CONJUNTOS DE UNICIDAD DE SISTEMAS DE FUNCIONES INDEPENDIENTES. QUANTUM DERIVADAS.

Ricardo Ríos Collantes de Terán

2 de julio de 2001

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

CONJUNTOS DE UNICIDAD DE SISTEMAS DE FUNCIONES INDEPENDIENTES. QUANTUM DERIVADAS.

Memoria presentada por
Ricardo Ríos Collantes de Terán
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

Ricardo Ríos Collantes de Terán
Becario de la Fundación Cámara.

Vº Bº del Director:

D. *Francisco José Freniche Ibáñez*
Catedrático del Departamento
de Análisis Matemático de
la Universidad de Sevilla.

Sevilla, 2 de julio de 2001.

Gracias a Dios, tengo muchos amigos a los que no podré olvidar por su valiosa colaboración en este pequeño boceto dentro del gran Arte de las Matemáticas. A ellos van dedicadas estas líneas.

A mi director de tesis, F. J. Freniche. Gracias a su dedicación y a sus consejos esta obra es mucho más importante de lo que yo hubiera podido lograr sólo.

Al profesor J. M. Ash por su colaboración desinteresada y sus discusiones que han ampliado mi formación y han ayudado en la realización de este trabajo. También a los profesores del Departamento de Análisis Matemático que directa o indirectamente han colaborado. En particular, al profesor J. A. Facenda por sus consejos técnicos.

A mis compañeros Juan Carlos, Rafa V., Rafa E., MªÁngeles, Fernando, Sedki, Bea y Mirta, por los buenos momentos que hemos pasado juntos "que han hecho de este departamento mi segunda casa".

Al Departamento de Matemáticas de la Universidad de DePaul, especialmente al profesor Eduardo y al "staff", Teresita, Melanie y Nydia, que hicieron que mi estancia en Chicago fuera una bonita experiencia.

A mis amigos y compañeros de carrera. Gracias por su amistad.

A Rocío, por estar siempre a mi lado. Y a su familia por acogerme tan cariñosamente.

A mi gran familia, mis tíos, mis primos (en particular mi prima Marta, una estupenda editora), mis hermanos y, muy especialmente, al cariño de mis padres.

Y, por supuesto, no me olvidaré de los "peques" de la familia, Pablo, Pepe, Bosco y Constanza. Ellos trasmiten alegría.

Que Dios os bendiga a todos.

Introducción

Como es bien conocido, el estudio de las series trigonométricas ha tenido históricamente una gran importancia en el desarrollo de nociones fundamentales en Matemáticas. Así, el concepto de función que actualmente se utiliza fue introducido por Dirichlet al estudiar la convergencia de las series de Fourier; las integrales de Riemann y de Lebesgue fueron definidas por estos autores como herramientas para el estudio de las propiedades de las series trigonométricas.

Dentro de este marco, el problema de conocer la estructura de los conjuntos de unicidad ha dado lugar a desarrollos de gran interés, entre otros el de la propia teoría de conjuntos de Cantor.

Un conjunto E se dice de unicidad si la serie trigonométrica nula es la única que converge a cero fuera de E. En 1870, Cantor demostró que los conjuntos finitos y otros cuya estructura no es muy complicada son conjuntos de unicidad. Cantor se basa en la tesis de Riemann para demostrar estos resultados. Entre otras herramientas emplea las Derivadas Simétricas o Derivadas de Riemann. Estas derivadas guardan con la noción clásica de Derivada la misma relación que la sumabilidad de las series con la convergencia, es decir, una función Derivable en sentido ordinario va a serlo en el sentido de Riemann, pero no necesariamente a la inversa.

En esta memoria se abordan dos líneas de investigación que arrancan de este tronco común. En la primera parte se expone el trabajo que hemos desarrollado sobre los conjuntos de unicidad para ciertos sistemas ortogonales, y en la segunda se muestra el estudio de un concepto de diferenciabilidad relacionado con las Derivadas de Riemann.

Estas dos líneas de investigación están muy ligadas entre sí como demuestra el hecho de que muchos autores, aparte de Cantor, hayan considerado conceptos generales de derivadas con el fin de resolver problemas sobre conjuntos de unicidad para otros sistemas ortogonales.

Conjuntos de unicidad de sistemas de funciones independientes.

El estudio de la estructura de los conjuntos de unicidad para sistemas ortogonales distintos al sistema trigonométrico ha atraído el interés de muchos matemáticos. Así, se han desarrollado trabajos acerca de los conjuntos de unicidad para sistemas trigonométricos lagunares o múltiples, sistemas de Walsh, de Haar, de Rademacher, de Hermite, de Faber-Schauder,... Entre otras referencias citemos: [Z1], [AW], [F], [W], [SU], [R2], [K],...

Por ejemplo, sobre los conjuntos de unicidad para sistemas trigonométricos lagunares, Zygmund [Z1] demuestra, en 1932, que los subconjuntos de $[0,1]$ de medida no total son conjuntos de unicidad para estos sistemas. Esto contrasta con el caso del sistema trigonométrico para el cual ningún conjunto de medida positiva es de unicidad.

Algo parecido a los sistemas trigonométricos lagunares ocurre con el sistema de Rademacher. En 1962 Stechkin y Ul'yanov [SU] prueban que los conjuntos contenidos en el intervalo $[0,1]$ de medida de Lebesgue menor que $1/2$ son conjuntos de unicidad para este sistema. Además demuestran que, aunque los conjuntos que tienen medida no total no son necesariamente de unicidad, sí lo son en un sentido más débil: verifican que las únicas series que se anulan en su complementario son realmente sumas finitas.

Profundizando un poco más en el estudio del sistema de Rademacher, en 1983 Bakhshetsyan [B] demuestra que existen conjuntos de unicidad de medida total. De hecho, prueba que en cualquier conjunto $F \subset [0,1]$ de medida positiva existe un subconjunto numerable $A \subset F$ de manera que las series que se anulen en A también se anulan en todo el conjunto F.

Una de las características de las funciones del sistema de Rademacher es la de ser un conjunto de funciones independientes en el sentido probabilístico. Nosotros nos preguntamos:

¿la propiedad de ser independientes es clave en los resultados sobre los conjuntos de unicidad del sistema de Rademacher? (1)

Para responder a esta cuestión, en el Capítulo 2 nos situamos en el espacio de probabilidad $[0,1]$ con la medida de Lebesgue $|\cdot|$ y estudiamos los conjuntos de unicidad para los sistemas de funciones independientes, es decir, para los sistemas (f_n) tales que:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(B_i)\right| = \prod_{i=1}^{n} |f_i^{-1}(B_i)|$$

para cualquier n y para cualesquiera B_1, $B_2, \ldots$, B_n Borel medibles.

Fijado $M \geq 1$ nos centramos en aquellos sistemas de funciones independientes (f_n) tales que las funciones f_n pertenezcan a la clase de funciones $\mathcal{F}_M$ que tienen media cero, varianza uno, y que están acotadas por M.

En este contexto más general, por un teorema de Kashin y Saakyan [KS], se conoce que existe una constante C'_M tal que:

$$\left|\left\{x \in [0,1] : |P(x)| \geq \frac{1}{2}\|P\|_2\right\}\right| \geq C'_M$$

para cualquier sistema de funciones independientes en $\mathcal{F}_M$ y para cualquier polinomio $P = \sum_{n=1}^{p} a_n f_n$ en (f_n). De esta desigualdad se deduce fácilmente que los conjuntos de medida menor que la constante C'_M son conjuntos de unicidad.

En este capítulo de la memoria, aparte de probar este último resultado con técnicas más elementales que las usadas en la prueba del teorema de Kashin y Saakyan, se encuentra la mejor constante C_M que asegure que los conjuntos de medida menor que C_M son conjuntos de unicidad para cualquier sistema independiente en $\mathcal{F}_M$ (Corolario 2.18). También se demuestra que los conjuntos de medida no total son de unicidad en el sentido más débil (Corolario 2.11).

Para probar estos resultados estudiamos, en la Sección 2.3, los conjuntos de constancia de los sistemas independientes, es decir, los conjuntos que son de la forma:

$$\left\{x \in [0,1] : \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) = \mu\right\}$$

para alguna sucesión no nula (a_n) y para algún número real μ. En este estudio juega un papel muy importante el Lema 2.7 que nos permite acotar de manera óptima la medida de los conjuntos de constancia de las funciones en $\mathcal{F}_M$ por la constante:

$$k_M = \frac{M^2}{M^2+1}.$$

Esta constante también acota las medidas de todos los conjuntos de constancia de cualquier sistema independiente en $\mathcal{F}_M$ (Teorema 2.9). Además, se prueba que los únicos conjuntos de constancia que pueden tener medida positiva son aquellos que vienen determinados por sucesiones (a_n) que son nulas a partir de un término (Teorema 2.10).

Previamente, en la Sección 2.1 presentamos la construcción de unas funciones independientes que fue utilizada en los años 30 por la escuela polaca (Steinhaus, Marcinkiewicz, Zygmund,...). Se construyen funciones independientes que son constantes en intervalos, es decir, que se pueden representar de la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{I_n}(x)$$

siendo $\{I_n : n \text{ natural}\}$ una partición en intervalos de casi todo $(0, 1)$. La notación que utilizamos es importante para facilitar las demostraciones de los resultados en la última sección de este capítulo.

En esta última parte, Sección 2.5, el teorema demostrado por Bakhshetsyan se generaliza para los sistemas independientes cuyas funciones toman una cantidad numerable de valores. Primero se demuestra para los sistemas cuyas funciones sean constantes en intervalos (Teorema 2.19), reduciendo el caso general mediante un "cambio de variables" al de estos sistemas (Teorema 2.21).

La dificultad de esta prueba radica en encontrar un "cambio de variables" adecuado que lleve medibles en medibles y que conserve en cierta manera las medidas de los conjuntos. Para encontrar este "cambio de variables" utilizamos algunos resultados de la teoría de los conjuntos analíticos que exponemos en los preliminares. Especialmente utilizamos un lema (Lema 1.11) que demostramos en dichos preliminares.

Para todos los sistemas de funciones independientes en $\mathcal{F}_M$ se obtiene un resultado más débil. Extendemos el resultado de Bakhshetsyan para los conjuntos F de medida mayor que k_M considerando únicamente series con coeficientes acotados por una sucesión fija dada de antemano (Teorema 2.23).

Por tanto a la vista de los resultados que aquí se exponen, tenemos que decir, como respuesta a la pregunta (1), que la independencia es clave en los resultados sobre el sistema de Rademacher, aunque queda abierto el problema de si existen conjuntos de unicidad de medida total para cualquier sistema de funciones independientes.

Quantum Derivadas.

Esta línea de investigación proviene del concepto de derivada que introdujo Riemann en su tesis. Dada una función real de variable real y un punto x se define la n-ésima Derivada de Riemann de f en el punto x como:

$$\lim_{h\to 0} R_n f(x,h),$$

donde $R_n f(x,h)$ se define por inducción de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} R_1 f(x,h) &= \frac{f(x+h/2)-f(x-h/2)}{h} \\ R_{n+1} f(x,h) &= \frac{R_n f(x+h/2,h)-R_n f(x-h/2,h)}{h}. \end{aligned}$$

Este concepto de diferenciabilidad es una generalización del concepto clásico de Derivabilidad, es decir, todas las funciones n veces Derivable tienen n-ésima Derivada de Riemann y ésta coincide con la n-ésima Derivada clásica. Más aún, es una extensión del siguiente concepto de diferenciabilidad que también generaliza el concepto clásico. Se dice que f tiene n-ésima Derivada de Peano en x si existen n constantes $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ tales que:

$$f(x+h) = f(x) + hf_1(x) + \ldots + \frac{1}{n!}h^n f_n(x) + o(h^n),$$

y en tal caso, se dice que $f_n(x)$ es la n-ésima Derivada de Peano de f en x.

Inversamente, no es cierto que las funciones que tienen Derivada de Peano sean Derivables Riemann, aunque en 1936 Marcinkiewicz y Zygmund [MZ] demuestran que la existencia de la n-ésima Derivada de Riemann en un conjunto implica la existencia de la n-ésima Derivada de Peano en casi todo el conjunto.

Más adelante, en 1967, Ash estudió los casos de las Derivadas de Riemann Generalizadas en su tesis doctoral [A] a propuesta de Zygmund. Las definiciones de estas derivadas generalizadas utilizan los valores de la función en puntos que no tienen por qué estar simétricamente distribuidos, como ocurre en las Derivadas que utiliza Riemann en su tesis. No obstante siguen manteniendo las mismas propiedades con respecto al concepto clásico de Diferenciabilidad y con respecto a la Derivada de Peano.

En la segunda parte de la memoria (Capítulo 3) exponemos el estudio que se ha desarrollado, a propuesta del profesor Ash, sobre las Quantum

Derivadas que se definen de manera similar al concepto de ser Derivable Riemann, tanto generalizada como no generalizada.

Dada una función real de variable real y un punto $x \neq 0$ se define la n-ésima Quantum Derivada de f en el punto x como:

$$\mathcal{D}_n f(x) = \lim_{q \to 1} D_n f(x,q),$$

donde $D_n f(x,q)$ se define por inducción de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} D_1 f(x,q) &= \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} \\ D_{n+1} f(x,q) &= \frac{D_n f(qx,q) - D_n f(x,q)}{qx - x}. \end{aligned}$$

Este concepto de n-diferenciabilidad, que para $n = 1$ coincide con el concepto clásico de Derivabilidad y que tiene algunas carencias como no estar definido en el origen, se generaliza en esta memoria de la siguiente manera. Observamos que la n-ésima Quantum Derivada se puede expresar como:

$$\lim_{q \to 1} \frac{\sum_{k=0}^{n} A_k(q) f\left(q^{a_k} x\right)}{(q-1)^n x^n}, \tag{2}$$

para ciertas funciones medibles A_k y para $a_k = k$ (Lema 3.41). Así, dados unos números a_0, a_1, ... , a_n distintos entre sí y unas funciones medibles $A_0(q)$, $A_1(q)$, ... , $A_n(q)$, el límite (2) será una n-ésima Quantum Derivada Generalizada cuando sea una extensión de la n-ésima Derivada clásica. Esto ocurre cuando las funciones medibles y los números distintos entre sí cumplen la propiedad de que el límite coincide con la n-ésima Derivada para los polinomios de grado menor o igual que n en el punto $x = 1$. Esta es la definición, que introducimos en la Sección 3.1, de cuándo unas funciones $A_0(q)$, ... , $A_n(q)$ son coeficientes asociados a unos números distintos entre sí $a_0, \ldots, a_n$, que llamamos exponentes (Definición 3.13).

También vemos en esta sección algunas propiedades de estos coeficientes. Principalmente se demuestra que las funciones que son coeficientes asociados a números están acotadas en un entorno de uno (Proposición 3.14).

En la Sección 3.2 definimos el límite (2) como la n-ésima Quantum Derivada Generalizada con respecto a $\{a_0, \ldots, a_n; A_0(q), \ldots, A_n(q)\}$ cuando las funciones medibles $A_0(q), \ldots, A_n(q)$ sean coeficientes asociados a los números distintos entre sí $a_0, \ldots, a_n$ (Definición 3.16).

Vemos que, efectivamente, son extensiones de la Derivada clásica (Corolario 3.18). Más aún, todas las Quantum Derivadas Generalizadas son extensiones de la Derivada de Peano (Proposición 3.17), es decir, cualquier n-ésima Quantum Derivada Generalizada coincide con la n-ésima Derivada de Peano en caso de que ésta exista.

Por el contrario, para $n > 1$ existen funciones que tienen alguna n-ésima Quantum Derivada Generalizada en un punto sin tener n-ésima Derivada de Peano, y por tanto sin ser n veces Diferenciable. Incluso se pueden encontrar funciones que tengan alguna n-ésima Quantum Derivada Generalizada en un conjunto de medida positiva sin ser n veces Derivable en ningún punto del conjunto (Corolario 3.21). Pero:

> ¿si una función tiene una n-ésima Quantum Derivada Generalizada en un conjunto, entonces tiene n-ésima Derivada de Peano en casi todo el conjunto? (3)

Nuestro principal objetivo en esta segunda parte de la memoria es intentar dar respuesta a esta cuestión, y nuestras herramientas más importantes son las ideas que aparecen al resolver la pregunta para el caso de las Derivadas de Riemann, en vez de las Quantum. Principalmente tomamos las ideas de dos trabajos: el de Marcinkiewicz y Zygmund [MZ], quienes dan respuesta afirmativa a la pregunta para las Derivadas de Riemann no generalizadas, como comentamos anteriormente; y el de Ash [A], que para el caso de las Generalizadas también da respuesta afirmativa. La gran diferencia entre las Quantum Derivadas y las Derivadas de Riemann es que los coeficientes no son constantes, lo que dificulta considerablemente la prueba de los resultados.

Siguiendo en la Sección 3.2, vemos algunas propiedades de las Quantum Derivadas Generalizadas. Así, demostramos en el lema del desplazamiento (Lema 3.23) que existe una relación entre las Quantum Derivadas que tienen iguales coeficientes pero exponentes trasladados. También probamos que las funciones que tienen alguna Quantum Derivada Generalizada están localmente acotadas en casi todo (Lema 3.24).

Como observaron Fejzić y Weil [FW] en el caso de las Derivadas de Riemann, en las demostraciones de estos lemas surgen problemas de que ciertos conjuntos no son medibles; por esta razón tenemos que introducir en los preliminares conceptos relacionados con la medida exterior de Lebesgue, especialmente la definición de cubierta medible de un conjunto arbitrario. Necesitamos que las cubiertas medibles sean invariantes por funciones diferenciables, resultado que probamos en el capítulo de los preliminares (Lema 1.2).

A partir de los resultados que se ven en la Sección 3.2, podemos dar respuesta afirmativa a la pregunta (3) para el caso $n = 1$ (Corolario 3.26). Para demostrar este resultado nos apoyamos en un conocido teorema de Denjoy [D] que nos asegura la Derivabilidad de una función en casi todo un conjunto supuestas ciertas acotaciones sobre las pendientes de las secantes.

Este resultado de Denjoy es generalizado por Marcinkiewicz y Zygmund [MZ] para las n-ésimas Derivadas de Peano con técnicas profundas del Análisis Armónico. Esta generalización es una de las herramientas que mencionamos antes y que utilizamos en esta memoria. Por ejemplo, en la Sección 3.3 el último paso para dar respuesta positiva en el caso de las segundas Quantum Derivadas Generalizadas es el resultado anterior de Marcinkiewicz y Zygmund. El primer paso es reducir el problema, mediante las propiedades de la Sección 3.2, al caso en que los exponentes son $0, 1$ y a, con a mayor que 1. Este caso se puede tratar siguiendo [MZ] aunque, como comentamos anteriormente, el hecho de que los coeficientes no sean constantes complica sustancialmente las demostraciones.

Para terminar el Capítulo 3 exponemos esencialmente el trabajo realizado junto a Ash y Catoiu sobre las Quantum Derivadas sin generalizar. En la Sección 3.5, vemos que estas derivadas son una caso particular de las generalizadas y respondemos a la pregunta (3) de manera positiva sea cual sea el número natural n (Corolario 3.45). Para demostrar este resultado relacionamos estas derivadas con un caso particular de Quantum Derivada Generalizada con exponentes $0, 1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}$ (Lema 3.43) para el cual podemos dar también respuesta positiva a la pregunta en la Sección 3.4.

En esta sección, estudiamos unos casos particulares entre los que se encuentra el anterior. Primero demostramos, de manera no trivial, que son realmente Quantum Derivadas Generalizadas, y después damos respuesta afirmativa a la pregunta para las n-ésimas derivadas de estos casos particulares. La demostración de este resultado sigue la misma línea que la prueba para las segundas Quantum Derivadas Generalizadas de la Sección 3.3.

El problema que queda abierto es si para $n > 2$ hay alguna n-ésima Quantum Derivada Generalizada que exista para una función en un conjunto de medida positiva sin que exista la n-ésima Derivada de Peano de la función en todo el conjunto; o por el contrario, se sigue teniendo respuesta afirmativa a la pregunta (3) para cualquier n-ésima Quantum Derivada Generalizada.

Índice General

Capítulo 1

PRELIMINARES

1.1 Sobre la Teoría de la Medida

En esta primera sección, vamos a recordar algunos conceptos y resultados sobre la Teoría de la Medida. Todos ellos aparecen en la mayoría de los libros que tratan con cierta profundidad este tema. También incluimos ciertos lemas que se utilizan en el desarrollo de la memoria, pero que se apartan un poco del eje principal.

- La *medida exterior de Lebesgue* de un subconjunto E de la recta real se define como:

$$|E|^* = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{long}(I_i) : (I_i) \text{ sucesión de intervalos, } E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right\}.$$

- Un conjunto G es *medible Lebesgue* si $|E|^* = |E \cap G|^* + |E \setminus G|^*$ para cualquier conjunto E. La medida de Lebesgue de un conjunto medible G es su medida exterior y se representa $|G|$.

Es conocido que la clase de los conjuntos medibles forman una σ-álgebra en la recta real, es decir, contiene al vacío y es cerrada por uniones numerables y por complementación.

- Sea $\mathcal{A}$ una clase de subconjuntos de un espacio arbitrario X. La menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}$ se llama *σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$*.

- Se dice que B es un *conjunto de Borel* de un espacio topológico X si pertenece a la σ-álgebra generada por la clase de los conjuntos abiertos.

Se tiene que cualquier conjunto de Borel de la recta real es medible Lebesgue. Así, hablamos de manera indistinta de conjunto de Borel o de *Borel medible.*

- Una función real de variable real f es *medible Lebesgue* o, abreviando, *medible*, si $f^{-1}(B)$ es medible para cualquier conjunto de Borel B. Si las imágenes inversas son todas Borel medibles, entonces se dice que f es *Borel medible.* De manera análoga, se definen las funciones Borel medibles entre espacios topológicos.

Centrándonos en el intervalo $[0,1]$ con la medida de Lebesgue, sea (f_n) una sucesión de funciones reales medibles definidas en $[0,1]$. Consideremos los conjuntos de la forma:

$$f_1^{-1}(B_1) \cap f_2^{-1}(B_2) \cap \ldots \cap f_n^{-1}(B_n)$$

con n un número natural y $B_1, B_2, \ldots, B_n$ Borel medibles de $[0,1]$, y sea $\mathcal{A}$ la clase de todas las posibles uniones finitas y disjuntas de los conjuntos anteriores.

Observemos que un punto x pertenece al conjunto $f_1^{-1}(B_1) \cap \ldots \cap f_n^{-1}(B_n)$ si y sólo si $(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ pertenece al rectángulo $B_1 \times \ldots \times B_n$; y, por tanto, que si tenemos dos rectángulos disjuntos, $B_1 \times \ldots \times B_n$ y $A_1 \times \ldots \times A_n$, entonces los conjuntos $f_1^{-1}(B_1) \cap \ldots \cap f_n^{-1}(B_n)$ y $f_1^{-1}(A_1) \cap \ldots \cap f_n^{-1}(A_n)$ también son disjuntos.

Así, como la clase de todas las posibles uniones finitas y disjuntas de rectángulos es un álgebra [H, Sections 33 y 37], tenemos que $\mathcal{A}$ es un álgebra.

Por otro lado, está claro que la σ-álgebra que genera $\mathcal{A}$ es la menor σ-álgebra que hace que las funciones f_n sean medibles, es decir, es la *σ-álgebra generada por la sucesión (f_n).*

De esta manera tenemos el siguiente resultado:

Lema 1.1. *Si F es un subconjunto medible de $[0,1]$ de medida positiva perteneciente a la σ-álgebra generada por (f_n), entonces para cualquier constante $c \in (0,1)$ existen n natural y $B_1, B_2, \ldots, B_n$ Borel medibles tales que:*

$$\left| F \cap \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(B_i) \right| > c \left| \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(B_i) \right|.$$

Demostración. Por [H, Section 13, Theorem D], dado $\varepsilon > 0$ existe A perteneciente a $\mathcal{A}$ tal que $|F \triangle A| < \varepsilon |F|$. En particular:

$$|F \cap A| > (1-\varepsilon)\,|F| > \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\,|A|\,. \tag{1.1}$$

Y como A es unión disjunta de conjuntos de la forma $f_1^{-1}(B_1) \cap \ldots \cap f_n^{-1}(B_n)$, llegamos a que existe uno de tales conjuntos cumpliendo la tesis del lema.

Este último paso se demuestra por reducción al absurdo. Supongamos que A es la unión disjunta de $A_1, \ldots, A_n$. Entonces si para todo $i = 1, \ldots, n$:

$$|F \cap A_i| \leq \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\,|A_i|\,,$$

sumando desde $i = 1$ hasta n, llegamos a una contradicción con que A cumpla (1.1). □

Este último razonamiento se repite varias veces a lo largo de la primera parte de la memoria.

Por otro lado, cualquier subconjunto arbitrario E de la recta real cumple que:

$$|E|^* = \inf\{|B| : B \text{ abierto, } E \subset B\}\,. \tag{1.2}$$

- Un conjunto G es una *cubierta medible*[1] de un conjunto arbitrario E si G es un medible que contiene a E tal que $|E|^* = |G|$.

Observamos que dado cualquier subconjunto de la recta real siempre existe una cubierta medible; más concretamente, una cubierta medible que sea un G_δ. Además, si G es una cubierta medible de E, entonces se ve fácilmente que $aG + b$ es una cubierta medible de $aE + b$, donde a y b son números reales.

Nosotros vamos a necesitar una generalización de este resultado para N-funciones continuas, es decir, para funciones continuas que llevan conjuntos de medida nula en conjuntos de medida nula.

Lema 1.2. *Sea φ una N-función continua. Si G es una cubierta medible de E, entonces $\varphi(G)$ es una cubierta medible de $\varphi(E)$.*

Demostración. Todo medible se puede descomponer en un conjunto de medida nula y un F_σ. Por tanto la imagen de un medible mediante φ es medible, ya que lleva conjuntos de medida nula en conjuntos de medida nula por ser

[1] En inglés *measurable cover*.

N-función y lleva compactos en compactos por ser continua. En particular $\varphi(G)$ es medible.

Está claro que $\varphi(E) \subset \varphi(G)$. Así pues, sólo falta demostrar que $|\varphi(G)| \leq |\varphi(E)|^*$. Sea B un abierto que contenga a $\varphi(E)$, entonces tenemos que:

$$|\varphi(G)| \leq \left|\varphi\left(G \setminus \varphi^{-1}(B)\right)\right| + |B|;$$

como $\varphi^{-1}(B)$ es un medible que contiene a E, y G es una cubierta medible de E, tenemos que $|G \setminus \varphi^{-1}(B)| = 0$. Y como φ es una N-función, el primer sumando de la derecha de la desigualdad anterior es nulo. Así, para cualquier abierto B que contenga a $\varphi(E)$:

$$|\varphi(G)| \leq |B|,$$

es decir, por (1.2), $|\varphi(G)| \leq |\varphi(E)|^*$. □

- Se dice que un punto x es un *punto de densidad exterior* de E si

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|E \cap (x-h, x+h)|^*}{2h} = 1.$$

  En el caso en que E sea medible, se dice que x es un *punto de densidad* del conjunto E.

De esta manera, siendo G una cubierta medible de E, x es un punto de densidad exterior de E si y sólo si x es un punto de densidad de G. Para probarlo, se puede suponer que la medida exterior de E es finita y, en ese caso, basta observar que para cualquier conjunto medible H, $|E \cap H|^* = |G \cap H|$:

$$\begin{aligned} |E \cap H|^* \leq |G \cap H| &= |G| - |G \setminus H| \\ &= |E|^* - |G \setminus H| \\ &\leq |E|^* - |E \setminus H|^* \\ &= |E \cap H|^*. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Así, casi todos los puntos de un conjunto E son puntos de densidad exterior de E. Esto se puede deducir de lo comentado anteriormente y del conocido Teorema de Densidad de Lebesgue que enunciamos a continuación.

Teorema 1.3. [RS, Theorem 21.29] *Casi todo punto de un conjunto medible G es un punto de densidad del conjunto G.*

- Se dice que una sucesión de conjuntos medibles, (C_n), *se contrae aceptablemente a x* si cumple las siguientes dos condiciones:

- $\lim_{n\to+\infty} |C_n| = 0$; y
- existe una constante $c > 0$ tal que si J_n representa el menor intervalo cerrado centrado en el punto x que contiene a C_n, entonces, cuando n es suficientemente grande, se tiene que:

$$\frac{|C_n|}{|J_n|} \geq c. \tag{1.4}$$

De esta manera se cumple el siguiente resultado. Para facilitar la lectura, incluimos una prueba de él a partir del Teorema de Densidad de Lebesgue, aunque hay pruebas directas como en [R1, Theorem 8.8].

Lema 1.4. *Si (C_n) se contrae aceptablemente a un punto de densidad de G, entonces:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|G \cap C_n|}{|C_n|} = 1.$$

Demostración. Por reducción al absurdo, si existe $\varepsilon \in (0,1)$ tal que para una subsucesión k_n tendiendo a infinito:

$$|G \cap C_{k_n}| < (1-\varepsilon)\,|C_{k_n}|,$$

entonces, si G^c es el complementario de G, llegamos a que:

$$\frac{|G \cap J_{k_n}|}{|J_{k_n}|} = 1 - \frac{|G^c \cap J_{k_n}|}{|J_{k_n}|} \leq 1 - \frac{|G^c \cap C_{k_n}|}{|J_{k_n}|} < 1 - \frac{\varepsilon\,|C_{k_n}|}{|J_{k_n}|} \leq 1 - \varepsilon c.$$

Esto es una contradicción con que x sea un punto de densidad de G. □

Hacemos notar que si en vez de tener una sucesión de conjuntos tenemos una colección, como ocurre en la demostración del Lema 3.22, se obtienen resultados análogos. Concretamente, si $(C_q)_{q\in\mathcal{N}}$, con $\mathcal{N}$ un entorno de 1, se contrae aceptablemente a un punto de densidad de G, entonces $|G \cap C_q| \simeq |C_q|$, es decir:

$$\lim_{q\to 1} \frac{|G \cap C_q|}{|C_q|} = 1.$$

Entendiéndose que $(C_q)_{q\in\mathcal{N}}$ se contrae aceptablemente a x si cumple que $\lim_{q\to 1} |C_q| = 0$ y que existe una constante $c > 0$ tal que:

$$\frac{|C_q|}{|J_q|} \geq c, \tag{1.5}$$

cuando q está próximo a 1, siendo J_q el menor intervalo cerrado centrado en el punto x que contiene a C_q.

Los siguientes resultados sobre medibilidad que vemos en esta sección tratan de mostrar que ciertas funciones φ llevan medibles en medibles y que la medida de cada conjunto $\varphi(B)$ guarda cierta relación con la medida del medible B.

- Se dice que una función φ *conserva la medida* si para cualquier medible B, se tiene que $\varphi(B)$ es medible y tiene la misma medida que B.

Es conocido que las funciones absolutamente continuas llevan medibles en medibles. Además se tienen los siguientes resultados.

Teorema 1.5. [HS, Theorem 18.17] *Una función f definida en un intervalo $[a,b]$ de la forma:*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(t)dt$$

para alguna función integrable φ, es absolutamente continua en $[a,b]$ y cumple que su derivada coincide con φ en casi todo $[a,b]$.

Teorema 1.6. [HS, Corollary 20.5] *Sea φ una N-función continua y monótona con dominio $[a,b]$ y rango $[\alpha,\beta]$. Entonces φ es absolutamente continua y para cualquier función integrable f se tiene que:*

$$\int_\alpha^\beta f(y)dy = \int_a^b f(\varphi(x))|\varphi'(x)|dx.$$

A partir de estos dos teoremas deducimos el siguiente lema.

Lema 1.7. *Sean $A \subset [a,b]$ un medible Lebesgue y φ la función definida en $[a,b]$ por:*

$$\varphi(x) = \int_a^x \chi_A(t)dt.$$

donde χ_A representa la función característica del conjunto A. Entonces φ es una función absolutamente continua que cumple que $|\varphi(B)| = |A \cap B|$ para todo B medible Lebesgue.

Demostración. La función φ cumple las hipótesis del Teorema 1.6, por tanto es absolutamente continua, y además para cualquier B medible:

$$|\varphi(B)| = \int_0^{|A|} \chi_{\varphi(B)}(y)dy = \int_a^b \chi_{\varphi(B)}(\varphi(x))|\varphi'(x)|dx;$$

por el Teorema 1.5, tenemos que:

$$|\varphi(B)| = \int_a^b \chi_{\varphi(B)}(\varphi(x))\chi_A(x)dx = |A \cap \varphi^{-1}(\varphi(B))|;$$

y esta última medida es igual a la medida del conjunto $A \cap B$, ya que los puntos de A que están en el conjunto $\varphi^{-1}(\varphi(B))$ sin ser puntos de B no son puntos de densidad de A y, por tanto, tienen medida nula. En efecto, sea x perteneciente a $A \setminus B$ tal que $\varphi(x) \in \varphi(B)$. Como x no pertenece a B existe y distinto de x y perteneciente a B tal que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Así, por la definición de φ, la medida del conjunto A en el intervalo de extremos x e y es nula y, en consecuencia, x no es un punto de densidad de A. $\square$

Siguiendo con el problema de ver cuándo ciertas funciones llevan conjuntos medibles en conjuntos medibles, nos encontramos con una situación en la que tenemos que utilizar algunos resultados de la teoría de los conjuntos analíticos. Todos los que se utilizan en este trabajo aparecen en [C].

- Un *espacio polaco* X es un espacio topológico separable que es metrizable por una métrica completa.

Por ejemplo $X = [0, 1]$ con la métrica usual es un espacio polaco.

- Se dice que un subconjunto E de un espacio polaco X es un *conjunto analítico* si es la imagen de otro espacio polaco Y por una aplicación continua de Y en X.

Entonces se tienen los siguientes resultados:

Proposición 1.8. [C, **Proposition 8.2.3**] *Cualquier Borel medible de un espacio polaco es un conjunto analítico.*

Teorema 1.9. [C, **Theorem 8.4.1**] *Cualquier conjunto analítico de un espacio polaco X es universalmente medible, es decir, medible respecto de la compleción de cualquier medida de Borel finita sobre X.*

Teorema 1.10. **[C, Proposition 8.2.6]** *Sea f una aplicación Borel medible entre espacios polacos X e Y. Si A es un conjunto analítico de X, entonces $f(A)$ es un conjunto analítico de Y.*

Ahora enunciamos y probamos un lema que se utiliza en el segundo capítulo de esta memoria. En él vemos algunas propiedades que tiene el límite puntual de funciones Borel medibles que conservan la medida.

Lema 1.11. *Sea (φ_n) una sucesión de aplicaciones Borel medibles de $[0,1]$ en sí mismo que conservan la medida, tal que existe su límite puntual en $[0,1]$. Sea:*

$$\varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) \text{ para todo } x \in [0,1].$$

Entonces para cualquier B Borel medible se tiene que $\varphi(B)$ es medible Lebesgue y su medida cumple $|\varphi(B)| \geq |B|$.

Demostración. Como φ es una aplicación Borel medible entre espacios Polacos, lleva conjuntos analíticos en conjuntos analíticos. En particular, por el Teorema 1.9 y por la Proposición 1.8, la imagen de todo conjunto de Borel es medible Lebesgue, ya que la medida de Lebesgue es la compleción de la medida de Lebesgue sobre los Borel medibles.

Veamos ahora que para cualquier Borel medible B, $|\varphi(B)| \geq |B|$. Fijado B Borel medible, basta probar que para cualquier subconjunto cerrado A de medida mayor que $1-|B|$ se tiene que $A \cap \varphi(B) \neq \phi$. Sea A un subconjunto cerrado de medida mayor que $1-|B|$, y consideremos los conjuntos $\varphi_n^{-1}(A)$. Como φ_n conserva la medida tenemos que $|\varphi_n([0,1])| = 1$ y por tanto:

$$|\varphi_n^{-1}(A)| = |\varphi_n(\varphi_n^{-1}(A))| = |\varphi_n([0,1]) \cap A| = |A|.$$

Así, por el lema de Fatou:

$$|A| = \limsup \int \chi_{\varphi_n^{-1}(A)} \leq \int \limsup \chi_{\varphi_n^{-1}(A)}.$$

Como el conjunto A tiene medida mayor que $1-|B|$, existe $x \in B$ tal que $\limsup \chi_{\varphi_n^{-1}(A)}(x) = 1$. En efecto, por reducción al absurdo, si para todo $x \in B$ el límite superior no es uno, entonces es cero. Por tanto llegamos a la siguiente contradicción:

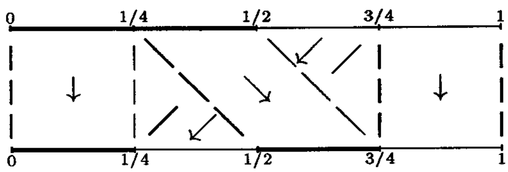
$$|A| \leq \int \limsup \chi_{\varphi_n^{-1}(A)} = \int_{[0,1]\setminus B} \limsup \chi_{\varphi_n^{-1}(A)} \leq 1 - |B|.$$

Así, existen infinitos n tales que $\varphi_n(x) \in A$ para un punto x perteneciente a B. Como A es cerrado, $\varphi(x) \in A$ y por tanto el conjunto $A \cap \varphi(B)$ no es vacío. $\square$

Observemos que con las hipótesis del lema anterior, la función límite puntual no tiene por qué conservar la medida. Consideremos la siguiente función:

$$\psi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1/4) \\ x + 1/2 & \text{si } x \in [1/4, 1/2) \\ x - 1/2 & \text{si } x \in [1/2, 3/4) \\ x & \text{si } x \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

Esta función ψ lleva $[0, 1/4) \cup [3/4, 1]$ en sí mismo por la identidad, y de manera lineal intercambia los conjuntos $[1/2, 3/4)$ y $[1/4, 1/2)$,

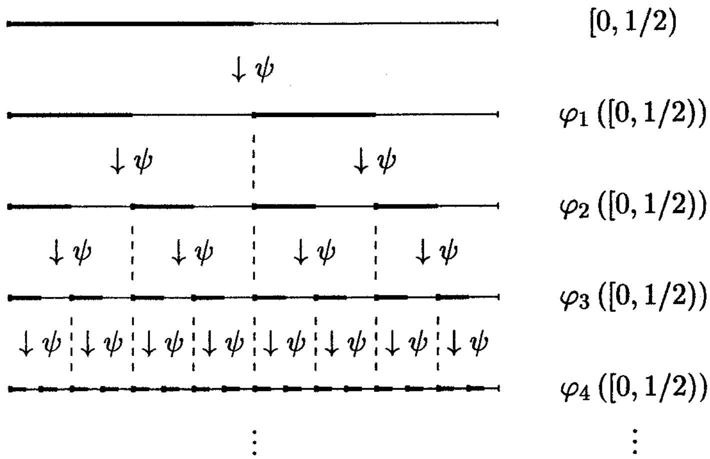


Es fácil ver que ψ es Borel medible y que conserva la medida. Sea $\psi_1 = \psi$ y para cada $n > 1$:

$$\psi_n(x) = \frac{\psi_{n-1}(2x)}{2} \chi_{[0,1/2)}(x) + \frac{\psi_{n-1}(2x-1)+1}{2} \chi_{[1/2,1]}(x).$$

Sin ser demasiado preciso, ψ_n actúa sobre cada uno de los intervalos diádicos de la forma $[k/2^n, (k+1)/2^n)$ como actúa ψ sobre $[0, 1)$, y por tanto ψ_n mantiene las mismas propiedades que ψ. Observemos que si consideramos los puntos de $[0, 1)$ en su desarrollo binario (que no sean todos unos a partir de uno), la función ψ cambia las dos primeras componentes del desarrollo entre sí; por ejemplo, $\psi(0.01101011\ldots) = 0.10101011\ldots$ Y la función ψ_n cambia las componentes n-ésima y $(n+1)$-ésima.

Consideremos la sucesión de funciones (φ_n) donde φ_n se obtiene componiendo las n primeras ψ_k, es decir, $\varphi_n = \psi_n \circ \psi_{n-1} \circ \ldots \circ \psi_2 \circ \psi_1$. Estas funciones siguen cumpliendo las propiedades de ser Borel medibles y de conservar la medida. Sin embargo, si φ es el límite puntual de la sucesión tenemos que $\varphi([0, 1/2)) = [0, 1)$.



En efecto, observemos que φ_{n-1} desplaza la primera componente n lugares hacia la derecha, desplazando un lugar hacia la izquierda la segunda, la tercera... hasta la n-ésima componente. Por tanto dado $x = 0.x_1x_2 \ldots \in [0, 1)$ se tiene que el punto $0.0x_1x_2 \ldots \in [0, 1/2)$ verifica:

$$\varphi(0.0x_1x_2 \ldots) = \lim_{n \to +\infty} \varphi_n(0.0x_1x_2 \ldots) = \lim_{n \to +\infty} 0.x_1 \ldots x_{n-1}0x_n \ldots = x.$$

1.2 Sobre acotaciones de determinantes

Para terminar con los preliminares, vamos a demostrar un resultado que nos sirve para ver, en la Sección 3.1, que los coeficientes de las Quantum Derivadas Generalizadas están acotados.

Hacemos notar que el resultado que vamos a probar se obtiene como consecuencia de teoremas ya existentes sobre los determinantes de ciertas matrices, exactamente, sobre los determinantes de las matrices que resultan de quitarles cierto número de filas y columnas a la matriz de Vandermonde. El valor de estos determinantes está calculado en función de los polinomios simétricos (ver [E, Theorem 4.7] o [HI, Section 13.7]).

Aquí damos una prueba diferente que aligera la notación de las pruebas de los resultados comentados anteriormente y cuya herramienta básica es el desarrollo de Taylor.

Como suele ser habitual, $f^{(k)}$ representa a la k-ésima Derivada de f; si $k = 0$, entonces $f^{(0)} = f$. En esta sección, usamos también la notación f_a para la función potencial: $f_a(q) = q^a$, donde a es un número real.

Lema 1.12. *Sea $n > 1$ un número natural. Para cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales y $k_1, k_2, \ldots, k_n$ números enteros no negativos cumpliendo:*

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n < \binom{n}{2},$$

se verifica que los vectores infinitos $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes, donde, para $j = 1, 2, \ldots, n$, el vector v_j es:

$$\left(f_0^{(k_j)}(1), f_{a_j}^{(k_j)}(1), f_{2a_j}^{(k_j)}(1), f_{3a_j}^{(k_j)}(1), f_{4a_j}^{(k_j)}(1), \ldots\right).$$

Demostración. Por inducción sobre n. Para el caso $n = 2$ la única posibilidad es $k_1 = k_2 = 0$ y, por tanto, los dos vectores v_1 y v_2 son iguales ya que todas sus componentes son 1.

Supongamos que tenemos el resultado para $n - 1$, veámoslo para n. Si existe i_0 tal que $k_{i_0} \geq n - 1$, aplicamos la hipótesis de inducción a los a_i y los k_i salvo los correspondientes al índice i_0,

$$k_1 + \ldots + k_{i_0-1} + k_{i_0+1} + \ldots + k_n < \binom{n}{2} - (n-1) = \binom{n-1}{2}.$$

Así, obtenemos que $n - 1$ vectores de $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes y, en consecuencia, lo son los n vectores.

Si para todo i se tiene que $k_i < n-1$, basta demostrar que para cualquier número a y cualquier entero no negativo k menor que $n - 1$, el vector:

$$v = \left(f_0^{(k)}(1), f_a^{(k)}(1), f_{2a}^{(k)}(1), f_{3a}^{(k)}(1), f_{4a}^{(k)}(1), \ldots\right)$$

pertenece al espacio vectorial generado por los siguientes $n - 1$ vectores:

$$\begin{array}{ccccccc}
(& 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & \ldots), \\
(& 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots), \\
(& 0, & 1^2, & 2^2, & 3^2, & 4^2, & \ldots), \\
 & & & \vdots & & & \\
(& 0, & 1^{n-2}, & 2^{n-2}, & 3^{n-2}, & 4^{n-2}, & \ldots);
\end{array} \qquad (1.6)$$

ya que tendríamos n vectores $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ en un espacio vectorial de dimensión $n-1$.

Si $k=0$ todas las componentes del vector v son 1. Si $0<k<n-1$ tenemos que:

$$f_a^{(k)}(1) = a(a-1)(a-2)\ldots(a-k+1) = p_k(a),$$

donde p_k es un polinomio de grado k sin término constante. Si el polinomio es:

$$p_k(a) = c_1 a + c_2 a^2 + \ldots + c_{k-1}a^{k-1} + a^k,$$

entonces podemos expresar v como combinación lineal de k vectores de (1.6), pues para todo i:

$$f_{ia}^{(k)}(1) = c_1 ai + c_2 a^2 i^2 + \ldots + c_{k-1}a^{k-1}i^{k-1} + a^k i^k.$$

$\square$

Proposición 1.13. *Sean $i_1, i_2, \ldots, i_n$ números enteros no negativos y sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales, entonces cuando q tiende a 1:*

$$\begin{vmatrix} q^{i_1a_1} & q^{i_1a_2} & \ldots & q^{i_1a_n} \\ q^{i_2a_1} & q^{i_2a_2} & \ldots & q^{i_2a_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q^{i_na_1} & q^{i_na_2} & \ldots & q^{i_na_n} \end{vmatrix} = O\left((q-1)^{\binom{n}{2}}\right).$$

Demostración. Sea $g(q)$ el determinante anterior. Utilizando el desarrollo de Taylor de g en el 1, basta demostrar que para todo $k < \binom{n}{2}$ se tiene $g^{(k)}(1) = 0$.

Recordando que la Derivada de un determinante es la suma de todos los determinantes que se obtienen derivando una sola columna, tenemos que la k-ésima Derivada de g es:

$$g^{(k)}(q) = \sum_{k_1+\ldots+k_n=k} \begin{vmatrix} f_{i_1a_1}^{(k_1)}(q) & f_{i_1a_2}^{(k_2)}(q) & \ldots & f_{i_1a_n}^{(k_n)}(q) \\ f_{i_2a_1}^{(k_1)}(q) & f_{i_2a_2}^{(k_2)}(q) & \ldots & f_{i_2a_n}^{(k_n)}(q) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{i_na_1}^{(k_1)}(q) & f_{i_na_2}^{(k_2)}(q) & \ldots & f_{i_na_n}^{(k_n)}(q) \end{vmatrix}.$$

Y así, para $k < \binom{n}{2}$, $g^{(k)}(1) = 0$, ya que cada uno de los determinantes tiene vectores columnas linealmente dependientes por el Lema 1.12, puesto que son parte de los vectores que allí aparecen. $\square$

Observemos que en el caso $i_j = j - 1$ el determinante del enunciado anterior no es más que el determinante de la matriz de Vandermonde de $q^{a_1}, q^{a_2}, \ldots, q^{a_n}$,

$$V(q^{a_1}, q^{a_2}, \ldots, q^{a_n}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ q^{a_1} & q^{a_2} & \ldots & q^{a_n} \\ q^{2a_1} & q^{2a_2} & \ldots & q^{2a_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q^{(n-1)a_1} & q^{(n-1)a_2} & \ldots & q^{(n-1)a_n} \end{pmatrix}.$$

Y en este caso, como para cualquier a y b números reales se cumple:

$$q^a - q^b \simeq (a-b)(q-1), \tag{1.7}$$

obtenemos directamente:

$$|V(q^{a_1}, q^{a_2}, \ldots, q^{a_n})| = \prod_{m<l} (q^{a_l} - q^{a_m}) \simeq \prod_{m<l} (a_l - a_m)(q-1)^{\binom{n}{2}}. \tag{1.8}$$

Capítulo 2

CONJUNTOS DE UNICIDAD DE SISTEMAS DE FUNCIONES INDEPENDIENTES

Nos situamos en el espacio de probabilidad $[0, 1]$ con la medida de Lebesgue, que representamos por $|\cdot|$. Y consideramos los *sistemas ortogonales en* $L^2[0, 1]$, es decir, las sucesiones de funciones medibles no idénticamente nulas (f_n) tales que, para todo n y m naturales, se tiene que:

$$\int_0^1 f_m(x) f_n(x) dx = \delta_{m,n},$$

siendo $\delta_{m,n}$ la delta de Kronecker. También, como es habitual, adoptamos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \|f\|_2 &= \left(\int_0^1 f(x)^2 \, dx \right)^{1/2} \\ \|f\|_\infty &= \inf\{C : |f(x)| \leq C \text{ para casi todo } x \in [0, 1]\}. \end{aligned}$$

Dado un sistema ortogonal (f_n) en $L^2[0, 1]$, se dice que un conjunto $E \subset [0, 1]$ es un *conjunto de unicidad para el sistema* (f_n) si los únicos coeficientes (a_n) que cumplen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) = 0 \text{ para todo } x \in [0,1] \setminus E,$$

son los nulos. De esta manera, si E es un conjunto de unicidad, su complementario determina las series en el siguiente sentido: si dos series coinciden en él, entonces tienen los mismos coeficientes.

Así, nosotros decimos que un conjunto A *determina para el sistema* (f_n) si su complementario es un conjunto de unicidad para el sistema, es decir, si la única serie que se anula en él es la de coeficientes nulos.

Además, decimos que E es un *conjunto de unicidad débil para el sistema* (f_n) si las únicas series que se anulan fuera de E son realmente sumas finitas. Y, de manera coherente, diremos que un conjunto *determina débilmente* si su complementario es un conjunto de unicidad débil.

Para el caso particular del sistema ortogonal (r_n) formado por las funciones de Rademacher,

$$r_n(x) = \operatorname{sign} \operatorname{sen}(2^n \pi x) \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.1. **[SU, Theorem 1]** *Cualquier conjunto $E \subset [0,1]$ de medida menor que $1/2$ es un conjunto de unicidad para el sistema de Rademacher y para cualquiera de los sistemas que se obtienen al permutar las funciones del sistema. Además, si E no tiene medida total, es decir, si $|E| < 1$, entonces E es un conjunto de unicidad débil para cualquier permutación del sistema de Rademacher.*

Profundizando un poco más se demuestra que existen conjuntos de unicidad de medida total. Más concretamente, existen conjuntos numerables que determinan para cualquier permutación del sistema de Rademacher. Esto se deduce del siguiente teorema, tomando el conjunto F de medida mayor que $1/2$ y aplicando el Teorema 2.1.

Teorema 2.2. **[B, Theorem 1]** *Para cada conjunto $F \subset [0,1]$ de medida positiva existe un subconjunto numerable A de F tal que para cualquier permutación σ si:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_{\sigma(n)}(x) = 0 \text{ para todo } x \in A,$$

entonces la serie converge a cero también en F.

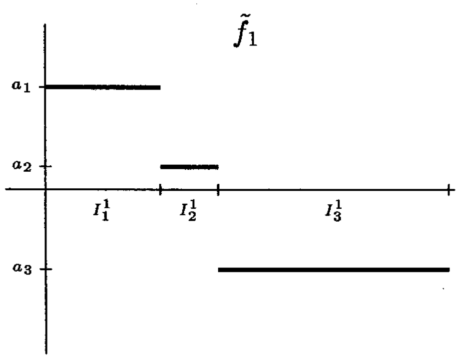
Como se ve en la siguiente sección, una de las propiedades que tienen las funciones de Rademacher es que son funciones independientes. El trabajo de este capítulo se centra en observar hasta qué punto la independencia es clave en los resultados sobre los conjuntos de unicidad para este sistema.

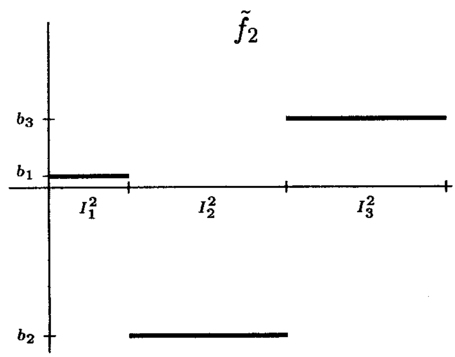
2.1 Funciones Independientes

Se dice que una cantidad finita de funciones reales medibles definidas en el intervalo $[0,1]$, f_1, $f_2, \dots, f_n$, son *independientes* si para cualesquiera B_1, $B_2, \dots, B_n$ Borel medibles, se tiene que:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(B_i)\right| = \prod_{i=1}^{n} \left|f_i^{-1}(B_i)\right|.$$

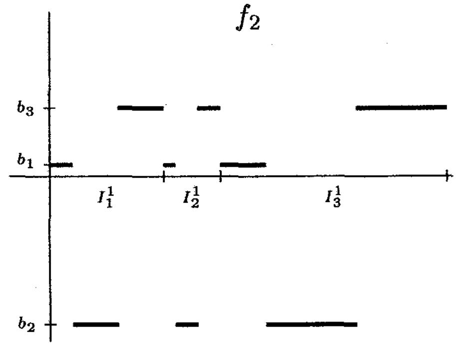
Veamos unos ejemplos de funciones independientes que nos ayudan a comprender mejor el concepto de independencia en este sentido probabilístico y que se utilizan a lo largo de este capítulo. Los ejemplos se construyen a partir de unas funciones constantes en intervalos [KS, Chapter II, Theorem 1][1]. Gráficamente, supongamos que tenemos las siguientes dos funciones constantes en intervalos:





Consideremos $f_1 = \tilde{f}_1$ y f_2 la función que se obtiene al representar en cada uno de los intervalos donde f_1 es constante la función $\tilde{f}_2$ de manera proporcional:

[1]Esta construcción fue utilizada en los años 30, por la escuela polaca (Steinhaus, Marcinkiewicz, Zygmund,...).



De esta manera las funciones f_1, f_2 son independientes ya que:

$$\left|f_1^{-1}(a_i) \cap f_2^{-1}(b_j)\right| = \left|I_i^1\right| \left|I_j^2\right| = \left|f_1^{-1}(a_i)\right| \left|f_2^{-1}(b_j)\right| .$$

Obsérvese además que la función f_2 tiene la misma función de distribución que $\tilde{f}_2$, es decir, para todo B Borel medible $\left|f_2^{-1}(B)\right| = \left|\tilde{f}_2^{-1}(B)\right|$.

Si tenemos n funciones constantes en intervalos, $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2, \dots$, $\tilde{f}_n$, construimos n funciones independientes f_1, $f_2, \dots$, f_n, tomando $f_1 = \tilde{f}_1$, y una vez construidas f_1, $f_2, \dots$, f_{i-1}, para construir f_i representamos proporcionalmente $\tilde{f}_i$ en cada intervalo donde las funciones f_1, $f_2, \dots$, f_{i-1} sean todas constantes a la vez.

Con más precisión decimos que una función f es *constante en intervalos* si se puede representar de la siguiente manera:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{I_k}(x)$$

siendo $\{I_k : k \text{ natural}\}$ una partición en intervalos de casi todo $(0, 1)$. Es decir, los intervalos I_k son disjuntos dos a dos y la medida de la unión de todos ellos es uno.

Por cuestiones técnicas, el vacío se considera como un intervalo para esta construcción, de modo que la partición pueda ser finita. Por el contrario, los conjuntos unitarios no se consideran como intervalos; de esta manera, un intervalo, o bien tiene medida positiva, o bien es el vacío.

Supongamos que tenemos n funciones constantes en intervalos, es decir, para $i = 1, \dots, n$:

$$\tilde{f}_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^i \chi_{I_k^i}(x)$$

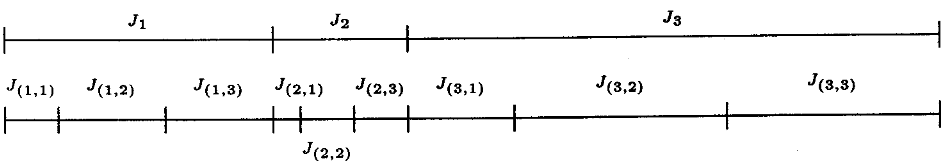
con $\{I_k^i : k \text{ natural}\}$ una partición en intervalos de casi todo $(0,1)$. Para obtener las funciones independientes, tomamos $f_1 = \tilde{f}_1$ y $J_k = I_k^1$ para todo k natural,

$$f_1(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k^1 \chi_{J_k}(x).$$

Para construir f_2, representamos proporcionalmente $\tilde{f}_2$ en cada intervalo donde f_1 es constante, es decir, en cada J_{k_1}. Sean pues, $a_{k_1} = \inf J_{k_1}$ y $J_{(k_1,k_2)} = a_{k_1} + |J_{k_1}| I_{k_2}^2$ si J_{k_1} es no vacío; y $J_{(k_1,k_2)}$ vacío si J_{k_1} también lo es. Entonces definimos:

$$f_2(x) = \sum_{(k_1,k_2) \in \mathbb{N}^2} c_{k_2}^2 \chi_{J_{(k_1,k_2)}}(x).$$

Gráficamente, considerando el ejemplo anterior, tenemos los siguientes subintervalos de $(0,1)$:



De esta manera f_1 y f_2 son constantes en los intervalos J_l para todo $l \in \mathbb{N}^2$.

Para obtener las demás funciones independientes adoptamos la siguiente notación. Dado $l \in \mathbb{N}^i$, $l(j)$ representa la componente j-ésima de l para $0 < j \leq i$, y $l \frown k$ representa:

$$l \frown k = (l(1), \ldots, l(i), k) \in \mathbb{N}^{i+1},$$

para k natural. Definimos para $i > 0$:

$$f_i(x) = \sum_{l \in \mathbb{N}^i} c_{l(i)}^i \chi_{J_l}(x)$$

donde los conjuntos J_l, con $l \in \mathbb{N}^i$, son intervalos que se definen por inducción sobre i de la siguiente manera. Siendo poco precisos, para k natural y $l \in \mathbb{N}^i$, $J_{l \frown k} = a_l + |J_l| I_k^{i+1}$, donde $a_l = \inf J_l$. Siendo más precisos y definiendo paralelamente los puntos a_l para ciertos l:

$(i = 1)$ Sea $J_k = I_k^1$ para todo k natural. Y, si J_k no es vacío, $a_k = \inf J_k$.

(i + 1) Sea $J_{l\frown k} = a_l + |J_l| I_k^{i+1}$ para k natural y $l \in \mathbb{N}^i$ tal que J_l no es vacío, y sea $J_{l\frown k}$ el vacío si J_l también lo es. Y $a_{l\frown k} = \inf J_{l\frown k}$ si el conjunto no es vacío.

Veamos algunas propiedades de estos intervalos y de estas funciones que acabamos de definir analíticamente, antes de demostrar que son funciones independientes.

Proposición 2.3. *Suponiendo que cada vez que aparezca a_l damos por supuesto que el intervalo J_l es no vacío, se tienen las siguientes propiedades para i, k naturales y $l_1, l_2 \in \mathbb{N}^i$:*

(a) $|J_{l_1\frown k}| = |J_{l_1}||I_k^{i+1}|$ *y por tanto* $|J_{l_1}| = \prod_{j=1}^{i} |I^j_{l_1(j)}|$.

(b) Si I_k^{i+1} es no vacío y $a_k^{i+1} = \inf I_k^{i+1}$, entonces $a_{l_1\frown k} = a_{l_1} + a_k^{i+1}|J_{l_1}|$.

(c) $\{J_l : l \in \mathbb{N}^i\}$ es una partición de casi todo $(0, 1)$ y por tanto las funciones f_i están bien definidas. Además, $\{J_{l_1\frown m} : m \text{ natural}\}$ es una partición de casi todo J_{l_1}, más concretamente, de casi todo $(a_{l_1}, a_{l_1} + |J_{l_1}|)$. En particular, $J_{l_1\frown k} \subset (a_{l_1}, a_{l_1} + |J_{l_1}|) \subset J_{l_1}$.

(d) Si $x \in J_{l_1}$ entonces $f_j(x) = c^j_{l_1(j)}$ para todo $j \leq i$ natural. Dicho de otra manera, las funciones $f_1, \ldots, f_i$ son todas constantes a la vez en cualquier intervalo J_l con $l \in \mathbb{N}^i$.

(e) Sea $t \in [0, 1]$ tal que $x = a_{l_1} + t|J_{l_1}| \in J_{l_1}$ e $y = a_{l_2} + t|J_{l_2}| \in J_{l_2}$, entonces para todo número natural $j > i$ se tiene que $f_j(x) = f_j(y)$.

(f) f_i y $\tilde{f}_i$ tienen la misma función de distribución. En particular, para cualquier función φ real de variable real se tiene que:

$$\int_0^1 \varphi(f_i(x))\, dx = \int_0^1 \varphi\left(\tilde{f}_i(x)\right) dx,$$

supuesta la integrabilidad de uno de los dos miembros.

Demostración. Las propiedades (a) y (b) se comprueban inmediatamente de la definición de los intervalos J_l. Para probar la propiedad (c) basta tener en cuenta la definición de los intervalos y el hecho de que, para cada j, $\{I^j_m : m \text{ natural}\}$ es una partición de casi todo $(0, 1)$. La propiedad

(d) se obtiene por la definición de f_j, ya que por la propiedad anterior $x \in J_{l_1} \subset J_{(l_1(1),\ldots,l_1(j))}$.

Para la prueba de (e), consideremos para cada $l \in \mathbb{N}^j$, con j natural, los siguientes conjuntos que son de medida nula por la propiedad (c):

$$N_l = J_l \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} J_{l\frown m}.$$

Observemos que dado $l \in \mathbb{N}^j$, si tenemos $s \in [0,1]$ tal que el punto $z = a_l + s|J_l|$ pertenece a J_l, entonces z pertenece al conjunto $J_{l\frown m}$ para un natural m si y sólo si $s \in I_m^{j+1}$.

Por tanto, si x e y son los puntos de la hipótesis de (e), tenemos que $x \notin N_{l_1}$ si y sólo si $y \notin N_{l_2}$, y en este caso existe un natural m tal que $x \in J_{l_1\frown m}$ e $y \in J_{l_2\frown m}$.

De esta manera hay dos casos. Si $x \in N_{l_1}$ e $y \in N_{l_2}$, entonces tenemos que $f_{i+1}(x) = 0 = f_{i+1}(y)$. Además, en este caso, se tiene que ni x ni y pertenecen a los intervalos J_l para $l \in \mathbb{N}^j$ con $j > i$, por la propiedad (c). Por tanto, a partir de esto, $f_j(x) = 0 = f_j(y)$ para todo $j > i$, es decir, ya hemos probado (e) para este caso.

En el otro caso, $x \notin N_{l_1}$ e $y \notin N_{l_2}$, ya hemos visto que existe un natural m tal que $x \in J_{l_1\frown m}$ e $y \in J_{l_2\frown m}$. Luego, por definición de f_{i+1}, tenemos probada la tesis de (e) para $j = i+1$,

$$f_{i+1}(x) = c_m^{i+1} = f_{i+1}(y).$$

Además, en este caso, existe $s \in [0,1]$ tal que $x = a_{l_1\frown m} + s|J_{l_1\frown m}|$ e $y = a_{l_2\frown m} + s|J_{l_2\frown m}|$. Efectivamente, como $x \in J_{l_1\frown m}$, existe $s \in [0,1]$ tal que $x = a_{l_1\frown m} + s|J_{l_1\frown m}|$. Así, tenemos que $a_{l_1\frown m} + s|J_{l_1\frown m}| = a_{l_1} + t|J_{l_1}|$. Por las propiedades ($a$) y ($b$) obtenemos que $t = a_m^{i+1} + s|I_m^{i+1}|$. Y como $y = a_{l_2} + t|J_{l_2}|$, utilizando nuevamente (a) y (b), llegamos a que $y = a_{l_2\frown m} + s|J_{l_2\frown m}|$.

De esta manera, y en este caso, llegamos a la hipótesis de (e) para $i+1$. Por tanto, reiterando el razonamiento de manera inductiva, se prueba que para todo $j > i$, $f_j(x) = f_j(y)$ si x e y cumplen las hipótesis de (e).

Por último, para probar (f), es decir, para probar que para todo B Borel medible se tiene que:

$$\left|f_i^{-1}(B)\right| = \left|\tilde{f}_i^{-1}(B)\right|,$$

definimos los siguientes conjuntos de índices: $K = \{k : k \text{ natural}, c_k^i \in B\}$ y $L = \{l \in \mathbb{N}^i : l(i) \in K\}$. Por la propia definición de la función f_i y por ser

$\{J_l : l \in \mathbb{N}^i\}$ una partición de casi todo $(0,1)$, tenemos que:

$$\left|f_i^{-1}(B)\right| = \sum_{l \in L} |J_l|,$$

por las propiedades (a) y (c), llegamos a que:

$$\left|f_i^{-1}(B)\right| = \sum_{l \in \mathbb{N}^{i-1}} |J_l| \sum_{k \in K} |I_k^i| = \sum_{k \in K} |I_k^i|,$$

y para terminar, observamos que por la definición de $\tilde{f}_i$ y por ser $\{I_k^i :$ k natural$\}$ una partición de casi todo $(0,1)$, se tiene que:

$$\left|\tilde{f}_i^{-1}(B)\right| = \sum_{k \in K} |I_k^i|.$$

□

Proposición 2.4. *Las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$, construidas a partir de unas funciones constantes en intervalos por el método anterior, son independientes.*

Demostración. Ya hemos visto que, por la propiedad (c), las funciones están bien definidas, ya que los intervalos J_l no se solapan.

Para ver que son independientes, sean $B_1, B_2, \ldots, B_n$ Borel medibles. Definimos los siguientes conjuntos de índices: $K_i = \{k : k \text{ natural}, c_k^i \in B_i\}$ y $L_i = \{l \in \mathbb{N}^i : l(i) \in K\}$ para $i = 1, \ldots, n$.

Consideremos el conjunto formado por la unión de todos los intervalos J_l tal que $l \in L = \{l \in \mathbb{N}^n : l(i) \in K_i \text{ para } i = 1, \ldots, n\}$. Teniendo en cuenta (d), (c) y las definiciones de las funciones $f_1, \ldots, f_n$, este conjunto tiene la misma medida que el conjunto $f_1^{-1}(B_1) \cap \ldots \cap f_n^{-1}(B_n)$,

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(B_i)\right| = \sum_{l \in L} |J_l|.$$

Por la propiedad (a) y aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, se sigue que:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(B_i)\right| = \sum_{l \in L} \prod_{i=1}^{n} |I_{l(i)}^i| = \prod_{i=1}^{n} \sum_{k \in K_i} |I_k^i|.$$

Como $\{J_l : l \in \mathbb{N}^{i-1}\}$ es una partición de casi todo $(0,1)$ podemos introducir los siguientes factores:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(B_i)\right| = \left(\sum_{k\in K_1} |I_k^1|\right) \prod_{i=2}^{n} \left(\sum_{l\in \mathbb{N}^{i-1}} |J_l| \sum_{k\in K_i} |I_k^i|\right);$$

Y utilizando la propiedad (a) y la definición de las funciones, llegamos a la conclusión que queremos:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(B_i)\right| = \prod_{i=1}^{n} \sum_{l\in L_i} |J_l| = \prod_{i=1}^{n} \left|f_i^{-1}(B_i)\right|.$$

□

Las funciones de Rademacher aparecen como un caso particular de este tipo de funciones independientes. Se obtienen a partir de la sucesión de funciones constantes en intervalos:

$$\tilde{r}_n = \chi_{(0,1/2)} - \chi_{(1/2,1)} \text{ para } n = 1, 2 \dots$$

Aparte de estas funciones independientes que son constantes en intervalos, existen funciones independientes que son continuas ([S, Section 6.9] o [GZ]). Se demuestra que si tenemos dos funciones continuas e independientes u y v, entonces la imagen de $[0,1]$ por la aplicación compleja $u + iv$ es todo el cuadrado $[0,1]^2$. Y se puede utilizar la función de Peano, que tiene la propiedad anterior, para demostrar la existencia de las funciones independientes y continuas.

Terminamos esta sección enunciando un par de resultados que utilizamos más adelante.

Lema 2.5. **[KS, Chapter II, Theorem 4]** *Si f y g son dos funciones independientes integrables, entonces fg es integrable y :*

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx.$$

Lema 2.6. **[H, Section 45, Theorem B]** *Si f, g, h son funciones independientes, entonces f y $g + h$ también lo son.*

2.2 Sistemas de funciones independientes

Se dice que una sucesión de funciones reales (f_n) en $[0,1]$ es un *sistema de funciones independientes* si para todo n natural, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son independientes.

Un ejemplo de sistema de funciones independientes lo constituye el sistema de Rademacher. También cualquier permutación del sistema de Rademacher es un sistema de funciones independientes, ya que la definición no depende del orden de la sucesión. Observamos, además, que si variamos los valores de las funciones de una sucesión independiente en un conjunto de medida nula, la sucesión obtenida sigue siendo independiente.

Para $M \geq 1$ representamos por $\mathcal{F}_M$ la clase de todas las funciones medibles f de media cero, varianza uno y acotadas por M, es decir, tales que:

$$\int_0^1 f\,dx = 0, \quad \|f\|_2 = 1, \quad \|f\|_\infty \leq M. \tag{2.1}$$

Las funciones del sistema de Rademacher están en $\mathcal{F}_1$. Nosotros, fijado $M \geq 1$, estudiamos los conjuntos de unicidad para los sistemas de funciones independientes en $\mathcal{F}_M$.

La condición de que la media es cero nos asegura que las funciones son ortogonales pues por el Lema 2.5 para todo $m \neq n$:

$$\int_0^1 f_m(x) f_n(x) dx = \int_0^1 f_m(x) dx \int_0^1 f_n(x) dx = 0.$$

Con respecto a las otras dos condiciones, sin ellas no se puede generalizar los resultados del sistema de Rademacher vistos al principio del capítulo. Veamos, por ejemplo, que si no se cumple alguna de las dos condiciones, entonces pueden existir conjuntos de medida tan pequeña como queramos sin ser conjuntos de unicidad, ni siquiera en el sentido débil.

Dado $\varepsilon \in (0, 1/2)$, consideremos una serie de números positivos $\varepsilon_n > 0$ que sume ε. Definimos la siguiente sucesión de funciones constantes en intervalos:

$$\tilde{g}_n(x) = \chi_{I_1^n}(x) - \frac{1-\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \chi_{I_2^n}(x)$$

donde $I_1^n = (0, 1-\varepsilon_n]$ e $I_2^n = (1-\varepsilon_n, 1)$. Esta sucesión tiene las siguientes propiedades:

$$\int_0^1 \tilde{g}_n\,dx = 0, \quad \|\tilde{g}_n\|_2 = \left(\frac{1-\varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)^{1/2}, \quad \|\tilde{g}_n\|_\infty = \frac{1-\varepsilon_n}{\varepsilon_n}.$$

A partir de $(\tilde{g}_n)$ construimos la sucesión de funciones independientes (g_n) como en la sección anterior. Las funciones g_n siguen cumpliendo las tres propiedades anteriores (Proposición 2.3 (f)).

Sea (b_n) una sucesión de números reales no nulos tales que su serie sume cero. Entonces la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n g_n(x) = 0 \quad \text{si } x \in F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in [0,1] : g_n(x) = 1\}.$$

Veamos que el conjunto F tiene medida mayor que $1-\varepsilon$. Para ello escribimos su complementario como unión disjunta de la siguiente manera:

$$[0,1] \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in [0,1] : g_1(x) = 1, \ldots, g_{n-1}(x) = 1, g_n(x) \neq 1\},$$

por tanto, como las funciones g_n son independientes y para todo a la medida $g_n^{-1}(\{a\})$ coincide con la medida de $\tilde{g}_n^{-1}(\{a\})$, el complementario tiene medida menor que ε,

$$|[0,1] \setminus F| = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)\ldots(1-\varepsilon_{n-1})\,\varepsilon_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_n = \varepsilon.$$

Hemos encontrado un conjunto $E = [0,1] \setminus F$ de medida menor que ε que no es de unicidad para g_n ni siquiera en el sentido débil. Pero este conjunto tampoco es de unicidad para el sistema $f_n = g_n/\|g_n\|_2$. Observemos que para este sistema la condición que falla de (2.1) es la de la norma infinito:

$$\int_0^1 f_n\,dx = 0, \quad \|f_n\|_2 = 1, \quad \|f_n\|_\infty = \left(\frac{1-\varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)^{1/2} \to +\infty.$$

Para la otra condición, E no es un conjunto de unicidad para el sistema $f_n = g_n/\|g_n\|_\infty$. Para este sistema, $\|f_n\|_2 \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

Entrando en el estudio de los conjuntos de unicidad para un sistema de funciones independientes (f_n) cumpliendo (2.1), estudiamos primero los *conjuntos de constancia del sistema* (f_n) que son los conjuntos de la forma:

$$\left\{x \in [0,1] : \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) = \mu\right\}$$

dados μ una constante y (a_n) una sucesión no nula, es decir, una sucesión que tiene algún término no nulo.

Vemos en la siguiente sección que existe una constante que sólo depende de M, tal que todos los conjuntos de constancia de cualquier sistema de funciones independientes en $\mathcal{F}_M$ tienen medida menor que esa constante. De esta manera podemos encontrar una cota que nos asegure que cualquier conjunto de medida menor o igual que dicha cota es un conjunto de unicidad para cualquier sistema independiente en $\mathcal{F}_M$.

2.3 Conjuntos de constancia

Se debe notar que, aunque nos situamos en el espacio de probabilidad $[0,1]$ con la medida de Lebesgue y con funciones reales, los resultados que se obtienen en esta sección y en la siguiente son válidos en cualquier espacio de probabilidad no atómico y con funciones tomando valores en cualquier espacio normado de dimensión finita, sin variación en las constantes que se obtienen.

Empezamos el estudio de los conjuntos de constancia, con el siguiente lema.

Lema 2.7. *Sea $d \in (0,1)$. Para todo conjunto B Borel medible de diámetro menor o igual que d y para toda función f perteneciente a $\mathcal{F}_M$ se tiene:*

$$\left|f^{-1}(B)\right| \leq \frac{M^2}{M^2 + (1-d)^2}.$$

Demostración. Sea B un Borel medible de diámetro menor o igual que d y $f \in \mathcal{F}_M$ tales que $\left|f^{-1}(B)\right| > 0$ (si la medida es cero, el resultado se tiene trivialmente). Definimos λ_B como la media de la función f en $f^{-1}(B)$,

$$\lambda_B = \frac{1}{|f^{-1}(B)|} \int_{f^{-1}(B)} f(x)dx,$$

y representamos por g_B la función:

$$g_B = \lambda_B \chi_{f^{-1}(B)} + f\chi_{[0,1]\setminus f^{-1}(B)}.$$

Como B tiene diámetro menor o igual que d, se tiene que:

$$\left|\|f\|_2 - \|g_B\|_2\right| \leq \|f - g_B\|_2 \leq d.$$

Ya que $d < 1$ y la varianza de f es uno, $(1-d)^2 \leq \|g_B\|_2^2$. Por definición de g_B y teniendo en cuenta que f está acotada por M:

$$(1-d)^2 \leq \|g_B\|_2^2 \leq |\lambda_B|^2 \left|f^{-1}(B)\right| + M^2(1 - \left|f^{-1}(B)\right|);$$

con lo que:

$$|\lambda_B|^2 \geq \frac{((1-d)^2 - M^2) + M^2 \left|f^{-1}(B)\right|}{|f^{-1}(B)|}. \tag{2.2}$$

Por otro lado, como f tiene media cero:

$$\lambda_B \left|f^{-1}(B)\right| = -\int_{[0,1]\setminus f^{-1}(B)} f(x)\,dx;$$

y utilizando de nuevo que f está acotado por M, tenemos que:

$$|\lambda_B| \leq \frac{M(1 - \left|f^{-1}(B)\right|)}{|f^{-1}(B)|}.$$

Combinando esta última desigualdad con (2.2), obtenemos que:

$$\frac{((1-d)^2 - M^2) + M^2 \left|f^{-1}(B)\right|}{|f^{-1}(B)|} \leq \frac{M^2(1 - \left|f^{-1}(B)\right|)^2}{|f^{-1}(B)|^2},$$

es decir:

$$\left|f^{-1}(B)\right| \leq \frac{M^2}{M^2 + (1-d)^2}.$$

$\square$

La estimación obtenida nos da la menor constante que acota superiormente la medida de los conjuntos de constancia de las funciones f en $\mathcal{F}_M$. Concretamente:

Nota 2.8. El máximo de las medidas de los conjuntos de constancia de las funciones pertenecientes a $\mathcal{F}_M$ es:

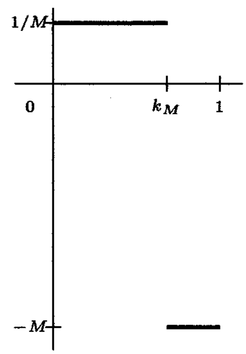
$$k_M = \frac{M^2}{M^2 + 1}.$$

Efectivamente, por un lado k_M es una cota superior ya que, dada una función $f \in \mathcal{F}_M$ y una constante μ, para cualquier $d \in (0,1)$ tenemos por el lema anterior:

$$|\{x \in [0,1] : f(x) = \mu\}| = \left|f^{-1}(\{\mu\})\right| \leq \frac{M^2}{M^2 + (1-d)^2}.$$

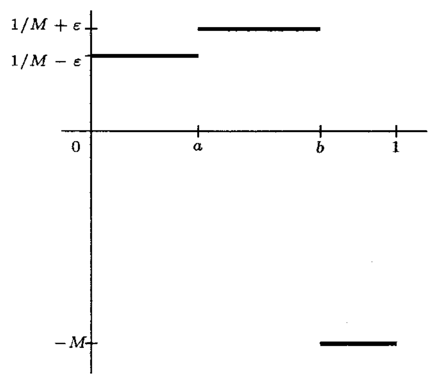
Por otro lado k_M es la menor, ya que la función:

$$f(x) = \frac{1}{M}\chi_{(0,k_M]}(x) - M\chi_{(k_M,1)}(x)$$



pertenece a $\mathcal{F}_M$ y cumple que $\left|f^{-1}(\{1/M\})\right| = k_M$.

Sin embargo, k_M no es la mejor constante del lema (salvo en el caso $M = 1$), ni siquiera para d suficientemente pequeño. Por ejemplo, dado $\varepsilon \leq M - 1/M$ consideremos la siguiente función:



con $a = \dfrac{M^2}{2(M^2 + 1 - M\varepsilon)}$ y $b = \dfrac{M^2(M^2+1)}{(M^2+1)^2 - (M\varepsilon)^2}$. Un cálculo algo tedioso permite comprobar que la función pertenece a $\mathcal{F}_M$. Y además, la medida de la imagen inversa del intervalo $[1/M - \varepsilon, 1/M + \varepsilon]$ es b, que es mayor que k_M.

Esta constante k_M también nos acota superiormente las medidas de los conjuntos de constancia de los sistemas independientes en $\mathcal{F}_M$, como vemos a continuación.

Teorema 2.9. *Sean (f_n) una sucesión de funciones independientes en $\mathcal{F}_M$, (a_n) una sucesión no nula de números reales y μ una constante. Entonces:*

$$\left|\left\{x \in [0,1] : \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) = \mu\right\}\right| \leq k_M = \frac{M^2}{M^2+1}.$$

Además la constante k_M se alcanza.

Demostración. Vamos a demostrar que dados (f_n), (a_n) y μ tales que la medida de:

$$F = \left\{x \in [0,1] \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) = \mu\right\}.$$

es mayor que k_M, entonces la sucesión de los coeficientes (a_n) es la nula. Como los coeficientes juegan papeles simétricos, basta demostrar que $a_1 = 0$.

La idea para demostrar que $a_1 = 0$ es encontrar dos puntos x e y cumpliendo que $f_1(x)$ y $f_1(y)$ no disten menos que una constante y que las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x), \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(y)$$

sean tan próximas como queramos.

Fijamos d próximo a cero tal que:

$$k_M = \frac{M^2}{M^2+1} < \frac{M^2}{M^2+(1-d)^2} = K_d < |F|.$$

Dado $\varepsilon > 0$, F está contenido en la unión, cuando q varía en los números naturales, de los conjuntos:

$$F_{q,\varepsilon} = \bigcap_{p \geq q} \left\{x \in [0,1] \ : \ \left|\sum_{n=1}^{p} a_n f_n(x) - \mu\right| < \varepsilon\right\}.$$

Ya que la sucesión $(F_{q,\varepsilon})_q$ es creciente y $|F| > K_d$, podemos fijar $q > 1$ tal que $|F_{q,\varepsilon}| > K_d$. Así para todo $x, y \in F_{q,\varepsilon}$ se tiene que:

$$\left|\sum_{n=1}^{q} a_n (f_n(x) - f_n(y))\right| < 2\varepsilon.$$

Supongamos que hemos encontrado dos puntos $x, y \in F_{q,\varepsilon}$ tales que:

$$|f_1(x) - f_1(y)| \geq d/2 \tag{2.3}$$

y:

$$|a_n||f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2^n} \text{ para } n = 2, \ldots, q. \tag{2.4}$$

Entonces tenemos por estas tres últimas propiedades:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{2}|a_1| &\leq |a_1 f_1(x) - a_1 f_1(y)| \\
&\leq \left| \sum_{n=1}^{q} a_n(f_n(x) - f_n(y)) \right| + \sum_{n=2}^{q} |a_n||f_n(x) - f_n(y)| \\
&\leq 2\varepsilon + \sum_{n=2}^{q} \frac{\varepsilon}{2^n} \\
&\leq 3\varepsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto basta encontrar $x, y \in F_{q,\varepsilon}$ tales que cumplan (2.3) y (2.4) para obtener que $a_1 = 0$.

Para cada n natural con $2 \leq n \leq q$, sea $\mathcal{P}_n$ una partición numerable de la recta real en Borel medibles de diámetro menor que $\varepsilon/2^n|a_n|$, entendiéndose que si $a_n = 0$ entonces no hay restricciones sobre los diámetros de los conjuntos de $\mathcal{P}_n$. Consideremos los siguientes conjuntos medibles:

$$\bigcap_{n=2}^{q} f_n^{-1}(A_n),$$

donde $A_n \in \mathcal{P}_n$. Estos medibles forman una partición numerable de $[0, 1]$. Teniendo en cuenta que $|F_{q,\varepsilon}| > K_d$, existen $A_1 \in \mathcal{P}_1, \ldots, A_q \in \mathcal{P}_q$ tales que si:

$$H = \bigcap_{n=2}^{q} f_n^{-1}(A_n),$$

entonces $|F_{q,\varepsilon} \cap H| > K_d\,|H|$. Buscamos ahora $x, y \in F_{q,\varepsilon} \cap H$ que cumplan (2.3), ya que por estar en H cumplen (2.4).

Sea $x \in F_{q,\varepsilon} \cap H$ cualquiera y B el intervalo centrado en $f_1(x)$ y diámetro d. Por el Lema 2.7, $\left|f_1^{-1}(B)\right| \leq K_d$. Utilizando la independencia de las funciones, vemos que la medida del conjunto $F_{q,\varepsilon} \cap H$ es mayor que la de $f_1^{-1}(B) \cap H$,

$$\left|f_1^{-1}(B) \cap H\right| = \left|f_1^{-1}(B)\right| |H| \leq K_d |H| < |F_{q,\varepsilon} \cap H|,$$

y por tanto, podemos encontrar $y \in F_{q,\varepsilon} \cap H$ que no está en $f_1^{-1}(B)$. Así, existen $x, y \in F_{q,\varepsilon} \cap H$ tales que:

$$|f_1(x) - f_1(y)| \geq d/2.$$

De esta manera ya hemos visto que k_M acota las medidas de los conjuntos de constancia. Veamos ahora que k_M es el máximo de estas medidas.

Sea $\tilde{f}_n$, para todo n, la función f definida en la página 42, es decir, la función que vale $1/M$ en $(0, k_M]$ y $-M$ en $(k_M, 1)$. Y consideremos la sucesión (f_n) de funciones independientes que se obtiene a partir de la sucesión de funciones constantes en intervalos $(\tilde{f}_n)$ como en la Sección 2.1. Esta sucesión está en $\mathcal{F}_M$ por la definición de las funciones f_n y por la Proposición 2.3 (f).

De esta manera, para la sucesión numérica (a_n), donde todos los coeficientes son nulos salvo el primero, se tiene que:

$$\left|\left\{x \in [0,1] : \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) = \frac{a_1}{M}\right\}\right| = k_M.$$

□

El hecho de que la sucesión (a_n), que define el conjunto para el cual se alcanza la constante k_M, sea nula a partir de un término no es una casualidad. De hecho, como se deduce del siguiente teorema, las sucesiones (a_n) que definen conjuntos de constancia con medida positiva son nulas a partir de un término.

Teorema 2.10. *Sean $(f_n) \subset \mathcal{F}_M$ independientes, μ una constante y (a_n) una sucesión de números reales que no se anule a partir de un término. Entonces:*

$$\left|\left\{x \in [0,1] : \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) = \mu\right\}\right| = 0.$$

Demostración. Tenemos que demostrar que si (f_n), (a_n) y μ son tales que el conjunto:

$$F = \left\{x \in [0,1] : \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) = \mu\right\}$$

tiene medida positiva, entonces a partir de un término los coeficientes a_n son nulos.

Como F pertenece a la σ-álgebra generada por (f_n), por el Lema 1.1 existen p natural y $B_1, \dots, B_p$ Borel medibles tales que si:

$$G = \bigcap_{i=1}^{p} f_i^{-1}(B_i).$$

entonces $|G \cap F| > k_M |G|$.

Vamos a demostrar que $a_n = 0$ para todo $n > p$. Para ello, tomamos $d \in (0,1)$ tal que:

$$k_M = \frac{M^2}{M^2+1} < \frac{M^2}{M^2+(1-d)^2} = K_d < \frac{|G \cap F|}{|G|}.$$

Para demostrar que $a_{p+1} = 0$ se razona de forma parecida a como se prueba que a_1 es cero en el Teorema 2.9. Dado $\varepsilon > 0$, consideramos los conjuntos $F_{q,\varepsilon}$ y fijamos $q > p+1$ tal que $|G \cap F_{q,\varepsilon}| > K_d |G|$. Entonces existe un conjunto H de la forma:

$$H = \bigcap_{i=1}^{p} f_i^{-1}(A_i) \cap \bigcap_{i=p+2}^{q} f_i^{-1}(A_i).$$

tal que $|H \cap F_{q,\varepsilon}| > K_d |H|$, donde los conjuntos $A_1, \dots, A_p, A_{p+2}, \dots, A_q$ son Borel medibles cumpliendo que para cada n el diámetro de A_n es menor o igual que $\varepsilon/(2^n |a_n|)$ y para $n = 1, \dots, p$, A_n está contenido en B_n.

Y razonando como en el Teorema 2.9, se puede encontrar $x, y \in H \cap F_{q,\varepsilon}$ tal que $|f_{p+1}(x) - f_{p+1}(y)| \geq d$. Se sigue que $a_{p+1} = 0$ y por tanto, se demuestra que $a_n = 0$ para todo $n > p$. □

Si consideramos el sistema de funciones independientes en $\mathcal{F}_M$ que se da al final de la demostración del Teorema 2.9, podemos encontrar conjuntos de constancia de medida positiva que tienen n coeficientes distintos de cero,

$$\left| \left\{ x \in [0,1] : \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = -nM \right\} \right| = (1-k_M)^n > 0.$$

Como consecuencia de los dos teoremas demostrados tenemos el siguiente resultado que extiende el Teorema 2.1 ya que $k_1 = 1/2$.

Corolario 2.11. *Cualquier conjunto de medida menor que la constante $1 - k_M$ es un conjunto de unicidad para cualquier sistema de funciones* *independientes en $\mathcal{F}_M$. Además, cualquier conjunto de medida no total es un conjunto de unicidad débil para cualquier sistema de funciones independientes en $\mathcal{F}_M$.*

Hacemos notar que la primera parte de este corolario también se puede obtener como consecuencia de un resultado conocido [KS, Chapter 2, Theorem 7]. Este resultado dice que existe una constante C'_M tal que, para cualquier sistema de funciones independientes en $\mathcal{F}_M$ y para cualquier polinomio $P = \sum_{n=1}^{p} a_n f_n$ en (f_n), se tiene que:

$$\left|\left\{x \in [0,1] : |P(x)| \geq \frac{1}{2}\|P\|_2\right\}\right| \geq C'_M.$$

Con lo cual, los conjuntos de medida menor que esta constante C'_M son conjuntos de unicidad. También hacemos notar que las técnicas utilizadas en esta sección son más elementales que las usadas en la prueba del resultado que aparece en [KS].

2.4 Conjuntos de unicidad

En esta sección vamos a determinar la mayor constante C_M que verifica la primera parte del Corolario 2.11, es decir, la mayor constante C_M que nos asegura que los conjuntos de medida menor que C_M son conjuntos de unicidad para cualquier sistema de funciones independientes en $\mathcal{F}_M$. Para ello introducimos la siguiente notación. Dado un entero no negativo p, sea $\alpha(M,p)$ el supremo de las medidas de los conjuntos A tales que existan $p+1$ funciones independientes $f_1, f_2, \ldots, f_{p+1}$ en $\mathcal{F}_M$ y $p+2$ números reales $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, \ldots, a_{p+1} \neq 0, \mu$ cumpliendo:

$$A = \left\{x \in [0,1] \ : \ \sum_{n=1}^{p+1} a_n f_n(x) = \mu\right\} = \left(\sum_{n=1}^{p+1} a_n f_n\right)^{-1} (\{\mu\}).$$

Vamos a demostrar que los valores $\alpha(M,p)$ son decrecientes en p, y también vamos a calcularlos para $p = 0$ y para $p = 1$. De hecho, por la Nota 2.8, se tiene que $\alpha(M,0) = k_M$.

Para ver que $\alpha(M,p)$ es decreciente en p necesitamos el siguiente lema:

Lema 2.12. *Sean f una función real medible en $[0,1]$ y α_f el supremo de las medidas de los conjuntos de constancia de f,*

$$\alpha_f = \sup\left\{\left|f^{-1}(\{\mu\})\right| : \mu \text{ número real}\right\}.$$

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo número real μ:

$$\left|f^{-1}(\mu - \delta, \mu + \delta)\right| \leq \alpha_f + \varepsilon.$$

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que tenemos un número positivo ε y dos sucesiones (μ_n) y (δ_n) con $\delta_n \in (0,1)$ y $\delta_n \to 0$, tales que para todo n:

$$\left|f^{-1}(\mu_n - \delta_n, \mu_n + \delta_n)\right| > \alpha_f + \varepsilon.$$

Como f toma valores reales, existe una constante N tal que la medida del conjunto $f^{-1}(-N, N)$ es mayor o igual que $1 - \varepsilon$. Así, para todo n, $|\mu_n| < N + 1$ y en consecuencia podemos suponer que (μ_n) es convergente a un número μ. Con este número vamos a llegar a una contradicción con la definición de α_f.

Dado $\delta > 0$, existe n natural tal que $|\mu_n - \mu| < \delta/2$ y $\delta_n < \delta/2$. Por lo tanto:

$$\left|f^{-1}(\mu - \delta, \mu + \delta)\right| \geq \left|f^{-1}(\mu_n - \delta_n, \mu_n + \delta_n)\right| > \alpha_f + \varepsilon.$$

Tomando límite cuando δ tiende a cero llegamos a la contradicción,

$$\left|f^{-1}(\{\mu\})\right| \geq \alpha_f + \varepsilon.$$

□

Proposición 2.13. *Fijado $M \geq 1$, $\alpha(M, p+1) \leq \alpha(M, p)$ para todo $p \geq 0$.*

Demostración. Sean $f_1, \ldots, f_{p+2}$ independientes en $\mathcal{F}_M$, $a_1, \ldots, a_{p+2}$ no nulos y μ una constante. Dado $\varepsilon > 0$, aplicamos el lema anterior a la función $f = a_1 f_1 + \ldots + a_{p+1} f_{p+1}$. Sea $\delta > 0$ tal que para todo λ número real:

$$\left|f^{-1}(\lambda - \delta, \lambda + \delta)\right| \leq \alpha_f + \varepsilon \leq \alpha(M, p) + \varepsilon. \tag{2.5}$$

Consideremos $\mathcal{P}$ una partición numerable de la recta real cuyos conjuntos tenga diámetro menor que 2δ. Entonces, por ser partición:

$$\left|(f + a_{p+2} f_{p+2})^{-1}(\{\mu\})\right| \leq \sum_{B \in \mathcal{P}} \left|(a_{p+2} f_{p+2})^{-1}(\mu - B) \cap f^{-1}(B)\right|.$$

Ahora, ya que f y $a_{p+2}f_{p+2}$ son independientes por el Lema 2.6, tenemos que:

$$\left|(f + a_{p+2}f_{p+2})^{-1}(\{\mu\})\right| \leq \sum_{B\in\mathcal{P}} \left|(a_{p+2}f_{p+2})^{-1}(\mu - B)\right| \left|f^{-1}(B)\right|;$$

como los conjuntos de la partición tiene diámetro menor que 2δ, por (2.5):

$$\left|(f + a_{p+2}f_{p+2})^{-1}(\{\mu\})\right| \leq \sum_{B\in\mathcal{P}} \left|(a_{p+2}f_{p+2})^{-1}(\mu - B)\right| (\alpha(M,p) + \varepsilon).$$

Teniendo en cuenta que $\{\mu - B : B \in \mathcal{P}\}$ es una partición de la recta real y tomando límite cuando ε tiende a cero, obtenemos que:

$$\left|\left\{x \in [0,1] \ : \ \sum_{n=1}^{p+2} a_n f_n(x) = \mu\right\}\right| \leq \alpha(M,p);$$

y en definitiva $\alpha(M,p+1) \leq \alpha(M,p)$. □

Sabiendo este resultado y teniendo en cuenta que $\alpha(M,0) = k_M$, podemos complementar los Teoremas 2.9 y 2.10 de la siguiente manera:

Nota 2.14. Si (f_n) es una sucesión de funciones independientes en $\mathcal{F}_M$ y para alguna constante μ se tiene que:

$$\left|\left\{x \in [0,1] : \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) = \mu\right\}\right| > \alpha(M,p),$$

entonces todos los coeficientes a_n son nulos excepto un máximo de p coeficientes.

Efectivamente, el Teorema 2.10 implica que sólo una cantidad finita de los coeficientes son no nulos. Sea q la cantidad de coeficientes no nulos. Por definición:

$$\left|\left\{x \in [0,1] : \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) = \mu\right\}\right| \leq \alpha(M,q-1),$$

y por la proposición anterior $q \leq p$, es decir, hay como máximo p coeficientes no nulos.

Para calcular $\alpha(M,1)$ necesitamos el siguiente lema:

Lema 2.15. *Sea $R \in (0,1)$. Sean b_j y c_j números reales del intervalo $[0,R]$ para $j = 1,2,\ldots,p$. Si se cumple que $b_1 + \ldots + b_p \leq 1$ y $c_1 + \ldots + c_p \leq 1$ entonces $b_1c_1 + \ldots + b_pc_p \leq R^2 + (1-R)^2$.*

Demostración. Considerando $1-R$ en vez de R si fuera necesario, podemos suponer que $R \geq 1/2$. Calculemos los extremos del conjunto convexo:

$$I = \{(b_1,\ldots,b_p) : b_1 + \ldots + b_p \leq 1 \text{ y } 0 \leq b_j \leq R \text{ para } j = 1,\ldots,p\}.$$

Veamos primero que si $(b_1,\ldots,b_p)$ es un extremo del conjunto I, entonces tiene a lo sumo una coordenada distinta de 0 y de R. Por reducción al absurdo, supongamos que existen $i \neq j$ tales que b_i y b_j pertenecen a $(0,R)$. Tomamos $\varepsilon > 0$ tal que los números $b_i - \varepsilon$, $b_i + \varepsilon$, $b_j - \varepsilon$ y $b_j + \varepsilon$ pertenezcan a $(0,R)$. Entonces los dos puntos que se obtienen cambiando las coordenadas b_i y b_j del punto $(b_1,\ldots,b_p)$ por las coordenadas $b_i + \varepsilon$ y $b_j - \varepsilon$, respectivamente, o por las coordenadas $b_i - \varepsilon$ y $b_j + \varepsilon$ son puntos de I. Y por tanto, $(b_1,\ldots,b_p)$ no es un extremo del conjunto, ya que es el punto medio de esos dos puntos que pertenecen a I.

Por otro lado, como $R \geq 1/2$, tenemos que sólo puede haber a lo sumo dos coordenadas distintas de cero. Entonces los extremos de I son:

(a) si todas las coordenadas son nulas, el origen;

(b) si todas las coordenadas son ceros salvo una, ésta tiene que ser R. Si no fuera R pertenecería al segmento de extremos el origen y el que tiene como única coordenada no nula R;

(c) si todas sus coordenadas son nulas salvo dos, éstas tienen que ser R y $1-R$. Efectivamente, una de ellas tiene que ser R, porque no puede haber dos coordenadas distintas de 0 y R, y entonces la otra es $1-R$, razonando de manera parecida al caso (b).

De esta manera, fijados $c_1,\ldots,c_p$, la linealidad de $b_1c_1+\ldots+b_pc_p$ implica que el máximo sobre los $(b_1,\ldots,b_p) \in I$ se alcanza en un punto de los del tipo (c), ya que $c_j \geq 0$. Es decir, existen $i \neq j$ tales que $b_1c_1 + \ldots + b_pc_p \leq Rc_i + (1-R)c_j$.

Aplicando el razonamiento análogo a $Rc_i + (1-R)c_j$, obtenemos que las sumas $b_1c_1+\ldots+b_pc_p$ están acotadas por $R^2+(1-R)^2$ o por $2R(1-R)$. Como el máximo de estos dos valores es el primero, tenemos que $R^2+(1-R)^2$ acota a las sumas $b_1c_1 + \ldots + b_pc_p$, cuando $(b_1,\ldots,b_p) \in I$ y $(c_1,\ldots,c_p) \in I$. $\square$

Proposición 2.16. *Se tiene que $\alpha(M,1) = \dfrac{M^4+1}{(M^2+1)^2}$.*

Demostración. Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_M$ independientes, a_1, a_2 dos números reales no nulos y μ una constante. Fijado $d \in (0,1)$, consideremos una partición numerable de la recta real $\mathcal{P}$, de manera que tanto B como $(\mu - a_1 B)/a_2$ tengan diámetro menor o igual que d para todo $B \in \mathcal{P}$. Por la independencia de f_1 y f_2 tenemos que:

$$\left|(a_1 f_1 + a_2 f_2)^{-1}(\{\mu\})\right| \leq \sum_{B \in \mathcal{P}} \left|f_1^{-1}(B)\right| \left|f_2^{-1}((\mu - a_1 B)/a_2)\right|.$$

Por el Lema 2.7, tanto la medida del conjunto $f_1^{-1}(B)$ como la del conjunto $f_2^{-1}((\mu - a_1 B)/a_2)$ están acotadas por $M^2/(M^2 + (1-d)^2)$. Así, por el lema anterior:

$$\left|(a_1 f_1 + a_2 f_2)^{-1}(\{\mu\})\right| \leq \frac{M^4 + (1-d)^4}{(M^2 + (1-d)^2)^2}.$$

Y tomando límite cuando d tiende a cero obtenemos que:

$$\alpha(M,1) \leq \frac{M^4 + 1}{(M^2 + 1)^2}.$$

Pero la igualdad se tiene considerando las dos primeras funciones de la sucesión (f_n) que se da al final de la demostración del Teorema 2.9, y tomando $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ y $\mu = 0$. □

Ya podemos determinar la mayor constante que nos asegura la unicidad de los conjuntos de medida menor que la constante.

Teorema 2.17. *Cualquier conjunto medible E cumpliendo que:*

$$|E| < \frac{2M^2}{(M^2 + 1)^2} = 1 - \alpha(M,1),$$

es un conjunto de unicidad para cualquier sucesión de funciones independientes en $\mathcal{F}_M$ que no se anulen en un conjunto de medida positiva.

Demostración. Sea E un conjunto tal que $|E| < 1 - \alpha(M,1)$. Sean $(f_n) \subset \mathcal{F}_M$ independientes y (a_n) tales que para todo $x \in F = [0,1] \setminus E$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) = 0.$$

Como $|F| > \alpha(M,1)$, por la Nota 2.14 todos los coeficientes son nulos excepto quizás uno, digamos a_n. Pero, éste también tiene que ser cero ya que $\left|f_n^{-1}(\{0\})\right| = 0$. □

La constante obtenida en el teorema anterior es la mejor posible, ya que el ejemplo que se indica al final de la prueba de la Proposición 2.16 nos da un conjunto que no es de unicidad de medida $2M^2/(M^2+1)^2$.

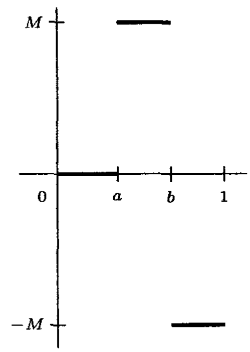
Por otro lado, si asumimos que las funciones f_n se pueden anular en conjuntos de medida positiva, para obtener que a_n es cero en la prueba del Teorema 2.17 basta con que se cumpla que $|F| > \left|f_n^{-1}(\{0\})\right|$.

Calculemos el máximo de las medidas de los conjuntos $f^{-1}(\{0\})$ con $f \in \mathcal{F}_M$. Para toda $f \in \mathcal{F}_M$, se tiene que:

$$1 = \|f\|_2^2 \leq M^2 \left(1 - \left|f^{-1}(\{0\})\right|\right);$$

luego $\left|f^{-1}(\{0\})\right| \leq (M^2-1)/M^2$. Pero la función:

$$f(x) = M\left(\chi_{[a,b)}(x) - \chi_{[b,1]}(x)\right)$$



para $a = (M^2-1)/M^2$ y $b = (2M^2-1)/(2M^2)$, cumple que pertenece a $\mathcal{F}_M$ y que $\left|f^{-1}(\{0\})\right| = (M^2-1)/M^2$. Por tanto $(M^2-1)/M^2$ es el máximo de las medidas de las imágenes inversas del origen por funciones en $\mathcal{F}_M$.

De esta manera, siguiendo la demostración del Teorema 2.17, se prueba el siguiente resultado:

Corolario 2.18. *Cualquier conjunto medible E cumpliendo que:*

$$|E| < \min\left\{\frac{1}{M^2}, \frac{2M^2}{(M^2+1)^2}\right\} = C_M,$$

es un conjunto de unicidad para cualquier sistema de funciones independientes en $\mathcal{F}_M$.

Hacemos notar por último, que si $M^2 < 1+\sqrt{2}$ entonces C_M es igual a $2M^2/(M^2+1)^2$, y si $M^2 \geq 1+\sqrt{2}$ entonces $C_M = 1/M^2$. No obstante, en este último caso, los conjuntos E que no son de unicidad y cuya medida cumple:

$$\frac{1}{M^2} \leq |E| < \frac{2M^2}{(M^2+1)^2},$$

no son de unicidad en un sentido trivial, porque su complementario está contenido en un conjunto donde alguna función del sistema se anula.

2.5 Conjuntos numerables que determinan

Ya sabemos por el Corolario 2.18, que si la medida de un conjunto es mayor que $1 - C_M$, entonces el conjunto determina para cualquier sistema de funciones independientes en $\mathcal{F}_M$. Esto evidentemente, no quiere decir que los conjuntos de medida menor o igual que $1 - C_M$ no determinen. De hecho, en esta sección se prueba que dado un sistema (g_n) de funciones independientes en $\mathcal{F}_M$ existen conjuntos numerables que determinan para dicho sistema en el caso de que las funciones g_n sean *constantes a trozos*. Es decir, en el caso de que para cada n la función g_n sea una función medible que toma una cantidad numerable de valores, o lo que es lo mismo, sea de la forma:

$$g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_k^n \chi_{A_k^n}(x)$$

siendo A_k^n medibles Lebesgue disjuntos dos a dos y $c_k^n \neq c_{k'}^n$ para todo $k \neq k'$. Para los demás casos de sistemas de funciones independientes en $\mathcal{F}_M$ se obtiene un resultado más débil (Teorema 2.23).

Estos resultados son extensiones del Teorema 2.2 sobre el sistema de Rademacher.

Lo primero que hacemos en esta sección es generalizar este teorema para los sistemas (h_n) que provienen de una sucesión de funciones constantes en intervalos mediante la construcción hecha en la Sección 2.1.

Sea $(\tilde{h}_n)$ una sucesión de funciones constantes en intervalos de $\mathcal{F}_M$,

$$\tilde{h}_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^n \chi_{I_k^n}(x)$$

siendo para cada n, $\{I_k^n : k \text{ natural}\}$ una partición en intervalos de casi todo $(0,1)$. Sea (h_n) la sucesión de funciones independientes que se construye a partir de $(\tilde{h}_n)$. Con la notación de la Sección 2.1 que utilizamos a lo largo de esta sección:

$$h_n(x) = \sum_{l \in \mathbb{N}^n} c^n_{l(n)} \chi_{J_l}(x).$$

Como las funciones h_n y $\tilde{h}_n$ tienen la misma función de distribución, h_n también pertenece a $\mathcal{F}_M$. Fijada (h_n), se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.19. *Si $F \subset [0,1]$ es de medida positiva, entonces existe un subconjunto numerable $A \subset F$ tal que si la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n(x)$$

se anula en el conjunto A, entonces también se anula en F.

Demostración. Como el conjunto F tiene medida positiva, sabemos por el Corolario 2.11, que determina débilmente para el sistema (h_n). Con lo cual, las series que se anulan en F son realmente sumas finitas. Teniendo en cuenta esto, el conjunto numerable A que vamos a construir se divide en dos partes. Una parte, que representamos por A_1, que nos asegure que las series que se anulen en él son realmente sumas finitas, y otra, que llamamos A_2, que nos asegure que si las sumas finitas se anulan en él, entonces también se anulan en todo F.

Sean $N_0 = [0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$, y para cada $l \in \mathbb{N}^n$:

$$N_l = J_l \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} J_{l \frown k},$$

como en la prueba de la Proposición 2.3. Sea N el conjunto formado por la unión numerable de todos los conjuntos anteriores, el cual tiene medida nula. Tomemos x un punto de densidad de F que no pertenezca a N. Así, existe una sucesión (k_n) tal que para todo n, $x \in J_{(k_1,\dots,k_n)}$.

Para poder aplicar el Lema 1.4, veamos que $J_{(k_1,\dots,k_n)}$ se contrae aceptablemente a x. Por ser $J_{(k_1,\dots,k_n)}$ intervalos que contienen a x, se verifica (1.4) con $c = 1/2$. Por otro lado, utilizando la definición de las funciones h_n, su independencia y la Nota 2.8, se tiene que:

$$\left|J_{(k_1,\dots,k_n)}\right| \le \left|\bigcap_{i=1}^{n} h_i^{-1}(\{c^i_{k_i}\})\right| \le (k_M)^n \to 0$$

cuando n tiende a infinito. Luego por el Lema 1.4, fijado $d \in (0,1)$, existe n_0 tal que si $J = J_{(k_1,\ldots,k_{n_0})}$ entonces:

$$|F \cap J| > \frac{M^2}{M^2 + (1-d)^2} |J| = K_d |J|. \tag{2.6}$$

El conjunto numerable A_1 que vamos a encontrar es un subconjunto del conjunto no vacío $F \cap J$ de la forma:

$$A_1 = \bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} \{x_n, y_n\},$$

de manera que para cada $n > n_0$, se tiene que $|h_n(x_n) - h_n(y_n)| \geq d/2$ y $h_m(x_n) = h_m(y_n)$ para todo $m > n_0$ y distinto de n. Una vez obtenido A_1, como está contenido en J, se tiene que para todo n y para todo $m \leq n_0$, $h_m(x_n) = h_m(y_n)$. Así, el conjunto A_1 verifica que los únicos términos no nulos de una serie que se anule en él son a lo sumo los n_0 primeros. Veamos cómo se encuentra este conjunto A_1.

Sea $n > n_0$ un número natural y consideremos el siguiente conjunto de índices:

$$\mathcal{I}_{n-1} = \{l \in \mathbb{N}^{n-1} : l(i) = k_i \text{ para } i = 1, \ldots, n_0\}.$$

Por (2.6) y por ser $\{J_l : l \in \mathcal{I}_{n-1}\}$ una partición de casi todo J (Proposición 2.3 (c)), existe $l \in \mathcal{I}_{n-1}$ tal que:

$$|F \cap J_l| > K_d |J_l|. \tag{2.7}$$

Veamos que existen dos puntos x_n e y_n pertenecientes al conjunto no vacío $F \cap J_l$, de manera que $|h_n(x_n) - h_n(y_n)| \geq d/2$ y $h_m(x_n) = h_m(y_n)$ para todo $m > n$.

Para encontrar estos dos puntos dado un índice natural r definimos el conjunto de índices:

$$P_r = \{s : s \text{ natural}, |c_s^n - c_r^n| \geq d/2\},$$

y vamos a demostrar que existen dos índices q y p con $p \in P_q$, y un número real $t \in (0,1)$ tales que $x_n = a_{l\frown q} + t|J_{l\frown q}| \in F$ e $y_n = a_{l\frown p} + t|J_{l\frown p}| \in F$. Es decir, vamos a demostrar que para algún q existe $p \in P_q$ tal que los conjuntos:

$$\frac{(F \cap J_{l\frown q}) - a_{l\frown q}}{|J_{l\frown q}|} \text{ y } \frac{(F \cap J_{l\frown p}) - a_{l\frown p}}{|J_{l\frown p}|}$$

tienen intersección con medida positiva. Como estos dos conjuntos están contenidos en el intervalo $[0, 1]$, basta demostrar que sus medidas suman más que uno. Es decir, vamos a demostrar que existen q y $p \in P_q$ tal que $m_q + m_p > 1$, donde para r natural:

$$m_r = \frac{|F \cap J_{l\frown r}|}{|J_{l\frown r}|},$$

si $J_{l\frown r}$ no es vacío y $m_r = 0$ en cualquier otro caso.

Sea $m = \sup\{m_r : r \text{ natural}\}$.

Supongamos que $m = 1$. Fijamos q tal que m_q sea mayor que $1+K_d|J_l| - |F \cap J_l|$, que por (2.7) es menor que 1. Por las propiedades (a) y (c) de la Proposición 2.3 y por la definición de la función $\tilde{h}_n$:

$$\left|\bigcup_{p\notin P_q} J_{l\frown p}\right| = \sum_{p\notin P_q} |J_{l\frown p}| = |J_l| \sum_{p\notin P_q} |I^n_p| = |J_l| \left|\tilde{h}_n^{-1}(c^n_q - d/2, c^n_q + d/2)\right|.$$

Así, por el Lema 2.7 la medida de la unión de los intervalos $J_{l\frown s}$ tales que $s \notin P_q$, tiene medida menor o igual que $K_d|J_l|$. De esta manera, podemos acotar inferiormente la siguiente medida:

$$\left|F \cap \bigcup_{p\in P_q} J_{l\frown p}\right| \geq |F \cap J_l| - \left|F \cap \bigcup_{p\notin P_q} J_{l\frown p}\right| \geq |F \cap J_l| - K_d|J_l|,$$

y por tanto existe $p \in P_q$ tal que $|F \cap J_{l\frown p}| \geq (|F \cap J_l| - K_d|J_l|)|J_{l\frown p}|$, con lo que obtenemos que $m_q + m_p > 1$.

Supongamos ahora que $m < 1$. Teniendo en cuenta que $K_d > 1/2$, fijamos q tal que $(1-K_d)(1-m_q) < K_d(1-m)$. Sea $m' = \sup\{m_s : s \in P_q\}$. Por ser $\{J_{l\frown s} : s \text{ natural}\}$ una partición de casi todo J_l (Proposición 2.3 (c)) y por las definiciones de m y de m', se tiene que:

$$|F \cap J_l| = \sum_{s\notin P_q} |F \cap J_{l\frown s}| + \sum_{s\in P_q} |F \cap J_{l\frown s}| \leq m \sum_{s\notin P_q} |J_{l\frown s}| + m' \sum_{s\in P_q} |J_{l\frown s}|.$$

Si b representa a $\sum_{s\notin P_q} |I^n_s|$, teniendo en cuenta que $|J_{l\frown s}| = |J_l||I^n_s|$ (Proposición 2.3 (a)), tenemos la siguiente desigualdad:

$$|F \cap J_l| \leq m|J_l|b + m'|J_l|(1-b).$$

Como por el Lema 2.7 se tiene que $b = |h_n^{-1}(c_q^n - d/2, c_q^n + d/2)| \leq K_d$ y además $m \geq m'$, deducimos que:

$$|F \cap J_l| \leq m|J_l|K_d + m'|J_l|(1 - K_d).$$

Ahora por (2.7), $K_d < mK_d + m'(1 - K_d)$. Así, por la elección de q y por esta última desigualdad:

$$(1 - K_d)(1 - m_q) < K_d(1 - m) < (1 - K_d)m'.$$

Luego $m_q + m' > 1$ y en particular, existe $p \in P_q$ tal que $m_q + m_p > 1$.

Así, para los índices q y p que hemos encontrado con $p \in P_q$ y $m_q + m_q > 1$, tenemos que existe un punto t con $0 < t < 1$, perteneciente al conjunto:

$$\frac{(F \cap J_{l^\frown q}) - a_{l^\frown q}}{|J_{l^\frown q}|} \bigcap \frac{(F \cap J_{l^\frown p}) - a_{l^\frown p}}{|J_{l^\frown p}|}.$$

De esta manera, los puntos $x_n = a_{l^\frown q} + t|J_{l^\frown q}|$ e $y_n = a_{l^\frown p} + t|J_{l^\frown p}|$ pertenecen a $F \cap J_l$ y verifican que $h_m(x_n) = h_m(y_n)$ para $m > n$ (Proposición 2.3 (e)), y que $|h_n(x_n) - h_n(y_n)| \geq d/2$, ya que $x_n \in J_{l^\frown q}$, $y_n \in J_{l^\frown p}$ y $p \in P_q$.

Definimos $A_1 = \bigcup_{n > n_0}\{x_n, y_n\}$, entonces $A_1 \subset F \cap J$ y determina débilmente. Efectivamente, si tenemos una serie tal que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n(x) = 0 \text{ para todo } x \in A_1,$$

entonces para todo $n > n_0$, considerando los puntos x_n e y_n se tiene que $a_n = 0$, ya que las funciones h_m evaluadas en estos dos puntos para $m = n$ distan más de $d/2$, y para $m \neq n$ coinciden. Incluso cuando $m < n$ ya que ambos puntos están en J_l para el mismo índice $l \in \mathbb{N}^{n-1}$.

Una vez que tenemos que las únicas series que se anulan en A_1 son sumas finitas de las n_0 primeras funciones $h_1, \ldots, h_{n_0}$, escojamos un subconjunto finito A_2 de F que nos asegure que si las sumas finitas se anulan en A_2 entonces se anulan en F.

Para ello, sea $A_2 \subset F$ finito tal que el conjunto formado por los vectores $(h_1(y), \ldots, h_{n_0}(y))$ con $y \in A_2$ sea una base del espacio vectorial de dimensión finita generado por el conjunto $\{(h_1(x), \ldots, h_{n_0}(x)) : x \in F\}$. De esta manera, si tenemos una suma que se anula en A_2,

$$\sum_{n=1}^{n_0} a_n h_n(x) = 0 \text{ para todo } x \in A_2,$$

el vector $(a_1,\ldots,a_{n_0})$ es ortogonal a todos los vectores $(h_1(x),\ldots,h_{n_0}(x))$ con $x \in A_1$, y por tanto:

$$\sum_{n=1}^{n_0} a_n h_n(x) = 0, \text{ para todo } x \in F.$$

En definitiva, el conjunto $A = A_1 \cup A_2$ es un subconjunto numerable de F que cumple la tesis del Teorema. □

El teorema que acabamos de demostrar es una generalización del Teorema 2.2 ya que, por la construcción del conjunto numerable A, éste verifica la tesis del teorema para cualquier permutación del sistema (h_n). Lo mismo ocurre con el siguiente teorema que se demuestra (Teorema 2.21).

Por otro lado, en la construcción del conjunto A_1 realmente no necesitamos que los puntos x_n e y_n del conjunto verifiquen que $|h_n(x_n) - h_n(y_n)| \geq d/2$, sólo hace falta que los valores sean diferentes, $h_n(x_n) \neq h_n(y_n)$. Pero gracias a esta construcción tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.20. *Sea F un conjunto de medida positiva y $d \in (0,1)$. Entonces existen un subconjunto numerable $A_1 \subset F$ y un número natural n_0 cumpliendo que, fijado $\varepsilon > 0$ y c un número real, si:*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n(x) - c\right| < \varepsilon \text{ para todo } x \in A_1,$$

entonces los coeficientes a_n verifican que para todo $n > n_0$, $|a_n| < 4\varepsilon/d$.

Hacemos notar que si en las hipótesis de este corolario el conjunto F tiene medida mayor que k_M y d es suficientemente pequeño tal que $k_M < K_d < |F|$, entonces la tesis del corolario anterior es cierta para $n_0 = 0$, es decir, se tiene la acotación para todos los coeficientes. Esto es debido a que en la demostración del Teorema 2.19 se puede considerar el intervalo $J = [0,1]$, que cumple (2.6).

Observar que, en este caso, el corolario también es cierto para cualquier permutación de (h_n).

Estudiemos ahora el caso más general, donde los sistemas independientes están formados por funciones constantes a trozos, es decir, por funciones que toman una cantidad numerable de valores. Para estos sistemas obtenemos los mismos resultados que acabamos de ver para los sistemas de funciones constantes en intervalos.

Fijamos (g_n) una sucesión de funciones constantes a trozos e independientes en $\mathcal{F}_M$. Para cada n podemos escribir:

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^n \chi_{A_k^n}(x)$$

siendo $\{A_k^n : k \text{ natural}\}$ una partición de $[0,1]$ de conjuntos medibles Lebesgue y $c_k^n \neq c_{k'}^n$ para todo $k \neq k'$.

Teorema 2.21. *Si $F \subset [0,1]$ es de medida positiva, entonces existe un subconjunto numerable $A \subset F$ tal que si la serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x)$$

se anula en el conjunto A, entonces también se anula en F.

Demostración. Al igual que en la demostración anterior, el conjunto A está formado por un conjunto numerable A_1 que nos asegure que los coeficientes de las series que se anulen en él son nulos a partir de un término fijo n_0; y por un conjunto finito A_2 que nos asegure que las sumas finitas de las n_0 primeras funciones que se anulen en él se anulen también en todo F.

La construcción de A_2 se hace de igual manera que en el teorema anterior una vez hallado n_0. Así, nos centramos exclusivamente en construir el conjunto A_1

Para construir este conjunto podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que cada conjunto A_k^n, o bien es el vacío, o bien es Borel medible de medida positiva. Para ello, basta variar las funciones de la sucesión en un conjunto de medida nula N, y construir el conjunto numerable A_1 contenido en $F \setminus N$. También podemos suponer que F es Borel medible, considerando un Borel con la misma medida de F contenido en él.

En cuestión de notación, para cada $l \in \mathbb{N}^n$ sea:

$$B_l = A_{l(1)}^1 \cap \ldots \cap A_{l(n)}^n.$$

Observemos que para cada n, $\{B_l : l \in \mathbb{N}^n\}$ es una partición de $[0,1]$. Además, cada elemento de la partición B_l, o bien es vacío, o bien es un Borel medible de medida positiva. Exactamente, por la independencia del sistema (g_n), la medida de B_l es:

$$|B_l| = \left| \bigcap_{k=1}^{n} A_{l(k)}^k \right| = \left| \bigcap_{k=1}^{n} g_k^{-1}(c_{l(k)}^k) \right| = \prod_{k=1}^{n} \left| g_k^{-1}(c_{l(k)}^k) \right| = \prod_{k=1}^{n} \left| A_{l(k)}^k \right|. \quad (2.8)$$

La idea para la construcción de A_1 es reducirnos mediante un "cambio de variables" φ a una sucesión de funciones constantes en intervalos (h_n). Para ello, φ lleva los conjuntos B_l en los intervalos J_l que aparecen en la construcción de la Sección 2.1. El principal problema que surge, aparte de la notación, es encontrar un "cambio de variables" adecuado que, además de cumplir lo anterior, verifique que $\varphi(F)$ es medible y que su medida es positiva.

Veamos primero, cuáles son los intervalos J_l y el sistema (h_n) de funciones constantes en intervalos al cual nos reducimos. Para ello, definimos a_l, para cada $l \in \mathbb{N}^n$ por inducción en n de la siguiente manera.

$(n=1)$ Sean $a_1 = 0$ y $a_{p+1} = a_p + |B_p|$ para $p > 0$.

$(n+1)$ Sean $a_{l\frown 1} = a_l$ y $a_{l\frown(p+1)} = a_{l\frown p} + |B_{l\frown p}|$ para $l \in \mathbb{N}^n$ y $p > 0$.

Entonces, sean para todo $l \in \mathbb{N}^n$:

$$J_l = (a_l, a_l + |B_l|) = (a_l, a_{(l(1),\ldots,l(n-1),l(n)+1)})$$

si B_l no es vacío y J_l el vacío si B_l también lo es. Y definimos:

$$h_n(x) = \sum_{l\in\mathbb{N}^n} c^n_{l(n)} \chi_{J_l}(x).$$

Observemos que por la definición de los a_l, esta sucesión proviene de una sucesión de funciones constantes en intervalos, según la construcción de la Sección 2.1. Concretando un poco más, proviene de la sucesión:

$$\tilde{h}_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c^n_k \chi_{I^n_k}(x)$$

donde para cada n los conjuntos I^n_k son intervalos abiertos ordenados de longitud la medida de A^n_k. Entendemos por ordenados que si tenemos dos índices $k < k'$ tales que los intervalos I^n_k e $I^n_{k'}$ son no vacíos, entonces el extremo superior I^n_k es menor o igual que el extremo inferior de $I^n_{k'}$.

Ya que $|I^n_k| = |A^n_k|$, se puede comprobar que los intervalos J_l que hemos definido coinciden con los intervalos J_l que se obtienen en la Sección 2.1 a partir de los intervalos I^n_k.

También se puede comprobar que las funciones h_n y g_n tienen la misma función de distribución, ya que para todo l, $|J_l| = |B_l|$. Y por tanto la sucesión de funciones constantes en intervalos e independientes (h_n) está en $\mathcal{F}_M$.

Por otro lado, para construir el "cambio de variables" φ que nos lleve las funciones g_n a las funciones h_n, construimos primero para cada n otro "cambio de variables" φ_n. Éste va a llevar los conjuntos B_l a los intervalos J_l para todos los índices $l \in \mathbb{N}^n$ y, en consecuencia, para todos los índices $l \in \mathbb{N}^m$ con $m \leq n$. Y después tomamos el "cambio de variables" φ como el límite puntual de los φ_n.

Fijamos n y consideremos las funciones φ_n de $[0,1]$ en sí mismo definidas por:

$$\varphi_n(x) = \sum_{l \in \mathbb{N}^n} \chi_{B_l}(x) \left(a_l + \int_0^x \chi_{B_l}(t)dt \right),$$

donde los coeficientes a_l son los definidos anteriormente. Observemos que para todo $l \in \mathbb{N}^n$, $\varphi_n(B_l) \subseteq [a_l, a_l + |B_l|]$, es decir, $\varphi_n(B_l)$ está contenido en la clausura del intervalo J_l. Además, φ_n es Borel medible y conserva la medida[2]. Efectivamente, es Borel medible ya que los conjuntos B_l son Borel medibles y las funciones:

$$\psi_l(x) = a_l + \int_0^x \chi_{B_l}(t)dt,$$

para cada $l \in \mathbb{N}^n$, son continuas, en particular, Borel medibles. Además, como son absolutamente continuas llevan medibles en medibles, y por tanto para cualquier B medible, $\varphi_n(B)$ también es medible, ya que por ser $\{B_l : l \in \mathbb{N}^n\}$ una partición de $[0,1]$, se tiene que:

$$\varphi_n(B) = \bigcup_{l \in \mathbb{N}^n} \psi_l(B \cap B_l).$$

Para ver que φ_n conserva la medida, aplicando el Lema 1.7 a cada ψ_l, obtenemos que $|\psi_l(B \cap B_l)| = |B \cap B_l|$. Por otro lado, como J_l son disjuntos tenemos que, para todo $l \neq l'$, la intersección de los conjuntos $\psi_l(B \cap B_l)$ y $\psi_{l'}(B \cap B_{l'})$ tiene medida nula, ya que la intersección es como máximo un extremo del conjunto J_l. De esta manera, obtenemos que φ_n conserva la medida,

$$|\varphi_n(B)| = \left| \bigcup_{l \in \mathbb{N}^n} \psi_l(B \cap B_l) \right| = \sum_{l \in \mathbb{N}^n} |\psi_l(B \cap B_l)| = \sum_{l \in \mathbb{N}^n} |B \cap B_l| = |B|.$$

[2]En la prueba de [CO, Lemma 3] aparece la transformación φ_n para dos conjuntos y se indica que cumple las dos propiedades mencionadas arriba. También verifican que son inyectivas salvo en un conjunto de medida nula.

Veamos ahora que las funciones φ_n tienen límite puntual para poder aplicar el Lema 1.11. Dado $x \in [0,1]$, por ser $\{A^n_k : k \text{ natural}\}$ una partición de $[0,1]$ para cada n, existe una sucesión (k_n) tal que:

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A^n_{k_n}. \tag{2.9}$$

Así, para cada n, $x \in B_{(k_1,\ldots,k_n)}$ y, por tanto, $\varphi_n(x)$ pertenece a la clausura del intervalo $J_{(k_1,\ldots,k_n)}$. Las clausuras de estos intervalos forman una sucesión de intervalos encajados con longitud tendiendo a cero. En efecto, por la definición de los intervalos J_l y por (2.8) tenemos que:

$$\left|J_{(k_1,\ldots,k_n)}\right| = \left|B_{(k_1,\ldots,k_n)}\right| = \prod_{m=1}^{n} |A^m_{k_m}|;$$

y, por la definición de las funciones g_n y la Nota 2.8:

$$\left|J_{(k_1,\ldots,k_n)}\right| = \prod_{m=1}^{n} |g_m^{-1}(c^m_{k_m})| \leq \left(\frac{M^2}{M^2+1}\right)^n.$$

Por lo tanto existe el límite cuando n tiende a infinito de $\varphi_n(x)$. Sea $\varphi(x)$ dicho límite. De esta manera si x pertenece a la intersección de los conjuntos $A^n_{k_n}$, entonces $\varphi(x)$ es el único elemento de la intersección de las clausuras de los intervalos $J_{(k_1,\ldots,k_n)}$.

Veamos que, para todo n natural, $h_n(\varphi(x)) = g_n(x)$ en casi todo [0,1]. Sea N el conjunto de puntos x tales que $\varphi(x)$ sea un extremo de algún intervalo J_l para algún $l \in \mathbb{N}^n$ y para algún n natural. Vamos a ver que este conjunto N es un Borel medible de medida nula. Para ello definimos el conjunto de índices:

$$\mathcal{J}_n = \{k : k \text{ natural y } A^n_k \text{ no vacío}\},$$

para cada n natural.

Dado un punto x ya sabemos que existe una sucesión (k_n) tal que x pertenece a la intersección de los conjuntos $A^n_{k_n}$. Veamos que si $x \in N$ entonces la sucesión (k_n) tiene que cumplir que a partir de un término n_0, o bien k_n es el mínimo de $\mathcal{J}_n$ para todo $n > n_0$, o bien k_n es el máximo de $\mathcal{J}_n$ para todo $n > n_0$. De esta manera el conjunto N es un Borel medible de medida nula, ya que es unión numerable de Borel medibles de medida nula. Concretamente, es la unión de los conjuntos:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^n,$$

tales que (k_n) cumpla la condición dicha anteriormente.

Sea $x \in N$ y (k_n) la sucesión que cumple (2.9). Está claro que para cada n, $k_n \in \mathcal{I}_n$. Sea n_0, tal que $\varphi(x)$ sea un extremo de J_l para algún $l \in \mathbb{N}^{n_0}$. Como $\varphi(x)$ pertenece a la clausura de $J_{(k_1,\dots,k_{n_0})}$ y $\{J_l : l \in \mathbb{N}^{n_0}\}$ es una partición de casi todo $(0,1)$, tenemos que $\varphi(x)$ es un extremo de $J_{(k_1,\dots,k_{n_0})}$.

Ahora, si $\varphi(x)$ es el extremo inferior de $J_{(k_1,\dots,k_{n_0})}$, entonces k_n es el mínimo de $\mathcal{J}_n$ para todo $n > n_0$. En caso contrario, si $k_n > k'_n = \min \mathcal{J}_n$ para algún $n > n_0$, entonces $\varphi(x)$ no puede ser el extremo inferior de $J_{(k_1,\dots,k_{n_0})}$. En efecto, basta observar que al pertenecer $\varphi(x)$ a la clausura de $J_{(k_1,\dots,k_n)}$ y al estar ordenados los intervalos I_k^n, la distancia entre $\varphi(x)$ y el extremo inferior de $J_{(k_1,\dots,k_{n_0})}$ es por lo menos $\left|J_{(k_1,\dots,k_{n-1},k'_n)}\right|$, que es una distancia positiva.

Razonando de forma análoga, si $\varphi(x)$ es el extremo superior del intervalo $J_{(k_1,\dots,k_{n_0})}$, entonces k_n es el máximo de $\mathcal{J}_n$ para todo $n > n_0$.

De esta manera si x no pertenece al conjunto de medida nula N se tiene que $h_n(\varphi(x)) = g_n(x)$. Efectivamente, sea (k_n) que cumpla (2.9), entonces $g_n(x) = c_{k_n}^n$. Y por otro lado, $\varphi(x)$ pertenece a la clausura de $J_{(k_1,\dots,k_n)}$ y, como no es ninguno de los extremos ya que $x \notin N$, $h_n(\varphi(x))$ también vale $c_{k_n}^n$.

Sea G el complementario de N. Este conjunto G es un Borel medible de medida total tal que $h_n(\varphi(x)) = g_n(x)$ para todo $x \in G$.

Por el Lema 1.11, como $|F \cap G| > 0$ tenemos que el conjunto $\varphi(F \cap G)$ tiene también medida positiva; por la demostración del Teorema 2.19 existe un subconjunto numerable A'_1 de $\varphi(F \cap G)$ y un natural n_0 tales que si;

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n(x) = 0 \text{ para todo } x \in A'_1,$$

entonces para todo $n > n_0$, $a_n = 0$. Consideremos A_1 como un subconjunto numerable de F, de manera que para todo $a' \in A'_1$ existe $a \in A_1$ tal que $\varphi(a) = a'$. Este conjunto A_1 nos asegura que las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n$ que se anulan en él son sumas finitas de los primeros n_0 términos. □

Igual que ocurre en el caso de los sistemas de funciones constantes en intervalos tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.22. *Sea (g_n) un sistema de funciones constantes a trozos e independientes en $\mathcal{F}_M$. Sea F un conjunto de medida positiva y $d \in (0,1)$.*

Existe un conjunto numerable $A \subset F$ y un número natural n_0 cumpliendo que, fijado $\varepsilon > 0$ y c un número real, si:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x) - c\right| < \varepsilon \text{ para todo } x \in A,$$

entonces $|a_n| < 4\varepsilon/d$ para todo $n > n_0$.

Además si el conjunto F tiene medida mayor que k_M, y $d \in (0,1)$ cumple que $k_M < K_d < |F|$, se puede tomar $n_0 = 0$.

Para el caso general donde el sistema de funciones independientes en $\mathcal{F}_M$ sea cualquiera hemos obtenido un resultado parcial. Se puede encontrar un subconjunto numerable que determine en otro sentido más débil, diferente al que aquí se ha definido.

Este nuevo sentido débil considera sólo series cuyos coeficientes tienen ciertas restricciones. Concretamente se consideran series con coeficientes acotadas por una sucesión fijada de antemano. Así, dada una sucesión de números positivos (b_n) y un sistema ortogonal de funciones (f_n), decimos que un conjunto F *determina para las series en (f_n) con coeficientes acotados por (b_n)* si los únicos coeficientes que cumplen que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) = 0 \text{ para todo } x \in F,$$

y que $|a_n| \leq b_n$ para todo n son los nulos.

Estudios sobre conjuntos de unicidad más débiles, en sentidos parecidos a éste, se han hecho. Por ejemplo, se han estudian los conjuntos de unicidad de l^p, es decir, aquellos conjuntos que cumplen que los únicos coeficientes de l^p que hacen que la serie se anula fuera del conjunto son los nulos ([CO] entre otros).

El resultado que se ha obtenido para el caso general de sistemas independientes es el siguiente.

Teorema 2.23. *Sea (b_n) una sucesión de números positivos y $(f_n) \subset \mathcal{F}_M$ un sistema de funciones independientes. Si $F \subset [0,1]$ es de medida mayor estricta que k_M, existe un subconjunto numerable $A \subset F$ que determina para las series con coeficientes acotados por (b_n).*

Demostración. La prueba consiste en aproximar la sucesión (f_n) por funciones constantes a trozos y aplicar los resultados conocidos para este tipo de sistema independiente.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la sucesión (b_n) es creciente y que $b_1 \geq 1$.

Sea para cada número natural m:

$$M_m = \frac{Mm}{m - M - 2}.$$

Sea m_0 suficientemente grande tal que para todo $m \geq m_0$ se tenga que $M_m > 0$ y $k_M < k_{M_m} < |F|$.

Fijamos $m \geq m_0$. Dado n natural y k entero, definimos el siguiente conjunto:

$$A_k^n = f_n^{-1}([k/N_n, (k+1)/N_n)),$$

donde $N_n = mb_n 2^n$. Tomamos $c_k^n \in [k/N_n, (k+1)/N_n)$ y con valor absoluto menor que M tal que:

$$c_k^n |A_k^n| = \int_{A_k^n} f_n \, dx.$$

Observemos que, como las funciones f_n están acotadas por M, si $|k| > MN_n + 1$ entonces $|A_k^n| = 0$. Consideremos la sucesión de funciones $(\widetilde{g}_n)$ definidas por:

$$\widetilde{g}_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^n \chi_{A_k^n}(x).$$

Como $f_n \in \mathcal{F}_M$, $\widetilde{g}_n$ tiene las siguientes propiedades:

$$\int \widetilde{g}_n \, dx = 0, \quad \|\widetilde{g}_n\|_2 \geq 1 - \frac{M+2}{m}, \quad \|\widetilde{g}_n\|_\infty \leq M.$$

Efectivamente, por la definición de los coeficientes c_k^n se tiene que las funciones $\widetilde{g}_n$ tienen media cero y están acotadas por M. Para ver que las varianzas están acotadas inferiormente, razonamos de la siguiente manera:

$$\left| \|\widetilde{g}_n\|_2^2 - \|f_n\|_2^2 \right| = \left| \sum_k (c_k^n)^2 \, |A_k^n| - \int_{A_k^n} |f_n|^2 dx \right|;$$

fijado k, ambos sumandos pertenecen al intervalo de extremos $|A_k^n| k^2/(N_n)^2$ y $|A_k^n|(k+1)^2/(N_n)^2$. Así, podemos acotar por:

$$\left| \|\widetilde{g}_n\|_2^2 - \|f_n\|_2^2 \right| \leq \sum_k \left| |A_k^n| \frac{(k+1)^2 - k^2}{(N_n)^2} \right|;$$

y teniendo en cuenta que los índices k tales que $|A_k^n| \neq 0$ cumplen que $|k| \leq MN_n + 1$, tenemos que:

$$\left| \|\widetilde{g}_n\|_2^2 - \|f_n\|_2^2 \right| \leq \sum_k |A_k^n| \frac{2MN_n + 3}{(N_n)^2};$$

como $\{A_k^n : k \text{ natural}\}$ es una partición de $[0,1]$ y $N_n \geq 2mc_1 \geq 2m$, obtenemos que:

$$\left| \|\widetilde{g}_n\|_2^2 - 1 \right| \geq \frac{2MN_n + 3}{(N_n)^2} \geq \frac{M+2}{m};$$

y en particular:

$$\|\widetilde{g}_n\|_2 \leq \left(1 - \frac{M+2}{m}\right)^{1/2} \leq \frac{m - M - 2}{m}.$$

Sea $g_n = \widetilde{g}_n / \|\widetilde{g}_n\|_2$. Se tiene que $(g_n) \subset \mathcal{F}_{M_m}$. Así, por el corolario anterior, existe $A_m \subset F$ numerable tal que si:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x) - c \right| < \varepsilon \text{ para todo } x \in A_m,$$

entonces $|a_n| < 4\varepsilon/d$ para todo n siendo $d \in (0,1)$ tal que $k_{M_m} < K_d < |F|$. Observemos que tanto K_d,

$$K_d = K_d(M_m) = \frac{(M_m)^2}{(M_m)^2 + (1-d)^2},$$

como el sistema $(\widetilde{g}_n)$ dependen del entero m fijado.

Sea $A = \bigcup_{m=m_0}^{\infty} A_m$. Claramente, $A \subset F$ es numerable. Veamos que A determina para las series con coeficientes acotados por (b_n). Sea $|a_n| \leq b_n$ y:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) = 0 \text{ para todo } x \in A.$$

Fijado un número natural $m \geq m_0$ y considerando la sucesión (g_n) y el conjunto A_m asociados a m, tenemos que para todo $x \in A_m$:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \|\widetilde{g}_n\|_2 g_n(x)\right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, |\widetilde{g}_n(x) - f_n(x)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{N_n} \leq \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{m},\end{aligned}$$

y entonces $\|\widetilde{g}_n\|_2 |a_n| \leq 4/md$. Podemos tomar $d \in (0,1)$ tal que $k_{M_{m_0}} < K_d(M_{m_0}) < |F|$, ya que de esta manera se cumple que para todo $m \geq m_0$:

$$k_M < k_{M_m} < K_d(M_m) < K_d(M_{m_0}) < |F|.$$

En definitiva, como para cualquier $m \geq m_0$ y para todo n natural $\|\widetilde{g}_n\|_2$ está acotado inferiormente por $1 - (M+2)/m_0$, tomando límite cuando m tiende a infinito, tenemos que los coeficientes a_n son todos nulos. □

Como consecuencia de estos teoremas tenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.24. *Existen conjuntos de unicidad de medida total para cualquier sistema de funciones constantes a trozos e independientes en $\mathcal{F}_M$.*

Además, para cualquier sistema de funciones independientes en $\mathcal{F}_M$ existen conjuntos de medida total de unicidad para series con coeficientes acotados por una sucesión fija.

Capítulo 3

QUANTUM DERIVADAS

Vamos a comenzar haciendo un pequeño recorrido sobre distintos conceptos y resultados de diferenciabilidad que han aparecido en la literatura matemática y que guardan relación con las Quantum Derivadas.

Partimos del concepto de diferenciabilidad clásico que todos conocemos:

Definición 3.1. *Una función real de variable real f, es Derivable en un punto x si existe:*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Por inducción, se dice que f es n veces Derivable en x cuando la función $f^{(n-1)}$ es derivable en x, y se define la n-ésima Derivada de f en x como:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x).$$

Si tenemos una función f n veces Derivable en x, aplicando la fórmula de Taylor, podemos escribir:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{1}{n!}h^n f^{(n)}(x) + o(h^n).$$

Así, aparece el segundo concepto de n-diferenciabilidad:

Definición 3.2. *Una función real de variable real f tiene n-ésima Derivada de Peano en x si existen n constantes $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ tales que:*

$$f(x+h) = f(x) + hf_1(x) + \ldots + \frac{1}{n!}h^n f_n(x) + o(h^n), \qquad (3.1)$$

y en tal caso, se dice que $f_n(x)$ es la n-ésima Derivada de Peano[1] *de f en x.*

Por lo comentado anteriormente, está claro que se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.3. *Si existe la n-ésima Derivada, entonces existe la n-ésima Derivada de Peano, y coinciden.*

Para el caso $n = 1$, el recíproco de esta proposición es cierto, ya que en este caso ambas definiciones son equivalentes. Sin embargo, para $n > 1$, no es cierto. La función $f(x) = x^3 \operatorname{sen}(x^{-3})$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ es un contraejemplo: la segunda Derivada de Peano de f en el origen es nula, ya que $f(h) = o(h^2)$; y no existe $f''(0)$ ya que su derivada no está acotada en un entorno del 0.

Además se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.4. *Para $n > 1$, existe una función que tiene n-ésima Derivada de Peano en un conjunto de medida positiva, pero que no es n veces Derivable en ningún punto de ese conjunto.*

Esta proposición es consecuencia del siguiente teorema. Basta tomar en él un abierto denso de medida no total (por ejemplo la unión numerable de intervalos centrados en cada uno de los puntos racionales y de longitudes suficientemente pequeñas).

Teorema 3.5. [O, Theorem 5] *Para $n > 1$, existe una función que tiene n-ésima Derivada de Peano en todo un intervalo, la cual es n veces Derivable exactamente en un abierto denso dado de antemano.*

La función que se da en [O] para demostrar este teorema es:

$$f(x) = \begin{cases} (x-a_k)^n (b_k - x)^n g\left(\dfrac{x-a_k}{b_k-a_k}\right) & \text{si } a_k < x < b_k \\ \\ 0 & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

donde $g(x) = x^{n+1}(1-x)^{n+1} \operatorname{sen}\left(x^{-3n}\right) \operatorname{sen}\left((1-x)^{-3n}\right)$ y $((a_k, b_k))_k$ es la sucesión de intervalos disjuntos que forman el abierto denso. Se demuestra que f tiene n-ésima Derivada de Peano en todo el intervalo, probando que

[1]En algunos textos, como en [MZ], se denomina *n-ésima Derivada de de la Vallée-Poussin.*

en los puntos que no pertenecen al abierto denso, la n-ésima Derivada Peano es nula; y que en cualquier entorno de estos puntos la Derivada de f no está acotada.

Por otro lado, un conocido teorema de Denjoy [D], que a continuación enunciamos, nos asegura la existencia de la primera Derivada de Peano, que como ya hemos dicho coincide con la Derivada, en casi todo el conjunto donde se cumple una hipótesis más débil que (3.1) para $n = 1$.

Teorema 3.6. **[RS, Theorem 21.31]** *Dado un conjunto arbitrario E, si para todo $x \in E$:*

$$\limsup_{h \to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| < +\infty,$$

entonces existe la Derivada de f en casi todo E.

Este resultado se generaliza utilizando técnicas profundas del Análisis Armónico para la n-ésima Derivada de Peano de la siguiente manera:

Proposición 3.7. **[MZ, Lemma 7]** *Si para todo $x \in E$, existen $n-1$ constantes $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_{n-1}(x)$ tales que:*

$$f(x+h) = f(x) + hf_1(x) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} h^{n-1} f_{n-1}(x) + O(h^n), \qquad (3.2)$$

entonces existe la n-ésima Derivada de Peano de f en casi todo E.

Este resultado se utiliza en [MZ] para estudiar propiedades de otro concepto de n-diferenciabilidad, las n-ésimas Derivadas de Riemann que a continuación introducimos. En su definición se utilizan los valores de la función en puntos simétricos respecto de x, por lo que en ocasiones reciben el nombre de n-ésimas Derivadas Simétricas. Así, la primera Derivada de Riemann es:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h/2) - f(x - h/2)}{h};$$

la segunda Derivada de Riemann es:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2};$$

y para n cualquiera, tenemos la siguiente definición:

Definición 3.8. *Una función real de variable real f tiene n-ésima Derivada de Riemann en x, si existe el siguiente límite:*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(x+(k-n/2)h)}{h^n}. \tag{3.3}$$

En tal caso, se dice que el valor de este límite es la n-ésima Derivada de Riemann de f en x.

Aplicando (3.1) en la definición de Derivada de Riemann, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.9. *Si existe la n-ésima Derivada de Peano, entonces existe la n-ésima Derivada de Riemann y ambas coinciden.*

Por el contrario, la función $f(x) = |x|$ tiene primera Derivada de Riemann nula en $x = 0$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h/2)-f(-h/2)}{h} = 0,$$

y sin embargo, no es Derivable Peano en el origen. Por tanto, la existencia de la Derivada de Riemann no implica la existencia de la de Peano, aunque sí se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.10. **[MZ, Theorem 1]** *Si para todo $x \in E$:*

$$\limsup_{h\to 0}\frac{\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(x+(k-n/2)h)\right|}{|h|^n} < +\infty, \tag{3.4}$$

entonces existe la n-ésima Derivada de Peano de f en casi todo E. En particular, la existencia de la n-ésima Derivada de Riemann implica la existencia de la n-ésima Derivada de Peano en casi todo.

Hacemos notar que la hipótesis (3.1) implica (3.4) y por tanto la Proposición 3.7 es consecuencia del Teorema 3.10. Sin embargo, este teorema se demuestra, como comentamos anteriormente, basándose en la proposición.

Por último, la n-ésima Derivada de Riemann se generaliza de la siguiente manera. En vez de evaluarse la función en $n+1$ puntos distribuidos simétricamente, se evalúa en $n+1$ puntos con una distribución más general.

Concretamente:

Definición 3.11. **[A, pg.181]** *Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n$ números reales distintos entre sí. Se dice que existe la n-ésima Derivada de Riemann Generalizada con respecto a $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ de una función real de variable real f en x, si existe el límite:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} A_k f(x + a_k h)}{h^n}, \tag{3.5}$$

donde los coeficientes A_k están determinados por el siguiente sistema:

$$V(a_0, a_1, \ldots, a_n)(A_0, A_1, \ldots, A_n)^t = (0, \ldots, 0, n!)^t, \tag{3.6}$$

donde t indica matriz traspuesta y $V(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ es la matriz de Vandermonde.

En el caso de que exista el límite (3.5), a su valor se le llama n-ésima Derivada de Riemann Generalizada con respecto a $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ de f en x.

Se puede comprobar que para el caso $a_k = k - n/2$ se obtiene la n-ésima Derivada de Riemann.

Esta generalización mantiene las mismas propiedades antes mencionadas sobre la Derivada de Riemann: si existe la n-ésima Derivada de Peano, entonces existe cualquier n-ésima Derivada de Riemann Generalizada y coinciden (justo para esto se toman los coeficientes $A_1, \ldots, A_n$ verificando (3.6) en la Definición 3.11); y, recíprocamente, si existe una n-ésima Derivada de Riemann Generalizada, entonces la n-ésima Derivada de Peano existe en casi todo, o más aún:

Teorema 3.12. **[A, Theorem 1]** *Si para todo $x \in E$:*

$$\limsup_{h\to 0} \frac{\left|\sum_{k=0}^{n} A_k f(x + a_k h)\right|}{|h|^n} < +\infty, \tag{3.7}$$

entonces existe la n-ésima Derivada de Peano de f en casi todo E.

En resumen, tenemos el siguiente cuadro para $n > 1$, donde la flecha "$\rightarrow$" significa que la tesis es cierta en casi todo el conjunto donde se cumple la hipótesis:

$$
\begin{array}{cc|ccc}
\boxed{\begin{array}{c}n \text{ veces}\\ \text{Derivable}\end{array}} & \begin{array}{c}\text{Prop. 3.3}\\ \Rightarrow\\ \not\leftarrow\\ \text{Prop. 3.4}\end{array} & \boxed{\begin{array}{c}\text{existe la } n\text{-ésima}\\ \text{Derivada de Peano}\end{array}} & \begin{array}{c}\Rightarrow\\ \leftarrow\\ \text{Prop. 3.7}\end{array} & (3.2)\\
 & & \text{Prop. 3.9} \Downarrow \ \uparrow \text{Teor. 3.12} & & \uparrow \ \Downarrow\\
 & & \boxed{\begin{array}{c}\text{existe la } n\text{-ésima}\\ \text{Derivada de Riemann}\\ \text{(Generalizada)}\end{array}} & \begin{array}{c}\Rightarrow\\ \leftarrow\end{array} & (3.7)
\end{array}
$$

Para el caso $n = 1$, como la Derivada de Peano coincide con la Derivada, el comportamiento de todas es el mismo en el sentido de la flecha "$\rightarrow$", es decir, que si una derivada existe en un conjunto, las demás existen en al menos casi todo el conjunto.

Nuestro trabajo en este tercer capítulo, se centra en verificar si las Quantum Derivadas y sus generalizadas mantienen las mismas propiedades que las Derivadas de Riemann.

Para definir el concepto de Quantum Derivada, previamente observamos que si $R_n f(x,h)$ se define por inducción de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
R_1 f(x,h) &= \frac{f(x+h/2) - f(x-h/2)}{h}\\
R_{n+1} f(x,h) &= \frac{R_n f(x+h/2,h) - R_n f(x-h/2,h)}{h},
\end{aligned}
$$

entonces la n-ésima Derivada de Riemann es el límite cuando h tiende a cero de $R_n(x,h)$. Así, de manera análoga tenemos la siguiente definición.

Dada una función real de variable real y un punto $x \neq 0$ se define la *n-ésima Quantum Derivada de f en el punto x* como:

$$
\mathcal{D}_n f(x) = \lim_{q \to 1} D_n f(x,q),
$$

donde $D_n f(x,q)$ son las *n-ésimas Quantum Diferencias* que se definen por inducción de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} D_1 f(x,q) &= \frac{f(qx)-f(x)}{qx-x} \\ D_{n+1} f(x,q) &= \frac{D_n f(qx,q)-D_n f(x,q)}{qx-x}. \end{aligned}$$

Por otro lado, para generalizar las Quantum Derivadas, se observa por el Lema 3.41, el cual se demuestra en la última sección de este capítulo, que $\mathcal{D}_n f(x)$ coincide con la siguiente expresión:

$$\lim_{q\to 1} \frac{\sum_{k=0}^{n} A_k(q) f\left(q^{a_k} x\right)}{(q-1)^n x^n}, \tag{3.8}$$

para ciertas funciones medibles A_k y para $a_k = k$. Entonces de manera natural, dados unos números a_0, a_1, ... , a_n distintos entre sí y unas funciones medibles $A_0(q)$, $A_1(q)$, ... , $A_n(q)$, definimos la n-ésima Quantum Derivada Generalizada con respecto a $\{a_0,\ a_1,\ \ldots\ ,\ a_n;\ A_0(q),\ A_1(q),\ \ldots\ ,\ A_n(q)\}$ como el límite (3.8).

Realmente, hablamos de Quantum Derivadas Generalizadas cuando el límite (3.8) generalice a la n-ésima Derivada, es decir, cuando el límite coincida con la n-ésima Derivada para las funciones n veces Derivables. Para ello, los números $a_0, \ldots, a_n$, y las funciones $A_0(q)$, ..., $A_n(q)$, tienen que cumplir cierta condición.

3.1 Coeficientes

En esta sección, damos la definición de cuándo unas funciones medibles $A_0(q)$, ..., $A_n(q)$ son unos coeficientes asociados a unos números $a_0, \ldots, a_n$ y vemos algunas propiedades sobre ellos. Esta condición de ser coeficientes asociados es la que imponemos para decir que (3.8) es una Quantum Derivada Generalizada (Definición 3.16).

Definición 3.13. *Dados $a_0, \ldots, a_n$ números reales distintos entre sí, diremos que $n+1$ funciones medibles $A_0(q), \ldots, A_n(q)$ definidas en un entorno de 1, son coeficientes asociados a $a_0, \ldots, a_n$ si cumplen:*

$$\lim_{q\to 1} \frac{\sum_{i=0}^{n} A_i(q) \left(q^{a_i}\right)^k}{(q-1)^n} = \delta_{k,n} n! \ \textit{para} \ \ k = 0, 1, \ldots, n. \tag{3.9}$$

En la definición que acabamos de dar, los límites de (3.9) no son más que los límites (3.8) para los polinomios de grado menor o igual que n en el punto $x = 1$. Así, la definición de coeficientes asociados implica que (3.8) se comporta como la Derivada n-ésima para los polinomios de grado menor o igual que n en el uno. Pero esto es suficiente para que (3.8) sea una generalización de la n-ésima Derivada, como vemos en la siguiente sección (Corolario 3.18).

Para demostrar este corolario, necesitamos saber que los coeficientes asociados a unos números están acotados en un entorno de uno. Ésta es una de las propiedades que se demuestra en esta sección.

Por otro lado, las igualdades de (3.9) se pueden expresar en forma matricial utilizando una matriz de Vandermonde de la siguiente manera:

$$\lim_{q\to 1} \frac{V(q^{a_0}, \dots, q^{a_n})(A_0(q), \dots, A_n(q))^t}{(q-1)^n} = (0, \dots, 0, n!)^t.$$

Observemos que dados $a_0, a_1, \dots, a_n$ números distintos entre sí, pueden existir muchos coeficientes distintos asociados a ellos. De hecho, dadas cualesquiera funciones medibles $\beta_0(q), \dots, \beta_n(q)$ cumpliendo:

$$\lim_{q\to 1} \beta_k(q) = \delta_{k,n} n!, \tag{3.10}$$

las funciones $A_0(q), \dots, A_n(q)$ dadas por el siguiente sistema, que tiene solución única:

$$V(q^{a_0}, \dots, q^{a_n})(A_0(q), \dots, A_n(q))^t = (q-1)^n(\beta_0(q), \dots, \beta_{n-1}(q), \beta_n(q))^t,$$

son unos coeficientes asociados a $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Además, dados $n+1$ números distintos entre sí, existe una correspondencia biunívoca entre los coeficientes $A_0(q), \dots, A_n(q)$ asociados a estos números y las funciones $\beta_0(q), \dots, \beta_n(q)$ cumpliendo (3.10).

Veamos ahora un par de propiedades de los coeficientes asociados a números.

Proposición 3.14. *Sean $A_0(q), \dots, A_n(q)$ unos coeficientes asociados a los números $a_0, \dots, a_n$. Se tiene que:*

(a) para a y b números reales con $b \neq 0$, $A_0(q^b)/b^n, \dots, A_n(q^b)/b^n$ son unos coeficientes asociados a los números $ba_0 - a, \dots, ba_n - a$;

(b) los coeficientes están acotados en un entorno de 1, de hecho, para $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\lim_{q\to 1} A_k(q) = \frac{n!}{\prod_{m\neq k} (a_k - a_m)}. \tag{3.11}$$

Demostración. Para ver la primera propiedad, basta observar que:

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} A_i(q^b)\left(q^{ba_i-a}\right)^k}{b^n(q-1)^n} \simeq \frac{q^{-ak}\sum_{i=0}^{n} A_i(q^b)\left(\left(q^b\right)^{a_i}\right)^k}{(q^b-1)^n}.$$

Veamos la segunda de las propiedades. Como comentamos antes, existen $n+1$ funciones $\beta_0(q), \ldots, \beta_n(q)$ cumpliendo (3.10) tales que:

$$V(q^{a_0}, \ldots, q^{a_n})(A_0(q), \ldots, A_n(q))^t = (q-1)^n(\beta_0(q), \ldots, \beta_{n-1}(q), \beta_n(q))^t.$$

Utilizando la regla de Cramer y desarrollando por la columna k-ésima:

$$A_k(q) = \frac{(q-1)^n}{|V(q^{a_0}, \ldots, q^{a_n})|}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{k+i}\beta_i(q)\,|V(q^{a_0}, \ldots, q^{a_n})_{i,k}|$$

donde $V(q^{a_0}, \ldots, q^{a_n})_{i,k}$ es la matriz que se obtiene de la matriz de Vandermonde $V(q^{a_0}, \ldots, q^{a_n})$ quitándole la fila i-ésima y la columna k-ésima.

Por (1.8):

$$A_k(q) \simeq \frac{(q-1)^n}{\prod_{0\leq m<l\leq n} (a_l - a_m)(q-1)^{\binom{n+1}{2}}}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{k+i}\beta_i(q)\,|V(q^{a_0}, \ldots, q^{a_n})_{i,k}|.$$

Al tomar límite cuando q tiende a uno, por la Proposición 1.13 y por (3.10), el único sumando que no tiene límite nulo es el de $i = n$. Luego:

$$\lim_{q\to 1} A_k(q) = \frac{(-1)^{k+n}n!}{\prod_{0\leq m<l\leq n} (a_l - a_m)}\lim_{q\to 1}\frac{|V(q^{a_0}, \ldots, q^{a_n})_{n,k}|}{(q-1)^{\binom{n}{2}}}.$$

Observamos que $V(q^{a_0}, \ldots, q^{a_n})_{n,k} = V(q^{a_0}, \ldots, q^{a_{k-1}}, q^{a_{k+1}}, \ldots, q^{a_n})$. Utilizando de nuevo (1.8) y simplificando:

$$\lim_{q\to 1} A_k(q) = \frac{(-1)^{k+n} n!}{\prod_{0\le m<k} (a_k - a_m) \prod_{k<l\le n} (a_l - a_k)} = \frac{n!}{\prod_{m\neq k} (a_k - a_m)}.$$

□

A continuación, damos dos definiciones equivalentes a la Definición 3.13.

Unas funciones medibles cualesquiera $A_0(q), \ldots, A_n(q)$ son coeficientes asociados a unos números reales distintos entre sí $a_0, \ldots, a_n$ si y sólo si:

$$\lim_{q\to 1} \frac{\sum_{i=0}^{n} A_i(q)\,(q^{a_i} - 1)^k}{(q-1)^n} = \delta_{k,n} n! \text{ para } k = 0, 1, \ldots, n. \tag{3.12}$$

Para ver esta equivalencia, basta con desarrollar el binomio de Newton $(q^{a_i} - 1)^k$, y observar que los límites de (3.9) se pueden obtener como combinación lineal de los límites de (3.12), y también al contrario.

La segunda definición equivalente viene dada por la siguiente proposición.

Proposición 3.15. *Existen unas constantes $\alpha_0 = 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n = n!$ tales que unas funciones medibles cualesquiera $A_0(q), \ldots, A_n(q)$ son coeficientes asociados a unos números reales distintos entre sí $a_0, \ldots, a_n$ si y sólo si:*

$$\lim_{q\to 1} \frac{\sum_{i=0}^{n} A_i(q) a_i^k}{(q-1)^{n-k}} = \alpha_k \textit{ para } k = 0, 1, \ldots, n. \tag{3.13}$$

Por ejemplo, para el caso $n = 1$, a partir de la definición equivalente (3.12), se deduce fácilmente que las constantes son, efectivamente:

$$\alpha_0 = 0 \text{ y } \alpha_1 = 1. \tag{3.14}$$

Vamos a demostrar la proposición solamente para el caso $n = 2$, que junto con el caso $n = 1$ son los únicos casos que utilizamos en este trabajo. La prueba del caso general sigue los mismos pasos que damos para el caso $n = 2$.

Demostración. Por la fórmula de Taylor, sabemos que:

$$q^a - 1 = a(q-1) + a(a-1)\frac{(q-1)^2}{2!} + o((q-1)^2).$$

Agrupando sumandos como si fuera un polinomio en la variable a, obtenemos la siguiente igualdad:

$$q^a - 1 = a\left((q-1) - \frac{(q-1)^2}{2}\right) + a^2\frac{(q-1)^2}{2!} + o((q-1)^2).$$

Sean A_0, A_1, A_2 unos coeficientes asociados a unos exponentes a_0, a_1, a_2 distintos entre sí. Por (3.11), las funciones coeficientes están acotadas en un entorno de 1. Así, aplicando la igualdad anterior en (3.12) a cada $(q^{a_i} - 1)$, tenemos que:

$$\lim_{q\to 1}\frac{\sum_{i=0}^{2} A_i(q)\left(a_i\left((q-1) - \frac{(q-1)^2}{2}\right) + a_i^2\frac{(q-1)^2}{2!}\right)^k}{(q-1)^2} = \delta_{k,2}2!,$$

para $k = 0, 1, 2$. En particular, para $k = 2$:

$$\lim_{q\to 1}\frac{\sum_{i=0}^{2} A_i(q)a_i^2(q-1)^2}{(q-1)^2} = 2; \tag{3.15}$$

para $k = 1$:

$$\lim_{q\to 1}\frac{\sum_{i=0}^{2} A_i(q)\left(a_i\left((q-1) - \frac{(q-1)^2}{2}\right) + a_i^2\frac{(q-1)^2}{2!}\right)}{(q-1)^2} = 0; \tag{3.16}$$

y para $k = 0$:

$$\lim_{q\to 1}\frac{\sum_{i=0}^{2} A_i(q)}{(q-1)^2} = 0. \tag{3.17}$$

A partir de (3.15) y de (3.17), encontramos dos de las tres constantes, $\alpha_2 = 2$ y $\alpha_0 = 0$. Ahora, por (3.16), tenemos:

$$\lim_{q\to 1} \frac{\sum_{i=0}^{2} A_i(q)a_i\left(1-\frac{(q-1)}{2}\right)}{q-1} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2} A_i(q)a_i^2 = 0.$$

Así, la constante que falta es $\alpha_1 = -\alpha_2/2 = -1$. De esta manera, hemos visto que (3.13) para las constantes:

$$\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = -1 \text{ y } \alpha_2 = 2 \tag{3.18}$$

es una condición necesaria. Para ver que es una condición suficiente simplemente damos marcha atrás en la demostración. Pero para ello, necesitamos demostrar que si A_0, A_1, A_2 cumplen (3.13), entonces son acotados.

Observemos cómo se demuestra esta propiedad sin particularizar en el caso $n = 2$. Supongamos que $A_0, A_1, \dots, A_n$ cumplen (3.13). Consideremos las funciones:

$$\alpha_k(q) = \frac{\sum_{i=0}^{n} A_i(q)a_i^k}{(q-1)^{n-k}} \text{ para todo } k = 0, 1, \dots, n.$$

Entonces se tiene que:

$$\lim_{q\to 1} \alpha_k(q) = \alpha_k \text{ para todo } k = 0, 1, \dots, n, \tag{3.19}$$

y además:

$$V(a_0, \dots, a_n)\begin{pmatrix} A_0(q) \\ A_1(q) \\ A_2(q) \\ \vdots \\ A_n(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0(q)(q-1)^n \\ \alpha_1(q)(q-1)^{n-1} \\ \alpha_2(q)(q-1)^{n-2} \\ \vdots \\ \alpha_n(q) \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Así, utilizando la regla de Cramer, igual que en la demostración de la Proposición 3.14, se obtiene (3.11) de manera más sencilla ($\alpha_n = n!$). En particular, los coeficientes están acotados en un entorno de 1. □

Observemos que vuelve a existir una correspondencia biunívoca entre funciones medibles $\alpha_0(q), \alpha_1(q), \dots, \alpha_n(q)$ cumpliendo (3.19), donde α_k son las constantes de la proposición, y los coeficientes asociados a los números $a_0, a_1, \dots, a_n$, distintos entre sí. La relación viene dada por (3.20).

3.2 Quantum Derivadas Generalizadas

Ya estamos preparados para dar la definición de Quantum Derivada Generalizada.

Definición 3.16. *Dados $a_0, \ldots, a_n$ números reales distintos entre sí, que llamamos exponentes, y $A_0(q), \ldots, A_n(q)$ coeficientes asociados a los exponentes, se define la n-ésima Quantum Derivada Generalizada con respecto a $\{a_0, \ldots, a_n; A_0(q), \ldots, A_n(q)\}$ de una función real de variable real f en un punto $x \neq 0$, como:*

$$\mathcal{Q}_n f(x) = \lim_{q \to 1} \frac{\sum_{i=0}^{n} A_i(q) f(q^{a_i} x)}{(q-1)^n x^n}. \tag{3.21}$$

Nosotros estudiamos aquí la relación entre esta derivada y las derivadas ya conocidas, que aparecen al principio de este capítulo, especialmente la Derivada de Peano. Pero antes de nada, hacemos notar una carencia de este concepto de n-diferenciabilidad: el hecho de que no esté definido para $x = 0$.

De entrada, por la propia definición de coeficientes, podemos demostrar rápidamente el siguiente resultado, que nos dice que estas derivadas son una generalización de las Derivadas de Peano.

Proposición 3.17. *Si existe la n-ésima Derivada de Peano de una función f en un punto $x \neq 0$, entonces existe cualquier n-ésima Quantum Derivada Generalizada y coinciden.*

Demostración. Si existe la n-ésima Derivada de Peano de f en x (Definición 3.2), se tiene:

$$f(q^a x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(q^a - 1)^k x^k f_k(x) + o((q-1)^n).$$

Sustituyendo en (3.21), intercambiando sumatorios y teniendo en cuenta la acotación de los coeficientes (3.11), obtenemos que la n-ésima Quantum Derivada Generalizada con respecto a $\{a_0, \ldots, a_n; A_0(q), \ldots, A_n(q)\}$ es:

$$\mathcal{Q}_n f(x) = \lim_{q \to 1} \left(\frac{\sum_{i=0}^{n} A_i(q)}{(q-1)^n x^n} f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{n} A_i(q)\,(q^{a_i} - 1)^k}{(q-1)^n x^{n-k}} \frac{f_k(x)}{k!} \right).$$

Y utilizando la propiedad (3.12): $\mathcal{Q}_n f(x) = f_n(x)$. □

A partir de esta proposición tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.18. *Si una función f es n veces Derivable en un punto $x \neq 0$, entonces existe cualquier n-ésima Quantum Derivada Generalizada de f en x y coinciden con la n-ésima Derivada.*

Demostración. Por las Proposiciones 3.3 y 3.17. □

Como comentamos en la sección anterior, la definición de los coeficientes asociados a unos números se realiza basándose en este corolario. De hecho, fijados unos exponentes $a_0, \ldots, a_n$, el límite de (3.21) para unas funciones medibles cualesquiera $A_0(q), \ldots, A_n(q)$ cumple el corolario anterior, si y sólo si son coeficientes asociados a los exponentes.

El recíproco a la Proposición 3.17 no es cierto. Consideremos la primera Quantum Derivada Generalizada con exponentes $1, -1$ y con coeficientes $1/2, -1/2$,

$$\mathcal{Q}_1 f(x) = \lim_{q \to 1} \frac{f(qx) - f(q^{-1}x)}{2(q-1)x},$$

debemos observar que las funciones constantes $1/2, -1/2$ son unos coeficientes asociados a los exponentes $1, -1$, ya que cumplen (3.20),

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Y consideremos también la función f tal que si $x \leq 1, f(x) = 1/x$ y si $x \geq 1, f(x) = x$. Como la función no es derivable en el 1, no existe la primera Derivada de Peano. Sin embargo, existe la primera Quantum Derivada Generalizada con respecto a $\{1, -1 : 1/2, -1/2\}$, $\mathcal{Q}_1 f(1) = 0$.

Más aún, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.19. *Existe una primera Quantum Derivada Generalizada de una función en un punto siendo la función discontinua en dicho punto.*

Demostración. Por ejemplo, podemos considerar $f(x) = \cos(x/(1-x))$ si $x < 1$ y $f(x) = \cos(1/(x-1))$ si $x > 1$, el punto $x = 1$, y la primera Quantum Derivada Generalizada anterior. □

Nuestro principal objetivo en este capítulo, es intentar demostrar, al igual que ocurre con las Derivadas de Riemann Generalizadas, que el recíproco a la Proposición 3.17 es cierto en un sentido más débil:

Conjetura 3.20. *Si existe una n-ésima Quantum Derivada Generalizada en un conjunto, entonces existe la n-ésima Derivada de Peano en casi todo el conjunto.*

Nosotros conseguimos demostrar este recíproco para todas las primeras y segundas Quantum Derivadas Generalizadas y además, también lo probamos para cualquier n-ésima Quantum Derivada (no generalizada) y para unos casos particulares de n-ésimas Quantum Derivadas Generalizadas, sea cual sea el número natural n.

Al final de esta sección, demostramos la conjetura para las primeras Quantum Derivadas Generalizadas y como la primera Derivada de Peano coincide con la Derivada clásica, tenemos el Corolario 3.26. Sin embargo, para las n-ésimas derivadas con $n > 1$, el análogo de ese corolario no se cumple:

Corolario 3.21. *Para $n > 1$ se cumple que para cualquier n-ésima Quantum Derivada Generalizada, existe una función que tiene n-ésima Quantum Derivada Generalizada en un conjunto de medida positiva sin ser n veces Derivable en ningún punto del conjunto.*

Demostración. Por la Proposición 3.4, este resultado se cumple para las Derivadas de Peano y por tanto, por la Proposición 3.17, este corolario es cierto. $\square$

Para intentar demostrar la Conjetura 3.20, veamos tres lemas análogos a los que se utilizan para el estudio de las Derivadas de Riemann Generalizadas. ([A, Lemmas 1,2 y 3]).

El primero de ellos es un lema técnico (Lema 3.22) que sirve de herramienta para las demostraciones de los otros dos lemas.

Fijamos un intervalo I entorno de 1 y dos funciones φ y α definidas en I cumpliendo las siguientes condiciones: $\varphi \in C^1(I)$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi'(1) \neq 0$, y $\alpha(q) = 1 + O(q-1)$. También consideramos para cada q, el intervalo abierto I_q de extremos q y el punto medio de q y 1.

Observemos que $I_q \subset \varphi(I)$. Realmente esto se cumple para q suficientemente próximo a 1, pero en el enunciado y en la demostración del Lema 3.22 se omiten estos comentarios para hacerlos un poco más legibles, y se supone, cuando sea necesario, que q está suficientemente cercano a 1. Así, el conjunto A_q del lema está bien definido (cuando q está próximo a 1).

Lema 3.22. *Sea $x \neq 0$ un punto de densidad exterior de un conjunto E. Si $A_q = \{p \in I_q : \alpha(q)\varphi^{-1}(p)x \in E\}$, entonces se cumple que $|A_q|^* \simeq |I_q|$, es decir:*

$$\lim_{q \to 1} \frac{|A_q|}{|I_q|} = 1.$$

Demostración. Mediante la homotecia de razón $1/x$, podemos suponer que el punto x es el 1. Cortando el conjunto E por un subintervalo estrictamente contenido en I, también podemos suponer $E \subset \alpha(q)I$. Por último, como $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$ y $\varphi'(1) \neq 0$, podemos suponer que φ' no se anula en I y por tanto que φ es inyectiva en I (estrictamente creciente o decreciente).

Sea $G \subset I$ una cubierta medible de E. Como cualquier función diferenciable es una N-función [RS, Theorem 21.9], por el Lema 1.2, $\varphi(G/\alpha(q))$ es una cubierta medible de $\varphi(E/\alpha(q))$. Por definición de A_q y por (1.3):

$$|A_q|^* = |\varphi(E/\alpha(q)) \cap I_q|^* = |\varphi(G/\alpha(q)) \cap I_q|\,;$$

como $I_q \subset \varphi(I)$ y φ es inyectiva:

$$|A_q|^* = \left|\varphi\left(G/\alpha(q) \cap \varphi^{-1}(I_q)\right)\right|\,;$$

por ser φ diferenciable [R1, Theorem 8.26]:

$$|A_q|^* = \int_{G/\alpha(q) \cap \varphi^{-1}(I_q)} |\varphi'(s)| ds.$$

Ahora, la derivada de φ es continua en el 1, con lo que acotando inferiormente:

$$|A_q|^* \geq k(q) \left|G/\alpha(q) \cap \varphi^{-1}(I_q)\right|,$$

donde $k(q) \simeq |\varphi'(1)|$ cuando q tiende a 1. Supongamos que hemos demostrado que $C_q = \alpha(q)\varphi^{-1}(I_q)$ se contrae aceptablemente a 1. Entonces, por el Lema 1.4 y recordando que $\alpha(q) \simeq 1$, tenemos:

$$k(q) \left|G/\alpha(q) \cap \varphi^{-1}(I_q)\right| = \frac{k(q)}{\alpha(q)} \left|G \cap \alpha(q)\varphi^{-1}(I_q)\right| \simeq |\varphi'(1)||\alpha(q)\varphi^{-1}(I_q)|.$$

Utilizando el Teorema del Valor Medio, se demuestra que:

$$|\varphi'(1)||\alpha(q)\varphi^{-1}(I_q)| \simeq |I_q|. \tag{3.22}$$

En definitiva, obtenemos que:

$$|I_q| \geq |A_q|^* \geq k(q) \left|G/\alpha(q) \cap \varphi^{-1}(I_q)\right| \simeq |I_q|,$$

es decir, $|A_q|^* \simeq |I_q|$.

Veamos que efectivamente $C_q = \alpha(q)\varphi^{-1}(I_q)$ se contrae aceptablemente a 1. Por (3.22), la primera condición está clara:

$$\lim_{q\to 1} |\alpha(q)\varphi^{-1}(I_q)| = 0.$$

Para ver que se cumple la condición (1.5), sea J_q es el menor intervalo cerrado centrado en el 1 que contiene a C_q. Por (3.22):

$$\frac{|C_q|}{|J_q|} = \frac{|\alpha(q)\varphi^{-1}(I_q)|}{|J_q|} \simeq \frac{|I_q|}{|\varphi'(1)||J_q|} = \frac{|q-1|}{2|\varphi'(1)||J_q|}.$$

Ahora, por la hipótesis $\alpha(q) = 1 + O(q-1)$, existe una constante $C > 0$ tal que para cualquier s:

$$|\alpha(q)\varphi^{-1}(s) - 1| \leq 2|\varphi^{-1}(s) - 1| + C|q-1|,$$

y como se tiene que:

$$|J_q| = 2\max\left\{|\alpha(q)\varphi^{-1}(q) - 1|, |\alpha(q)\varphi^{-1}((q+1)/2) - 1|\right\},$$

podemos acotar superiormente la fracción $2|J_q|/|q-1|$ por:

$$4\max\left\{2\left|\frac{\varphi^{-1}(q)-1}{q-1}\right|, \left|\frac{\varphi^{-1}((q+1)/2)-1}{(q+1)/2-1}\right|\right\} + 4C \simeq \frac{8+4C|\varphi'(1)|}{|\varphi'(1)|}.$$

Y por tanto, tomando $c < \dfrac{1}{8+4C|\varphi'(1)|}$ se cumple la condición (1.5),

$$\frac{|C_q|}{|J_q|} \simeq \frac{|q-1|}{2|\varphi'(1)||J_q|} > c.$$

□

Para los otros dos lemas, observemos que por la propiedad (a) de la Proposición 3.14 para $b = 1$, si unas funciones son coeficientes asociados a unos exponentes, también lo son a sus trasladados. En uno de los dos lemas, el Lema 3.23, vemos que existe una relación entre las distintas Quantum Derivadas Generalizadas que se pueden definir a partir de unos coeficientes fijos trasladando los exponentes.

El otro lema (Lema 3.24) nos dice que si existe una Quantum Derivada Generalizada de una función en un conjunto, entonces la función está acotada en un entorno de casi todos los puntos del conjunto.

Para estos dos lemas, fijamos $n+1$ números reales distintos entre sí, $a_0, \ldots, a_n$, y $n+1$ funciones medibles definidas en un entorno de 1, $A_0(q)$, $\ldots$, $A_n(q)$. Además, suponemos que existen una constante $M > 0$ y un índice i_0 tales que todas las funciones en valor absoluto están acotadas por M, $|A_{i_0}|$ está acotado inferiormente por $1/M$ y $a_{i_0} \neq 0$.

Hacemos notar que las funciones asociadas a unos exponentes cumplen estas hipótesis gracias a (3.11).

Lema 3.23. **(El lema del desplazamiento)** *Sean f una función medible, b un número real no negativo y E un conjunto. Si:*

$$\limsup_{q\to 1} \frac{\left|\sum_{i=0}^{n} A_i(q) f(q^{a_i}x)\right|}{|q-1|^b} < +\infty \text{ para todo } x \in E,$$

entonces para cualquier número real a se cumple:

$$\limsup_{q\to 1} \frac{\left|\sum_{i=0}^{n} A_i(q) f(q^{a_i - a}x)\right|}{|q-1|^b} < +\infty \text{ para casi todo } x \in E.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $i_0 = 0$ y sea:

$$Sf(x,q) = \sum_{i=0}^{n} A_i(q) f(q^{a_i}x).$$

Consideremos para cada número natural k el conjunto:

$$E_k = \left\{ x \in E : |Sf(x,q)| \le k|q-1|^b \text{ para todo } q : 0 < |q-1| \le 1/k \right\}.$$

Entonces $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Por lo tanto, basta probar el resultado para los puntos de densidad exterior de los conjuntos E_k.

Hacemos notar que aunque el conjunto E fuera medible, el conjunto E_k no tendría por qué ser medible. Por esta razón, tenemos que considerar los puntos de densidad exterior. En el estudio de las Derivadas de Riemann, en el cual nos estamos apoyando para este trabajo, también se observó este detalle. Incluso existe un ejemplo de un conjunto de este estilo que no es medible [FW].

Fijado k, sea x un punto de densidad exterior de E_k. Definimos para $q \neq 1$ y para $i = 0, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, n$:

$$B^*_{i,q} = \{p \in I_q : q^{a_i - a} p^{-a_0} x \in E_k\}$$

$$C^*_{j,q} = \{p \in I_q : q^{-a} p^{a_j - a_0} x \in E_k\},$$

donde I_q, al igual que en el Lema 3.22, es el intervalo abierto de extremos $(q+1)/2$ y q. Definimos también:

$$B_{i,q} = \{p \in I_q : |Sf(q^{a_i - a} p^{-a_0} x, p)| \le k|q-1|^b\}$$

$$C_{j,q} = \{p \in I_q : |Sf(q^{-a} p^{a_j - a_0} x, q)| \le k|q-1|^b\}.$$

Estos conjuntos son medibles y cumplen que cuando $0 < |q-1| < 1/k$, $B^*_{i,q} \subset B_{i,q}$ y $C^*_{j,q} \subset C_{j,q}$ para $i = 0, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, n$.

Sea $\varepsilon \in (0, (2n+1)^{-1})$. Por el Lema 3.22, existe $\delta \in (0, 1/k)$ tal que si $0 < |q-1| < \delta$, entonces $|B^*_{i,q}|^* > |I_q|(1-\varepsilon)$ y $|C^*_{j,q}|^* > |I_q|(1-\varepsilon)$. Por tanto:

$$\left| \left(\bigcap_{i=0}^{n} B_{i,q} \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n} C_{j,q} \right) \right| > |I_q|(1 - (2n+1)\varepsilon) > 0.$$

En particular, si $0 < |q-1| < \delta$, siempre podemos encontrar un punto que pertenezca a todos los conjuntos $B_{i,q}$ y a todos los $C_{j,q}$.

Fijamos q tal que $0 < |q-1| < \delta$ y acotemos el valor:

$$\mathcal{S} = \left| \sum_{i=0}^{n} A_i(q) f(q^{a_i - a} x) \right|.$$

Tomamos p perteneciente a todos los $B_{i,q}$ y a todos los $C_{j,q}$. Como $|A_0|$ está acotado inferiormente por $1/M$, tenemos:

$$\mathcal{S} = \left| Sf(q^{-a} x, q) \right| \le M \left| A_0(p) Sf(q^{-a} p^{a_0 - a_0} x, q) \right|;$$

sumando y restando un término adecuado:

$$\mathcal{S} \le M \left(\left| \sum_{j=0}^{n} A_j(p) Sf(q^{-a} p^{a_j - a_0} x, q) \right| + \left| \sum_{j=1}^{n} A_j(p) Sf(q^{-a} p^{a_j - a_0} x, q) \right| \right);$$

recordando la definición de Sf e intercambiando los sumatorios en el primer sumando:

$$\mathcal{S} \leq M \left(\left| \sum_{i=0}^{n} A_i(q) Sf(q^{a_i - a} p^{-a_0} x, p) \right| + \left| \sum_{j=1}^{n} A_j(p) Sf(q^{-a} p^{a_j - a_0} x, q) \right| \right) ;$$

por la elección de p, que en particular también implica que $0 < |p-1| < |q-1| < \delta$, podemos acotar de la siguiente manera:

$$\mathcal{S} \leq M \left(\sum_{i=0}^{n} |A_i(q)| k |q-1|^b + \sum_{j=1}^{n} |A_j(p)| k |q-1|^b \right),$$

y utilizando la cota de los A_i:

$$\mathcal{S} \leq (2n+1) M^2 k (q-1)^b.$$

□

Antes de demostrar el otro lema, hacemos notar que si en el lema del desplazamiento se supone la hipótesis más fuerte:

$$\lim_{q \to 1} \frac{\left| \sum_{i=0}^{n} A_i(q) f(q^{a_i} x) \right|}{|q-1|^b} = 0 \text{ para todo } x \in E,$$

entonces se obtiene:

$$\lim_{q \to 1} \frac{\left| \sum_{i=0}^{n} A_i(q) f(q^{a_i - a} x) \right|}{|q-1|^b} = 0 \text{ para casi todo } x \in E.$$

Para probar este resultado se consideran los conjuntos:

$$E_{k,m} = \left\{ x \in E : |Sf(x,q)| \leq \frac{|q-1|^b}{m} \text{ para todo } q : 0 < |q-1| \leq 1/k \right\}$$

para k y m naturales. Y razonando como antes, se llega a que en casi todo E se cumple que el límite superior de $\mathcal{S}/|q-1|^b$ es menor que $(2n+1)M^2/m$. Y por tanto, en casi todo punto de E, se cumple que el límite es nulo.

Lema 3.24. *Sean f una función medible y E un conjunto. Si se cumple:*

$$\limsup_{q\to 1}\left|\sum_{i=0}^{n} A_i(q)f(q^{a_i}x)\right| < +\infty \text{ para todo } x\in E,$$

entonces f está acotada en un entorno de casi todo $x\in E$.

Demostración. Igual que en la demostración anterior, suponemos que $i_0 = 0$ y sea para cada número natural k:

$$E_k = \left\{x\in E : \left|\sum_{i=0}^{n} A_i(q)f(q^{a_i}x)\right| \leq k \text{ para todo } q : 0<|q-1|\leq 1/k\right\}.$$

Consideramos también el conjunto $F_k = \{x : |f(x)| < k\}$. Entonces $E = \bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k\cap F_k)$. Por lo tanto, basta probar que f es acotada en un entorno de cualquier punto de densidad exterior de $E_k\cap F_k$.

Fijado k, sea x un punto de densidad exterior de $E_k\cap F_k$. Para $q\neq 1$ definimos:

$$B_q = \{p\in I_q : p^{a_0}x\in E_k\cap F_k\}$$

$$C_{i,q} = \{p\in I_q : q^{a_i}p^{a_0-a_i}x\in F_k\}$$

para $i=1,\dots,n$. Obsérvese que los conjuntos $C_{i,q}$ son medibles,

$$C_{i,q} = \left((0,+\infty)\cap\frac{1}{q^{a_i}x}F_k\right)^{1/(a_0-a_i)}.$$

Ya que x es un punto de densidad exterior de $E_k\cap F_k$, por el Lema 3.22, existe $\delta\in(0,1/k)$ tal que si $0<|q-1|<\delta$, entonces $|B_q|^* > |I_q|/2$ y $|C_{i,q}| > |I_q|(1-1/2n)$ para cada $i=1,\dots,n$. Sea C_q la intersección de los n conjuntos $C_{i,q}$. Entonces, como cada conjunto $C_{i,q}$ es medible, se tiene $|I_q\setminus C_q| < |I_q|/2$. Así:

$$\frac{|I_q|}{2} < |B_q|^* \leq |B_q\cap C_q|^* + |I_q\setminus C_q| \leq |B_q\cap C_q|^* + \frac{|I_q|}{2},$$

es decir, $B_q\cap C_q$ tiene medida exterior positiva y en particular no es vacío si $0<|q-1|<\delta$. Sea q tal que $0<|q-1|<\delta$ y tomemos $p\in B_q\cap C_q$. Ya que $p\in B_q$ y $0<|qp^{-1}-1|<1/k$:

$$\left|\sum_{i=0}^{n} A_i(qp^{-1})f((qp^{-1})^{a_i}p^{a_0}x)\right| \leq k;$$

de donde podemos acotar el primer término de la suma anterior de la siguiente manera:

$$|A_0(qp^{-1})f(q^{a_0}x)| < k + \left|\sum_{i=0}^{n} A_i(qp^{-1})f(q^{a_i}p^{a_0-a_i}x)\right| ;$$

y como $p \in C_q$:

$$|f(q^{a_0}x)| < \frac{k + k\sum_{i=1}^{n}|A_i(qp^{-1})|}{|A_0(qp^{-1})|}.$$

Utilizando que $|A_0|$ está acotada inferiormente y que las funciones A_i están acotadas, tenemos que f también está acotada en un entorno de x. □

Ya a partir de estos lemas, podemos probar que la Conjetura 3.20 es válida para las primeras Quantum Derivadas Generalizadas. La conjetura es consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 3.25. *Sean $A_0(q), A_1(q)$ coeficientes asociados a los exponentes a_0, a_1 distintos entre sí. Si para todo x perteneciente a un conjunto E se cumple:*

$$\limsup_{q\to 1}\left|\frac{A_0(q)f(q^{a_0}x) + A_1(q)f(q^{a_1}x)}{q-1}\right| < +\infty, \tag{3.23}$$

entonces existe la Derivada de f en casi todo E.

Demostración. Como A_0, A_1 son coeficientes asociados a a_0, a_1, por (3.20):

$$V(a_0,a_1)\begin{pmatrix} A_0(q) \\ A_1(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0(q)(q-1) \\ \alpha_1(q) \end{pmatrix}$$

para ciertas funciones medibles $\alpha_0(q), \alpha_1(q)$ cumpliendo que, cuando $q \to 1$, $\alpha_0(q) \to 0$ y $\alpha_1(q) \to 1$, pues las constantes de la Proposición 3.15 para $n = 1$ son $\alpha_0 = 0$ y $\alpha_1 = 1$ (3.14). Así:

$$A_0(q) = \frac{1}{a_1 - a_0}(a_1\alpha_0(q)(q-1) - \alpha_1(q))$$

$$A_1(q) = \frac{-1}{a_1 - a_0}(a_0\alpha_0(q)(q-1) - \alpha_1(q))$$

Por el lema anterior, f está acotada en un entorno de casi todo punto del conjunto E. Teniendo en cuenta esto y sustituyendo A_0 y A_1 en (3.23), tenemos que en casi todo x perteneciente a E:

$$\limsup_{q\to 1}\left|\frac{f(q^{a_1}x)-f(q^{a_0}x)}{q-1}\right| < +\infty.$$

Aplicando el lema del desplazamiento para $a = a_0$ y sabiendo (1.7), obtenemos que para casi todo punto del conjunto E:

$$\limsup_{q\to 1}\left|\frac{f(qx)-f(x)}{qx-x}\right| < +\infty.$$

Y utilizando el teorema de Denjoy, Teorema 3.6, obtenemos que en casi todos los puntos del conjunto existe la Derivada de f. □

Corolario 3.26. *Si existe una primera Quantum Derivada Generalizada en un conjunto, entonces existe la Derivada en casi todo el conjunto.*

3.3 Segundas Quantum Derivadas Generalizadas

En esta sección, conseguimos demostrar la Conjetura 3.20 para todas las segundas Quantum Derivadas Generalizadas. La demostración de este resultado se obtiene como consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 3.27. *Sean A_0, A_1, A_2 unos coeficientes asociados a unos exponentes a_0, a_1, a_2, distintos entre sí. Si para todo $x \in E$:*

$$\limsup_{q\to 1}\frac{|A_0(q)f(q^{a_0}x)+A_1(q)f(q^{a_1}x)+A_2(q)f(q^{a_2}x)|}{(q-1)^2} < +\infty,$$

entonces existe la segunda Derivada de Peano de f en casi todo E.

Para demostrar este teorema, por una simple permutación de índices, podemos suponer que los exponentes están ordenados de manera creciente. Teniendo en cuenta la propiedad (a) de la Proposición 3.14 sobre coeficientes asociados a números, en primer lugar, por el lema del desplazamiento, podemos suponer que $0 = a_0 < a_1 < a_2$, y después, dividiendo los exponentes por a_1 podemos suponer que $a_0 = 0 < a_1 = 1 < a_2$.

Para este caso de las segundas Quantum Derivadas Generalizadas cuyos exponentes sean $0, 1, a$, con $a > 1$, la prueba sigue el siguiente esquema, donde:

$$Q_2 f(x,q) = \frac{A_0(q)f(x) + A_1(q)f(qx) + A_2(q)f(q^a x)}{(q-1)^2},$$

y la flecha "$\rightarrow$" significa, al igual que anteriormente, que la tesis es cierta en casi todo el conjunto donde se cumple la hipótesis:

$$\left.\begin{array}{c} |Q_2 f(x,q)| = O(1) \\ \downarrow {\scriptstyle \text{Lema } 3.24} \\ f \text{ acotada en} \\ \text{un entorno de } x \end{array}\right| \;\overset{?}{\Rightarrow}\; \left|\frac{f(qx)-f(x)}{q-1}\right| = O(1)$$

$$\downarrow {\scriptstyle \text{Teorema } 3.6}$$

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ es Derivable en } x \\ \\ |Q_2 f(x,q)| = O(1) \end{array}\right| \;\overset{?}{\Rightarrow}\; \begin{array}{c} (3.2) \text{ con } n = 2 \\ \downarrow {\scriptstyle \text{Proposición } 3.7} \\ \text{existe la segunda} \\ \text{Derivada de Peano} \\ \text{de } f \text{ en } x. \end{array}$$

A continuación vamos a ver los dos resultados que faltan por demostrar del esquema, Proposiciones 3.31 y 3.30.

Recordamos que para $n = 2$, tenemos que: $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = -1$ y $\alpha_2 = 2$ (3.18). Así, si $A_1(q)$, $A_2(q)$, $A_3(q)$ son unos coeficientes asociados a $0, 1, a$, tenemos por (3.20) que:

$$\begin{aligned} A_2(q) &= \frac{1}{a(a-1)}(-\alpha_1(q)(q-1) + \alpha_2(q)) \\ A_1(q) &= \frac{1}{a(a-1)}(\, a^2\alpha_1(q)(q-1) - a\alpha_2(q)) \\ A_0(q) &= \alpha_0(q)(q-1)^2 - A_1(q) - A_2(q) \end{aligned} \tag{3.24}$$

donde, cuando q tiende a 1, $\alpha_0(q)$ tiende a 0, $\alpha_1(q)$ tiende a -1 y $\alpha_2(q)$ tiende a 2.

Empezamos las demostraciones de ambas proposiciones a la vez, partiendo de la hipótesis común. Sea x un punto tal que $|Q_2 f(x,q)| = O(1)$, es decir:

$$\limsup_{q\to 1} \frac{|A_0(q)f(x) + A_1(q)f(qx) + A_2(q)f(q^a x)|}{(q-1)^2} < +\infty.$$

Restando a la función f la constante $f(x)$, podemos suponer que $f(x) = 0$. Esto se debe a que las funciones constantes son Derivables de cualquier orden, y por tanto, para cualquier natural n, existen sus n-ésimas Derivadas de Peano y sus n-ésimas Quantum Derivadas Generalizadas. En particular, el límite superior anterior para la función constante es nulo.

De esta manera tenemos que:

$$\limsup_{q\to 1} \frac{|f(q^a x) - A(q)f(qx)|}{(q-1)^2} < +\infty,$$

donde, por (3.24):

$$A(q) = -\frac{A_1(q)}{A_2(q)} = a\,\frac{\alpha_2(q) - a\alpha_1(q)(q-1)}{\alpha_2(q) - \alpha_1(q)(q-1)}. \tag{3.25}$$

Observemos que la función $A(q)$ tiende a a cuando $q \to 1$.

Fijamos $c \in (0,a)$ tal que $a + c < (a-c)^2$. Así, existen $M > 0$ y $\delta \in (0, c/a)$ tales que si $|q-1| < \delta$, entonces $a - c < A(q) < a + c$ y:

$$|f(q^a x) - A(q)f(qx)| \leq M(q-1)^2.$$

Aplicando para cada natural k con $1 \leq k \leq n$ esta desigualdad a q^{1/a^k}, que también cumple que $|q^{1/a^k} - 1| < \delta$, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\left|f(qx) - A(q^{1/a})f(q^{1/a}x)\right| &\leq M(q^{1/a}-1)^2,\\
\left|f(q^{1/a}x) - A(q^{1/a^2})f(q^{1/a^2}x)\right| &\leq M(q^{1/a^2}-1)^2,\\
&\vdots\\
\left|f(q^{1/a^{n-1}}x) - A(q^{1/a^n})f(q^{1/a^n}x)\right| &\leq M(q^{1/a^n}-1)^2;
\end{aligned}$$

multiplicando la k-ésima desigualdad por $b_k(q)$, siendo $b_1(q) = 1$ y para k distinto de uno, $b_k(q) = A(q^{1/a})A(q^{1/a^2})\ldots A(q^{1/a^{k-1}})$, llegamos a:

$$\begin{aligned}
\left|b_1(q)f(qx) - b_2(q)f(q^{1/a}x)\right| &\leq Mb_1(q)(q^{1/a}-1)^2, \\
\left|b_2(q)f(q^{1/a}x) - b_3(q)f(q^{1/a^2}x)\right| &\leq Mb_2(q)(q^{1/a^2}-1)^2, \\
&\vdots \\
\left|b_n(q)f(q^{1/a^{n-1}}x) - b_{n+1}(q)f(q^{1/a^n}x)\right| &\leq Mb_n(q)(q^{1/a^n}-1)^2;
\end{aligned}$$

y utilizando la desigualdad triangular, obtenemos:

$$|f(qx) - b_{n+1}(q)f(q^{1/a^n}x)| \leq M\sum_{k=1}^{n} b_k(q)(q^{1/a^k}-1)^2, \tag{3.26}$$

para todo n y para todo $q \in (1-\delta, 1+\delta)$. Ahora, acotamos el segundo miembro de esta desigualdad. Para ello necesitamos el siguiente lema:

Lema 3.28. *Sean $a > 1$ y $0 < c < a$. Para todo número real $q > 1 - c/a$ y para todo número natural k se tiene:*

$$\left|q^{1/a^k} - 1\right| \leq \frac{|q-1|}{(a-c)^k}.$$

Demostración. Sean $h(q) = q^{1/a^k} - 1$ y $g(q) = (a-c)^{-k}(q-1)$. Como $h(1) = g(1)$, basta demostrar que $h'(q) \leq g'(q)$ para todo número real q mayor estricto que $1 - c/a$.

Observamos que g' es constante y que h' es una función decreciente, ya que $a > 1$ y por tanto $h''(q) = a^{-k}(a^{-k}-1)q^{1/a^k-2} < 0$. Así, basta probar que $h'(1-c/a) \leq (a-c)^{-k}$, es decir:

$$a^{-k}\left(1 - \frac{c}{a}\right)^{a^{-k}-1} \leq (a-c)^{-k}.$$

Pero esto se cumple si y sólo si:

$$\left(\frac{a-c}{a}\right)^{a^{-k}-1} \leq \left(\frac{a-c}{a}\right)^{-k},$$

lo cual es cierto ya que para todo k se tiene que $a^{-k} - 1 \geq -k$. $\square$

Así, para acotar el segundo miembro de (3.26), observamos que para $q \in (1-\delta, 1+\delta)$, se tiene que:

$$b_k(q) = \prod_{l=1}^{k-1} A(q^{1/a^l}) \leq (a+c)^{k-1}$$

y utilizando el lema anterior y que $a + c < (a-c)^2$, podemos acotar de la siguiente manera:

$$M \sum_{k=1}^{n} b_k(q)(q^{1/a^k} - 1)^2 \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+c)^{k-1}}{(a-c)^{2k}} (q-1)^2 = M'(q-1)^2.$$

Por lo tanto para todo n y para todo $q \in (1-\delta, 1+\delta)$:

$$|f(qx) - b_{n+1}(q) f(q^{1/a^n} x)| \leq M'(q-1)^2. \tag{3.27}$$

Por último, antes de separar las demostraciones de las dos proposiciones, vemos el siguiente lema en el que se acotan las funciones $b_k(q)$:

Lema 3.29. *Para $b > 1$ suficientemente cercano a 1, existen dos constantes positivas $c(b)$ y $d(b)$ tales que para todo n y para todo q perteneciente al conjunto $J_b = [b^{-a}, b^{-1}] \cup [b, b^a]$ se tiene que:*

$$\frac{d(b)}{|q^{1/a^n} - 1|} \leq b_{n+1}(q) \leq \frac{c(b)}{|q^{1/a^n} - 1|}. \tag{3.28}$$

Demostración. Comprobemos primero que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{q^x - 1}{x} = \log q$$

uniformemente para $q \in J_b$. Fijado x, utilizamos el desarrollo en serie de potencias de $q^x = \exp(x \log q)$ y obtenemos que:

$$\sup_{q \in J_b} \left| \frac{q^x - 1}{x} - \log q \right| = \sup_{q \in J_b} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log q)^{n+1}}{(n+1)!} x^n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log b^a)^{n+1}}{(n+1)!} |x|^n.$$

Como esta última serie de potencias es continua en el cero, donde es nula, tenemos la uniformidad del límite,

$$\lim_{x \to 0} \sup_{q \in J_b} \left| \frac{(q^x - 1)}{x} - \log q \right| = 0.$$

De esta manera, existe n_0 tal que $a^n \left|q^{1/a^n} - 1\right|$ está acotado superior e inferiormente por constantes positivas para todo natural $n \geq n_0$ y para todo $q \in J_b$. Acotando $a^n \left|q^{1/a^n} - 1\right|$ en J_b para $n < n_0$, que son una cantidad finita, tenemos una cota uniforme para todo n y para todo $q \in J_b$.

Así, para demostrar el lema basta acotar $a^{-n}b_{n+1}(q)$. Para ello escribimos:

$$a^{-n}b_{n+1}(q) = \prod_{l=1}^{n} \frac{A(q^{1/a^l})}{a} = \prod_{l=1}^{n} (1 + c_l(q)),$$

donde, por (3.25):

$$c_l(q) = \frac{(1-a)\alpha_1\left(q^{1/a^l}\right)\left(q^{1/a^l} - 1\right)}{\alpha_2\left(q^{1/a^l}\right) - \alpha_1\left(q^{1/a^l}\right)\left(q^{1/a^l} - 1\right)}.$$

Podemos fijar b suficientemente cercano a 1 tal que para todo l natural se tiene que $-1 < c_l(q) < 0$ si $q \in [b^{-a}, b^{-1}]$, y que:

$$0 < c_l(q) < (a-1)\left(q^{1/a^l} - 1\right),$$

si $q \in [b, b^a]$. Veamos que esto se puede hacer. Ya que $\alpha_1(q) \to -1$ y $\alpha_2(q) \to 2$ podemos tomar b suficientemente cercano a 1 tal que para todo $q \in [b^{-a}, 1)$:

$$-1 < \frac{(1-a)\alpha_1(q)(q-1)}{\alpha_2(q) - \alpha_1(q)(q-1)} < 0,$$

y para todo $q \in (1, b^a]$:

$$0 < \frac{(1-a)\alpha_1(q)}{\alpha_2(q) - \alpha_1(q)(q-1)} < a - 1;$$

y entonces, basta observar que para todo l natural se verifica que si q pertenece al intervalo $[b^{-a}, b^{-1}]$, entonces $q^{1/a^l} \in [b^{-a}, 1)$ y si $q \in [b, b^a]$, $q^{1/a^l} \in (1, b^a]$.

Una vez fijado b y utilizando que para $x > 0$ se tiene $1 + x < \exp(x)$, podemos acotar de la siguiente manera por la derecha de 1. Para todo $q \in [b, b^a]$ y para todo n natural se tiene:

$$1 < a^{-n}b_{n+1}(q) < \exp\left(\sum_{l=1}^{n} c_l(q)\right) < \exp\left((a-1)\sum_{l=1}^{n}\left(b^{1/a^{l-1}} - 1\right)\right) < C,$$

ya que se comprueba utilizando el criterio del cociente, que la serie de términos positivos $\sum_{l=1}^{\infty}\left(b^{1/a^{l-1}}-1\right)$ es convergente.

Para acotar por la izquierda de 1, razonamos de manera parecida pero con $-c_l/(1+c_l)$ en vez de c_l. Para todo $q \in [b^{-a}, b^{-1}]$ y para todo número natural n, tenemos que:

$$1 > a^{-n}b_{n+1}(q) = \prod_{l=1}^{n}\left(1+\frac{-c_l(q)}{1+c_l(q)}\right)^{-1} > \exp\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{c_l(q)}{1+c_l(q)}\right).$$

Ahora:

$$\frac{c_l(q)}{1+c_l(q)} = \frac{(1-a)\alpha_1\left(q^{1/a^l}\right)\left(q^{1/a^l}-1\right)}{\alpha_2\left(q^{1/a^l}\right)-a\alpha_1\left(q^{1/a^l}\right)\left(q^{1/a^l}-1\right)},$$

luego, fijando un b más cercano a 1 si fuera necesario, se tiene que para todo l natural y para todo $q \in [b^{-a}, b^{-1}]$:

$$\frac{c_l(q)}{1+c_l(q)} > (a-1)\left(q^{1/a^l}-1\right),$$

y así, para $q \in [b^{-a}, b^{-1}]$ y para n natural podemos acotar $a^{-n}b_{n+1}(q)$ por constantes positivas utilizando la convergencia de la serie de términos negativos $\sum_{l=1}^{\infty}\left(b^{-1/a^{l-1}}-1\right)$,

$$1 > a^{-n}b_{n+1}(q) > \exp\left((a-1)\sum_{l=1}^{n}\left(b^{-1/a^{l-1}}-1\right)\right) > c.$$

□

Proposición 3.30. *Sean A_0, A_1, A_2 unos coeficientes asociados a $0, 1, a$ con $a > 1$. Sea x tal que exista la Derivada de f en x y:*

$$\limsup_{q\to 1}\frac{|A_0(q)f(x)+A_1(q)f(qx)+A_2(q)f(q^a x)|}{(q-1)^2} < +\infty.$$

Entonces se cumple que cuando h tiende a 0:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + O(h^2).$$

Demostración. Además de suponer, como ya hemos dicho antes, que $f(x) = 0$, también podemos suponer que la derivada de f en x es nula considerando la función:

$$g(y) = f(y) - f(x) - f'(x)(y - x).$$

A partir de esta suposición, fijado $q \in (1 - \delta, 1 + \delta) \setminus \{1\}$, se tiene por (3.28) para $b = q$:

$$\left|b_{n+1}(q) f(q^{1/a^n} x)\right| \leq c(q)|x| \left|\frac{f(q^{1/a^n} x)}{q^{1/a^n} x - x}\right| \to 0$$

cuando $n \to +\infty$. Por lo tanto, por (3.27), para $q \in (1 - \delta, 1 + \delta)$:

$$|f(qx)| \leq M'(q - 1)^2,$$

y tenemos probada la proposición. □

Proposición 3.31. *Sean A_0, A_1, A_2 unos coeficientes asociados a $0, 1, a$ con $a > 1$. Sea x tal que f está acotado en un entorno de x y:*

$$\limsup_{q \to 1} \frac{|A_0(q) f(x) + A_1(q) f(qx) + A_2(q) f(q^a x)|}{(q - 1)^2} < +\infty.$$

Entonces se cumple:

$$\limsup_{q \to 1} \frac{|f(qx) - f(x)|}{|qx - x|} < +\infty.$$

Demostración. Podemos suponer que δ cumple además que si q pertenece al intervalo $(1 - \delta, 1 + \delta)$, entonces $|f(qx)| < M''$. Por (3.27), para todo n y para todo $q \in (1 - \delta, 1 + \delta)$:

$$\left|b_{n+1}(q) f(q^{1/a^n} x)\right| \leq M'(q - 1)^2 + |f(qx)| < M'\delta^2 + M''.$$

Por (3.28), fijando $b > 1$ suficientemente cercano a 1, tenemos para todo $q \in J_b$:

$$\left|\frac{f(q^{1/a^n} x)}{q^{1/a^n} x - x}\right| < \frac{M'\delta^2 + M''}{d(b)}.$$

Sólo falta observar que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} J_b^{1/a^n}$ es un entorno reducido de uno para obtener que:

$$\limsup_{q\to 1} \frac{|f(qx) - f(x)|}{|qx - x|} < +\infty.$$

□

De esta manera ya hemos completado la prueba del Teorema 3.27, y en consecuencia:

Corolario 3.32. *Si existe una segunda Quantum Derivada Generalizada en un conjunto, entonces existe la segunda Derivada de Peano en casi todo el conjunto.*

3.4 Unos casos particulares

Al final de este capítulo, apoyándonos en un caso particular de Quantum Derivada Generalizada, damos la prueba de que sea cual sea el número natural n, la Conjetura 3.20 es cierta para la n-ésima Quantum Derivada.

En esta sección estudiamos unos casos particulares de Quantum Derivadas Generalizadas, los cuales dependen de un parámetro a que se mueve por los números reales excepto por $0, 1$ y -1. Así, nos referimos a ellos como a-Quantum Derivadas y las representamos por $\mathcal{Q}^a$. El caso $a = 2$ es el que utilizamos para la prueba de que la conjetura es cierta para las Quantum Derivadas.

Definición 3.33. *Sea a un número real distinto de $-1, 0$ y 1. Definimos las n-ésimas a-Quantum Diferencias de una función f en un punto $x \neq 0$ por inducción de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} Q_1^a f(x,q) &= \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} \\ Q_{n+1}^a f(x,q) &= (n+1)\frac{Q_n^a f(x,q^a) - Q_n^a f(x,q)}{q^{a^n}x - qx}, \end{aligned}$$

donde $0 < q \neq 1$. Y definimos la n-ésima a-Quantum Derivada como:

$$\mathcal{Q}_n^a f(x) = \lim_{q\to 1} Q_n^a f(x,q).$$

Observemos que para calcular la n-ésima a-Quantum Derivada tenemos que evaluar la función en $n+1$ puntos: $x, qx, q^a x, q^{a^2}x, \ldots, q^{a^{n-1}}x$. Son realmente $n+1$ puntos, ya que a es distinto de $0, 1$ y -1. Por ejemplo, la segunda a-Quantum Derivada es:

$$\mathcal{Q}_2^a f(x) = \lim_{q \to 1} \frac{2\left((q-1)f(q^a x) - (q^a - 1)f(qx) + (q^a - q)f(x)\right)}{(q^a - q)(q^a - 1)(q-1)x^2}.$$

Veamos que efectivamente son unas Quantum Derivadas Generalizadas. Para ello demostramos el Lema 3.34, donde aparece el término $\Delta_n^a f(x,q)$ que se define por inducción como a continuación se indica:

$$\begin{aligned} \Delta_1^a f(x,q) &= f(qx) - f(x) \\ \Delta_{n+1}^a f(x,q) &= \Delta_n^a f(x, q^a) - \lambda_n(q)\Delta_n^a f(x,q) \end{aligned} \qquad (3.29)$$

siendo $\lambda_1(q) = (q^a - 1)/(q-1)$ y:

$$\lambda_n(q) = \frac{q^{a^n} - 1}{q^{a^{n-1}} - 1} \frac{q^{a^n} - q^a}{q^{a^{n-1}} - q} \frac{q^{a^n} - q^{a^2}}{q^{a^{n-1}} - q^a} \cdots \frac{q^{a^n} - q^{a^{n-1}}}{q^{a^{n-1}} - q^{a^{n-2}}}$$

para $n > 1$. Obsérvese que, utilizando (1.7), tenemos para todo n:

$$\lim_{q \to 1} \lambda_n(q) = a^n. \qquad (3.30)$$

Con esta notación, claramente la primera a-Quantum Diferencia es:

$$Q_1^a f(x,q) = \frac{\Delta_1^a f(x,q)}{(q-1)x},$$

y para las demás se tiene el siguiente resultado:

Lema 3.34. *Para $n > 1$, la n-ésima a-Quantum Diferencia se puede escribir de la siguiente manera:*

$$Q_n^a f(x,q) = \frac{n!\Delta_n^a f(x,q)}{(q^{a^{n-1}} - 1)(q^{a^{n-1}} - q)(q^{a^{n-1}} - q^a)\ldots(q^{a^{n-1}} - q^{a^{n-2}})x^n}.$$

Demostración. Por inducción. Para $n = 2$:

$$
\begin{aligned}
Q_2^a f(x,q) &= \frac{2}{q^a x - qx}\left(Q_1^a f(x,q^a) - Q_1^a f(x,q)\right)\\
&= \frac{2}{(q^a-q)x}\left(\frac{\Delta_1^a f(x,q^a)}{(q^a-1)x} - \frac{\Delta_1^a f(x,q)}{(q-1)x}\right)\\
&= \frac{2}{(q^a-q)(q^a-1)x^2}\left(\Delta_1^a f(x,q^a) - \frac{q^a-1}{q-1}\Delta_1^a f(x,q)\right)\\
&= \frac{2!\Delta_2^a f(x,q)}{(q^a-1)(q^a-q)x^2}.
\end{aligned}
$$

Se completa la inducción dando exactamente los mismos pasos que en el caso $n = 2$. De todas formas, no está de más escribir la demostración para asimilar un poco mejor todas estas definiciones.

Supongamos que se cumple para n y veámoslo para $n+1$. Por definición:

$$
Q_{n+1}^a f(x,q) = (n+1)\frac{Q_n^a f(x,q^a) - Q_n^a f(x,q)}{q^{a^n}x - qx}; \tag{3.31}
$$

por hipótesis de inducción, el numerador de la fracción anterior es igual a:

$$
\frac{n!\Delta_n^a f(x,q^a)}{(q^{a^n}-1)(q^{a^n}-q^a)\dots(q^{a^n}-q^{a^{n-1}})x^n} - \frac{n!\Delta_n^a f(x,q)}{(q^{a^{n-1}}-1)\dots(q^{a^{n-1}}-q^{a^{n-2}})x^n};
$$

sacando factor común el denominador de la primera fracción de esta expresión, el factor que queda multiplicando a $n!\Delta_n^a f(x,q)$ en el segundo sumando es:

$$
\frac{q^{a^n}-1}{q^{a^{n-1}}-1}\,\frac{q^{a^n}-q^a}{q^{a^{n-1}}-q}\,\frac{q^{a^n}-q^{a^2}}{q^{a^{n-1}}-q^a}\cdots\frac{q^{a^n}-q^{a^{n-1}}}{q^{a^{n-1}}-q^{a^{n-2}}},
$$

es decir, $\lambda_n(q)$. Así, volviendo a (3.31), obtenemos la fórmula,

$$
\begin{aligned}
Q_{n+1}^a f(x,q) &= \frac{(n+1)!\left(\Delta_n^a f(x,q^a) - \lambda_n(q)\Delta_n^a f(x,q)\right)}{(q^{a^n}-q)\cdot(q^{a^n}-1)(q^{a^n}-q^a)\dots(q^{a^n}-q^{a^{n-1}})x^{n+1}}\\
&= \frac{(n+1)!\Delta_{n+1}^a f(x,q)}{(q^{a^n}-1)(q^{a^n}-q)(q^{a^n}-q^a)\dots(q^{a^n}-q^{a^{n-1}})x^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

□

Hacemos notar, que gracias a este lema y a (1.7) se tiene que $Q_n^a f(x,q)$ y $\Delta_n^a f(x,q)/(q-1)^n$ tienen el mismo comportamiento salvo una constante cuando q tiende a 1. Es decir, existe una constante positiva $c_n > 0$, tal que:

$$\lim_{q\to 1} \frac{\Delta_n^a f(x,q)}{(q-1)^n Q_n^a f(x,q)} = c_n. \tag{3.32}$$

Proposición 3.35. *Las a-Quantum Derivadas son Quantum Derivadas Generalizadas.*

Demostración. Se observa que $\Delta_n^a f(x,q)$ es de la forma:

$$f(q^{a^{n-1}}x) + A_{n-1}(q) f(q^{a^{n-2}}x) + \ldots + A_1(q) f(qx) + A_0(q) f(x).$$

Por el lema anterior, tomando $A_n(q) = 1$:

$$Q_n^a f(x) = \lim_{q\to 1} \frac{A_0(q)B(q)f(x) + \sum_{i=1}^{n} A_i(q)B(q)f(q^{a^{i-1}}x)}{(q-1)^n x^n},$$

donde:

$$B(q) = \frac{n!(q-1)^n}{(q^{a^{n-1}}-1)(q^{a^{n-1}}-q)(q^{a^{n-1}}-q^a)\ldots(q^{a^{n-1}}-q^{a^{n-2}})}.$$

Por tanto, para ver que es una Quantum Derivada Generalizada tenemos que demostrar que las funciones $A_0B, A_1B, A_2B, \ldots, A_nB$ son coeficientes asociados a los exponentes $0, 1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$. Para ello, hay que demostrar (3.9) para estas funciones y estos números, o lo que es lo mismo, tenemos que demostrar:

$$Q_n^a x^k(1) = n!\delta_{k,n} \text{ para } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Nosotros vamos a demostrar un poco más. Vamos a probar que las a-Quantum Diferencias verifican:

$$Q_n^a x^k(1,q) = n!\delta_{k,n} \text{ para } k = 0, 1, \ldots, n \text{ y para todo } 0 < q \neq 1. \tag{3.33}$$

Esta propiedad se puede comprobar que es cierta con un poco de cálculo para los primeros casos particulares de n natural. Por ejemplo, para $n = 1$ tenemos $Q_1^a x^0(1,q) = 0$ y $Q_1^a x^1(1,q) = 1$. La dificultad está en terminar la inducción, es decir, demostrar que si es cierto para un natural cualquiera, entonces es cierto para el siguiente natural. Después de manipular mucho las a-Quantum Diferencias nos dimos cuenta de la fórmula (3.38). Ésta nos ayuda a terminar la demostración de (3.33) de la siguiente manera.

Supongamos que (3.33) es cierto para n. Por definición de a-Quantum Diferencia:

$$Q_{n+1}^{a}x^{k}(1,q) = (n+1)\frac{Q_{n}^{a}x^{k}(1,q^{a}) - Q_{n}^{a}x^{k}(1,q)}{q^{a^{n}} - q}.$$

Luego, por hipótesis de inducción:

$$Q_{n+1}^{a}x^{k}(1,q) = 0 \text{ para } k = 0,1,\ldots,n \text{ y para todo } 0 < q \neq 1.$$

Falta demostrar que $Q_{n+1}^{a}x^{n+1}(1,q) = (n+1)!$. Por (3.38) para $k = n$, tenemos:

$$(n+1)\frac{Q_{n}^{a}x^{n+1}(1,q^{a}) - Q_{n}^{a}x^{n+1}(1,q)}{q^{a^{n}} - q} = (n+1)!\frac{P_{1,n}(q^{a}) - P_{1,n}(q)}{q^{a^{n}} - q},$$

donde, como se ve más adelante, $P_{1,n}(q) = 1 + q + q^{a} + q^{a^{2}} + \ldots + q^{a^{n-1}}$, y por tanto:

$$Q_{n+1}^{a}x^{n+1}(1,q) = (n+1)!.$$

Para demostrar (3.38) lo primero que hacemos es, obviamente, definir $P_{m,k}(q)$ y, además, ver cuatro propiedades de estas funciones.

Para $m > 0$ y $k \geq 0$, sea $P_{m,k}(q)$ la suma de todos los posibles productos que se pueden formar con m elementos del conjunto $\{1, q, q^{a}, q^{a^{2}}, \ldots, q^{a^{k-1}}\}$, pudiéndose repetir y sin importar el orden (si $k = 0$ el conjunto es el formado por el uno). Analíticamente, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
P_{m,0}(q) &= 1\\
P_{m,1}(q) &= 1 + q + q^{2} + q^{3} + \ldots + q^{m}\\
P_{1,k}(q) &= 1 + q + q^{a} + q^{a^{2}} + \ldots + q^{a^{k-1}}
\end{aligned}$$

y en general, para $k > 0$, distinguiendo según el número l de elementos distintos de 1 que se toman del conjunto $\{1, q, q^{a}, q^{a^{2}}, \ldots, q^{a^{k-1}}\}$:

$$P_{m,k}(q) = 1 + \sum_{l=1}^{m} \sum_{1 \leq k_{1} \leq \ldots \leq k_{l} \leq k} q^{a^{k_{1}-1}} q^{a^{k_{2}-1}} \ldots q^{a^{k_{l}-1}}.$$

La primera propiedad se obtiene separando los sumandos de $P_{m,k}$ en los que aparezca al menos un factor de la forma $q^{a^{s-1}}$ y los demás sean del conjunto $\{1, q, q^a, \ldots, q^{a^{s-1}}\}$, con lo cual:

$$P_{m,k}(q) = 1 + \sum_{s=1}^{k} q^{a^{s-1}} P_{m-1,s}(q) \text{ para todo } m > 0, k > 0. \tag{3.34}$$

Observemos que para $m = 1$, aparece en el segundo miembro $P_{0,k}$ que no ha sido definido. Así, para que sea cierta la propiedad anterior para $m = 1$ definimos $P_{0,k}(q) = 0$.

Para las otras tres propiedades vamos a definir una función auxiliar. Sea $R_{m,k}(q)$, para $m > 0$ y $k \geq 0$, la suma de todos los posibles productos que se pueden formar con m elementos, pudiéndose repetir y sin importar el orden, del conjunto $\{1, q^a, q^{a^2}, \ldots, q^{a^{k-1}}\}$ si $k > 1$ y del conjunto formado por el uno si k es igual a cero o a uno. Analíticamente, si $k > 1$:

$$R_{m,k}(q) = 1 + \sum_{l=1}^{m} \sum_{2 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_l \leq k} q^{a^{k_1-1}} q^{a^{k_2-1}} \ldots q^{a^{k_l-1}}.$$

Obsérvese que $R_{m,k}$ no es más que $P_{m,k}$ quitándole los sumandos donde al menos unos de los factores sea q. Así tenemos la segunda propiedad:

$$P_{m,k}(q) - R_{m,k}(q) = qP_{m-1,k}(q) \text{ para todo } m > 0, k > 0. \tag{3.35}$$

Hacemos notar que por definición de $P_{0,k}$, la igualdad también es cierta para $m = 1$.

Para la siguiente propiedad se observa que si evaluamos la función $P_{m,k}$ en q^a obtenemos $R_{m,k+1}$, es decir:

$$P_{m,k}(q^a) = R_{m,k+1}(q) \text{ para todo } m > 0, k \geq 0. \tag{3.36}$$

La última propiedad que enunciamos, es la análoga a la propiedad (3.34) para la función $R_{m,k}$:

$$R_{m,k}(q) = 1 + \sum_{s=2}^{k} q^{a^{s-1}} R_{m-1,s}(q) \text{ para todo } m > 1, k > 1. \tag{3.37}$$

Una vez vistas las cuatro propiedades, demostremos por inducción sobre k que se cumple:

$$Q_k^a x^{n+1}(1,q) = k!P_{n+1-k,k}(q) \text{ si } 0 < k < n+1. \tag{3.38}$$

Para $k = 1$, se verifica fácilmente,

$$Q_1^a x^{n+1}(1,q) = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = P_{n,1}(q).$$

Supongamos que (3.38) es cierto para un número k, con $0 < k < n$, y veamos que es cierto para $k+1$. Por definición de a-Quantum Diferencia, tenemos que demostrar:

$$\frac{1}{k!}\left(Q_k^a x^{n+1}(1,q^a) - Q_k^a x^{n+1}(1,q)\right) = (q^{a^k} - q)P_{n-k,k+1}(q). \tag{3.39}$$

Partimos del miembro de la izquierda al que llamamos T. Por hipótesis de inducción:

$$T = P_{n+1-k,k}(q^a) - P_{n+1-k,k}(q);$$

por (3.36):

$$T = R_{n+1-k,k+1}(q) - P_{n+1-k,k}(q);$$

aplicando (3.37) y (3.34):

$$T = \sum_{s=2}^{k+1} q^{a^{s-1}} R_{n-k,s}(q) - \sum_{s=1}^{k} q^{a^{s-1}} P_{n-k,s}(q);$$

agrupando sumandos y utilizando (3.35):

$$T = -qP_{n-k,1}(q) + \left(\sum_{s=2}^{k} q^{a^{s-1}} \left(-qP_{n-k-1,s}(q)\right)\right) + q^{a^k} R_{n-k,k+1}(q);$$

aplicando nuevamente (3.35) a $R_{n-k,k+1}$:

$$T = -q\left(P_{n-k,1}(q) + \sum_{s=2}^{k+1} q^{a^{s-1}} P_{n-k-1,s}(q)\right) + q^{a^k} P_{n-k,k+1}(q);$$

y teniendo en cuenta que $P_{n-k,1}(q) = 1 + qP_{n-k-1,1}(q)$ por (3.34), basta aplicar por tercera y última vez la propiedad (3.34) para llegar a la igualdad (3.39). $\square$

De esta manera, por la Proposición 3.17, la existencia de la Derivada de Peano implica la existencia de la a-Quantum Derivada. A continuación vamos a ver el recíproco en el sentido débil que se obtiene como consecuencia del siguiente teorema:

Teorema 3.36. *Si para todo $x \in E$ se cumple:*

$$\limsup_{q \to 1} |Q_n^a f(x,q)| < +\infty,$$

entonces para casi todo $x \in E$ existe la n-ésima Derivada de Peano.

La demostración de este teorema se hace por inducción. Para $n = 1$ el resultado se tiene por el Teorema de Denjoy (Teorema 3.6). El paso de inducción, sigue el mismo esquema que la prueba del Teorema 3.27:

$$\left.\begin{array}{c} |Q_n^a f(x,q)| = O(1) \\ \big\downarrow {\scriptstyle \text{Lema 3.24}} \\ f \text{ acotada en} \\ \text{un entorno de } x \end{array}\right| \overset{?}{\Rightarrow} \quad |Q_{n-1}^a f(x,q)| = O(1)$$

$$\begin{array}{c} \big\downarrow {\scriptstyle \text{h. i.}} \\ \left.\begin{array}{c} \text{existe } f_{n-1}(x) \\ \\ |Q_n^a f(x,q)| = O(1) \end{array}\right| \overset{?}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{c} (3.2) \\ \big\downarrow {\scriptstyle \text{Proposición 3.7}} \\ \text{existe } f_n(x) \end{array} \end{array}$$

Veamos que los dos resultados que faltan por demostrar del esquema también son ciertos para estos casos de Quantum Derivadas Generalizadas, Proposiciones 3.38 y 3.37.

Proposición 3.37. *Si en un punto x se cumple que:*

$$\limsup_{q \to 1} |Q_n^a f(x,q)| < +\infty,$$

y existe $f_{n-1}(x)$, entonces se verifica (3.2), es decir:

$$f(x+h) = f(x) + hf_1(x) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}h^{n-1}f_{n-1}(x) + O(h^n).$$

Demostración. Considerando la función:

$$g(y) = f(y) - \left(f(x) + (y-x)f_1(x) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}(y-x)^{n-1}f_{n-1}(x) \right),$$

podemos suponer que $f(x) = f_1(x) = \ldots = f_{n-1}(x) = 0$, ya que gracias a la Proposición 3.17 se tiene que $Q_n^a(g-f)(x) = 0$.

También podemos suponer que $|a| > 1$, ya que para cualquier a distinto de $-1, 0$ y 1:

$$Q_n^{1/a} f(x, q^{a^{n-1}}) = Q_n^a f(x,q). \tag{3.40}$$

Efectivamente, para $n = 1$ la igualdad se tiene trivialmente pues Q_1^a no depende de a. Si suponemos que es cierto para n, entonces:

$$\begin{aligned} Q_{n+1}^{1/a} f(x, q^{a^n}) &= (n+1)\frac{Q_n^{1/a} f(x, q^{a^{n-1}}) - Q_n^{1/a} f(x, q^{a^n})}{qx - q^{a^n}x} \\ &= (n+1)\frac{Q_n^a f(x, q^a) - Q_n^a f(x,q)}{q^{a^n}x - qx} \\ &= Q_{n+1}^a f(x,q). \end{aligned}$$

Así pues, sea $|a| > 1$. Por hipótesis de la proposición y teniendo en cuenta que la n-ésima a-Quantum Diferencia se comporta como la fracción $\Delta_n^a f(x,q)/(q-1)^n$ (3.32), existe $C > 0$ tal que si q está próximo a uno:

$$|\Delta_n^a f(x,q)| < C|q-1|^n.$$

Supongamos que hemos demostrado el siguiente resultado:

"si existe una constante C tal que $|\Delta_m^a f(x,q)| < C|q-1|^n$ cuando q está próximo a uno, donde m es un número entero cumpliendo que $2 \leq m \leq n$, entonces existe otra constante C' tal que lo anterior se cumple para $m-1$, es decir, $\left|\Delta_{m-1}^a f(x,q)\right| < C'|q-1|^n$ cuando q está próximo a uno".

Con este resultado terminamos la demostración ya que, aplicándolo $n-1$ veces, llegamos a que existe una constante $\tilde{C}$ tal que $|\Delta_1^a f(x,q)| \leq \tilde{C}|q-1|^n$, es decir, poniendo $h = (q-1)x$ y recordando que $f(x) = f_1(x) = \ldots = f_{n-1}(x) = 0$:

$$f(x+h) = f(x) + hf_1(x) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}h^{n-1}f_{n-1}(x) + O(h^n).$$

Para aligerar un poco la demostración del resultado y como f, x y a están fijos a lo largo de ella, sea $\Delta_m(q) = \Delta_m^a f(x,q)$. Sea m un número entero con $2 \leq m \leq n$ y supongamos que $|\Delta_m(q)| \leq C|q-1|^n$ para alguna constante C. Así por definición de $\Delta_m(q)$:

$$|\Delta_{m-1}(q^a) - \lambda_{m-1}(q)\Delta_{m-1}(q)| < C|q-1|^n.$$

Razonando igual que en la prueba del Teorema 3.27, es decir, aplicando esta desigualdad a cada q^{1/a^i} con $1 \leq i \leq k$, multiplicando cada desigualdad por $b_i(q) = \lambda_{m-1}(q^{1/a})\lambda_{m-1}(q^{1/a^2})\ldots\lambda_{m-1}(q^{1/a^{i-1}})$ (para $i=1$, $b_1(q)=1$) y utilizando la desigualdad triangular, llegamos a la siguiente desigualdad:

$$\left|\Delta_{m-1}(q) - b_{k+1}(q)\Delta_{m-1}(q^{1/a^k})\right| < C\sum_{i=1}^{k} |b_i(q)|\,|q^{1/a^i}-1|^n.$$

Sea $J = (1/|a|, |a|)$. Veamos que para todo k y para todo q perteneciente a J, podemos acotar el segundo miembro de la desigualdad por $C'|q-1|^n$, para alguna constante C'. Para ello, aplicamos el criterio del cociente a la serie:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |b_i(q)| \left|\frac{q^{1/a^i}-1}{q-1}\right|^n;$$

obteniéndose que converge uniformemente en el conjunto $A = J \setminus \{1\}$, ya que, utilizando (3.30) y (1.7), se cumple que:

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to+\infty}\sup_{q\in A} \frac{|b_{i+1}(q)|\left|q^{1/a^{i+1}}-1\right|^n}{|b_i(q)|\left|q^{1/a^i}-1\right|^n} &= \lim_{i\to+\infty}\sup_{q\in A^{1/a^i}} \frac{|\lambda_{m-1}(q)|\left|q^{1/a}-1\right|^n}{|q-1|^n} \\
&= \lim_{q\to 1} \frac{|\lambda_{m-1}(q)|\left|q^{1/a}-1\right|^n}{|q-1|^n} \\
&= \left|\frac{a^{m-1}}{a^n}\right| = |a|^{m-n-1} < 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, existe una constante C' tal que para todo k y para todo q próximo a 1 se tiene:

$$\left|\Delta_{m-1}(q) - b_{k+1}(q)\Delta_{m-1}(q^{1/a^k})\right| < C'|q-1|^n. \qquad (3.41)$$

Veamos ahora que fijado $b > 1$ existen dos constantes positivas , $c_m(b)$ y $d_m(b)$, tales que para todo k y para todo q perteneciente al conjunto $J_b = [b^{-|a|}, b^{-1}] \cup [b, b^{|a|}]$ se tiene:

$$\frac{d_m(b)}{|q^{1/a^k}-1|^{m-1}} \leq |b_{k+1}(q)| \leq \frac{c_m(b)}{|q^{1/a^k}-1|^{m-1}}. \qquad (3.42)$$

Por definición:

$$b_{k+1}(q) = \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{q^{a^{m-1-j}}-1}{q^{a^{m-2-j}}-1}\prod_{i=0}^{m-3}\frac{q^{a^{m-1-j}}-q^{a^{i+1-j}}}{q^{a^{m-2-j}}-q^{a^{i-j}}}\right);$$

intercambiando productos:

$$b_{k+1}(q) = \left(\prod_{j=1}^{k}\frac{q^{a^{m-1-j}}-1}{q^{a^{m-2-j}}-1}\right)\prod_{i=0}^{m-3}\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{q^{a^{m-1-j}}-q^{a^{i+1-j}}}{q^{a^{m-2-j}}-q^{a^{i-j}}}\right);$$

simplificando, análogamente a las series telescópicas:

$$b_{k+1}(q) = \frac{q^{a^{m-2}}-1}{q^{a^{m-2-k}}-1}\prod_{i=0}^{m-3}\frac{q^{a^{m-2}}-q^{a^i}}{q^{a^{m-2-k}}-q^{a^{i-k}}}.$$

De esta manera $|b_{k+1}(q)|\,|q^{1/a^k}-1|^{m-1}$ es igual a:

$$|q^{a^{m-2}}-1|\left|\frac{q^{1/a^k}-1}{q^{a^{m-2-k}}-1}\right|\left|\prod_{i=0}^{m-3}q^{a^{m-2}}-q^{a^i}\right|\left|\prod_{i=0}^{m-3}\frac{q^{1/a^k}-1}{q^{a^{m-2-k}}-q^{a^{i-k}}}\right|,$$

que se puede acotar superiormente por una constante positiva para todo k natural mayor o igual que un cierto natural k_0 y para todo $q \in J_b$, ya que, utilizando (1.7), se tiene:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}\sup_{q\in J_b}\left|\frac{q^{1/a^k}-1}{q^{a^{m-2-k}}-1}\right| &= \lim_{k\to+\infty}\sup_{q\in J_b^{1/a^k}}\left|\frac{q-1}{q^{a^{m-2}}-1}\right| \\ &= \lim_{q\to1}\left|\frac{q-1}{q^{a^{m-2}}-1}\right| = \frac{1}{|a|^{m-2}},\end{aligned}$$

y para $i = 0, 1, \ldots, m-3$:

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{q\in J_b} \left| \frac{q^{1/a^k} - 1}{q^{a^{m-2-k}} - q^{a^{i-k}}} \right| = \lim_{q\to 1} \left| \frac{q-1}{q^{a^{m-2}} - q^{a^i}} \right| = \frac{1}{|a^{m-2} - a^i|}.$$

Como para $k \leq k_0$, las funciones $|b_{k+1}(q)|\,|q^{1/a^k} - 1|^{m-1}$ están acotadas superiormente en J_b, tenemos la existencia de $c_m(b)$.

De manera análoga, acotando inferiormente, se tiene la existencia de la constante positiva $d_m(b)$.

Volviendo a (3.41), si fijamos $q \neq 1$, se tiene que el segundo sumando del miembro de la izquierda de la desigualdad tiende a cero cuando k tiende a infinito. Efectivamente, utilizando (3.42), se puede acotar de la siguiente manera:

$$\left| b_{k+1}(q)\Delta_{m-1}(q^{1/a^k}) \right| \leq c_m(q) \frac{\Delta_{m-1}(q^{1/a^k})}{|q^{1/a^k} - 1|^{m-1}}.$$

Ahora, como ya sabemos por (3.32), esta última fracción se comporta salvo una constante como $Q^a_{m-1} f(x, q^{1/a^k})$. Utilizando la Proposición 3.17 y la suposición de que $f_{m-1}(x) = 0$ se tiene:

$$\lim_{k\to+\infty} Q^a_{m-1} f(x, q^{1/a^k}) = \mathcal{Q}^a_{m-1} f(x) = f_{m-1}(x) = 0;$$

y, por tanto, el sumando que queríamos tiende a cero cuando k tiende a infinito.

De esta manera, tomando en (3.41) límite cuando k tiende a infinito, conseguimos demostrar el resultado buscado,

$$|\Delta_{m-1}(q)| \leq C'|q-1|^n.$$

□

Proposición 3.38. *Si en un punto x se cumple que:*

$$\limsup_{q\to 1} |Q^a_n f(x,q)| < +\infty$$

y f está acotada en un entorno de x, entonces se verifica que:

$$\limsup_{q\to 1} \left| Q^a_{n-1} f(x,q) \right| < +\infty.$$

Demostración. Por (3.40), podemos suponer que $|a| > 1$. Siguiendo el razonamiento de la proposición anterior, se cumple (3.41) para $m = n$, es decir, se tiene que existe una constante C tal que:

$$\left|\Delta_{n-1}(q) - b_{k+1}(q)\Delta_{n-1}(q^{1/a^k})\right| < C|q-1|^n$$

para todo k y para q próximo a 1. Recordemos que $\Delta_m(q) = \Delta_m^a f(x,q)$.

Dado $b > 1$, definimos $J_b = [b^{-|a|}, b^{-1}] \cup [b, b^{|a|}]$ como antes. Fijamos b suficientemente próximo a 1 para que la desigualdad anterior se cumpla para todo $q \in J_b$. Además, como f está acotada en un entorno de x, observando la definición (3.29) de $\Delta_n^a f(x,q)$ y el hecho de que las funciones $\lambda_n(q)$ tienen límite cuando q tiende a 1 (3.30), podemos suponer que Δ_{n-1} está acotado en J_b.

De esta manera, deducimos de la desigualdad anterior que existe una constante, que por abuso de notación seguimos llamando C, tal que para todo $q \in J_b$ y para todo k se tiene:

$$\left|b_{k+1}(q)\Delta_{n-1}(q^{1/a^k})\right| < C.$$

Por (3.42), encontramos otra constante tal que para todo $q \in J_b$ y para todo k:

$$\left|\frac{\Delta_{n-1}(q^{1/a^k})}{\left(q^{1/a^k}-1\right)^{n-1}}\right| \leq \frac{\left|b_{k+1}(q)\Delta_{n-1}(q^{1/a^k})\right|}{d_n(b)} < C.$$

Ahora, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} J_b^{1/a^k}$ es un entorno reducido de 1, luego:

$$\limsup_{q\to 1}\left|\frac{\Delta_{n-1}(q)}{(q-1)^{n-1}}\right| \leq C;$$

y por tanto, teniendo en cuenta (3.32), terminamos la demostración,

$$\limsup_{q\to 1}\left|Q_{n-1}^a f(x,q)\right| < +\infty.$$

□

Corolario 3.39. *Si existe la n-ésima a-Quantum Derivada en un conjunto, entonces existe la n-ésima Derivada de Peano en casi todo el conjunto.*

3.5 Quantum Derivadas

En esta última sección probamos para las Quantum Derivadas, apoyándonos en las a-Quantum Derivadas con $a = 2$, los mismos resultados que se ven en la sección anterior para los casos particulares de Quantum Derivadas Generalizadas. De esta manera la Conjetura 3.20 también es cierta para las Quantum derivadas.

Recordemos la definición de Quantum Derivada:

Definición 3.40. *Se definen las n-ésimas Quantum Diferencias de una función f en un punto $x \neq 0$ por inducción de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} D_1 f(x,q) &= \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} \\ D_{n+1} f(x,q) &= \frac{D_n f(qx,q) - D_n f(x,q)}{qx - x}. \end{aligned}$$

Y se define la n-ésima Quantum Derivada como

$$\mathcal{D}_n f(x) = \lim_{q \to 1} D_n f(x,q).$$

Observemos que en este caso, para calcular la n-ésima Quantum Derivada tenemos que evaluar la función en los siguientes $n+1$ puntos: x, $qx, q^2x, q^3x, \dots, q^n x$. Por ejemplo, la segunda Quantum Derivada es:

$$\mathcal{D}_2 f(x) = \lim_{q \to 1} \frac{f(q^2x) - (q+1)f(qx) + qf(x)}{q(q-1)^2x^2}. \tag{3.43}$$

En el siguiente lema damos la fórmula explícita para cualquier n, que nos sirve para demostrar que las Quantum Derivadas son Quantum Derivadas Generalizadas.

En la fórmula que vamos a dar aparecen los q-análogos de los coeficientes binomiales que se definen de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! \, [n-k]_q!} \text{ para } n \geq k \geq 0, \tag{3.44}$$

siendo $[n]_q = \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$ para n natural, y:

$$[n]_q! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ [1]_q \, [2]_q \ldots [n]_q & \text{si } n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Lema 3.41. *La n-ésima Quantum Diferencia se puede escribir de la siguiente manera:*

$$D_n f(x,q) = \frac{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} f\left(q^{n-k}x\right)}{q^{\binom{n}{2}} (q-1)^n x^n}, \tag{3.45}$$

entendiendo que $\binom{0}{2} = \binom{1}{2} = 0$.

Demostración. Sea:

$$\Delta_n f(x,q) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} f\left(q^{n-k}x\right). \tag{3.46}$$

Entonces, para ver (3.45) tenemos que demostrar:

$$\begin{aligned} \Delta_1 f(x,q) &= f(qx) - f(x) \\ \Delta_{n+1} f(x,q) &= \Delta_n f(x,q^a) - q^n \Delta_n f(x,q), \end{aligned} \tag{3.47}$$

porque a partir de aquí se demuestra la fórmula (3.45) por inducción de la siguiente manera. Para $n = 1$ se tiene trivialmente. Y suponiendo que es cierto para n, se tiene que:

$$\begin{aligned} D_{n+1} f(x,q) &= \frac{D_n f(qx,q) - D_n f(x,q)}{qx - x} \\ &= \frac{1}{(q-1)x} \left(\frac{\Delta_n f(qx,q)}{q^{\binom{n}{2}} (q-1)^n q^n x^n} - \frac{\Delta_n f(x,q)}{q^{\binom{n}{2}} (q-1)^n x^n} \right) \\ &= \frac{\Delta_n f(qx,q) - q^n \Delta_n f(x,q)}{q^{\binom{n+1}{2}} (q-1)^{n+1} x^{n+1}} \\ &= \frac{\Delta_{n+1} f(x,q)}{q^{\binom{n+1}{2}} (q-1)^{n+1} x^{n+1}}. \end{aligned}$$

Para probar (3.47) hacemos notar que el caso $n = 1$ es un simple cálculo directo. Ahora, para un número natural n, observamos que por (3.46):

$$\Delta_n f(qx,q) - q^n \Delta_n f(x,q) = \sum_{k=0}^{n+1} A_k(q) f\left(q^{n+1-k}x\right),$$

donde:

$$A_k(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ (-1)^k \left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q q^{\binom{k-1}{2}+n} \right) & \text{si } k = 1, 2, \ldots, n \\ (-1)^{n+1} q^{\binom{n+1}{2}} & \text{si } k = n+1. \end{cases}$$

Y por tanto, basta demostrar que para $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q q^{\binom{k-1}{2}+n} = \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}}. \tag{3.48}$$

Partiendo del miembro de la izquierda al que llamamos N, por definición de q-análogos de los coeficientes binomiales:

$$N = \frac{[n]_q!}{[k]_q! \, [n-k]_q!} q^{\binom{k}{2}} + \frac{[n]_q!}{[k-1]_q! \, [n-k+1]_q!} q^{\binom{k-1}{2}+n};$$

sacando factor común:

$$N = \frac{[n]_q!}{[k]_q! \, [n+1-k]_q!} q^{\binom{k}{2}} \left([n-k+1]_q + [k]_q \, q^{n+1-k} \right),$$

y como lo que está dentro del paréntesis es igual a $[n+1]_q$,

$$\begin{aligned} [n-k+1]_q + [k]_q \, q^{n+1-k} &= \frac{q^{n-k+1}-1}{q-1} + \frac{q^k-1}{q-1} q^{n+1-k} \\ &= \frac{q^{n+1}-1}{q-1}, \end{aligned}$$

demostramos la igualdad (3.48). □

Proposición 3.42. *Las Quantum Derivadas son Quantum Derivadas Generalizadas.*

Demostración. Basta con demostrar, al igual que en la Proposición 3.35, que para todo $0 < q \neq 1$:

$$D_n x^j(1, q) = [n]_q! \delta_{j,n} \text{ para } j = 0, 1, \ldots, n. \tag{3.49}$$

Por el lema anterior, esto equivale a probar que para $j = 0, 1, \ldots, n$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k q^{\binom{k}{2}}}{q^{\binom{n}{2}} (q-1)^n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{j(n-k)} = [n]_q! \delta_{j,n}.$$

Dicho en forma matricial, tenemos que demostrar que si consideramos el sistema:

$$V(q^n, q^{n-1}, \ldots, q^2, q, 1)(x_0, x_1, \ldots, x_n)^t = (0, \ldots, 0, [n]_q!)^t,$$

su única solución es:

$$x_k = \frac{(-1)^k q^{\binom{k}{2}}}{q^{\binom{n}{2}} (q-1)^n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q. \tag{3.50}$$

Sea $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ la solución del sistema. Utilizando la regla de Cramer, de manera análoga a como se hace en la demostración de la Proposición 3.14, llegamos a que:

$$x_k = \frac{[n]_q!}{\prod\limits_{m \neq k} (q^{n-k} - q^{n-m})}.$$

A partir de aquí realizamos unas transformaciones hasta llegar a la fórmula (3.50). Separamos el producto dejando a un lado los factores con $m < k$ y al otro los factores con $m > k$:

$$x_k = \frac{[n]_q!}{\prod\limits_{m=0}^{k-1} (q^{n-k} - q^{n-m}) \cdot \prod\limits_{m=k+1}^{n} (q^{n-k} - q^{n-m})};$$

sacamos factor común q^{n-k} de cada factor del primer producto, y q^{n-m} de cada factor del segundo producto:

$$x_k = \frac{[n]_q!}{(q^{n-k})^k \prod\limits_{i=1}^{k} (1 - q^i) \cdot q^{1+2+\ldots+(n-k-1)} \prod\limits_{i=1}^{n-k} (q^i - 1)};$$

agrupamos factores:

$$x_k = \frac{[n]_q!}{q^{(n-k)(n+k-1)/2} (-1)^k \prod\limits_{i=1}^{k} (q^i - 1) \prod\limits_{i=1}^{n-k} (q^i - 1)};$$

multiplicamos y dividimos por $q^{k(k-1)/2}(q-1)^n$ y, recordando la definición de q-análogos de los coeficientes binomiales, llegamos a la fórmula (3.50):

$$x_k = \frac{(-1)^k q^{k(k-1)/2} [n]_q!}{q^{n(n-1)/2} (q-1)^n \prod_{i=1}^{k} \frac{q^i - 1}{q-1} \prod_{i=1}^{n-k} \frac{q^i-1}{q-1}} = \frac{(-1)^k q^{\binom{k}{2}}}{q^{\binom{n}{2}} (q-1)^n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q .$$

□

Veamos ahora la relación que existe entre la n-ésima Quantum Diferencia $D_n f(x,q)$ y la n-ésima 2-Quantum Diferencia $Q_n^2 f(x,q)$. Recordemos que para hallar las Quantum Derivadas tenemos que evaluar la función en x, qx, q^2x, $q^3x, \ldots, q^n x$, y para calcular las 2-Quantum tenemos que evaluarla en x, qx, q^2x, $q^4x, \ldots, q^{2^{n-1}}x$.

Lema 3.43. *Para cada n, existen $2^{n-1} - n + 1$ funciones acotadas en un entorno de uno, $C_0(q), C_1(q), \ldots, C_{2^{n-1}-n}(q)$, tales que:*

$$Q_n^2 f(x,q) = \sum_{i=0}^{2^{n-1}-n} C_i(q) D_n f(q^i x, q). \tag{3.51}$$

Demostración. Fijado n, nosotros probamos que existen polinomios en q, $C_0'(q), C_1'(q), \ldots, C_{2^{n-1}-n}'(q)$ tales que:

$$\Delta_n^2 f(x,q) = \sum_{i=0}^{2^{n-1}-n} C_i'(q) \Delta_n f\left(q^i x, q\right). \tag{3.52}$$

Esto es suficiente, ya que de los Lemas 3.34 y 3.41 podemos deducir (3.51) con:

$$C_i(q) = \frac{n! q^{\binom{n}{2}+in} (q-1)^n}{(q^{2^{n-1}}-1)(q^{2^{n-1}}-q)(q^{2^{n-1}}-q^2)\ldots(q^{2^{n-1}}-q^{2^{n-2}})} C_i'(q),$$

para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, 2^{n-1} - n$. Observamos que las funciones C_i están acotadas en un entorno de uno ya que los C_i' son polinomios y se tiene (1.7).

Para probar (3.52), vamos a identificar una función del tipo:

$$b_m(q) f\left(q^m x\right) + b_{m-1}(q) f\left(q^{m-1} x\right) + \ldots + b_0(q) f(x),$$

con el siguiente polinomio en la variable y, cuyos coeficientes dependen de q:

$$b_m(q)y^m + b_{m-1}(q)y^{m-1} + \ldots + b_0(q),$$

que se obtiene sustituyendo $f(q^i x)$ por y^i.

De esta manera identificamos $\Delta_n f(x,q)$ (ver (3.46)) con un polinomio mónico que es de la forma:

$$p(y,q) = y^n + a_{n-1}(q)y^{n-1} + \ldots + a_0(q),$$

y para cada entero no negativo i, tenemos la identificación de $\Delta_n f\left(q^i x, q\right)$ con $y^i p(y,q)$. También se identifica $\Delta_n^2 f(x,q)$ (ver (3.29)) con un polinomio de la forma:

$$P(y,q) = y^{2^{n-1}} + A_{n-1}(q)y^{2^{n-2}} + \ldots + A_2(q)y^2 + A_1(q)y + A_0(q).$$

Así, para probar (3.52) basta demostrar:

$$P(y,q) = (C_0'(q) + C_1'(q)y + \ldots + C_{2^{n-1}-n}'(q)y^{2^{n-1}-n})p(y,q).$$

Por el algoritmo de la división encontramos dos polinomios en y, Q de grado $2^{n-1} - n$ y R de grado menor que n, tales que:

$$R = P - Qp.$$

Hacemos notar que los coeficientes de Q son polinomios en q. Esto es debido a que p es mónico y a que los coeficientes de p y de P son polinomios en q por (3.47) y por (3.29) respectivamente, observando que para $a = 2$:

$$\lambda_n(q) = \left(q^{2^{n-1}} + 1\right)\left(q^{2^{n-1}} + q\right)\left(q^{2^{n-1}} + q^2\right)\ldots\left(q^{2^{n-1}} + q^{2^{n-2}}\right).$$

Ahora, tenemos las siguientes igualdades, $p(q^j,q) = \Delta_n x^j(1,q)$ y $P(q^j,q) = \Delta_n^2 x^j(1,q)$. Así, tanto p como P tienen ceros en $1, q, q^2, \ldots, q^{n-1}$ por (3.49) y (3.33) respectivamente. Por tanto, R es un polinomio de grado menor que n con n ceros distintos, es decir, R es nulo. Esto establece lo que queríamos. □

Ya podemos demostrar que la Conjetura 3.20 es cierta para todas las n-ésimas Quantum Derivadas:

Teorema 3.44. *Si para todo $x \in E$ se cumple:*

$$\limsup_{q\to 1} |D_n f(x,q)| < +\infty,$$

entonces para casi todo $x \in E$ existe la n-ésima Derivada de Peano.

Demostración. Por el lema del desplazamiento (Lema 3.23), para todo i:

$$\limsup_{q\to 1} \left|D_n f(q^i x, q)\right| < +\infty \text{ en casi todo } x \in E,$$

luego por el lema anterior:

$$\limsup_{q\to 1} \left|Q_n^2 f(x,q)\right| < +\infty \text{ en casi todo } x \in E,$$

y basta aplicar el Teorema 3.36 para terminar la demostración. □

Corolario 3.45. *Si existe la n-ésima Quantum Derivada en un conjunto, entonces existe la n-ésima Derivada de Peano en casi todo el conjunto.*

Bibliografía

[A] J. M. Ash, *Generalizations of the Riemann derivative*, Transactions of the American Mathematical Society, **126** (1967), 181-199.

[ACR] J. M. Ash, S. Catoiu y R. Ríos-Collantes-de-Terán, *On the nth quantum derivative*, pendiente de publicación.

[AW] J. M. Ash y G. Welland, *Convergence, uniqueness, and sumability of multiple trigonometric series*, Transactions of the American Mathematical Society, **163** (1972), 401-436.

[B] A. V. Bakhshetsyan, *Zeros of series with respect to the Rademacher system*, Translation: Mathematical Notes, **33** N° 1-2 (1983), 84-90.

[C] D. L. Cohn, *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston, 1980.

[CO] L. Colzani, *Sets of uniqueness of l_p for general orthonormal complete systems*, Unione Matematica Italiana, Bollettino B, Serie V, **16** N° 3 (1979), 1134-1143.

[D] A. Denjoy, *Mémoire sur les nombres dérivés*, Journal de Matheématiques Pures et Appliquées, **7** (1915), 105–240.

[E] T. Ernst, *The history of q-calculus and a new method*, U. U. D. M. Report 2000:16, ISSN 1101-3591, Department of Mathematics, Uppsala University, 2000.

[FW] H. Fejzić y C. E. Weil, *Repairing the proof of a classical differentiation result*, Real Analysis Exchange, **19** N° 2 (1993/94), 639–643.

[F] N. J. Fine, *On the Walsh functions*, Transactions of the American Mathematical Society, **65** (1949), 372-414.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de

Ricardo Ríos Collantes de Terán

titulada Conjuntos de unicidad de sistemas de funciones independientes. Grandes derivadas.

acordó otorgarle la calificación de "Sobresaliente Cum Laude"

Unanimidad

Sevilla, 28 de Septiembre 2001

El Vocal	El Vocal	El Vocal
J. Marshall Ash		
El Presidente	El Secretario	El Doctorado,