.22: Presión superficial tras 12 horas.

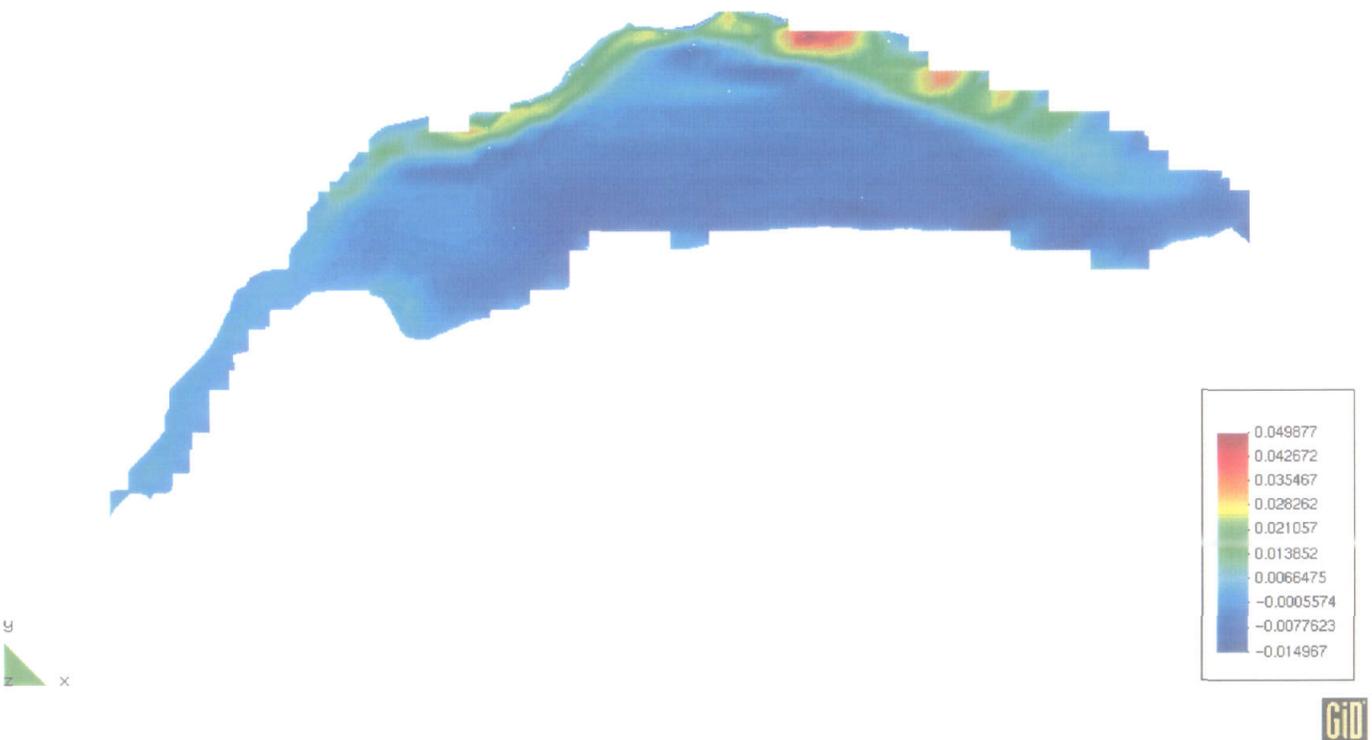


Figura 5.23: Velocidad vertical tras 12 horas. Profundidad=50 m.

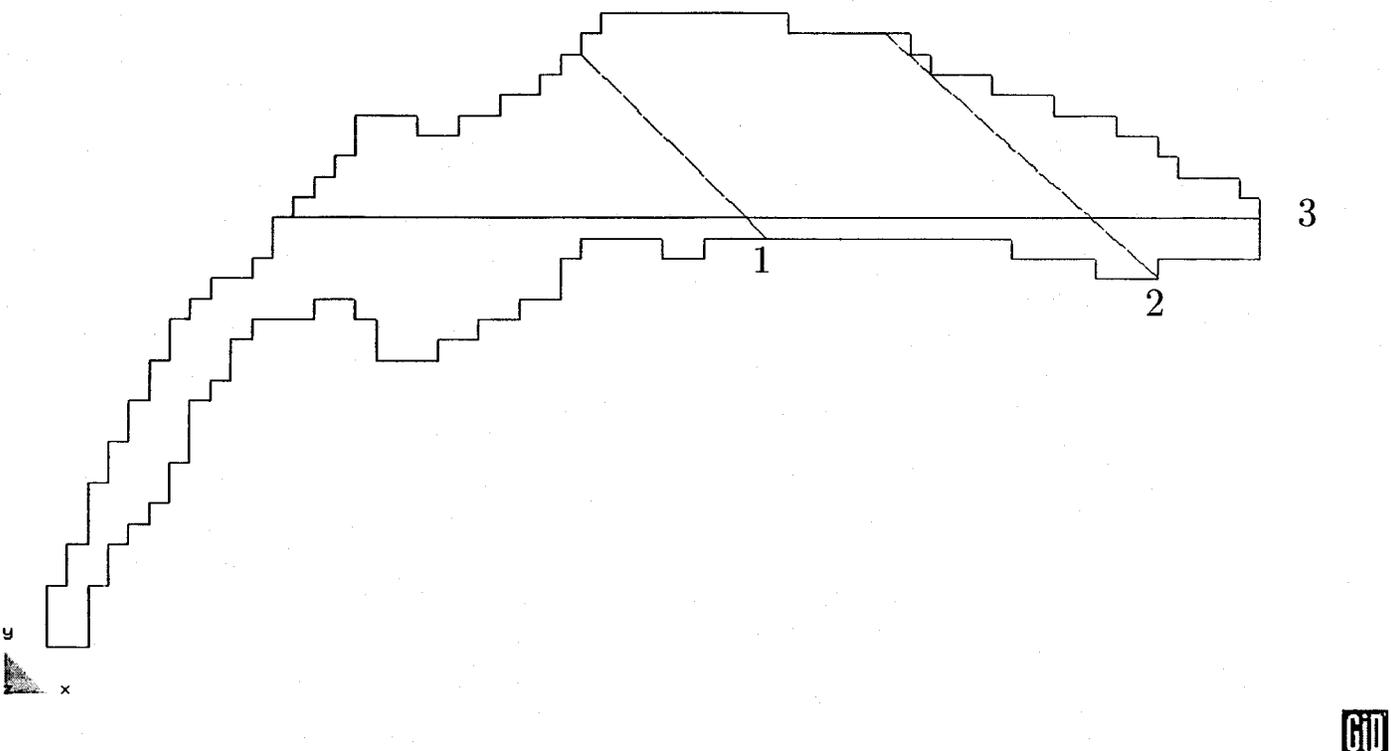


Figura 5.24: Planos de corte. Planos 1 y 2 en diagonal, plano 3 en vertical.

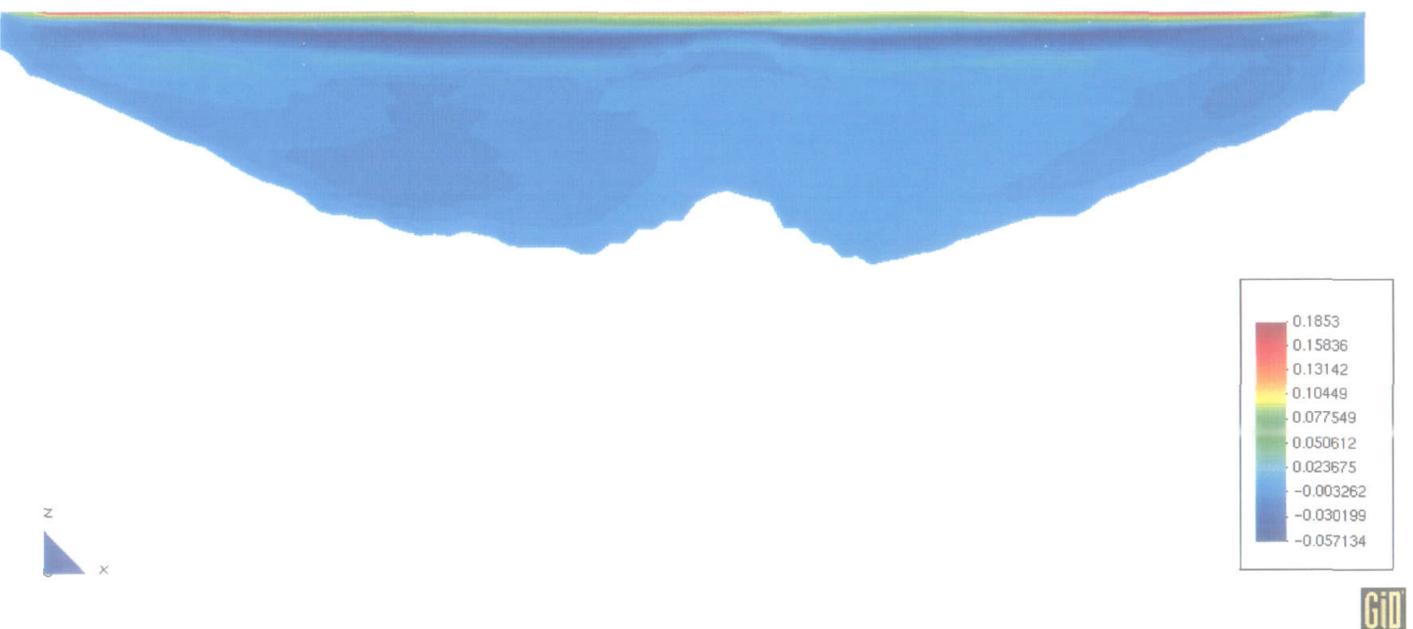


Figura 5.25: Componente u_{1h} en el plano de corte 3 tras 12 horas.

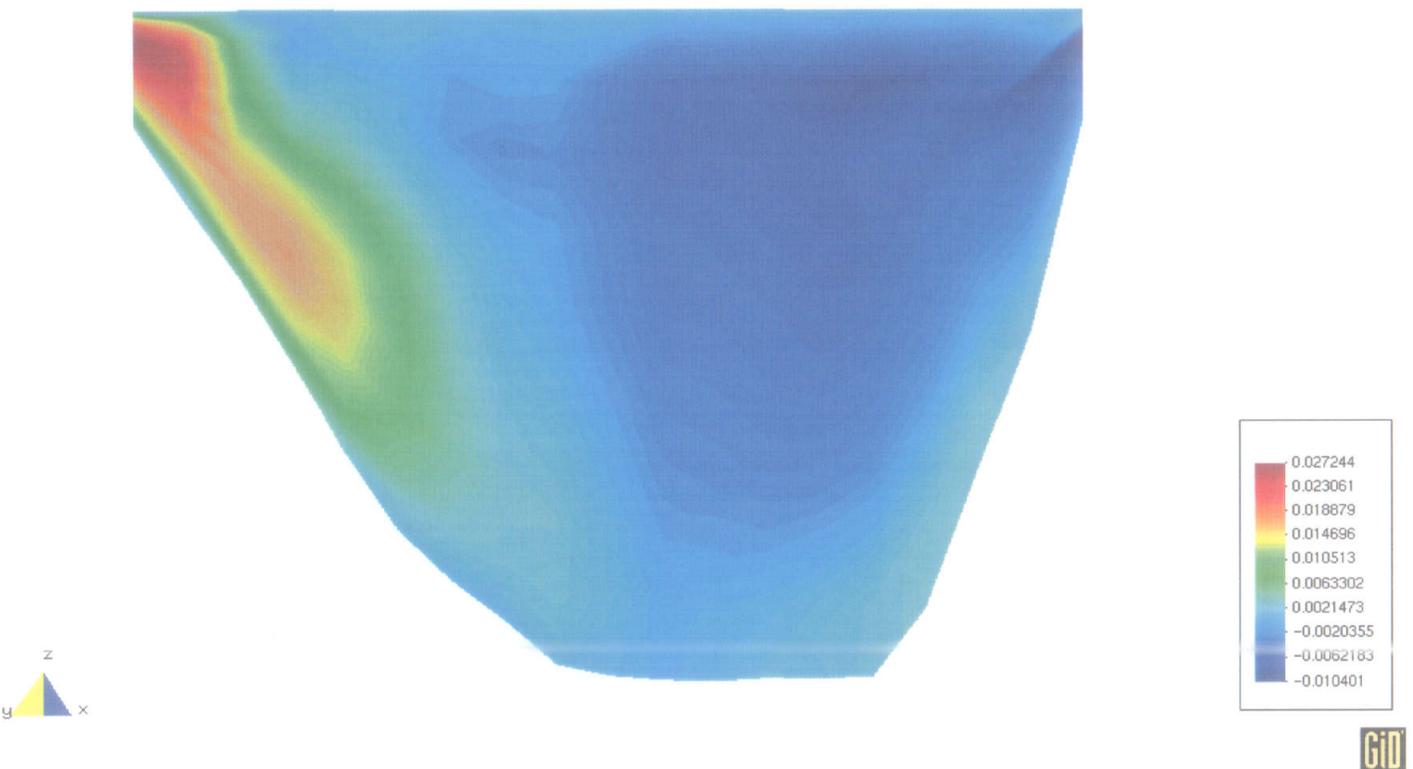


Figura 5.26: Velocidad vertical en el plano de corte 1 tras 12 horas.

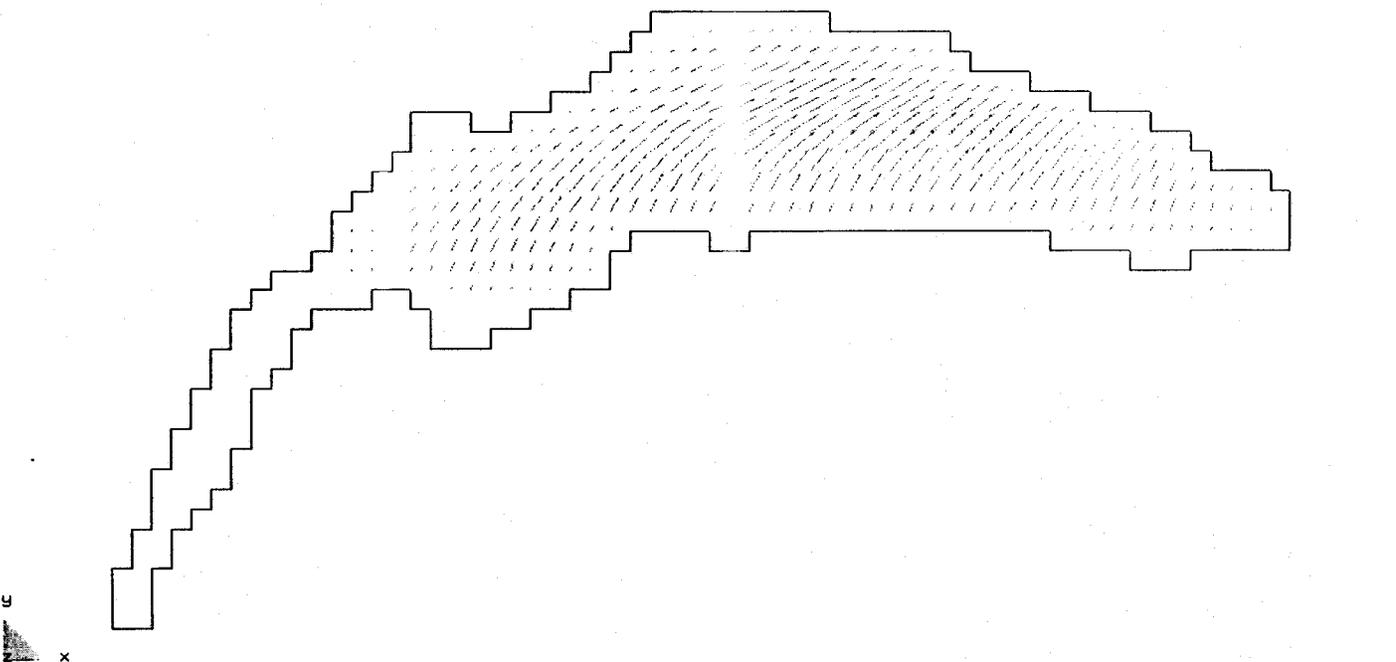


Figura 5.27: Velocidad superficial tras 24 horas. Máx. vel.: 5 cm/s.

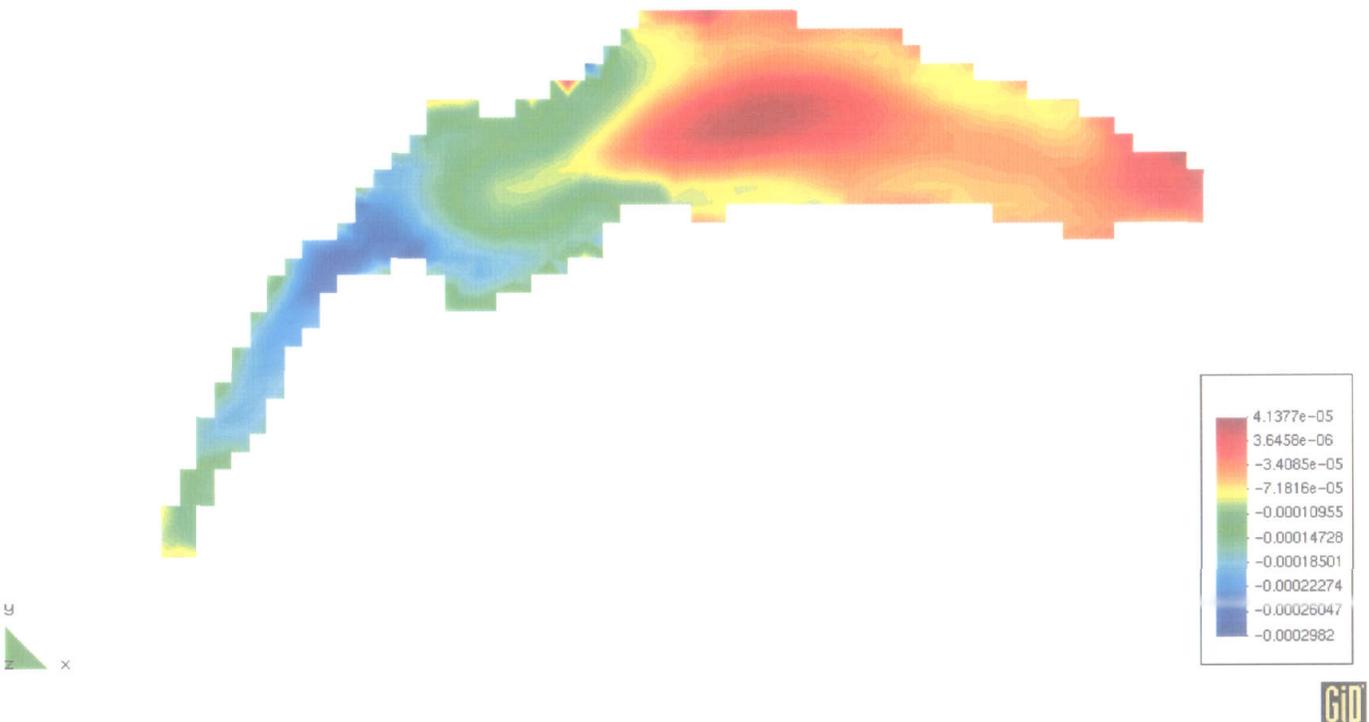


Figura 5.28: Presión superficial tras 24 horas.

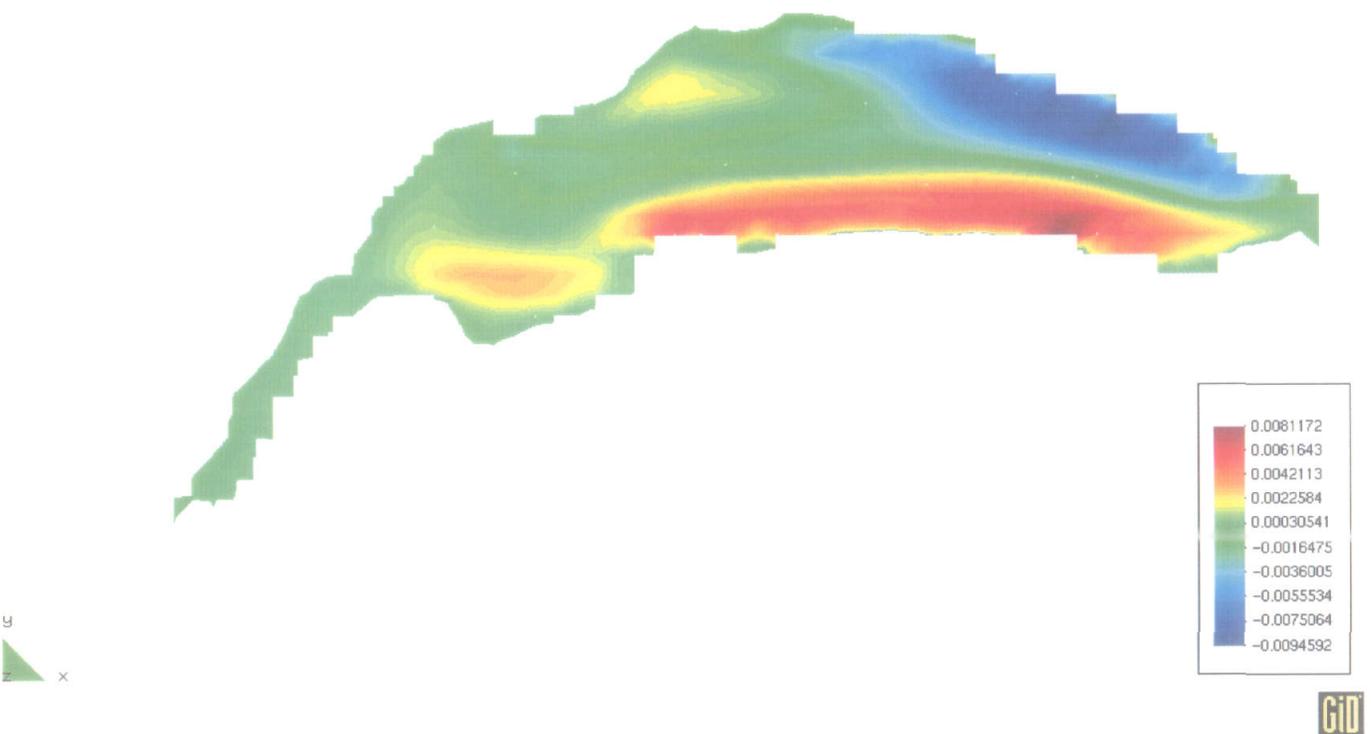


Figura 5.29: Velocidad vertical tras 24 horas. Profundidad=50 m.

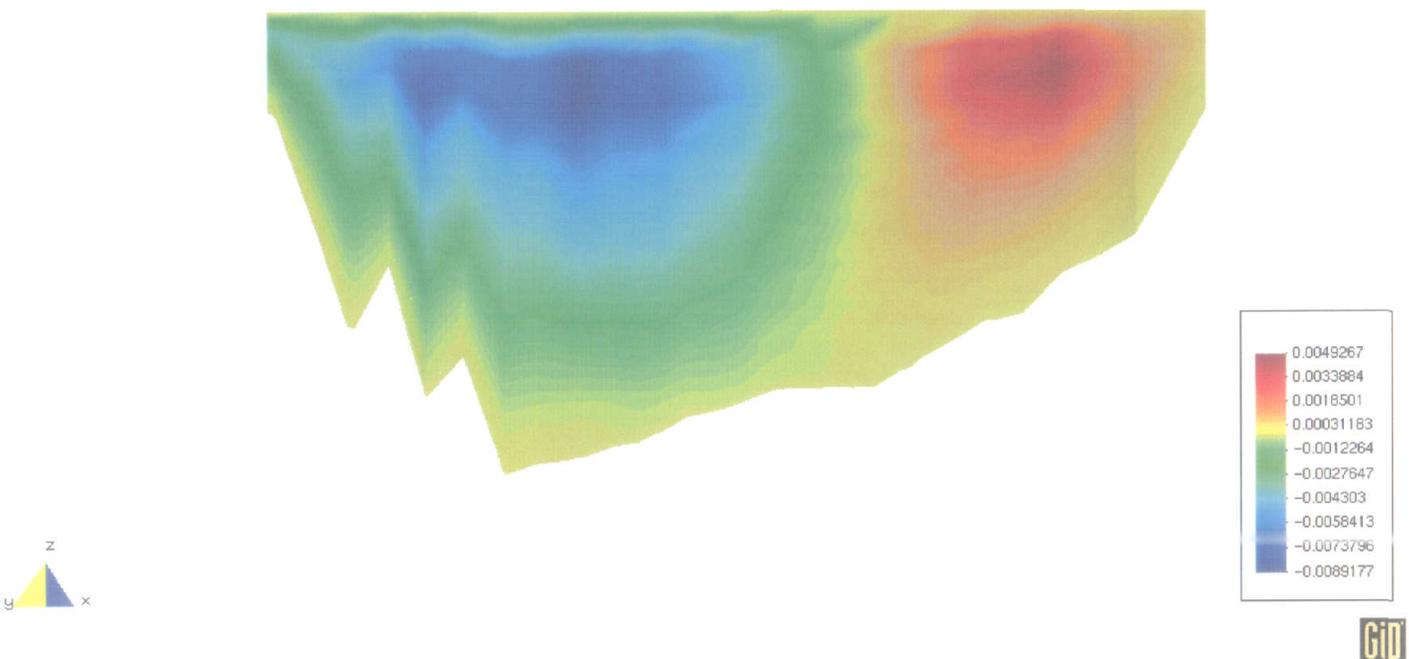


Figura 5.30: Velocidad vertical en el plano de corte 2 tras 24 horas.

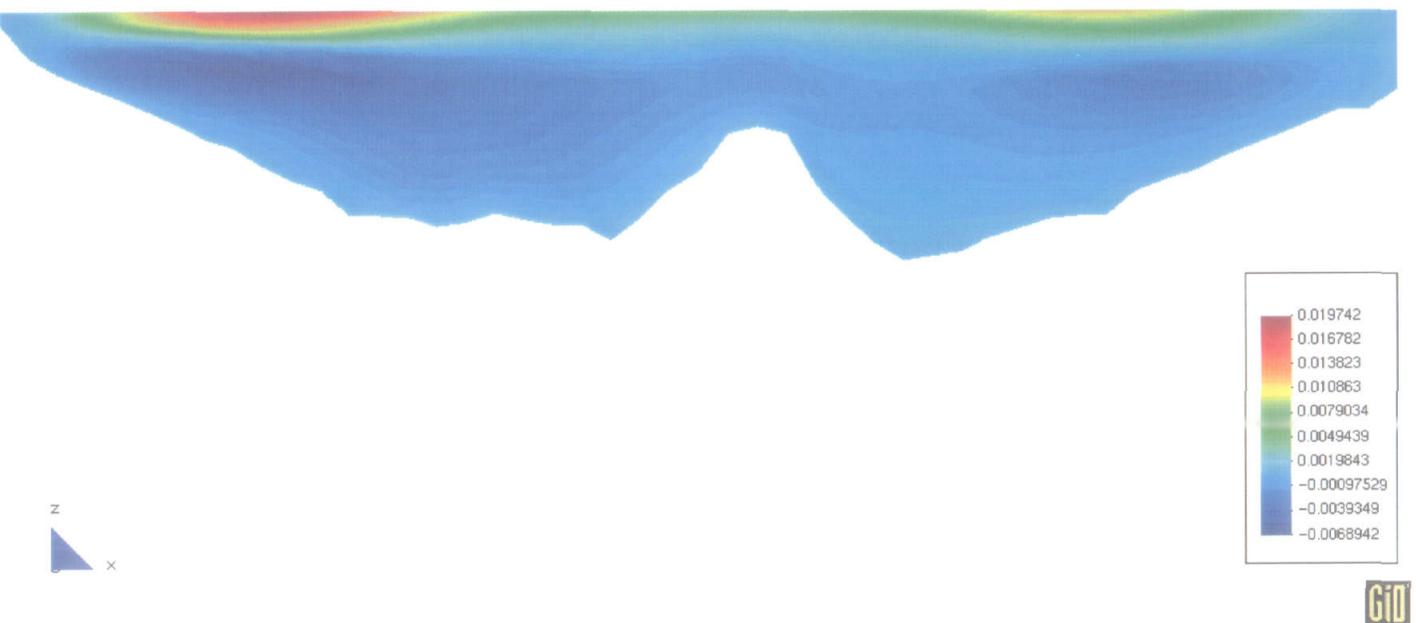


Figura 5.31: Componente u_{1n} en el plano de corte 3 tras 24 horas.

Apéndice A

Demostración del Teorema 2.2.-

Damos a continuación una demostración del Teorema 2.2, obtenida extendiendo un resultado similar publicado en [27]. En aquel caso, sólo se consideran familias de Elementos Finitos afin-equivalentes. La extensión a Elementos Finitos Prismáticos Isoparamétricos se basa en ciertos puntos clave que merece la pena exponer en este apartado. Es más, el análisis que llevamos a cabo a continuación justifica la inclusión de la función profundidad en la estructura del término de estabilización de la convección (veáse (2.2)).

Representación del término de estabilización de la convección.

Como hemos dicho, la representación de los términos estabilizantes llevada a cabo en [27] se aplica a familias de Elementos Finitos afin-equivalentes. Puesto que V_h^1 es un espacio de Elementos Finitos Isoparamétricos, es necesaria una extensión genuina de dicho resultado.

Denotemos por T^* el triángulo de referencia de la familia $T \in C_h$, y Λ_T la afinidad que lleva T^* en T . Situémonos en la capa vertical k , $1 \leq k \leq l$ (donde l denota el número total de capas), y consideremos el prisma K de bases T^k y T^{k+1} :

$$K = \{(\mathbf{x}, z) : \mathbf{x} \in T, \xi_2(\mathbf{x}) \leq z \leq \xi_1(\mathbf{x})\}, \text{ con } \xi_1(\mathbf{x}) = -\frac{k-1}{l}D_h(\mathbf{x}), \xi_2(\mathbf{x}) = -\frac{k}{l}D_h(\mathbf{x}).$$

Dada una función escalar $G : T \rightarrow \mathbb{R}$ o matricial $G : T \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ denotaremos $G^*(\mathbf{x}^*) = G \circ \Lambda_T(\mathbf{x}^*)$. Definimos,

$$D_T^*(\mathbf{x}^*) = D|_T \circ \Lambda_T(\mathbf{x}^*); \quad (1.1)$$

$$\xi_1^*(\mathbf{x}^*) = \xi_1 \circ \Lambda_T(\mathbf{x}^*) = -\frac{k-1}{l}D_T^*(\mathbf{x}^*), \quad \xi_2^*(\mathbf{x}^*) = \xi_2 \circ \Lambda_T(\mathbf{x}^*) = -\frac{k}{l}D_T^*(\mathbf{x}^*). \quad (1.2)$$

Consideremos ahora el prisma de referencia $K^* = T^* \times [0, 1]$ y la transformación $F_K : K^* \rightarrow K$,

$$F_K(\mathbf{x}^*, z^*) = (\Lambda_T(\mathbf{x}^*), \xi_2^*(\mathbf{x}^*)(1 - z^*) + \xi_1^*(\mathbf{x}^*)z^*).$$

Procederemos por etapas:

Etapa 1.-Representación de la derivada convectiva en un subespacio $W(K) \subset L^2(K)$.

Buscamos a continuación un subespacio $W(K)$ de $L^2(K)$ tal que

$$\{[D_h(\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h)]|_K; \text{ with } \mathbf{w}_h, \mathbf{u}_h \in V_h\} \subset W(K). \quad (1.3)$$

Observemos que

$$R_{k_1, k_2}(K) = \{\phi^* \circ F_K^{-1} \text{ para algún } \phi^* \in R_{k_1, k_2}(K^*)\}.$$

Para probar la anterior igualdad, la clave es usar que $\sigma(F_K(\mathbf{x}^*, z^*)) = z^*$. Seguidamente, probamos el

Lema .1 *Dados* $\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h \in V_h$:

- i) $(D_h \nabla u_{ih})|_K \in [R_{1,1}(K)]^3$, $i = 1, 2$;
- ii) Si $w_{3h}|_K(\mathbf{x}, z) = \int_z^0 \nabla_H \cdot \mathbf{w}_h(\mathbf{x}, z') dz'$, entonces $w_{3h}|_K \in R_{1,2}(K)$. Más aún, w_{3h} es continua en las interfaces verticales de los prismas, y discontinua en las interfaces horizontales.
- iii) $[D_h(\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h)]|_K \in [R_{2,3}(K)]^2$.

Demostración.-

i) En primer lugar, recordemos que $u_{ih}|_K \in R_{1,1}(K)$. Es más, se comprueba fácilmente que $R_{1,1}(K)$ se puede reescribir como

$$R_{1,1}(K) = \{p_1(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{x}, z) + p_2(\mathbf{x}); p_1, p_2 \in \mathbb{P}_1(T)\}. \quad (1.4)$$

De

$$\sigma(\mathbf{x}, z) = \frac{z + \frac{k}{l} D_h(\mathbf{x})}{D_h(\mathbf{x})/l}, \quad (1.5)$$

se tiene

$$\partial_x \sigma = \frac{C_1^x}{D_h(\mathbf{x})} (\sigma + C_2^x), \quad \partial_y \sigma = \frac{C_1^y}{D_h(\mathbf{x})} (\sigma + C_2^y), \quad \partial_z \sigma = \frac{C^z}{D_h(\mathbf{x})},$$

para ciertas constantes numéricas $C_1^x, C_2^x, C_1^y, C_2^y, C^z$ que no merece la pena detallar. Digamos sólomente que son directamente proporcionales a $\partial_x D_h$, $\partial_y D_h$ y $\partial_z D_h$ respectivamente. Ahora, fijemos i y escribamos $u_{ih}(\mathbf{x}, z) = p_1(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{x}, z) + p_2(\mathbf{x})$. Se sigue:

$$\begin{aligned}\nabla u_{ih} &= (\nabla p_1)\sigma + (\nabla\sigma)p_1 + \nabla p_2 \\ &= (\nabla p_1)\sigma + \frac{p_1}{D_h(\mathbf{x})}(\vec{C}_1\sigma + \vec{C}_2) + \nabla p_2, \quad \text{con } \vec{C}_1, \vec{C}_2 \in \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Por $D_h|_K = D_T \in \mathbb{P}_1(T)$, se sigue $(D_h \nabla u_{ih})|_K \in [R_{1,1}(K)]^3$.

ii) Observemos que

$$R_{1,2}(K) = \{r_0(\mathbf{x}) + r_1(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}, z) + r_2(\mathbf{x})\sigma^2(\mathbf{x}, z); r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{P}_1(T)\}. \quad (1.6)$$

Denotemos K_j , $j = 1, \dots, k-1$ los prismas que se encuentran por encima de K . Los mismos argumentos usados en i) muestran ahora

$$\begin{aligned}\nabla_H \cdot \mathbf{w}_h|_{K_j} &= \frac{1}{D_h} (p_{1j}(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{x}, z) + p_{2j}(\mathbf{x})), \quad \text{para } j = 1, \dots, k-1; \\ \nabla_H \cdot \mathbf{w}_h|_K &= \frac{1}{D_h} (p_1(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{x}, z) + p_2(\mathbf{x})),\end{aligned}$$

con $p_{1j}, p_{2j}, p_1, p_2 \in \mathbb{P}_1(T)$. Los coeficientes de estos polinomios son, a su vez, polinomios en $\nabla_H D_h$.

Tomemos $1 \leq j \leq k-1$ e integremos en vertical,

$$\begin{aligned}\int_{\xi_1}^0 \nabla_H \cdot \mathbf{w}_h(\mathbf{x}, z') dz' &= \frac{1}{D_h(\mathbf{x})} \sum_{j=1}^{k-1} p_{1j}(\mathbf{x}) \left[\int_{-\frac{1}{l} D_h(\mathbf{x})}^{-\frac{j-1}{l} D_h(\mathbf{x})} \sigma(\mathbf{x}, z') dz' \right] + \frac{1}{D_h(\mathbf{x})} \sum_{j=1}^{k-1} p_{2j}(\mathbf{x}) \frac{D_h(\mathbf{x})}{l} \\ &= \frac{1}{D_h(\mathbf{x})} \sum_{j=1}^{k-1} p_{1j}(\mathbf{x}) \frac{D_h(\mathbf{x})}{2l} + \frac{1}{D_h(\mathbf{x})} \sum_{j=1}^{k-1} p_{2j}(\mathbf{x}) \frac{D_h(\mathbf{x})}{l} \\ &= \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{p_{1j}(\mathbf{x})}{2} + p_{2j}(\mathbf{x}) \right).\end{aligned}$$

Esto proporciona $\int_{\xi_1}^0 \nabla_H \cdot \mathbf{w}_h(\mathbf{x}, z') dz' \in \mathbb{P}_1(T)$.

Además,

$$\begin{aligned}\int_z^{\xi_1} \nabla_H \cdot \mathbf{w}_h(\mathbf{x}, z') dz' &= \frac{1}{D_h(\mathbf{x})} p_1(\mathbf{x}) \left[\int_z^{-\frac{k-1}{l} D_h(\mathbf{x})} \sigma(\mathbf{x}, z') dz' \right] + \\ &\quad \frac{1}{D_h(\mathbf{x})} p_2(\mathbf{x}) \int_z^{-\frac{k-1}{l} D_h(\mathbf{x})} 1 dz'.\end{aligned}$$

Denotemos $\bar{z} = \sigma(\mathbf{x}, z)$, $z^* = \sigma(\mathbf{x}, z')$ y cambiemos de variable en la integral anterior:

$$\begin{aligned}
\int_z^{\xi_1} \nabla_H \cdot \mathbf{w}_h(\mathbf{x}, z') dz' &= \frac{1}{D_h(\mathbf{x})} p_1(\mathbf{x}) \frac{D_h(\mathbf{x})}{l} \left[\int_z^1 z^* dz^* \right] \\
&\quad + \frac{1}{D_h(\mathbf{x})} p_2(\mathbf{x}) \frac{D_h(\mathbf{x})}{l} \left[\int_z^1 1 dz^* \right] \\
&= \frac{1}{l} (p_1(\mathbf{x}) q_1(\sigma) + p_2(\mathbf{x}) q_2(\sigma)),
\end{aligned}$$

para $q_1 \in \mathbb{P}_2(0, 1)$, $q_2 \in \mathbb{P}_1(0, 1)$. De (1.6) se sigue $\int_z^{\xi_1} \nabla_H \cdot \mathbf{w}_h(\mathbf{x}, z') dz' \in R_{1,2}(K)$. Por tanto, $w_{3h} = \int_z^0 \nabla_H \cdot \mathbf{w}_h(\mathbf{x}, z') dz' \in R_{1,2}(K)$.

La continuidad respecto de la variable z se tiene por estar definida w_{3h} mediante una integración vertical.

Por otra parte, $q_1(\sigma)$ y $q_2(\sigma)$ son continuas en las interfases horizontales, pues lo es la coordenada σ . Sin embargo, los polinomios p_{1j}, p_{2j}, p_1, p_2 , no lo son, puesto que los coeficientes de estos polinomios dependen de $\nabla_H D_h$, que es discontinua en las interfases horizontales de los prismas. Se tiene entonces que, en general, w_{3h} es no conforme, al ser discontinua en las caras horizontales de los prismas

iii) Se verifica inmediatamente a partir de i) y ii). ■

El espacio que buscamos es, por tanto, $W(K) = [R_{2,3}(K)]^2$, el transformado de $W^* = [R_{2,3}(K^*)]^2$ por F_K .

Etapa 2.- Representación in K^*

Denotemos por $((\cdot, \cdot))_{K^*}$ y $(\cdot, \cdot)_{K^*}$ los productos escalares usuales en $\mathbf{H}_0^1(K^*)$ y $L^2(K^*)$.

Siguiendo Baiocchi et al. [8]:

Lema .2 *Existe una constante $\mu^* > 0$ tal que si $0 < \tau^* \leq \mu^*$, existe un espacio de Elementos Finitos Burbuja $Z^* \subset [H_0^1(K^*)]^3$ tal que*

$$((\mathcal{R}^*(\mathbf{v}^*), \mathcal{R}^*(\mathbf{w}^*)))_{K^*} = \tau^* (\mathbf{v}^*, \mathbf{w}^*)_{K^*}, \quad \forall \mathbf{v}^*, \mathbf{w}^* \in W^* \quad (1.7)$$

donde \mathcal{R}^* es el operador de condensación estática de $\mathbf{H}^{-1}(K^*)$ en Z^* , definido con respecto al producto escalar $((\cdot, \cdot))_{K^*}$.

El subespacio Z^* puede ser construido verificando $W^* \cap Z^* = \{0\}$. Supondremos que Z^* cumple esta propiedad.

Sea $(\mathbf{x}, z) = F_K(\mathbf{x}^*, z^*) \in K$ y denotemos

$$\begin{aligned}
A_K^*(\mathbf{x}^*, z^*) &= \nabla_* F_K(\mathbf{x}^*, z^*); \quad A_T = \nabla_* \Lambda_T; \\
(\mathbf{c}^*)^t(\mathbf{x}^*, z^*) &= [\nabla_H(F_K)_3]^t(\mathbf{x}^*, z^*); \quad \alpha^*(\mathbf{x}^*) = (\xi_2^* - \xi_1^*)(\mathbf{x}^*).
\end{aligned}$$

Se sigue

$$A_K^* = \left(\begin{array}{c|c} A_T & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline (\mathbf{c}^*)^t & \alpha^* \end{array} \right),$$

y

$$|\det A_K^*(\mathbf{x}^*, z^*)| = |\det A_T| \alpha^*(\mathbf{x}^*) = |\det A_T| D_T^*(\mathbf{x}^*) l^{-1} \neq 0.$$

Denotemos $s_n^K(\mathbf{x}^*, z^*)$, $1 \leq n \leq 3$ los valores singulares de $A_K^*(\mathbf{x}^*, z^*)$. Existen dos matrices ortogonales $U_K^*(\mathbf{x}^*, z^*)$, $V_K^*(\mathbf{x}^*, z^*)$ tales que

$$A_K^* = (U_K^*)^t \Sigma_K^* V_K^*, \text{ con } \Sigma_K^* = \text{Diag}(s_1^K(\mathbf{x}^*, z^*), \dots, s_3^K(\mathbf{x}^*, z^*))$$

es una Descomposición en Valores Singulares (DVS) de A_K^* . Así, si $A_K(\mathbf{x}, z) = A_K^*(\mathbf{x}^*, z^*)$,

$$A_K = U_K^t \Sigma_K V_K, \text{ con } \Sigma_K = \text{Diag}(s_1^K(\mathbf{x}, z), \dots, s_3^K(\mathbf{x}, z))$$

es una DVS de A_K , con

$$U_K(\mathbf{x}, z) = U_K^*(\mathbf{x}^*, z^*), \quad V_K(\mathbf{x}, z) = V_K^*(\mathbf{x}^*, z^*), \quad s_n^K(\mathbf{x}, z) = s_n^K(\mathbf{x}^*, z^*).$$

Definamos la matriz

$$C_K = h_K^{-2} U_K^t \Sigma_K^2 U_K.$$

Para $\beta_K > 0$ fijo definimos

$$S_K(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \beta_K \int_K (C_K \nabla \mathbf{w}) : \nabla \mathbf{v} D_T^{-1}(\mathbf{x}) dx$$

para todo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(K)$.

Consideremos $Z(K) = \{\phi^* \circ F_K^{-1} : \phi^* \in Z^*\}$ y \mathcal{R}^K el operador de condesación estática de $\mathbf{H}^{-1}(K)$ en $Z(K)$ con respecto a S_K . Puesto que

$$(C_K \nabla \mathbf{w}) : \nabla \mathbf{v} = h_K^{-2} \nabla_* \mathbf{w}^* : \nabla_* \mathbf{v}^*,$$

se sigue,

$$S_K(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \beta_K h_K^{-2} |\det A_T| l^{-1} ((\mathbf{w}^*, \mathbf{v}^*))_{K^*}. \quad (1.8)$$

Por otro lado,

$$\tau^* \int_K (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) D_T^{-1}(\mathbf{x}) = \tau^* |\det A_T| l^{-1}(\mathbf{v}^*, \mathbf{w}^*)_{K^*}. \quad (1.9)$$

Dados $\mathbf{v} = \mathbf{v}^* \circ F_K^{-1} \in W(K)$ y $\mathbf{w} \in Z(K)$, de (1.8), (1.9) y la definición de \mathcal{R}^* :

$$\beta_K^{-1} h_K^2 S_K(\mathcal{R}^*(\mathbf{v}^*) \circ F_K^{-1}, \mathbf{w}) = \int_K (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) D_T^{-1}(\mathbf{x}) \implies \mathcal{R}^K(\mathbf{v}) = \beta_K^{-1} h_K^2 (\mathcal{R}^*(\mathbf{v}^*) \circ F_K^{-1}).$$

Esto implica

$$S_K(\mathcal{R}^K(\mathbf{v}), \mathcal{R}^K(\mathbf{w})) = \tau_K \int_K (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) D_T^{-1}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in W(K), \quad (1.10)$$

con $\tau_K = \tau^* \beta_K^{-1} h_K^2$. Observemos que β_K queda determinado a partir de τ_K .

Etapa 3.- Representación global.

Consideremos los espacios $Z_h \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, $W_h \subset L^2(\Omega)$ generados por los espacios de referencia Z^* y W^* transportados por F_K en \mathcal{T}_h , y definamos las formas bilineales en $Z_h \times Z_h$

$$\begin{aligned} S_h(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \sum_{K \text{ bajo } T} S_K(\mathbf{w}|_K, \mathbf{v}|_K) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \sum_{K \text{ bajo } T} \beta_K \int_K (C_K \nabla \mathbf{w}|_K) : \nabla \mathbf{v}|_K D_T^{-1}(\mathbf{x}), \quad \text{with } \beta_K = \tau^* \tau_K^{-1} h_K^2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

donde la notación K bajo T indica que la suma se extiende a los prismas $K \in \mathcal{T}_h$ en la columna con base superior T . Consideremos ahora \mathcal{R}_h , el operador de condensación estática de $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ en Z_h con respecto a S_h . Dado $\mathbf{w} \in W$, se verifica la propiedad $\mathcal{R}_h(\mathbf{w})|_K = \mathcal{R}^K(\mathbf{w}|_K)$ porque $\text{int}(K) \cap \text{int}(K') = \emptyset$. (1.10) implica

$$\begin{aligned} S_h(\mathcal{R}_h(\mathbf{w}), \mathcal{R}_h(\mathbf{v})) &= \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \sum_{K \text{ bajo } T} \tau_K \int_K (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) D_T^{-1}(\mathbf{x}), \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) D_h^{-1}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in W. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Utilizamos (1.3) y (1.12) para obtener:

$$S_h(\mathcal{R}_h((\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h) D_h), \mathcal{R}_h((\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h) D_h)) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K (\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h)(\mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h) D_h \, dx \, dz,$$

para $\mathbf{w}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h$ en V_h .

Etapa 4.- Coercividad uniforme y continuidad de $\{S_h\}_{h>0}$

Estudiamos la continuidad de S_K :

$$S_K(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq \beta_K h_K^{-2} \left(\max_{\substack{(\mathbf{x}, z) \in K \\ 1 \leq n \leq 3}} s_n^K(\mathbf{x}, z) \right) (\min_T D_T)^{-1} |\mathbf{w}|_{1,K} |\mathbf{v}|_{1,K}, \quad (1.13)$$

$$S_K(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq \beta_K h_K^{-2} \left(\min_{\substack{(\mathbf{x}, z) \in K \\ 1 \leq n \leq 3}} s_n^K(\mathbf{x}, z) \right) (\max_T D_T)^{-1} |\mathbf{w}|_{1,K}^2. \quad (1.14)$$

Es necesario acotar $\max_{\substack{(\mathbf{x}, z) \in K \\ 1 \leq n \leq 3}} s_n^K(\mathbf{x}, z)$ y $\min_{\substack{(\mathbf{x}, z) \in K \\ 1 \leq n \leq 3}} s_n^K(\mathbf{x}, z)$. Supondremos para ello que los valores singulares están numerados en orden decreciente. Denotemos por $\|\cdot\|_2$ la norma espectral de matrices y la norma euclídea de vectores. Entonces

$$\begin{aligned} (s_1^K)^2 = \|A_K\|_2^2 &= \sup_{\|\mathbf{v}\|_2=1} \|A_K \mathbf{v}\|_2^2 \\ &= \sup_{\|\mathbf{v}\|_2=1} \left\{ \|A_T \mathbf{v}_H\|_2^2 + (\mathbf{c}^t \cdot \mathbf{v}_H + \alpha v_3)^2 \right\} \\ &\leq \|A_T\|_2^2 + \|\mathbf{c}^t\|_2^2 + \alpha^2 = (s_1^T)^2 + \|\mathbf{c}^t\|_2^2 + \alpha^2. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Por otra parte, se comprueba con facilidad

$$A_K^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A_T^{-1} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline -\alpha^{-1} \mathbf{c}^t A_T^{-1} & \alpha^{-1} \end{array} \right).$$

Acotando como en (1.15),

$$(s_3^K)^{-2} = \|A_K^{-1}\|_2^2 = \sup_{\|\mathbf{v}\|_2=1} \|A_K^{-1} \mathbf{v}\|_2^2 \leq (s_2^T)^{-2} + \alpha^{-2} (s_2^T)^{-2} \|\mathbf{c}^t\|_2^2 + \alpha^{-2}. \quad (1.16)$$

Es fácil comprobar que $\forall (\mathbf{x}, z) \in K$,

$$\mathbf{c}^t(\mathbf{x}, z) = [\nabla_H \xi_1]^t A_T (1 - z^*(\mathbf{x}, z)) + [\nabla_H \xi_2]^t A_T z^*(\mathbf{x}, z),$$

donde $z^*(\mathbf{x}, z)$ es la coordenada vertical de $F_K^{-1}(\mathbf{x}, z)$ en el elemento de referencia K^* . No es necesario escribir explícitamente la expresión de $F_K^{-1}(\mathbf{x}, z)$, puesto que lo que realmente nos interesa es la propiedad

$$0 \leq z^*(\mathbf{x}, z) \leq 1, \quad 0 \leq 1 - z^*(\mathbf{x}, z) \leq 1 \quad \forall (\mathbf{x}, z) \in K.$$

Esto conduce a

$$\begin{aligned} \|c^t\|_2^2 &\leq 2 \|A_T\|_2^2 (\|\nabla_H \xi_1\|_2^2 + \|\nabla_H \xi_2\|_2^2) \leq 2 (s_1^T)^2 \|\nabla_H D_T\|_2^2 \frac{(k+1)^2 + k^2}{l^2} \\ &\leq 10 \|\nabla_H D\|_{L^\infty(\omega)}^2 (s_1^T)^2, \end{aligned}$$

ya que

$$\frac{(k+1)^2 + k^2}{l^2} \leq 5 \quad \text{if } 1 \leq k \leq l < +\infty.$$

Por otro lado, $\alpha = D_T(\mathbf{x})/l$ y

$$(\min_T D_T)/l \leq \alpha \leq (\max_T D_T)/l. \quad (1.17)$$

Es más, por ser \mathcal{C}_h una familia regular de triangulaciones, existen constantes C_1 y C_2 dependientes sólo de T^* tales que

$$C_1 h_T \leq s_i^T \leq C_2 h_T.$$

Finalmente, las estimaciones (1.15)-(1.17) dan:

$$C_1 (h_T^2 + (\frac{m_{D_T}}{l})^2) \leq (s_3^K)^2 \leq (s_1^K)^2 \leq C_2 (h_T^2 + (\frac{M_{D_T}}{l})^2),$$

con C_1 y C_2 constantes positivas dependientes de T^* y $\|\nabla D\|_{\infty, \omega}$, y

$$m_{D_T} = \frac{\min_T D_T}{l}, \quad M_{D_T} = \frac{\max_T D_T}{l}.$$

Ahora, para todo K bajo T ,

$$\frac{h_T^2 + (m_{D_T}/l)^2}{h_K^2} \geq \frac{h_T^2}{h_K^2} \geq \frac{r_K^2}{h_K^2},$$

donde $r_K = \sup \{diam(S); S \text{ esferas contenidas en } K\}$. Por la regularidad de \mathcal{T}_h , $\frac{r_K}{h_K} \geq \chi > 0$, donde χ es independiente de h . En particular, si \bar{K} es el primer prisma bajo T :

$$\frac{h_T^2 + (\frac{M_{D_T}}{l})^2}{h_K^2} \leq \frac{h_T^2 + (\frac{M_{D_T}}{l})^2}{h_{\bar{K}}^2} \leq 1. \quad (1.18)$$

Véase la Figura .1 para un esquema 2D de las cantidades que intervienen en (1.18). Aunque la misma acotación es válida en el caso tridimensional, omitimos la prueba por simplicidad (aparecen varios subcasos dependiendo de la posición relativa de las mayores aristas horizontal y vertical).

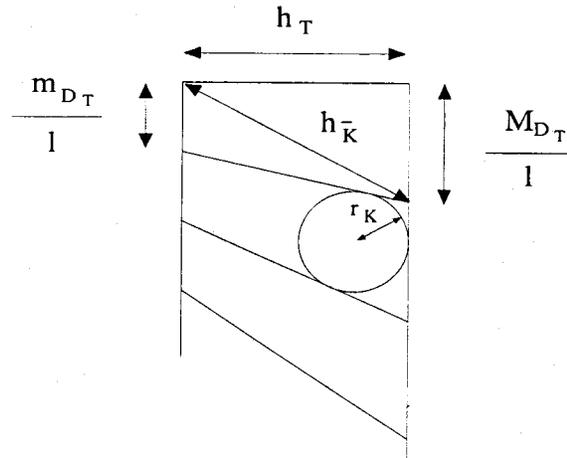


Figura .1: Descripción geométrica de una columna de prismas (esquema bidimensional).

Por tanto, se tiene que s_1^K y s_3^K son de orden h_K^2 . Respecto a β_K , si suponemos $\alpha_1 h_K^2 \leq \tau_K \leq \alpha_2 h_K^2$ con α_1, α_2 independientes de K , se sigue, de (1.11)

$$\alpha_2^{-1} \tau^* \leq \beta_K \leq \alpha_1^{-1} \tau^*.$$

Finalmente, (1.13)-(1.14) implican

$$C_1(T^*, \|\nabla_H D\|_{\infty, \omega}, \alpha_2, \tau^*, \chi) \|D\|_{\infty, \omega}^{-1} |\mathbf{w}|_{1, K}^2 \leq S_K(\mathbf{w}, \mathbf{w}),$$

$$S_K(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq C_2(T^*, \|\nabla_H D\|_{\infty, \omega}, \alpha_1, \tau^*) d_h^{-1} |\mathbf{w}|_{1, K} |\mathbf{v}|_{1, K}.$$

De nuevo por la definición (1.11)

$$\nu_s |\mathbf{w}|_{1, \Omega}^2 \leq S_h(\mathbf{w}, \mathbf{w}), \quad S_h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq \mathcal{M}_s |\mathbf{w}|_{1, \Omega} |\mathbf{v}|_{1, \Omega}$$

donde

$$\nu_s = C_1(T^*, \|\nabla_H D\|_{\infty, \omega}, \alpha_2, \tau^*, \chi) \|D\|_{\infty, \omega}^{-1} > 0, \quad \mathcal{M}_s = C_2(T^*, \|\nabla_H D\|_{\infty, \omega}, \alpha_1, \tau^*) d_h^{-1}.$$

Nota.-

Nótese que \mathcal{M}_s explota si $d_h \rightarrow 0^+$, es decir, si Ω no tiene talud. De todos modos, ello no afecta a nuestro análisis.

Representación del Término de Penalización del gradiente de presión.

El resultado de [27] citado anteriormente da la representación del término de estabilización del gradiente de presión, ya que C_h es una familia afín. ■

Demostración del Lema 2.4.-

i) Seguimos denotando $m_{D_T} = \min_T D_T$ y $M_{D_T} = \max_T D_T$. Los argumentos usados en el Teorema 2.2 muestran que

$$\begin{aligned} m_{D_T} \int_K (C_K \nabla \mathbf{w}|_K) : \nabla \mathbf{v}|_K D_T^{-1}(\mathbf{x}) &\leq h_K^{-2} \left(\max_{(\mathbf{x}, z) \in K} s_1^K(\mathbf{x}, z) \right) |\mathbf{w}|_{1,K} |\mathbf{v}|_{1,K} \\ &\leq C_2(T^*, \|\nabla_H D\|_{\infty, \omega}) |\mathbf{w}|_{1,K} |\mathbf{v}|_{1,K}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Sea $\mathbf{z}_h \in Z_h$. Entonces, puesto que Z^* no contiene las funciones constantes, la seminorma $|\cdot|_{1,K^*}$ es una norma en Z^* y existe una constante $C^* > 0$ tal que $\|\mathbf{z}_K^*\|_{0,K^*}^2 \leq C^* |\mathbf{z}_K^*|_{1,K^*}^2$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} M_{D_T}^{-1} \|\mathbf{z}^K\|_{0,K}^2 &\leq \int_K |\mathbf{z}^K|^2 D_T^{-1}(\mathbf{x}) = |\det A_T| l^{-1} \|\mathbf{z}_K^*\|_{0,K^*}^2 \\ &\leq C^* |\det A_T| l^{-1} |\mathbf{z}_K^*|_{1,K^*}^2 \\ &= C^* h_K^2 \int_K (C_K \nabla \mathbf{z}^K) : \nabla \mathbf{z}^K D_T^{-1}(\mathbf{x}) \quad \text{por (1.8)} \\ &\leq C^* C_2(T^*, \|\nabla_H D\|_{\infty, \omega}) h_K^2 m_{D_T}^{-1} |\mathbf{z}^K|_{1,K}^2 \quad \text{por (1.19)}. \end{aligned}$$

Usando la notación del Lema 2.4, $h_{\min}^K = m_{D_T}/l$, $h_{\max}^K = M_{D_T}/l$. Observemos que la condición $(h_{\min}^K/h_{\max}^K) \geq \mu$ equivale a $(m_{D_T}/M_{D_T}) \geq \mu$. Sumando en $K \in \mathcal{T}_h$ se tiene

$$\|\mathbf{z}_h\|_{0,\Omega_h}^2 \leq \mu^{-1} C^* C_2(T^*, \|\nabla_H D\|_{\infty, \omega}) h^2 |\mathbf{z}_h|_{1,\Omega_h}^2 = C h^2 |\mathbf{z}_h|_{1,\Omega_h}^2.$$

Esto prueba el caso $q = 2$. Consideremos ahora la desigualdad de interpolación (cf. Brézis [14]),

$$\|\mathbf{w}\|_{L^q(\Omega_h)} \leq C \|\mathbf{w}\|_0^\beta \|\mathbf{w}\|_{L^6(\Omega_h)}^{1-\beta} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{L}^6(\Omega_h),$$

para $2 < q \leq 6$, con β dada por (2.29). Por la inyección continua de $\mathbf{H}_0^1(\Omega_h)$ en $\mathbf{L}^6(\Omega_h)$, se verifica (2.29).

ii) Si $\{\widetilde{\mathbf{z}}_h\}_{h>0}$, con $\mathbf{z}_h \in Z_h$, $\forall h > 0$ está acotada en $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, contiene una subsucesión, que denotamos de la misma forma, débilmente convergente a un elemento $\bar{\mathbf{z}}$ en $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ y fuertemente en $\mathbf{L}^2(\Omega)$. De

$$\|\bar{\mathbf{z}}\|_{0,\Omega}^2 = \lim_{h \rightarrow 0} \|\widetilde{\mathbf{z}}_h\|_{0,\Omega}^2 = \lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{z}_h\|_{0,\Omega_h}^2 \leq C \lim_{h \rightarrow 0} h^2 |\mathbf{z}_h|_{1,\Omega_h}^2 = 0,$$

se sigue $\bar{\mathbf{z}} = 0$. Como el límite de cualquier subsucesión débilmente convergente es cero, es toda la sucesión $\{\widetilde{\mathbf{z}}_h\}_{h>0}$ la que converge débilmente a cero. ■

Bibliografía

- [1] R. ADAMS, *Sobolev Spaces*. Academic press, New York (1975).
- [2] C. AMROUCHE AND V. GIRAULT, *Decomposition of vector spaces and application to the Stokes problem in arbitrary dimension*. Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 44 No. 119 (1994), pp. 109-140.
- [3] Y. ACHDOU, P. LE TALLEC, F. VALENTIN AND O. PIRONNEAU, *Constructing wall laws with Domain Decomposition or asymptotic expansion techniques*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **151**, pp. 215-232 (1998).
- [4] D.N. ARNOLD, F. BREZZI, M. FORTIN, *A stable finite element for the Stokes equation*. Calcolo **21**, pp. 337-344 (1984).
- [5] P. AZÉRAD, *Analyse des Equations de Navier-Stokes en bassin peu profond et de l'Equation de Transport*. PhD Thesis. Université de Nêuchatel (1996).
- [6] P. AZÉRAD AND F. GUILLÉN, *Équations de Navier-Stokes en bassin peu profond: l'approximation hydrostatique*. Note C.R.A.S Paris, t. 329, Série I (1999), pp. 961-966.
- [7] P. BATES, J.M. HERVOUET, *The TELEMAC Modelling System*. Hydrological Processes, Volumen 14, número 13. Editorial Wiley (2000). (1993).
- [8] C. BAIOCCHI, F. BREZZI AND L. P. FRANCA, *Virtual Bubbles and Galerkin-least-squares type methods (Ga.L.S.)*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 105, pp. 125-141 (1993).
- [9] O. BESSON, *Finite Element solution of Navier-Stokes equations in shallow domains*. Ecomas 2000 Congress Proceedings (CD-Rom), Barcelona (2000).
- [10] O. BESSON, M.R. LAYDI, *Some estimates for the anisotropic Navier-Stokes Equations and for the hydrostatic approximation*. Math. Mod. and Num. Anal. Vol.26, 7, 855 - 865 (1992).
- [11] R. BERMEJO, *Velocity error estimates for a semi-lagrangian ocean general circulation model*. Actas de las II Jornadas de Análisis de Variables y Simulación Numérica del intercambio de masas de agua a través del Estrecho de Gibraltar, Cádiz (2000).
- [12] C. BERNARDI, *Optimal Finite Element interpolation on curved domains*. SIAM J. Numer. Anal. Vol.26, 5, 1212 - 1240 (1989).

-
- [13] F. BOSSEUR, B. DI MARTINO, P. ORENGA, *Resolution by a Galerkin method with a special basis of a geophysical flow in open sea: a Calvi's bay simulation*. Applied Mathematical Modelling **24**, pp. 73-94 (2000).
- [14] H. BRÉZIS, *Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris, (1983).
- [15] F. BREZZI, M.O. BRISTEAU, L.P. FRANCA, M. MALLET AND G. ROGÉ, *A relationship between stabilized finite element methods the Galerkin method with bubble functions*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **96**, pp. 117-129, (1992).
- [16] F. BREZZI, J. DOUGLAS, *Stabilized mixed methods for the Stokes problem*. Numer. Math. **53**, pp. 255-236 (1988).
- [17] F. BREZZI AND J. PITKÄRANTA, *On the stabilization of Finite Elements approximations of the Stokes problem*. Springer-Verlag, Berlin. In Efficient Solutions of Elliptic Systems, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 10 (W. Hackbush eds.), pp. 11-19, (1984).
- [18] F. BREZZI AND M. FORTIN, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, Berlin (1991).
- [19] A.N. BROOKS, T.J.R. HUGHES, *Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **32**, pp. 199-259, (1982).
- [20] K. BRYAN, *A numerical method for the study of the circulation of the World Ocean*. J. Comp. Physics, **4**, 347-376 (1969).
- [21] M.J. CASTRO, J. MACÍAS, *Modelo matemático de las corrientes forzadas por el viento en el Mar de Alborán*. Editado por el Grupo de Análisis Matemático Aplicado de la Universidad de Málaga (1994).
- [22] M.J. CASTRO, J. MACÍAS, C. PARÉS, *A multilayer shallow water model. Applications to the modelling of the Alboran Sea and the Strait of Gibraltar*. En *The Mathematics of Models for Climatology and Environment*, pp. 367-394, Heidelberg, Alemania. NATO ASI Series I: Global Environmental Change, No. 48, Springer-Verlag (1996).
- [23] V. CASULLI, E. CATTANI, *Stability, accuracy and efficiency of a semi-implicit method for three-dimensional shallow-water flow*. Computers Math. Applic., **27**, 99-112 (1994).
- [24] V. CASULLI, R.T. CHENG, *Semi-implicit finite difference methods for three-dimensional shallow-water flow*. Int. J. Numer. Methods Fluids, **15**, 629-648 (1992).
- [25] J. CASADO DÍAZ, F. MURAT, *Personal Communication*, (2001).
- [26] T. CHACÓN, *A term by term Stabilization Algorithm for Finite Element solution of incompressible flow problems*. Numer. Math. **79**, pp. 283-319 (1998).

-
- [27] T. CHACÓN REBOLLO, *An analysis technique for Stabilized Finite Element solution of Incompressible Flows*. *M²AN*, **35**, 1, pp. 57 - 89, (2001).
- [28] T. CHACÓN REBOLLO, A. DOMÍNGUEZ DELGADO, *A unified analysis of mixed and stabilized finite element solutions of Navier-Stokes equations*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **182**, pp. 301-331 (2000).
- [29] T. CHACÓN REBOLLO, E. CHACÓN VERA, R. LEWANDOWSKI, *Analysis of the Hydrostatic Approximation in Oceanography with compression term*. *M²AN*, **34**, 3, pp. 525 - 537, (2000).
- [30] T. CHACÓN REBOLLO, F. GUILLÉN GONZÁLEZ, *An intrinsic analysis of the hydrostatic approximation of Navier-Stokes equations*. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, **330**, pp. 841 - 846 (2000).
- [31] T. CHACÓN REBOLLO, D. RODRÍGUEZ GÓMEZ, *A numerical solver for the Primitive Equations of the Ocean using term-by-term stabilization*, Preprint, (2001).
- [32] T. CHACÓN REBOLLO, D. RODRÍGUEZ GÓMEZ, *A Stabilized Space-Time Discretization for the Primitive Equations in Oceanography*. Preprint, (2001)
- [33] P.G. CIARLET, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam (1987).
- [34] P. CLÉMENT, *Approximation by Finite Element Functions using Local Regularization*. R.A.I.R.O., R-2,(1975).
- [35] R. CODINA, *Comparison of some finite element methods for solving the convection-diffusion-reaction equations*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **156**, pp. 185-210 (1997).
- [36] M.D. COX, *A primitive equation 3-dimensional model of the ocean*. Technical Report, GFDL/NOAA 1, GFDL Ocean Group, Princeton, New Jersey (1984).
- [37] B. CUSHMAN-ROISIN, *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics*. Prentice-Hall, New Jersey (1994).
- [38] E. DELEERSNIJDER, *Modélisation Hydrodynamique Tridimensionnelle de la Circulation Générale Estivale de la Région du Détroit de Bering*, Tesis Doctoral, Faculté des Sciences Appliquées, Université Catholique de Louvain, 189 pp (1992).
- [39] E. DELEERSNIJDER, J.M. BECKERS, J.M. CAMPIN, M. EL MOHAJIR, T. FICHEFET, P. LUYTEN, *Some mathematical problems associated with the development and use of marine models*. En *The Mathematics of Models for Climatology and Environment*, pp. 39-86, Heidelberg, Alemania. NATO ASI Series I: Global Environmental Change, No. 48, Springer-Verlag (1996).

-
- [40] B. DI MARTINO, P. ORENGA, *Resolution to a three-dimensional physical oceanographic problem using the nonlinear Galerkin method*. Int. J. Numer. Meth. Fluids **30**, pp. 577-606 (1999).
- [41] J. DOUGLAS, J. WANG, *An absolutely stabilized finite element method for the Stokes problem*. Math. Comput. **52**, pp. 495-508 (1989).
- [42] F. ECHEVARRÍA ET AL. *Conexión entre Física y Biología en el Estrecho de Gibraltar*. Actas de las II Jornadas de Análisis de Variables y Simulación Numérica del intercambio de masas de agua a través del Estrecho de Gibraltar, Cádiz (2000).
- [43] M. ESPINO INFANTES, *Estabilización de la superficie libre en la solución de Ecuaciones de Shallow-Water por Elementos Finitos. Aplicaciones Oceanográficas*. Tesis Doctoral de la Universidad Politécnica de Cataluña (1994).
- [44] L.P. FRANCA, S.L. FREY, *Stabilized Finite Elements: II. The incompressible Navier-Stokes equations*. Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg., **99**, pp. 209-233 (1992).
- [45] L.P. FRANCA, T.J.R. HUGHES AND R. STENBERG, *Stabilized Finite Element Methods*. En *Incompressible Computational Fluid Dynamics* (M.D. Gunzburger and R.A. Nicolaides Editions), Cambridge Univ. Press (1993).
- [46] L.P. FRANCA, R. STENBERG, *Error analysis for some Galerkin-Least-Squares methods for the elasticity equations*. SIAM J. Numer. Anal., **28**, pp. 1680-1697 (1991).
- [47] A.-E. GILL, *Atmosphere-Ocean dynamics*. Academic Press (1982).
- [48] V. GIRAULT, P.A. RAVIART, *Finite Element Methods for Navier-Stokes equations*. Springer-Verlag, Berlín (1988).
- [49] *Report of the GLOBEC Focus 3 Working Group "Modelling and Predictive Capabilities"*. University of North Carolina, Chapell Hill, USA (2000). <http://www.pml.ac.uk/globec/Structure/ResearchFoci/F3WG/>
- [50] T.J.R. HUGHES, L.P. FRANCA, M. BALESTRA, *A new Finite Element formulation for CFD: V. Circumventing the Brezzi-Babuška condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations*. Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg., **59**, pp. 85-99 (1986).
- [51] T.J.R. HUGHES, L.P. FRANCA, *The Stokes problem with various well-posed boundary conditions: Symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces*. Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg., **65**, pp. 85-96 (1987).
- [52] D. KINDERLEHRER, G. STAMPACCHIA *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*. Academic Press (1980).
- [53] S. KESAVAN, *Topics in Functional Analysis and Applications*. John Wiley and Sons, Chichester (1989).

-
- [54] Z. KOWALIK, T.S. MURTY, *Numerical Modelling of Ocean Dynamics*. Advanced Series on Ocean Engineering 5, World Scientific (1993).
- [55] R. LEWANDOWSKI, *Analyse Mathématique et Océanographie*. Masson, 1997
- [56] J. L. LIONS, R. TEMAM, S. WANG, *New formulations of the primitive equations of the atmosphere and applications*. Nonlinearity, 5 (1992), pp. 237-288.
- [57] J.L. LIONS, R. TEMAM, S. WANG, *On the equations of the Large Scale Ocean*. Nonlinearity, 5, 1007-1053 (1992).
- [58] J.L. LIONS *Quelques méthodes de resolution de problèmes aux limites non linaires*. Gauthier Villard (1969).
- [59] J.L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non linéaires*. Dunod (1968).
- [60] M.A. RODRÍGUEZ BELLIDO, *Análisis Matemático de algunos sistemas de tipo Navier-Stokes: Fluidos quasi-newtonianos y Ecuaciones Primitivas del Océano*. Tesis Doctoral de la Universidad de Sevilla (2001).
- [61] STANISLAW R. MASSEL, *Fluid Mechanics for Marine Ecologists*. Springer (1999).
- [62] P. MONS, G. ROGÉ, *L'élément Q1-bulle/Q1*. M²AN, 26, 4, pp. 507 - 521, (1992).
- [63] S. NAKAJIMA, M. KAWAHARA, *Three dimensional analysis for incompressible viscous flow by hexahedral bubble element*. Eccomas 2000 Congress Proceedings (CD-Rom), Barcelona (2000).
- [64] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson, Paris (1967).
- [65] JACQUES C.J. NIHOUL, S. DJENIDI, *Introduction to system analysis and mathematical modelling applied to the marine system*. Notas del curso *Modelling of Marine ecosystems*, del 11 al 29 de Agosto de 1967, La Beaume-les-Aix (Francia).
- [66] *Report 7 of the Ocean Carbon-Cycle Model Intercomparison Project (OCMIP)*. <http://www.ipsl.jussieu.fr/OCMIP>
- [67] C. PARÉS ET AL. *Simulation of two-layer exchange flows through a contraction with a Finite Volume Shallow Water model*. Actas de las II Jornadas de Análisis de Variables y Simulación Numérica del intercambio de masas de agua a través del Estrecho de Gibraltar, Cádiz (2000).
- [68] J. PEDLOSKY, *Geophysical fluid dynamics*. Springer-Verlag, (1987).
- [69] N. A. PHILLIPS, *A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting*. J. Meteorol. 14, 184-185.
- [70] O. PIRONNEAU, *Méthodes des Éléments Finis pour les fluides*. Masson, Paris (1988).

-
- [71] A. QUARTERONI, A. VALLI, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer Ser. Comput. Math. **23**, Springer-Verlag (1994).
- [72] E. SÁNCHEZ-PALENCIA, *Non homogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Physics **127**, Springer-Verlag (1980).
- [73] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*. Hermann, Paris (1951).
- [74] A.J. SEMTNER JR., *An oceanic general circulation model with bottom topography*. Dept. Meteor., Univ. California, L.A., Tech. Rept. No. 9 (1974).
- [75] J. SIMON, *Compact sets in the space $L^p([0, \mathcal{T}], B)$* . Ann. Mat. Pura Appl., 146, IV, 65-96, (1987).
- [76] H. SMAOUI, *Modélisation numérique tridimensionnelle de l'hydrodynamique et des transports sédimentaires en Manche Orientale et dans le Sud de la Mer du Nord*. Tesis Doctoral de la Universidad de Ciencia y Tecnología de Lille, (1996).
- [77] L. TARTAR, *Convergence of the homogenization process*, Apéndice de [72].
- [78] R. TEMAM, *Sur la stabilité et la convergence de la méthode de pas fractionnaires*. Ann. Mat. Pura et Applicata, p. 191-379 (1968).
- [79] R. TEMAM, *Navier-Stokes Equations*. North-Holland, Amsterdam (1977).
- [80] C.B. VREUGDENHIL, *Numerical Methods for Shallow Water flow*, Kluwer Academic Publishers (1994).
- [81] M. ZIANE, *Regularity results for Stokes type systems*, Applicable Analysis, Vol. 58, pp. 263-292 (1995).
- [82] M. ZIANE, *Regularity results for the stationary Primitive Equations of the atmosphere and the ocean*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol.28, No. 2, pp. 289-313 (1997).
- [83] E. A. H. ZUUR, *The use of a reformulation of the hydrostatic approximation Navier - Stokes Equations for geophysical fluid problems*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 21, 549 -570 (1995).
- [84] L. TOBISKA, R. VERFÜRTH, *Analysis of a Streamline Diffusion finite element method for the Stokes and Navier-Stokes equations*. SIAM J. Numer. Anal., **33**, pp. 107-127 (1996).

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal Integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. David Rodríguez Gómez titulada Aproximación Numérica de las Ecuaciones Primitivas del océano mediante el método de los Elementos Finitos acordó otorgarle la calificación de sobresaliente cum laude por unanimidad

Sevilla, 22 de Septiembre de 2004

El Vocal,

Rodolfo B

El Presidente,

[Signature]

El Vocal,

[Signature]

El Secretario,

[Signature]

El Vocal,

[Signature]

El Doctorado,

[Signature]



UNIVERSIDAD DE SEVILLA



600028150