RELACIONES ENTRE OPERADORES ASOCIADOS A DISTINTAS MEDIDAS DE NO COMPACIDAD

Memoria que presenta
Ramón Jaime Rodríguez Álvarez
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas

Fdo. Ramón J. Rodríguez Álvarez

V⁰ B⁰ del Director

Dr. D. Tomás Domínguez Benavides
Catedrático del Departamento
de Análisis Matemático de la
Universidad de Sevilla

Sevilla, Junio de 1.993

Quiero expresar mi más profunda gratitud al director de este trabajo, el profesor Domínguez Benavides, por el ánimo que me dió para emprenderlo, sugiriéndome el tema y guiando en todo momento lo que ha sido mi iniciación a la investigación matemática. Sin su constante apoyo, esta memoria no hubiese visto la luz. Por la paciencia del maestro y la generosidad del amigo, sinceramente, gracias.

Agradezco la excelente acogida que me brindaron todos mis compañeros del Grupo de Investigación de Análisis Funcional no Lineal y el estímulo que han sido para mí al considerar este proyecto como algo de todos. He aprendido mucho de ellos. No quiero omitir el interés con que el profesor Ayerbe Toledano leyó la primera redacción y lo valioso de sus sugerencias.

Hago extensible mi agradecimiento a todos los miembros del Departamento de Análisis Matemático y a mis compañeros de Facultad en Huelva quienes, en una u otra forma, siempre me animaron.

No sé si podré compensar a mi familia del tiempo que les he regateado durante estos años. Su cariño y comprensión han sido mi mayor aliento.

A Elena
y a nuestros tres proyectos en común:
Elena, Jaime y Ana

A mis padres

Índice

Introducción

El objetivo fundamental de este trabajo es investigar las relaciones existentes entre operadores contractivos para distintas medidas de no compacidad en base a las propiedades geométricas del espacio subyacente. Para ello se estudian varias medidas de no compacidad y algunos coeficientes geométricos que pueden definirse en relación con ellas en espacios métricos o de Banach.

Habida cuenta de que en un espacio de dimensión infinita, "demasiados" conjuntos acotados no son relativamente compactos, tiene sentido tratar de medir el grado de no compacidad de los mismos; ello es posible con la ayuda de ciertas funciones a las que llamamos *medidas de no compacidad.*

El primero que consideró una medida del grado de no compacidad de un subconjunto A de un espacio métrico fué Kuratowski, quien en 1930 con los trabajos **[Ku1]** y **[Ku2]** investigó la medida que lleva su nombre,

$$\alpha(A) = \inf\{d > 0 : A \text{ puede ser recubierto por un número} \\ \text{finito de conjuntos de diámetro} < d\}$$

en conexión con problemas de Topología General, siendo probablemente éste el motivo por el que hasta mediados de los años cincuenta dicho estudio no ha sido abordado por los analistas cuando en trabajos de Darbo [**Dr**], Gol'denshtein, Gohberg, Markus [**Gh**], [**Gl**], y más tarde Petryshyn [**Pe**], Nussbaum [**Nu1**], [**Nu2**], [**Nu3**], Furi y Vignoli [**Fu**], Danes [**Dn**], Krasnoselski [**Kr2**] y otros, aquella y otras medidas de no compacidad han sido aplicadas a la teoría del punto fijo, teoría de operadores y de ecuaciones diferenciales e integrales.

Además de la medida α por diámetro de conjuntos, las más importantes son la medida por diámetro o radio de bolas

$$\beta(A) = \inf\{d > 0 : A \text{ puede ser recubierto por un número} \\ \text{finito de bolas de diámetro} < d\}$$

introducida por Gol'denshtein, Gohberg y Markus en **[Gh]**, también llamada de Haussdorff por su gran relación con la métrica que lleva su nombre (véase por ejemplo [**Ba2**]), y la medida separación introducida por Istratescu en [**Is**], Sadovski en [**Sa2**] y otros

$$S(A) = \sup\{r > 0 : A \text{ posee un subconjunto infinito } r\text{-separado}\}$$

donde un conjunto se dice r-separado si cada par de elementos distintos están a distancia mayor o igual que r.

Estas tres medidas de no compacidad tienen propiedades muy similares y no son independientes entre si, ya que para cualquier acotado A de un espacio métrico se dan las relaciones

$$S(A) \leq \alpha(A) \leq \beta(A) \leq 2S(A)$$

que son, por otra parte, las mejores posibles si se considera la clase de todos los espacios métricos en general. Uno de los objetivos actuales de las investigaciones es precisamente el de mejorarlas en determinados espacios explotando la estrecha relación existente entre estas medidas y las propiedades geométricas del espacio sobre el que están definidas. En espacios de Hilbert, por ejemplo, las relaciones anteriores pueden mejorarse, obteniéndose (ver [**Ak**], [**Zh3**])

$$S(A) \leq \alpha(A) \leq \beta(A) = \sqrt{2}S(A)$$

En relación con cualquier medida de no compacidad μ definida en los espacios métricos X e Y aparecen de forma natural (ver [**Dr**], [**Gh**], [**Sa1**]) los conceptos de aplicación $k-\mu$contractiva y $k-\mu$condensante, de forma que si $T : D \subset X \to Y$ es una aplicación continua y $k > 0$ es un número real dado,

- T se dice $k - \mu$ contractiva si para cualquier subconjunto acotado $A \subset D$ es $\mu[T(A)] \leq k\mu(A)$

- T se dice $k - \mu$ condensante si para cualquier subconjunto acotado $A \subset D$ con $\mu(A) > 0$ es $\mu[T(A)] < k\mu(A)$.

Un operador es condensante si la imagen de un conjunto es, en algún sentido, más compacta que el conjunto. Los operadores condensantes son ya típicos en varias aplicaciones del análisis funcional, y sus propiedades están muy relacionadas con las de los operadores compactos. En particular, con la ayuda de los operadores condensantes se puede extender la teoría de rotaciones de campos vectoriales, el principio del punto fijo de Schauder o la teoría de ecuaciones con operadores compactos de Fredholm-Riesz-Schauder; de hecho, si consideramos un problema para ecuaciones diferenciales o integrales, se puede reducir a una ecuación de operadores con un operador condensante que contiene mucha información sobre las propiedades de las soluciones (nos remitimos a las obras [**De**], [**Ak**], [**Ba2**] y [**Wl**]). El primer teorema de punto fijo conteniendo la noción de medida de no compacidad fué publicado por Darbo en [**Dr**].

Por último, si T es una aplicación continua y μ una medida de no compacidad, puede definirse la seminorma (ver [**Dr**], [**Nu1**])

$$\mu(T) = \inf\{k \geq 0 : T \text{ es } k - \mu \text{ contractiva}\}$$

En el caso más importante de las medidas α, β y S, las relaciones antes mencionadas entre ellas nos llevan a que para cualquier par de las mismas es

$$\frac{1}{2}\mu(T) \leq \lambda(T) \leq 2\mu(T)$$

Diversos autores han investigado en los últimos años la posibilidad de mejorar las relaciones anteriores, fundamentalmente para los operadores asociados a las medidas α y β, bien en el caso de ser T un operador lineal, o particularizando a determinadas clases de espacios, habiéndose obtenido importantes resultados. Así, podemos citar como más relevantes:

- Nussbaum en [**Nu1**] probó que si T es un operador lineal y T^* es el operador conjugado, entonces

$$\alpha(T^*) \leq \beta(T) \quad \text{y} \quad \alpha(T) \leq \beta(T^*)$$

- Sedaev en **[Se]** demostró que si T es lineal,

$$\beta(T^{**}) \leq \beta(T)$$

- Webb en los trabajos **[Wb1]**, **[Wb2]** probó que en espacios de Hilbert separables si T es lineal, es

$$\alpha(T) \leq \beta(T)$$

- La introducción por Dguez Benavides en 1986 (**[DB1]**) del concepto de conjunto minimal respecto de una medida de no compacidad ha desempeñado un importante papel en la investigación de las medidas y de sus operadores asociados, hasta el punto de que en el citado artículo ya se prueba que en espacios de Hilbert separables, aunque T no sea lineal, es

$$\beta(T) \leq \alpha(T)$$

y se aporta además un ejemplo que garantiza que el anterior resultado de Webb no es válido cuando se considera la no linealidad de T .

- Con posterioridad, en 1988, Dguez Benavides en **[DB2]** prueba que para $T : D \subset \ell^p \to \ell^p$ $(1 < p < +\infty)$, es

$$\beta(T) \leq \alpha(T)$$

y para $p = 1$ ó $p = +\infty$ es $\alpha(T) = \beta(T)$. La relación $\beta(T) \leq \alpha(T)$ se conserva en cualquier espacio métrico verificando la denominada β-propiedad (una estrecha relación entre la separación de los puntos de un conjunto y el menor radio para una bola que los contiene). En el mismo artículo se prueba que si T es lineal y $1 \leq p \leq +\infty$ entonces $\alpha(T) = \beta(T)$.

Basándose en el concepto de minimalidad, fueron considerados por Ayerbe y Dguez Benavides en **[Ay1]** y Webb y Zhao en **[Wb4]** unos coeficientes geométricos (que aquí denominamos de empaquetamiento del espacio) δ, δ' y γ que han permitido obtener resultados muy favorables en espacios como los L^p así como abrir la posibilidad de mejorar las relaciones para otras clases de espacios que hasta entonces no habían sido considerados.

- Para los espacios L^p se obtiene en **[Ay1]** que si $1 \leq p < +\infty$, entonces

$$2^{\min\{-\frac{1}{p}, \frac{1-p}{p}\}}\alpha(T) \leq \beta(T) \leq 2^{\frac{|2-p|}{p}}\alpha(T)$$

- Zhao en **[Zh1]** probó que para un operador T en cualquier espacio métrico es $S(T) \leq \alpha(T)$, mientras que en cualquier espacio de Hilbert de dimensión infinita es $\beta(T) \leq S(T) \leq \alpha(T)$ aunque no sea separable. En otro trabajo (**[Zh2]**) esta misma autora consigue un refinamiento para la primera desigualdad de los L^p con $1 < p < +\infty$ en el caso lineal, obteniendo que en este caso es

$$\alpha(T) \leq 2^{|\frac{p-2}{p}|}\beta(T)$$

Numerosas relaciones han sido obtenidas recientemente por algunos investigadores de las distintas medidas de no compacidad y sus operadores asociados con diversos coeficientes de naturaleza geométrica característicos de los espacios subyacentes, fundamentalmente con los llamados coeficientes de estructura normal. Para no excedernos con las definiciones de tales coeficientes, que por otra parte no serán considerados en esta memoria, nos remitimos, sin pretender ser exhaustivos, a **[Ay3]**, **[By]**, **[DB3]**, **[DB4]**, **[DB6]**, **[Ml]**, **[VD]** y **[Zh3]**.

En el capítulo I, que podría ser considerado como preliminar al resto del trabajo, se hace una concisa exposición de las nociones y propiedades de las medidas de no compacidad y los operadores condensantes y contractivos.

Aún cuando habitualmente han sido estudiadas en espacios de Banach (véase por ejemplo **[Ak]**, **[Ba2]** y **[DeB]**), nosotros proponemos una axiomática para que una función sea medida de no compacidad en un espacio métrico completo cualquiera, que si bien es verificada por las clásicas α, β y S, excluye a otras funciones que han sido tratadas como tales medidas en algunos trabajos (es el caso, por ejemplo, de la llamada medida β-interior tratada en[**Ak**] y [**Zh2**] o de la función diámetro de un conjunto en [**Ak**] y [**Ba2**]).

Las relaciones que se dan entre las medidas α, β y S nos sugieren la noción de comparabilidad entre medidas que será de utilidad para posteriores desarrollos.

Para finalizar, se dan algunas generalidades sobre los operadores condensantes y contractivos así como sobre el coeficiente de contractividad de un operador respecto de una medida de no compacidad.

En el capítulo II se generaliza el concepto de conjunto minimal (que fué introducido por Dguez Benavides en [**DB1**] para las medidas α y β) cuando se trata de cualquier medida de no compacidad definida en un espacio métrico completo, y se desarrollan algunas técnicas para el uso de tales conjuntos en espacios de sucesiones.

En la primera parte se prueba la existencia de conjuntos minimales respecto de cualquier medida de no compacidad definida en un espacio métrico completo, se caracterizan dos tipos especiales de medidas (minimalizantes y estrictamente minimalizantes) atendiendo a la forma en que pueden ser elegidos los minimales dentro de un conjunto y se constata que las medidas α, β y S aportan distintas situaciones en ese sentido: Así, como se deduce de un contraejemplo en [**DB1**], α no es minimalizante en general, S se prueba que es minimalizante en cualquier espacio pero no es, en general, estrictamente minimalizante, y β es estrictamente minimalizante si el espacio es separable como se prueba en [**DB1**] o reflexivo verificando la condición de Opial según [**Ay3**].

Finalmente, se prueban algunos criterios para el cálculo efectivo de las medidas α y β de conjuntos minimales.

En la segunda parte, generalizando el concepto en [**Ay1**], se introducen los coeficientes de empaquetamiento de un espacio métrico en el que hay definidas varias medidas de no compacidad y se prueba que, en general, éstos permiten mejorar las relaciones entre los correspondientes coeficientes de contractividad de un operador. A nuestro modo de ver, es en este momento cuando se pone de manifiesto la gran influencia del concepto de minimalidad en el estudio de las medidas de no compacidad y, por lo tanto, queda suficientemente justificado su tratamiento.

Con parte de los resultados de este capítulo hemos elaborado el trabajo **[Ro]**.

El resto de la memoria se dedicará fundamentalmente al cálculo de los coeficientes de empaquetamiento correspondientes a dos importantes clases de espacios de Banach de sucesiones.

El capítulo III está dedicado en su totalidad al estudio de las medidas de no compacidad en espacios de Orlicz de sucesiones, que resultan ser una generalización natural de los espacios ℓ^p, ya que son construidos al sustituir la función $t \to t^p$ que da sentido a éstos por una función M que sea del mismo modo continua, creciente, convexa y tal que $M(0) = 0$ y $\lim_{t \to +\infty} M(t) = +\infty$. Una función M con estas características recibe el nombre de función de Orlicz.

Así, dada una función de Orlicz M, el conjunto ℓ_M de todas las sucesiones de escalares $x = (x_n)$ tales que $\sum_{n=1}^{+\infty} M\left(\frac{|x_n|}{\rho}\right) < +\infty$ para algún $\rho > 0$, dotado con la norma

$$\|x\| = \inf\left\{\rho > 0 : \sum_{n=1}^{+\infty} M\left(\frac{|x_n|}{\rho}\right) \leq 1\right\}$$

es un espacio de Banach al que se denomina espacio de Orlicz de sucesiones.

Una condición necesaria y suficiente para que uno de estos espacios sea separable es que la función M verifique la llamada Δ_2 condición en cero, una de cuyas caracterizaciones es que

$$\lim\sup_{t\to 0}\frac{M(2t)}{M(t)} < +\infty$$

y ya que las técnicas que hemos desarrollado en el capítulo anterior para el cálculo con α-minimales y β-minimales se refieren a espacios separables, asumimos en todo el capítulo que M verifica esta propiedad.

La función $a(\cdot)$ que hemos llamado de expansión de M y tal que para cada $\delta \in (0,1]$ es

$$a(\delta) = \inf\left\{\frac{\psi(t)}{\psi(\delta t)} : t \in (0,1]\right\}$$

(donde ψ es la función recíproca de M), resulta tener "buenas" propiedades de cara a obtener información sobre la norma cuando se conoce la suma de la serie que la define.

A través de la función de expansión y los métodos introducidos para el cálculo con minimales, obtenemos las siguientes cotas para los coeficientes de empaquetamiento de un espacio de Orlicz separable

$$\delta(h_M) \leq \frac{2}{a_0}, \qquad \delta'(h_M) \geq \frac{2}{b} \quad \text{y} \quad \gamma(h_M) \leq \frac{b}{a_0}$$

donde $a_0 = a(1/2)$ y $b = \sup\left\{\frac{\psi(t)}{\psi(t/2)} : t \in (0,1]\right\}$.

Teniendo en cuenta que los espacios ℓ^p con $1 \leq p < +\infty$ son espacios de Orlicz y para ellos es $a_0 = b = 2^{\frac{1}{p}}$, podemos asegurar que las cotas obtenidas son las mejores posibles si se considera la clase de los espacios de Orlicz separables en general. Como consecuencia inmediata se obtienen las siguientes relaciones entre los distintos coeficientes de contractividad para operadores

$$\frac{a_0}{2}\alpha(T) \leq \beta(T) \leq \frac{b}{a_0}\alpha(T)$$

Aún cuando si U es la bola unidad de cualquier espacio de Banach de dimensión infinita se tiene que siempre es $\alpha(U) = \beta(U) = 2$, no es tan fácil evaluar el correspondiente valor para S, y sólo en algunos casos particulares se conoce $S(U)$, como en los espacios ℓ^p con $1 \leq p < +\infty$ donde es $S(U) = 2^{\frac{1}{p}}$ (ver **[Wl]**). Nosotros damos unas cotas para el valor de $S(U)$ en espacios de Orlicz separables

$$a_0 \leq S(U) \leq b$$

lo que nos permite aportar también un resultado sobre el número λ definido en **[Wl]**.

En otra sección, se dan algunas condiciones suficientes sobre la función M para que las cotas evaluadas anteriormente sean alcanzadas por los coeficientes del espacio y se analizan ejemplos de algunas familias de funciones de Orlicz con diferentes comportamientos.

Para terminar el capítulo, se estudian los operadores lineales en espacios de sucesiones de Orlicz separables con el resultado de que en general es

$$\beta(T) \leq \beta(T^*)$$

y si el espacio ℓ_M es reflexivo, entonces

$$\alpha(T) \leq \beta(T) \qquad \text{y} \qquad \alpha(T^*) \leq \beta(T^*)$$

Con los resultados más importantes de este capítulo hemos elaborado el artículo **[DB5]**.

En el capítulo IV se calculan los coeficientes de empaquetamiento en algunas clases de espacios que resultan como suma directa de un número finito o infinito de espacios de Banach separables.

En la primera parte se considera el caso del producto de k espacios de Banach separables cuando la norma se define a partir de una norma $|\ |$ en $\mathbb{R}^k$ con la única condición de que ésta sea monótona (por ejemplo, cualquier norma de tipo Orlicz), y se prueba que para A minimal con proyecciones A_i minimales sobre los espacios factores, es

$$\alpha(A) = |(\alpha(A_1), \cdots, \alpha(A_k))| \qquad \beta(A) = |(\beta(A_1), \cdots, \beta(A_k))|$$

y los coeficientes de empaquetamiento de $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_k$ son

$$\delta'(X) = \min_{1 \leq i \leq k} \{\delta'(X_i)\}\ ,\ \delta(X) = \max_{1 \leq i \leq k} \{\delta(X_i)\}$$

$$\gamma(X) = \frac{\max_{1 \leq i \leq k} \{\delta(X_i)\}}{\min_{1 \leq i \leq k} \{\delta'(X_i)\}}$$

por lo que podemos asegurar que en este caso el empaquetamiento del espacio no depende de la norma que en él se ha definido.

El caso en que la norma de $\mathbb{R}^k$ no sea monótona no puede ser abordado ya que no se puede asegurar que la función inducida en X verifique la desigualdad triangular y, por tanto, X no es necesariamente normado.

En la segunda parte del capítulo se estudia el producto de un número infinito de espacios de Banach separables cuando en él se ha definido una p-norma con $1 \leq p < +\infty$.

Definimos los conjuntos regulares como un tipo de minimales que verifican ciertas condiciones de homogeneidad, se prueba la existencia de tales conjuntos y se demuestra que los vectores cuyas componentes son buenos centros para las bolas en los espacios factores, son buenos centros para las bolas en el espacio producto.

Finalmente se calculan los coeficientes de empaquetamiento para $\bigoplus_p X_k$ resultando ser

$$\gamma(\bigoplus_p X_k) = \frac{\delta(\bigoplus_p X_k)}{\delta'(\bigoplus_p X_k)} = \frac{\sup_{k\in\mathbb{N}}\{2^{1-\frac{1}{p}}, \delta(X_k)\}}{\inf_{k\in\mathbb{N}}\{2^{1-\frac{1}{p}}, \delta'(X_k)\}}$$

que, como puede observarse, en este caso depende de los valores de los coeficientes en el espacio cuya norma sirvió para definir el espacio producto.

Desconocemos por el momento si los resultados obtenidos son extensibles al caso de sustituir el espacio ℓ^p $(1 \leq p < +\infty)$ por un espacio de Banach de dimensión infinita Y con una norma monótona cualquiera $|\ |$, por ejemplo un espacio de Orlicz, (tengamos en cuenta que ni aún para el caso considerado tenemos resultados cuando $p = +\infty$ ya que entonces el espacio producto no es separable).

De este modo nos preguntamos si en tal situación será o no cierto que

$$\gamma(\bigoplus_Y X_k) = \frac{\delta(\bigoplus_Y X_k)}{\delta'(\bigoplus_Y X_k)} = \frac{\sup_{k\in\mathbb{N}}\{\delta(Y), \delta(X_k)\}}{\inf_{k\in\mathbb{N}}\{\delta'(Y), \delta'(X_k)\}}$$

El hecho de que este tipo de problemas ha dado resultados favorables en **[DB4]** cuando se consideran algunos coeficientes de estructura normal nos anima a pensar que la respuesta será afirmativa.

Para terminar, creemos que con el tipo de técnicas desarrolladas aquí, podrían ser evaluados los coeficientes de empaquetamiento en otras clases de espacios como son los espacios de interpolación de Lorentz o los espacios modulares.

1. Medidas de no compacidad. Operadores condensantes

1.1. Medidas de no compacidad

Distintas axiomáticas han sido propuestas por algunos autores para el concepto de medida de no compacidad en general, todas ellas basadas fundamentalmente en el papel desempeñado por algunas propiedades comunes a las ya clásicas medidas de Kuratowski y Haussdorff (por ejemplo en **[Ak]**, **[Ba2]** y **[DeB]**). Si bien habitualmente estas axiomáticas se han situado en el marco de los espacios de Banach, nosotros aquí hemos querido darle un sentido más general introduciendo el concepto de medida de no compacidad y algunas otras nociones relacionadas en un espacio métrico completo. Muy recientemente se ha propuesto una axiomática similar en **[Zh3]**.

Definición 1.1.1. *Sea X un espacio métrico completo y $\mathcal{B}$ la familia de los subconjuntos acotados de X.*

Llamaremos medida de no compacidad (abreviadamente MNC) definida en X a toda aplicación

$$\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty)$$

que verifique las condiciones siguientes:

i) $\mu(B) = 0 \Leftrightarrow B \in \mathcal{B}$ *es precompacto* (completitud)

ii) $\mu(B) = \mu(\bar{B}) \quad \forall B \in \mathcal{B}$ (invariancia por cierre)

iii) $\mu(B_1 \cup B_2) = \max\{\mu(B_1), \mu(B_2)\} \quad \forall B_1 \in \mathcal{B},\ \forall B_2 \in \mathcal{B}$ (semiaditividad).

Consecuencias 1.1.2. De la axiomática anterior se deducen directamente algunas propiedades:

a) $B_1 \subset B \Rightarrow \mu(B_1) \leq \mu(B)$ (monotonía)

En efecto, basta observar que $B = B_1 \cup (B - B_1)$ y aplicar el axioma iii).

b) $\mu(B_1 \cap B_2) \leq \min\{\mu(B_1), \mu(B_2)\} \quad \forall B_1 \in \mathcal{B}, \forall B_2 \in \mathcal{B}$

Es suficiente notar que para $i = 1, 2$ es $B_1 \cap B_2 \subset B_i$ y aplicar el resultado anterior.

c) *Si B es finito, entonces $\mu(B) = 0$* (no singularidad)

Como todo conjunto finito es compacto, basta aplicar i).

d) *Si $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos no vacíos, cerrados y acotados de X tal que $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$, entonces la intersección de todos ellos, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, es no vacía y compacta.*

La demostración se puede hacer de forma totalmente análoga a la que aparece en **[Ba2]** para la medida α.

Propiedades particulares 1.1.3. Si el espacio X resulta ser un espacio de Banach, la medida de no compacidad μ puede tener otras propiedades, algunas de las cuales pasamos a enunciar:

- Es lipschitziana si cualesquiera que sean $B_1 \in \mathcal{B}$ y $B_2 \in \mathcal{B}$ es

$$|\mu(B_1) - \mu(B_2)| \leq k_\mu \rho(B_1, B_2)$$

donde ρ es la pseudométrica de Hausdorff definida por:

$$\rho(B_1, B_2) = \inf\{\epsilon > 0 : B_2 \subset B_1 + \epsilon\bar{U}, B_1 \subset B_2 + \epsilon\bar{U}\}$$

siendo U la bola unidad en X, y k_μ es una constante propia de la medida μ.

Si una medida μ es lipschitziana, desde luego es continua considerando la métrica ρ.

- $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall B \in \mathcal{B}$ *es* $\mu(tB) = |t|\mu(B)$ (semihomogeneidad)
- $\forall B_1, B_2 \in \mathbf{B}$ *es* $\mu(B_1 + B_2) \leq \mu(B_1) + \mu(B_2)$ (subaditividad algebraica)
- $\forall B \in \mathcal{B}$ *es* $\mu(coB) = \mu(B)$ (invariancia al tomar envolvente convexa)

- $\forall x_0 \in X$ *es* $\mu(x_0 + B) = \mu(B)$ (invariancia por traslaciones)

Ejemplo 1.1.4. En un espacio métrico cualquiera X, la función

$$\mu(B) = \begin{cases} 0 & \text{si } B \text{ es precompacto} \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es una medida de no compacidad a la que llamaremos discreta.
Esta medida μ resulta ser subaditiva, invariante al tomar envolvente convexa e invariante por traslaciones; no es semihomogénea ni continua.

1.2. Las medidas de no compacidad α y β.

Sea $\mathcal{B}$ la familia de los acotados de un espacio métrico completo X. Si $B \in \mathcal{B}$ no es precompacto, existe un $\epsilon > 0$ tal que B no puede ser recubierto por un número finito de conjuntos de diámetro menor que ϵ y, es entonces también imposible recubrirlo por un número finito de bolas de diámetro menor que ϵ; por todo ello las siguientes definiciones tienen sentido:

Definición 1.2.1. *Sea X un espacio métrico y $\mathcal{B}$ la familia de los acotados de X. Para cada $B \subset \mathcal{B}$ se definen las medidas α (de Kuratowski) y β (de Hausdorff) de la siguiente forma:*

$$\alpha(B) = \inf\{d > 0 : B \textit{ puede ser recubierto por un número finito de conjuntos de diámetro} < d\}$$

$$\beta(B) = \inf\{2r > 0 : B \textit{ puede ser recubierto por un número finito de bolas de radio} < r\}$$

Notas 1.2.2. a) Como es usual, por diámetro de un conjunto A se entiende $\sup\{d(x, y) : x \in A, y \in A\}$ con diám $(\emptyset) = 0$.

b) Si recordamos que un espacio de Banach X , un conjunto $S \subset X$ se dice que es una ϵ-red para el conjunto B siempre que $B \subset S + \epsilon\overline{U} = \{s + \epsilon b : s \in S, b \in \overline{U}\}$, la definición dada para la β-medida es equivalente a esta otra:

$$\beta(B) = \inf\{2\epsilon > 0 \text{ tal que } B \text{ admite una } \epsilon\text{-red finita }\}$$

c) En ambas definiciones para las medidas α y β, es obvio que podemos sustituir la desigualdad $<$ por $\leq$.

d) Es evidente que en un espacio de Banach un conjunto B es precompacto si y sólo si para todo $\delta > 0$, B admite una δ-red finita.

Propiedades 1.2.3. Las propiedades que damos a continuación son comunes a las medidas α y β (por lo que a la MNC le llamaremos ϕ) y se deducen directamente de las definiciones:

1) Son medidas de no compacidad en el sentido de la definición dada anteriormente ya que verifican las propiedades de:
   a) Completitud: $\phi(B) = 0$ si y sólo si B es precompacto.
   b) Invariancia por cierre: $\phi(\bar{B}) = \phi(B)$
   c) Semiaditividad: $\phi(B_1 \cup B_2) = \max\{\phi(B_1), \phi(B_2)\}$.

Si el espacio X resulta ser un espacio de Banach, verifican además las propiedades de:

2) *Ser lipschitzianas*: $|\phi(B_1) - \phi(B_2)| \leq k_\phi \cdot \rho(B_1, B_2)$, donde $k_\beta = 1$ y $k_\alpha = 2$ y ρ es la pseudométrica de Hausdorff definida anteriormente.

Y como consecuencia

2') *Continuidad,* ya que para todo $B \in \mathbf{B}$ y para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo B_1 verificando que $\rho(B, B_1) < \delta$ es $|\phi(B) - \phi(B_1)| < \epsilon$.

3) *Semihomogeneidad*: Para todo $t \in \mathbb{R}$ es $\phi(tB) = |t|\phi(B)$.
4) *Subaditividad algebraica:* $\phi(B_1 + B_2) \leq \phi(B_1) + \phi(B_2)$.
5) *Invariancia por traslaciones*: Para todo x_0 en X es $\phi(B + x_0) = \phi(B)$.

Por su gran importancia, las siguientes propiedades se dan por separado:

Teorema 1.2.4. *Las medidas de no compacidad α y β son invariantes al tomar envoltura convexa, es decir*

$$\alpha(B) = \alpha(\mathrm{co}B) \qquad \text{y} \qquad \beta(B) = \beta(\mathrm{co}B)$$

La demostración puede ser consultada en **[Ak]**, **[De]**.

Teorema 1.2.5. *Para todo B acotado en el espacio X se verifica que*

$$\alpha(B) \leq \beta(B) \leq 2\alpha(B)$$

desigualdades que no pueden ser mejoradas en la clase de todos los espacios métricos.

Demostración.

La primera desigualdad es evidente al ser un recubrimiento por bolas caso particular de recubrimiento por conjuntos arbitrarios.

La segunda desigualdad es consecuencia de que si tenemos un recubrimiento finito por conjuntos de diámetro menor que d, tomando un punto cualquiera de cada uno de ellos obtenemos un recubrimiento finito por bolas de radio menor que d. •

El Ejemplo 2.3.4.(4) del siguiente capítulo muestra que se pueden dar las igualdades, por lo que las anteriores acotaciones no pueden ser mejoradas en general, si bien en algunos espacios han sido obtenidas relaciones más estrictas, debidas fundamentalmente a la fuerte relación de estas medidas con la estructura geométrica subyacente. Es el caso de los espacios de Hilbert **[Dn3]** donde es $\beta(B) = \sqrt{2}\alpha(B)$ o los de Banach uniformemente convexos **[Wb4]**.

Abordaremos ahora el cálculo de las medidas α y β para la bola unidad U en un espacio de Banach.

Evidentemente si el espacio es de dimensión finita, dicha bola es precompacta, por lo que será $\alpha(U) = \beta(U) = 0$

Lema 1.2.6. *Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita, y U es la bola unidad en X, entonces*

$$\alpha(U) = \beta(U) = 2$$

Demostración.

Es clásica y puede ser encontrada en **[De]**, **[Ba2]**,**[Ak]**; la reproducimos aquí ya que aporta un método habitual para el cálculo efectivo de las medidas α y β.

Es evidente que habrá de ser $\beta(U) \leq 2$. Supongamos que fuese $\beta(U) = 2r$ con $r < 1$ y tomemos entonces $\epsilon > 0$ tal que $r + \epsilon < 1$; para un número finito de x_k en X, estaría $U \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(x_k; r + \epsilon)$ y, por las propiedades de monotonía, semiaditividad, invariancia por traslaciones y semihomogeneidad de β, sería $\beta(U) \leq 2(r + \epsilon)\beta(U)$, o lo que es lo mismo, $r \leq (r + \epsilon)r$; pero esto sólo es posible si $r = 0$, lo que significa que U es precompacto, en contradicción con el hecho de ser X de dimensión infinita.

En cuanto a la medida α, utilizaremos el Teorema de los puntos antipodales de Borsuk (véase por ejemplo **[De]**):

"Si S es una esfera en un espacio normado n-dimensional y $\{A_k : k = 1, 2, \cdots, n\}$ es un recubrimiento de S por subconjuntos cerrados del espacio, al menos uno de los A_k contiene un par de puntos diametralmente opuestos, es decir $diam\, A_k \geq diam\, S$".

Así pues, ya que es $\alpha(U) \leq \beta(U) = 2$, supongamos que fuese $\alpha(U) < 2$, $U \subset \bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k$, donde $\text{diam}\Omega_k < 2$ para $k = 1, 2, \cdots, n$ con los Ω_k cerrados. Tomando la intersección de U con un subespacio n-dimensional X_n arbitrario de X y definiendo $A_k = \Omega_k \cap X_n$, llegaríamos a una contradicción con el Teorema antipodal. •

Veremos ahora una interesante fórmula que se prueba en **[Ak]** y **[Ba2]** para calcular la β-medida en algunos espacios de sucesiones

Lema 1.2.7. *Si X es c_0 o ℓ^p $(1 \leq p < +\infty)$, la medida β puede ser calculada con ayuda de la fórmula*

$$\beta(\Omega) = 2 \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \Omega} \|(I - P_n)x\|$$

donde P_n es el proyector en el subespacio engendrado por los n primeros vectores de la base canónica.

Demostración.

En efecto, si es $\beta(\Omega) = 2r$ y para cualquier $\epsilon > 0$ es Q una $(r+\epsilon)$-red para Ω, se tiene que $\Omega \subset Q + (r+\epsilon)\bar{U}$, por lo que podemos expresar cualquier $x \in \Omega$ como

$$x = q + (r+\epsilon)u \qquad \text{con} \qquad q \in Q \;\text{ y }\; u \in \bar{U}$$

En consecuencia, si $n \in \mathbb{N}$ es

$$\sup_{x\in\Omega}\|(I-P_n)x\| \leq \sup_{q\in Q}\|(I-P_n)q\| + (r+\epsilon)$$

Pero, ya que Q es finito, el primer sumando del segundo miembro tiende a cero cuando $n \to \infty$, y

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega}\|(I-P_n)x\| \leq r+\epsilon$$

lo que por la arbitrariedad de ϵ nos da una de las desigualdades.

Para probar la otra desigualdad, notemos que para $n \in \mathbb{N}$

$$\Omega \subset P_n\Omega + (I-P_n)\Omega$$

y de aquí, usando las propiedades de β y la precompacidad de $P_n\Omega$, obtenemos que

$$\beta(\Omega) \leq \beta(P_n\Omega) + \beta[(I-P_n)\Omega] = \beta[(I-P_n)\Omega] \leq 2\sup_{x\in\Omega}\|(I-P_n)x\|$$

y, ya que n es arbitrario, $\beta(\Omega) \leq 2\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\Omega}\|(I-P_n)x\|$ como se quería probar. •

1.3. La medida de no compacidad S

Sea X un espacio métrico completo. El conjunto $\Omega \subset X$ se dice que es r-separado si para cada dos elementos distintos x e y de Ω, es $\mathrm{d}(x,y) \geq r$. A un conjunto Ω en tales condiciones se le llama una r-separación de X.

El concepto de r-separación dá lugar a la definición de una nueva MNC que es importante en las aplicaciones y que fué estudiada por primera vez por Istratescu (ver **[Is]**) y Sadovski (ver **[Sa2]**) .

Definición 1.3.1. *Sea X un espacio métrico completo y $\mathcal{B}$ la familia de los acotados de X. Para cada $B \in \mathcal{B}$ se define*

$$S(B) = \sup\{r > 0 : B \text{ tiene una } r\text{-separación infinita}\}$$

o lo que es equivalente

$$S(B) = \inf\{r > 0 : B \text{ no tiene una } r\text{-separación infinita}\}.$$

Es fácil probar, a partir de la definición, que S es una MNC en cualquier espacio métrico X.

Además, si X es un espacio de Banach, resulta ser semihomogénea, lipchitziana con constante $k_S = 2$, algebraicamente subaditiva e invariante al tomar envolvente convexa.

Esta última propiedad ha sido recientemente probada independientemente por J. Arias en **[Ar]** y Erzakova (ver **[Ak]**).

Es de resaltar el hecho de que, a diferencia de lo que sucede con las medidas α y β como se reflejó en el Lema 1.2.6., el valor de la medida S para la bola unidad U de un espacio infinito dimensional no es fijo y, en general, es difícil de evaluar. Por ejemplo, actualmente se sabe que para los espacios ℓ^p es $S(U) = 2^{\frac{1}{p}}$ (ver **[Wl]**). En el tercer capítulo del presente trabajo daremos un resultado (que engloba como caso particular al anterior) cuando se trata de un espacio de Orlicz de sucesiones.

Veremos a continuación que la medida S está relacionada con las anteriores

Teorema 1.3.2. *Si B es un conjunto acotado en cualquier espacio métrico completo X, se verifica que*

$$S(B) \leq \alpha(B) \leq \beta(B) \leq 2S(B)$$

siendo estas acotaciones las mejores posibles en el conjunto de todos los espacios métricos.

Demostración.

$S(B) \leq \alpha(B)$: Dado $\epsilon > 0$ arbitrario, para infinitos elementos de B ha de ser $d(x,y) \geq S(B) - \epsilon$, si $x \neq y$, pero al mismo tiempo es necesariamente $d(x,y) \leq \alpha(B) + \epsilon$. De ambas desigualdades y la arbitrariedad de ϵ sigue el resultado.

$\beta(B) \leq 2S(B)$: Dado $\epsilon > 0$, excepto para un número finito de elementos, debe ser $d(x,y) < S(B) + \epsilon$ si $x \in B$, $y \in B$, $x \neq y$, luego fijado un x, será $B \subset B(x; S(B) + \epsilon)$, de donde $\beta(B) \leq 2[S(B) + \epsilon]$. Nuevamente por ser $\epsilon > 0$ arbitrario se obtiene la última desigualdad.

Estas relaciones no pueden ser mejoradas en general como puede verse en el ejemplo 2.3.4.(4). •

Muy recientemente se han obtenido otras relaciones utilizando coeficientes de estructura normal (ver **[Zh3]**) que permiten refinamientos en algunos espacios particulares.

1.4. Medidas de no compacidad comparables

Definición 1.4.1. *Dos medidas de no compacidad μ y λ definidas en un espacio métrico completo X diremos que son comparables (o también equivalentes) si el conjunto*

$$\left\{ \frac{\lambda(B)}{\mu(B)} \; : \; B \in \mathcal{B} \;\; \mu(B) > 0 \right\}$$

es acotado.

En tal caso, designaremos por a y b respectivamente al ínfimo y al supremo de dicho conjunto verificándose que para todo acotado B de X es

$$a \cdot \mu(B) \leq \lambda(B) \leq b \cdot \mu(B)$$

con $0 < a \leq b$.

Ejemplos 1.4.2. Con las relaciones dadas en los Teoremas 1.2.5 y 1.3.2, los pares de medidas (α, β), (S, α) y (S, β) son comparables con constantes $a = 1$ y $b = 2$ en todos los casos.

Sin embargo, la medida discreta no es comparable con ninguna de las tres medidas anteriores.

1.5. Operadores condensantes y contractivos

Definición 1.5.1. *Sean X e Y espacios métricos y $T : D \subset X \to Y$ una aplicación. Decimos que*

1) T es un operador acotado si transforma conjuntos acotados de D en conjuntos acotados de Y.

2) T es un operador finito-dimensional si $T(D)$ está contenido en un subespacio de dimensión finita de Y.

3) T es un operador compacto si es continuo y $T(D)$ es relativamente compacto.

4) T es un operador completamente continuo si es continuo y transforma acotados de D en relativamente compactos de Y.

Notas 1.5.2. a) Resaltemos que si X e Y son espacios de Banach y $T : D \subset X \to Y$ es lineal transformando acotados en relativamente compactos, T es automáticamente continuo y, por lo tanto, completamente continuo.

b) Por otra parte, si T es lineal y finito dimensional, es automáticamente compacto.

Definición 1.5.3. *Si X e Y son espacios métricos, μ y λ son MNCs definidas respectivamente en X e Y y $T : D \subset X \to Y$ una aplicación, entonces*

5) T es un operador (μ, λ)-contractivo con constante $k > 0$ si T es continuo y para todo acotado A de D es $\lambda[T(A)] \leq k \cdot \mu(A)$.

En el caso particular de ser $X = Y$ y $\mu = \lambda$ diremos simplemente que T es $k - \mu$ contractivo.

6) T es un operador (μ, λ)-condensante con constante $k > 0$ si T es continuo y *para todo acotado no precompacto A de D es $\lambda[T(A)] < k \cdot \mu(A)$.*

En el caso particular de ser $X = Y$ y $\mu = \lambda$ diremos que T es $k - \mu$ condensante.

Propiedades 1.5.4. Se pueden comprobar sin dificultad las siguientes:

1) Un operador $T : D \subset X \to Y$ completamente continuo es k- contractivo y k- condensante para todo $k > 0$ y cualesquiera MNCs definidas en X e Y.

2) Si T es $k - (\mu, \lambda)$ contractivo, es $k' - (\mu, \lambda)$ condensante para todo $k' > k$.

3) Si $T : D \subset X \to Y$ es $k_1 - (\mu, \lambda)$ contractivo (condensante) y $S : Y \to Z$ es $k_2 - (\lambda, \psi)$ contractivo (condensante),entonces $S \circ T : D \subset X \to Z$ es $k_1 k_2 - (\mu, \psi)$ contractivo (condensante).

4) Si X e Y son espacios de Banach, λ algebraicamente subaditiva y $T_1 : D \subset X \to Y$ es $k_1 - (\mu, \lambda)$ contractivo (condensante) y $T_2 : D \subset X \to Y$ es $k_2 - (\mu, \lambda)$ contractivo (condensante), entonces $T_1 + T_2$ es $k_1 + k_2 - (\mu, \lambda)$ contractivo (condensante).

5) Si X e Y son espacios de Banach y λ es semihomogénea y algebraicamente subaditiva, el conjunto de los operadores k- contractivos (condensantes) es convexo.

6) Si X e Y son espacios de Banach y λ es invariante al tomar envolvente convexa, el conjunto de los operadores k- contractivos (condensantes) es convexo.

Lema 1.5.5. *Si μ y λ son dos MNCs comparables definidas en el espacio métrico completo X siendo para cualquier acotado A de X, $a \cdot \mu(A) \leq \lambda(A) \leq b \cdot \mu(A)$, para una aplicación $T : D \subset X \to X$ se tienen las siguientes relaciones:*

Si T es $k - \mu$ contractiva, T es $\frac{b}{a}k - \lambda$ contractiva.
Si T es $k - \mu$ condensante, T es $\frac{b}{a}k - \lambda$ condensante.
Si T es $k - \lambda$ contractiva, T es $\frac{b}{a}k - \mu$ contractiva.
Si T es $k - \lambda$ condensante, T es $\frac{b}{a}k - \mu$ condensante.

Las demostraciones son inmediatas.

1.6. El coeficiente $\mu(T)$

Ya que si T es un operador $k-\lambda$-contractivo, también es $k'-\lambda$-contractivo para todo $k' \geq k$ y, teniendo en cuenta que para medidas comparables λ y μ, una $k-\lambda$-contracción es también $h-\mu$-contracción para algún valor de h, parece bastante conveniente considerar el siguiente coeficiente que fué introducido por Darbo **[Dr]** y Nussbaum **[Nu1]**:

<u>**Definición 1.6.1.**</u> *Si μ es una MNC definida en X, para cada operador continuo $T : D \subset X \to X$ definimos el coeficiente $\mu(T)$ como*

$$\mu(T) = \inf\{k > 0 : T \ \ es \ \ k - \mu \ \ \text{contractiva}\}$$

Enunciamos a continuación algunas consecuencias que se obtienen para este coeficiente de las propiedades de las contracciones:

a) $\mu(T) = 0$ si y sólo si T es completamente continua.

b) $\mu(T_1 + T_2) \leq \mu(T_1) + \mu(T_2)$.

c) $\mu(S \circ T) \leq \mu(S) \cdot \mu(T)$, y de aquí, es suficiente que alguna de las aplicaciones S ó T sea completamente continua para que $S \circ T$ también lo sea.

d) Para MNCs comparables con $a \cdot \mu(A) \leq \lambda(A) \leq b \cdot \mu(A)$, se tiene la relación
$$\frac{a}{b}\mu(T) \leq \lambda(T) \leq \frac{b}{a}\mu(T)$$

Como ejemplo, al ser las medidas α , β y S comparables dos a dos con $a = 1$ y $b = 2$, se tienen unas primeras relaciones entre los operadores asociados que, como veremos en el capítulo siguiente, con la aplicación de otros conceptos podrán ser mejoradas en ciertas clases de espacios.

Haremos, para terminar esta sección y el capítulo, un breve repaso de algunos resultados ya conocidos respecto de los coeficientes $\alpha(T)$, $\beta(T)$ y $S(T)$:

Teorema 1.6.2. [Nussbaum en **[Nu1]**] *Si T es lineal y T^* es su operador conjugado, entonces es*

$$\alpha(T^*) \leq \beta(T) \quad \text{y} \quad \alpha(T) \leq \beta(T^*)$$

Teorema 1.6.3. [Gol'denshstein y Markus en **[Gl]**] *Si T es lineal y T^* es su operador conjugado,*

$$\frac{\beta(T)}{2} \leq \beta(T^*) \leq 2\beta(T)$$

Teorema 1.6.4. [Webb en **[Wb1]**,**[Wb2]**] *En espacios de Hilbert, si T es lineal*

$$\alpha(T) \leq \beta(T) \qquad \text{y} \qquad \beta(T^*) \leq \beta(T)$$

Benavides demostró en **[DB1]** que el resultado anterior no es cierto, en general, si T no es lineal.

Teorema 1.6.5. [Benavides en **[DB1]**] *En espacios de Hilbert separables es*

$$\beta(T) \leq \alpha(T)$$

no siendo cierto en espacios de Banach en general, aún cuando T sea lineal (un contraejemplo puede ser consultado en **[De]**, *pg.77).*

Teorema 1.6.6. [Benavides en **[DB2]**] *Para los espacios ℓ^p con $1 < p < \infty$ es*

$$\alpha(T) \leq \beta(T)$$

verificándose la igualdad en los casos ℓ^1 y ℓ^∞. Además, en el caso de ser T lineal y $1 \leq p \leq +\infty$, es $\alpha(T) = \beta(T)$.

Teorema 1.6.7. [Sedaev en **[Se]**] *En espacios de Banach, si T es lineal,*

$$\beta(T^{**}) \leq \beta(T)$$

Teorema 1.6.8. [Zhao en **[Zh2]**] *En espacios de Hilbert, si T es lineal*

$$\beta(T) \leq \beta(T^*)$$

Digamos, para terminar, que las relaciones entre estos coeficientes y su conexión con la estructura normal o el carácter de reflexividad del espacio subyacente están siendo en la actualidad centro de interés de buen número de investigaciones, habiéndose aportado algunos importantes resultados en los trabajos **[Ay3]**, **[By]**, **[DB3]**, **[DB4]**, **[DB6]**, **[Ml]**, **[VD]** y **[Zh3]**.

2. Minimalidad. Coeficientes de empaquetamiento

La noción de conjunto minimal respecto de una medida de no compacidad definida en un espacio métrico X fué introducida por Dguez Benavides en **[DB1]**, y ha probado su utilidad para el establecimiento de relaciones entre los operadores asociados a las medidas α, β y S como puede verse en resultados de **[DB2]**, **[Wb4]**, **[Ay1]**, **[DB5]**, **[Ro]**, **[Zh1]** y **[Zh2]**.

En este capítulo se introducirá el concepto de conjunto μ-minimal, se probará la existencia de tales conjuntos en un espacio acotado y daremos una caracterización de las medidas de no compacidad en función de cómo pueden ser elegidos los conjuntos minimales en el espacio donde están definidas. Las medidas α, β y S aportarán distintos ejemplos.

Teniendo en cuenta que en los capítulos posteriores se estudiarán espacios separables de sucesiones, veremos que en tales espacios los conjuntos minimales pueden ser tomados bajo algunas condiciones particulares.

Se definirán los coeficientes de empaquetamiento para un espacio métrico y se darán ejemplos de algunas clases de espacios para los que dichos coeficientes ya han sido calculados.

Por último, la introducción de los coeficientes de empaquetamiento quedará justificada por el hecho de que permiten obtener relaciones más estrechas entre los operadores condensantes y contractivos para distintas medidas de no compacidad.

2.1. Conjuntos μ-minimales

Sea X un espacio métrico completo, $\mathcal{B}$ la familia de los acotados de X, y μ una medida de no compacidad definida en X.

Definición 2.1.1. *Un conjunto infinito $A \in \mathcal{B}$ es minimal para la medida de no compacidad μ –abreviadamente μ-minimal– si cualquier subconjunto infinito B de A verifica $\mu(B) = \mu(A)$.*

En particular, una sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ en X es μ-minimal si su rango es infinito, acotado y μ-minimal.

Ejemplos 2.1.2. a) Todo conjunto infinito y precompacto es, evidentemente, minimal para cualquier medida de no compacidad μ.

b) En particular, toda sucesión de Cauchy con rango infinito es minimal para cualquier medida de no compacidad μ.

c) Todo subconjunto infinito de un conjunto μ-minimal es, a su vez, μ-minimal.

Probaremos a continuación la existencia de conjuntos μ-minimales en conjuntos acotados, siguiendo el procedimiento empleado por Dguez Benavides en **[DB1]** para el caso de las medidas α y β.

Teorema 2.1.3. *Sea X un espacio métrico acotado y μ una medida de no compacidad definida en X.*

a) Existe un subconjunto B de X tal que B es μ-minimal.

b) Si X no es precompacto, B puede ser elegido de forma que $\mu(B) > 0$.

Demostración.

a) Sea $A_0 = X$ y designemos $\mu_{n+1} = \inf \{\mu(A) : A \subset A_n, A \text{ infinito}\}$. Ya que μ_{n+1} es un ínfimo, podemos tomar un subconjunto infinito A_{n+1} de A_n que verifique

$$\mu(A_{n+1}) < \mu_{n+1} + \frac{1}{n+1}$$

Como A_n es infinito para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos elegir $a_n \in A_n$ tal que $a_n \neq a_k$ para $k = 1, 2, ..., n-1$ y construir así el conjunto infinito $B = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$; de esta forma $B - A_n$ es finito para cada $n \in \mathbb{N}$.

Probaremos ahora que B es μ-minimal:

Sea $B' \subset B$, B' infinito. Sabiendo que $B' - A_{n-1}$ es finito para $n > 1$, tenemos que $\mu(B) \leq \mu[(B - A_n) \cup A_n] = \mu(A_n)$ y también, al ser $B' \cap A_{n-1}$ un subconjunto infinito de A_{n-1}, es $\mu_n \leq \mu(B' \cap A_{n-1})$. Por consiguiente

$$\mu(B) \leq \mu(A_n) < \mu_n + \frac{1}{n} \leq \mu(B' \cap A_{n-1}) + \frac{1}{n} \leq \mu(B') + \frac{1}{n}$$

es decir, $\mu(B) < \mu(B') + \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, lo que significa que $\mu(B) \leq \mu(B')$, y aplicando la monotonía de μ, necesariamente $\mu(B') = \mu(B)$ y B es μ-minimal.

b) Supongamos que fuese $\mu(B) = 0$ para todo subconjunto μ-minimal B de X.

Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de rango infinito en X; existe, según el apartado anterior, una subsucesión $\{y_k\}$ que es μ-minimal, pero para la que es entonces $\mu(\{y_k\}) = 0$, por lo que ha de ser de Cauchy. Pero ya que esto ocurre para toda sucesión en X, se tiene que X es precompacto. •

Atendiendo a la forma en que pueden ser elegidos los conjuntos minimales dentro de un espacio métrico, en la siguiente definición distinguiremos dos tipos especiales de medidas de no compacidad.

2.2. Medidas minimalizantes y estrictamente minimalizantes

Definición 2.2.1. *Sea μ una medida de no compacidad definida en un espacio métrico X. Diremos que*

1) *La medida de no compacidad μ es minimalizante si para cualquier $A \in \mathcal{B}$, dado $\epsilon > 0$ arbitrario, existe $B \subset A$, B μ-minimal tal que $\mu(B) \geq \mu(A) - \epsilon$.*
2) *La medida de no compacidad μ es estrictamente minimalizante si para todo $A \in \mathcal{B}$, existe $B \subset A$, B μ-minimal tal que $\mu(B) = \mu(A)$.*

Notas 2.2.2. a) Es evidente que si una medida es estrictamente minimalizante, es minimalizante.

b) La medida de no compacidad discreta es estrictamente minimalizante en cualquier espacio métrico:
En efecto, si tomamos A precompacto, A ya es minimal, y si tomamos A acotado no precompacto, aplicando el Teorema de existencia de minimales, existe un subconjunto B de A, B minimal con $\mu(B) > 0$, por lo que habrá de ser $\mu(B) = \mu(A) = 1$.

Veremos a continuación que las medidas α, β y S ofrecen un amplio abanico de ejemplos; al mismo tiempo expondremos algunos resultados que nos serán de gran utilidad en los capítulos posteriores.

Los siguientes Lemas, de los que se deduce el resultado que daremos sobre la medida α, son debidos a Dguez Benavides y están publicados en **[DB1]**

Lema 2.2.3.[Benavides] *Sea A un conjunto α-minimal en un espacio métrico X. Para cada $\epsilon > 0$, existe un subconjunto infinito B de A tal que*

$$\alpha(A) - \epsilon < d(x,y) < \alpha(A) + \epsilon$$

cualesquiera que sean $x \in B$, $y \in B$, $x \neq y$.

La demostración se basa en la utilización del Teorema de Ramsey.
Una demostración posterior de este resultado puede ser consultada en **[Zh3]**.

Lema 2.2.4. [Benavides] *Sea H un espacio de Hilbert infinito dimensional, $S = \{x \in H : \|x\| = 1\}$ y A un α-minimal de S. Se verifica que*

$$\alpha(A) \leq \sqrt{2} < 2 = \alpha(S)$$

Proposición 2.2.5. *La medida α de Kuratowski, en general, no es minimalizante.*

Demostración.

Basta considerar como contraejemplo el conjunto S del Lema anterior.

Como anteriormente se ha expuesto, el siguiente resultado será muy útil ya que facilitará enormemente los cálculos cuando se trabaje con la α-medida de conjuntos minimales.

Proposición 2.2.6.. *Si $A = \{x_n\}$ es una sucesión α-minimal en un espacio métrico X, existe una subsucesión $B = \{y_n\}$ de A tal que*

$$\lim_{n,m\,;n\neq m} d(y_n, y_m) = \alpha(A)$$

Demostración.

Aplicando el Lema 2.2.3 anterior, para cada $\epsilon > 0$ podemos construir una subsucesión $\{z_n(\epsilon)\}$ de $\{x_n\}$ tal que

$$\alpha(A) - \epsilon \leq d(z_n(\epsilon), z_m(\epsilon)) \leq \alpha(A) + \epsilon$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$.
Sea pues $\{z_{n,1} : n \in \mathbb{N}\}$ una subsucesión de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que

$$\alpha(A) - 1 \leq d(z_{n,1}, z_{m,1}) \leq \alpha(A) + 1$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$.
Podemos construir así, de forma inductiva, subsucesiones de manera que dada la sucesión $\{z_{n,k-1} : n \in \mathbb{N}\}$ consideramos una subsucesión suya $\{z_{n,k} : n \in \mathbb{N}\}$ tal que

$$\alpha(A) - \frac{1}{k} \leq d(z_{n,k}, z_{m,k}) \leq \alpha(A) + \frac{1}{k}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$.

Es claro que la sucesión diagonal $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $y_n = z_{n,n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ verifica la condición requerida. •

Como una consecuencia inmediata, es evidente que si los elementos de un conjunto infinito A son equidistantes, A es α-minimal y la distancia común entre sus elementos es el valor de $\alpha(A)$.

Veremos en las dos próximas proposiciones que la β-medida de Haussdorff resulta ser estrictamente minimalizante en una amplia clase de espacios métricos:

Proposición 2.2.7.[Benavides en **[DB1]**] *En cualquier espacio métrico separable X, la medida de no compacidad β es estrictamente minimalizante.*

Demostración.

No hemos querido omitirla porque es sencilla y bastante ilustrativa.

Sea B un conjunto infinito y acotado de X con $\beta(B) > 0$. Como X es separable, sea $\{p_k\}$ una sucesión densa en X y $\{B_m\}$ la sucesión de todas las bolas con centro en los p_k y radios racionales positivos menores que $\frac{1}{2}\beta(B)$.

Para todo natural n, hay infinitos elementos en B que no están en $M_n = \bigcup_{m=1}^{n} B_m$. Tomemos $x_n \in B - M_n$ y formemos el conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $n' > n$ tal que $x_k \in M_{n'}$ para $k = 1, 2, \cdots, n$: luego $x_{n'} \neq x_k$ para $k = 1, 2, \cdots, n$. En consecuencia A es un conjunto infinito. Sea $A' \subset A$ infinito. Para cada n natural, A' no está contenido en M_n ya que $A \cap M_n$ es finito. Por lo tanto, A' no puede ser recubierto por un número finito de bolas de radio menor que $\frac{1}{2}\beta(B)$ por lo que $\beta(A') \geq \beta(B) \geq \beta(A) \geq \beta(A')$. Así $\beta(B) = \beta(A)$ y A es β-minimal. •

Proposición 2.2.8. [Ayerbe y Benavides en **[Ay3]**] *En cualquier espacio de Banach reflexivo X verificando la condición de Opial, la medida de no compacidad β es estrictamente minimalizante.*

De una forma análoga al caso de la α medida, con los resultados que siguen veremos que en algunas clases de espacios los conjuntos β-minimales pueden ser elegidos verificando algunas condiciones de regularidad, sin que ello signifique ningún tipo de restricción.

Nos serán de utilidad dos Lemas previos que reproducimos sin demostración:

Lema 2.2.9.[Reich en **[Re]**]. *Si $\{x_n\}$ es una sucesión acotada en un espacio métrico separable X, existe una subsucesión $\{y_n\}$ de $\{x_n\}$ tal que $\lim_n d(y_n, z)$ existe para todo z en X.*

Lema 2.2.10.[Deimling en **[De]**]. *Si X es un espacio de Banach reflexivo , $\phi : X \to \mathbb{R}$ es una función convexa y semicontinua inferiormente con $\phi^{-1}((-\infty, r])$ no vacío y acotado para algún $r > 0$, entonces ϕ alcanza un mínimo.*

Proposición 2.2.11. *Si $A = \{x_n\}$ es una sucesión β-minimal en un espacio métrico X y para cada $z \in X$ es $\phi(z) = \liminf_n d(x_n, z)$, se verifica que*

$$\beta(A) = 2 \inf_{z \in X} \phi(z)$$

Si X es separable, existe una subsucesión $\{y_n\}$ de $\{x_n\}$ tal que $\lim_n d(y_n, z)$ existe para todo $z \in X$ y es

$$\beta(A) = 2 \inf_{z \in X} \lim_n d(y_n, z)$$

Si X es además un espacio de Banach reflexivo, el ínfimo anterior se alcanza, es decir existe $w \in X$ tal que

$$\beta(A) = 2 \lim_n \|y_n - w\|$$

Demostración.

Para simplificar, designemos $\beta(A) = 2r$ e $\inf_{z \in X} \phi(z) = t$.
Si fuese $r > t$, para algún $w \in X$ y s tal que $r > s > t$, se tendría que $s > \liminf_n d(x_n, w)$, de donde, para una subsucesión $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ de A sería $s > d(y_n, w)$ por lo que

$$\beta(\{y_n\}) \leq 2s < 2r = \beta(\{x_n\})$$

contradiciendo la minimalidad de A.

Supongamos ahora que fuese $r < t$ y tomemos $\delta = \dfrac{t - r}{2} > 0$.

Para algún $w \in X$ y una subsucesión $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ de A, estará $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ incluida en $B(w; r+\delta)$ o lo que es lo mismo,

$$d(y_n, w) < r + \delta = \frac{t+r}{2} < t$$

para infinitos n lo que significa que $\liminf_n d(x_n, w) < t$, pero esto está en contradicción con la definición de t.
Como consecuencia habrá de ser $\beta(A) = 2 \inf_{z \in X} \phi(z)$ siempre que A sea β-minimal como se quería probar.

Aplicando el Lema 2.2.9 anterior, sea $B = \{y_n\}$ una subsucesión de $A = \{x_n\}$ para la que existe $\lim_n d(y_n, z)$ para todo $z \in X$. Como A es β-minimal, es $\beta(A) = \beta(B)$ y se tiene entonces que

$$\beta(A) = \beta(B) = 2 \inf_{z \in X} \liminf_n d(y_n, z) = 2 \inf_{z \in X} \lim_n d(y_n, z)$$

Por último, si X es además un espacio de Banach reflexivo, sea $B = \{y_n\}$ una subsucesión de A para la que existe $\varphi(z) = \lim_n \|y_n - z\|$ para todo $z \in X$ y veremos que la función $\varphi(x) = \lim_n \|y_n - x\|$ verifica las condiciones del Lema 2.2.10 anterior.

a) La función φ es convexa ya que

$$\begin{aligned}
\varphi[\lambda x + (1-\lambda)y] &= \lim_n \|y_n - [\lambda x + (1-\lambda)y]\| \\
&= \lim_n \|\lambda(y_n - x) + (1-\lambda)(y_n - y)\| \\
&\leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)
\end{aligned}$$

para $x \in X$, $y \in X$ y $0 \leq \lambda \leq 1$

b) Para ver que φ es continua, basta observar que

$$|\, \|y_n - x\| - \|y_n - y\| \,| \leq \|x - y\|$$

lo que nos garantiza que $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \|x - y\|$.

c) Como $\{y_n\}$ está acotada, podemos tomar R suficientemente grande como para que sea $a = \inf_{z \in X} \varphi(z) = \inf_{z \in \overline{B}(0,R)} \varphi(z)$, por ejemplo tal que si $z \notin \overline{B}(0, R)$ sea $\|y_n - z\| > 2\, a$.

Se tiene pues, aplicando el Lema 2.2.10, que existe un $w \in X$ tal que

$$\beta(A) = \beta(\{y_n\}) = 2 \lim_n \|y_n - w\|$$

con lo que concluye la demostración. •

Nota 2.2.12. Evidentemente, si el espacio X es separable, aunque no sea reflexivo, para cualquier β-minimal $A = \{x_n\}$, existe una subsucesión $\{y_n\}$ de A de forma que dado cualquier $\epsilon > 0$ existe $z_\epsilon \in X$ tal que

$$\frac{\beta(A)}{2} - \epsilon \leq \|y_n - z_\epsilon\| \leq \frac{\beta(A)}{2} + \epsilon$$

Veremos a continuación que, utilizando el concepto de conjunto minimal, se puede obtener una definición equivalente para la medida de no compacidad S. Este resultado se encuentra enunciado en **[DB1]** y demostrado en **[Zh1]**. También Papini en el trabajo **[Pa2]** prueba este resultado para la separación de la bola unidad.

Lema 2.2.13. *Para cualquier conjunto acotado A de un espacio métrico X es:*

$$S(A) = \sup\{\alpha(B) : B \subset A \ , \ B \ \alpha - \text{minimal}\}$$

Demostración.

Supongamos que A es un acotado de X. Se tiene entonces:
a) Si A' es un subconjunto α-minimal de A (cuya existencia está garantizada por el Teorema 2.1.3), aplicando el Lema 2.1.6, dado cualquier $\epsilon > 0$ existe $B \subset A'$ de forma que para $x \in B$, $y \in B$, $x \neq y$ es $d(x, y) > \alpha(A') - \epsilon$. Pero esto significa, según la definición de S, que $S(A) > \alpha(A') - \epsilon$ y, al ser $\epsilon > 0$ arbitrario, que $S(A) \geq \alpha(A')$ por lo que $S(A) \geq \sup \{\alpha(A') : A' \ \alpha$ - minimal de $A\}$.

b) Dado $\epsilon > 0$, existe un subconjunto $B' \subset A$ tal que para $x \in B'$, $y \in B'$, $x \neq y$ es $d(x, y) > \alpha(A) - \epsilon$. Si $B \subset B'$ es α-minimal, será $\alpha(B) \geq S(A) - \epsilon$ por lo que $\sup\{\alpha(B) : B$ α-minimal de A, $\alpha(B) > 0\} \geq S(A) - \epsilon$ y, al ser ϵ arbitrario, $\sup\{\alpha(B) : B$ α-minimal de A, $\alpha(B) > 0\} \geq S(A)$. •

Lema 2.2.14. *Si un conjunto A es α-minimal entonces también es S-minimal y $\alpha(A) = S(A)$.*

Demostración.

Si A es α-minimal, es $S(A) = \alpha(A)$. Si para algún $B \subset A$, B infinito, fuese $S(B) < S(A)$, existiría según el Lema anterior $B_1 \subset B$, B_1 α-minimal, tal que $\alpha(B_1) < S(A) = \alpha(A)$, lo que contradice la minimalidad de A respecto de α. •

Como último ejemplo, vamos a probar que la medida S, en general es minimalizante pero no estrictamente minimalizante.

Proposición 2.2.15. *En un espacio métrico completo X, la medida de no compacidad S es minimalizante pero, en general, no es estrictamente minimalizante.*

Demostración.

Si tomamos A α-minimal es $S(A) = \alpha(A)$ y, para todo $B \subset A$, B infinito, B es α-minimal y $\alpha(B) = \alpha(A)$, luego es $S(B) = S(A)$.
Si A no es α-minimal, por ser $S(A)$, según el Lema 2.2.13, un supremo en $\mathbb{R}$, cualquiera que sea $\epsilon > 0$, existe $B \subset A$, B α-minimal verificando $\alpha(B) \geq S(A) - \epsilon$, y como al ser B α-minimal se tiene que $S(B) = \alpha(B)$, el resultado está probado.

Para ver que la medida S no es estrictamente minimalizante en general, consideremos el contraejemplo siguiente:

Sea $X \subset \ell^2 \times \ell^2 \times \cdots \times \ell^2 \times \cdots$ el subespacio formado por los $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $x_n \in \ell^2$ tales que $\sup_n \|x_n\|_2 < +\infty$ y dotemos a X de la norma siguiente:

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)\| = \sup_n\{\|x_n\|_2\}$$

Para el subconjunto acotado de X definido por

$$A = \left\{ u_{nm} = \left(0, 0, ..., \frac{m-1}{m}^{(m} e_n, 0, 0, ... \right) : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \right\}$$

se tiene que para $n \neq k$ es

$$\begin{aligned} \|u_{nm} - u_{km}\| = & \\ &= \|(0, 0, ..., \frac{m-1}{m}^{(m} (e_n - e_k), 0, 0, ...)\| \\ &= \frac{m-1}{m} \|e_n - e_k\|_2 \\ &= \frac{m-1}{m} \sqrt{2} \end{aligned}$$

mientras que si $m < j$ entonces es

$$\begin{aligned} \|u_{nm} - u_{kj}\| = & \\ &= \|(0, 0, ..., \frac{m-1}{m}^{(m} e_n, 0, ..., -\frac{j-1}{j}^{(j} e_k, 0, ...)\| \\ &= \sup \left\{ \frac{m-1}{m}, \frac{j-1}{j} \right\} \\ &= \frac{j-1}{j} < 1 \end{aligned}$$

Los anteriores cálculos garantizan que $\operatorname{diam}(A) \leq \sqrt{2}$ y ya que siempre es $S(A) \leq \operatorname{diam}(A)$ entonces $S(A) \leq \sqrt{2}$, pero en realidad es $S(A) = \sqrt{2}$ ya que los subconjuntos A_m de A definidos por $A_m = \{u_{nm} : n \in \mathbb{N}\}$ son α-minimales al ser sus elementos equidistantes, y para ellos es $\alpha(A_m) = \frac{m-1}{m}\sqrt{2}$ con lo que $S(A) \geq \sup\{\alpha(A_m) : m \in \mathbb{N}\} = \sqrt{2}$

Sin embargo, veremos a continuación que no existe un S-minimal $B \subset A$ tal que $S(B) = S(A)$:

a) Si $B \subset A$ es S-minimal y contiene puntos $x_m \in A_m$ para infinitos valores de m, entonces para $m \neq m'$ es $\|x_m - x_{m'}\| < 1$ por lo que habrá de ser $S(B) < 1 < \sqrt{2} = S(A)$.

b) Si $B \subset A$ es S-minimal con $B \cap A_m = \emptyset$ excepto para un número finito de m, designando por m_0 al máximo de esos m se tiene que

$$S(B) \leq S(A_{m_0}) = \frac{m_0 - 1}{m_0}\sqrt{2} < \sqrt{2} = S(A)$$

lo que concluye la demostración. •

2.3. Coeficientes de empaquetamiento en un espacio métrico

Definición 2.3.1. *Sean μ y λ dos medidas de no compacidad comparables en el espacio métrico X, con a el ínfimo y b el supremo de*

$$\left\{\frac{\lambda(B)}{\mu(B)} : B \in \mathcal{B}\ \mu(B) > 0\right\}$$

Definimos para el espacio X los coeficientes $\delta(\lambda, \mu)$ y $\delta'(\lambda, \mu)$ como el supremo y el ínfimo respectivamente del conjunto

$$\left\{\frac{\lambda(A)}{\mu(A)}\ :\ A \subset X\ \ A\ \ \mu-\text{minimal},\ \mu(A) > 0\right\}$$

Llamaremos coeficiente de (λ, μ)-empaquetamiento del espacio X al número

$$\gamma(X) = \frac{\delta(\lambda, \mu)}{\delta'(\lambda, \mu)}$$

Cuando no haya ninguna ambigüedad sobre las medidas que se consideran, se designarán simplemente como δ', δ y γ.

Consecuencias 2.3.2.

1) Al no ser comparable con ninguna otra MNC, no tiene sentido introducir coeficientes de empaquetamiento en relación a la medida discreta.

2) Es evidente que siempre será $a \leq \delta' \leq \delta \leq b$ y $1 \leq \gamma(X) \leq \dfrac{b}{a}$

Notas 2.3.3.

1) Aquellos espacios X para los que $\gamma(X) = 1$ diremos que están (λ, μ)-bien empaquetados.

2) Cualquier espacio métrico X está (S, α)- bien empaquetado ya que para todo α-minimal A de X es $S(A) = \alpha(A)$ por lo que se cumple que $\delta = \delta' = \gamma = 1$.

3) Los espacios ℓ^p , $1 \le p \le +\infty$ están (β, α)-bien empaquetados, ya que Domínguez Benavides probó en **[DB2]** que cualquier α-minimal A de ℓ^p verifica la relación

$$\beta(A) = 2^{\frac{p-1}{p}}\alpha(A)$$

Ejemplos 2.3.4.

1) Es fácil probar que en un espacio métrico cualquiera es $\delta_{(\beta,\alpha)} \le \delta_{(\beta,S)}$ y $\delta'_{(\beta,\alpha)} \ge \delta'_{(\beta,S)}$. Como consecuencia, $\gamma_{(\beta,\alpha)} \le \gamma_{(\beta,S)}$.

2) En **[Ay1]**, Dguez Benavides y Ayerbe probaron que $\gamma(L^\infty(\Omega)) = 1$ y, en condiciones muy generales, $\gamma(L^p(\Omega)) = 2^{\frac{|p-2|}{p}}$ si $1 \le p < +\infty$.

3) Si la medida λ es estrictamente minimalizante en X (es el caso, por ejemplo, de la medida β si el espacio es separable o es reflexivo verificando la condición de Opial como ya se ha puesto de manifiesto), para cualquier acotado A de X existe $B \subset A$, B λ-minimal con $\lambda(B) = \lambda(A)$, por lo que al ser $\mu(B) \le \mu(A)$, la exigencia de minimalidad para el cálculo de δ no es necesaria. Dicho de otra manera, en este caso es $\delta = b$.

De forma análoga ocurre para el cálculo de δ' si la medida μ es estrictamente minimalizante. En este caso será $\delta' = a$.

4) Ahora veremos un ejemplo del 'peor' empaquetamiento posible respecto a las medidas α y β estudiando el espacio c_0 de las sucesiones convergentes a cero con la norma del supremo (otro ejemplo para el propio c_0 aparece en **[Ay1]**):

Sea $A = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde los e_n son los elementos de la base canónica de ℓ^p.

Para $n \ne m$ es $\|e_n - e_m\| = 1$ por lo que A es α-minimal y $\alpha(A) = 1$.

Por otra parte, al ser para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|e_n\| = 1$, se tiene que para cualquier

$\epsilon > 0$ es $A \subset B(0; 1+\epsilon)$ lo que significa que $\beta(A) \leq 2$. Pero si fuese $\beta(A) = 2r < 2$, existirían s , $r < s < 1$, y $x \in c_0$ de forma que para infinitos n sería $\|e_n - x\| < s$, de donde para infinitos k habría de cumplirse que $|1 - x^k| < s$ y de ahí que $x^k > 1 - s > 0$ para esos k lo que contradice el ser $x = (x^k) \in c_0$.
Se tiene, por lo tanto, que $\beta(A) = 2$ y en consecuencia que $\delta(c_0) = 2$.

Consideremos ahora $B = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde $u_n = e_1 + e_2 + \cdots + e_{n-1} - e_n$. Para $n \neq m$ es $\|u_n - u_m\| = 2$ por lo que B es α-minimal y $\alpha(B) = 2$.
Además, como para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| = 1$, es $\beta(B) \leq 2$, pero sabemos que $2 = \alpha(B) \leq \beta(B)$ y de aquí $\beta(B) = 2$ y $\delta'(c_0) = 1$.

Como queríamos probar, $\gamma(c_0) = 2$.

2.4. Algunas relaciones entre aplicaciones k-contractivas y k-condensantes

Recordemos ahora algunas nociones introducidas en el capítulo anterior:

Si X es un espacio métrico completo, $T : D \subset X \to X$ una aplicación continua, μ una medida de no compacidad definida en X y $k > 0$:

1) T es $k - \mu$ contractiva si para cualquier subconjunto acotado A de D, se verifica que $\mu[T(A)] \leq k \cdot \mu(A)$.

2) T es $k - \mu$ condensante si para cualquier subconjunto acotado A de D con $\mu(A) > 0$, se verifica que $\mu[T(A)] < k \cdot \mu(A)$.

Hemos visto también que si las medidas μ y λ definidas en X son comparables verificando que $a \cdot \mu(A) \leq \lambda(A) \leq b \cdot \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}$, se tiene:

a) Si $T : D \subset X \to X$ es $k - \mu$ contractiva , T es $\frac{b}{a}k - \lambda$ contractiva

b) Si $T : D \subset X \to X$ es $k - \mu$ condensante , T es $\frac{b}{a}k - \lambda$ condensante

c) Si $T : D \subset X \to X$ es $k - \lambda$ contractiva , T es $\frac{b}{a}k - \mu$ contractiva

d) Si $T : D \subset X \to X$ es $k - \lambda$ condensante , T es $\frac{b}{a}k - \mu$ condensante.

Veremos a continuación que estas relaciones pueden ser mejoradas notablemente si se conocen los coeficientes de empaquetamiento del espacio X respecto de las medidas de no compacidad μ y λ , hasta tal punto que en determinados casos las relaciones que se obtengan serán las mejores posibles.

Teorema 2.4.1. *Sea X un espacio métrico completo, con coeficiente de empaquetamiento $\gamma(X) = \gamma = \delta/\delta'$ respecto de las medidas de no compacidad μ y λ, siendo esta última minimalizante en X. Se verifica:*

1) Si $T : D \subset X \to X$ es $k - \mu$ contractiva, T es $\gamma k - \lambda$ contractiva.

2) Si $T : D \subset X \to X$ es $k - \lambda$ contractiva, T es $\dfrac{\delta}{a}k - \mu$ contractiva.

3) En el caso de ser X un espacio de Banach y las medidas λ y μ semihomogéneas en X, la relacion 1) anterior no puede ser mejorada, es decir:
Si $\omega < \gamma$, existen aplicaciones que son $k - \mu$ contractivas pero no $\omega k - \lambda$ contractivas.

4) En el caso de ser X un espacio de Banach separable y las medidas λ y μ semihomogéneas en X, la relación 2) anterior no puede ser mejorada, es decir:
Si $\omega < \dfrac{\delta}{a}$, existen aplicaciones que son $k - \lambda$ contractivas pero no $\omega k - \mu$ contractivas.

Demostración.

1) Si A es un subconjunto de D infinito y acotado, dado $\epsilon > 0$ arbitrario existe un subconjunto infinito B de A tal que B y $T(B)$ son μ-minimales y λ-minimales [Lema 2.1.3] y además, por ser λ minimalizante, $\lambda[T(A)] \leq \lambda[T(B)] + \epsilon$, de forma que se tiene

$$\begin{aligned} \lambda[T(A)] &\leq \lambda[T(B)] + \epsilon \leq \delta \cdot \mu[T(B)] + \epsilon \\ &\leq \delta \cdot k \cdot \mu(B) + \epsilon \leq \frac{\delta}{\delta'}k \cdot \lambda(B) + \epsilon \leq k \cdot \gamma \cdot \lambda(A) + \epsilon. \end{aligned}$$

Al ser este desarrollo válido para todo $\epsilon > 0$, es $\lambda[T(A)] \leq k \cdot \gamma \cdot \lambda(A)$ como se quería probar.

2) Para todo $A \subset D$, A infinito y acotado, tomando B como en el apartado anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}\mu[T(A)] &\leq \frac{1}{a}\lambda[T(A)] \leq \frac{1}{a}\Big[\lambda[T(B)] + \epsilon\Big] \\ &\leq \frac{1}{a}[k \cdot \lambda(B) + \epsilon] \leq \frac{1}{a}[k \cdot \delta \cdot \mu(B) + \epsilon] \leq \frac{1}{a}k \cdot \delta \cdot \mu(A) + \frac{\epsilon}{a}\end{aligned}$$

y, al ser este desarrollo válido para todo $\epsilon > 0$ es

$$\mu[T(A)] \leq \frac{\delta}{a}k \cdot \mu(A)$$

como se quería probar.

3) Si $\omega < \gamma$, entonces $\omega \cdot \delta' < \delta$ luego existe, por ser δ un supremo, A μ-minimal no precompacto tal que $\omega \cdot \delta' \cdot \mu(A) < \lambda(A)$ y, como δ' es un ínfimo, existe B μ-minimal no precompacto verificando que $\mu(A) \cdot \lambda(B) \cdot \omega < \lambda(A) \cdot \mu(B)$; sin más que tomar subconjuntos, podemos asumir que A y B son numerables

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \qquad\qquad B = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Por otra parte, ya que B no es precompacto, $\alpha(B) > 0$ donde α es la medida de no compacidad de Kuratowski; es más, para todo subconjunto infinitoB_0 de B habrá de ser $\alpha(B_0) > 0$ ya que si para alguno de ellos fuese $\alpha(B_0) = 0$, sería B_0 infinito y precompacto por lo que se tendría $\mu(B_0) = 0$ en contra de la no precompacidad del μ-minimal B.
Siendo así, podemos tomar, aplicando el Lema 2.2.3, $B_0 \subset B$ α-minimal verificando que para todo $x \in B_0$ y todo $y \in B_0$ con $, x \neq y$ es

$$\frac{\alpha(B_0)}{2} < \|x - y\| < \frac{3\alpha(B_0)}{2}$$

es decir $B_0 = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ infinito, μ-minimal y discreto.
Si tomamos $k > 0$, la aplicación $T : B_0 \to X$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $Tz_n = k\dfrac{\mu(B)}{\mu(A)} x_n$ es continua y aplicando la semihomogeneidad de μ y λ se tiene:

$$\mu[T(B_0)] = k\frac{\mu(B)}{\mu(A)}\mu(A) = k\mu(B) = k\mu(B_0)$$

con lo que resulta ser $k - \mu$ contractiva. Pero, por otra parte

$$\lambda[T(B_0)] = k\frac{\mu(B)}{\mu(A)}\lambda(A) > k\omega \cdot \lambda(B) \geq k\omega \cdot \lambda(B_0)$$

lo que significa que T no es $k\omega$- λ contractiva y 3) está probado.

4) Si es $\omega < \frac{\delta}{a}$, por ser a un ínfimo, existirá un acotado no precompacto B de X tal que

$$\omega < \frac{\mu(B)}{\lambda(B)}\delta \leq \frac{\delta}{a}$$

y, ya que δ es un supremo, existirá A μ- minimal con $\mu(A)\cdot\lambda(B)\cdot\omega < \lambda(A)\cdot\mu(B)$. Podemos suponer además que $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y por ser X separable, existirá $B_0 \subset B$ denso en B y numerable, es decir $B_0 = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\overline{B_0} = B$.
Utilizando el mismo argumento que en el apartado anterior, podemos asumir que el μ-minimal $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es discreto.
Si tomamos un $k > 0$, la aplicación $T : A \to X$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $Tx_n = k\frac{\lambda(A)}{\lambda(B)}\, y_n$ es continua y además, usando que las medidas λ y μ son semihomogéneas así como que siempre son invariantes al tomar cierre de un conjunto, se tiene que

$$\lambda[T(A)] = k\frac{\lambda(A)}{\lambda(B)}\lambda(B_0) = k\frac{\lambda(A)}{\lambda(B)}\lambda(\overline{B_0}) = k\frac{\lambda(A)}{\lambda(B)}\lambda(B) = k\lambda(A)$$

por lo que T es $k - \lambda$ contractiva. Sin embargo

$$\mu[T(A)] = k\frac{\lambda(A)}{\lambda(B)}\mu(B_0) = k\frac{\lambda(A)}{\lambda(B)}\mu(\overline{B_0}) = k\frac{\lambda(A)}{\lambda(B)}\mu(B) > k\omega \cdot \mu(A)$$

por lo que T no es $k\omega$-μ contractiva y la demostración está concluida. •

El siguiente resultado es consecuencia inmediata del anterior

<u>**Corolario 2.4.2.**</u> *Para X , λ y μ en las condiciones del Teorema anterior, si $T : D \subset X \to X$ es un operador continuo, se verifica que*

$$\frac{1}{\gamma}\lambda(T) \leq \mu(T) \leq \frac{\delta}{a}\lambda(T)$$

En el caso de que X sea un espacio de Banach separable, λ y μ semihomogéneas en X y λ minimalizante, estas constantes son las mejores posibles.

Veremos ahora los resultados análogos correspondientes a las aplicaciones condensantes en el siguiente

Teorema 2.4.3. *Sea X un espacio métrico completo,con coeficiente de empaquetamiento $\gamma(X) = \gamma = \delta/\delta'$ respecto de las medidas de no compacidad μ y λ, siendo esta última estrictamente minimalizante en X. Se verifica:*

1) Si $T : D \subset X \to X$ es $k - \mu$ condensante, T es $\gamma k - \lambda$ condensante.

2) Si $T : D \subset X \to X$ es $k - \lambda$ condensante, T es $\frac{\delta}{a}k - \mu$ condensante.

3) En el caso de ser X un espacio de Banach y las medidas λ y μ semihomogeneas en X, la relacion 1) anterior no puede ser mejorada, es decir:
Si $\omega < \gamma$, existen aplicaciones que son $k - \mu$ condensantes pero no $\omega k - \lambda$ condensantes.

4) En el caso de ser X un espacio de Banach separable y las medidas λ y μ semihomogéneas en X, la anterior relación 2) es inmejorable, es decir:
Si $\omega < \frac{\delta}{a}$, existen aplicaciones que son $k - \lambda$ condensantes pero no $\omega k - \mu$ condensantes.

Demostración:

1) Si A es un subconjunto de D infinito y acotado, por ser λ estrictamente minimalizante, existe un subconjunto infinito$B$ de A tal que B y $T(B)$ son μ-minimales y λ-minimales [Lema 2.2.3] y además, $\lambda[T(A)] = \lambda[T(B)]$, de forma que se tiene

$$\begin{aligned}\lambda[T(A)] = \lambda[T(B)] &\leq \delta \cdot \mu[T(B)] \\ &< \delta \cdot k \cdot \mu(B) \leq \frac{\delta}{\delta'}k \cdot \lambda(B) \leq k \cdot \gamma \cdot \lambda(A)\end{aligned}$$

de donde se deduce que es $\lambda[T(A)] < k \cdot \gamma \cdot \lambda(A)$ como se quería probar.

2) Para todo $A \subset D$, A infinito y acotado, tomando B como en el apartado

anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}\mu[T(A)] &\leq \frac{1}{a}\lambda[T(A)] = \frac{1}{a}\lambda[T(B)] \\ &< \frac{1}{a}k\cdot\lambda(B) \leq \frac{1}{a}k\cdot\delta\cdot\mu(B) \leq \frac{1}{a}k\cdot\delta\cdot\mu(A)\end{aligned}$$

es decir, $\mu[T(A)] < \frac{\delta}{a}k\cdot\mu(A)$ como se pretendía demostrar.

3) Si $\omega < \gamma$, podemos tomar los conjuntos $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, B y $B_0 = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ en idénticas condiciones al apartado 3) del Teorema anterior. Sea h un número real verificando

$$\frac{\lambda(B)}{\lambda(A)}\omega < h < \frac{\mu(B)}{\mu(A)}$$

y, dado $k > 0$, definamos la aplicación $T : B_0 \to X$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $Tz_n = kh\,x_n$. Se verifica que T es continua y, aplicando la semihomogeneidad de λ y μ

$$\mu[T(B_0)] = kh\,\mu(A) < k\mu(B) = k\mu(B_0)$$

por lo que se tiene que T es $k-\mu$ condensante. Sin embargo

$$\lambda[T(B_0)] = kh\,\lambda(A) > k\omega\cdot\lambda(B) \geq k\omega\cdot\lambda(B_0)$$

lo que significa que T no es $k\omega$- λ condensante y el enunciado está probado.

4) Si es $\omega < \frac{\delta}{a}$, podemos tomar los conjuntos $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, B y $B_0 = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ en idénticas condiciones al apartado 4) del Teorema anterior. Si tomamos h real verificando que

$$\omega\frac{\mu(A)}{\mu(B)} < h < \frac{\lambda(A)}{\lambda(B)}$$

y $k > 0$, la aplicación $T : A \to X$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $Tx_n = kh\,y_n$ es continua y además, usando la invariancia por cierre de cualquier medida de no compacidad así como la semihomogeneidad de las medidas λ y μ se tiene:

$$\lambda[T(A)] = kh\,\lambda(B_0) = kh\,\lambda(\overline{B_0}) = kh\,\lambda(B) < k\lambda(A)$$

por lo que T es $k - \lambda$ condensante. Pero

$$\mu[T(A)] = kh\,\mu(B_0) = kh\,\mu(\overline{B_0}) = kh\,\mu(B) > k\omega \cdot \mu(A)$$

lo que significa que T no es $k\omega$-μ condensante y la demostración está concluida.
•

Notas 2.4.4.

1) Es claro que estos teoremas mejoran en algunos espacios las relaciones conocidas entre aplicaciones k- contractivas y k- condensantes. Este es el caso, por ejemplo, de los espacios ℓ^p, $(1 \leq p < \infty)$ para los que se tiene, con los resultados de **[DB2]**:

Si T es k- α contractiva (condensante), entonces T es k- β contractiva (condensante).

Si T es k- β contractiva (condensante), entonces T es $2^{\frac{p-1}{p}}k$- α contractiva (condensante).

En el caso de ℓ^1 , T es k- α contractiva (condensante) si y sólo si T es k- β contractiva (condensante).

En todos los casos expuestos, estas relaciones son las mejores posibles.

Hemos de decir que nuestros resultados no son aplicables a ℓ^∞, ya que al no ser un espacio separable, β no es estrictamente minimalizante en él. Sin embargo, Dguez Benavides en **[DB2]** probó por un método directo que en ℓ^∞:

T es k- β contractiva (condensante) si y sólo si T es k- α contractiva (condensante).

En el caso de ser T lineal en ℓ^p con $(1 \leq p < \infty)$:

T es k- α contractiva si y sólo si T es k- β contractiva.

2) En **[Ay1]**, Ayerbe y Dguez Benavides prueban que, en condiciones muy generales, para $L^p(\Omega)$ separable con $1 \leq p < +\infty$:

Si T es $k - \alpha$ contractiva (condensante), T es $2^{\frac{|2-p|}{p}}k - \beta$ contractiva (condensante).

Si T es $k-\beta$ contractiva (condensante), T es $2^{\max\{\frac{1}{p},\frac{p-1}{p}\}}k-\beta$ contractiva (condensante).

En el caso de $L^\infty(\Omega)$:

T es $k-\alpha$ contractiva (condensante) si y sólo si T es $k-\beta$ contractiva (condensante).

En todos los casos, las relaciones son óptimas.

3) Ya que en cualquier espacio X es $\gamma_{(\alpha,S)}(X)=1$, entonces:

Si T es k- α contractiva (condensante), T es k- S contractiva (condensante).

3. Coeficientes de empaquetamiento en espacios de Orlicz

El método seguido por Benavides en **[DB2]** para probar que en los espacios de sucesiones $\ell_p \quad (1 \leq p \leq +\infty)$ el coeficiente de (β, α)-empaquetamiento es $\gamma(\ell_p) = 1$, pone de manifiesto el importante papel desempeñado por las propiedades de las funciones convexas $t \to t^p$ que los definen.

Pues bien, siendo los espacios de sucesiones de Orlicz una generalización natural de los espacios ℓ_p, vamos a evaluar en este capítulo los coeficientes de (β, α)-empaquetamiento δ , δ' y γ para una amplia clase de estos espacios, con lo que obtendremos al mismo tiempo un buen número de ejemplos de espacios de sucesiones donde el valor de γ está estrictamente comprendido entre 1 y 2.

3.1 Funciones y espacios de sucesiones de Orlicz

Para comenzar, en esta sección daremos algunas nociones y resultados básicos sobre espacios de sucesiones de Orlicz que nos serán de utilidad, y que pueden ser ampliadas en algunos tratados como **[Li]** y **[Kr1]**.

Definición 3.1.1. *Una función de Orlicz es una función $M : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ que es continua, no decreciente y convexa, tal que $M(0) = 0$ y $\lim_{t \to +\infty} M(t) = +\infty$ Si $M(t) = 0$ para algún $t > 0$, M se dice que es degenerada.*

A lo largo del presente trabajo trataremos sólo con funciones de Orlicz no degeneradas y tales que $M(1) = 1$; aclararemos que esto último no supone restricción y, por el contrario, simplificará notablemente los cálculos.

Como ejemplos más elementales citaremos las funciones $M(t) = t^p \quad (1 \leq$

$p < +\infty$). Otros modelos de funciones de Orlicz serán expuestos más adelante.

Definición 3.1.2. *Una función de Orlicz M verifica la Δ_2-condición en cero si*

$$\limsup_{t \to 0} \frac{M(2t)}{M(t)} < +\infty$$

Las funciones $M(t) = t^p$ $(1 \leq p < +\infty)$ verifican la Δ_2-condición en cero.

Teorema y Definición 3.1.3. *Sea M una función de Orlicz*

1) El conjunto de todas las sucesiones de escalares $x = (x_n)$ tales que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} M\left(\frac{|x_n|}{\rho}\right) < +\infty$$

para algún $\rho > 0$, dotado con la norma

$$\|x\| = \inf\left\{\rho > 0 : \sum_{n=1}^{+\infty} M\left(\frac{|x_n|}{\rho}\right) \leq 1\right\}$$

es un espacio de Banach al que se denomina espacio de Orlicz de sucesiones ℓ_M.

2) El subconjunto h_M formado por todas aquellas sucesiones $x = (x_n) \in \ell_M$ para las que $\sum_{n=1}^{+\infty} M\left(\frac{|x_n|}{\rho}\right)$ converge para todo valor de $\rho > 0$ es un subespacio de ℓ_M que, como veremos a continuación, en algunos casos coincide con ℓ_M.

La importancia de la Δ_2-condición en cero se pone de manifiesto en el siguiente

Lema 3.1.4.[Li] *Para una función de Orlicz M son equivalentes las siguientes condiciones:*

1) M satisface la Δ_2-condición en cero.

2) $\ell_M = h_M$.

3) Los vectores unitarios forman una base simétrica totalmente acotada en ℓ_M.

4) ℓ_M es separable.

5) ℓ_M no contiene subespacios isomorfos a ℓ_∞.

6) $\limsup_{t\to 0} \dfrac{tp(t)}{M(t)} < +\infty$, donde $p(t)$ es la derivada por la derecha de $M(t)$, que existe para todo $t > 0$.

Teniendo en cuenta el más amplio conocimiento que se tiene de los espacios ℓ_p, es conveniente tener en ellos un marco de referencia para los espacios de Orlicz en general, por lo que también será de utilidad el siguiente:

Teorema 3.1.5.[Li] *El espacio ℓ_p, o c_0 si $p = \infty$, es isomorfo a un subespacio de un espacio de sucesiones de Orlicz ℓ_M si y sólo si $p \in [\alpha_M, \beta_M]$, donde*

$$\alpha_M = \sup\left\{q : \sup_{0<\lambda\,,\,t\leq 1} \frac{M(\lambda t)}{M(\lambda)t^q} < +\infty\right\}\ ,\ \beta_M = \inf\left\{q : \inf_{0<\lambda\,,\,t\leq 1} \frac{M(\lambda t)}{M(\lambda)t^q} > 0\right\}$$

Por lo que respecta al estudio de la reflexividad en espacios de Orlicz, es importante la noción de función complementaria de una función de Orlicz:

Definición 3.1.6. *Sea M una función de Orlicz no degenerada cuya derivada por la derecha $p(t)$ satisface que $p(0) = 0$ y $\lim_{t\to+\infty} p(t) = \infty$ (estas restricciones sólo excluyen el caso de ser $M(t)$ equivalente en el origen a t).*

Si designamos como $q(u) = \sup\{t : p(t) \leq u\}$, para $u \geq 0$, la función $M^*(u) = \int_0^u q(v)d(v)$ definida en $[0, +\infty)$ es también una función de Orlicz no degenerada a la que se denomina complementaria de M.

Enunciamos a continuación algunas propiedades relacionadas con la función complementaria:

1) $M^{**} = M$.
2) Desigualdad de Young: $tu \leq M(t) + M^*(u) \quad \forall t \in [0, +\infty)\ ,\ \forall u \in [0, +\infty)$ que se convierte en una igualdad si $u = p(t)$.
3) $M^*(u) = \max\{tu - M(t); 0 < t < +\infty\}$

4) $h_M^* \approx \ell_M$ y $\ell_M^* \approx h_M^{**}$, y si M^* satisface la Δ_2-condición en cero, entonces $h_M^{**} \approx \ell_M$.

5) h_M es reflexivo si y sólo si M y M^* satisfacen ambas la Δ_2-condición en cero.

3.2 Empaquetamiento en Espacios de Orlicz de sucesiones

En el resto del capítulo supondremos que la función de Orlicz M satisface la Δ_2 condición en cero, y que $M(1) = 1$; con esta segunda condición, los vectores de la base canónica de ℓ_p tendrán norma unidad.

Definición 3.2.1. *Si M es una función de Orlicz no degenerada que verifica la Δ_2 condición en cero, con $M(1) = 1$ y $\psi = M^{-1}$, llamaremos función de expansión de M a la función $a : (0,1] \to \mathbb{R}$ tal que para cada $\delta \in (0,1]$ es*

$$a(\delta) = \inf\left\{\frac{\psi(t)}{\psi(\delta t)} : t \in (0,1]\right\}$$

Como ejemplo más simple, si $M(s) = s^p$ con $1 \leq p < +\infty$, entonces para cada $t \in (0,1]$, el cociente

$$\frac{\psi(t)}{\psi(\delta t)} = \frac{t^{\frac{1}{p}}}{\delta^{\frac{1}{p}} t^{\frac{1}{p}}} = \delta^{-\frac{1}{p}}$$

es independiente de t, por lo que para cada $\delta \in (0,1]$ es $a(\delta) = \delta^{-\frac{1}{p}}$.

En los siguientes Lemas se verán algunas propiedades de la función de expansión de una función de Orlicz que serán de gran relevancia para nuestros propósitos, ya que nos permitirán de una parte disponer de unas constantes para la evaluación del empaquetamiento y, además, precisar la norma de vectores en función de la suma de las series que definen dicha norma.

Lema 3.2.2. *Si $a(\cdot)$ es la función de expansión de una función de Orlicz M, entonces:*

1) $a(\cdot)$ *es una función decreciente.*

2) $a(\cdot)$ *es continua a la izquierda.*

3) $\lim_{\delta\to 1} a(\delta) = 1$

Demostración.

1) Probaremos primero que si $\delta \in (0,1]$, entonces $a(\delta) \in [1, 1/\delta]$:
En efecto, usando la monotonía y la concavidad de ψ, es claro que $\psi(t) \geq \psi(\delta t) \geq \delta\psi(t)$ para todo $t \in (0,1]$, en consecuencia $1 \leq \dfrac{\psi(t)}{\psi(\delta t)} \leq \dfrac{1}{\delta}$ para todo $t \in (0,1]$ y entonces es $1 \leq a(\delta) \leq \frac{1}{\delta}$.

Que si $\delta_1 < \delta_2$ entonces $a(\delta_1) \geq a(\delta_2)$ se deduce directamente de que, por ser ψ creciente, para $\delta_1 < \delta_2$ y cualquier t en $(0,1]$ es $\psi(\delta_1 t) \leq \psi(\delta_2 t)$.

2) $a(\cdot)$ es continua a la izquierda:
Elijamos $\delta_0 \in (0,1]$ y sea $l = \lim_{\delta\to\delta_0^-} a(\delta)$. Para todo $t \in (0,1]$ se tiene $\dfrac{\psi(t)}{\psi(\delta t)} \geq l$ cualquiera que sea $\delta < \delta_0$. Así, la continuidad de ψ implica que $\dfrac{\psi(t)}{\psi(\delta_0 t)} \geq l$ para todo $t \in (0,1]$.
Como consecuencia, $a(\delta_0) = l$ y $a(\cdot)$ es continua a la izquierda.

3) Ya que $a(1) = 1$ es inmediato que $\lim_{\delta\to 1} a(\delta) = 1$. •

<u>Lema 3.2.3.</u> *Si* $a(\cdot)$ *es la función de expansión de una función de Orlicz* M*, entonces:*

$$a(\delta) > 1 \quad si \quad \delta < 1$$

Demostración.

Supongamos, por el contrario, que fuese $a(\delta) = 1$ para algún $\delta \in (0,1)$ y designemos por $\gamma = \frac{1}{\delta} > 1$. Sea h un entero positivo arbitrario y $\eta > 0$ cualquiera. Tomemos $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \dfrac{(\gamma-1)^2}{\gamma^h - 1}$.

Ya que $a(\delta)=1$ y $\dfrac{\psi(t)}{\psi(\delta t)}>1$ para todo $t\in(0,1]$, tenemos que

$$\liminf_{t\to 0}\frac{\psi(t)}{\psi(\delta t)}=\liminf_{t\to 0}\frac{\psi(\gamma t)}{\psi(t)}=1$$

y por lo tanto existe $t_0\in\left(0,\dfrac{M(\eta)}{\gamma^h}\right)$ tal que $\dfrac{\psi(\gamma t_0)}{\psi(t_0)}<1+\epsilon$, o lo que es lo mismo, $\psi(\gamma t_0)-\psi(t_0)<\epsilon\psi(t_0)$.

La concavidad de ψ implica que en cada intervalo, el arco está por encima de la cuerda que lo subtiende, por lo que al ser $t_0<\gamma t_0<\gamma^h t_0$, entonces

$$\frac{\psi(\gamma^h t_0)-\psi(t_0)}{\gamma^h t_0-t_0}<\frac{\psi(\gamma t_0)-\psi(t_0)}{\gamma t_0-t_0}$$

o lo que es igual

$$\begin{aligned}\psi(\gamma^h t_0)&<\psi(t_0)+\frac{\psi(\gamma t_0)-\psi(t_0)}{\gamma-1}(\gamma^h-1)\\&<\psi(t_0)\left(1+\epsilon\frac{\gamma^h-1}{\gamma-1}\right)<\gamma\psi(t_0)\end{aligned}$$

es decir, $\psi(\gamma^h t_0)<\gamma\psi(t_0)$.
Si designamos por $s_0=\psi(\gamma^h t_0)$, entonces s_0 pertenece a $(0,\eta)$ y además

$$\frac{M(s_0)}{M(s_0/\gamma)}=\frac{\gamma^h t_0}{M(\psi(\gamma^h t_0)/\gamma)}>\frac{\gamma^h t_0}{M(\psi(t_0))}=\gamma^h.$$

Ya que h y η son arbitrarios, obtenemos que $\limsup_{s\to 0}\dfrac{M(\gamma s)}{M(s)}=+\infty$ lo que contradice la Δ_2-condición en 0 de M. •

Lema 3.2.4. *Si $a(\cdot)$ es la función de expansión de una función de Orlicz M, entonces:*

$$\lim_{\delta\to 0}a(\delta)=+\infty$$

Demostración.

Probaremos primero que si $\delta\in(0,1]$, se verifica que $a(\frac{\delta}{2})\geq a(\frac{1}{2})\cdot a(\delta)$:

En efecto, si $0 < \delta \le 1$, se tiene

$$
\begin{aligned}
a(\frac{\delta}{2}) &= \inf\left\{\frac{\psi(t)}{\psi(\delta t/2)} : t \in (0,1]\right\} = \inf\left\{\frac{\psi(t)}{\psi(t/2)}\frac{\psi(t/2)}{\psi(\delta t/2)} : t \in (0,1]\right\} \\
&\ge \inf\left\{\frac{\psi(t)}{\psi(t/2)} : t \in (0,1]\right\} \cdot \inf\left\{\frac{\psi(t/2)}{\psi(\delta t/2)} : t \in (0,1]\right\} \\
&= a(\frac{1}{2}) \cdot \inf\left\{\frac{\psi(s)}{\psi(\delta s)} : s \in (0,\frac{1}{2}]\right\} \\
&\ge a(\frac{1}{2}) \cdot \inf\left\{\frac{\psi(s)}{\psi(\delta s)} : s \in (0,1]\right\} = a(\frac{1}{2}) \cdot a(\delta)
\end{aligned}
$$

En particular, aplicando la desigualdad anterior reiteradamente y teniendo en cuenta que $a(1) = 1$, se obtiene que para todo k entero positivo, es

$$a\left(\frac{1}{2^k}\right) \ge \left[a(\frac{1}{2})\right]^k$$

Finalmente, para probar que $\lim_{\delta\to 0} a(\delta) = +\infty$, sea H un número positivo arbitrario. Elijamos un entero positivo h tal que $\left[a(\frac{1}{2})\right]^h > H$.

Si $\delta < \frac{1}{2^h}$ entonces $a(\delta) > a(\frac{1}{2^h}) \ge \left[a(\frac{1}{2})\right]^h > H$ y, en consecuencia, se tiene que efectivamente $\lim_{\delta\to 0} a(\delta) = +\infty$. •

<u>**Lema 3.2.5.**</u> *Sea $a(\cdot)$ la función de expansión de una función de Orlicz M. Se verifica:*

1) Si δ está en (0,1] y s en [0,1], entonces $M\left(\frac{s}{a(\delta)}\right) \ge \delta M(s)$.

2) Si $x = (x^k) \in h_M$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} M(|x^k|) < \delta$ *, entonces* $\|x\| \le \frac{1}{a(\delta)}$.

Demostración.

1) Sea s un número en (0,1] y designemos por $t = M(s)$.
Ya que es $\frac{\psi(t)}{\psi(\delta t)} \ge a(\delta)$ para todo t en (0,1], se tiene que es $\frac{s}{a(\delta)} \ge \psi(\delta M(s))$ y por ser M creciente entonces $M\left(\frac{s}{a(\delta)}\right) \ge \delta M(s)$.

2) Supongamos que fuese $\sum_{k=1}^{+\infty} M(|x^k|) < \delta$. Entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ es $|x^k| \leq \frac{1}{a(\delta)}$ ya que si para alguno fuese $|x^k| > \frac{1}{a(\delta)}$, como M es creciente, $M(|x^k|) > M\left(\frac{1}{a(\delta)}\right)$, pero por el apartado anterior es $M\left(\frac{1}{a(\delta)}\right) \geq \delta M(1) = \delta$, y se incurriría en una contradicción.

Aplicando la desigualdad del apartado anterior para $s = a(\delta)|x^k| \in [0,1]$ se tiene

$$M(|x^k|) \geq \delta M(a(\delta)|x^k|) \Rightarrow \delta > \sum_{k=1}^{+\infty} M(|x^k|) \geq \delta \sum_{k=1}^{+\infty} M(a(\delta)|x^k|)$$

por lo que se deduce que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} M(a(\delta)|x^k|) < 1$$

y entonces $\|x\| \leq \frac{1}{a(\delta)}$ como se pretendía. •

Teorema 3.2.6. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión en h_M para la que existen*

$$\lim_{n,m\,;n\neq m} \|x_n - x_m\| = \ell \quad y \quad \lim_n \|x_n\| = r$$

y además para todo k natural $\{x_n^k : n \in \mathbb{N}\}$ converge a 0.

Se verifica que

$$ra_0 \leq \ell \leq rb$$

siendo $a_0 = a(\frac{1}{2})$ y $b = \sup\left\{\frac{\psi(t)}{\psi(t/2)} : t \in (0,1]\right\}$

Demostración.

a) Sea $\eta > 0$ arbitrario. Tomando una subsucesión si es necesario, podemos suponer que para n y m arbitrarios, $n \neq m$,

$$\ell - \frac{\eta}{2} < \|x_n - x_m\| < \ell + \frac{\eta}{2} \qquad \text{y} \qquad r - \frac{\eta}{2} < \|x_n\| < r + \frac{\eta}{2}$$

Consideremos $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \dfrac{\eta}{4}$ y, ya que $\lim\limits_{\delta \to 0} a(\delta) = +\infty$, elijamos ϵ' de forma que $a(\epsilon') > \frac{1}{\epsilon}$ y k_0 en $\mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{k > k_0} M(|x_1^k|) < \epsilon'$, lo que es posible por ser $x_1 \in h_M$.

Puesto que $\{x_n^k\} \to 0$ para todo k natural, denominemos x_2 a un vector que verifica que $M(|x_2^k|) < \dfrac{\epsilon'}{k_0}$ para $k = 1, 2, ..., k_0$, lo que significará que $\sum\limits_{k \leq k_0} M(|x_2^k|) < \epsilon'$.

Si llamamos $y_1 = \sum\limits_{k \leq k_0} x_1^k e_k$ e $y_2 = \sum\limits_{k > k_0} x_2^k e_k$, donde $\{e_n\}$ es la base canónica de h_M, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} M(|y_1^k - x_1^k|) = \sum_{k > k_0} M(|x_1^k|) < \epsilon'$$

de donde, aplicando el Lema 3.2.5, obtenemos la desigualdad

$$\|y_1 - x_1\| \leq \frac{1}{a(\epsilon')} < \epsilon$$

y, de forma análoga,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} M(|y_2^k - x_2^k|) = \sum_{k \leq k_0} M(|x_2^k|) < \epsilon'$$

por lo que, de nuevo por el Lema 3.2.5,

$$\|y_2 - x_2\| \leq \frac{1}{a(\epsilon')} < \epsilon$$

Como consecuencia, ya que para $i = 1, 2$ es

$$\|x_i\| - \|y_i - x_i\| \leq \|y_i\| \leq \|x_i\| + \|y_i - x_i\|$$

se deduce que

$$r - \eta < \|y_i\| < r + \eta$$

para $i = 1, 2$.

Por otra parte, ya que

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2\| - \|x_1 - y_1\| - \|x_2 - y_2\| &\leq \|y_1 - y_2\| \\ &\leq \|x_1 - x_2\| + \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\|\end{aligned}$$

se obtiene que

$$\ell - \eta < \|y_1 - y_2\| < \ell + \eta$$

Si para todo $x \in h_M$, designamos por $\text{sop}(x) = \{k : x^k \neq 0\}$, se tiene que para estos vectores es $\text{sop}(y_1) \cap \text{sop}(y_2) = \emptyset$, y además

$$\sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\frac{|y_1^k|}{\ell + \eta}\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\frac{|y_2^k|}{\ell + \eta}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\frac{|y_1^k - y_2^k|}{\ell + \eta}\right) < 1$$

por lo que, para $i = 1$ ó $i = 2$, ha de ser $\sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\frac{|y_i^k|}{\ell + \eta}\right) < \frac{1}{2}$ y, aplicando el Lema 3.2.5, eso significa que $\frac{\|y_i\|}{\ell + \eta} \leq \frac{1}{a(1/2)} = \frac{1}{a_0}$, es decir, $\|y_i\| \leq \frac{\ell + \eta}{a_0}$, y de aquí, $r - \eta < \frac{\ell + \eta}{a_0}$.

Dada la arbitrariedad de $\eta > 0$, se deduce que es en efecto $a_0 \, r \leq \ell$.

b) Para probar la otra desigualdad, tengamos en cuenta que según la definición de b, para todo $t \in (0, 1]$ es $\psi(t) \leq b\psi(t/2)$ y de aquí, por el crecimiento de M, es $M\left[\frac{\psi(t)}{b}\right] \leq \frac{t}{2}$, por lo que si hacemos $\psi(t) = bs$, para $bs \leq 1$ se tiene que es $M(s) \leq \frac{1}{2}M(bs)$.

Ya que la desigualdad $\|y_1 - y_2\| > l - \eta$ equivale a que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\frac{|y_1^k|}{\ell - \eta}\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\frac{|y_2^k|}{\ell - \eta}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\frac{|y_1^k - y_2^k|}{\ell - \eta}\right) > 1,$$

para $i = 1$ ó $i = 2$ habrá de ser $\sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\frac{|y_i^k|}{\ell - \eta}\right) > \frac{1}{2}$, y se contemplan las siguientes posibilidades:

- Si para todo k es $\dfrac{|y_i^k|b}{\ell-\eta} \leq 1$, será $M\left(\dfrac{|y_i^k|b}{\ell-\eta}\right) \geq 2M\left(\dfrac{|y_i^k|}{\ell-\eta}\right)$ y esto quiere decir que $\sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\dfrac{|y_i^k|b}{\ell-\eta}\right) > 1$.
- Si para algún k es $\dfrac{|y_i^k|b}{\ell-\eta} > 1$, entonces $\sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\dfrac{|y_i^k|b}{\ell-\eta}\right) > 1$ ya que M es creciente.

Por consiguiente, en cualquier caso es $\|y_i\| > \dfrac{\ell-\eta}{b}$, de donde $r+\eta > \dfrac{\ell-\eta}{b}$ y como $\eta > 0$ es arbitrario, se obtiene que es $\ell \leq b\,r$ y la demostración está concluida. •

Veremos ahora otros dos lemas que nos acercarán más a la localización de los coeficientes de empaquetamiento.

Lema 3.2.7. *Si $\{x_n\}$ es una sucesión en h_M tal que para todo $z \in h_M$ existe $\lim_n \|x_n - z\|$ y además $\{x_n^k\}$ es convergente a 0 para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\lim_n \|x_n\| \;\leq \lim_n \|x_n - z\|$$

para todo $z \in h_M$

Demostración.

Seguiremos un procedimiento muy similar al del Teorema anterior:
Si $\lim_n \|x_n\| = r$, para cualquier $\eta > 0$ podemos suponer que

$$r - \frac{\eta}{4} < \|x_n\| < r + \frac{\eta}{4}$$

Tomamos $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \dfrac{\eta}{4}$ y elegimos ϵ' de forma que $a(\epsilon') > \dfrac{1}{\epsilon}$. Existe, para todo $z \in h_M$, un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k>k_0} M(|z^k|) < \epsilon'$ y, ya que $\{x_n^k\} \to 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, podemos suponer que tomando n suficientemente grande, $M(|x_n^k|) < \frac{\epsilon'}{k_0}$ para $k = 1, 2, ..., k_0$ con lo que será $\sum_{k \leq k_0} M(|x_n^k|) < \epsilon'$

Si ahora llamamos

$$\hat{x}_n = \sum_{k>k_0} x_n^k e_k \quad \text{y} \quad \hat{z} = \sum_{k\leq k_0} z^k e_k$$

entonces es $\text{sop}(\hat{x}_n) \cap \text{sop}(\hat{z}) = \emptyset$ y se tiene:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} M(|x_n^k - \hat{x}_n^k|) = \sum_{k\leq k_0} M(|x_n^k|) < \epsilon'$$

por lo que aplicando el Lema 3.2.5,

$$\|x_n - \hat{x}_n\| \leq \frac{1}{a(\epsilon')} < \epsilon;$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} M(|z^k - \hat{z}^k|) = \sum_{k>k_0} M(|z^k|) < \epsilon'$$

y, de nuevo por el Lema 3.2.5, es

$$\|z - \hat{z}\| \leq \frac{1}{a(\epsilon')} < \epsilon$$

Como consecuencia:

$$\begin{aligned} \|\hat{x}_n\| &\geq \|x_n\| - \|x_n - \hat{x}_n\| \\ &> \|x_n\| - \epsilon > r - \frac{\eta}{2} \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\frac{|\hat{x}_n^k - \hat{z}^k|}{r - \eta/2}\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\frac{|\hat{x}_n^k|}{r - \eta/2}\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\frac{|\hat{z}^k|}{r - \eta/2}\right) \\ &\geq \sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\frac{|\hat{x}_n^k|}{r - \eta/2}\right) > 1 \end{aligned}$$

lo que implica que es

$$\|\hat{x}_n - \hat{z}\| > r - \frac{\eta}{2}$$

Como además es

$$\begin{aligned} \|x_n - z\| &\geq \|\hat{x}_n - \hat{z}\| - \|x_n - \hat{x}_n\| - \|z - \hat{z}\| \\ &> \|\hat{x}_n - \hat{z}\| - 2\epsilon > \|\hat{x}_n - \hat{z}\| - \frac{\eta}{2} \end{aligned}$$

se sigue que

$$\|x_n - z\| > \|\hat{x}_n - \hat{z}\| - \frac{\eta}{2} > r - \eta$$

y como $\eta > 0$ es arbitrario, se tiene la conclusión

$$\lim_n \|x_n - z\| \geq \lim_n \|x_n\| = r \quad \bullet$$

Lema 3.2.8. *Si $\{x_n\}$ es una sucesión acotada en h_M tal que $\{x_n^k\}_n$ converge a v^k para todo $k \in \mathbb{N}$, el vector $v = (v^k)$ pertenece a h_M.*

Demostración.

Haciendo una homotecia si es necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que es $\|x_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ya que $\{x_n^k\}_n \to v^k$, entonces $\{|x_n^k|\}_n \to |v^k|$ y, por la continuidad de M, $\{M(|x_n^k|)\}_n \to M(|v^k|)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

En caso de que $v = (v^k)$ no perteneciera a h_M, sería $\sum_{k=1}^{+\infty} M(|v^k|) = +\infty$ con lo que existiría un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k \leq k_0} M(|v^k|) > 2$

Por otra parte, existiría un $x_n \in h_M$ tal que para $k = 1, 2, ..., k_0$

$$|M(|x_n^k|) - M(|v^k|)| < \frac{1}{k_0}$$

es decir

$$|M(|x_n^k|)| > |M(|v^k|)| - \frac{1}{k_0}$$

para cada $k = 1, 2, ..., k_0$
por lo que

$$\sum_{k \leq k_0} M(|x_n^k|) > \sum_{k \leq k_0} M(|v^k|) - 1 > 1$$

pero al ser $\|x_n\| \leq 1$ debe ser necesariamente $\sum_{k=1}^{+\infty} M(|x_n^k|) \leq 1$ con lo que se incurre en contradicción.

Concluimos que $v = (v^k) \in h_M$ como se quería probar. •

El siguiente teorema nos facilitará unas cotas para los coeficientes de empaquetamiento en un espacio de Orlicz:

Teorema 3.2.9. *Si M es una función de Orlicz que verifica la Δ_2 -condición en 0, entonces*

$$\delta(h_M) \leq \frac{2}{a_0}, \qquad \delta'(h_M) \geq \frac{2}{b} \quad \text{y} \quad \gamma(h_M) \leq \frac{b}{a_0}$$

Demostración.

Si A es un conjunto α-minimal no precompacto de h_M, ya que h_M es separable, podemos suponer como hemos visto en el Lema 2.2.7 del capítulo anterior que es también β-minimal, que $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y que $\lim_{n,m;n \neq m} \|x_n - x_m\| = \alpha(A)$ por el Lema 2.2.6 y, tomando subsucesiones si es necesario, que la sucesión $\{x_n^k\}$ converge a un v^k para todo $k \in \mathbb{N}$.

Según el lema anterior, $v = (v^k) \in h_M$ y, nuevamente por ser h_M separable, podemos suponer, aplicando el Lema 2.2.9, que existe $\lim_n \|x_n - z\|$ para todo $z \in h_M$.

Sea $r = \lim_n \|x_n - v\|$. Puesto que por el Lema 3.2.7 es

$$r = \lim \|x_n - v\| \leq \lim \|x_n - z\|$$

para todo $z \in h_M$, se tiene que según el Lema 2.2.11 es $\beta(A) = 2r$

Aplicamos ahora el Teorema anterior para obtener que $r\,a_0 \leq \alpha(A) \leq r\,b$ de donde $\frac{2}{b} \leq \frac{\beta(A)}{\alpha(A)} \leq \frac{2}{a_0}$, y por lo tanto

$$\delta'(h_M) \geq \frac{2}{b}, \quad \delta(h_M) \leq \frac{2}{a_0} \quad \text{y} \quad \gamma(h_M) \leq \frac{b}{a_0} \quad \bullet$$

Como una consecuencia inmediata de este resultado y la aplicación del Teorema 2.4.1, obtenemos el siguiente

Corolario 3.2.10. *Para toda aplicación $T : D \subseteq h_M \to h_M$ se dan las siguientes relaciones:*

Si T es $k - \alpha$ contractiva, entonces T es $\frac{b}{a_0}k - \beta$ contractiva.

Si T es $k - \beta$ contractiva, entonces T es $\frac{2}{a_0}k - \alpha$ contractiva.

Notas 3.2.11.

1) Al disponer sólo de cotas para δ y δ', no podemos dar resultados recíprocos.

2) En función de los coeficientes de contractividad, las relaciones del corolario anterior se traducen en la desigualdad:

$$\frac{a_0}{2}\alpha(T) \leq \beta(T) \leq \frac{b}{a_0}\alpha(T)$$

3) Si consideramos la clase de todos los espacios de Orlicz separables, las cotas obtenidas para los coeficientes de empaquetamiento son las mejores posibles, como se pone de manifiesto al considerar los espacios ℓ_p ($1 \leq p < +\infty$) , ya que para estos espacios se prueba en **[DB2]** que es $\delta = \delta' = 2^{1-1/p}$ y, teniendo en cuenta que para ellos es $a_0 = b = 2^{1/p}$, resulta que

$$\delta = \frac{2}{a_0} \text{ y } \delta' = \frac{2}{b}$$

En cuanto a la relación entre los coeficientes $\alpha(T)$ y $\beta(T)$, la misma referencia anterior ya prueba que la obtenida aquí es, en general, la más estrecha posible.

4) Como se ha apuntado en el Lema 3.1.5, ℓ_p es isomorfo a un subespacio de h_M si y sólo si $p \in [\alpha_M, \beta_M]$. Ya que en este caso, h_M contiene casi isométricamente a ℓ_p, del Teorema 3.2.6 obtenemos las desigualdades $a_0 \leq 2^{\frac{1}{p}} \leq b$ con $p > 1$, ya que en ese caso, podemos aplicar dicho Teorema a una sucesión $\{x_n\}$ que converge débilmente a cero y satisface que

$$(1-\epsilon)2^{\frac{1}{p}} < \|x_n - x_m\| < (1+\epsilon)2^{\frac{1}{p}} \quad , \qquad 1-\epsilon < \|x_n\| < 1+\epsilon$$

para todo $\epsilon > 0$. De esta forma se tiene que

$$\alpha_M \geq \log_b 2 \quad \text{y} \quad \beta_M \leq \log_{a_0} 2$$

Notemos que estas desigualdades pueden ser estrictas, como se muestra considerando la función de Orlicz del ejemplo 3.4.2.(1) con $p = 2$, para la que es h_M isomorfo a ℓ_2 y, por lo tanto, $\alpha_M = \beta_M = 2$ pero en cambio es $b > \sqrt{2}$.

3.3. Cálculo de $S(U)$, siendo U la bola unidad de h_M

<u>**Teorema 3.3.1.**</u> *Sea M una función de Orlicz que cumple la Δ_2-condición en cero y U la bola unidad de h_M. Se verifica que*

$$a_0 \leq S(U) \leq b$$

Demostración.

Basta calcular $S(\partial(U))$ donde $\partial(U) = \{x \in h_M \ : \ \|x\| = 1\}$, pues según Arias **[Ar]** (véase también **[Ak]**), la medida S es invariante al tomar envolvente convexa.

Recordemos que $S(A) = \sup\{\alpha(\Omega) : \Omega \subset A \ , \Omega \ \alpha - \text{minimal}\}$

Sea $\Omega \subset \partial(U)$, Ω α-minimal. Ya que h_M es separable, podemos suponer que $\Omega = \{x_n\}$ con $\|x_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y también, tomando subsucesiones si es necesario, asumimos que $\{x_n^k\}$ converge a un v^k para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por el Lema 3.2.8, el vector $v = (v^k) \in h_M$; si fuese $v \neq 0$, suponemos según el Lema 2.2.9 que existe $\lim_n \|x_n - v\|$ y, aplicando el Lema 3.2.7 a la sucesión $\{x_n - v\}$ se tiene que $\lim \|x_n - v\| \leq \lim \|x_n\| = 1$.

Si definimos la sucesión $y_n = \dfrac{x_n - v}{\|x_n - v\|}$, entonces $\{y_n \ : n \in \mathbb{N}\} \subset \partial(U)$, es α-minimal y verifica que

$$\begin{aligned}\alpha(\{y_n : n \in \mathbb{N}\}) &= \frac{\alpha(\{x_n \ : n \in \mathbb{N}\})}{\lim \|x_n - v\|} \\ &\geq \ \alpha(\{x_n \ : n \in \mathbb{N}\}) \ = \ \alpha(\Omega)\end{aligned}$$

por lo que, teniendo en cuenta que S es un supremo, si es $v \neq 0$ podemos reemplazar Ω por $\Omega_0 = \{y_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, que también es α-minimal, está contenido en $\partial(U)$ y verifica que $\{y_n^k\} \to 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Haciendo una construcción como en el Teorema 3.2.6, puede suponerse que sop $(x_n)\cap$ sop $(x_m) = \emptyset$ para $n \neq m$ y, además, para cada $\epsilon > 0$ es

$$\alpha(\Omega) - \epsilon \ \leq \ \|x_n - x_m\| \ \leq \ \alpha(\Omega) + \epsilon$$

Se tiene entonces:

1) $\|x_n - x_m\| \ \leq \ \alpha(\Omega) + \epsilon$ lo que significa que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\frac{|x_n^k - x_m^k|}{\alpha(\Omega)+\epsilon}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\frac{|x_n^k|}{\alpha(\Omega)+\epsilon}\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\frac{|x_m^k|}{\alpha(\Omega)+\epsilon}\right) \leq 1$$

y esto implica que para $x = x_n$ ó $x = x_m$ ha de ser

$$\sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\frac{|x^k|}{\alpha(\Omega)+\epsilon}\right) \leq \frac{1}{2}$$

y, por el Lema 3.2.5,

$$\frac{\|x\|}{\alpha(\Omega)+\epsilon} \leq \frac{1}{a(1/2)} = \frac{1}{a_0}$$

lo que implica que

$$1 = \|x\| \leq \frac{\alpha(\Omega)+\epsilon}{a_0}$$

lo que nos garantiza que es $\alpha(\Omega) \geq a_0 - \epsilon$

2) $\alpha(\Omega) - \epsilon \ \leq \ \|x_n - x_m\|$ o lo que es lo mismo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\frac{|x_n^k - x_m^k|}{\alpha(\Omega)-\epsilon}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\frac{|x_n^k|}{\alpha(\Omega)-\epsilon}\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\frac{|x_m^k|}{\alpha(\Omega)-\epsilon}\right) \geq 1$$

y esto significa que para $x = x_n$ ó $x = x_m$ ha de ser

$$\sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\frac{|x^k|}{\alpha(\Omega)-\epsilon}\right) \geq \frac{1}{2}$$

y por lo tanto también por una desigualdad del Teorema 3.2.6

$$\sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\frac{|x^k|b}{\alpha(\Omega)-\epsilon}\right) \geq 1$$

de donde se sigue que

$$1 = \|x\| \geq \frac{\alpha(\Omega)-\epsilon}{b}$$

y de aquí es $\alpha(\Omega) \leq b+\epsilon$.

Por lo expuesto en 1) y 2), para todo $\epsilon > 0$ es $a_0 - \epsilon \leq \alpha(\Omega) \leq b+\epsilon$, cualquiera que sea el α-minimal $\Omega \subset U$ y, en consecuencia

$$a_0 \leq S(U) \leq b \quad \bullet$$

Ahora vamos a utilizar el resultado anterior para aportar alguna información sobre la constante λ cuya definición tomamos de **[Wl]**:

Definición 3.3.2. *Si X es un espacio de Banach, decimos que una colección de bolas $\{\overline{B}(x_j,r)\}$ está empaquetada en $\bar{U}$ si*

$$\|x_j\| \leq 1-r \ \forall j \quad y \quad \|x_j - x_k\| \geq 2r \ \ si \ \ j \neq k$$

El número de empaquetamiento de X, $\lambda(\bar{U})$ se define como

$$\sup\{r : \textit{un número infinito de bolas de radio } r \textit{ puede ser empaquetado en } \bar{U}\}$$

con $\lambda(\bar{U}) = 0$ en caso de ser imposible el empaquetamiento infinito.

Utilizaremos el siguiente resultado de Papini en **[Pa1]** (puede verse otra demostración en **[Zh1]**):

Lema 3.3.3. *Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces*

$$\lambda(\bar{U}) = \frac{S(\bar{U})}{2 + S(\bar{U})}$$

Corolario 3.3.4. *Si M es una función de Orlicz que cumple la Δ_2-condición en cero, se verifica que*

$$\frac{a_0}{2+b} \leq \lambda(U) \leq \frac{b}{2+a_0}$$

donde U es la bola unidad en h_M.

Demostración

Es inmediata a partir de los resultados anteriores, y es de observar que en el caso de los espacios ℓ_p ambas cotas son iguales al valor exacto de λ que aparece en [**Wl**].

3.4. Algunos casos particulares de espacios de Orlicz

Veremos a continuación que en determinadas condiciones de regularidad, las cotas anteriormente determinadas para los coeficientes de empaquetamiento de un espacio de Orlicz se alcazan y los coeficientes pueden ser calculados con exactitud.

Proposición 3.4.1. *Sea M una función de Orlicz que verifica la Δ_2-condición en cero, $\psi = M^{-1}$ y $F : (0,1] \to \mathbb{R}$ la función definida para todo $t \in (0,1]$ por $F(t) = \dfrac{\psi(t)}{\psi(t/2)}$. Si F es monótona, entonces*

$$\delta'(h_M) = \frac{2}{b} \quad , \quad \delta(h_M) = \frac{2}{a_0} \quad y \quad \gamma(h_M) = \frac{b}{a_0}$$

Demostración.

a) Supongamos que la función continua $F : (0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $F(t) = \frac{\psi(t)}{\psi(t/2)}$ es monótona creciente:
En ese caso es

$$\begin{aligned} a_0 &= \inf\{F(t) : t \in (0,1]\} \\ &= \lim_{t\to 0+} F(t) = \lim_{k\to+\infty} \frac{\psi(1/k)}{\psi(1/2k)} \end{aligned}$$

Consideremos para cada $k \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$A_k = \left\{ a_n : a_n = \sum_{j=1}^{k} e_{(n-1)k+j} \right\}$$

donde $\{e_n\}$ es la base canónica de h_M.

Ya que los elementos de A_k son equidistantes, A_k es α-minimal y además $\alpha(A_k) = \|a_n - a_m\|$ si $n \neq m$. Teniendo en cuenta que los vectores son de soporte disjunto, es fácil verificar que $\alpha(A_k) = \dfrac{1}{\psi(\frac{1}{2k})}$. También se puede comprobar sin dificultad que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $\|a_n\| = \dfrac{1}{\psi(\frac{1}{k})}$ por lo que se tiene que $\beta(A_k) \leq \dfrac{2}{\psi(\frac{1}{k})}$.

Pero si fuese $\beta(A_k) < \dfrac{2}{\psi(\frac{1}{k})}$, habría infinitos elementos de A_k en una bola de centro un $x \in h_M$ y radio s para algún $0 < s < \dfrac{1}{\psi(\frac{1}{k})}$ y para esos infinitos a_n sería

$$s > \|a_n - x\| =$$

$$= \inf\left\{ \rho > 0 : \sum_{h=(n-1)k+1}^{nk} M\left(\frac{|1-x^h|}{\rho}\right) + \sum_{h\neq(n-1)k+1,\cdots nk} M\left(\frac{|x^h|}{\rho}\right) \leq 1 \right\}$$

con lo que existiría para cada n un $\rho_n < s$ tal que

$$\sum_{h=(n-1)k+1}^{nk} M\left(\frac{|1-x^h|}{\rho_n}\right) \leq 1$$

y de aquí, para algún $h_n \in \{(n-1)k+1, \cdots, nk\}$ debería ser

$$M\left(\frac{|1-x^{h_n}|}{\rho_n}\right) \leq \frac{1}{k} \;\Leftrightarrow\; \frac{|1-x^{h_n}|}{\rho_n} \leq \psi(\frac{1}{k}) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{h_n} \geq 1 - \rho_n \psi(\frac{1}{k}) > 1 - s\psi(\frac{1}{k}) > 0$$

y esto para infinitas componentes distintas x^{h_n} de x, con lo que la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} M\left(\frac{|x^k|}{\rho}\right)$ no converge y $x \notin h_M$ lo que es absurdo.

Es, por lo tanto, $\beta(A_k) = \dfrac{2}{\psi(\frac{1}{k})}$ y como $k \in \mathbb{N}$ es cualquiera,

$$\delta \leq \frac{2}{a_0} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2\psi(1/2k)}{\psi(1/k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\beta(A_k)}{\alpha(A_k)} \leq \delta$$

y así

$$\delta = \frac{2}{a_0} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2\psi(1/2k)}{\psi(1/k)}.$$

Por otra parte, $b = \sup\{F(t) : t \in (0,1]\} = F(1) = 1/\psi(\frac{1}{2})$, pero como es $\dfrac{\beta(A_1)}{\alpha(A_1)} = 2\psi(\dfrac{1}{2})$, obtenemos que

$$\delta' \geq \frac{2}{b} = 2\psi(\frac{1}{2}) = \frac{\beta(A_1)}{\alpha(A_1)} \geq \delta'$$

y, en consecuencia,

$$\delta' = \frac{2}{b} = 2\psi(\frac{1}{2}).$$

Finalmente, es claro que

$$\gamma(h_M) = \frac{b}{a} = \frac{1}{\psi(\frac{1}{2})} \lim_{k\to\infty} \frac{\psi(\frac{1}{2k})}{\psi(\frac{1}{k})}.$$

b) Si F es monótona decreciente, con los mismos argumentos que en el apartado anterior, será en este caso

$$a_0 = \frac{1}{\psi(\frac{1}{2})} \quad \text{y} \quad b = \lim_{k\to\infty} \frac{\psi(\frac{1}{k})}{\psi(\frac{1}{2k})}$$

con lo que

$$\delta' = \frac{2}{b} = 2 \lim_{k\to\infty} \frac{\psi(\frac{1}{2k})}{\psi(\frac{1}{k})} \quad , \quad \delta = \frac{2}{a_0} = 2\psi(\frac{1}{2})$$

$$\gamma(h_M) = \frac{b}{a} = \psi(\frac{1}{2}) \lim_{k\to\infty} \frac{\psi(\frac{1}{k})}{\psi(\frac{1}{2k})} \quad \bullet$$

Nota 3.4.2.

Si para algún $p \in [1, +\infty)$ es $M(x)$ equivalente en el origen a x^p, entonces es $\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(\frac{1}{k})}{\psi(\frac{1}{2k})} = 2^{\frac{1}{p}}$, y las expresiones para los coeficientes resultan ser:

a) Si F es creciente: $\delta = 2^{1-\frac{1}{p}}$ y $\gamma(h_M) = \frac{1}{2^{\frac{1}{p}}\psi(\frac{1}{2})}$.

b) Si F es decreciente: $\delta' = 2^{1-\frac{1}{p}}$ y $\gamma(h_M) = 2^{\frac{1}{p}}\psi(\frac{1}{2})$.

Ejemplos 3.4.3.

1) Para la función de Orlicz

$$M(x) = \frac{\sqrt{1+x^p}-1}{\sqrt{2}-1} \qquad p \geq 2$$

es $M(x) \sim x^p$ en el origen, $F(t)$ estrictamente creciente en $(0,1]$ y se tiene:

$$\delta' = 2^{1-\frac{2}{p}}(2\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{p}}\,; \quad \delta = 2^{1-\frac{1}{p}}\,; \quad \text{y} \quad \gamma(h_M) = \left(\frac{2}{2\sqrt{2}-1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

2) Para la función de Orlicz $M(x) = \frac{e^{x^p}-1}{e-1}$ con $p \in [1, +\infty)$, es $M(x) \sim x^p$ en el origen y $F(t) = \left(\frac{L[1+(e-1)t]}{L[1+(e-1)\frac{t}{2}]}\right)^{\frac{1}{p}}$ decreciente en $(0,1]$, con lo que es

$$\delta' = 2^{1-\frac{1}{p}}\,; \ \delta = 2\left(L(\frac{e+1}{2})\right)^{\frac{1}{p}} \ \text{ y } \ \gamma(h_M) = 2^{\frac{1}{p}}\left(L(\frac{e+1}{2})\right)^{\frac{1}{p}}$$

3) Para la función de Orlicz $M(x) = \frac{x^p(1+x^p)}{2}$ con $p \in [1, +\infty)$, equivalente a x^p en el origen es $F(t) = \left(\frac{\sqrt{1+8t}-1}{\sqrt{1+4t}-1}\right)^{\frac{1}{p}}$ decreciente en $(0,1]$, y se tiene:

$$\delta' = 2^{1-\frac{1}{p}}\ ; \ \delta = 2^{1-\frac{1}{p}}(\sqrt{5}-1)^{\frac{1}{p}}\,; \ \text{ y } \ \gamma(h_M) = (\sqrt{5}-1)^{\frac{1}{p}}$$

Nota 3.4.4.

Ya que imponer la condición de monotonía a la función $F(t)$ puede parecer muy restrictivo, veremos a continuación que con una condición más débil para M al menos uno de los valores δ ó δ' es alcanzado en el punto 1.

En efecto:

a) Si $\forall x \in (0,1]$ es $M[\psi(\frac{1}{2})x] \leq \frac{1}{2}M(x)$, entonces haciendo $M(x) = t$ o lo que es equivalente $x = \psi(t)$ si $0 < t \leq 1$ la desigualdad anterior conduce a que

$$\psi(\frac{1}{2})\psi(t) \leq \psi(t/2) \Leftrightarrow \frac{\psi(t)}{\psi(t/2)} \leq \frac{1}{\psi(1/2)} \quad \forall t \in (0,1]$$

con lo que nuevamente es

$$b = \frac{1}{\psi(1/2)} \quad \text{y} \quad \delta'(h_M) = 2\psi(1/2)$$

b) Si $\forall x \in (0,1]$ es $M[\psi(\frac{1}{2})x] \geq \frac{1}{2}M(x)$, entonces se obtiene que:

$$\psi(\frac{1}{2})\psi(t) \geq \psi(t/2) \Leftrightarrow \frac{\psi(t)}{\psi(t/2)} \geq \frac{1}{\psi(1/2)} \quad \forall t \in (0,1]$$

de donde se deduce que

$$a_0 = \frac{1}{\psi(1/2)} \quad \text{y} \quad \delta(h_M) = 2\psi(1/2)$$

3.5. Operadores lineales en espacios de Orlicz de sucesiones

Hemos probado anteriormente que cuando h_M es un espacio de Orlicz con M no degenerada y verificando la Δ_2-condición en cero, si $T : D \subset h_M \to h_M$ es una aplicación continua se verifica que:

$$\frac{a_0}{2}\alpha(T) \leq \beta(T) \leq \frac{b}{a_0}\alpha(T)$$

En el caso de ser T lineal, Nussbaum probó en **[Nu1]** el siguiente resultado:

Lema 3.5.1. *Si X e Y son espacios de Banach, y $T : X \to Y$ es un operador lineal, se verifica que* $\alpha(T^*) \leq \beta(T)$ *y* $\alpha(T) \leq \beta(T^*)$.

Veremos a continuación que, utilizando algunos conceptos y resultados nuevos, podemos aportar otras desigualdades en el caso de los espacios de Orlicz cuando la aplicación T es lineal.

En **[Ak]** y **[Zh2]** se define la β-medida interior de un conjunto acotado C de un espacio de Banach X como

$$\beta_C(C) = \inf\{2r : C \text{ puede ser recubierto por un número finito de bolas de centros en C y radio } < r\}$$

Hagamos notar que si bien esta medida resulta verificar otras axiomáticas propuestas para una medida de no compacidad, no es así en el caso de la que nosotros utilizamos en el presente trabajo. Signifiquemos que para tener "buenas" propiedades es necesario exigir a C que sea cerrado y convexo. En particular, la medida β_C no es monótona.

No obstante lo dicho anteriormente, la medida interior es de gran utilidad y algunas de sus propiedades son expuestas en el siguiente

Lema 3.5.2.[Zh2] *Sea X un espacio de Banach, C un subconjunto acotado, cerrado y convexo de X, $x \in X$, $a > 0$, $A \subset C$, y $B \subset C$. Se verifican las siguientes propiedades:*

1) $\beta_{aC}(aC) = a\beta_C(C)$, $\beta_{x+C}(x + C) = \beta_C(C)$.
2) $\beta_C(A) = 0$ *si y sólo si A es precompacto.*
3) Si $A \subset B$, entonces $\beta_C(A) \leq \beta_C(B)$.
4) $\beta_C(\bar{A}) = \beta_C(A)$.
5) $\beta_C(A \cup B) = \text{máx } \{\beta_C(A), \beta_C(B)\}$.
6) Para cualquier $\lambda : 0 < \lambda < 1$, $\beta_C(\lambda A + (1 - \lambda)B) \leq \lambda\beta_C(A) + (1 - \lambda)\beta_C(B)$

7) $\beta_C(\overline{co}A) = \beta_C(A)$

Nos será útil el siguiente Lema que fué probado por Zhao en [**Zh2**]

Lema 3.5.3. *Sea X un espacio normado, C un subconjunto cerrado, acotado y convexo de X con $\beta_C(C) = 2a > 0$. Entonces, para todo $r : 0 < r < a$, existe una sucesión $\{x_n\} \subset C$ tal que $\beta_D(D) \geq 2r$, donde $D = \overline{co}\{x_n\}$.*

A partir de la medida interior, Zhao define para un espacio de Banach X el coeficiente:

$$R_\beta(X) = \sup \left\{ \frac{\beta_C(C)}{2} : C \subset \bar{B}(0,1), C \text{ cerrado y convexo} \right\}$$

El siguiente Teorema, probado en [**Zh 2**] pone de relieve la utilidad de este coeficiente para establecer relaciones entre los valores $\alpha(T)$ y $\beta(T)$ en el caso de ser T un operador lineal

Teorema 3.5.4. *Si X es un espacio de Banach y T es un operador lineal $T : X \longrightarrow X$, se tiene que $\beta(T) \leq R_\beta(X)\beta(T^*)$ y $\beta(T^*) \leq R_\beta(X^*)\beta(T)$.*

Pues bien, en relación al coeficiente R_β para un espacio de Orlicz de sucesiones, probaremos ahora el siguiente:

Teorema 3.5.5. *Si M es una función de Orlicz no degenerada verificando la Δ_2-condición en cero, entonces $R_\beta(h_M) = 1$.*

Demostración.

Vamos a probar que para cualquier subconjunto $C \subseteq \bar{B}(0,1)$, C cerrado y convexo es $\beta_C(C) \leq 2$.

Llamemos $\beta_C(C) = 2a > 0$. Según el Lema 3.5.3 de Zhao, para todo r , $0 < r < a$, existe una sucesión $\{x_n\} \subseteq C$ tal que $\beta_D(D) \geq 2r$, siendo $D = \overline{co}\{x_n\}$.

Por el Lema 2.2.7, existe $A \subset D$ β-minimal y tal que $\beta_D(D) = \beta_D(A)$ ya que el espacio es separable y, por la misma razón, podemos suponer que $A = \{z_n\}$ con $z_n \neq z_m$ si $n \neq m$. Tomando subsucesiones si es necesario, podemos asumir además que $\{z_n^k\} \to z^k$ $\forall k \in \mathbb{N}$ y que $\lim_n \|z_n - z\|$ existe para $z = (z^k) \in h_M$.

Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} 2r &\leq \beta_D(D) = \beta_D(A) \\ &= \beta_D(\{z_n\}) \leq 2 \lim_n \|z_n - z\| \end{aligned}$$

y, por el Lema 3.2.7, también

$$2 \lim_n \|z_n - z\| \leq 2 \lim_n \|z_n\| \leq 2$$

por lo que ha de ser $r \leq 1$. Como $r < a$ era arbitrario, haciendo $r \to a$ se obtiene que $a \leq 1$, o sea que $\beta_C(C) \leq 2$ y, en consecuencia es $R_\beta(h_M) = 1$ como se pretendía. •

Corolario 3.5.6. *Si M es una función de Orlicz que cumple la Δ_2-condición en cero, y $T : h_M \to h_M$ es un operador lineal, se verifica que*

$$\alpha(T^*) \leq \beta(T) \leq \beta(T^*)$$

Demostración.

La primera desigualdad es debida a Nussbaum, y la segunda es consecuencia de los Teoremas 3.5.4 y 3.5.5. •

Corolario 3.5.7. *Si, en las condiciones del corolario anterior, M^* también verifica la Δ_2-condición en 0, se tiene :*

$$\alpha(T) \overset{(1)}{\leq} \beta(T^*) \overset{(2)}{=} \beta(T) \overset{(3)}{\leq} \frac{b}{a_0} \alpha(T)$$

$$\alpha(T^*) \overset{(4)}{\leq} \beta(T) \overset{(5)}{=} \beta(T^*) \overset{(6)}{\leq} \frac{b^*}{a_0^*} \alpha(T^*)$$

Demostración.

(1) es el resultado de Nussbaum.

(2) por el corolario anterior y el hecho de ser $R_\beta(h_M^*) = 1$.

(3) y (6) por el Corolario 3.2.11 de este capítulo.

(4) y (5) son los resultados del Corolario anterior.

Nota 3.5.8.

Es de observar que si M y M^* verifican la Δ_2-condición en 0, las desigualdades probadas en general

$$\alpha(T) \leq \frac{2}{a_0}\beta(T) \qquad \text{y} \qquad \alpha(T^*) \leq \frac{2}{a_0^*}\beta(T^*)$$

resultan ser en el caso lineal bastante mejores, ya que en ese caso es

$$\alpha(T) \leq \beta(T) \qquad \text{y} \qquad \alpha(T^*) \leq \beta(T^*)$$

no obteniéndose sin embargo ningún refinamiento para las desigualdades del otro signo.

4. Coeficientes de empaquetamiento en espacios suma directa

En este capítulo, trataremos el problema de estimar los valores de los coeficientes de empaquetamiento δ , δ' y γ en algunos espacios de Banach que proceden de un producto, finito o infinito, de espacios para los que se conocen dichos coeficientes. Este tipo de problemas, para otros coeficientes, ha sido estudiado en **[La1]**, **[La2]**, **[Kot]** y **[DB4]**.

Trataremos en primer lugar el caso, más simple, de un número finito de espacios, cuando la norma en el espacio suma directa proviene de cualquier norma monótona en $\mathbb{R}^k$. Posteriormente veremos el caso, más complejo, de ser lo que se denomina ℓ_p-suma de un número infinito de espacios. En ambas situaciones supondremos que los espacios factores son separables.

4.1. Suma directa de un número finito de espacios

Recordemos que una norma en $\mathbb{R}^k$ se dice monótona si

$$|(a_1, \cdots, a_k)| \leq |(b_1, \cdots, b_k)|$$

cuando $0 \leq a_i \leq b_i$ para todo $i = 1, \cdots, k$. Esta condición se verifica en particular si la norma es simétrica, es decir, si

$$|(a_1, \cdots, a_k)| = |(\epsilon_1 a_1, \cdots, \epsilon_k a_k)|$$

con $\epsilon_i = \pm 1$ para $i = 1, \cdots, k$. Este es el caso, por ejemplo, de las p-normas o de las normas de Orlicz.

Necesitaremos el siguiente resultado cuya demostración puede ser hecha de forma directa:

Lema 4.1.1. *Si $X_1, \cdots, X_k$ son espacios de Banach separables y $|\ \ |$ es una norma monótona en $\mathbb{R}^k$, el conjunto $X_1 \oplus \cdots \oplus X_k$ con la norma definida para todo $(x_1, \cdots, x_k) \in X_1 \oplus \cdots \oplus X_k$ por*

$$\|(x_1, \cdots, x_k)\| = |(\|x_1\|, \cdots, \|x_k\|)|$$

es un espacio de Banach separable.

La importancia del siguiente lema es evidente, ya que permitirá relacionar, a través de la norma, la medida de un conjunto α-minimal en el espacio suma directa con las medidas de sus proyecciones sobre los espacios factores:

Lema 4.1.2. *Si $X_1, \cdots, X_k$ son espacios de Banach separables, $|\ \ |$ una norma monótona en $\mathbb{R}^k$, $X_1 \oplus \cdots \oplus X_k$ es el espacio suma directa con la norma definida en el Lema anterior y A es un conjunto α-minimal en $X_1 \oplus \cdots \oplus X_k$ con proyecciones A_i $(i = 1, \cdots, k)$ α-minimales y β-minimales o finitas sobre los espacios factores, se tiene que*

$$\alpha(A) = |(\alpha(A_1), \cdots, \alpha(A_k))| \quad y \quad \beta(A) = |(\beta(A_1), \cdots, \beta(A_k))|$$

Demostración.

Para simplificar, designaremos al vector $(x(1), \cdots, x(k))$ por $(x(i))$.
Ya que, según el Lema anterior, $X_1 \oplus \cdots \oplus X_k$ es separable, como conjuntos α-minimales podemos tomar sucesiones $A = \{x_n\} = \{(x_n(i))\}$ cuyas proyecciones $A_i = \{x_n(i)\}$ para $i = 1, \cdots, k$ son, desde luego, finitas o α-minimales. Si algún A_i es finito, tomando otra vez una subsucesión de A, podemos suponer que es unitario.

Por el Lema 2.2.6, podemos asumir nuevamente pasando a subsucesiones de un minimal, que

$$\lim_{n,m\ n \neq m} \|(x_n(i)), -(x_m(i))\| = \alpha(A)$$

y que

$$\lim_{n,m\ n \neq m} \|x_n(i) - x_m(i)\| = \alpha(A_i) \qquad \text{para } i = 1, \cdots, k$$

De las anteriores condiciones, dado $\epsilon > 0$ arbitrario, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que siendo $n > n_0$, $m > n_0$ y $m \neq n$, se tiene que

$$\begin{aligned}\alpha(A) - \epsilon &\leq \|(x_n(i)) - (x_m(i))\| \\ &= |(\|x_n(i) - x_m(i)\|)| \leq |(\alpha(A_i) + \epsilon)|\end{aligned}$$

ya que la norma $|\ |$ es monótona.

Pero, considerando que por la desigualdad triangular es

$$|(\alpha(A_i) + \epsilon)| \leq |(\alpha(A_i))| + |(\epsilon)| = |(\alpha(A_i))| + \epsilon|(1)|$$

se tiene que

$$\alpha(A) \leq |(\alpha(A_i))| + \epsilon[1 + |(1)|]$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}\alpha(A) + \epsilon &\geq \|(x_n(i)) - (x_m(i))\| \\ &= |(\|x_n(i) - x_m(i)\|)| \geq |(\alpha(A_i) - \epsilon)|\end{aligned}$$

ya que la norma $|\ |$ es monótona.
De nuevo por la desigualdad triangular

$$|(\alpha(A_i) - \epsilon)| \geq |(\alpha(A_i))| - |(\epsilon)| = |(\alpha(A_i))| - \epsilon|(1)|$$

por lo que

$$\alpha(A) \geq |(\alpha(A_i))| - \epsilon[1 + |(1)|]$$

Por último, de ambas desigualdades y teniendo en cuenta la arbitrariedad de $\epsilon > 0$ se deduce que:

$$\alpha(A) = |(\alpha(A_i))|$$

Esta fórmula es claramente válida si algunos de los A_i son conjuntos unitarios.

En cuanto a la β-medida, teniendo en cuenta el hecho de que ésta es estrictamente minimalizante en cualquier espacio separable (Lema 2.2.7), sin más que tomar subsucesiones podemos suponer que A es β-minimal y, por lo tanto, según la Nota 2.2.12, dado $\delta > 0$ existe $v_\delta(i) \in X_i$ para cada $i = 1, \cdots, k$ de forma que para infinitos x_n es

$$\frac{\beta(A_i)}{2} - \delta \leq \|x_n(i) - v_\delta(i)\| \leq \frac{\beta(A_i)}{2} + \delta \quad \text{para} \quad i = 1, \cdots, k.$$

Como consecuencia

$$\begin{aligned} \|\Big(x_n(i)\Big) - \Big(v_\delta(i)\Big)\| &= |(\|x_n(i) - v_\delta(i)\|)| \\ &\leq |\Big(\frac{\beta(A_i)}{2} + \delta\Big)| \\ &\leq |\Big(\frac{\beta(A_i)}{2}\Big)| + |(\delta)| = \frac{1}{2}|(\beta(A_i))| + \delta|(1)| \end{aligned}$$

lo que significa que

$$\beta(A) \leq |(\beta(A_i))| + 2\delta|(1)|$$

y, puesto que $\delta > 0$ es arbitrario, se deduce que

$$\beta(A) \leq |(\beta(A_i))|$$

Pero, por otra parte, si fuese $\beta(A) < |(\beta(A_i))|$, para algún s tal que $\beta(A) < 2s < |(\beta(A_i))|$, algún $\Big(w(i)\Big) \in X_1 \oplus \cdots \oplus X_k$ e infinitos $\Big(x_n(i)\Big) \in A$ se tendría que

$$s > \|(x_n(i)) - (w(i))\| = |(\|x_n(i) - w(i)\|)|$$

sin embargo, ya que por la minimalidad de los A_i, excepto para un número finito de x_n ha de ser $\|x_n(i) - w(i)\| \geq \dfrac{\beta(A_i)}{2}$, se tiene que

$$|(\|x_n(i) - w(i)\|)| \geq |\left(\frac{\beta(A_i)}{2}\right)| = \frac{1}{2}|(\beta(A_i))| > s$$

lo que es una contradicción.

Como consecuencia,

$$\beta(A) = |(\beta(A_i))|$$

como se pretendía probar.

De nuevo, es evidente que la expresión es válida trivialmente si algunos de los A_i son unitarios. •

Ejemplos 4.1.3. 1) Si la norma en $\mathbb{R}^k$ está definida a partir de una función de Orlicz M (véase el capítulo anterior), y μ designa a cualquiera de las medidas de no compacidad α o β, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{k} M\left(\frac{\mu(A_i)}{\mu(A)}\right) = 1$$

En particular, si es $M(t) = t^p$, para $1 \leq p < +\infty$, entonces

$$\mu^p(A) = \mu^p(A_1) + \cdots + \mu^p(A_k)$$

2) Si la norma en $\mathbb{R}^k$ es la norma del máximo, entonces es

$$\mu(A) = \text{máx}\{\mu(A_i) : i = 1, \cdots, k\}$$

Determinamos ahora el valor de los coeficientes de empaquetamiento del espacio producto en el siguiente

Teorema 4.1.4. *Si $X_1, \cdots, X_k$ son espacios de Banach separables, $|\ \ |$ una norma monótona en $\mathbb{R}^k$ y $X_1 \oplus \cdots \oplus X_k$ es el espacio suma directa con la norma inducida, se verifica que*

$$\delta'(X_1 \oplus \cdots \oplus X_k) = \min\{\delta'(X_1), \cdots, \delta'(X_k)\}$$

$$\delta(X_1 \oplus \cdots \oplus X_k) = \max\{\delta(X_1), \cdots, \delta(X_k)\}$$

y, por tanto

$$\gamma(X_1 \oplus \cdots \oplus X_k) = \frac{\max\{\delta(X_1), \cdots, \delta(X_k)\}}{\min\{\delta'(X_1), \cdots, \delta'(X_k)\}}$$

Demostración:

Sea A un conjunto α-minimal en $X_1 \oplus \cdots \oplus X_k$ que, sin más que tomar subsucesiones, podemos suponer con proyecciones α-minimales y β-minimales o unitarias A_i sobre X_i para $i = 1, \cdots, k$.
De las definiciones de los coeficientes δ y δ' se tiene que

$$\delta'(X_i).\alpha(A_i) \leq \beta(A_i) \leq \delta(X_i).\alpha(A_i) \quad \text{para } i = 1, \cdots, k$$

para cualquier minimal A_i en X_i $(i = 1, \cdots, k)$.
Por otra parte, si aplicamos el resultado del Lema anterior y la monotonía de la norma, es

$$\begin{aligned} \frac{\beta(A)}{\alpha(A)} &= \frac{|(\beta(A_1), \cdots, \beta(A_k))|}{|(\alpha(A_1), \cdots, \alpha(A_k))|} \\ &\leq \frac{|(\delta(X_1)\alpha(A_1), \cdots, \delta(X_k)\alpha(A_k))|}{|(\alpha(A_1), \cdots, \alpha(A_k))|} \leq \max\{\delta(X_1), \cdots, \delta(X_k)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta(A)}{\alpha(A)} &= \frac{|(\beta(A_1), \cdots, \beta(A_k))|}{|(\alpha(A_1), \cdots, \alpha(A_k))|} \\ &\geq \frac{|(\delta'(X_1)\alpha(A_1), \cdots, \delta'(X_k)\alpha(A_k))|}{|(\alpha(A_1), \cdots, \alpha(A_k))|} \geq \min\{\delta'(X_1), \cdots, \delta'(X_k)\} \end{aligned}$$

Como consecuencia inmediata se deducen las desigualdades,

$$\begin{aligned} \min\{\delta'(X_1), \cdots, \delta'(X_k)\} &\leq \delta'(X_1 \oplus \cdots \oplus X_k) \\ \delta(X_1 \oplus \cdots \oplus X_k) &\leq \max\{\delta(X_1), \cdots, \delta(X_k)\} \end{aligned}$$

Que las desigualdades contrarias se verifican es inmediato si tenemos en cuenta que para cada α-minimal $A_i = \{x_n(i)\}$ en X_i, el conjunto $\{(x_n(i)e_i)\}$, donde e_i es el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^k$, es α-minimal en X.

Por todo lo expuesto anteriormente, se verifica finalmente que

$$\gamma(X_1 \oplus \cdots \oplus X_k) = \frac{\max\{\delta(X_1), \cdots, \delta(X_k)\}}{\min\{\delta'(X_1), \cdots, \delta'(X_k)\}} \quad \bullet$$

<u>Notas 4.1.5.</u> 1) Observemos que el resultado obtenido nos permite asegurar que los coeficientes de empaquetamiento en el espacio suma directa son independientes de la norma monótona en $\mathbb{R}^k$ a través de la cual se define la suya.

2) Ya que para todo $i = 1, \cdots, k$ es

$$\gamma(X_1 \oplus \cdots \oplus X_k) \geq \frac{\delta(X_i)}{\delta'(X_i)} = \gamma(X_i).$$

se deduce que el empaquetamiento en el espacio suma directa es, en general, peor que en los espacios factores.

Abundando en lo anterior, aunque todos los X_i sean bien empaquetados, no tiene por qué serlo $X_1 \oplus \cdots \oplus X_k$, como ocurre si consideramos, por ejemplo, $\ell^1 \oplus \cdots \oplus \ell^k$ para el que se tiene que $\gamma(\ell^i) = 1$ para todo $i = 1, \cdots, k$ y sin embargo es

$$\gamma(\ell^1 \oplus \cdots \oplus \ell^k) = 2^{1-\frac{1}{k}}$$

Del ejemplo anterior, haciendo variar k en $\mathbb{N}$, se obtienen ejemplos de espacios con empaquetamiento "tan malo" como se quiera.

3) Será $\gamma(X_1 \oplus \cdots \oplus X_k) = 1$ si y sólo si

$$\max\{\delta(X_1), \cdots, \delta(X_k)\} = \min\{\delta'(X_1), \cdots, \delta'(X_k)\}$$

pero eso significa que para cada $i = 1, \cdots, k$ debe ser

$$\begin{aligned}\delta(X_i) &\leq \max\{\delta(X_1), \cdots, \delta(X_k)\} \\ &= \min\{\delta'(X_1), \cdots, \delta'(X_k)\} \leq \delta'(X_i)\end{aligned}$$

lo que exige que sea $\delta'(X_i) = \delta(X_i)$ y, por coincidir el máximo y el mínimo del conjunto, han de ser todos los $\delta(X_i)$ iguales, lo que significa que los X_i deben verificar la β-propiedad (ver **[DB2]**) y todos ellos con la misma constante.

4.2. Suma directa de un número infinito de espacios

En esta sección, vamos a estudiar los coeficientes de empaquetamiento cuando se trata de la suma directa de un número infinito de espacios de Banach.

Aunque el problema puede ser abordado para una norma monótona cualquiera en el espacio de partida, nosotros sólo hemos obtenido resultados positivos para el caso de ser lo que se denomina ℓ^p-suma de espacios con $1 \leq p < \infty$. Aún en el caso de ser $p = \infty$ desconocemos el comportamiento, por cuanto que en tal situación el espacio resultante no es separable y este hecho motiva que no le son de aplicación las herramientas desarrolladas a lo largo del presente trabajo.

Adelantaremos que, al contrario de lo que hemos visto en el caso finito, en esta ocasión los coeficientes de empaquetamiento del espacio suma directa se ven afectados por la p-norma en él definida. Más claramente, en el cómputo de los coeficientes del espacio suma intervienen los coeficientes del espacio ℓ^p.

<u>Teorema y Definición 4.2.1.</u> *Sea $\{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de espacios de Banach y $1 \leq p < +\infty$. El conjunto*

$$\bigoplus_p X_k = \left\{ \bar{x} = \big(x(k)\big) : x(k) \in X_k \ \wedge \ \sum_{k=1}^{+\infty} \|x(k)\|^p < +\infty \right\} \subset \prod_{k=1}^{+\infty} X_k$$

con la norma definida por

$$\|\bar{x}\|^p = \sum_{k=1}^{+\infty} \|x(k)\|^p$$

resulta ser un espacio de Banach al que se denomina ℓ_p-suma de los espacios X_k.

En lo que sigue abordaremos el problema de evaluar los coeficientes

$$\delta'(\bigoplus_p X_k), \qquad \delta(\bigoplus_p X_k) \quad \text{y} \quad \gamma(\bigoplus_p X_k)$$

conocidos los correspondientes coeficientes en X_k para todo $k \in \mathbb{N}$.

Será de utilidad el siguiente resultado, cuya demostración puede ser hecha de forma directa usando la separabilidad de ℓ^p para $1 \leq p < +\infty$:

<u>Lema 4.2.2.</u> *Si $\{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de espacios de Banach separables y $1 \leq p < +\infty$, entonces $\bigoplus_p X_k$ es un espacio de Banach separable.*

Ya que para el cálculo de δ' y δ es necesario trabajar con conjuntos minimales, a continuación prepararemos el camino simplificando en lo posible las características de éstos:

Definición 4.2.3. *Sea A un subconjunto de $\bigoplus_p X_k$, donde $\{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de espacios de Banach, y $1 \leq p < \infty$.*

Decimos que A es un conjunto $\alpha\beta$-regular (o simplemente, regular) si verifica las condiciones siguientes:

1) A es numerable, $A = \{\bar{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$.

2) A es α-minimal y β-minimal.

3) Para todo $k \in \mathbb{N}$, la proyección A_k de A sobre X_k es α-minimal y β-minimal, o bien un conjunto unitario.

4) Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n,m\ n\neq m} \|x_n(k) - x_m(k)\| = \alpha(A_k)$ y para todo $\epsilon > 0$, existe $v_\epsilon(k) \in X_k$ tal que $\dfrac{\beta(A_k)}{2} - \dfrac{\epsilon}{2^k} \leq \|x_n(k) - v_\epsilon(k)\| \leq \dfrac{\beta(A_k)}{2} + \dfrac{\epsilon}{2^k}$ para $n \geq k$.

Probamos ahora la existencia de conjuntos regulares

Teorema 4.2.4. *Si $\{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de espacios de Banach separables, para cada subconjunto A de $\bigoplus_p X_k$, $(1 \leq p < +\infty)$ que sea α-minimal existe un subconjunto infinito A_0 de A tal que A_0 es regular y $\beta(A_0) = \beta(A)$.*

Demostración.

1) Por ser X_k separable $\forall k \in \mathbb{N}$, por el Lema 4.2.2 anterior, también es $\bigoplus_p X_k$ separable y, por lo tanto, como conjuntos α-minimales siempre podemos utilizar sucesiones $A = \{\bar{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$.

2) Por ser la medida β estrictamente minimalizante en espacios separables, sin más que tomar un subconjunto, podemos asumir que A es β-minimal.

3) y 4) Si designamos por A_k la proyección de A sobre X_k, tomando subsucesiones y formando la sucesión diagonal, podemos conseguir que los A_k sean finitos o α-minimales y β-minimales. Además:
Dado $\epsilon > 0$ arbitrario, sea $\{\bar{x}_{1,n}\}$ una subsucesión de $A = \{\bar{x}_n\}$ tal que

$$\lim_{n,m\ n\neq m} \|x_{1,n}(1) - x_{1,m}(1)\| = \alpha(A_1)$$

y

$$\frac{\beta(A_1)}{2} - \frac{\epsilon}{2} \leq \|x_{1,n}(1) - v_\epsilon(1)\| \leq \frac{\beta(A_1)}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

con $v_\epsilon(1) \in X_1$. Dicha subsucesión así como el vector $v_\epsilon(1)$ existen en virtud de los Lemas 2.2.6 y 2.2.11.

Reiteramos este proceso de forma que, construida la sucesión $\{\bar{x}_{k-1,n}\}$, elegimos una subsucesión suya $\{\bar{x}_{k,n}\}$ verificando que

$$\lim_{n,m \; n \neq m} \|x_{k,n}(k) - x_{k,m}(k)\| = \alpha(A_k)$$

y también

$$\frac{\beta(A_k)}{2} - \frac{\epsilon}{2^k} \leq \|x_{k,n}(k) - v_\epsilon(k)\| \leq \frac{\beta(A_k)}{2} + \frac{\epsilon}{2^k}$$

para algún $v_\epsilon(k) \in X_k$

La sucesión diagonal $A_0 = \{\bar{x}_{n,n} : n \in \mathbb{N}\}$ es subsucesión de A, y también de $\{\bar{x}_{k,n}\}$ para $k \leq n$, y verifica las condiciones requeridas. •

Antes de abordar el problema principal, necesitaremos unos resultados previos de carácter instrumental:

Lema 4.2.5. *Si A es un conjunto regular en $\bigoplus_p X_k$ $(1 \leq p < +\infty)$ y para todo $k \in \mathbb{N}$, A_k es la proyección de A sobre X_k, las series*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha^p(A_k) \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \beta^p(A_k)$$

son convergentes.

Demostración.

a) Para probar que $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha^p(A_k)$ es convergente, al ser una serie de términos no negativos, bastará demostrar que está acotada:

En efecto, para cualquier $\epsilon > 0$ es $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha^p(A_k) < \alpha^p(A) + \epsilon$, ya que si no fuera así existiría $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=1}^{k_0} \alpha^p(A_k) \geq \alpha^p(A) + \epsilon$, pero como A es regular, podríamos tomar n y m suficientemente grandes de forma que para $k = 1, 2, ..., k_0$ se tuviese que

$$\alpha^p(A_k) - \frac{\epsilon}{2^{k+1}} \leq \|x_n(k) - x_m(k)\|^p \leq \alpha^p(A_k) + \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$$

con lo que

$$\begin{aligned}\|\bar{x}_n - \bar{x}_m\|^p &\geq \sum_{k=1}^{k_0} \|x_n(k) - x_m(k)\|^p \\ &\geq \sum_{k=1}^{k_0} \left[\alpha^p(A_k) - \frac{\epsilon}{2^{k+1}}\right] \\ &> \sum_{k=1}^{k_0} \alpha^p(A_k) - \frac{\epsilon}{2} \geq \alpha^p(A) + \frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

y esto estaría en contradicción con el hecho de que para cualquier A regular, se tiene que $\lim\limits_{n,m;n\neq m} \|\bar{x}_n - \bar{x}_m\| = \alpha(A)$.

La convergencia de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \beta^p(A_k)$ se deduce de la desigualdad

$$\beta(A_k) \leq 2\alpha(A_k) \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

que es válida para cualquier conjunto acotado. •

A continuación veremos una desigualdad algebraica que nos servirá para demostrar el próximo resultado.

<u>Lema 4.2.6.</u> *Sea* $1 \leq p < +\infty$ *y* $b > 0$ *arbitrario. Si* $a > 0$ *y* $x > 0$ *es*

$$(a + x)^p \leq a^p(1 + b)^p + \left(\frac{1}{b} + 1\right)^p x^p$$

Demostración.

- Si $a \leq \frac{x}{b}$, se tiene que

$$\begin{aligned}(a + x)^p &\leq \left(\frac{x}{b} + x\right)^p \\ &= x^p \left(\frac{1}{b} + 1\right)^p \leq a^p(1 + b)^p + \left(\frac{1}{b} + 1\right)^p x^p\end{aligned}$$

- Si $a \geq \frac{x}{b}$, entonces

$$\begin{aligned}(a+x)^p &\leq (a+ab)^p \\ &= a^p(1+b)^p \leq a^p(1+b)^p + \left(\frac{1}{b}+1\right)^p x^p \quad \bullet\end{aligned}$$

Vamos a probar ahora un hecho importante que intuitivamente podría enunciarse así: considerando espacios separables, un vector cuyas componentes sean "buenos" centros paras las bolas en los espacios X_k, pertenece al espacio suma directa de los mismos y, además, es "buen" centro para las bolas en dicho espacio.

Lema 4.2.7. *Sea $\{\bar{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión acotada en $\bigoplus_p X_k$, $1 \leq p < +\infty$, tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $\lim_n \|x_n(k) - z\| = \phi_k(z)$ cualquiera que sea $z \in X_k$. Designemos, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k = \inf\{\phi_k(z) : z \in X_k\}$ y para cada $\epsilon > 0$, sea $v_\epsilon(k) \in X_k$ tal que $\phi_k^p(v_\epsilon(k)) - \alpha_k^p < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$.*

Entonces se verifica:

a) $\bar{v}_\epsilon = \{v_\epsilon(k) \ : \ k \in \mathbb{N}\} \in \bigoplus_p X_k$

b) $\lim_n \|\bar{x}_n - \bar{v}_\epsilon\|^p \leq \lim_n \|\bar{x}_n - \bar{z}\|^p + \epsilon$ *para todo* $\bar{z} \in \bigoplus_p X_k$

Demostración.

a) Ya que la sucesión $\{\bar{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotada, existe $M > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $\|\bar{x}_n\| \leq M$.

Si $\bar{v}_\epsilon = \{v_\epsilon(k) \ : \ k \in \mathbb{N}\}$ no pertenece a $\bigoplus_p X_k$ con $1 \leq p < +\infty$, se tiene que $\sum_{k=1}^{+\infty} \|v_\epsilon(k)\|^p = +\infty$, lo que significa que para cualquier $H > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \|v_\epsilon(k)\|^p > H$$

es más, para algún $k_1 \in \mathbb{N}$, $k_0 < k_1$ habrá de ser

$$\sum_{k=k_0+1}^{k_1} \|v_\epsilon(k)\|^p > H$$

Tomemos H de forma que sea $H - 2^p M^p = 2^{p-1}\epsilon > 0$.

Puesto que, por ser α_k un ínfimo, es en particular

$$\lim_n \|x_n(k)\|^p \geq \alpha_k^p$$

y según la definición de $v_\epsilon(k)$ es

$$\alpha_k^p > \lim_n \|x_n(k) - v_\epsilon(k)\|^p - \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$$

se tiene que para n suficientemente grande y $k = k_0 + 1, \cdots, k_1$ es

$$\|x_n(k) - v_\epsilon(k)\|^p \leq \|x_n(k)\|^p + \frac{\epsilon}{2^k}$$

y así, usando que por la convexidad de la función $x \to x^p$ es

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \quad \text{para} \quad a > 0, b > 0$$

se tiene:

$$\begin{aligned}
H &< \sum_{k=k_0+1}^{k_1} \|v_\epsilon(k)\|^p \leq \sum_{k=k_0+1}^{k_1} \big(\|v_\epsilon(k) - x_n(k)\| + \|x_n(k)\|\big)^p \\
&\leq 2^{p-1} \sum_{k=k_0+1}^{k_1} \|x_n(k) - v_\epsilon(k)\|^p + 2^{p-1} \sum_{k=k_0+1}^{k_1} \|x_n(k)\|^p \\
&\leq 2^{p-1} \sum_{k=k_0+1}^{k_1} \Big(\|x_n(k)\|^p + \frac{\epsilon}{2^k}\Big) + 2^{p-1} \sum_{k=k_0+1}^{k_1} \|x_n(k)\|^p \\
&= 2^p \sum_{k=k_0+1}^{k_1} \|x_n(k)\|^p + 2^{p-1} \sum_{k=k_0+1}^{k_1} \frac{\epsilon}{2^k} \\
&\leq 2^p \|\bar{x}_n\|^p + 2^{p-1}\epsilon \leq 2^p M^p + 2^{p-1}\epsilon = H
\end{aligned}$$

lo que es una contradicción y, por tanto, ha de pertenecer $\bar{v}_\epsilon = \{v_\epsilon(k) : k \in \mathbb{N}\}$ a $\bigoplus_p X_k$.

b) Si para todo $\bar{w}$ perteneciente a $\bigoplus_p X_k$ designamos por $\phi(\bar{w})$ a $\lim_n \|\bar{x}_n - \bar{w}\|$, lo que pretendemos probar es que dado un $\epsilon > 0$ arbitrario,

$$\phi^p(\bar{v}_\epsilon) \leq \phi^p(\bar{z}) + \epsilon$$

para todo $\bar{z} \in \bigoplus_p X_k$.

Supongamos que no fuese así, es decir, que existe un $z \in \bigoplus_p X_k$ tal que $\phi^p(\bar{z})+\epsilon < \phi^p(\bar{v}_\epsilon)$

Tomemos $0 < \delta < \min\left\{1, \dfrac{\epsilon}{2[\phi^p(\bar{z})+4]}\right\}$, $b > 0$ tal que $(1+b)^p \leq 1+\delta$ y $\delta' > 0$ tal que $2^{p-1}\left(\dfrac{b+1}{b}\right)^p \delta' < \delta$.

Por ser $\bar{v}_\epsilon \in \bigoplus_p X_k$ y $\bar{z} \in \bigoplus_p X_k$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k>k_0} \|v_\epsilon(k)\|^p < \frac{\delta'}{2} \quad \text{y} \quad \sum_{k>k_0} \|z(k)\|^p < \frac{\delta'}{2}$$

y, también existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que si $n > n_0$ y $k = 1, \cdots, k_0$, se tienen las desigualdades

$$|\, \|\bar{x}_n - \bar{v}_\epsilon\|^p - \phi^p(\bar{v}_\epsilon)\, | < \delta \,, \qquad |\, \|\bar{x}_n - \bar{z}\|^p - \phi^p(\bar{z})\, | < \delta$$

$$\|x_n(k) - v_\epsilon(k)\|^p \leq \|x_n(k) - z(k)\|^p + \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$$

Pero, tomando $n > n_0$ se verifica que:

$$\begin{aligned}
\phi^p(\bar{v}_\epsilon) < \|\bar{x}_n - \bar{v}_\epsilon\|^p + \delta &= \sum_{k\leq k_0} \|x_n(k) - v_\epsilon(k)\|^p \\
&\quad + \sum_{k>k_0} \|x_n(k) - v_\epsilon(k)\|^p + \delta \\
&\leq \sum_{k\leq k_0} \|x_n(k) - z(k)\|^p \\
&\quad + \sum_{k>k_0} \left[\|x_n(k) - z(k)\| + \|z(k) - v_\epsilon(k)\|\right]^p + \delta + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \sum_{k\leq k_0} \|x_n(k) - z(k)\|^p + (1+b)^p \sum_{k>k_0} \|x_n(k) - z(k)\|^p \\
&\quad + \left(\frac{1+b}{b}\right)^p \sum_{k>k_0} \left(\|z(k)\| + \|v_\epsilon(k)\|\right)^p + \frac{\epsilon}{2} + \delta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq (1+b)^p \sum_{k=1}^{+\infty} \|x_n(k) - z(k)\|^p \\
&\qquad + \left(\frac{1+b}{b}\right)^p \sum_{k>k_0} \left(\|z(k)\| + \|v_\epsilon(k)\|\right)^p + \delta + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq (1+b)^p \|\bar{x}_n - \bar{z}\|^p \\
&\qquad + \left(\frac{1+b}{b}\right)^p 2^{p-1} \sum_{k>k_0} \left[\|z(k)\|^p + \|v_\epsilon(k)\|^p\right] + \frac{\epsilon}{2} + \delta \\
&\leq (1+b)^p \|\bar{x}_n - \bar{z}\|^p + \left(\frac{1+b}{b}\right)^p 2^{p-1}\delta' + \frac{\epsilon}{2} + \delta \\
&< (1+\delta)\|\bar{x}_n - \bar{z}\|^p + 2\delta + \frac{\epsilon}{2} \\
&< (1+\delta)[\phi^p(\bar{z}) + \delta] + 2\delta + \frac{\epsilon}{2} \\
&< (1+\delta)\phi^p(\bar{z}) + 4\delta + \frac{\epsilon}{2} \\
&= [\phi^p(\bar{z}) + 4]\delta + \phi^p(\bar{z}) + \frac{\epsilon}{2} < \phi^p(\bar{z}) + \epsilon < \phi^p(\bar{v}_\epsilon)
\end{aligned}
$$

con lo que incurrimos en una contradicción y la demostración está concluida.

Puesto que la usaremos en el próximo Teorema, probamos a continuación una desigualdad que aparece enunciada con una sugerencia para su demostración en **[DB2]**

Lema 4.2.8. *Si r, s y p son números positivos con $p \geq 1$, entonces*

$$|r-s|^p \geq r^p - psr^{p-1}$$

Demostración.

Probaremos la siguiente desigualdad equivalente a la del enunciado:

$$|r|^p - |r-s|^p \leq psr^{p-1}$$

- Si $|r-s| \geq |r|$ la desigualdad es evidente.
- Si $|r-s| < |r|$, entonces aplicamos a la función $t \to t^p$ el Teorema del Valor Medio en el intervalo $\big[|r-s|, |r|\big]$ con lo que se obtiene que

$$|r|^p - |r-s|^p \leq p|r|^{p-1}\big(|r| - |r-s|\big) \leq p|r|^{p-1}|s| = psr^{p-1}$$

Estamos ahora en condiciones de abordar directamente el cálculo de los coeficientes de empaquetamiento en el espacio $\bigoplus_p X_k$

Teorema 4.2.9. *Si* $\{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ *es una sucesión de espacios de Banach separables y* $1 \leq p < +\infty$ *se verifica:*

$$\delta'(\bigoplus_p X_k) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \{2^{1-\frac{1}{p}}, \delta'(X_k)\}\ , \quad \delta(\bigoplus_p X_n) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \{2^{1-\frac{1}{p}}, \delta(X_k)\}$$

$$\gamma(\bigoplus_p X_k) = \frac{\sup_{k\in\mathbb{N}} \{2^{1-\frac{1}{p}}, \delta(X_k)\}}{\inf_{k\in\mathbb{N}} \{2^{1-\frac{1}{p}}, \delta'(X_k)\}}$$

Demostración.

Sea A un conjunto α-minimal en $\bigoplus_p X_k$. Por el Teorema 4.2.4 anterior, podemos suponer que es una sucesión, $A = \{\bar{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ regular con proyecciones A_k sobre X_k para cada $k \in \mathbb{N}$.
Además, por el Lema 2.2.6, se puede asumir que

$$\lim_{n,m\ n\neq m} \|\bar{x}_n - \bar{x}_m\| = \alpha(A)$$

y también que fijado $\epsilon > 0$ arbitrario, y para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $v_\epsilon(k) \in X_k$ tal que a partir de un cierto n es

$$\frac{\beta^p(A_k)}{2^p} - \frac{\epsilon}{2^k} \leq \|x_n(k)_n - v_\epsilon(k)\|^p \leq \frac{\beta^p(A_k)}{2^p} + \frac{\epsilon}{2^k}$$

con lo que, según el Lema 4.2.7 anterior, el vector $\bar{v}_\epsilon = \big(v_\epsilon(k)\big)$ pertenece a $\bigoplus X_k$ y además es, por ser $\beta(A)$, según el Lema 2.2.11, un ínfimo

$$\frac{\beta^p(A)}{2^p} - \epsilon \leq \|\bar{x}_n - \bar{v}_\epsilon\|^p$$

y, también por el Lema 4.2.7, para n suficientemente grande

$$\|\bar{x}_n - \bar{v}_\epsilon\|^p \leq \|\bar{x}_n - \bar{z}\|^p + \epsilon \qquad \forall \bar{z} \in \bigoplus_p X_k$$

lo que significa que por ser $\dfrac{\beta(A)}{2} = \inf\left\{\lim_n \|\bar{x}_n - \bar{z}\| : z \in \bigoplus_p X_k\right\}$, para n suficientemente grande es

$$\|\bar{x}_n - \bar{v}_\epsilon\|^p \leq \frac{\beta^p(A)}{2^p} + \epsilon$$

Ya que las medidas α y β son invariantes por traslaciones, bastará suponer que $\bar{v}_\epsilon = \bar{0}$.

Por el Lema 4.2.5 previo, para el $\epsilon > 0$ dado, existe k_0 en $\mathbb{N}$ tal que $\sum_{k>k_0} \beta^p(A_k) < \epsilon$.

Si designamos por $Y = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{k_0}$ *y* $Z = \bigoplus_p X_{k>k_0}$, resulta que

$$\bigoplus_p X_n = \left(\bigoplus_p X_{k\leq k_0}\right) \times \left(\bigoplus_p X_{k>k_0}\right) = Y \times Z$$

y cada vector $\bar{x} \in \bigoplus_p X_k$ puede expresarse en la forma $\bar{x} = (\bar{y}, \bar{z})$ con $\bar{y} \in Y$, $\bar{z} \in Z$.

Ya que se trata de un producto finito de espacios $X = Y \times Z$, si denotamos $A_0 = pr_Y(A)$ y $B = pr_Z(A)$, podemos suponer que A_0 y B son α-minimales y β-minimales o finitos y, teniendo en cuenta que trabajamos con una p-norma, se tendrá que

$$\alpha^p(A) = \alpha^p(A_0) + \alpha^p(B) \qquad \text{y} \qquad \beta^p(A) = \beta^p(A_0) + \beta^p(B)$$

y, por la misma razón aplicada al espacio producto finito Y

$$\alpha^p(A_0) = \sum_{k\leq k_0} \alpha^p(A_k) \qquad y \qquad \beta^p(A_0) = \sum_{k\leq k_0} \beta^p(A_k)$$

Estudiaremos ahora los valores para $\alpha(B)$ y $\beta(B)$:

Si llamamos $\beta(B) = 2r$, sea $n_1 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que

$$r^p - \epsilon \leq \|\bar{z}_{n_1}\|^p \leq r^p + \epsilon$$

y designemos por comodidad a $\bar{z}_{n_1} \in B$ como $\bar{z}_1$

Ya que $\|\bar{z}_1\|^p = \sum_{k>k_0} \|x_1(k)\|^p < +\infty$, existe k_1 en $\mathbb{N}$ con $k_0 < k_1$ tal que

$$\sum_{k>k_1} \|x_1(k)\|^p < \epsilon$$

y como $\sum_{k_0+1}^{k_1} \beta^p(A_k) < \epsilon$, existe algún $\bar{z}_n$ tal que

$$\sum_{k_0+1}^{k_1} \|x_n(k)\|^p < \epsilon$$

Si llamamos ahora

$$\bar{a}_1 = \big(x_1(k_0+1), ..., x_1(k_1), 0, 0, ...\big) \ ; \ \bar{a}_n = \big(x_n(k_0+1), ..., x_n(k_1), 0, 0, ...\big)$$

$$\bar{b}_1 = \big(0, 0, ..., 0, x_1(k_1+1), x_1(k_1+2), ...\big) \ ; \ \bar{b}_n = \big(0, 0, ..., x_n(k_1+1), x_n(k_1+2), ...\big)$$

se tiene que

$$\|\bar{z}_1 - \bar{z}_n\|^p = \|\bar{a}_1 - \bar{a}_n\|^p + \|\bar{b}_1 - \bar{b}_n\|^p \quad ; \quad \|\bar{z}_i\|^p = \|\bar{a}_i\|^p + \|\bar{b}_i\|^p \ \ (i = 1, n)$$

y, además las siguientes desigualdades:

$$\|\bar{b}_1\|^p = \sum_{k>k_1} \|x_1(k)\|^p < \epsilon \qquad \|\bar{a}_n\|^p = \sum_{k_0<k\leq k_1} \|x_n(k)\|^p < \epsilon$$

$$\|\bar{a}_1\|^p = \|\bar{z}_1\|^p - \|\bar{b}_1\|^p > r^p - 2\epsilon \qquad \|\bar{b}_n\|^p = \|\bar{z}_n\|^p - \|\bar{a}_n\|^p > r^p - 2\epsilon$$

Aplicamos ahora la desigualdad del Lema 4.2.8 para obtener:

$$\begin{aligned} \|\bar{a}_1 - \bar{a}_n\|^p &\geq \big|\ \|\bar{a}_1\| - \|\bar{a}_n\|\ \big|^p \\ &\geq \|\bar{a}_1\|^p - p\|\bar{a}_n\|.\|\bar{a}_1\|^{p-1} \geq r^p - 2\epsilon - p\epsilon^{\frac{1}{p}}(r^p + \epsilon)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\bar{b}_n - \bar{b}_1\|^p &\geq \big|\ \|\bar{b}_n\| - \|\bar{b}_1\|\ \big|^p \\ &\geq \|\bar{b}_n\|^p - p\|\bar{b}_1\|.\|\bar{b}_n\|^{p-1} \geq r^p - 2\epsilon - p\epsilon^{\frac{1}{p}}(r^p + \epsilon)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned}\alpha^p(B)+\epsilon &\geq \|\bar{z}_1-\bar{z}_n\|^p\\ &= \|\bar{a}_1-\bar{a}_n\|^p+\|\bar{b}_1-\bar{b}_n\|^p \geq 2^{1-p}\beta^p(B)-4\epsilon-2p\epsilon^{\frac{1}{p}}(r^p+\epsilon)^{\frac{p-1}{p}}\end{aligned}$$

y, si hacemos $\omega'(\epsilon)=5\epsilon+2p\epsilon^{\frac{1}{p}}(r^p+\epsilon)^{\frac{p-1}{p}}$, podemos expresarlo en la forma

$$\alpha^p(B)\geq 2^{1-p}\beta^p(B)-\omega'(\epsilon)$$

siendo $\omega'(\epsilon)$ un infinitésimo cuando ϵ tiende a cero.

Por otra parte:

$$\begin{aligned}\alpha^p(B)-\epsilon &\leq \|\bar{z}_1-\bar{z}_n\|^p=\|\bar{a}_1-\bar{a}_n\|^p+\|\bar{b}_1-\bar{b}_n\|^p\\ &\leq (\|\bar{a}_1\|+\|\bar{a}_n\|)^p+(\|\bar{b}_1\|+\|\bar{b}_n\|)^p\\ &\leq 2[(r^p+\epsilon)^{\frac{1}{p}}+\epsilon^{\frac{1}{p}}]^p=2\left[\left(\frac{\beta^p(B)}{2^p}+\epsilon\right)^{\frac{1}{p}}+\epsilon^{\frac{1}{p}}\right]^p\end{aligned}$$

desigualdad que podemos expresar como

$$\alpha^p(B)\leq 2^{1-p}\beta^p(B)+\omega(\epsilon)$$

siendo $\omega(\epsilon)$ un infinitésimo cuando ϵ tiende a cero.

Volviendo al cálculo de las medidas de A, y llamando $\delta'_k=\delta'(X_k)$ y $\delta_k=\delta(X_k)$:

1)
$$\begin{aligned}\beta^p(A) &= \beta^p(A_0)+\beta^p(B)=\sum_{k\leq k_0}\beta^p(A_k)+\beta^p(B)\\ &\leq \sum_{k\leq k_0}\delta_k^p\alpha^p(A_k)+2^{p-1}\left[\alpha^p(B)+\omega'(\epsilon)\right]\\ &\leq \max\{\delta_k^p,2^{p-1}\}\left[\sum_{k\leq k_0}\alpha^p(A_k)+\alpha^p(B)+\omega'(\epsilon)\right]\\ &= \max\{\delta_k^p,2^{p-1}\}[\alpha^p(A)+\omega'(\epsilon)]\leq \sup\{\delta_k^p,2^{p-1}\}[\alpha^p(A)+\omega'(\epsilon)]\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}\beta^p(A) &= \beta^p(A_0) + \beta^p(B) = \sum_{k\le k_0} \beta^p(A_k) + \beta^p(B)\\ &\ge \sum_{k\le k_0} \delta_k'^p \alpha^p(A_k) + 2^{p-1}[\alpha^p(B) - \omega(\epsilon)]\\ &\ge \min\{\delta_k'^p, 2^{p-1}\}\left[\sum_{k\le k_0} \alpha^p(A_k) + \alpha^p(B) - \omega(\epsilon)\right]\\ &= \min\{\delta_k'^p, 2^{p-1}\}[\alpha^p(A) - \omega(\epsilon)] \ge \inf\{\delta_k'^p, 2^{p-1}\}[\alpha^p(A) - \omega(\epsilon)]\end{aligned}$$

Ya que la construcción que se ha hecho es válida para $\epsilon > 0$ arbitrario y, tanto $\omega'(\epsilon)$ como $\omega(\epsilon)$ son infinitésimos cuando ϵ tiende a cero, podemos asegurar que si A es un conjunto α-minimal de $\bigoplus_p X_k$, entonces

$$\inf_{k\in\mathbb{N}}\{\delta_k'^p, 2^{p-1}\}\alpha^p(A) \le \beta^p(A) \le \sup_{k\in\mathbb{N}}\{\delta_k^p, 2^{p-1}\}\alpha^p(A)$$

de donde
$$\inf_{k\in N}\{\delta_k', 2^{1-\frac{1}{p}}\} \le \frac{\beta(A)}{\alpha(A)} \le \sup_{k\in N}\{\delta_k, 2^{1-\frac{1}{p}}\}$$

y, por lo tanto
$$\delta'(\bigoplus_p X_k) \ \ge\ \inf_{k\in\mathbb{N}}\ \{2^{1-\frac{1}{p}}, \delta'(X_k)\}$$
$$\delta(\bigoplus_p X_k) \ \le\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\ \{2^{1-\frac{1}{p}}, \delta(X_k)\}$$

Pero, es más, estas cotas se alcanzan:

Si para cada $k \in \mathbb{N}$, consideramos la sucesión $\{x_n(k) : n \in \mathbb{N}\}$ α-minimal en X_k, la sucesión $\{\bar{x}_n\}$ tal que $\bar{x}_n = (0, ..., 0, x_n^{(k}(k), 0, ...)$ es α-minimal en $\bigoplus_p X_k$ y

$$\frac{\beta(\{\bar{x}_n\})}{\alpha(\{\bar{x}_n\})} = \frac{\beta(\{x_n(k)\})}{\alpha(\{x_n(k)\})}$$

por lo que, tomando ínfimos y supremos respectivamente, se tiene que

$$\delta'(\bigoplus X_k) \le \delta'(X_k) \quad \text{y} \quad \delta(\bigoplus_p X_k) \ge \delta(X_k)$$

para cada k, y así

$$\delta'(\bigoplus X_k) \leq \inf\{\delta'(X_k) : k \in \mathbb{N}\} \quad \text{y} \quad \delta(\bigoplus_p X_k) \geq \sup\{\delta(X_k) : k \in \mathbb{N}\}$$

Por otra parte, si para cada $k \in \mathbb{N}$ consideramos un vector unitario $x(k) \in X_k$, la sucesión $\{\bar{x}_n\}$ de $\bigoplus_p X_k$ tal que $\bar{x}_n = x(n)e_n$, donde e_n es el n-ésimo vector de la base canónica de ℓ^p, es α-minimal y verifica que $\beta(\{\bar{x}_n\}) = 2$ y $\alpha(\{\bar{x}_n\}) = 2^{\frac{1}{p}}$ lo que significa que

$$\delta'(\bigoplus_p X_k) \leq 2^{1-\frac{1}{p}} \leq \delta(\bigoplus_p X_k)$$

Como conclusión

$$\gamma(\bigoplus_p X_k) = \frac{\sup_{k\in\mathbb{N}} \{2^{1-\frac{1}{p}}, \delta(X_k)\}}{\inf_{k\in\mathbb{N}} \{2^{1-\frac{1}{p}}, \delta'(X_k)\}}$$

Notas 4.2.10.

1) Evidentemente es $\gamma(\bigoplus_p X_k) \geq \dfrac{\delta_k}{\delta'_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, luego es $\gamma(\bigoplus_p X_k) \geq \gamma(X_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y podemos asegurar que el empaquetamiento del espacio producto es, en general, peor que el de los espacios factores (y desde luego peor que el del espacio ℓ^p que lo sustenta).

2) Aunque todos los X_k sean espacios bien empaquetados, $\bigoplus_p X_k$, en general, no lo será, pudiendo ser incluso $\gamma(X_k) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y, en cambio $\gamma(\bigoplus_p X_k) = 2$. Este es el caso, por ejemplo, de ser $X_k = \ell^k$ con $k \in \mathbb{N}$.

3) Será $\gamma(\bigoplus_p X_k) = 1$ si y sólo si para cada $k \in \mathbb{N}$ es $\delta'(X_k) = \delta(X_k) = 2^{1-\frac{1}{p}}$, es decir, todos los X_k han de tener la β-propiedad y, además, con constante igual a $2^{1-\frac{1}{p}}$.

4) Para $1 < p < +\infty$, $1 < q < +\infty$ es $\gamma(\bigoplus_p \ell^q) = \gamma(\bigoplus_q \ell^p) = 2^{|\frac{1}{q}-\frac{1}{p}|}$. En el caso particular de ser $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, entonces $\gamma(\bigoplus_p \ell^q) = 2^{\frac{|p-2|}{p}}$.

Referencias bibliográficas

[Ak] R. R. AKHMEROV, M. I. KAMENSKII, A. S. POTAPOV, A. E. RODKINA Y B. N. SADOVSKII *Measures of Noncompactness and Condensing Operators.*
Birkhauser Verlag, Berlin 1992

[Ar1] J. ARIAS DE REYNA *On r-Separated Sets in Normed Spaces.*
Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991) 1087-1094

[Ar2] J. ARIAS DE REYNA Y T. DGUEZ BENAVIDES *On a Measure of Noncompactness in Banach Spaces with Schauder Basis.*
Bollettino U. M. I. (7) 7-A (1993) 77-86

[Ay1] J. M. AYERBE Y T. DGUEZ BENAVIDES *Set-Contractions and Ball-Contractions in L^p-spaces.*
J. Math. Anal. Appl. 159 (2) (1991) 500-506

[Ay2] J. M. AYERBE, T. DGUEZ BENAVIDES Y G. LÓPEZ *Connections Between Some Measures of Noncompactness and Associated Operators.*
Extracta. Math. 5 n. 2 (1990) 62-64

[Ay3] J. M. AYERBE Y T. DGUEZ BENAVIDES *Connections Between Some Banach Spaces Coefficients Concerning Normal Structure.*
J. Math. Anal. Appl. ,170 (1992)

[Ba1] J. BANAS *Compactness Condictions in the Geometric Theory of Banach Spaces.*
J. Nonlinear Anal. TMA 16 (1991) 669-682

[Ba2] J. BANAS Y K. GOEBEL *Measures of Noncompactness in Banach Spaces.*
Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics,60. Marcel Dekker,Inc. , New York,1980

[Be] B. BEAUZAMY *Introduction to Banach Spaces and Their Geometry.*
North-Holland, Amsterdam 1982

[By] W. L. BYNUM *Normal Structure Coefficients for Banach Spaces.*
Pacific J. Math. 86 (1980) 427-435

[Ca] E. CASINI *Degree of Convexity and Product Spaces.*
Comment. Math. Univ. Carolinae 31 (4) (1990) 637-641

[Dn1] J. DANES *On the Istratescu's Measure of Noncompactness.*
Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N. S.) 16(64) (1972),n. 4,403-406

[Dn2] J. DANES *Some Fixed Point Theorems in Metric and Banach Spaces.*
Comment. Math. Univ. Carolinae 12 (1971) 37-51

[Dn3] J. DANES *On the Radius of a Set in a Hilbert Space.*
Comment. Math. Univ. Carolinae 25 (1984) 335-362

[Dr] G. DARBO *Punti Uniti in Transformazioni a Codominio non Compatto.*
Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 24 (1955) 84-92

[DeB] F. S. DE BLASI *On a Property of the Unit Sphere in a Banach Space.*
Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N. S.) 21(69) (1977),n. 3-4,259-262

[De] K. DEIMLING *Nonlinear Functional Analysis.*
Springer Verlag Berlin, 1985

[DB1] T. DGUEZ BENAVIDES *Some Properties of the Measures of Noncompactness and Applications.*
J. London Math. Society. , (2) 34 (1986) 120-128

[DB2] T. DGUEZ BENAVIDES *Set-Contractions and Ball-Contractions in Some Classes of Spaces.*
J. Math. Anal. Appl. , vol. 136 n 1 (1988) 131-140

[DB3] T. DGUEZ BENAVIDES *Normal Structure Coefficients of* $L^p(\Omega)$.
Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Section A,117 (1991) 299-303

[DB4] T. DGUEZ BENAVIDES *Weak Uniform Normal Structure in Direct Sum Spaces.*
Studia Mathematica 103 (3) (1992) 283-290

[DB5] T. DGUEZ BENAVIDES Y R. J. RODRIGUEZ *Some Geometrical Coefficients in Orlicz Sequence Spaces.*
Nonlinear Anal. T. M. A. vol. 20 (4) (1993) 349-358

[DB6] T. DGUEZ BENAVIDES Y G. LÓPEZ *Moduli of Noncompact Convexity and Lower Bounds for Normal Structure Coefficients.*
Proc. Roy. Soc. Edinburgh Section A (por aparecer)

[DB7] T. DGUEZ BENAVIDES *Separación Asintótica de Sucesiones en Espacios* ℓ_p *y de Orlicz.*
Homenaje al Prof. Dr. Nácere Hayek Calil. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de La Laguna (1990) 107-116

[DB8] T. DGUEZ BENAVIDES Y G. LÓPEZ ACEDO *Fixed Points of Asymptotically Contractive Mappings.*
Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 164 (2) (1992) 447-452

[El] J. ELTON Y E. ODELL *The Unit Ball of Every Infinite Dimensional Normed Linear Space Contains a* $(1+\epsilon)$*-Separated Sequence.*
Colloq. Math. 44 (1981) 105-109 217-258

[Er] N. A. ERZAKOVA *A Measure of Noncompactness.*

Approximate Methods for investigating Differential Equations and their Applications. Kuibyshev. Gos. Univ. (1982) 58-60 (ruso)

[Fu] A. FURI Y A. VIGNOLI *On a Property of the Unit Sphere in a Linear Normed Space.*

Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math. Astronom. Phys. 18 (1970) 333-334

[Gh] I. C. GOHBERG, L. S. GOL'DENSHSTEIN Y A. S. MARKUS *Investigation of Some Properties of Bounded Linear Operators in Connection Their q-Norms.*

Uchen. Zap. Kishinev. Un-Ta 29 (1957) 29-36 (*ruso*)

[Gl] L. S. GOL'DENSHSTEIN Y A. S. MARKUS *On the Measures of Noncompactness of Bounded Sets and of Linear Operators.*

Studies in Algebra and Mathematical Analysis, Kishinev, (1965) 45-54 (ruso)

[Is] V. I. ISTRATESCU *On a Measure of Noncompactness.*

Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N. S.) 16(64) (1972),n. 2,195-197

[Ko1] C. A. KOTTMAN *Packing and Reflexivity in Banach Spaces.*

Trans. Amer. Math. Soc. 150 (1970) 565-576

[Ko2] C. A. KOTTMAN *Subsets of the Unit Ball that Are Separated More than One.*

Studia Math. 53 (1975) 15-27 565-576

[Kr1] M. A. KRASNOSELSKI Y P. P. RUTITSKII *Convex Functions and Orlicz Spaces.*

Groningen, Netherlands 1961

[Kr2] M. A. KRASNOSELSKI Y P. P. ZABREIKO *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis.*

Springer, Berlin 1984

[Ku1] K. KURATOWSKI *Sur les Spaces Completes.*

Fund. -Math. 15 (1930) 301-309

[Ku2] K. KURATOWSKI *Topology, vol. 1.*

Academic Press, (New York, 1966)

[Li] J. LINDENSTRAUSS Y L. TZAFRIRI *Classical Banach Spaces I, Sequence Spaces.*

Springer-Verlag (Berlin 1977)

[Ml] E. MALUTA *Uniformly Normal Structure and Related Coefficients.*

Pacific J. Math. 111(1984) 357-369

[Mr] R. H. MARTIN JR. *Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces.*

Wiley-Interscience, New York 1976

[Wb2] J. R. L. WEBB *On Seminorms of Operators.*
J. London Math. Soc. (2) 7 (1973) 337-342

[Wb3] J. R. L. WEBB *Mapping of Accretive and Pseudo-A-Proper Type.*
J. Math. Anal. Appl. 85 (1) (1982) 146-152

[Wb4] J. R. L. WEBB Y W. ZHAO *On Connections Between Set and Ball Measures of Noncompactness.*
Bull. London Math. Soc. 22 (1990) 471-477

[Wl] WELLS Y WILLIAMS *Embeddings and Extensions in Analysis.*
Sprinter-Verlag, Berlin 1975

[Zh1] W. ZHAO *Remarks on Various Measures of Noncompactness.*
J. Math. Anal. Appl. (por aparecer)

[Zh2] W. ZHAO *Normal Structure Coefficients and Seminorms of Linear Operators in Banach Spaces.*
(por aparecer)

[Zh3] W. ZHAO *Geometrical Coefficients and Measures of Noncompactness.*
Ph. Dr. Thesis University of Glasgow (1992)

RAMON JAIME RODRIGUEZ ALVAREZ

RELACIONES ENTRE OPERADORES ASOCIADOS A DISTINTAS MEDIDAS DE NO COMPACIDAD

APTO "CUM LAUDE"

13 SEPTIEMBRE 93

El Doctorado,