



Universidad de Sevilla
Facultad de Matemáticas
Departamento de Análisis Matemático

*Un estudio, con aplicaciones, de las
fórmulas de cuadratura matriciales.*

043

387

TESIS DOCTORAL
por
Beatriz Polo García.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Abril 2002

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SECRETARIA GENERAL

Quede registrada esta Tesis Doctoral
al folio 150 número 286 del libro
correspondiente.

Sevilla, 6 de Mayo de 2002

El Jefe del Negociado de Teoría

[Handwritten signature]

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Deposición en DPTO. DE ANÁLISIS MATEMÁTICO.
de la FOMENTA DE MATEMÁTICAS
de esta Universidad desde el día 8-5-02
hasta el día

Sevilla 29 de Mayo

EL DIRECTOR DE DPTO

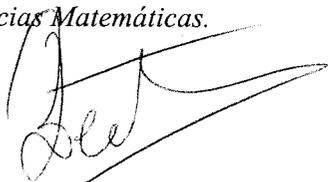
[Handwritten signature]



UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

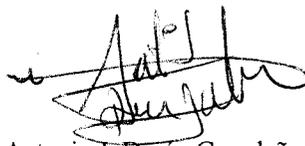
*Un estudio, con aplicaciones, de las fórmulas de
cuadratura matriciales.*

*Primera versión de la Memoria presentada
para optar al grado de Doctor en
Ciencias Matemáticas.*



Beatriz Polo García
Becaria f.p.i.
Dpto. Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla

VºBº del Director:



Dr. D. Antonio J. Durán Guardedeño
Catedrático del Dpto. Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla

En Sevilla a 29 de abril de 2002.

Índice general

Introducción	I
1. PRELIMINARES	1
2. FÓRMULAS DE CUADRATURA MATRICIALES	13
2.1. Grado de precisión de una fórmula de cuadratura	14
2.2. Fórmulas de cuadratura	20
2.2.1. Fórmulas de cuadratura gaussianas	21
2.2.2. Fórmulas de cuadratura no gaussianas	39
2.3. Ejemplos	53
2.4. Forma general de las fórmulas de cuadratura gaussianas con nodos complejos	56
3. FUNCIONES MATRICIALES DE CHRISTOFFEL	75
3.1. Preliminares	75
3.2. Expresión de las funciones de Christoffel en términos de po- linomios matriciales ortonormales	81
3.3. Propiedad extremal de las funciones matriciales de Christo- ffel en la recta real	86
3.4. Comportamiento asintótico	90
4. AUTOVALORES DE MATRICES DE TOEPLITZ POR BLOQUES	97
4.1. Preliminares	97
4.2. Demostración del teorema 4.1.1	100
4.3. Aplicación: Funciones de segunda especie matriciales	120
Bibliografía	123

INTRODUCCIÓN

El estudio de los polinomios ortogonales es un tema clásico cuyos orígenes se remontan a los trabajos de Legendre sobre el movimiento planetario. Aunque el interés por esta teoría decae en el segundo tercio del siglo XX, resurge con gran fuerza a finales de los 80 gracias a la creciente actividad en la teoría de aproximación y análisis numérico y de manera secundaria por la revolución de los ordenadores, siendo numerosas las nuevas áreas de estudio surgidas en torno a ella.

El caso estándar se centra en el estudio de sucesiones de polinomios ortogonales $(p_n)_n$ en la recta real con respecto a una medida positiva. Éstos, una vez normalizados, satisfacen una relación de recurrencia de tres términos de la forma

$$(0.0.1) \quad tp_n(t) = a_{n+1}p_{n+1}(t) + b_n p_n(t) + a_n p_{n-1}(t), \quad n \geq 0,$$

con las condiciones inicial $p_{-1}(t) = 0$ y $p_0(t) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y donde $a_n \neq 0$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$. El recíproco también es cierto y es conocido como teorema de Favard: dada una sucesión de polinomios que verifique una relación de recurrencia como en (0.0.1) con $a_n \neq 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$, existe una medida positiva en la recta real con respecto a la que son ortonormales.

A finales de la década de los 80, se comienzan a considerar familias de polinomios que son ortonormales con respecto a los llamados productos escalares de Sobolev discretos: son perturbaciones diferenciales discretas de un producto escalar estándar definido por una medida positiva. Estas sucesiones de polinomios $(p_n)_n$ verifican fórmulas de recurrencia más generales del tipo

$$(0.0.2) \quad t^N p_n(t) = c_{n,0} p_n(t) + \sum_{k=1}^{2N+1} [c_{n,k} p_{n-k}(t) + c_{n+k,k} p_{n+k}(t)], \quad n \geq 0.$$

La determinación de la ortogonalidad canónica para familias de polinomios verificando dichas fórmulas de recurrencia con un número impar de términos la obtuvo A. J. Durán (ver [D1], [D2] y [DV]). Este resultado, que supone una extensión del teorema de Favard, estableció una estrecha conexión entre polinomios escalares verificando una fórmula de recurrencia de un número impar de términos como la expresada en (0.0.2) y polinomios

matriciales ortonormales con respecto a una matriz de medidas definida positiva.

Una de las consecuencias más importantes es que este resultado permitió el uso de la ortogonalidad matricial para resolver algunos problemas importantes y antiguos de la ortogonalidad escalar estándar (ver [D2], por ejemplo).

La ortogonalidad matricial sobre la recta real, que se venía estudiando de manera esporádica desde los años 50 ([K], [A], [BB], [B] [Ge], [Zh]) obtuvo así una motivación importante que ha generado su estudio exhaustivo y sistemático en los diez últimos años. Uno de los grupos más activos en el desarrollo de esta investigación de la ortogonalidad matricial es el que lidera A. J. Durán y en él, bajo una beca de proyecto para formación de personal investigador del Ministerio de Ciencia y Tecnología, se han desarrollado los trabajos que conforman esta tesis –para una visión más detallada de algunos de los resultados obtenidos por el grupo durante los últimos diez años sobre polinomios ortogonales matriciales puede leerse el capítulo 1 de esta memoria dedicado a los preliminares necesarios para facilitar su lectura–.

El contenido de esta tesis se centra en tres aspectos de la ortogonalidad matricial: un estudio exhaustivo de las fórmulas de cuadratura matriciales, la introducción y estudio –propiedades algebraicas, extremales y asintóticas– de las funciones matriciales de Christoffel y el estudio de los autovalores de las matrices infinitas de Toeplitz asociadas a un peso matricial.

Pasamos a continuación a detallar los resultados obtenidos.

Una de las aplicaciones más interesantes de los polinomios matriciales ortonormales es la construcción de fórmulas de cuadratura. La importancia radica no sólo en su uso para la aproximación numérica de integrales matriciales sino también como herramienta de eficacia probada para el estudio de diversas propiedades asintóticas de las familias de polinomios ortogonales matriciales. En este sentido, en el **capítulo 2** se realiza un estudio exhaustivo de las fórmulas de cuadratura matriciales.

Una fórmula de cuadratura matricial con grado de precisión r para una matriz peso W de dimensión $N \times N$ consiste en encontrar números x_k , (reales o complejos) $k = 1, \dots, m$, llamados nodos, y matrices G_k , $k = 1, \dots, m$, llamados coeficientes de cuadratura tales que se verifique

$$\int P(t)dW(t) = \sum_{k=1}^m P(x_k)G_k$$

para cualquier polinomio $P \in \mathbb{P}_{N \times N}^r$, donde $\mathbb{P}_{N \times N}^r$ denota el espacio de los polinomios matriciales complejos de grado menor o igual que r .

En el caso escalar, para n nodos distintos el máximo grado de precisión es $2n - 1$ y las fórmulas de cuadratura con n nodos y este máximo grado de precisión se denominan gaussianas o de Gauss. En este caso, la fórmula de cuadratura no puede ser extendida a un subespacio del espacio de polinomios de \mathbb{P}^{2n} mayor que \mathbb{P}^{2n-1} . Sin embargo en el caso matricial esta situación no es cierta y sólo admite un análogo cuando la suma de los rangos de los coeficientes de cuadratura (o equivalentemente, la suma de las multiplicidades de los nodos) es un múltiplo entero de la dimensión de las matrices N , es decir, cuando la suma de los rangos de los coeficientes de cuadratura no es un múltiplo de N , existen fórmulas de cuadratura con máximo grado de precisión r tales que se siguen verificando para un subespacio de $\mathbb{P}_{N \times N}^{r+1}$ que contiene estrictamente a $\mathbb{P}_{N \times N}^r$.

El estudio de las fórmulas de cuadratura matriciales con máximo grado de precisión comenzó en 1983, con el artículo de S. Basu y N.K. Bose ([BB]) que aplican el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a los autovectores de P_n asociados a sus ceros. Posteriormente Ann Sinap y Walter van Assche encuentran fórmulas de cuadratura a través del polinomio de interpolación de Lagrange en el caso del soporte de la medida compacto (ver [SV]) y con nodos los ceros del polinomio matricial n -ésimo. En este caso, la suma de las multiplicidades de los nodos es nN . Poco después, Antonio Durán y Pedro López generan en [DL1] fórmulas de cuadratura matriciales para cualquier matriz de medidas con nodos los ceros del polinomio ortonormal n -ésimo P_n . Fue Antonio Durán en 1996 el primero en dar una expresión explícita de los coeficientes de cuadratura en términos de los polinomios ortonormales (ver [D3]), y el que en 1999 junto con Defez da el recíproco de los anteriores resultados en [DD], esto es, dados los ceros y nodos de una fórmula de cuadratura tal que los coeficientes de cuadratura G_k , $k = 1, \dots, m$, satisfacen $\sum_{k=1}^m \text{rg}(G_k) = nN$, encuentran el polinomio matricial (combinación matricial de dos polinomios matriciales ortonormales consecutivos) cuyos ceros son los nodos de la fórmula de cuadratura dada.

En esta memoria se generalizan todos los resultados anteriores para el

caso general de que la suma de los rangos de los coeficientes de cuadratura sea un número entero cualquiera; esto es,

$$\sum_{k=1}^m \operatorname{rg} G_k = (n-1)N + h, \quad 0 \leq h \leq N-1.$$

Se demuestra en [DD] que en este caso, se obtiene una acotación superior para el grado de precisión igual a $2n-3$. En la sección 1 veremos que cuando $h=0$, cualquier fórmula de cuadratura con el máximo grado de precisión $2n-3$ no es válida para ningún polinomio matricial de grado $2n-2$ excepto para $P = \theta$, pero cuando $0 < h \leq N-1$, una fórmula de cuadratura con el máximo grado de precisión $2n-3$ puede seguir verificándose para polinomios matriciales que pertenezcan a un cierto subespacio de $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{P}_{N \times N}^{2n-2}$ tal que $\mathbb{P}_{N \times N}^{2n-3}$ tiene codimensión a lo sumo hN en \mathcal{X} . Cuando este subespacio tenga esta máxima codimensión, una fórmula de cuadratura con máximo grado de precisión será llamada una fórmula de cuadratura gaussiana.

En la sección 2 se generan fórmulas de cuadratura de Gauss con nodos reales; esencialmente están vinculadas a truncaciones de la matriz de Jacobi asociada –convenientemente perturbada–. En nuestro caso daremos expresiones explícitas para el polinomio matricial que genera las fórmulas gaussianas –entre otras cosas sus ceros serán los nodos de la correspondiente fórmula de cuadratura– en términos de dos polinomios matriciales ortonormales consecutivos. Este polinomio matricial presenta la singularidad de tener coeficiente líder singular.

No sólo se generalizan los resultados del caso escalar, sino que se desarrolla una nueva técnica para encontrar fórmulas de cuadratura no gaussianas a partir de las de Gauss, cuya utilidad queda patente en el siguiente capítulo al ser utilizadas para la demostración de una importante propiedad extremal de las funciones matriciales de Christoffel.

En la sección 3 se ilustran ejemplos numéricos de estas fórmulas de cuadratura de Gauss.

Se concluye el capítulo 2 estudiando en la sección 4 la forma general de las fórmulas de cuadratura gaussianas con nodos números complejos cualesquiera. Se demuestra también que cuando en una fórmula de cuadratura gaussiana los nodos son reales y los coeficientes de cuadratura son semidefinidos positivos entonces dicha fórmula corresponde con una de las fórmulas de cuadratura de Gauss encontradas en la sección 2.

En el **capítulo 3** se definen y estudian las funciones matriciales de Christoffel asociadas a una matriz de medidas definida positiva W . Es conocido que en el caso escalar las funciones de Christoffel juegan un papel importante en la teoría de los polinomios ortogonales. Muchos resultados sobre series de Fourier e interpolación se basan en estimaciones y asintóticas de estas funciones.

En el caso escalar, las funciones de Christoffel vienen dadas por

$$\lambda_n(z) = \min \left\{ \int |p(t)|^2 d\mu(t) : p \in \mathbb{P}^{n-1}, p(z) = 1 \right\},$$

donde $z \in \mathbb{C}$ y \mathbb{P}^{n-1} denota, como es habitual, el espacio lineal de polinomios con coeficientes complejos y grado menor o igual que $n - 1$. En este caso, la dimensión de los espacios $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ crece en una unidad, pero en el caso matricial la dimensión de los espacios $\mathbb{P}_{N \times N}^{n-1} \subset \mathbb{P}_{N \times N}^n$ crece en N^2 unidades; por tanto, para la definición de las funciones matriciales de Christoffel es más conveniente tomar ínfimo en espacios de la forma

$$X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1} = \{P(t) = S(t) + Ct^n, C \in X \subseteq \mathbb{C}^{N \times N}, S \in \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}\},$$

$n \geq 1$, en lugar de en el espacio $\mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$, $n \geq 1$.

Así, dado $n \in \mathbb{N}$, la función matricial de Christoffel $\lambda_{n,X}$ se define como (0.0.3)

$$\lambda_{n,X}(z) = \inf \left\{ \int Q(t) dW(t) Q^*(t) : Q(z) = Id_N, Q \in X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1} \right\}.$$

Se demuestra en la sección 1, que el espacio X debe ser un ideal a la izquierda, ya que en caso contrario no puede garantizarse la existencia del ínfimo que define la función matricial de Christoffel –recuérdese que el orden matricial no es un orden total–. En este sentido, se muestra con un ejemplo la existencia de un subespacio $X \in \mathbb{C}^{N \times N}$ que no es un ideal a la izquierda y para el cual el ínfimo que define las funciones de Christoffel no existe.

En la sección 2 se considera X un ideal a la izquierda y se demuestra que en este caso, el ínfimo en (0.0.3) existe y se alcanza, además de verificar una propiedad de homogeneidad que probaremos al final de la sección. Encontraremos una expresión (análoga a la que se tiene en el caso escalar) para las funciones matriciales de Christoffel en términos de cualquier sucesión $(P_n)_n$ de polinomios matriciales ortonormales con respecto a W .

En la sección 3 probaremos que las funciones matriciales de Christoffel también satisfacen la importante propiedad extremal de alcanzar la máxima masa que puede soportar una matriz de medidas $\nu \sim_{n,X} W$ en un punto cualquiera $x \in \mathbb{R}$ –salvo en un conjunto excepcional finito–, donde \sim es la siguiente relación de equivalencia en el conjunto de las matrices peso:

$$(0.0.4) \quad \nu \sim_{n,X} W \text{ si } \int P(t) d\nu(t) Q^*(t) = \int P(t) dW(t) Q^*(t),$$

para cualesquiera polinomios $P, Q \in X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$. Asimismo, se encontrará una expresión explícita de la matriz peso que alcanza dicho máximo para lo cual se utilizan las fórmulas de cuadratura generadas en la sección 2.2.2 del capítulo segundo. Se determinará el conjunto excepcional finito en cuyos puntos no se asegura la propiedad extremal, y finalmente daremos ejemplos que muestran que el máximo no se alcanza en general, en esos puntos del conjunto excepcional.

Por último, en la sección 4 se estudia el comportamiento asintótico de

$$(P_n(z)^*)^{-1} (\lambda_{n, X_n}(z))^{-1} P_n^{-1}(z),$$

donde $(P_n)_n$ es una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a W y X_n es un cierto ideal a la izquierda asociado al polinomio P_n (este comportamiento asintótico en el caso escalar fue estudiado por Nevai en [N1, p. 31, th. 11]).

En el caso escalar, para una fórmula de cuadratura cuyos nodos son los ceros de (p_n) , los coeficientes de cuadratura coinciden con las funciones de Christoffel en dichos nodos. Esta propiedad en el caso matricial sólo es cierta cuando los ceros son de máxima multiplicidad N . Esto produce que muchos de los resultados de la teoría clásica no puedan ser generalizados de forma inmediata a la teoría matricial, y se requiera entonces de nuevas técnicas para el estudio de las funciones matriciales de Christoffel.

El **capítulo 4** se dedica al estudio de los autovalores de las matrices de Toeplitz T_G por bloques para funciones peso asociadas a una función matricial G . Para ello, escribiremos la matriz de medidas dW como

$$(0.0.5) \quad dW(t) = M(t) d\text{tr}W(t)$$

con $M(t)$ la matriz de funciones derivada de la matriz de medidas W respecto a su traza.

En la sección 1 se definen las matrices de Toeplitz T_G por bloques para funciones peso asociadas a una función matricial G verificando $G(t)M(t) = M(t)G^*(t)$ para todo $t \in \text{sop}(\text{tr}W)$ y las entradas de $t^n G(t)M(t) \in L^1(\text{tr}W)$, $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se consideran $\{x_{G,i}\}_{i=1}^{nN}$ los autovalores (contando sus multiplicidades) de la matriz de Toeplitz truncada y $(\sigma_{G,n})_n$ la sucesión de medidas contadoras de dichos autovalores. El objetivo de este capítulo es estudiar la relación asintótica entre la sucesión de medidas $(\sigma_{G,n})_n$ y la sucesión de medidas contadoras $(\sigma_n)_n$ de los ceros de los polinomios ortogonales.

En la sección 2, se prueba esta relación asintótica en el caso de que la matriz G sea hermítica y se comporten “casi escalarmente con respecto a la matriz M ”, esto es, $G(t)M(t) = M(t)G(t) = g(t)M(t)$, con g una función escalar continua. En particular, se tiene el resultado para funciones de la forma $G(t) = g(t)Id_N$ con g función escalar continua y real. Queda planteado el problema de extender los resultados para funciones matriciales generales, aunque nuestra conjetura es que no habrá en general convergencia de la familia de medidas asociada a los autovalores.

Posteriormente, se ilustra un método para generar a partir de la matriz de medidas, funciones matriciales G que se comportan “casi escalarmente con respecto a la matriz M ”. Se finaliza la sección con un ejemplo de función matricial hermítica que no es escalar y tal que $G(t)M(t) = M(t)G(t) = g(t)M(t)$, con g escalar continua.

Aplicaremos en la sección 3 los resultados obtenidos en la sección 2 al estudio de las funciones matriciales de segunda especie $\{q_n(t)\}_{n \geq 0}$ definidas por la integral

$$(0.0.6) \quad q_n(t) = \int \frac{P_n(x)}{t-x} dW(x), \quad t \in \mathbb{C} \setminus \text{sop}(\text{tr}W).$$

Se estudia el límite cuando n tiende a infinito de

$$\text{tr} \left(\frac{1}{nN} \sum_{k=0}^{n-1} q_k(t) P_k^*(t) \right)$$

en términos de la transformada de Stieltjes de la medida límite de la sucesión de medidas contadoras $(\sigma_n)_n$ de los ceros de los polinomios ortogonales.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Consideramos una matriz de medidas W , de dimensión $N \times N$, tal que tiene todos sus momentos finitos, esto es,

$$\int_{\mathbb{R}} t^n dW(t) < +\infty \quad \forall n \geq 0.$$

Supongamos que dicha matriz de medidas satisface:

- Es definida positiva: para cualquier Borel $A \subset \mathbb{R}$, $W(A)$ es una matriz numérica semidefinida positiva.
- Es no degenerada: $\int P(t)dW(t)P^*(t)$ no es singular para cualquier polinomio matricial $P(t)$ con coeficiente líder no singular.

Se puede comprobar fácilmente que la propiedad de ser no degenerada es equivalente a lo siguiente:

$$\text{rg} \left(\int P(t)dW(t)P^*(t) \right) \geq \text{rg} (\text{coeficiente líder de } P).$$

Para una matriz de medidas con todos sus momentos finitos y definida positiva, son equivalentes el ser no degenerada y que el producto interno matricial definido por W en el espacio de los polinomios matriciales tenga una sucesión $(P_n)_n$ de polinomios matriciales ortonormales con respecto a W que satisfacen:

$$\int P_n(t) dW(t) P_m^*(t) = \delta_{n,m} Id_N, \quad n, m \geq 0,$$

donde $P_n(t)$ es un polinomio matricial de grado n cuyo coeficiente líder, que denotaremos por Δ_n , no es singular.

Por simplicidad hemos supuesto a lo largo de esta memoria que la matriz de medidas W es definida positiva y no degenerada (equivalente, como ya se ha dicho, a la existencia de una sucesión $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ de polinomios matriciales ortonormales con respecto a W). Sin embargo, las definiciones y resultados de esta tesis, excepto los de carácter asintótico, siguen siendo válidos bajo las siguientes hipótesis más débiles para W :

- Para cualquier polinomio $P \in T$, la integral $\int P(t)dW(t)P^*(t)$ existe, donde T es un subespacio de $\mathbb{P}_{N \times N}^n$ de la forma

$$T = X \oplus \in \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1} = \{P(t) = S(t) + Ct^n, C \in X \subseteq \mathbb{C}^{N \times N}, S \in \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}\},$$

con $X \in \mathbb{C}^{N \times N}$ un ideal a la izquierda –esto es, si $A \in X$ y $B \in \mathbb{C}^{N \times N}$ entonces $BA \in X$.

- Para $P \in T$,

$$\text{rg} \left(\int P(t)dW(t)P^*(t) \right) \geq \text{rg}(\text{ coeficiente líder de } P).$$

En este caso se puede asociar a W una sucesión finita $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ de polinomios matriciales ortonormales. Estos polinomios satisfacen lo siguiente:

- El coeficiente líder de P_k , $0 \leq k \leq n-1$, no es singular,
- P_n pertenece a T , y
- $\int P_i dW P_j^* = Id_N \delta_{i,j}$ $0 \leq i, j \leq n$ excepto para $i = j = n$ para el cual:

$$\text{rg} \left(\int P_n dW P_n^* \right) = \dim(T) - (n-1)n.$$

Aunque en la demostración de algunos teoremas necesitamos usar los polinomios ortonormales n -ésimo y $n+1$ -ésimo con respecto a W , estos teoremas se siguen verificando bajo las hipótesis anteriores más débiles, ya que no es difícil comprobar que con dichas hipótesis se puede encontrar una matriz de medidas V (la cual no es única) que tiene una sucesión completa $(R_n)_{n=0}^{\infty}$ de polinomios matriciales ortonormales (con coeficientes líderes no singulares) y verificando:

$$-\int P(t)dW(t)Q^*(t) = \int P(t)dV(t)Q^*(t) \quad \text{para todo } P, Q \in T,$$

$$-R_k = P_k, k = 0, \dots, n-1 \text{ y } P_n = CR_n \text{ con } CC^* = \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix}.$$

Como consecuencia, los productos internos definidos por las matrices de medidas W y V en T coinciden. De esta forma, se puede utilizar la sucesión

completa de polinomios matriciales ortonormales con respecto a V cuando se necesite usar un polinomio ortonormal P_k , $k \geq n$, con respecto a W .

Al igual que en el caso escalar, la sucesión de polinomios matriciales ortonormales $(P_n)_n$ satisface una fórmula de recurrencia de tres términos:

$$(1.0.1) \quad {}_tP_n(t) = A_{n+1}P_{n+1}(t) + B_n(t)P_n(t) + A_n^*P_{n-1}(t), \quad n \geq 0,$$

donde $P_{-1}(t) = \theta$, $P_0(t) \in \mathbb{C}^{N \times N} \setminus \{\theta\}$ (en lo que sigue, supondremos sin pérdida de generalidad que $P_0(t) = Id_N$), A_n son matrices no singulares, y B_n son hermíticas.

Notemos que los polinomios $R_n(t) = U_n P_n(t)$, con $U_n U_n^* = Id_N$ son también ortonormales respecto a la misma matriz de medidas definida positiva que ortonormaliza a los polinomios matriciales $(P_n)_n$, y satisfacen una fórmula de recurrencia análoga a la anterior con coeficientes $U_{n-1} A_n U_n^*$ en vez de A_n , y $U_n B_n U_n^*$ en vez de B_n . Existen por tanto diversas formas de elegir las matrices A_n de manera que sean definidas positivas, triangulares o diagonales.

Por ejemplo, para obtener polinomios matriciales $(R_n)_n$ ortonormales con respecto a W tales que sus coeficientes líderes sean matrices triangulares inferiores, consideramos una sucesión $(P_n)_n$ cualquiera de polinomios matriciales ortonormales con respecto a W que satisfaga una fórmula de recurrencia de tres términos como (1.0.1) con coeficientes de recurrencia $(A_n)_n$ y $(B_n)_n$. De dicha fórmula de recurrencia se deduce que el coeficiente líder de P_n , que hemos denotado por Δ_n , viene dado en función de los coeficientes de recurrencia $(A_n)_n$ como sigue

$$(1.0.2) \quad \Delta_n = (A_1 A_2 \dots A_n)^{-1}.$$

Considerando $U_0 = Id_N$, se elige una matriz unitaria U_1 de manera que $A_1 U_1^*$ sea triangular inferior (lo cual siempre es posible por la denominada factorización LU), luego se elige U_2 de manera que $U_1 A_2 U_2^*$ sea triangular inferior, y así sucesivamente. Los polinomios $R_n(t) = U_n P_n(t)$ verifican que son ortonormales respecto a la matriz de medidas W y sus coeficientes líderes son, según (1.0.2), triangulares inferiores.

Análogo al caso escalar, podemos definir la matriz de Jacobi N -dimensional, que viene dada por

$$(1.0.3) \quad J = \begin{pmatrix} B_0 & A_1 & \theta & \theta & \dots \\ A_1^* & B_1 & A_2 & \theta & \dots \\ \theta & A_2^* & B_2 & A_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix};$$

Los siguientes resultados que aparecen en [DL1] relativos a los ceros de los polinomios matriciales ortonormales son básicos para el desarrollo de los tres capítulos que siguen (donde los ceros de un polinomio matricial $A(t)$ son los ceros de $\det(A(t))$):

Lema 1.0.1. *Los ceros de P_n tienen multiplicidad a lo sumo N . Es más, P_n tiene nN ceros (contando sus multiplicidades) y todos los ceros son reales ($n \in \mathbb{N}$).*

Lema 1.0.2. *Para $n \in \mathbb{N}$, los ceros del polinomio matricial P_n son los mismos que los del polinomio $\det(tId_{nN} - J_{|nN})$ (con la misma multiplicidad), donde $J_{|nN}$ es la matriz truncada de Jacobi (ver (1.0.3)) de dimensión nN .*

Teniendo en cuenta el lema (1.0.2), que los coeficientes de recurrencia A_n pueden elegirse —como se dijo anteriormente— diagonales, el teorema de los círculos de Gershgorin de localización de los autovalores de una matriz, y que de la fórmula de recurrencia de tres términos (1.0.1) se tiene que

$$A_n = \int tP_{n-1}(t)dW(t)P_n^*(t), \quad n \geq 0,$$

$$B_n = \int tP_n(t)dW(t)P_n^*(t), \quad n \geq 0,$$

se puede demostrar fácilmente la siguiente propiedad: los coeficientes de recurrencia A_n y B_n en (1.0.1) están acotados si y solo si el soporte de la medida es compacto, donde, para una matriz de medidas $W = (\mu_{i,j})_{i,j=1}^N$ definida positiva, su soporte viene dado por el soporte de su traza, $\text{sop}(\text{tr}W)$.

Análogamente a los polinomios escalares, se considera la sucesión de polinomios matriciales ortonormales de segunda especie $(Q_n)_n$ definidos por

$$(1.0.4) \quad Q_n(x) = \int \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x - t} dW(t)$$

con W la matriz de medidas definida positiva que ortonormaliza a los polinomios $(P_n)_n$.

A lo largo de la memoria, utilizaremos las siguientes notaciones:

Dada una matriz A de dimensión $N \times N$, denotaremos por $\text{Adj}(A)$ a su adjunta clásica, es decir, la matriz definida por la propiedad

$$(1.0.5) \quad A\text{Adj}(A) = \text{Adj}(A)A = \det(A)Id_N.$$

Si $P(z)$ es un polinomio matricial, denotaremos por $P^*(z)$ al polinomio matricial obtenido de $P(z)$ cambiando cada uno de sus coeficientes matriciales por su hermitica conjugada, de esta forma, $[P(z)]^* = P^*(\bar{z})$.

Para establecer los comportamientos asintóticos necesitamos definir los siguientes conjuntos: Por Λ_n denotaremos al conjunto de los ceros de los polinomios matriciales P_n , esto es, los ceros de $\det(P_n)$; denotamos también:

$$(1.0.6) \quad \Gamma = \bigcap_{N \geq 0} M_N, \quad \text{donde} \quad M_N = \overline{\bigcup_{n \geq N} \Lambda_n}.$$

Para nuestro estudio utilizaremos las versiones matriciales de algunas fórmulas clásicas de polinomios escalares ortonormales, la fórmula de cuadratura y el teorema de Markov que aparecen en [D3]:

Lema 1.0.3. (1) *La fórmula de Christoffel-Darboux y algunos casos especiales:*

$$(1.0.7) \quad \begin{aligned} P_{n-1}^*(z)A_nP_n(w) - P_n^*(z)A_n^*P_{n-1}(w) = \\ = (w - z) \sum_{k=0}^{n-1} P_k^*(z)P_k(w), \quad z, w \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

$$(1.0.8) \quad P_{n-1}^*(z)A_nP_n(z) - P_n^*(z)A_n^*P_{n-1}(z) = \theta, \quad z \in \mathbb{C}.$$

$$(1.0.9) \quad P_{n-1}^*(z)A_nP_n'(z) - P_n^*(z)A_n^*P_{n-1}'(z) = \sum_{k=0}^{n-1} P_k^*(z)P_k(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

(2) Algunos casos particulares de la fórmula de Green:

$$(1.0.10) \quad P_{n-1}^*(z)A_nQ_n(w) - P_n^*(z)A_n^*Q_{n-1}(w) \\ = I + (w - z) \sum_{k=0}^{n-1} P_k^*(z)Q_k(w), \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

$$(1.0.11) \quad P_{n-1}^*(z)A_nQ_n(z) - P_n^*(z)A_n^*Q_{n-1}(z) = I, \quad z \in \mathbb{C}.$$

(3) La fórmula de Liouville-Ostrogadski:

$$(1.0.12) \quad Q_n(z)P_{n-1}^*(z) - P_n(z)Q_{n-1}^*(z) = A_n^{-1}.$$

Teorema 1.0.4. Sea n un entero no negativo. Escribimos $\{x_{n,k}\}_{k=1}^m$ para los distintos ceros del polinomio matricial P_n ordenados en orden creciente ($m \leq nN$) y $\Gamma_{n,k}$ para las matrices

$$(1.0.13) \quad \Gamma_{n,k} = \frac{l_k}{(\det(P_n(t)))^{(l_k)}(x_{n,k})} (\text{Adj}(P_n(t)))^{(l_k-1)}(x_{n,k})Q_n(x_{n,k}),$$

$k = 1, \dots, m$, donde l_k es la multiplicidad de $x_{n,k}$

(1) Para cualquier polinomio P de grado menor o igual que $2n - 1$ se verifica la siguiente fórmula:

$$(1.0.14) \quad \int P(t)dW(t) = \sum_{k=1}^m P(x_{n,k})\Gamma_{n,k}.$$

(2) Las matrices $\Gamma_{n,k}$ son semidefinidas positivas de rango l_k , $k = 1, \dots, m$.

Teorema 1.0.5. Supongamos que W es determinada. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^{-1}(z)Q_n(z) = \int \frac{dW(t)}{z - t}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma,$$

y la convergencia es uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, donde Γ viene dado por (1.0.6)

Consideremos ahora los ceros $\{x_{n,k}\}_{k=1}^{nN}$ del polinomio P_n (contando sus multiplicidades). Sea $(\sigma_n)_n$ la sucesión de medidas discretas dada por

$$(1.0.15) \quad \sigma_n = \frac{1}{nN} \sum_{k=1}^{nN} \delta_{x_{n,k}}, \quad n \geq 0,$$

y $(\mu_n)_n$ la sucesión de medidas matriciales discretas dada por

$$(1.0.16) \quad \mu_n = \frac{1}{nN} \sum_{k=1}^{nN} \left(\sum_{i=0}^{n-1} P_i(x_{n,k}) \Gamma_{n,k} P_i^*(x_{n,k}) \right) \delta_{x_{n,k}}, \quad n \geq 0,$$

donde $\Gamma_{n,k}$, $k = 1, \dots, nN$, son los coeficientes de la fórmula de cuadratura cuyos nodos son los ceros de P_n (ver (1.0.13)). Se tienen entonces los siguientes resultados demostrados en [DLS] sobre el comportamiento asintótico de los ceros de los polinomios matriciales ortogonales:

Lema 1.0.6. Sean $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales verificando la relación de recurrencia de tres términos (1.0.1). Supongamos que $\lim_n A_n = A$ y $\lim_n B_n = B$. Entonces, existe una matriz de medidas definida positiva μ tal que la sucesión de medidas discretas dada por (1.0.15) y la sucesión de matrices de medidas discretas dada por (1.0.16) tienen el siguiente comportamiento asintótico:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \text{tr}(\mu).$$

Lema 1.0.7. Sean $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales verificando la relación de recurrencia de tres términos (1.0.1). Supongamos que $\lim_n A_n = A$ y $\lim_n B_n = B$, con A hermítica y no singular. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \frac{1}{N} X_{A,B},$$

donde $X_{A,B}$ es la matriz peso para los polinomios de Chebyshev de primera especie definidos por (1.0.18).

También nos serán de utilidad los dos lemas siguientes que son resultados generales sobre polinomios matriciales y que se demuestran en [DL1] y en [D3] respectivamente:

Lema 1.0.8. Sea $A(t)$ un polinomio matricial de dimensión $N \times N$ y sea a un cero de $A(t)$. Si $\dim(R(a, A)) = p$, entonces

$$(\text{Adj}(A(t)))^l(a) = \theta, \quad \text{para } l = 0, \dots, p-2,$$

y a es un cero de $A(t)$ de multiplicidad al menos p .

Lema 1.0.9. Sea $A(t)$ un polinomio matricial de dimensión $N \times N$ y sea a un cero de $A(t)$ de multiplicidad p , es decir, un cero de multiplicidad p del polinomio escalar $\det(A(t))$. Sea

$$L(a, A) = \{v \in \mathbb{C}^N : v^* A(a) = \theta\}, \quad R(a, A) = \{v \in \mathbb{C}^N : A(a)v = \theta\}.$$

Si $\dim(L(a, A)) = \dim(R(a, A)) = p$, entonces $(\text{Adj}(A(t)))^l(a) = \theta$, para $l = 0, \dots, p-2$ y $(\text{Adj}(A(t)))^{(p-1)}(a) \neq \theta$. Además, $\text{rg}(\text{Adj}(A(t)))^{(p-1)}(a) = p$, y la matriz

$$(\text{Adj}(A(t)))^{(p-1)}(a)$$

define una aplicación lineal de \mathbb{C}^N en $L(a, A)$, que es un isomorfismo de $R(a, A)$ en $L(a, A)$.

Para la acotación de ciertas integrales, usaremos el siguiente teorema de Fejer sobre la traza de matrices semidefinidas positivas:

Teorema 1.0.10. Sea $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^N$. Entonces, A es semidefinida positiva si y solo si

$$\sum_{i,j=1}^N a_{i,j} b_{i,j} \geq 0$$

para cualquier matriz semidefinida positiva $B = (b_{i,j})_{i,j=1}^N$.

Asimismo utilizaremos los siguientes resultados generales de análisis funcional: el teorema de Stieltjes-Vitali que usaremos para estudiar la convergencia uniforme en compactos de ciertas asintóticas y el método de los momentos que emplearemos para estudiar la convergencia de medidas, donde la noción de convergencia de medidas (o matrices de medidas) que usamos en la memoria es la convergencia débil usual: una sucesión de medidas $(\mu_n)_n$ (o matrices de medidas) en un espacio métrico X converge débilmente a μ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(t) d\mu_n(t) = \int f(t) d\mu(t),$$

para cualquier función continua y acotada $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ ($f : X \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$ respectivamente).

Teorema 1.0.11. *Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones analíticas cada una regular en una región abierta G del plano complejo, y sea E un subconjunto de G con puntos límite en G . Si $(f_n)_n$ es uniformemente acotada sobre G y converge en E , entonces $(f_n)_n$ converge uniformemente sobre G .*

Teorema 1.0.12. *Supongamos que μ_n y μ son medidas de probabilidad sobre \mathbb{R} , que tienen momentos de cualquier orden y que μ es determinada. Si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int t^k d\mu_n(t) = \int t^k d\mu(t), \quad k = 0, 1, \dots$$

entonces $\mu_n \rightarrow \mu$ débilmente.

Para concluir los preliminares, vamos a definir la clase de Nevai matricial $M(A, B)$ y a enunciar algunos resultados para polinomios matriciales pertenecientes a dicha clase.

Dadas dos matrices A y B (B hermítica), decimos que una sucesión de polinomios matriciales ortonormales $(P_n)_n$ satisfaciendo una fórmula de recurrencia como la dada por (1.0.1) pertenece a la *clase de Nevai matricial* $M(A, B)$ si $\lim_n A_n = A$, $\lim_n B_n = B$. Decimos que una matriz de medidas definida positiva W pertenece a la clase de Nevai $M(A, B)$ si alguna de sus sucesiones de polinomios ortonormales están en $M(A, B)$. Observemos que una matriz de medidas definida positiva W puede pertenecer a distintas clases de Nevai, ya que la sucesión de polinomios matriciales respecto de W no es única.

Asociamos a la clase de Nevai matricial $M(A, B)$ dos sucesiones de polinomios matriciales ortonormales dependiendo de la estructura de la matriz A . Cuando A no es singular, le asociamos los polinomios matriciales ortonormales $(U_n^{A,B})_n$ definidos por la siguiente fórmula de recurrencia:

$$(1.0.17) \quad tU_n^{A,B}(t) = A^*U_{n+1}^{A,B}(t) + BU_n^{A,B}(t) + AU_{n-1}^{A,B}(t), \quad n \geq 0,$$

con condiciones iniciales $U_0^{A,B}(t) = Id_N$, $U_{-1}^{A,B}(t) = \theta$. Esta sucesión es ortonormal respecto a una matriz de medidas definida positiva que denotaremos $W_{A,B}$, y son el caso matricial análogo a los polinomios de Chebyshev de segunda especie. Notemos que de la condición inicial $U_0^{A,B}(t) = I$ se sigue que $\int dW_{A,B}(t) = Id_N$. La matriz de medidas $W_{A,B}$ jugará un papel

importante en el comportamiento asintótico de las funciones matriciales de Christoffel que se estudiarán en el capítulo 3 de esta memoria.

Cuando la matriz A es hermítica y no singular, asociaremos a $M(A, B)$ los polinomios matriciales ortonormales $(T_n^{A,B})_n$ definidos por la siguiente fórmula de recurrencia:

$$(1.0.18) \quad \begin{cases} tT_0^{A,B}(t) &= \sqrt{2}AT_1^{A,B}(t) + BT_0^{A,B}(t) \\ tT_1^{A,B}(t) &= AT_2^{A,B}(t) + BT_1^{A,B}(t) + \sqrt{2}AT_0^{A,B}(t) \\ tT_n^{A,B}(t) &= AT_{n+1}^{A,B}(t) + BT_n^{A,B}(t) + AT_{n-1}^{A,B}(t), \quad n \geq 2, \end{cases}$$

con condición inicial $T_0^{A,B}(t) = Id_N$. Esta sucesión es ortonormal respecto a la matriz de medidas definida positiva que denotaremos por $X_{A,B}$, y son el caso matricial análogo a los polinomios de Chebyshev de primera especie. De la condición inicial se sigue que $\int dX_{A,B} = Id_N$.

Éstos polinomios juegan un papel importante en el estudio de las propiedades asintóticas como muestra el siguiente lema de [DDA] que también nos será de utilidad en la memoria.

Lema 1.0.13. *Si la sucesión de polinomios matriciales $(P_n)_n$ pertenece a la clase de Nevai $M(A, B)$, con A no singular y B hermítica, entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int F(x)P_n(x)dW(x)P_n^*(x) = \int F(x)dX_{A,B},$$

para cualquier función F matricial continua, donde $X_{A,B}$ es la matriz peso de los polinomios de Chebyshev de primera especie (ver (1.0.18)). Si además la matriz A es definida positiva entonces, para cualquier entero $k \geq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int F(x)P_{n+k}(x)dW(x)P_n^*(x) = \int F(x)T_k^{A,B}(x)dX_{A,B},$$

para cualquier función matricial F continua, donde $T_k^{A,B}$ es el k -ésimo polinomio de Chebyshev de primera especie.

En el artículo de Antonio Durán [D4] se demuestra que si $(P_n)_n$ es una sucesión de polinomios matriciales ortonormales en la clase de Nevai $M(A, B)$, entonces

$$(1.0.19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{n-1}(z)P_n^{-1}(z) = F_{A,B}(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma,$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, donde la función $F_{A,B}$ satisface la ecuación

$$A^* F_{A,B}(z) A F_{A,B}(z) + (B - z Id_N) F_{A,B}(z) + Id_N = \theta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma.$$

Si la matriz A no es singular se demuestra en el citado artículo que $F_{A,B}(z) = \int \frac{1}{z-t} dW_{A,B}(t)$, donde $W_{A,B}$ es la matriz peso para los polinomios de Chebychev de segunda especie definidos por (1.0.17).

Capítulo 2

FÓRMULAS DE CUADRATURA MATRICIALES

En este capítulo realizaremos un estudio exhaustivo de las fórmulas de cuadratura matriciales. Una fórmula de cuadratura matricial con grado de precisión r para una matriz peso W consiste en encontrar números x_k , (reales o complejos) $k = 1, \dots, m$, llamados nodos, y matrices G_k , $k = 1, \dots, m$, llamados coeficientes de cuadratura tales que se verifique

$$\int P(t) dW(t) = \sum_{k=1}^m P(x_k) G_k$$

para cualquier polinomio $P \in \mathbb{P}_{N \times N}^r$, donde $\mathbb{P}_{N \times N}^r$ denota el espacio de los polinomios matriciales complejos de grado menor o igual que r (observemos que esto es equivalente a decir $\int P(t) dW(t) Q^*(t) = \sum_{k=1}^m P(x_k) G_k Q^*(x_k)$, para cualesquiera polinomios P, Q que verifiquen $\text{gr}(P) + \text{gr}(Q) \leq r$).

El grado de precisión de una fórmula de cuadratura matricial está condicionado por la suma de los rangos de sus coeficientes de cuadratura: en la sección 1 se da una cota superior en términos de la suma de estos rangos para el grado de los polinomios matriciales para el que es válida una fórmula de cuadratura. Se demuestra que para $N > 1$ no todas las fórmulas de cuadratura con el máximo grado de precisión son gaussianas, entendiendo como tales aquellas fórmulas de cuadratura válidas para el subespacio de

polinomios matriciales de máxima dimensión posible.

En la sección 2 de este capítulo se generan fórmulas de cuadratura de Gauss con nodos reales y se utilizan como punto de partida para generar fórmulas de cuadratura no gaussianas. Las primeras tienen interés por sí mismas y el interés de las segundas radica en su utilización para demostrar una importante propiedad extremal de las funciones matriciales de Christoffel que se estudian en el siguiente capítulo.

En la sección 3 se dan ejemplos numéricos de fórmulas de cuadratura de Gauss, mostrando que son fácilmente computables.

Se finaliza este capítulo con la sección 4 donde se estudia la forma general de las fórmulas de cuadratura gaussianas con nodos números complejos cualesquiera. Se demuestra también que cuando en una fórmula de cuadratura gaussiana los nodos son reales y los coeficientes de cuadratura son semidefinidos positivos entonces dicha fórmula corresponde con una de las fórmulas de cuadratura de Gauss encontradas en la sección 2.

2.1. Grado de precisión de una fórmula de cuadratura

Fijado un número entero no negativo l , consideremos una fórmula de cuadratura para una matriz peso W , con nodos en x_k , $k = 1, \dots, m$, y cuyos coeficientes de cuadratura matriciales G_k , $k = 1, \dots, m$, satisfacen

$$(2.1.1) \quad \sum_{k=1}^m \operatorname{rg}(G_k) = l.$$

Se demuestra en [DD] que fijado un número entero no negativo l , el grado de precisión r para una fórmula de cuadratura que verifique (2.1.1) satisface la desigualdad

$$([r/2] + 1)N \leq \sum_{k=1}^m \operatorname{rg}(G_k).$$

Por tanto, si escribimos $\sum_{k=1}^m \operatorname{rg}G_k = (n-1)N + h$, $0 \leq h \leq N-1$, se obtiene una acotación superior para el grado de precisión igual a $2n-3$.

En esta sección veremos que para $h = 0$, cualquier fórmula de cuadratura con el máximo grado de precisión $2n-3$ no es válida para ningún

polinomio matricial de grado $2n - 2$ excepto para $P = \theta$, pero cuando $0 < h \leq N - 1$ una fórmula de cuadratura con el máximo grado de precisión $2n - 3$ también puede seguir siendo válida para polinomios matriciales que pertenezcan a un cierto subespacio $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{P}_{N \times N}^{2n-2}$ tal que $\mathbb{P}_{N \times N}^{2n-3} \subseteq \mathcal{X}$ y $\mathbb{P}_{N \times N}^{2n-3}$ tiene codimensión a lo sumo hN en \mathcal{X} . Como es habitual, a las fórmulas de cuadratura que sigan siendo válidas en este espacio \mathcal{X} de dimensión máxima se les denominará fórmulas de cuadratura de Gauss. De esta manera, cuando $\sum_{k=1}^m \text{rg}(G_k) = (n - 1)N$, la fórmula de cuadratura es gaussiana si tiene el máximo grado de precisión (este es siempre el caso cuando $N = 1$, esto es, para medidas escalares).

Consideremos los siguientes espacios de polinomios matriciales

$$(2.1.2) \quad \mathcal{X} = \left\{ P : \text{gr}(P) \leq 2n - 2, \int P(t) dW(t) = \sum_{k=1}^m P(x_k)G_k \right\}$$

e

$$(2.1.3) \quad \mathcal{Y} = \left\{ P : \text{gr}(P) \leq n - 1, \int P(t) dW(t)Q^*(t) = \sum_{k=1}^m P(x_k)G_kQ^*(x_k) \right. \\ \left. \forall Q \in \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1} \right\}.$$

Si la fórmula de cuadratura tiene máximo grado de precisión $2n - 3$ entonces se puede escribir $\mathcal{X} \equiv X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{2n-3}$ e $\mathcal{Y} \equiv Y \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-2}$, con $X, Y \subseteq \mathbb{C}^{N \times N}$ y donde $P \in Z \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^r$ si $P(t) = R(t) + At^{r+1}$, $A \in Z \subseteq \mathbb{C}^{N \times N}$, $\text{gr}(R) \leq r$. El siguiente lema establece una acotación para la dimensión del conjunto de los polinomios matriciales de grado $2n - 2$ para los que son válidos la fórmula de cuadratura.

Lema 2.1.1. Sean $x_k, G_k, k = 1, \dots, m$, los pesos y nodos respectivamente de una fórmula de cuadratura tal que $\sum_{k=1}^m \text{rg}(G_k) = (n - 1)N + h$ y con máximo grado de precisión $2n - 3$. Sean \mathcal{X} y \mathcal{Y} los espacios definidos por (2.1.2) y (2.1.3) respectivamente, entonces:

1. $X = Y$.
2. $\dim(X) \leq hN$.

Demostración.

1.- Sea $P \in \mathcal{X}$, entonces podemos expresar $P(t) = R(t) + At^{2n-2}$, $A \in X$, $\text{gr}(R) \leq 2n - 3$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m P(x_k)G_k &= \int P(t)dW(t) = \int R(t)dW(t) + \int At^{2n-2}dW(t) \\ &= \sum_{k=1}^m R(x_k)G_k + \int At^{n-1}dW(t)t^{n-1} \end{aligned}$$

luego

$$\int At^{n-1}dW(t)t^{n-1} = \sum_{k=1}^m Ax_k^{n-1}G_kx_k^{n-1},$$

esto es, $At^{n-1} \in \mathcal{Y}$, ($Q(t) = t^{n-1}$), y por tanto, $A \in Y$.

Recíprocamente, sea $P \in \mathcal{Y}$, entonces podemos expresar $P(t) = R(t) + At^{n-1}$, $A \in Y$, $\text{gr}(R) \leq n - 2$. Sea $Q(t) = t^{n-1} + C(t)$, $\text{gr}(C) \leq n - 2$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m P(x_k)G_kQ^*(x_k) &= \int P(t)dW(t)Q^*(t) \\ &= \int R(t)dW(t)Q^*(t) + \int At^{n-1}dW(t)Q^*(t) \\ &= \sum_{k=1}^m R(x_k)G_kQ^*(x_k) + \int At^{2n-2}dW(t) + \int At^{n-1}dW(t)C^*(t); \end{aligned}$$

luego

$$\int At^{2n-2}dW(t) = \sum_{k=1}^m Ax_k^{2n-2}G_k,$$

esto es, $At^{2n-2} \in \mathcal{X}$, y por tanto, $A \in X$.

2.- Teniendo en cuenta que $X = Y$, basta probar que $\dim(Y) \leq hN$. En lo que sigue, dentro del espacio lineal $\underbrace{\mathbb{C}^{N \times N} \times \dots \times \mathbb{C}^{N \times N}}_m$, consideraremos

la siguiente relación de equivalencia

$$(A_1, \dots, A_m) \sim (B_1, \dots, B_m) \Leftrightarrow (A_k - B_k)G_k = \theta, \quad k = 1, \dots, m.$$

Definimos la siguiente aplicación lineal,

$$\begin{aligned} T : \mathcal{Y} &\longrightarrow \mathbb{C}^{N \times N} \times \dots \times \mathbb{C}^{N \times N} / \sim \\ P &\longrightarrow (P(x_1), \dots, P(x_m)), \end{aligned}$$

donde \mathcal{Y} es el subespacio lineal de polinomios matriciales definido en (2.1.3) y $\mathbb{C}^{N \times N} \times \dots \times \mathbb{C}^{N \times N} / \sim$ es el espacio vectorial cociente definido por la relación de equivalencia \sim en $\mathbb{C}^{N \times N} \times \dots \times \mathbb{C}^{N \times N}$.

Si demostramos que la aplicación T es inyectiva, tendremos que

$$\dim(\mathcal{Y}) \leq \dim(\mathbb{C}^{N \times N} \times \dots \times \mathbb{C}^{N \times N} / \sim) = N \sum_{k=1}^m \text{rg}(G_k) = (n-1)N^2 + hN.$$

Por otro lado, $\mathcal{Y} \equiv \mathbb{P}_{N \times N}^{n-2} \oplus Y$, luego

$$\dim(\mathcal{Y}) = (n-1)N^2 + \dim(Y),$$

de donde se deduce que $\dim(Y) \leq hN$.

Falta demostrar que la aplicación T es inyectiva.

Sea $P \in \mathcal{Y}$, $P \neq \theta$. Tenemos que probar que existe un k , $1 \leq k \leq m$, tal que $P(x_k)G_k \neq \theta$. Teniendo en cuenta que la sucesión de polinomios ortonormales $(P_k)_{k \leq n-1}$ forman una base del espacio lineal $\mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$, podemos escribir $P = \sum_{k=0}^{n-1} C_k P_k$, donde $(P_k)_k$ es la sucesión de polinomios matriciales ortonormales respecto a W . Como $P \neq \theta$, debe de existir al menos un k para el que $C_k \neq \theta$, luego

$$\int P(t) dW(t) P^*(t) = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_k^* \neq \theta.$$

Como $P \in \mathcal{Y}$, y es de grado menor o igual que $n-1$, podemos aplicar la fórmula de cuadratura obteniendo

$$\theta \neq \int P(t) dW(t) P^*(t) = \sum_{k=1}^m P(x_k) G_k P^*(x_k),$$

de lo que se deduce que existe un k , $1 \leq k \leq m$ tal que $P(x_k)G_k \neq \theta$. Esto demuestra que T es inyectiva. □

Completamos esta sección con un lema técnico que nos muestra la estructura del espacio lineal $X \subseteq \mathbb{C}^{N \times N}$ que aparece en (2.1.2). Dicha estructura juega un papel importante en la definición de las funciones matriciales de Christoffel que se estudian en el siguiente capítulo.

Lema 2.1.2. *Sea $X \subseteq \mathbb{C}^{N \times N}$ un ideal a la izquierda, esto es, un subespacio vectorial que verifica*

$$(2.1.4) \quad \text{si } A \in X \text{ y } B \in \mathbb{C}^{N \times N} \text{ entonces } BA \in X.$$

Entonces existen $m \in \mathbb{N}$ y una matriz $M_1 \in X$ tales que $\dim(X) = mN$ y $\text{rg}(M_1) = m$. Es más, para cualquier $M \in X$ con $\text{rg}(M) = m$ se tiene que

$$X = \{CM : C \in \mathbb{C}^{N \times N}\}.$$

Demostración.

Sea $H = \{u \in \mathbb{C}^N : u \text{ es un vector fila de alguna } A \in X\}$. Escribamos $m = \dim(H)$ y consideremos una matriz $C \in \mathbb{C}^{N \times N}$ con $\text{rg}(C) = (N - m)$ verificando que $uC = \theta$ si y sólo si $u \in H$. Consideremos la aplicación lineal C definida por la matriz C

$$C : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{N \times N} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{N \times N} \\ A & \longrightarrow & AC. \end{array}$$

Teniendo en cuenta la definición del espacio lineal H , la elección de la matriz C y la propiedad (2.1.4) de X (notemos que esta propiedad implica

que para $u \in H$, las matrices $\begin{pmatrix} u \\ \theta \\ \vdots \\ \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \theta \\ u \\ \vdots \\ \theta \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \\ \vdots \\ u \end{pmatrix}$ están en X) obtenemos

que $\text{Ker}(C) = X$, y por tanto

$$\dim(X) = \dim(\text{Ker}(C)) = N(N - \text{rank}(C)) = Nm.$$

Elegimos ahora una base u_1, \dots, u_m de H . Es fácil comprobar que la

matriz $M_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \\ \theta \\ \vdots \\ \theta \end{pmatrix}$ está en X , y claramente $\text{rg}(M_1) = m$.

Por último, si tomamos $M \in X$ de rango m , por la propiedad (2.1.4) tenemos que

$$\{CM : C \in \mathbb{C}^{N \times N}\} \subseteq X,$$

pero $\dim(\{CM : C \in \mathbb{C}^{N \times N}\}) = N \operatorname{rg}(M) = mN$; como además $\dim(X) = mN$, concluimos que

$$\{CM : C \in \mathbb{C}^{N \times N}\} = X.$$

□

Nota 2.1.3. *Bajo las hipótesis anteriores, teniendo en cuenta los lemas que acabamos de demostrar, la máxima dimensión del espacio X es hN , $0 \leq h < N$.*

Nota 2.1.4. *Dado un ideal a la izquierda $X \subset \mathbb{C}^{N \times N}$ de dimensión hN , existe una matriz M_0 no singular tal que puede escribirse*

$$(2.1.5) \quad X = \left\{ C \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} M_0 : C \in \mathbb{C}^{N \times N} \right\}.$$

Efectivamente, en la demostración del lema 2.1.2 hemos elegido m vectores linealmente independientes u_1, \dots, u_m , que forman una base de H . Ampliamos dicha base con vectores u_{m+1}, \dots, u_N de manera que los vectores

$\{u_i\}_{i=1}^N$ formen una base del espacio \mathbb{C}^N . Sea $M_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \\ u_{m+1} \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$. Se verifica

que M_0 no es singular, y se tiene que

$$M_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \\ \theta \\ \vdots \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} M_0.$$

Teniendo en cuenta el lema 2.1.2, el espacio X puede escribirse de la forma (2.1.5).

2.2. Fórmulas de cuadratura

Dado h , $0 \leq h \leq N - 1$, encontramos en esta sección fórmulas de cuadratura (gaussianas en la sección 2.2.1 y no gaussianas en la sección 2.2.2) cuyos coeficientes de cuadratura G_k , $k = 1, \dots, m$, satisfacen

$$(2.2.1) \quad \sum_{k=1}^m \operatorname{rg}(G_k) = (n-1)N + h, \quad 0 \leq h \leq N - 1.$$

Fórmulas de cuadratura gaussianas tales que $\sum_{k=1}^m \operatorname{rg}G_k = (n-1)N$ (esto es, con grado de precisión $2n-3$) han sido estudiadas por varios autores (ver [BB], [SV], [DL1] y [D3]): todas estas fórmulas tienen sus nodos en los ceros de P_{n-1} (el polinomio matricial ortonormal $(n-1)$ -ésimo respecto a W) pero los autores utilizan diferentes métodos para hallar dichas fórmulas. Sólo en [D3], se obtiene una expresión explícita para los coeficientes de cuadratura (ver teorema 1.0.4 de los preliminares). También en [D3] se muestran fórmulas de cuadratura con grado de precisión $2n-4$ cuyos nodos son los ceros de $P_{n-1} - AP_{n-2}$ con A una matriz dada tal que $A_{n-1}A = A^*A_{n-1}^*$ (A_{n-1} es el coeficiente matricial en la relación de recurrencia de tres términos de $(P_n)_n$, ver (1.0.1)); recíprocamente, se demuestra en [DD] que cualquier fórmula de cuadratura donde $\sum_{k=1}^m \operatorname{rank}(G_k) = (n-1)N$ y con grado de precisión $2n-4$ tiene dicha forma, teniendo grado de precisión $2n-3$ (el mayor posible) sólo en el caso $A = \theta$.

Nuestra aportación en esta memoria es por tanto el estudio exhaustivo del caso $0 < h \leq N - 1$. En lo que sigue h será un número fijado entre 0 y $N - 1$.

A partir de ahora, si A es una matriz de dimensión $N \times N$, la dividiremos por bloques de la siguiente manera:

$$(2.2.2) \quad A = \begin{pmatrix} [A]_{1,1} & [A]_{1,2} \\ [A]_{2,1} & [A]_{2,2} \end{pmatrix},$$

donde

$$[A]_{1,1} \in \mathbb{C}^{h \times h}, \quad [A]_{1,2} \in \mathbb{C}^{h \times (N-h)},$$

$$[A]_{2,1} \in \mathbb{C}^{(N-h) \times h}, \quad [A]_{2,2} \in \mathbb{C}^{(N-h) \times (N-h)}.$$

2.2.1. Fórmulas de cuadratura gaussianas

En las fórmulas de cuadratura gaussianas verificando (2.2.1) que vamos a generar, los coeficientes de cuadratura serán semidefinidos positivos y los nodos serán reales y corresponderán con los ceros de un polinomio matricial con coeficiente líder singular, que es combinación matricial de dos polinomios consecutivos de la sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a W .

En la sección 4 veremos que estos ejemplos son todos los posibles, esto es, cualquier fórmula de cuadratura de Gauss con coeficientes de cuadratura semidefinidos positivos y nodos reales, tiene como nodos los ceros de cierto polinomio matricial y la expresión de los coeficientes matriciales de cuadratura es análoga a la de los ejemplos que veremos en esta sección.

Este polinomio matricial cuyos ceros nos darán los nodos de la fórmula de cuadratura gaussiana se define como sigue. Para una matriz $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ tal que $[A_n A]_{1,1} = [A^* A_n^*]_{1,1}$ (ver 2.2.2) definimos el polinomio matricial

$$(2.2.3) \quad \begin{aligned} P_{h,A}(t) = & \begin{pmatrix} [A_n]_{1,1} & [A_n]_{1,2} \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_n(t) \\ & + \begin{pmatrix} -[A_n A]_{1,1} & [B_{n-1}]_{1,2} \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} P_{n-1}(t). \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula de recurrencia de tres términos, encontramos la siguiente expresión para el polinomio matricial $P_{h,A}$

$$(2.2.4) \quad \begin{aligned} P_{h,A}(t) = & \begin{pmatrix} t Id_h - [B_{n-1} + A_n A]_{1,1} & \theta \\ \theta & Id_{N-h} \end{pmatrix} P_{n-1}(t) \\ & - \begin{pmatrix} [A_{n-1}^*]_{1,1} & [A_{n-1}^*]_{1,2} \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_{n-2}(t). \end{aligned}$$

Indistintamente utilizaremos ambas expresiones (2.2.3) y (2.2.4) de $P_{h,A}(t)$ según convenga.

Empezaremos estudiando los ceros del polinomio matricial $P_{h,A}$ que, como ya se ha comentado, serán los nodos de las fórmulas de cuadratura gaussianas.

Primeramente demostraremos que los ceros del polinomio matricial $P_{h,A}$ son reales. Para ello probaremos que son los autovalores de la siguiente perturbación de la matriz de Jacobi asociada a $(P_n)_n$ (ver (1.0.3)) truncada de dimensión $(n-1)N+h$:

(2.2.5)

$$J_{(n-1)N+h,A} = \begin{pmatrix} B_0 & A_1 & \dots & & \theta & & \theta \\ A_1^* & B_1 & \dots & & \theta & & \theta \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \theta & \theta & \dots & & B_{n-2} & & \begin{pmatrix} [A_{n-1}]_{1,1} \\ [A_{n-1}]_{2,1} \end{pmatrix} \\ \theta & \theta & \dots & ([A_{n-1}^*]_{1,1} & [A_{n-1}^*]_{1,2}) & & [B_{n-1} + A_n A]_{1,1} \end{pmatrix}.$$

Para $A = \theta$ el siguiente teorema es una extensión del resultado que establece que los ceros de P_{n-1} son los autovalores de la matriz de Jacobi truncada de dimensión $(n-1)N$ (ver lema 2.1 de [DL1] o lema 1.0.2 de los preliminares); aquí, para una truncación cualquiera en la matriz de Jacobi, encontramos un polinomio, que es combinación lineal de dos P_n consecutivos, y cuyos ceros son los autovalores de dicha truncación.

Teorema 2.2.1. *Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ tal que $[A_n A]_{1,1} = [A^* A_n^*]_{1,1}$, se verifica que los ceros del polinomio matricial $P_{h,A}(t)$ definido por (2.2.3) son los mismos que los del polinomio $\det(tId_{(n-1)N+h} - J_{(n-1)N+h,A})$ y con la misma multiplicidad. Dicha multiplicidad es igual a $N - \text{rg}(P_{h,A}(a))$.*

Demostración.

Sea a un autovalor de la matriz $J_{(n-1)N+h,A}$ dada por (2.2.5) y sea $v \in \mathbb{C}^{(n-1)N+h}$ un autovector ($v \neq \theta$) de dicha matriz correspondiente al autovalor a . Escribimos v como vector columna por bloques

$$(2.2.6) \quad v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

donde $v_i \in \mathbb{C}^N$, $i = 0, \dots, n-2$, $v_{n-1} \in \mathbb{C}^h$ y escribimos $v_i = \begin{pmatrix} v_i^1 \\ v_i^2 \\ \vdots \\ v_i^N \end{pmatrix}$,

$v_{n-1} = \begin{pmatrix} v_{n-1}^1 \\ v_{n-1}^2 \\ \vdots \\ v_{n-1}^h \end{pmatrix}$. La ecuación $J_{(n-1)N+h,A}v = av$ puede escribirse como sigue

$$(2.2.7) \quad \begin{aligned} B_0v_0 + A_1v_1 &= av_0, \\ A_1^*v_0 + B_1v_1 + A_2v_2 &= av_1, \\ &\vdots \\ A_{n-2}^*v_{n-3} + B_{n-2}v_{n-2} + \begin{pmatrix} [A_{n-1}]_{1,1} \\ [A_{n-1}]_{2,1} \end{pmatrix} v_{n-1} &= av_{n-2}, \\ ([A_{n-1}^*]_{1,1} \quad [A_{n-1}^*]_{1,2}) v_{n-2} + [B_{n-1} + A_nA]_{1,1}v_{n-1} &= av_{n-1}. \end{aligned}$$

De la relación de recurrencia de tres términos que verifican los polinomios matriciales P_n , y teniendo en cuenta que las matrices A_k son no singulares, de las $(n - 1)$ primeras ecuaciones obtenemos

$$(2.2.8) \quad \begin{aligned} v_1 &= P_1(a)v_0, \\ v_2 &= P_2(a)v_0, \\ &\vdots \\ v_{n-2} &= P_{n-2}(a)v_0, \\ \begin{pmatrix} Id_h \\ \theta \end{pmatrix} v_{n-1} &= P_{n-1}(a)v_0. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que $v_0 \neq \theta$ (en otro caso se tendría que $v = \theta$). De la última ecuación en (2.2.8) se obtiene que las últimas $N - h$ entradas del vector $P_{n-1}(a)v_0$ son nulas, y por tanto

$$(2.2.9) \quad \begin{pmatrix} aId_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_{n-1}(a)v_0 = \begin{pmatrix} aId_h & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} P_{n-1}(a)v_0.$$

Ahora bien, de la última igualdad en (2.2.7) podemos escribir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} [A_{n-1}^*]_{1,1} & [A_{n-1}^*]_{1,2} \\ \theta & \theta \end{pmatrix} v_{n-2} + \begin{pmatrix} [B_{n-1} + A_nA]_{1,1} & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id_h \\ \theta \end{pmatrix} v_{n-1} \\ = \begin{pmatrix} aId_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id_h \\ \theta \end{pmatrix} v_{n-1} \end{aligned}$$

y usando las igualdades (2.2.8) y (2.2.9) se obtiene

$$\left[\begin{pmatrix} aId_h - [B_{n-1} + A_n A]_{1,1} & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} P_{n-1}(a) \right. \\ \left. - \begin{pmatrix} [A_{n-1}^*]_{1,1} & [A_{n-1}^*]_{1,2} \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_{n-2}(a) \right] v_0 = \theta,$$

de lo que se deduce, según la expresión (2.2.4) del polinomio matricial $P_{h,A}(t)$, que el polinomio matricial $P_{h,A}(a)$ es singular, esto es, a es un cero de $P_{h,A}(t)$.

Si llamamos

$$R(a, P_{h,A}(t)) = \{v \in \mathbb{C}^N : P_{h,A}(a)v = \theta\},$$

entonces $v_0 \in R(a, P_{h,A}(t))$. Si V_a es el espacio de autovectores a la derecha de la matriz $J_{(n-1)N+h,A}$ para el autovalor a , entonces $W_a = \{v_0 : v \in V_a\}$ es un subespacio de \mathbb{C}^N de la misma dimensión que V_a , y $P_{h,A}(a)v_0 = \theta$ para $v_0 \in W_a$. Esto prueba que $W_a \subseteq R(a, P_{h,A}(t))$.

Recíprocamente, sea a un cero del polinomio matricial $P_{h,A}(t)$, hay que demostrar que a es un autovalor de la matriz $J_{(n-1)N+h,A}$.

Sea $v_0 \in \mathbb{C}^N$ tal que $P_{h,A}(a)v_0 = \theta$. Consideramos el siguiente vector $v \in \mathbb{C}^{(n-1)N+h}$, escrito como vector columna por bloques como en (2.2.6),

$$v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0(a)v_0 \\ \vdots \\ P_{n-2}(a)v_0 \\ (Id_h \quad \theta) P_{n-1}(a)v_0 \end{pmatrix}.$$

Para demostrar que el vector v es un autovector de $J_{(n-1)N+h,A}$ correspondiente al autovalor a hay que probar que se verifican las igualdades de (2.2.7), pero éstas se deducen sin más que aplicar la definición del vector v a la fórmula de recurrencia que verifican los polinomios matriciales P_n . Esto prueba que $W_a = R(a, P_{h,A}(t))$.

Como $W_a = R(a, P_{h,A}(t))$ y la $\dim(W_a) = \dim(V_a)$, se tiene que la dimensión de $R(a, P_{h,A}(t))$ es también la multiplicidad de a como autovalor de $J_{(n-1)N+h,A}$.

Del lema 3.2 de [DL1] (ver lema 1.0.8 en los preliminares) se deduce que a es un cero de $P_{h,A}(t)$ de multiplicidad al menos la multiplicidad de a como autovalor $J_{(n-1)N+h,A}$.

Los ceros de $P_{h,A}(t)$ son los ceros de $\det(P_{h,A}(t))$. El grado del determinante de cualquier polinomio matricial $R(t) = [r(t)_{ij}]_{i,j=1}^N$ de grado n con coeficiente líder R_n de rango h es siempre menor o igual que $(n - 1)N + h$. Efectivamente, existe una matriz no singular F tal que FR_n tiene sus $(N - h)$ últimas columnas iguales a cero. Entonces, el polinomio matricial $FR(t) = [s(t)_{ij}]_{i,j=1}^N$ satisface que $\text{gr}(\det((R(t)))) = \text{gr}(\det((FR(t))))$. Hallamos el determinante de $FR(t)$ por la fórmula dada en [HJ] p. 8, esto es

$$\det(FR(t)) = \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma \prod_{i=1}^N s(t)_{i\sigma(i)},$$

donde las sumas es en las perturbaciones σ del grupo simétrico $S(n)$. Para cualquier perturbación fijada, en el producto $s(t)_{1\sigma(1)}, s(t)_{2\sigma(2)}, \dots, s(t)_{N\sigma(N)}$ existen a lo sumo h elementos que tienen grado como mucho n , y los otros $(N - h)$ tienen grado menor o igual que $(n - 1)$. Por tanto, el grado de $\det((FR(t)))$ es menor o igual que $nh + (n - 1)(N - h) = (n - 1)N + h$.

Como $P_{h,A}(t)$ tiene grado n y el rango de su coeficiente líder es menor o igual que h (ver (2.2.3)), tenemos que

$$\text{gr}(\det P_{h,A}(t)) \leq (n - 1)N + h.$$

Por otro lado, la matriz $J_{(n-1)N+h,A}$ es una matriz de tamaño $(n - 1)N + h \times (n - 1)N + h$ y por tanto $\det(tId_{(n-1)N+h} - J_{(n-1)N+h,A})$ es un polinomio de grado justamente $(n - 1)N + h$.

Se deduce entonces que $\text{gr}(\det P_{h,A}(t)) = (n - 1)N + h$ y que los ceros del polinomio matricial $P_{h,A}(t)$ coinciden (y con la misma multiplicidad) que los del polinomio $\det(tId_{(n-1)N+h} - J_{(n-1)N+h,A})$.

De todo lo anterior, deducimos también que la matriz

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ P_1(a)v_0 \\ \vdots \\ (Id_h \quad \theta) P_{n-1}(a)v_0 \end{pmatrix}$$

define una biyección entre $R(a, P_{h,A}(t))$ y el subespacio de autovectores de la matriz $J_{(n-1)N+h,A}$ asociados al autovalor a . □

Para la demostración del teorema principal de esta sección, necesitamos verificar la siguiente propiedad: dado cualquier polinomio matricial $P(t)$ de

grado menor o igual que $(n - 1)$, siempre es posible la descomposición en fracciones simples del polinomio $P(t)P_{h,A}^{-1}(t)$.

De acuerdo con el teorema 2.2.1 que se acaba de demostrar, si a es un cero de $P_{h,A}$ entonces tiene multiplicidad igual a $N - \text{rg}(P_{h,A}(a))$, que es la dimensión del espacio $R(a, P_{h,A}(t))$.

Si denotamos por p a la multiplicidad de a , según el lema 2.2 de [D3] (ver lema 1.0.9 en los preliminares) se tiene que

$$(\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l)}(a) = \theta \text{ para } l = 0, \dots, p - 2.$$

Esto significa que a es un cero de multiplicidad al menos $p - 1$ de cada entrada de $\text{Adj}(P_{h,A}(t))$. Por tanto a es un cero de multiplicidad al menos $p - 1$ de cada entrada de $P(t)\text{Adj}(P_{h,A}(t))$ para cualquier polinomio matricial P . Por otro lado, de la estructura de $P_{h,A}(t)$ se deduce que el grado de cada entrada de las h primeras columnas de $\text{Adj}(P_{h,A}(t))$ es como máximo $(n - 1)N + h - n$, y cada entrada de sus $N - h$ últimas columnas es de grado a lo sumo $(n - 1)N + h - n + 1$. Se deduce entonces que si multiplicamos $\text{Adj}(P_{h,A}(t))$ a la izquierda por un polinomio matricial $P(t)$ de grado menor o igual que $n - 1$, las entradas de $P(t)\text{Adj}(P_{h,A}(t))$ tienen grado a lo sumo $(n - 1)N + h - 1$ para las h primeras columnas y $(n - 1)N + h$ para las entradas de las $N - h$ últimas columnas. Como $\det(P_{h,A}(t))$ es de grado $(n - 1)N + h$ podemos hacer la siguiente descomposición

(2.2.10)

$$P(t)P_{h,A}^{-1}(t) = \frac{1}{\det(P_{h,A}(t))} P(t)\text{Adj}(P_{h,A}(t)) = \sum_{k=1}^m C_k^{h,A} \frac{1}{t - x_k} + K,$$

donde K es una matriz constante cuyas h primeras columnas son nulas.

Ya estamos en condiciones de enunciar y demostrar el teorema principal de esta sección, donde se generan fórmulas de cuadratura de Gauss con nodos en los ceros del polinomio matricial $P_{h,A}(t)$.

Teorema 2.2.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un entero no negativo, y A una matriz de dimensión $N \times N$ que satisface $[A_n A]_{1,1} = [A^* A_n^*]_{1,1}$. Sean $x_k, k = 1, \dots, m$, los diferentes ceros del polinomio matricial $P_{h,A}(t)$ definido por (2.2.3) y sean $\Gamma_k^{h,A}$ las matrices definidas por*

$$(2.2.11) \quad \Gamma_k^{h,A} = \frac{l_k}{(\det(P_{h,A}(t)))^{(l_k)}(x_k)} (\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k) Q_{h,A}(x_k),$$

donde l_k es la multiplicidad de x_k ,

$$(2.2.12) \quad \begin{aligned} Q_{h,A}(t) &= \begin{pmatrix} [A_n]_{1,1} & [A_n]_{1,2} \\ \theta & \theta \end{pmatrix} Q_n(t) \\ &+ \begin{pmatrix} -[A_n A]_{1,1} & [B_{n-1}]_{1,2} \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} Q_{n-1}(t), \end{aligned}$$

y $(Q_n)_n$ es la sucesión de polinomios de segunda especie definida por (1.0.4).
Entonces

1. Existe un subespacio $X \subset \mathbb{C}^{N \times N}$ de dimensión hN tal que para cualquier polinomio matricial $P(t) = R(t) + Ct^{2n-2}$ con $gr(R) \leq 2n-3$ y $C \in X$, esto es, $P \in X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{2n-3}$, se verifica la fórmula de cuadratura

$$(2.2.13) \quad \int P(t) dW(t) = \sum_{k=1}^m P(x_k) \Gamma_k^{h,A}.$$

Es más, se tiene que

$$X = \{C \in \mathbb{C}^{N \times N} : \text{las últimas } (N-h) \text{ columnas de } C\Delta_{n-1}^{-1} \text{ son nulas}\}.$$

2. Las matrices $\Gamma_k^{h,A}$ son semidefinidas positivas de rango l_k , $k = 1, \dots, m$.
Por tanto, $\sum_{k=1}^m rg(\Gamma_k^{h,A}) = (n-1)N + h$.

Demostración.

(1).- Sea $P(t)$ un polinomio matricial de grado igual a $2n-2$ cuyo coeficiente líder B pertenece al espacio X . Veamos que la fórmula de cuadratura (2.2.13) es válida para el polinomio P .

Consideramos el polinomio matricial

$$(2.2.14) \quad \tilde{P}_{h,A}(t) = P_{h,A}(t) + \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & tId_{(N-h)} \end{pmatrix} P_{n-1}(t).$$

De la fórmula de recurrencia de tres términos para $(P_n)_n$ y de (2.2.3) se obtiene que el coeficiente líder de $\tilde{P}_{h,A}(t)$ es Δ_{n-1} (donde recordemos que Δ_{n-1} es el coeficiente líder de P_{n-1}), que no es singular. Así, dado el polinomio matricial P de grado $2n-2$ podemos escribir

$$(2.2.15) \quad P(t) = C(t)\tilde{P}_{h,A}(t) + R(t),$$

con $\text{gr}(C(t)) \leq n - 2$, $\text{gr}(R) \leq n - 1$.

De acuerdo con (2.2.10) podemos hacer la siguiente descomposición en fracciones simples

$$(2.2.16) \quad R(t)(P_{h,A}(t))^{-1} = \sum_{k=1}^m \frac{C_k^{h,A}}{t - x_k} + K,$$

donde K es una constante matricial cuyas h primeras columnas son nulas y las matrices $C_k^{h,A}$ vienen dadas por

$$(2.2.17) \quad C_k^{h,A} = \frac{R(x_k)}{(\det(P_{h,A}(t)))^{(l_k)}(x_k)} (\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k).$$

De la propiedad $(\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l)}(x_k) = \theta$, para $l = 0, \dots, l_k - 2$ (lema 2.2 de [D3] o teorema 1.0.9 en los preliminares) se puede deducir, derivando la fórmula

$$P_{h,A}(t)\text{Adj}(P_{h,A}(t)) = \text{Adj}(P_{h,A}(t))P_{h,A}(t) = \det(P_{h,A}(t))\text{Id}_N,$$

que se verifica

$$(2.2.18) \quad P_{h,A}(x_k)(\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k) = (\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k)P_{h,A}(x_k) = \theta.$$

De (2.2.18) y usando la expresión (2.2.3) del polinomio matricial $P_{h,A}(t)$ se obtiene que

$$(2.2.19) \quad \begin{aligned} & - \begin{pmatrix} [A_n]_{1,1} & [A_n]_{1,2} \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_n(x_k) (\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k) \\ & = \begin{pmatrix} -[A_n A]_{1,1} & [B_{n-1}]_{1,2} \\ \theta & \text{Id}_{(N-h)} \end{pmatrix} P_{n-1}(x_k) (\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k). \end{aligned}$$

De esta igualdad se deduce que las últimas $N - h$ filas de la matriz

$P_{n-1}(x_k)(\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k)$ son nulas. Por tanto

(2.2.20)

$$\begin{aligned} R(x_k)(\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k) &= P(x_k)(\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k) - C(x_k)\tilde{P}_{h,A}(x_k)(\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k) \\ &= P(x_k)(\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k) \\ &\quad - C(x_k) \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & tId_{(N-h)} \end{pmatrix} P_{n-1}(x_k)(\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k) \\ &= P(x_k)(\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k). \end{aligned}$$

Usando la propiedad (2.2.18), escribiendo $R(t) = (P_{h,A}(t))^{-1}P_{h,A}(t)$ y teniendo en cuenta la expresión de las matrices $C_k^{h,A}$, obtenemos la siguiente descomposición del polinomio $P(t)$

$$\begin{aligned} P(t) &= C(t)\tilde{P}_{h,A}(t) + \sum_{k=0}^m \frac{C_k^{h,A}}{t-x_k} P_{h,A}(t) + KP_{h,A}(t) \\ &= C(t)\tilde{P}_{h,A}(t) + \sum_{k=0}^m C_k^{h,A} \frac{P_{h,A}(t) - P_{h,A}(x_k)}{t-x_k} + KP_{h,A}(t). \end{aligned}$$

De la definición del polinomio $Q_{h,A}(t)$ se sigue que

$$\int P(t)dW(t) = \int C(t)\tilde{P}_{h,A}(t)dW(t) + \sum_{k=0}^m C_k^{h,A} Q_{h,A}(x_k) + \int KP_{h,A}(t)dW(t).$$

Por un lado, usando la ortonormalidad de la sucesión $(P_n)_n$ con respecto a la matriz de medidas W , se tiene

$$\begin{aligned} \int KP_{h,A}(t)dW(t) &= K \int \left[\begin{pmatrix} [A_n]_{1,1} & [A_n]_{1,2} \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_n(t) \right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} -[A_n A]_{1,1} & [B_{n-1}]_{1,2} \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} P_{n-1}(t) \right] dW(t) = \theta. \end{aligned}$$

Por otro lado, como $\text{gr}C(t) \leq n-2$, usando de nuevo la propiedad de ortonormalidad,

$$\begin{aligned} & \int C(t) \tilde{P}_{h,A}(t) dW(t) \\ &= \int C(t) P_{h,A}(t) dW(t) + \int C(t) \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & t Id_{(N-h)} \end{pmatrix} P_{n-1}(t) dW(t) \\ &= \int C(t) \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & t Id_{(N-h)} \end{pmatrix} P_{n-1}(t) dW(t). \end{aligned}$$

Ahora bien, el coeficiente líder B del polinomio $P(t)$ pertenece a X , esto es, las últimas $N - h$ columnas de $B\Delta_{n-1}^{-1}$ son cero. Si llamamos C al coeficiente líder de $C(t)$, de acuerdo con (2.2.15) y teniendo en cuenta que el coeficiente líder de $P_{h,A}$ es Δ_{n-1} , se verifica que

$$B = C\Delta_{n-1},$$

o lo que es lo mismo, $C = B\Delta_{n-1}^{-1}$, de donde se deduce que las últimas $N - h$ columnas de C son cero. Esto implica que

$$\text{gr} \left[C(t) \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & t Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \right] \leq n - 2,$$

y por tanto, $\int C(t) \tilde{P}_{h,A}(t) dW(t) = \theta$.

Tenemos entonces que

$$\int P(t) dW(t) = \sum_{k=0}^m C_k^{h,A} Q_{h,A}(x_k).$$

Finalmente, se concluye la demostración de la parte (1) del teorema 2.2.2 de la definición de las matrices $\Gamma_k^{h,A}$ (ver (2.2.11), (2.2.17) y (2.2.20)).

Para la demostración de (2) necesitamos algunas fórmulas y resultados preliminares:

Lema 2.2.3. *Si $t \in \mathbb{R}$, entonces*

(1)

$$(2.2.21) \quad Q_{h,A}(t) P_{n-1}^*(t) - P_{h,A}(t) Q_{n-1}^*(t) = \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix}.$$

(2)

(2.2.22)

$$\begin{aligned} P_{n-2}^*(t)A_{n-1} \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_{n-1}(t) - P_{n-1}^*(t) \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} A_{n-1}^* P_{n-2}(t) \\ = P_{n-1}^*(t)P_{h,A}(t) - P_{h,A}^*(t)P_{n-1}(t). \end{aligned}$$

(3)

(2.2.23)

$$\begin{aligned} A_{n-1}^* P_{n-2}(t)Q_{h,A}^*(t) + P_{h,A}(t)Q_{n-2}^*(t)A_{n-1} \\ = A_{n-1}^* Q_{n-2}(t)P_{h,A}^*(t) + Q_{h,A}(t)P_{n-2}^*(t)A_{n-1}. \end{aligned}$$

(4)

(2.2.24)

$$Q_{h,A}(t)P_{h,A}^*(t) = P_{h,A}(t)Q_{h,A}^*(t).$$

(5) Para cualquier cero x_k , $k = 0, \dots, m$, de $P_{h,A}$, y para cualquier $v \in L(x_k, P_{h,A}(t)) = \{v \in \mathbb{C}^N : v^* P_{h,A}(x_k) = \theta\}$, se tiene

(2.2.25)

$$v^* Q_{h,A}(x_k)P_{n-2}^*(x_k)A_{n-1} = v^* \begin{pmatrix} x_k Id_h - [B_{n-1} + A_n A]_{1,1} & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix}.$$

(6) Para cualquier cero x_k , $k = 0, \dots, m$, de $P_{h,A}$, la matriz $Q_{h,A}^*(x_k)$ define un isomorfismo de $L(x_k, P_{h,A}(t))$ en $R(x_k, P_{h,A}(t))$. Su aplicación inversa es el isomorfismo definido por la matriz

$$\begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} A_{n-1}^* P_{n-2}(x_k) + P_{n-1}(x_k).$$

Demostración.

(1).- Aplicando la fórmula de Liouville-Ostrogradski, y teniendo en

cuenta que $\forall n \in \mathbb{N} P_n(t)Q_n^*(t) = Q_n(t)P_n^*(t) \quad t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 & Q_{h,A}(t)P_{n-1}^*(t) \\
 &= \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} A_n Q_n(t)P_{n-1}^*(t) + \begin{pmatrix} -[A_n A]_{1,1} & [B_{n-1}]_{1,2} \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} Q_{n-1}(t)P_{n-1}^*(t) \\
 &= \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} A_n (A_n^{-1} + P_n(t)Q_{n-1}^*(t)) \\
 &\quad + \begin{pmatrix} -[A_n A]_{1,1} & [B_{n-1}]_{1,2} \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} P_{n-1}(t)Q_{n-1}^*(t) \\
 &= \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} A_n P_n(t)Q_{n-1}^*(t) \\
 &\quad + \begin{pmatrix} -[A_n A]_{1,1} & [B_{n-1}]_{1,2} \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} P_{n-1}(t)Q_{n-1}^*(t) \\
 &= \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} + P_{h,A}(t)Q_{n-1}^*(t).
 \end{aligned}$$

(2).-Teniendo en cuenta que la matriz $[B_{n-1} + A_n A]_{1,1}$ es hermítica, y que $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 & P_{n-1}^*(t)P_{h,A}(t) - P_{h,A}^*(t)P_{n-1}(t) \\
 &= P_{n-1}^*(t) \begin{pmatrix} tId_h - [B_{n-1} + A_n A]_{1,1} & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} P_{n-1}(t) \\
 &\quad - P_{n-1}^*(t) \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} A_{n-1}^* P_{n-2}(t) \\
 &\quad - P_{n-1}^*(t) \begin{pmatrix} tId_h - [B_{n-1} + A_n A]_{1,1} & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} P_{n-1}(t) \\
 &\quad + P_{n-2}^* A_{n-1} \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_{n-1}(t) \\
 &= P_{n-2}^*(t)A_{n-1} \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_{n-1}(t) - P_{n-1}^*(t) \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} A_{n-1}^* P_{n-2}(t).
 \end{aligned}$$

(3).- y (4).- Se obtienen sin más que desarrollar ambos miembros utilizando la expresión (2.2.4) de $P_{h,A}(t)$ y aplicar la fórmula de Liouville-Ostrogradski.

(5).- Fijemos $v \in L(x_k, P_{h,A}(t))$. Multiplicando la igualdad (2.2.23) a la izquierda por v^* , teniendo en cuenta que para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$P_n(t)Q_n^*(t) = Q_n(t)P_n^*(t)$ y utilizando la fórmula de Liouville-Ostrogradski, se tiene que la siguiente cadena de igualdades que prueban la propiedad (5):

$$\begin{aligned}
 & v^* Q_{h,A}(x_k) P_{n-2}^*(x_k) A_{n-1} \\
 &= v^* A_{n-1}^* P_{n-2}(x_k) Q_{h,A}^*(x_k) - v^* A_{n-1}^* Q_{n-2}(x_k) P_{h,A}^*(x_k) \\
 &= v^* A_{n-1}^* (P_{n-2}(x_k) Q_{h,A}^*(x_k) - Q_{n-2}(x_k) P_{h,A}^*(x_k)) \\
 &= v^* A_{n-1}^* \left[P_{n-2}(x_k) Q_{n-1}^*(x_k) \begin{pmatrix} x_k Id_h - [B_{n-1} + A_n A]_{1,1} & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \right. \\
 &\quad \left. - P_{n-2}(x_k) Q_{n-2}^*(x_k) A_{n-1} \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} + Q_{n-2}(t) P_{n-2}^*(x_k) A_{n-1} \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \right. \\
 &\quad \left. - Q_{n-2}(x_k) P_{n-1}^*(x_k) \begin{pmatrix} x_k Id_h - [B_{n-1} + A_n A]_{1,1} & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \right] \\
 &= v^* A_{n-1}^* (P_{n-2}(x_k) Q_{n-1}^*(x_k) - Q_{n-2}(x_k) P_{n-1}^*(x_k)) \cdot \\
 &\quad \cdot \begin{pmatrix} x_k Id_h - [B_{n-1} + A_n A]_{1,1} & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \\
 &= v^* A_{n-1}^* (A_{n-1}^*)^{-1} \begin{pmatrix} x_k Id_h - [B_{n-1} + A_n A]_{1,1} & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

(6).- Sea x_k un cero de $P_{h,A}(t)$. Consideremos la aplicación lineal definida por $Q_{h,A}^*(x_k)$

$$Q_{h,A}^*(x_k) : L(x_k, P_{h,A}(t)) \longrightarrow R(x_k, P_{h,A}(t)).$$

Primeramente, notemos que para todo $v \in L(x_k, P_{h,A}(t))$, teniendo en cuenta (2.2.24) y $v^* P_{h,A}(x_k) = P_{h,A}^*(x_k)v = \theta$ se deduce

$$P_{h,A} Q_{h,A}^*(x_k)v = Q_{h,A}(x_k) P_{h,A}^*(x_k)v = \theta,$$

y por tanto la aplicación está bien definida.

En segundo lugar, dado $v \in L(x_k, P_{h,A}(t))$, multiplicando en (2.2.21) a la izquierda por v^* se obtiene

$$(2.2.26) \quad v^* Q_{h,A}(x_k) P_{n-1}^*(x_k) = v^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix}.$$

Como $v \in L(x_k, P_{h,A}(t))$, por la propiedad (5), multiplicando la ecuación

(2.2.25) a la derecha por la matriz $\begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix}$ se tiene que

$$(2.2.27) \quad v^* Q_{h,A}(x_k) P_{n-2}^*(x_k) A_{n-1} \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} = v^* \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix}.$$

Sumando (2.2.26) y (2.2.27) concluimos que la aplicación es inyectiva, y dado que $\dim(R(x_k, P_{h,A}(t))) = \dim(L(x_k, P_{h,A}(t)))$, se deduce que la aplicación es un isomorfismo. De (2.2.26) y (2.2.27) se sigue que la aplicación inversa de dicho isomorfismo viene dado por la matriz

$$\begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} A_{n-1}^* P_{n-2}(x_k) + P_{n-1}(x_k).$$

□

Ya estamos en condiciones de demostrar la parte (2) del teorema 2.2.2. Lo haremos en tres pasos:

PASO 1 Las matrices $\Gamma_k^{h,A}$, $k = 1, \dots, m$, son hermiticas.

Efectivamente, por (2.2.24), la matriz $(P_{h,A}(t))^{-1} Q_{h,A}(t)$ es hermitica cuando $t \in \mathbb{R}$ no es un cero de $P_{h,A}$. El paso 1 se deduce inmediatamente de la descomposición

$$\sum_{k=0}^m \frac{\Gamma_k^{h,A}}{z - x_k} = (P_{h,A}(z))^{-1} Q_{h,A}(z).$$

PASO 2 $\text{rg}(\Gamma_k^{h,A}) = l_k$, $k = 1, \dots, m$.

Aplicando el lema 2.2 de [D3] (ver lema 1.0.9 en los preliminares) es fácil comprobar que $\text{rg}(\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k) = l_k$. Como los autovectores a la izquierda de $(\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k)$ asociados al autovalor 0 son los autovectores a la izquierda de $\Gamma_k^{h,A}$ asociados al 0 (ver (2.2.11)), será suficiente demostrar que los autovectores a la izquierda de $\Gamma_k^{h,A}$ asociados al 0 son autovectores a la izquierda de $(\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k)$ asociados al 0.

Supongamos por reducción al absurdo que existe un vector $v \in \mathbb{C}^N$ tal que $v^* \Gamma_k^{h,A} = \theta$ y $v^* (\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k) \neq \theta$. Escribimos $u^* = v^* (\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k) \neq \theta$.

De la propiedad $(\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k) P_{h,A}(x_k) = \theta$ (ver (2.2.18)) y de la definición de las matrices $\Gamma_k^{h,A}$ (ver (2.2.11)) se sigue que

$$(2.2.28) \quad u^* P_{h,A}(x_k) = \theta \quad u^* Q_{h,A}(x_k) = \theta.$$

Multiplicando en la ecuación (2.2.21) a la izquierda por u^* se obtiene

$$(2.2.29) \quad \theta = u^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta (2.2.28) y (2.2.29), de la definición de $P_{h,A}(t)$ y $Q_{h,A}(t)$ se deduce que

$$u^* P_{n-1}(x_k) = \theta \quad \text{y} \quad u^* Q_{n-1}(x_k) = \theta.$$

Multiplicando a la izquierda en la fórmula de Liouville-Ostrogradski

$$Q_{n-1}(x_k) P_{n-2}^*(x_k) A_{n-1} - P_{n-1}(x_k) Q_{n-2}^*(x_k) A_{n-1} = Id_N,$$

tendríamos que $u^* = \theta$, que contradice la suposición. Por tanto, el paso 2 está probado. \square

Consideramos ahora vectores v_1, \dots, v_{l_k} satisfaciendo las siguientes propiedades:

- v_i es un autovector a la izquierda de la matriz $\Gamma_k^{h,A}$ asociado al autovalor $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, \dots, l_k$.
- $v_i^* v_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, l_k$.

PASO 3 Las matrices $\Gamma_k^{h,A}$, $k = 1, \dots, m$ son semidefinidas positivas.

Para cada $i = 1, \dots, l_k$, consideramos $(v_i^* (\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k))^*$.

Se verifica que $(v_i^* (\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k))^* \in L(x_k, P_{h,A}(t))$ (ver

la propiedad (2.2.18)). Según el isomorfismo descrito en el lema 2.2.3 (6) existe $u \in R(x_k, P_{h,A}(t))$ tal que

$$(2.2.30) \quad u^* \left[P_{n-2}^*(x_k) A_{n-1} \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} + P_{n-1}^*(x_k) \right] \\ = v_i^* (\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k).$$

Como $Q_{h,A}(x_k)$ es la aplicación inversa de

$$P_{n-2}^*(x_k) A_{n-1} \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} + P_{n-1}^*(x_k),$$

podemos deducir, de (2.2.30) que

$$v_i^* (\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k) Q_{h,A}(x_k) = u^*.$$

Por tanto, de la definición de la matriz $\Gamma_k^{h,A}$ (ver (2.2.11)) se deduce que

$$\alpha_i v_i^* = v_i^* \Gamma_k^{h,A} = \frac{u^*}{(\det(P_{h,A}(t)))^{(l_k)}(x_k)}$$

y consecuentemente

$$(2.2.31) \quad u^* = \alpha_i (\det(P_{h,A}(t)))^{(l_k)}(x_k) v_i^*.$$

Sea $\beta_i = \alpha_i (\det(P_{h,A}(t)))^{(l_k)}(x_k) \neq 0$, entonces, $u^* = \beta_i v_i^*$. De aquí se deduce que, como $u \in R(x_k, P_{h,A}(t))$, entonces $v_i \in R(x_k, P_{h,A}(t))$.

Derivando l_k veces la fórmula $\text{Adj}(P_{h,A}(t)) P_{h,A}(t) = \det(P_{h,A}(t)) Id_N$ (ver (1.0.5) de los preliminares) teniendo en cuenta la propiedad (2.2.18)) y según el lema 2.2 de [D3] (ver lema 1.0.9 de los preliminares), nos queda la ecuación

$$(\det(P_{h,A}(t)))^{(l_k)}(x_k) Id_N \\ = (\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k)}(x_k) P_{h,A}(x_k) + (\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k) P'_{h,A}(x_k).$$

Multiplicando la ecuación anterior por v_i^* a la izquierda y por v_i a la derecha, teniendo en cuenta que $v_i \in R(x_k, P_{h,A}(t))$, obtenemos

(2.2.32)

$$\begin{aligned} (\det(P_{h,A}(t)))^{(l_k)}(x_k) &= v_i^* (\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k) P'_{h,A}(x_k) v_i \\ &= \beta_i v_i^* \left[P_{n-2}^*(x_k) A_{n-1} \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} + P_{n-1}^*(x_k) \right] P'_{h,A}(x_k) v_i, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado (2.2.30).

De la expresión de $P_{h,A}(t)$ dada por (2.2.4) obtenemos que $P'_{h,A}(x_k)$ viene dada por

$$\begin{aligned} P'_{h,A}(x_k) &= \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_{n-1}(x_k) + \begin{pmatrix} x_k Id_h - [B_{n-1} + A_n A]_{1,1} & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \\ &\quad \times P'_{n-1}(x_k) + \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} A_{n-1}^* P'_{n-2}(x_k). \end{aligned}$$

Por otro lado, de la estructura del polinomio matricial $P_{h,A}$ vemos que

$$\begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_{h,A}(t) = P_{h,A}(t) - \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} P_{n-1}(t)$$

y por tanto, como $v_i \in R(x_k, P_{h,A}(t))$ tenemos

$$(2.2.33) \quad \beta_i v_i^* P_{n-1}^*(x_k) \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} = \beta_i v_i^* P_{n-1}^*(x_k).$$

Teniendo en cuenta lo anterior y (2.2.32), podemos escribir

$$\begin{aligned} (\det(P_{h,A}(t)))^{(l_k)}(x_k) &= \beta_i v_i^* \left[P_{n-2}^*(x_k) A_{n-1} \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} P'_{n-1}(x_k) + P_{n-1}^*(x_k) P_{n-1}(x_k) \right. \\ &\quad + P_{n-1}^*(x_k) \begin{pmatrix} x_k Id_h - [B_{n-1} + A_n A]_{1,1} & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} P'_{n-1}(x_k) \\ &\quad \left. - P_{n-1}^*(x_k) \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} A_{n-1}^* P'_{n-2}(x_k) \right] v_i. \end{aligned}$$

Por (2.2.33), el último término de la ecuación anterior es igual a

$$\beta_i v_i^* P_{n-1}^*(x_k) A_{n-1}^* P'_{n-2}(x_k) v_i,$$

y así, por la fórmula de Christoffel-Darboux (lema 2.1 de [D3] o fórmula (1.0.9)) y teniendo en cuenta (2.2.33), vemos que

$$\begin{aligned}
 & \det(P_{h,A}(t))^{(l_k)}(x_k) \\
 &= \beta_i v_i^* \left[P_{n-2}^*(x_k) A_{n-1} \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} P'_{n-1}(x_k) \right. \\
 & \quad + P_{n-1}^*(x_k) \begin{pmatrix} x_k Id_h - [B_{n-1} + A_n A]_{1,1} & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} P'_{n-1}(x_k) \\
 & \quad \left. + \sum_{j=0}^{n-1} P_j^*(x_k) P_j(x_k) - P_{n-2}^*(x_k) A_{n-1} P'_{n-1}(x_k) \right] v_i \\
 &= \beta_i v_i^* \sum_{j=0}^{n-1} P_j^*(x_k) P_j(x_k) v_i + \beta_i v_i^* \left[P_{n-2}^* A_{n-1} \begin{pmatrix} -Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \right. \\
 & \quad \left. + P_{n-1}^*(x_k) \begin{pmatrix} x_k Id_h - [B_{n-1} + A_n A]_{1,1} & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \right] P'_{n-1}(x_k) v_i \\
 &= \beta_i v_i^* \sum_{j=0}^{n-1} P_j^*(x_k) P_j(x_k) v_i.
 \end{aligned}$$

Donde la última igualdad es consecuencia de la expresión de $P_{h,A}$ dada en (2.2.4) y de que $v_i \in R(x_k, P_{h,A}(t))$.

De aquí, teniendo en cuenta (2.2.31) finalmente deducimos

$$\begin{aligned}
 \alpha_i = \alpha_i v_i^* v_i &= \frac{u^* v_i}{(\det(P_{h,A}(t)))^{(l_k)}(x_k)} \\
 &= \frac{\beta_i v_i^* v_i}{\beta_i v_i^* \sum_{j=0}^{n-1} P_j^*(x_k) P_j(x_k) v_i} \\
 &= \frac{1}{v_i^* \sum_{m=0}^{n-1} P_j^*(x_k) P_j(x_k) v_i} > 0.
 \end{aligned}$$

Por tanto, hemos demostrado que los autovalores α_i que no son nulos de la matriz $\Gamma_k^{h,A}$ son positivos, luego $\Gamma_k^{h,A}$ son semidefinidas positivas, con lo que queda demostrado el paso 3, y se concluye la demostración del teorema.

□

2.2.2. Fórmulas de cuadratura no gaussianas

En esta sección se considerarán fórmulas de cuadratura que son perturbaciones de las fórmulas de cuadratura de Gauss. Es importante reseñar que para la obtención de éstas, no se sigue la misma técnica usada en la demostración del teorema de las fórmulas de cuadratura gaussianas, método usado en el caso escalar; en este caso obtendremos las fórmulas de cuadratura perturbando adecuadamente la matriz de Jacobi y escogiendo fórmulas de cuadratura gaussianas asociadas a la nueva matriz de Jacobi.

Como se dijo anteriormente, estas fórmulas de cuadratura no gaussianas jugarán un papel importante en la demostración de una notable propiedad extremal de las funciones matriciales de Christoffel que se estudiarán en el siguiente capítulo. Concretamente, el interés de estas fórmulas de cuadratura radica en que para cualquier $x \in \mathbb{R}$, excepto para un número finito, podemos conseguir que uno de los nodos de la fórmula de cuadratura sea precisamente el punto x dado. Daremos una expresión explícita en función de los primeros n polinomios matriciales ortonormales del correspondiente coeficiente de cuadratura y veremos que éste tiene rango máximo N .

Nota 2.2.4. Recordemos que según la nota 2.1.4, cualquier ideal a la izquierda $X \subset \mathbb{C}^{N \times N}$ tiene necesariamente dimensión hN , $0 \leq h < N$, y puede escribirse siempre de la forma

$$(2.2.34) \quad X = \left\{ C \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} M_0 : C \in \mathbb{C}^{N \times N} \right\},$$

con M_0 nonsingular (ver (2.1.5)).

A cada ideal a la izquierda X le podemos asociar una matriz unitaria U_X que verifique que la matriz $U_X \Delta_n M_0^{-1}$ sea triangular inferior (la cual siempre existe: factorizando la matriz $M_0 \Delta_n^{-1}$ mediante la conocida factorización LU (ver [HJ, pp. 114]) y teniendo en cuenta que la inversa de una matriz triangular inferior es triangular inferior).

El teorema principal de esta sección es el siguiente

Teorema 2.2.5. Sean W , $(P_n)_n$ y $X \subset \mathbb{C}^{N \times N}$ una matriz peso, una sucesión de polinomios ortonormales con respecto a W y un ideal a la izquierda de dimensión hN , respectivamente. Sea

$$A = \{ \text{ceros de } P_{n-1}(t) \} \cup \{ \text{ceros de } [U_X P_n(t) P_{n-1}^{-1}(t) (A_n^*)^{-1} U_X^*]_{1,1} \},$$

donde U_X es la matriz unitaria asociada a X (ver nota 2.2.4). Entonces, \mathcal{A} es un conjunto finito de a lo sumo $(n-1)N + h$ números reales y para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$ existen números reales x_k y matrices semidefinidas positivas Γ_k , $k = 1, \dots, m \leq nN + h$, tales que

1. Para cualesquiera polinomios matriciales $P, Q \in X \oplus \mathbb{P}_{n-1}^{N \times N}$, se verifica la siguiente fórmula de cuadratura

$$\int P(t) dW(t) Q^*(t) = \sum_{k=1}^m P(x_k) \Gamma_k Q^*(x_k);$$

2. Para cierto k_0 , $1 \leq k_0 \leq m$, $x_{k_0} = x$ y

$$\Gamma_{k_0} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} P_k(z)^* P_k(z) + P_n(z)^* U_X^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} U_X P_n(z) \right)^{-1}.$$

Demostración.

Demostremos primero que

$$\mathcal{A} = \{\text{ceros de } P_{n-1}(t)\} \cup \{\text{ceros de } [U_X P_n(t) P_{n-1}^{-1}(t) (A_n^*)^{-1} U_X^*]_{1,1}\}$$

es un conjunto finito de a lo sumo $(n-1)N + h$ números reales.

Notemos primero que \mathcal{A} es el conjunto de los ceros del polinomio escalar

$$(2.2.35) \quad \det(P_{n-1}(t)) \det([U_X P_n(t) P_{n-1}^{-1}(t) (A_n^*)^{-1} U_X^*]_{1,1}).$$

Consideramos el polinomio matricial

$$(2.2.36) \quad \det(P_{n-1}(t)) [U_X P_n(t) P_{n-1}^{-1}(t) (A_n^*)^{-1} U_X^*]_{1,1}.$$

Este polinomio es el bloque entrada (1, 1) del polinomio matricial

$$(2.2.37) \quad \det(P_{n-1}(t)) U_X P_n(t) P_{n-1}^{-1}(t) (A_n^*)^{-1} U_X^* = U_X P_n(t) \text{Adj}(P_{n-1}(t)) (A_n^*)^{-1} U_X^*.$$

Teniendo en cuenta que si una matriz no singular C es el coeficiente líder de un polinomio matricial $P(t)$ entonces el coeficiente líder de $\text{Adj}P(t)$ es $\det(C)C^{-1}$, obtenemos que el coeficiente líder del polinomio matricial

(2.2.37) es la matriz $\det(\Delta_{n-1})U_X\Delta_n\Delta_{n-1}^{-1}(A_n^*)^{-1}U_X^*$. Por la fórmula de recurrencia de tres términos (1.0.1) se tiene que $\Delta_{n-1} = A_n\Delta_n$, de donde se sigue que el coeficiente líder de (2.2.37) es $\det(\Delta_{n-1})U_XA_n^{-1}(A_n^*)^{-1}U_X^*$. Por tanto

$$(2.2.38) \quad \begin{aligned} & \det(P_{n-1}(t))U_XP_n(t)P_{n-1}^{-1}(t)(A_n^*)^{-1}U_X^* \\ & = \det(\Delta_{n-1})U_XA_n^{-1}(A_n^*)^{-1}U_X^*t^{(n-1)N+1} + \text{términos de menor grado.} \end{aligned}$$

Entonces,

$$(2.2.39) \quad \begin{aligned} & [\det(P_{n-1}(t))U_XP_n(t)P_{n-1}^{-1}(t)(A_n^*)^{-1}U_X^*]_{1,1} \\ & = \det(\Delta_{n-1})[U_XA_n^{-1}(A_n^*)^{-1}U_X^*]_{1,1}t^{(n-1)N+1} + \text{términos de menor grado.} \end{aligned}$$

Como la matriz $U_XA_n^{-1}(A_n^*)^{-1}U_X^*$ es definida positiva, se verifica que la matriz $[U_XA_n^{-1}(A_n^*)^{-1}U_X^*]_{1,1}$ también lo es y por tanto, el polinomio escalar $\det([\det(P_{n-1}(t))U_XP_n(t)P_{n-1}^{-1}(t)(A_n^*)^{-1}U_X^*]_{1,1})$ es de grado $h((n-1)N+1)$, ya que

$$(2.2.40) \quad \begin{aligned} & \det([\det(P_{n-1}(t))U_XP_n(t)P_{n-1}^{-1}(t)(A_n^*)^{-1}U_X^*]_{1,1}) \\ & = \det(\Delta_{n-1})\det([U_XA_n^{-1}(A_n^*)^{-1}U_X^*]_{1,1})t^{h((n-1)N+1)} \\ & \quad + \text{términos de menor grado.} \end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} & \det([\det(P_{n-1}(t))U_XP_n(t)P_{n-1}^{-1}(t)(A_n^*)^{-1}U_X^*]_{1,1}) \\ & = (\det(P_{n-1}(t)))^h \det([U_XP_n(t)P_{n-1}^{-1}(t)(A_n^*)^{-1}U_X^*]_{1,1}), \end{aligned}$$

y que el polinomio P_{n-1} tiene $(n-1)N$ ceros (ver teorema 1.1 de [DL1] o lema 1.0.1 de los preliminares) se deduce que (2.2.35) es un conjunto finito de la lo sumo $(n-1)N+h$ números.

Son números reales porque la matriz $P_n(t)P_{n-1}^{-1}(t)(A_n^*)^{-1}$ es hermítica para $t \in \mathbb{R}$ y por tanto, la matriz

$$\det(P_{n-1}(t))[U_XP_n(t)P_{n-1}^{-1}(t)(A_n^*)^{-1}U_X^*]_{1,1}$$

también lo es, de lo que se deduce que sus ceros son reales.

Demostremos ahora la parte (1).- del teorema 2.2.5.

Escribimos el ideal a la izquierda X como en (2.1.5)

$$X = \left\{ C \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} M_0 : C \in \mathbb{C}^{N \times N} \right\},$$

con M_0 no singular y elegimos la matriz unitaria U_X tal que $U_X \Delta_n M_0^{-1}$ es triangular inferior. De ahora en adelante, x denotará un número real $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$.

Si $(A_n)_n$ y $(B_n)_n$ son los coeficientes de recurrencia de $(P_n)_n$, sea $(\tilde{P}_n)_n$ la sucesión de polinomios matriciales ortonormales que verifican una fórmula de recurrencia de tres términos con los siguientes coeficientes de recurrencia

$$\begin{aligned} \tilde{A}_k &= U_X A_k U_X^*, & k = 0, \dots, n-1, \text{ ó } k \geq n+1 \\ \tilde{A}_n &= U_X A_n U_X^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ S & Id_{(N-h)} \end{pmatrix}, \\ \tilde{B}_k &= U_X B_k U_X^*, & k = 0, \dots, n-2, \text{ ó } k \geq n, \\ \tilde{B}_{n-1} &= U_X B_{n-1} U_X^* + U_X A_n U_X^* \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & R \end{pmatrix} U_X A_n^* U_X^*, \end{aligned}$$

donde si llamamos M a la siguiente matriz

$$(2.2.41) \quad M = U_X P_n(x) P_{n-1}^{-1}(x) (A_n^*)^{-1} U_X^* = \begin{pmatrix} [M]_{1,1} & [M]_{1,2} \\ [M]_{2,1} & [M]_{2,2} \end{pmatrix},$$

las matrices $S \in \mathbb{C}^{(n-h) \times h}$ y $R \in \mathbb{C}^{(N-h) \times (N-h)}$ vienen dadas por

$$(2.2.42) \quad S = [M]_{2,1} [M]_{1,1}^{-1},$$

$$(2.2.43) \quad R = -[M]_{2,1} [M]_{1,1}^{-1} [M]_{1,2} + [M]_{2,2};$$

(recordemos que x no es un cero de $[U_X P_n(t) P_{n-1}^{-1}(t) (A_n^*)^{-1} U_X^*]_{1,1}$ y por tanto la matriz $[M]_{1,1}$ no es singular).

Para demostrar que la sucesión $(\tilde{P}_n)_n$ es ortonormal con respecto a una matriz peso, tenemos que comprobar que \tilde{A}_k son matrices no singulares y que \tilde{B}_k son hermíticas. Se ve directamente que \tilde{A}_n no es singular y que su inversa es

$$(2.2.44) \quad \tilde{A}_n^{-1} = \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ -S & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} U_X A_n^{-1} U_X^*.$$

De la fórmula de Christoffel-Darboux

$$(2.2.45) \quad P_{n-1}^*(t) A_n P_n(t) - P_n^*(t) A_n^* P_{n-1}(t) = \theta,$$

se sigue que cuando $t \in \mathbb{R}$, la matriz $P_n(t) P_{n-1}^{-1}(t) (A_n^*)^{-1}$ es hermítica. Como x es un número real, se deduce que M también es hermítica, y de la definición de \tilde{B}_{n-1} y (2.2.43) se obtiene que \tilde{B}_{n-1} también lo es. Con esto, existe \tilde{W} una matriz peso que ortonormaliza a la sucesión $(\tilde{P}_n)_n$.

De las expresiones de $(\tilde{A}_n)_n$, $(\tilde{B}_n)_n$ podemos escribir la sucesión de polinomios $(\tilde{P}_k)_{k=0}^n$ en términos de la sucesión $(P_k)_{k=0}^n$ como sigue:

$$(2.2.46) \quad \tilde{P}_k(t) = U_X P_k(t), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

$$(2.2.47) \quad \tilde{P}_n(t) = \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ -S & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} U_X P_n(t) - \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & R \end{pmatrix} U_X A_n^* P_{n-1}(t).$$

Sea $\tilde{\Delta}_n$ el coeficiente líder de $\tilde{P}_n(t)$. De (2.2.47) se tiene que

$$(2.2.48) \quad \tilde{\Delta}_n = \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ -S & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} U_X \Delta_n.$$

Aplicamos ahora el teorema 2.2.2 a la matriz peso \tilde{W} (en lo que sigue, prescindiremos, por simplicidad, de los superíndices $\{h, A\}$ en las notaciones referentes a dicho teorema); consideramos el polinomio matricial

$$(2.2.49) \quad \begin{aligned} \tilde{P}(t) = & \begin{pmatrix} [\tilde{A}_{n+1}]_{1,1} & [\tilde{A}_{n+1}]_{1,2} \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \tilde{P}_{n+1}(t) \\ & + \begin{pmatrix} -[\tilde{A}_{n+1}A]_{1,1} & [\tilde{B}_n]_{1,2} \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \tilde{P}_n(t), \end{aligned}$$

y sea A una matriz que fijaremos posteriormente, que verifique $[\tilde{A}_{n+1}A]_{1,1} = [A^* \tilde{A}_{n+1}^*]_{1,1}$. Entonces, existen números reales x_k , $k = 1, \dots, m \leq nN + h$,

(los ceros del polinomio matricial (2.2.49)) y matrices semidefinidas positivas Γ_k , $k = 1, \dots, m$, tales que

$$(2.2.50) \quad \int P(t) d\tilde{W}(t) = \sum_{k=1}^m P(x_k)\Gamma_k,$$

para cualesquiera polinomios $P \in Y \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{2n-1}$ donde

$$(2.2.51) \quad Y = \{C \in \mathbb{C}^{N \times N} : \text{las últimas } (N - h) \text{ columnas de } C\tilde{\Delta}_n^{-1} \text{ son nulas}\}.$$

Las matrices Γ_k , $k = 1, \dots, m$, son las matrices

$$(2.2.52) \quad \Gamma_k = \frac{l_k}{(\det(\tilde{P}(t)))^{(l_k)}(x_k)} (\text{Adj}(\tilde{P}(t)))^{(l_k-1)}(x_k)\tilde{Q}(x_k),$$

donde l_k es la multiplicidad de $x_k = \text{rg}(\Gamma_k)$ y

$$\tilde{Q}(t) = \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \tilde{A}_{n+1}\tilde{Q}_{n+1}(t) + \begin{pmatrix} -[\tilde{A}_{n+1}A]_{1,1} & [\tilde{B}_n]_{1,2} \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \tilde{Q}_n(t),$$

donde $(\tilde{Q}_n)_n$ es la sucesión de polinomios matriciales de segunda especie con respecto a \tilde{W} .

Veamos primero que nuestro ideal a la izquierda $X \subseteq Y$, donde Y viene dado por (2.2.51). Efectivamente, dada cualquier matriz $C \in X$, existe una matriz $E \in \mathbb{C}^{N \times N}$ tal que $C = E \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} M_0$. Entonces, por (2.2.48) tenemos que

$$\begin{aligned} C\tilde{\Delta}_n^{-1} \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} &= E \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} M_0 \Delta_n^{-1} U_X^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ S & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \\ &= E \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} M_0 \Delta_n^{-1} U_X^* \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora bien, según la elección de la matriz U_X , por hipótesis $U_X \Delta_n M_0^{-1}$ es triangular inferior y por tanto su inversa $M_0 \Delta_n^{-1} U_X^*$ también lo es. Se tiene entonces que

$$C\tilde{\Delta}_n^{-1} \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} = \theta,$$

es decir, las últimas $(N - h)$ columnas de $C\tilde{\Delta}_n^{-1}$ son nulas, de donde se deduce que $C \in Y$.

Para demostrar la fórmula de cuadratura del teorema 2.2.5 basta demostrar los siguientes casos de la fórmula de cuadratura para W :

$$(2.2.53) \quad \int t^n dW(t) P_i^*(t) = \sum_{k=1}^m x_k^n \Gamma_k P_i^*(x_k), \quad i = 0, \dots, n-2,$$

$$(2.2.54) \quad \int Ct^n dW(t) P_{n-1}^*(t) = C \sum_{k=1}^m x_k^n \Gamma_k P_{n-1}^*(x_k), \quad C \in X,$$

$$(2.2.55) \quad \int Ct^n dW(t) P_n^*(t) (\Delta_n^*)^{-1} D^* = C \sum_{k=1}^m x_k^n \Gamma_k P_n^*(x_k) (\Delta_n^*)^{-1} D^*, \quad C, D \in X,$$

(para t^j , $0 \leq j \leq n-1$, la fórmula de cuadratura se verifica automáticamente porque podemos escribir

$$Id_N t^j = \sum_{i=1}^j D_i P_i(t) = \sum_{i=1}^j \tilde{D}_i \tilde{P}_i(t),$$

y por tanto, de (2.2.46) y (2.2.50) se tiene

$$\begin{aligned} \int t^j dW(t) P_i^*(t) &= D_i = \tilde{D}_i U_X \\ &= \int t^j d\tilde{W}(t) \tilde{P}_i^*(t) U_X = \sum_{k=1}^m x_k^j \Gamma_k \tilde{P}_i^*(x_k) U_X \\ &= \sum_{k=1}^m x_k^j \Gamma_k P_i^*(x_k). \end{aligned}$$

Para probar (2.2.53), (2.2.54) y (2.2.55), escribimos el polinomio matricial $Id_N t^n$ en términos de las sucesiones $(P_n)_n$ y $(\tilde{P}_n)_n$,

$$(2.2.56) \quad \begin{aligned} Id_N t^n &= \sum_{i=0}^{n-1} D_i P_i(t) + \Delta_n^{-1} P_n(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{D}_i \tilde{P}_i(t) + \tilde{\Delta}_n^{-1} \tilde{P}_n(t); \end{aligned}$$

donde

$$D_i = \int t^n dW(t) P_i^*(t), \quad i = 0, \dots, n-1, \quad \Delta_n^{-1} = \int t^n dW(t) P_{n-1}^*(t),$$

$$\tilde{D}_i = \int t^n dW(t) \tilde{P}_i^*(t), \quad i = 0, \dots, n-1, \quad \tilde{\Delta}_n^{-1} = \int t^n dW(t) \tilde{P}_{n-1}^*(t).$$

De estas igualdades, utilizando la expresión de $(\tilde{P}_k)_{k=0}^n$ en términos de la sucesión $(P_n)_n$ (ver (2.2.46) y (2.2.47)) se sigue que

$$(2.2.57) \quad D_i = \tilde{D}_i U_X \quad i = 0, \dots, n-2,$$

$$(2.2.58) \quad D_{n-1} = \tilde{D}_{n-1} U_X - \tilde{\Delta}_n^{-1} \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & R \end{pmatrix} U_X A_n^*,$$

$$(2.2.59) \quad \Delta_n^{-1} = \tilde{\Delta}_n^{-1} \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ -S & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} U_X.$$

Para $i = 0, \dots, n-2$, de la igualdad (2.2.57), la fórmula de cuadratura (2.2.50) y la expresión (2.2.46) de los polinomios $(\tilde{P}_k)_{k=0}^{n-1}$ en función de la sucesión $(P_n)_n$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int t^n dW(t) P_i^*(t) &= D_i = \tilde{D}_i U_X \\ &= \int t^n d\tilde{W}(t) \tilde{P}_i^*(t) U_X = \sum_{k=1}^m x_k^n \Gamma_k \tilde{P}_i^*(x_k) U_X \\ &= \sum_{k=1}^m x_k^n \Gamma_k P_i^*(x_k); \end{aligned}$$

esto es, (2.2.53).

Para $i = n-1$. Como $X \subseteq Y$, para cualquier matriz $C \in X$ se verifica que $C \tilde{\Delta}_n^{-1} \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & R \end{pmatrix} = \theta$, y entonces, de (2.2.58) tenemos que $C D_{n-1} =$

$C\tilde{D}_{n-1}U_X$. Ahora, usando de nuevo (2.2.50) y (2.2.46), se obtiene que

$$\begin{aligned} \int C t^n dW(t) P_{n-1}^*(t) &= C D_{n-1} = C \tilde{D}_{n-1} U_X \\ &= \int C t^n d\tilde{W}(t) \tilde{P}_{n-1}^*(t) U_X \\ &= C \sum_{k=1}^m x_k^n \Gamma_k \tilde{P}_{n-1}^*(x_k) U_X \\ &= C \sum_{k=1}^m x_k^n \Gamma_k P_{n-1}^*(x_k); \end{aligned}$$

que es la fórmula de cuadratura (2.2.54).

Para $i = n$, de (2.2.59), teniendo en cuenta que $X \subseteq Y$ y usando la fórmula de cuadratura (2.2.50) se sigue que

$$\begin{aligned} \int C t^n dW(t) P_n^*(t) (\Delta_n^*)^{-1} D^* &= C \Delta_n^{-1} (\Delta_n^*)^{-1} D^* \\ &= C \tilde{\Delta}_n^{-1} \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ -S & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} U_X (\Delta_n^*)^{-1} D^* \\ &= \int C t^n d\tilde{W}(t) \tilde{P}_n^*(t) \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ -S & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} U_X (\Delta_n^*)^{-1} D^* \\ &= \sum_{k=1}^m C x_k^n \Gamma_k \tilde{P}_n^*(x_k) \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ -S & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} U_X (\Delta_n^*)^{-1} D^*. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que las últimas $(N - h)$ filas de $\tilde{P}_n(x_k) \Gamma_k$ son nulas (ver fórmula (2.2.19)), y que las matrices Γ_k son hermíticas, se verifica que $\Gamma_k \tilde{P}_n^*(x_k) = \Gamma_k \tilde{P}_n^*(x_k) \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix}$, de donde podemos escribir

(2.2.60)

$$\int C t^n dW(t) P_n^*(t) (\Delta_n^*)^{-1} D^* = \sum_{k=1}^m C x_k^n \Gamma_k \tilde{P}_n^*(x_k) \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} U_X (\Delta_n^*)^{-1} D^*.$$

De la expresión (2.2.47) del polinomio \tilde{P}_n en función de P_n y P_{n-1}

obtenemos

(2.2.61)

$$\int Ct^n dW(t)P_n^*(t)(\Delta_n^*)^{-1}D^* = \sum_{k=1}^m Cx_k^n \Gamma_k P_n^*(x_k) U_X^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} U_X (\Delta_n^*)^{-1} D^*.$$

Ahora bien, como $D \in X \subseteq Y$, se tiene que

$$\theta = D\tilde{\Delta}_n^{-1} \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} = D\Delta_n^{-1} U_X^* \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix},$$

y por tanto $D\Delta_n^{-1} U_X^* = D\Delta_n^{-1} U_X^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix}$; de aquí,

$$U_X (\Delta_n^*)^{-1} D^* = \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} U_X (\Delta_n^*)^{-1} D^*.$$

Se deduce entonces, de (2.2.61) que

$$\int Ct^n dW(t) P_n^*(t)(\Delta_n^*)^{-1} D^* = \sum_{k=1}^m Cx_k^n \Gamma_k P_n^*(x_k)(\Delta_n^*)^{-1} D^*.$$

Esto es, la fórmula de cuadratura también se verifica para (2.2.55). Con esto se concluye la demostración de la parte (1) del teorema 2.2.5.

(2).- Para demostrar la parte (2) del teorema 2.2.5, consideremos la matriz $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ dada por

$$(2.2.62) \quad \tilde{A}_{n+1}A = (xId_N - \tilde{B}_n) - \begin{pmatrix} [M]_{1,1} & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix}.$$

$\tilde{A}_{n+1}A$ es claramente hermítica.

Como los nodos de la fórmula de cuadratura son los ceros del polinomio matricial \tilde{P} (ver (2.2.49)), tenemos que demostrar que x es un cero de \tilde{P} . De hecho, lo que vamos a probar es que $\tilde{P}(x) = \theta$.

Sea E la matriz

$$(2.2.63) \quad E = -[\tilde{A}_{n+1}A]_{1,2} - [\tilde{B}_n]_{1,2} \in \mathbb{C}^{h \times (N-h)}.$$

Si vemos que

$$(2.2.64) \quad \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \tilde{P}_n(x) = \theta,$$

y que

$$(2.2.65) \quad \tilde{P}(x) + \begin{pmatrix} \theta & E \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \tilde{P}_n(x) = \theta,$$

tendremos que $\tilde{P}(x) = \theta$. Efectivamente, de (2.2.64) se verifica que

$$\tilde{P}_n(x) = \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \tilde{P}_n(x). \text{ Por tanto, de (2.2.65) se deduce}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \tilde{P}(x) + \begin{pmatrix} \theta & E \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \tilde{P}_n(x) \\ &= \tilde{P}(x) + \begin{pmatrix} \theta & E \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \tilde{P}_n(x) = \tilde{P}(x). \end{aligned}$$

Queda tan sólo probar (2.2.64) y (2.2.65).

Probar (2.2.64) es equivalente a demostrar

$$\begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \tilde{P}_n(x) \tilde{P}_{n-1}^{-1}(x) (\tilde{A}_n^*)^{-1} = \theta,$$

ya que la matriz $\tilde{P}_{n-1}^{-1}(x) (\tilde{A}_n^*)^{-1}$ no es singular (\tilde{A}_n no es singular, x no es un cero de $P_{n-1}(x)$, y de (2.2.46) se tiene $P_{n-1}(x) = U_X^* \tilde{P}_{n-1}(x)$, luego x no es un cero de \tilde{P}_{n-1}). De la expresión (2.2.47) del polinomio \tilde{P}_n en función de los polinomios P_{n-1} y P_n , tenemos que

(2.2.66)

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n(x) \tilde{P}_{n-1}^{-1}(x) (\tilde{A}_n^*)^{-1} &= \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ -S & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} U_X P_n(x) \tilde{P}_{n-1}^{-1}(x) (\tilde{A}_n^*)^{-1} \\ &\quad - \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & R \end{pmatrix} U_X A_n^* P_{n-1}(x) \tilde{P}_{n-1}^{-1}(x) (\tilde{A}_n^*)^{-1}; \end{aligned}$$

Recordemos que habíamos denotado $M = U_X P_n(x) P_{n-1}^{-1}(x) (A_n^*)^{-1} U_X^*$ (ver (2.2.41)), y que habíamos elegido R y S en función de las entradas por bloques de la matriz M como sigue

$$S = [M]_{2,1} [M]_{1,1}^{-1}, \quad R = -[M]_{2,1} [M]_{1,1}^{-1} [M]_{1,2} + [M]_{2,2}$$

(ver (2.2.42) y (2.2.43)).

Teniendo en cuenta lo que acabamos de decir, sustituyendo ahora la expresión de \tilde{A}_n^{-1} (ver (2.2.44)), y escribiendo $\tilde{P}_{n-1}(x) = U_X P_{n-1}(x)$, la ecuación (2.2.66) queda

$$(2.2.67) \quad \begin{aligned} \tilde{P}_n(x)\tilde{P}_{n-1}^{-1}(x)(\tilde{A}_n^*)^{-1} &= \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ -S & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} Id_h & -S^* \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id_h & -S^* \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

Sin más que sustituir S y R , y operando, se llega directamente a que

$$(2.2.68) \quad \tilde{P}_n(x)\tilde{P}_{n-1}^{-1}(x)(\tilde{A}_n^*)^{-1} = \begin{pmatrix} [M]_{1,1} & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix},$$

y de aquí se deduce (2.2.64).

Por último, veamos (2.2.65), que es equivalente a demostrar que

$$\left[\tilde{P}(x) + \begin{pmatrix} \theta & E \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \tilde{P}_n(x) \right] \tilde{P}_{n-1}^{-1}(x)(\tilde{A}_n^*)^{-1} = \theta,$$

ya que, como se dijo antes, la matriz $\tilde{P}_{n-1}^{-1}(x)(\tilde{A}_n^*)^{-1}$ no es singular.

De la elección de la matriz E (ver (2.2.63)) y de la expresión del polinomio \tilde{P} (ver (2.2.49)) se tiene

$$\begin{aligned} &\left[\tilde{P}(x) + \begin{pmatrix} \theta & E \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \tilde{P}_n(x) \right] \tilde{P}_{n-1}^{-1}(x)(\tilde{A}_n^*)^{-1} \\ &= \left[\begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \tilde{A}_{n+1}\tilde{P}_{n+1}(x) - \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \tilde{A}_{n+1}A\tilde{P}_n(x) \right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \tilde{P}_n(x) \right] \tilde{P}_{n-1}^{-1}(x)(\tilde{A}_n^*)^{-1}. \end{aligned}$$

Por (2.2.64), el último término de la igualdad anterior es θ . Usando ahora la fórmula de recurrencia de tres términos de $(\tilde{P}_n)_n$ vemos que

$$(2.2.69) \quad \begin{aligned} &\left[\tilde{P}(x) + \begin{pmatrix} \theta & E \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \tilde{P}_n(x) \right] \tilde{P}_{n-1}^{-1}(x)(\tilde{A}_n^*)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} (xId_N - \tilde{B}_n)\tilde{P}_n(x)\tilde{P}_{n-1}^{-1}(x)(\tilde{A}_n^*)^{-1} \\ &\quad - \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \tilde{A}_{n+1}A\tilde{P}_n(x)\tilde{P}_{n-1}^{-1}(x)(\tilde{A}_n^*)^{-1}. \end{aligned}$$

De la elección de $\tilde{A}_{n+1}A$ (ver (2.2.62)) se sigue que

$$(2.2.70) \quad \begin{aligned} & \left[\tilde{P}(x) + \begin{pmatrix} \theta & E \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \tilde{P}_n(x) \right] \tilde{P}_{n-1}^{-1}(x) (\tilde{A}_n^*)^{-1} \\ & = - \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [M]_{1,1}^{-1} & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \tilde{P}_n(x) \tilde{P}_{n-1}^{-1}(x) (\tilde{A}_n^*)^{-1}, \end{aligned}$$

de donde, utilizando (2.2.68) se obtiene (2.2.65).

Por tanto, hemos demostrado que x es un cero de \tilde{P} (de la máxima multiplicidad N) de donde se deduce que x es un nodo de la fórmula de cuadratura.

Sea k_0 , $1 \leq k_0 \leq m$, tal que $x = x_{k_0}$. Probemos por último que

$$\Gamma_{k_0} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} P_k(z)^* P_k(z) + P_n(z)^* U_X^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} U_X P_n(z) \right)^{-1}.$$

Para ello, usaremos la expresión de Γ_{k_0} dada por (2.2.52).

Derivando la fórmula $\text{Adj}(\tilde{P}(t)) \tilde{P}(t) = \det \tilde{P}(t) Id_N$, teniendo en cuenta que $\tilde{P}(x) = \theta$ y la propiedad $(\text{Adj}(\tilde{P}(t)))^{(l)}(x) = \theta$, para $l = 0, \dots, N-2$, (ver teorema 1.0.9 en los preliminares), se obtiene que

$$N \left(\text{Adj}(\tilde{P}(t)) \right)^{(N-1)}(x) \tilde{P}'(x) = \left(\det \tilde{P}(t) \right)^N(x) Id_N.$$

Entonces (2.2.52) es igual a

$$(2.2.71) \quad \Gamma_{k_0} = \left(\tilde{P}'(x) \right)^{-1} \tilde{Q}(x), \quad \text{por tanto} \quad \Gamma_{k_0}^{-1} = \left(\tilde{Q}(x) \right)^{-1} \tilde{P}'(x).$$

Vamos ahora a buscar fórmulas adecuadas para $\left(\tilde{Q}(x) \right)^{-1}$ y $\tilde{P}'(x)$.

La aplicación inversa del isomorfismo definido por $\tilde{Q}^*(x)$ (ver (6) del lema 2.2.3) es

$$(2.2.72) \quad \left(\tilde{Q}(x) \right)^{-1} = \tilde{P}_n^*(x) + \tilde{P}_{n-1}^*(x) \tilde{A}_n \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix};$$

De la expresión del polinomio \tilde{P} dada por (2.2.49) y de la fórmula de recurrencia de tres términos para $(\tilde{P}_n)_n$, obtenemos la siguiente expresión

para \tilde{P}

(2.2.73)

$$\tilde{P}(t) = \begin{pmatrix} tId_h - [\tilde{B}_n + \tilde{A}_{n+1}A]_{1,1} & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \tilde{P}_n(t) - \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \tilde{A}_n^* \tilde{P}_{n-1}(t),$$

de donde, derivando se obtiene

(2.2.74)

$$\begin{aligned} \tilde{P}'(x) &= \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \tilde{P}_n(x) + \begin{pmatrix} xId_h - [\tilde{B}_n + \tilde{A}_{n+1}A]_{1,1} & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \tilde{P}'_n(x) \\ &\quad - \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \tilde{A}_n^* \tilde{P}'_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Substituyendo (2.2.74) y (2.2.72) en (2.2.71) y simplificando, se tiene que

(2.2.75)

$$\begin{aligned} \Gamma_{k_0}^{-1} &= \tilde{P}_n^*(x) \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \tilde{P}_n(x) \\ &\quad + \tilde{P}_n^*(x) \begin{pmatrix} xId_h - [\tilde{B}_n + \tilde{A}_{n+1}A]_{1,1} & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \tilde{P}'_n(x) \\ &\quad - \tilde{P}_n^*(x) \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \tilde{A}_n^* \tilde{P}'_{n-1}(x) + \tilde{P}_{n-1}^*(x) \tilde{A}_n \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \tilde{P}'_n(x). \end{aligned}$$

Como $\tilde{P}(x) = \theta$, de (2.2.73) tenemos que

(2.2.76)

$$\begin{pmatrix} xId_h - [\tilde{B}_n + \tilde{A}_{n+1}A]_{1,1} & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \tilde{P}_n(x) = \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \tilde{A}_n^* \tilde{P}_{n-1}(x).$$

Substituyendo (2.2.76) en (2.2.75) y teniendo en cuenta que las últimas $(N - h)$ filas de $\tilde{P}_n(x)$ se anulan (ver (2.2.64)), obtenemos

$$\Gamma_{k_0}^{-1} = \tilde{P}_n^*(x) \tilde{P}_n(x) + \tilde{P}_{n-1}^*(x) \tilde{A}_n \tilde{P}'_n(x) - \tilde{P}_n^*(x) \tilde{A}_n^* \tilde{P}'_{n-1}(x).$$

Aplicando ahora la fórmula de Christoffel-Darboux (ver (1.0.9 de los preliminares) obtenemos

$$(2.2.77) \quad \Gamma_{k_0}^{-1} = \tilde{P}_n^*(x) \tilde{P}_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{P}_k^*(x) \tilde{P}_k(x) = \sum_{k=0}^n \tilde{P}_k^*(x) \tilde{P}_k(x).$$

Usando (2.2.47) y (2.2.64) obtenemos que

$$(2.2.78) \quad \tilde{P}_n(x) = \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \tilde{P}_n(x) = \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} U_X P_n(x).$$

Finalmente, sin más que usar las expresiones de los polinomios (2.2.46), se sigue de (2.2.78) que

$$\Gamma_{k_0}^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(z)^* P_k(z) + P_n(z)^* U_X^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} U_X P_n(z),$$

con lo que queda demostrado el teorema. \square

2.3. Ejemplos

Vamos a dar en esta sección ejemplos que muestran cómo aplicar la fórmula de cuadratura de Gauss que hemos encontrado en la sección 2.2.1. En ellos se comprueba cómo los nodos y los coeficientes de cuadratura se pueden calcular de manera sencilla con lo que queda constancia que dichas fórmulas de cuadratura son fácilmente manejables.

Aplicaremos el teorema 2.2.2, comprobando que existe un subespacio $X \subset \mathbb{C}^{N \times N}$ de dimensión hN tal que para cualquier polinomio matricial $P \in X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{2n-3}$, se verifica la fórmula de cuadratura

$$(2.3.1) \quad \int P(t) dW(t) = \sum_{k=1}^m P(x_k) \Gamma_k^{h,A}.$$

Asimismo se comprueba en los ejemplos que dicha fórmula de cuadratura es óptima, es decir, que no se verifica para polinomios cuyo coeficiente líder no pertenezca al ideal a la izquierda X que aparece en el teorema 2.2.2.

Daremos dos ejemplos en los que supondremos que la dimensión de las matrices es 2×2 , $n = 2$, $h = 1$ y la matriz A que aparece en el teorema 2.2.2 es $A = \theta$.

Ejemplo 1.-

Consideramos la sucesión de polinomios matriciales con respecto a la función peso

$$dW(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{5\sqrt{16t^2 + 9t^4} - 17t^2}}{\sqrt{16 + 9t^2}} \chi_{[-5/2, 5/2]}(t) \\ \times \begin{pmatrix} \frac{3|t| + \sqrt{16 + 9t^2}}{2\sqrt{2}} & 2\sqrt{2}\text{sign}(t) \\ 2\sqrt{2}\text{sign}(t) & \frac{-6|t| + 2\sqrt{16 + 9t^2}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} dt,$$

donde

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } t > 0, \\ -1, & \text{if } t < 0, \\ 0, & \text{if } t = 0. \end{cases}$$

Los coeficientes de recurrencia son constantes matriciales y vienen dados por (ver [D2, p.331])

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad n \geq 0.$$

En este caso se tiene que el polinomio matricial $P_{1,\theta}$ definido por (2.2.3) es

$$P_{1,\theta}(t) = \begin{pmatrix} -1 + t^2 & -t \\ -4 & 4t \end{pmatrix}.$$

El polinomio $P_{1,\theta}$ tiene tres ceros distintos que son $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$, cada uno con multiplicidad igual a 1.

El polinomio matricial $Q_{1,\theta}$ definido por (2.2.12) es

$$Q_{1,\theta}(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, los coeficientes de cuadratura (2.2.11) son

$$\Gamma_1^{1,\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2^{1,\theta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3^{1,\theta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Como $\Delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, el teorema 2.2.2 nos da la siguiente fórmula de cuadratura de Gauss: para cualquier polinomio $P(t) = Ct^2 + Dt + E$, con

$D, E \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, y $C \in X = \left\{ F \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : F \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \right\}$, se verifica

$$\int P(t) dW(t) = \sum_{k=1}^3 P(x_k) \Gamma_k^{1,\theta} = C \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + E.$$

Hallando los tres primeros momentos para la matriz peso W se observa que para cualquier $P(t) = Ct^2 + Dt + E$, con $C, D, E \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$,

$$\int P(t) dW(t) = C \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + E,$$

lo cual muestra que la fórmula de cuadratura se verifica sólo cuando $C \in X$.

Ejemplo 2.- Consideramos la sucesión de polinomios matriciales con respecto a la función peso

$$dW(t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4}{t^2 - 2t} - 1} \\ \times \left[\begin{pmatrix} 1-t & -1 \\ -1 & 1-t \end{pmatrix} \chi_{[1-\sqrt{5}, 0]}(t) + \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ -1 & t-1 \end{pmatrix} \chi_{[2, 1+\sqrt{5}]}(t) \right] dt.$$

Los coeficientes de recurrencia son constantes matriciales y vienen dados por (ver [D2, p.331])

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \geq 0.$$

En este caso, el polinomio matricial $P_{1,\theta}$ definido por (2.2.3) es

$$P_{1,\theta}(t) = \begin{pmatrix} (-2+t)t & 1-t \\ 1 & 1-t \end{pmatrix}.$$

El polinomio $P_{1,\theta}$ tiene tres ceros distintos $x_1 = 1$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}$, $x_3 = 1 + \sqrt{2}$, cada uno con multiplicidad igual a 1.

El polinomio matricial $Q_{1,\theta}$ dado por (2.2.12) es

$$Q_{1,\theta}(t) = \begin{pmatrix} t-1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que nos da los siguientes coeficientes de recurrencia

$$\Gamma_1^{1,\theta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2^{1,\theta} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3^{1,\theta} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\Delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, el teorema 2.2.2 nos da la siguiente fórmula de cuadratura gaussiana: para cualquier polinomio matricial $P(t) = Ct^2 + Dt + E$, with $D, E \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, y $C \in X = \left\{ F \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : F \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \right\}$, se verifica

$$\int P(t) dW(t) = \sum_{k=1}^3 P(x_k) \Gamma_k^{1,\theta} = C \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + E.$$

Evaluando los tres primeros momentos de la función peso W se tiene que para cualquier polinomio $P(t) = Ct^2 + Dt + E$, con $C, D, E \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$,

$$\int P(t) dW(t) = C \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + E,$$

lo cual muestra que la fórmula de cuadratura de Gauss se verifica sólo cuando $C \in X$.

2.4. Forma general de las fórmulas de cuadratura gaussianas con nodos complejos

En la sección 2.2.1 encontramos un procedimiento para generar fórmulas de cuadratura de Gauss cuyos nodos x_k , $k = 1, \dots, m$, son números reales, los coeficientes de cuadratura G_k , $k = 1, \dots, m$, son semidefinidos positivos y tales que

$$(2.4.1) \quad \sum_{k=1}^m \text{rg}(G_k) = (n-1)N + h.$$

Recordemos que dichos nodos eran los ceros del polinomio matricial

$$(2.4.2) \quad P_{h,A}(t) = \begin{pmatrix} [A_n]_{1,1} & [A_n]_{1,2} \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_n(t) \\ + \begin{pmatrix} -[A_n A]_{1,1} & [B_{n-1}]_{1,2} \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} P_{n-1}(t),$$

con A una matriz cualquiera de dimensión $N \times N$ verificando $[A_n A]_{1,1} = [A^* A_n^*]_{1,1}$.

Veremos en esta sección la forma general de las fórmulas de cuadratura gaussianas con nodos $x_k, k = 1, \dots, m$, números complejos cualesquiera y coeficientes de cuadratura $G_k, k = 1, \dots, m$, no necesariamente semidefinidos positivos y tales que verifican (2.4.1). Demostraremos también que cuando en una fórmula de cuadratura gaussiana los nodos son reales y los coeficientes de cuadratura son semidefinidos positivos entonces dicha fórmula corresponde con una de las fórmulas de cuadratura de Gauss encontradas en la sección 2.2.1, esto es, los nodos (reales) de cualquier fórmula de cuadratura de Gauss tal que sus coeficientes de cuadratura (semidefinidos positivos) verifiquen (2.4.1) han de ser los ceros del polinomio matricial $P_{h,A}(t)$ (ver (2.4.2)) para una cierta matriz $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$.

El teorema principal de esta sección es el siguiente

Teorema 2.4.1. *Para $n \in \mathbb{N}, 0 < h \leq N - 1$, sean $x_k \in \mathbb{C}$ y $G_k \in \mathbb{C}^{N \times N} k = 1, \dots, m$, los nodos y pesos respectivamente de una fórmula de cuadratura de Gauss para una matriz peso W , esto es, $\sum_{k=1}^m \text{rg}(G_k) = (n - 1)N + h$ y existe un subespacio $X \subset \mathbb{C}^{N \times N}$ de dimensión hN tal que para cualquier polinomio matricial $P(t) = R(t) + Ct^{2n-2}$ con $\text{gr}(R) = 2n - 3$ y $C \in X$ se verifica la siguiente fórmula*

$$\int P(t) dW(t) = \sum_{k=1}^m P(x_k) G_k.$$

Entonces, existe una sucesión $(P_n)_n$ de polinomios matriciales ortonormales para W tal que

1. $n \leq m \leq (n - 1)N + h$.
2. $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{C}$ son los distintos ceros del polinomio matricial

$$P_{h,A}(t) = \begin{pmatrix} [A_n]_{1,1} & [A_n]_{1,2} \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_n(t) + \begin{pmatrix} -[A_n A]_{1,1} & [B_{n-1}]_{1,2} \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} P_{n-1}(t)$$

cada uno con multiplicidad $\text{rg}(G_k)$, donde A es la matriz

$$A = \sum_{k=1}^m P_n(x_k) G_k^* P_{n-1}^*(x_k).$$

3. $G_k, k = 1, \dots, m$, vienen dados por

$$G_k = \frac{1}{(\det(P_{h,A}(t)))^{(l_k)}(x_k)} (\text{Adj}(P_{h,A}(t)))^{(l_k-1)}(x_k) Q_{h,A}(x_k),$$

donde $l_k = \text{rg}(G_k) = \text{multiplicidad de } x_k$, y

$$Q_{h,A}(t) = \begin{pmatrix} [A_n]_{1,1} & [A_n]_{1,2} \\ \theta & \theta \end{pmatrix} Q_n(t) + \begin{pmatrix} -[A_n A]_{1,1} & [B_{n-1}]_{1,2} \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} Q_{n-1}(t).$$

4. Los coeficientes de cuadratura G_k son hermiticos y los nodos x_k son reales, $k = 1, \dots, m$, si y solo si $[A_n A]_{1,1} = [A^* A_n^*]_{1,1}$.

Demostración.

(1).- Como $1 \leq \text{rg}(G_k) \leq N$, tenemos que

$$m \leq \sum_{k=1}^m \text{rg}(G_k) = (n-1)N + h \leq mN;$$

por tanto $(n-1)N + h \leq mN$ y $n \leq m + (1 - \frac{h}{N}) \leq m$.

Para la demostración de (2) supongamos que el espacio lineal X tiene la siguiente forma especial:

(2.4.3)

$$X = \{C \in \mathbb{C}^{N \times N} : \text{las últimas } (N-h) \text{ columnas de } C \text{ son cero}\}.$$

Consideraremos el caso general más tarde.

Elijamos una sucesión de polinomios matriciales ortonormales $(P_n)_n$ asociada a la matriz peso W con coeficientes líderes triangulares inferiores (lo cual siempre es posible: ver [DV], p. 267 o página 3 de los preliminares).

La clave para la demostración del teorema 2.4.1 será el siguiente lema que probaremos al final de esta sección y que establece la existencia de un cierto polinomio matricial de interpolación en los nodos de la fórmula de cuadratura:

Lema 2.4.2. *Suponiendo que el ideal a la izquierda X es de la forma (2.4.3) y bajo las mismas hipótesis del teorema 2.4.1, existe un conjunto finito Λ de números complejos tal que para cada $y \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ existe un polinomio matricial $Q_y(t) = \sum_{i=0}^n D_i t^i$, $D_i \in \mathbb{C}^{N \times N}$ verificando:*

(a) *Para todo $y \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$, $\det([P_{n-1}(y)]_{2,2}) \neq 0$.*

(b) *Las últimas $(N - h)$ columnas del coeficiente líder D_n de Q_y son nulas, esto es,*

$$(2.4.4) \quad D_n = D_n \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix}.$$

(c) *El polinomio Q_y satisface las condiciones de interpolación*

$$(2.4.5) \quad \begin{cases} Q_y(x_k) G_k^* = \theta & k = 1, \dots, m, \\ Q_y(y) = Id_N. \end{cases}$$

(2).- La demostración de que los ceros de $P_{h,A}$ son los nodos de la fórmula de cuadratura cada uno con multiplicidad $\text{rg}(G_i)$, $i = 1, \dots, m$, es consecuencia de los siguientes pasos.

Primer paso: los ceros del polinomio matricial $P_{h,A}$ son los mismos y con la misma multiplicidad que los del polinomio matricial

$$(2.4.6) \quad P(t) = P_{h,A}(t) + \begin{pmatrix} \theta & E \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_{n-1}(t),$$

donde E es cualquier matriz en $\mathbb{C}^{h \times (N-h)}$.

Segundo paso: los ceros del polinomio de interpolación Q_y son los nodos de la fórmula de cuadratura, cada uno con multiplicidad $\text{rg}(G_i)$, $i = 1, \dots, m$.

Tercer paso: existen dos matrices $\Gamma \in \mathbb{C}^{N \times N}$, $E \in \mathbb{C}^{h \times (N-h)}$, Γ no singular tales que

$$(2.4.7) \quad P_{h,A}(t) = \Gamma Q_y(t) - \begin{pmatrix} \theta & E \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_{n-1}(t).$$

Como Γ no es singular, los ceros del polinomio matricial Q_y son los mismos y con la misma multiplicidad que los ceros del polinomio matricial ΓQ_y . Eligiendo $P(t) = \Gamma Q_y$ en (2.4.6), es suficiente aplicar los pasos uno, dos y tres para demostrar la parte (2) del Teorema 2.4.1.

Demostración del primer paso:

De la estructura de $P_{h,A}(t)$ (ver (2.2.3)), se verifica que dado cualquier $v_0 \in \mathbf{R}(x_k, P_{h,A}(t))$, $P_{n-1}(x_k)v_0 = \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_{n-1}(x_k)v_0$. Entonces, para todo $v_0 \in R(x_k, P_{h,A}(t))$ se tiene que

$$P(x_k)v_0 = P_{h,A}(x_k)v_0 = \theta.$$

Por tanto, x_k es un cero de $P(t)$ y $v_0 \in R(x_k, P(t))$.

El recíproco es inmediato, porque si x_k es un cero de $P(t)$ y $v_0 \in \mathbf{R}(x_k, P(t))$, entonces $P_{n-1}(x_k)v_0 = \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_{n-1}(x_k)v_0$.

De la demostración del teorema 2.2.1 sabemos que la multiplicidad de cualquier cero x_k , $k = 1, \dots, m$, de $P_{h,A}(t)$ coincide con $\dim(R(x_k, P_{h,A}(t)))$. Para terminar la demostración del paso primero basta tener en cuenta que $\dim(R(x_k, P_{h,A}(t))) = \dim(R(x_k, P(t)))$ y que

$$\text{gr}(\det(P_{h,A}(t))) = \text{gr}(\det(P(t))) = (n-1)N + h$$

(ver demostración del teorema 2.2.1, pág. 23).

Demostración del segundo paso:

Sea $y \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ y consideramos el polinomio de interpolación Q_y dado en el lema 2.4.2, $Q(t) = \sum_{i=0}^n D_i t^i$ que satisface (2.4.5) y (2.4.4) (para simplificar la notación escribiremos aquí Q en lugar de Q_y). Escribimos $Q(t) = \sum_{i=0}^n C_i P_i(t)$, donde $C_i = \int Q(x) dW(x) P_i^*(x)$.

Usando la fórmula de cuadratura y las condiciones de interpolación (2.4.5) se obtiene que $C_i = \theta$, $i = 0, \dots, n-3$. Por tanto, tenemos que

$$Q(t) = C_n P_n(t) + C_{n-1} P_{n-1}(t).$$

Se tiene que $C_n \Delta_n = D_n$. Como $D_n = D_n \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix}$ (ver (2.4.4)), teniendo en cuenta que de la fórmula de recurrencia de tres términos se tiene que $(\Delta_n)^{-1} = \Delta_{n-1}^{-1} A_n$ y que Δ_i , $i \in \mathbb{N}$, son triangulares inferiores

(recordemos que habíamos elegido una sucesión de polinomios matriciales ortonormales $(P_n)_n$ asociada a la matriz peso W con coeficientes líderes triangulares inferiores), obtenemos que

$$(2.4.8) \quad C_n = \begin{pmatrix} [D_n \Delta_{n-1}^{-1}]_{1,1} & \theta \\ [D_n \Delta_{n-1}^{-1}]_{2,1} & \theta \end{pmatrix} A_n.$$

Como el polinomio Q satisface las condiciones de interpolación, se tiene que $Q(x_k)G_k^* = \theta$, $k = 1, \dots, m$, esto es, las filas de la matriz G_k^* son autovectores a la derecha correspondientes al cero x_k . Sabemos por el lema 2.2 de [DL1] (ver lema 1.0.8 de los preliminares) que la multiplicidad de x_k (como cero de $\det(Q)$) es mayor o igual que $\text{rg}(G_k)$; pero entonces

$$(2.4.9) \quad \text{gr}(\det Q(t)) \geq \sum_{k=1}^m \text{mult}(x_k) \geq \sum_{k=1}^m \text{rg}(G_k) = (n-1)N + h.$$

Por otro lado, el grado del determinante de cualquier polinomio matricial $R(t) = [r(t)_{ij}]_{i,j=1}^N$ de grado n con coeficiente líder R_n de rango h es siempre menor o igual que $(n-1)N + h$ (ver demostración del teorema 2.2.1, pág. 23). Como $Q(t)$ tiene grado n y el rango de su coeficiente líder D_n es menor o igual que h (ya que tiene sus últimas $(N-h)$ columnas son nulas), tenemos que

$$\text{gr}(\det Q(t)) \leq (n-1)N + h.$$

De aquí y (2.4.9) deducimos que $\text{gr}(\det Q(x)) = (n-1)N + h$ y que la matriz D_n es de rango h , que es igual a $\text{rg}(D_n \Delta_{n-1}^{-1})$ (sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\det([D_n \Delta_{n-1}^{-1}]_{1,1}) \neq 0$).

Demostración del tercer paso:

Vamos a encontrar primero una expresión concreta del polinomio de interpolación Q , y posteriormente encontraremos las matrices $\Gamma \in \mathbb{C}^{N \times N}$, $E \in \mathbb{C}^{h \times (N-h)}$, Γ no singular de manera que se verifique (2.4.7).

Al principio de la demostración del segundo paso vimos que

$$(2.4.10) \quad Q_n(t) = C_n P_n(t) + C_{n-1} P_{n-1}(t) = \begin{pmatrix} [D_n \Delta_{n-1}^{-1}]_{1,1} & \theta \\ [D_n \Delta_{n-1}^{-1}]_{2,1} & \theta \end{pmatrix} A_n P_n(t) + C_{n-1} P_{n-1}(t),$$

(ver (2.4.8)).

Consideramos el polinomio matricial $Q(t) + \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & tId_{(N-h)} \end{pmatrix} P_{n-1}(t)$; si aplicamos la relación de recurrencia de tres términos (1.0.1), teniendo en cuenta la expresión (2.4.10), obtenemos

(2.4.11)

$$\begin{aligned} & Q(t) + \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & tId_{(N-h)} \end{pmatrix} P_{n-1}(t) \\ &= \left[\begin{pmatrix} [D_n \Delta_{n-1}^{-1}]_{1,1} & \theta \\ [D_n \Delta_{n-1}^{-1}]_{2,1} & \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \right] A_n P_n(t) + C_{n-1} P_{n-1}(t) \\ &+ \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} B_{n-1} P_{n-1}(t) + \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} A_{n-1}^* P_{n-2}(t). \end{aligned}$$

Consideramos la matriz

$$(2.4.12) \quad D = \begin{pmatrix} [D_n \Delta_{n-1}^{-1}]_{1,1} & \theta \\ [D_n \Delta_{n-1}^{-1}]_{2,1} & \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix},$$

que es no singular, y cuya inversa viene dada por

$$(2.4.13) \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} [D_n \Delta_{n-1}^{-1}]_{1,1}^{-1} & \theta \\ -[D_n \Delta_{n-1}^{-1}]_{2,1} [D_n \Delta_{n-1}^{-1}]_{1,1}^{-1} & Id_{(N-h)} \end{pmatrix}.$$

De (2.4.12) y (2.4.11) tenemos

$$\begin{aligned} & D^{-1} \left[Q(t) + \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & tId_{(N-h)} \end{pmatrix} P_{n-1}(t) \right] \\ &= A_n P_n(t) + D^{-1} \left[C_{n-1} + \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} B_{n-1} \right] P_{n-1}(t) \\ &+ D^{-1} \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} A_{n-1}^* P_{n-2}(t). \end{aligned}$$

Usando de nuevo la fórmula de recurrencia de tres términos (1.0.1) y teniendo en cuenta que

$$D^{-1} \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix},$$

se obtiene

$$(2.4.14) \quad D^{-1}Q(t) = \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} A_n P_n(t) + D^{-1}C_{n-1} P_{n-1}(t).$$

Como el polinomio Q verifica las condiciones de interpolación (2.4.5), el polinomio $D^{-1}Q(t)$ satisface

$$(2.4.15) \quad \begin{cases} D^{-1}Q(x_k)G_k^* = \theta, & k = 1, \dots, m, \\ D^{-1}Q(y) = D^{-1}. \end{cases}$$

Vamos a encontrar ahora una expresión explícita de $D^{-1}C_{n-1}$. Escribimos

$$D^{-1}C_{n-1} = \begin{pmatrix} [D^{-1}C_{n-1}]_{1,1} & [D^{-1}C_{n-1}]_{1,2} \\ [D^{-1}C_{n-1}]_{2,1} & [D^{-1}C_{n-1}]_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Para encontrar la expresión de $[D^{-1}C_{n-1}]_{1,1}$ y $[D^{-1}C_{n-1}]_{2,1}$, usamos la fórmula de cuadratura y las condiciones de interpolación (2.4.15). Por la ortonormalidad y usando la fórmula de cuadratura:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \int P_{n-1}(x) dW(x) P_{n-1}^*(x) \\ &= \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \sum_{k=1}^m P_{n-1}(x_k) G_k P_{n-1}^*(x_k). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} (D^{-1}C_{n-1})^* = \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \sum_{k=1}^m P_{n-1}(x_k) G_k P_{n-1}^*(x_k) (D^{-1}C_{n-1})^*;$$

tomando transpuestas conjugadas en la ecuación (2.4.14) y despejando $P_{n-1}^*(x_k) C_{n-1}^* (D^{-1})^*$ se tiene que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} (D^{-1}C_{n-1})^* &= \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \sum_{k=1}^m P_{n-1}(x_k) G_k \left[Q^*(x_k) (D^{-1})^* \right. \\ &\quad \left. - P_n^*(x_k) A_n^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones de interpolación (2.4.15), encontramos

$$\begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} (D^{-1}C_{n-1})^* = - \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \sum_{k=1}^m P_{n-1}(x_k) G_k P_n^*(x_k) A_n^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix}.$$

Por tanto, si escribimos $A = \sum_{k=1}^m P_n(x_k) G_k^* P_{n-1}^*(x_k)$, se verifica que (2.4.16)

$$\begin{pmatrix} [D^{-1}C_{n-1}]_{1,1} & \theta \\ [D^{-1}C_{n-1}]_{2,1} & \theta \end{pmatrix} = D^{-1}C_{n-1} \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -[A_n A]_{1,1} & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $D^{-1}Q(y) = D^{-1}$ y que de (2.4.16) se tiene $[D^{-1}C_{n-1}]_{2,1} = \theta$, de la ecuación (2.4.14), multiplicándola a la izquierda por $\begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix}$ y eligiendo $t = y$ se sigue

$$\begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} D^{-1} = \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & [D^{-1}C_{n-1}]_{2,2} \end{pmatrix} P_{n-1}(y);$$

por tanto, sustituyendo D^{-1} (ver (2.4.13)),

$$\begin{aligned} -[D_n \Delta_{n-1}^{-1}]_{2,1} \left([D_n \Delta_{n-1}^{-1}]_{1,1} \right)^{-1} &= [D^{-1}C_{n-1}]_{2,2} [P_{n-1}(y)]_{2,1} \\ Id_{(N-h)} &= [D^{-1}C_{n-1}]_{2,2} [P_{n-1}(y)]_{2,2}. \end{aligned}$$

Como $y \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$, se sigue del lema 2.4.2 que $\det([P_{n-1}(y)]_{2,2}) \neq 0$. Se puede concluir que

$$[D^{-1}C_{n-1}]_{2,2} = \left([P_{n-1}(y)]_{2,2} \right)^{-1}.$$

Multiplicando (2.4.14) a la izquierda por $\begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & [P_{n-1}(y)]_{2,2} \end{pmatrix}$ y teniendo en cuenta lo que acabamos de demostrar, se tiene que

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & [P_{n-1}(y)]_{2,2} \end{pmatrix} D^{-1}Q(t) \\ &= \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} A_n P_n(t) + \begin{pmatrix} -[A_n A]_{1,1} & [D^{-1}C_{n-1}]_{1,2} \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} P_{n-1}(t). \end{aligned}$$

Utilizando ahora la expresión (2.2.3) del polinomio $P_{h,A}(t)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & [P_{n-1}(y)]_{2,2} \end{pmatrix} D^{-1} Q(t) \\ = P_{h,A}(t) + \begin{pmatrix} \theta & [-B_{n-1} + D^{-1}C_{n-1}]_{1,2} \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_{n-1}(t). \end{aligned}$$

El tercer paso se tiene eligiendo $E = [-B_{n-1} + D^{-1}C_{n-1}]_{1,2} \in \mathbb{C}^{h \times (N-h)}$,

$\Gamma = \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & [P_{n-1}(y)]_{2,2} \end{pmatrix} D^{-1} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ que no es singular.

La demostración de las partes (3) y (4) del Teorema 2.4.1 son análogas a las del Teorema 1.2 de [DD].

Para terminar la demostración del teorema 2.4.1, falta demostrarlo para el caso en el que el espacio X no es de la forma (2.4.3). Para ello, procedemos como sigue.

Como X es un ideal a la izquierda, por el lema 2.1.2, existe una matriz M , $\text{rg}(M) = h$ (ya que $\dim(X) = hN$) tal que

$$X = \{CM : C \in \mathbb{C}^{N \times N}\}.$$

Como $\text{rg}(M) = h$, existe una matriz no singular S tal que las $N - h$ últimas columnas de MS son cero.

Consideremos ahora la matriz peso $\widetilde{W} = S^{-1}W[S^{-1}]^*$. Vamos a dar ahora una fórmula de cuadratura para \widetilde{W} , que también satisface las hipótesis del teorema 2.4.1:

- Los nodos de esta fórmula de cuadratura son los mismos x_k , $k = 1, \dots, m$.
- Los coeficientes de cuadratura son ahora $S^{-1}G_k[S^{-1}]^*$.

El correspondiente subespacio para esta fórmula de cuadratura es

$$\widetilde{X} = \{C : CS^{-1} \in X\}.$$

Teniendo en cuenta que $X = \{CM : C \in \mathbb{C}^{N \times N}\}$ obtenemos

$$\widetilde{X} = \{DMS : D \in \mathbb{C}^{N \times N}\},$$

pero como las $N - h$ últimas columnas de MS son cero, las $N - h$ últimas columnas de DMS también lo son, esto es

$$\tilde{X} = \{D : \text{las } N - h \text{ columnas de } D \text{ son cero}\}.$$

Podemos ahora aplicar el teorema 2.4.1 a \tilde{W} . De esta manera, si consideramos una sucesión $(\tilde{P}_n)_n$ de polinomios matriciales ortonormales asociada a la matriz peso \tilde{W} , con coeficientes líder triangulares inferiores, los nodos de la fórmula de cuadratura $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{C}$, son los distintos ceros del polinomio matricial

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{h, \tilde{A}}(t) &= \begin{pmatrix} [\tilde{A}_n]_{1,1} & [\tilde{A}_n]_{1,2} \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \tilde{P}_n(t) \\ &+ \begin{pmatrix} -[\tilde{A}_n \tilde{A}]_{1,1} & [\tilde{B}_{n-1}]_{1,2} \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \tilde{P}_{n-1}(t) \end{aligned}$$

cada uno con multiplicidad $\text{rg}(S^{-1}G_k[S^{-1}]^*) = \text{rg}(G_k)$, donde \tilde{A} es la matriz

$$\tilde{A} = \sum_{k=1}^m \tilde{P}_n(x_k) (S^{-1}G_k[S^{-1}]^*)^* \tilde{P}_{n-1}^*(x_k).$$

Consideramos ahora la sucesión de polinomios $P_n = \tilde{P}_n S^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, que es ortonormal con respecto a W . Con esta elección, las partes (2), (3) y (4) del teorema 2.4.1 se comprueban fácilmente teniendo en cuenta que los correspondientes polinomios matriciales de segunda especie son $Q_n = \tilde{Q}_n S^*$.

□

Concluimos este capítulo demostrando la existencia del polinomio matricial de interpolación

Demostración del lema 2.4.2.

Para cada $k = 1, \dots, m$, sea $l_k = \text{rg}(G_k)$ y $v_{k,j}$, $j = 1, \dots, l_k$, un sistema de filas linealmente independientes de la matriz \bar{G}_k (donde \bar{A} denota la matriz conjugada de A). El polinomio $Q_y(t) = \sum_{i=0}^n D_i t^i$, $D_i \in \mathbb{C}^{N \times N}$ satisface las condiciones de interpolación (2.4.5) y la condición sobre su coeficiente líder (2.4.4) si y solo si los coeficientes D_i , $i = 0, \dots, n$ satisfacen

$$\begin{aligned}
 D_0 (v_{1,1}^t | \dots | v_{1,l_1}^t) + D_1 (v_{1,1}^t | \dots | v_{1,l_1}^t) x_1 + \dots + D_n (v_{1,1}^t | \dots | v_{1,l_1}^t) x_1^n &= \theta \\
 D_0 (v_{2,1}^t | \dots | v_{2,l_2}^t) + D_1 (v_{2,1}^t | \dots | v_{2,l_2}^t) x_2 + \dots + D_n (v_{2,1}^t | \dots | v_{2,l_2}^t) x_2^n &= \theta \\
 &\vdots \\
 D_0 (v_{m,1}^t | \dots | v_{m,l_m}^t) + D_1 (v_{m,1}^t | \dots | v_{m,l_m}^t) x_m + \dots + D_n (v_{m,1}^t | \dots | v_{m,l_m}^t) x_m^n &= \theta \\
 D_0 + D_1 y + \dots + D_n y^n &= Id_N \\
 D_n \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} &= \theta
 \end{aligned}$$

(teniendo en cuenta que $G_k^* = \overline{G_k^t}$). Por tanto, probar la existencia del polinomio matricial de interpolación es equivalente a demostrar que la matriz C_t dada por

$$C_t = \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,1}x_1 & \dots & v_{1,1}x_1^n \\ v_{1,2} & v_{1,2}x_1 & \dots & v_{1,2}x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{1,l_1} & v_{1,l_1}x_1 & \dots & v_{1,l_1}x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{m,1} & v_{m,1}x_m & \dots & v_{m,1}x_m^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{m,l_m} & v_{m,l_m}x_m & \dots & v_{m,l_m}x_m^n \\ Id_N & tId_N & \dots & t^n Id_N \\ \theta & \theta & \dots & (\theta \quad Id_{(N-h)}) \end{pmatrix}$$

es no singular excepto a lo sumo un número finito de números complejos.

Primero, notemos que como

$$(l_1 + l_2 + \dots + l_m) = \sum_{k=1}^m \text{rg}(G_k) = (n - 1)N + h$$

la dimensión de C_t es $(n + 1)N \times (n + 1)N$.

Recordemos que habíamos elegido una sucesión de polinomios matriciales ortonormales $(P_n)_n$ asociada a la matriz peso W con coeficientes líderes triangulares inferiores. Como el coeficiente líder Δ_n de P_n lo elegimos triangular inferior, y Δ_n no es singular tenemos que $\det([\Delta_n]_{2,2}) \neq 0$.

Si escribimos

$$P_{n-1}(t) = \begin{pmatrix} [P_{n-1}(t)]_{1,1} & [P_{n-1}(t)]_{1,2} \\ [P_{n-1}(t)]_{2,1} & [P_{n-1}(t)]_{2,2} \end{pmatrix},$$

entonces

$$\det([P_{n-1}(t)]_{2,2}) = \det([\Delta_{n-1}]_{2,2}) t^{(n-1)(N-h)} + (\text{términos de grado menor o igual que } n-2),$$

es decir, $\det([P_{n-1}(t)]_{2,2})$ es un polinomio escalar de grado $(n-1)(N-h)$. Por tanto, si t no es un cero de este polinomio, se tiene que $\det([P_{n-1}(t)]_{2,2}) \neq 0$.

Sea ahora la matriz $B_t \in \mathbb{C}^{(N-h) \times h}$ una solución del sistema lineal

$$[P_{n-1}(t)]_{2,2} B_t = -[P_{n-1}(t)]_{2,1},$$

que siempre tiene solución excepto para las raíces de $\det([P_{n-1}(t)]_{2,2})$ que son un número finito.

Por tanto, B_t satisface

$$(2.4.17) \quad (\theta \quad Id_{h \times (N-h)}) P_{n-1}(t) \begin{pmatrix} Id_h \\ B_t \end{pmatrix} = \theta.$$

Finalmente consideramos las matrices

$$A_t = \begin{pmatrix} G_1 & x_1 G_1 & \dots & x_1^n G_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_m & x_m G_m & \dots & x_m^n G_m \\ Id_N & t Id_N & \dots & t^n Id_N \\ \theta & \theta & \dots & (\theta \quad Id_{(N-h)}) \end{pmatrix}$$

y $B_t =$

$$\begin{pmatrix} P_0(x_1) & \dots & P_0(x_m) & \theta & \theta \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n-2}(x_1) & \dots & P_{n-2}(x_m) & \theta & \theta \\ R_{n-2}(t, x_1) & \dots & R_{n-2}(t, x_m) & -Id_N & \theta \\ K_1 & \dots & K_m & - \begin{pmatrix} Id_h & B_t^* \\ \theta & \theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \theta \\ Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

$\mathcal{A}_t \in \mathbb{C}^{((m+1)N+N-h) \times (n+1)N}$, $\mathcal{B}_t \in \mathbb{C}^{(n+1)N \times ((m+1)N+N-h)}$, donde

$$K_i = \begin{pmatrix} Id_h & B_t^* \\ \theta & \theta \end{pmatrix} R_{n-1}(t, x_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$R_i(t, x) = \sum_{j=0}^i P_j^*(t) P_j(x).$$

Para demostrar el lema basta probar que $\det(\mathcal{B}_t \mathcal{A}_t) \neq 0$ excepto a lo sumo un número finito de números complejos t 's. Efectivamente, si $\det(\mathcal{B}_t \mathcal{A}_t) \neq 0$ se tiene que \mathcal{A}_t tiene rango máximo. Por la parte (1) del teorema 2.4.1, $m \leq (n-1)N + h \leq mN$, por tanto $(n+1)N \leq ((m+1)N + N - h)$ y se tiene que $\text{rg}(\mathcal{A}_t) = (n+1)N$. Finalmente, la matriz C_t se obtiene de la matriz \mathcal{A}_t eliminando las filas de las matrices G 's que son combinación lineal de los vectores v 's (Si una columna de G_i , llamemos u , es combinación lineal de $v_{i,1}, \dots, v_{i,l_i}$, entonces, la columna

$$\begin{pmatrix} u \\ x_i u \\ \vdots \\ x_i^{n-1} u \\ x_i^n (Id_h \ \theta) u \end{pmatrix}$$

de \mathcal{A}_t^* es combinación lineal de las columnas

$$\begin{pmatrix} v_{i,1}^t \\ x_i v_{i,1}^t \\ \vdots \\ x_i^{n-1} v_{i,1}^t \\ x_i^n (Id_h \ \theta) v_{i,1}^t \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} v_{i,l_i}^t \\ x_i v_{i,l_i}^t \\ \vdots \\ x_i^{n-1} v_{i,l_i}^t \\ x_i^n (Id_h \ \theta) v_{i,l_i}^t \end{pmatrix}$$

de \mathcal{A}_t^* y por tanto, cuando eliminamos dichas columnas de \mathcal{A}_t^* para obtener C_t , sólo estamos eliminando columnas que son combinación lineal de las columnas que quedan).

Concluimos por tanto que $\text{rg}(\mathcal{A}_t^*) = \text{rg}(C_t)$.

Como $\text{rg}(\mathcal{A}_t^*) = (n+1)N$ y la dimensión de C_t es $(n+1)N \times (n+1)N$, deducimos que $\det(C_t) \neq 0$.

Queda demostrar que para cualquier $t \in \mathbb{C}$ excepto para un número finito, la matriz $B_t A_t$ no es singular. Para ello, usando la fórmula de cuadratura vamos a demostrar que la matriz $B_t A_t$ es una matriz triangular superior por bloques de dimensión $N \times N$ cuyos bloques diagonales son no singulares.

Recordemos que las hipótesis del lema son que $x_k \in \mathbb{C}$ y $G_k \in \mathbb{C}^{N \times N}$ $k = 1, \dots, m$, son los nodos y pesos respectivamente de una fórmula de cuadratura de Gauss para W , esto es, $\sum_{k=1}^m \text{rg}(G_k) = (n-1)N + h$ y existe un subespacio $X \subset \mathbb{C}^{N \times N}$ de dimensión hN , que hemos supuesto de la forma (2.4.3), esto es,

(2.4.18)

$$X = \{C \in \mathbb{C}^{N \times N} : \text{las últimas } (N - h) \text{ columnas de } C \text{ son cero}\},$$

tal que para cualquier polinomio matricial $P(t) = R(t) + Ct^{2n-2}$ con $\text{gr}(R) = 2n - 3$ y $C \in X$ se verifica la siguiente fórmula

$$\int P(t) dW(t) = \sum_{k=1}^m P(x_k)G_k.$$

Para $i = 1, \dots, n - 1, j < i$, podemos aplicar la fórmula de cuadratura y obtenemos:

$$(B_t A_t)_{i,j} = \sum_{k=1}^m P_{i-1}(x_k)G_k x_k^{j-1} = \int P_{i-1}(x)dW(x)x^{j-1} = \theta$$

Para $i = n, j < i$, también podemos aplicar la fórmula de cuadratura

$$\begin{aligned} (B_t A_t)_{n,j} &= \sum_{k=1}^m R_{n-2}(t, x_k)G_k x_k^{j-1} - t^{j-1}Id_N \\ &= \int R_{n-2}(t, x)dW(x)x^{j-1} - t^{j-1}Id_N = t^{j-1}Id_N - t^{j-1}Id_N = \theta \end{aligned}$$

Si $i = n + 1, j < i$, teniendo en cuenta la elección de la matriz B_t , también podemos aplicar la fórmula de cuadratura. El coeficiente líder de

$$\begin{pmatrix} Id_h & B_t^* \\ \theta & \theta \end{pmatrix} R_{n-1}(t, x)$$

es la matriz

$$\begin{pmatrix} Id_h & B_t^* \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_{n-1}^*(t)\Delta_{n-1};$$

por (2.4.17), se tiene que

$$\begin{pmatrix} Id_h & B_t^* \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_{n-1}^*(t) \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} = \theta,$$

y como habíamos elegido Δ_{n-1} triangular inferior, se verifica que

$$\begin{pmatrix} Id_h & B_t^* \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_{n-1}^*(t) \Delta_{n-1} \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} = \theta,$$

esto es, el coeficiente líder de $\begin{pmatrix} Id_h & B_t^* \\ \theta & \theta \end{pmatrix} R_{n-1}(t, x)$ pertenece al ideal a la izquierda X . Por tanto, aplicando la fórmula de cuadratura,

$$(\mathcal{B}_t \mathcal{A}_t)_{n+1, j} = \sum_{k=1}^m \begin{pmatrix} Id_h & B_t^* \\ \theta & \theta \end{pmatrix} R_{n-1}(t, x_k) G_k x_k^{j-1} - \begin{pmatrix} Id_h & B_t^* \\ \theta & \theta \end{pmatrix} t^{j-1} = \theta$$

Probemos ahora que los bloques diagonales son no singulares excepto para un número finito de complejos t 's.

Si $i \leq n - 1$, aplicando la fórmula de cuadratura,

$$(\mathcal{B}_t \mathcal{A}_t)_{i, i} = \sum_{k=1}^m P_{i-1}(x_k) G_k x_k^{i-1} = \int P_{i-1}(x) dW(x) x^{i-1} = (\Delta_{i-1}^{-1})^*$$

que no es singular.

Si $i = n$ aplicando de nuevo la fórmula de cuadratura

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}_t \mathcal{A}_t)_{n, n} &= \sum_{k=1}^m R_{n-2}(t, x_k) G_k x_k^{n-1} - t^{n-1} I_N \\ &= \int R_{n-2}(t, x) dW(x) x^{n-1} - t^{n-1} I_N \\ &= \int R_{n-1}(t, x) dW(x) x^{n-1} - \int P_{n-1}^*(t) P_{n-1}(x) dW(x) x^{n-1} - t^{n-1} I_N \\ &= -P_{n-1}^*(t) (\Delta_{n-1}^{-1})^*, \end{aligned}$$

que es una matriz no singular excepto para los ceros del polinomio matricial $P_{n-1}(t)$, que son a lo sumo $(n - 1)N$ números reales.

Finalmente, para el bloque $(n + 1)$, sea $t^n = \sum_{j=0}^n C_j P_j(t)$, donde $C_j = \int x^n dW(x) P_j^*(x)$

$$\begin{aligned} & (\mathcal{B}_t \mathcal{A}_t)_{n+1, n+1} \\ &= \sum_{k=1}^m \begin{pmatrix} Id_h & B_t^* \\ \theta & \theta \end{pmatrix} R_{n-1}(t, x_k) G_k x_k^n - \begin{pmatrix} Id_h & B_t^* \\ \theta & \theta \end{pmatrix} t^n + \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^m \begin{pmatrix} Id_h & B_t^* \\ \theta & \theta \end{pmatrix} R_{n-1}(t, x_k) G_k P_i^*(x_k) C_i^* \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \begin{pmatrix} Id_h & B_t^* \\ \theta & \theta \end{pmatrix} R_{n-1}(t, x_k) G_k P_n^*(x_k) C_n^* \\ &\quad - \begin{pmatrix} Id_h & B_t^* \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \sum_{i=0}^n P_i(x)^* C_i^* + \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como el coeficiente líder de $\begin{pmatrix} Id_h & B_t^* \\ \theta & \theta \end{pmatrix} R_{n-1}(t, x_k)$ pertenece a X , podemos aplicar la fórmula de cuadratura

$$\begin{aligned} & (\mathcal{B}_t \mathcal{A}_t)_{n+1, n+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \begin{pmatrix} Id_h & B_t^* \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_i^*(t) C_i^* + \sum_{k=1}^m \begin{pmatrix} Id_h & B_t^* \\ \theta & \theta \end{pmatrix} R_{n-1}(x, x_k) G_k P_n^*(x_k) C_n^* \\ &\quad - \sum_{i=0}^n \begin{pmatrix} Id_h & B_t^* \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_i(t)^* C_i^* + \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^m \begin{pmatrix} Id_h & B_t^* \\ \theta & \theta \end{pmatrix} R_{n-1}(x, x_k) G_k P_n^*(x_k) C_n^* \\ &\quad - \begin{pmatrix} Id_h & B_t^* \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_n(t)^* C_n^* + \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & Id_{(N-h)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como $C_n P_n(t)$ es mónico, el polinomio matricial

$$- \begin{pmatrix} Id_h & B_t^* \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_n(t)^* C_n^* \begin{pmatrix} Id_h \\ \theta \end{pmatrix}$$

también será mónico de grado n . Concluimos entonces que

$$\det \left((\mathcal{B}_t \mathcal{A}_t)_{n+1, n+1} \right) = (-1)^N t^{hn} + (\text{términos de grado } \leq \text{ que } hn - 1).$$

Esto es, $\det\left((\mathcal{B}_t\mathcal{A}_t)_{n+1,n+1}\right)$ es un polinomio escalar de grado hn . Por tanto, si t no es una raíz de este polinomio, se tendrá que

$$\det(\mathcal{B}_t\mathcal{A}_t) = \prod_{i=0}^{n+1} \det(\mathcal{B}_t\mathcal{A}_t)_{i,i} \neq 0.$$

□

Capítulo 3

FUNCIONES MATRICIALES DE CHRISTOFFEL

3.1. Preliminares

En este capítulo definiremos y estudiaremos las funciones matriciales de Christoffel asociadas a una matriz de medidas definida positiva W .

En el caso escalar, dada una medida positiva μ en la recta real, con momentos finitos hasta el orden $2n-2$ y con más de n puntos en su soporte, la función de Christoffel λ_n se define mediante la fórmula

$$\lambda_n(z) = \min \left\{ \int |p(t)|^2 d\mu(t) : p \in \mathbb{P}^{n-1}, p(z) = 1 \right\},$$

donde $z \in \mathbb{C}$ y \mathbb{P}^{n-1} denota, como es habitual, el espacio lineal de polinomios con coeficientes complejos y grado menor o igual que $n-1$. Las funciones de Christoffel pueden escribirse en términos de la sucesión $(p_n)_n$ de polinomios ortonormales con respecto a μ :

$$(3.1.1) \quad \lambda_n(z) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} |p_k(z)|^2}.$$

Estas funciones proporcionan una herramienta importante para el estudio de numerosos problemas de polinomios ortogonales, teoría de la aproximación y análisis armónico y numérico (ver [N2]).

Dado un número entero n no negativo y un ideal a la izquierda $X \subset \mathbb{C}^{N \times N}$ (i.e. si $A \in X$, $B \in \mathbb{C}^{N \times N}$ entonces $BA \in X$), la función matricial de Christoffel $\lambda_{n,X}$ se define como

(3.1.2)

$$\lambda_{n,X} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$$

$$\lambda_{n,X}(z) = \inf \left\{ \int Q(t) dW(t) Q^*(t) : Q(z) = Id_N, Q \in X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1} \right\},$$

donde denotamos por $X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$ el siguiente subespacio de polinomios matriciales

$$X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1} = \{P(t) = S(t) + Ct^n, C \in X \subseteq \mathbb{C}^{N \times N}, S \in \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}\}.$$

En el caso escalar, la dimensión de los espacios $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ va creciendo en una única unidad, pero en el caso matricial la dimensión de los espacios $\mathbb{P}_{N \times N}^{n-1} \subset \mathbb{P}_{N \times N}^n$ crece en N^2 unidades; por tanto, para la definición de las funciones matriciales de Christoffel es más conveniente tomar ínfimo en los espacios $X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$, $X \in \mathbb{C}^{N \times N}$ y $n \geq 1$, en lugar de en el espacio $\mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$, $n \geq 1$.

Exigimos al espacio X ser un ideal a la izquierda para garantizar la existencia del ínfimo que define la función matricial de Christoffel; efectivamente, como el orden matricial no es un orden total, el ínfimo de un conjunto de matrices semidefinidas positivas no tiene por qué existir (por ejemplo, el ínfimo de $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ no existe).

En el siguiente ejemplo mostramos la existencia de un subespacio $X \in \mathbb{C}^{N \times N}$ que no es un ideal a la izquierda para el cual el ínfimo no existe, esto es, la función matricial de Christoffel no está definida.

Tomemos $N = 2$, $n = 1$, $z_0 = 1$, el subespacio

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\},$$

(que claramente no es un ideal a la izquierda) y una matriz de medidas W con los siguientes momentos:

$$(3.1.3) \quad \int dW(t) = Id_2, \int t dW(t) = \theta, \int t^2 dW(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}.$$

Supongamos que la función matricial de Christoffel $\lambda_{1,X}(z_0)$ existe. Por la definición (3.2.1), $\lambda_{1,X}(z_0)$ vendrá dada por

$$\lambda_{1,X}(z_0) = \inf \left\{ \int Q(t) dW(t) Q^*(t) : Q(z_0) = Id_2, Q \in X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^0 \right\}.$$

Por tanto, buscamos el ínfimo de $\int Q(t) dW(t) Q^*(t)$, donde $Q(z)$ es, según la elección de nuestro espacio X , un polinomio matricial de la forma

$$(3.1.4) \quad Q(z) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} z + C, \quad C \in \mathbb{C}^{N \times N},$$

y $Q(z_0) = Id_2$.

Si escribimos $C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}$, de la condición $Q(z_0) = Id_2$ y de la expresión (3.1.4) se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Por tanto, podemos escribir el polinomio Q como sigue

$$(3.1.5) \quad Q(z) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}.$$

De esta manera, teniendo en cuenta (3.1.3) se obtiene

$$\int Q(t) dW(t) Q^*(t) = \begin{pmatrix} |a|^2 + |1-a|^2 & 0 \\ 0 & 14|a|^2 + |1-a|^2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la función matricial de Christoffel será (si existe)

$$(3.1.6) \quad \lambda_{1,X}(z_0) = \inf \left\{ \begin{pmatrix} |a|^2 + |1-a|^2 & 0 \\ 0 & 14|a|^2 + |1-a|^2 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C} \right\}.$$

Como para $a \in \mathbb{C}$ se verifica

$$\begin{pmatrix} |a|^2 + |1-a|^2 & 0 \\ 0 & 14|a|^2 + |1-a|^2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} (\Re a)^2 + (1 - \Re a)^2 & 0 \\ 0 & 14(\Re a)^2 + (1 - \Re a)^2 \end{pmatrix},$$

basta considerar $a \in \mathbb{R}$.

Para demostrar que el ínfimo anterior no existe, probaremos en primer lugar que si existiera, debería ser la matriz

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 14/15 \end{pmatrix};$$

posteriormente, daremos una matriz C que es cota inferior en (3.1.6) y tal que no se puede comparar con A_0 .

Para demostrar que si existiera el ínfimo, éste vendría dado por A_0 , probamos lo siguiente:

- A_0 es una cota inferior en (3.1.6), y
- si $B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ es el ínfimo en (3.1.6) entonces $B = A_0$.

Efectivamente, se tiene que A_0 es cota inferior en (3.1.6)

$$A_0 \leq \begin{pmatrix} a^2 + (1-a)^2 & 0 \\ 0 & 14a^2 + (1-a)^2 \end{pmatrix}, \text{ para todo } a \in \mathbb{R},$$

ya que, el mínimo de las funciones $a^2 + (1-a)^2$ y $14a^2 + (1-a)^2$ son $1/2$ y $14/15$ respectivamente.

Por otro lado, supongamos que el ínfimo en (3.1.6) viene dado por la matriz

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \gamma \end{pmatrix}.$$

Entonces, como A_0 es una cota inferior, debe pasar que $A_0 \leq B$, esto es,

$$(3.1.7) \quad \begin{pmatrix} \alpha - 1/2 & \beta \\ \bar{\beta} & \gamma - 14/15 \end{pmatrix} \geq \theta,$$

de donde se deduce que

$$(3.1.8) \quad (\alpha - 1/2)(\gamma - 14/15) - |\beta|^2 \geq 0, \quad \alpha \geq 1/2, \quad \gamma \geq 14/15.$$

Ahora bien, como B es el ínfimo, B es cota inferior y por tanto

$$(3.1.9) \quad \begin{pmatrix} a^2 + (1-a)^2 - \alpha & -\beta \\ -\bar{\beta} & 14a^2 + (1-a)^2 - \gamma \end{pmatrix} \geq \theta, \text{ para todo } a \in \mathbb{R}.$$

En particular, la entrada (1, 1) de la matriz anterior debe ser positiva, luego

$$(3.1.10) \quad a^2 + (1-a)^2 \geq \alpha, \text{ para todo } a \in \mathbb{R}.$$

De (3.1.8) y (3.1.10) se deduce que $\alpha = 1/2$. Por otro lado, el determinante de la matriz (3.1.9) tiene que ser mayor o igual que cero para cualquier $a \in \mathbb{R}$, esto es

$$(3.1.11) \quad (a^2 + (1 - a)^2 - 1/2)(14a^2 + (1 - a)^2 - \gamma) - |\beta|^2 \geq 0, \text{ para todo } a \in \mathbb{R},$$

de donde, eligiendo $a = 1/2$ se deduce que $\beta = 0$. Finalmente, de (3.1.11) y (3.1.8) se deduce que

$$14a^2 + (1 - a)^2 \geq \gamma \geq \frac{14}{15}, \text{ para todo } a \in \mathbb{R},$$

luego $\gamma = 14/15$, quedando entonces demostrado que $B = A_0$.

Consideramos ahora la siguiente matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Veamos que es cota inferior en (3.1.6) y que no se puede comparar con A_0 .

Probamos primero que

$$\begin{pmatrix} a^2 + (1 - a)^2 - \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 14a^2 + (1 - a)^2 - \frac{1}{3} \end{pmatrix} \geq \theta.$$

Teniendo en cuenta los elementos de la diagonal son positivos (recordemos que el mínimo de las funciones $a^2 + (1 - a)^2$ y $14a^2 + (1 - a)^2$ son $1/2$ y $14/15$ respectivamente), basta ver que el determinante es positivo. El determinante viene dado por

$$\left(a^2 + (1 - a)^2 - \frac{1}{3}\right)\left(14a^2 + (1 - a)^2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{9} = 30a^4 - 34a^3 + \frac{46}{3}a^2 - \frac{8}{3}a + \frac{1}{3},$$

que puede descomponerse como sigue

$$a^2(30a^2 - 34a + 10) + \frac{16}{3}a^2 - \frac{8}{3}a + \frac{1}{3};$$

los discriminantes de $30a^2 - 34a + 10$ y $16/3a^2 - 8/3a + 1/3$ son iguales a -44 y 0 respectivamente, por tanto $30a^4 - 34a^3 + 46/3a^2 - 8/3a + 1/3 \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$. Por tanto, debería de ser

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 14/15 \end{pmatrix},$$

pero el determinante de

$$\begin{pmatrix} 1/2 - 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 14/15 - 1/3 \end{pmatrix}$$

es $-1/90$. Por tanto, el ínfimo en (3.1.6) no existe.

Sin embargo, demostraremos en la sección 2 que cuando X es un ideal a la izquierda, el ínfimo en (3.1.2) existe y se alcanza; en particular, dado X un ideal a la izquierda, encontraremos una expresión (análoga a (3.1.1)) para las funciones matriciales de Christoffel en términos de cualquier sucesión $(P_n)_n$ de polinomios matriciales ortonormales con respecto a W (recordemos que esta sucesión es única salvo multiplicación a la izquierda por matrices unitarias). Para ello, se usa el hecho de que si U_X es la matriz unitaria asociada a $(P_n)_n$ y X (ver nota (2.2.4)), entonces el polinomio

$$(3.1.12) \quad R_z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(z)^* P_k(t) + P_n(z)^* U_X^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} U_X P_n(t),$$

es un núcleo para W en z con respecto a $X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$, esto es, el polinomio matricial $R_z^{-1}(z)R_z(t) \in X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$ y $\int P(t)dW(t)R_z(t)^* = P(z)$ para cualquier polinomio $P \in X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$. Asimismo, probaremos una propiedad de homogeneidad de las funciones matriciales de Christoffel.

En la sección 3 probaremos que las funciones matriciales de Christoffel también satisfacen una importante propiedad extremal; consideramos la siguiente relación de equivalencia en el conjunto de las matrices peso:

$$(3.1.13) \quad \nu \sim_{n,X} W \text{ si } \int P(t) d\nu(t) Q^*(t) = \int P(t) dW(t) Q^*(t),$$

para cualesquiera polinomios $P, Q \in X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$. Se tiene entonces que dado $x \in \mathbb{R}$, excepto para un conjunto finito \mathcal{A} de números reales, $\lambda_{n,X}(x)$ es la máxima masa alcanzada en x para una matriz de medidas $\nu \sim_{n,X} W$. Daremos una expresión explícita de la matriz peso que alcanza dicho máximo y determinaremos el conjunto \mathcal{A} . Para probar esta propiedad extremal usaremos las fórmulas de cuadratura no gaussianas encontradas en la sección 2.2.2 del capítulo 2.

Completamos la sección 3 dando ejemplos que muestran que el máximo no se alcanza en general cuando $x \in \mathcal{A}$.

Finalmente, en la sección 4 se estudia el comportamiento asintótico de las funciones matriciales de Christoffel; concretamente, estudiaremos el límite cuando n tiende a infinito de

$$(3.1.14) \quad (P_n(z)^*)^{-1}(\lambda_{n, X_n}(z))^{-1}P_n^{-1}(z),$$

donde $(P_n)_n$ es una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a W y X_n es un cierto ideal a la izquierda asociado al polinomio P_n (este comportamiento asintótico en el caso escalar fue estudiado por Nevai en [N1, p. 31, th. 11]). Los resultados sobre el comportamiento asintótico se demostrarán para polinomios matriciales en la clase de Nevai matricial introducida en [D4] (ver página 3 en los preliminares).

3.2. Expresión de las funciones de Christoffel en términos de polinomios matriciales ortonormales

En lo que sigue, supondremos dados un número entero n no negativo y un ideal a la izquierda $X \subset \mathbb{C}^{N \times N}$. Consideraremos la función matricial de Christoffel $\lambda_{n, X}$

$$(3.2.1) \quad \lambda_{n, X}(z) = \inf \left\{ \int Q(t) dW(t) Q^*(t) : Q(z) = Id_N, Q \in X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1} \right\}.$$

En esta sección daremos una expresión explícita para las funciones matriciales de Christoffel en términos de $(P_n)_n$ a partir de la expresión de un polinomio núcleo para W en z con respecto a $X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$.

Recordemos que la dimensión de cualquier ideal a la izquierda $X \subset \mathbb{C}^{N \times N}$ debe ser, según el lema 2.1.2, un múltiplo de N . Supongamos a partir de ahora que la dimensión del ideal a la izquierda X es hN , con h un número fijado entre 0 y $N - 1$. Al igual que en el capítulo anterior, a cada ideal a la izquierda $X \subset \mathbb{C}^{N \times N}$ le asociaremos una matriz unitaria U_X

verificando que la matriz $U_X \Delta_n M_0^{-1}$ es triangular inferior, y escribiremos

$$(3.2.2) \quad X = \left\{ C \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} M_0 : C \in \mathbb{C}^{N \times N} \right\},$$

con M_0 no singular (ver nota 2.2.4).

El resultado principal de esta sección es el siguiente

Teorema 3.2.1. *Sean W y $(P_n)_n$ una matriz peso y una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a W respectivamente. Sea $X \subseteq \mathbb{C}^{N \times N}$ un ideal a la izquierda de dimensión hN , y U_X su matriz unitaria asociada (ver nota 2.2.4). Entonces, la función matricial de Christoffel definida por (3.2.1) viene dada por la fórmula*

$$(3.2.3) \quad \lambda_{n,X}(z) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} P_k(z)^* P_k(z) + P_n(z)^* U_X^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} U_X P_n(z) \right)^{-1}.$$

La demostración del teorema 3.2.1 es una consecuencia de los siguientes lemas:

Lema 3.2.2. *Sea T un subespacio lineal de $\mathbb{P}_{N \times N}^n$, $z \in \mathbb{C}$ y $R_z \in \mathbb{P}_{N \times N}^n$ un polinomio núcleo para W en z con respecto a T , i.e., $R_z^{-1}(z)R_z(t) \in T$ y $\int P(t)dW(t)R_z^*(t) = P(z)$ para cualquier polinomio $P \in T$. Entonces:*

$$\lambda_T(z) = \inf \left\{ \int Q(t)dW(t)Q^*(t) : Q(z) = Id_N, Q \in T \right\} = R_z^{-1}(z),$$

y el ínfimo se alcanza en $Q(t) = R_z^{-1}(z)R_z(t)$.

Lema 3.2.3. *Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a W , sea $X \subseteq \mathbb{C}^{N \times N}$ un ideal a la izquierda de dimensión hN escrito como en (3.2.2) y U_X su matriz unitaria asociada que verifica que la matriz $U_X \Delta_n M_0^{-1}$ es triangular inferior (ver nota 2.2.4). Entonces, el polinomio*

$$(3.2.4) \quad R_z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(z)^* P_k(t) + P_n(z)^* U_X^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} U_X P_n(t),$$

es un polinomio núcleo para W en z con respecto a $X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$.

Demostración del lema 3.2.2.

Notemos primero que como $R_z^{-1}(z)R_z(t) \in T$, entonces

$$\int R_z(t)dW(t)R_z^*(t) = R_z(z),$$

de donde se deduce que $R_z(z)$ es hermitica.

Para cualquier polinomio matricial $P \in T$ tal que $P(z) = Id_N$, se verifica

(3.2.5)

$$\begin{aligned} \theta &\leq \int (P(t) - R_z^{-1}(z)R_z(t)) dW(t) (P(t) - R_z^{-1}(z)R_z(t))^* \\ &= \int P(t) dW(t) P^*(t) - \int P(t) dW(t) R_z^*(t)R_z^{-1}(z) \\ &\quad - \int R_z^{-1}(z)R_z(t) dW(t) P^*(t) + \int R_z^{-1}(z)R_z(t) dW(t) R_z^*(t)R_z^{-1}(z) \\ &= \int P(t) dW(t) P^*(t) - P(z)R_z^{-1}(z) - R_z^{-1}(z)P^*(z) + R_z^{-1}(z) \\ &= \int P(t) dW(t) P^*(t) - R_z^{-1}(z), \end{aligned}$$

de donde se deduce que $R_z^{-1}(z)$ es una cota inferior para

$$\left\{ \int Q(t) dW(t) Q^*(t) : Q(z) = Id_N, Q \in T \right\}.$$

Por otro lado, usando de nuevo que $R_z^{-1}(z)R_z(t) \in T$ y que $R_z(z)$ es hermitico obtenemos que

$$\int R_z^{-1}(z)R_z(t)dW(t)R_z^*(t)R_z^{-1}(z) = R_z^{-1}(z)R_z(z)R_z^{-1}(z) = R_z^{-1}(z),$$

lo cual prueba que $R_z^{-1}(z)$ es el ínfimo y se alcanza en $Q(t) = R_z^{-1}(z)R_z(t)$. \square

Demostración del lema 3.2.3.

Para probar que el polinomio $R_z(t)$ dado por (3.2.4) es un polinomio núcleo para W en z con respecto a $X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$, tenemos que demostrar que

$R_z^{-1}(z)R_z(t) \in X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$ y que $\int P(t)dW(t)R_z^*(t) = P(z)$ para cualquier polinomio $P \in X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$.

Para demostrar que $R_z^{-1}(z)R_z(t) \in X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$, como claramente el polinomio matricial $R_z^{-1}(z)R_z(t)$ es de grado n , basta probar que el coeficiente líder de $R_z^{-1}(z)R_z(t)$ pertenece al espacio X . Ahora bien, como X es un ideal a la izquierda, se tendrá que si el coeficiente líder de $R_z(t)$ pertenece a X , entonces el coeficiente líder de $R_z^{-1}(z)R_z(t)$ también estará en X . Veamos entonces que el coeficiente líder de $R_z(t)$, que viene dado por $P_n(z)^*U_X^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} U_X \Delta_n$, pertenece a X .

Efectivamente, por la elección de U_X , la matriz $U_X \Delta_n$ es igual a una matriz triangular inferior multiplicada a la derecha por M_0 , i.e. $U_X \Delta_n = DM_0$, con D triangular inferior. Pero entonces,

$$\begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} U_X \Delta_n = \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} M_0 \in X,$$

esto es, el coeficiente líder de $R_z(t)$ pertenece a X .

Fijemos ahora un polinomio matricial $P \in X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$. Para demostrar que $\int P(t)dW(t)R_z^*(t) = P(z)$ consideramos el desarrollo de Fourier de $P(t)$, $P(t) = \sum_{i=0}^n A_i P_i(t)$, donde los coeficientes $A_i = \int P(t) dW P_i^*(t)$, $i = 1, \dots, n$, y $A_n \Delta_n \in X$.

Como $A_n \Delta_n \in X$, según la expresión (3.2.2) del ideal a la izquierda X , existirá una matriz $C \in \mathbb{C}^{N \times N}$ tal que

$$(3.2.6) \quad A_n \Delta_n = C \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} M_0.$$

Usando la ortogonalidad de $(P_n)_n$ con respecto a W se obtiene

(3.2.7)

$$\begin{aligned}
 & \int P(t) dW R_z(t)^* \\
 &= \int \sum_{i=0}^{n-1} A_i P_i(t) dW \sum_{k=0}^{n-1} P_k^*(t) P_k(z) + \int A_n P_n(t) dW \sum_{k=0}^{n-1} P_k^*(t) P_k(z) \\
 &+ \int \sum_{i=0}^{n-1} A_i P_i(t) dW P_n^*(t) U_X^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} U_X P_n(z) \\
 &+ \int A_n P_n(t) dW P_n^*(t) U_X^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} U_X P_n(z) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} A_i P_i(z) + A_n U_X^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} U_X P_n(z).
 \end{aligned}$$

Ahora bien, de (3.2.6) podemos escribir

$$A_n U_X^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} U_X P_n(z) = C \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} M_0 \Delta_n^{-1} U_X^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} U_X P_n(z).$$

Como por hipótesis la matriz $U_X \Delta_n M_0^{-1}$ es triangular inferior, se tiene que la matriz $M_0 \Delta_n^{-1} U_X^*$ es también triangular inferior y por tanto

$$\begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} M_0 \Delta_n^{-1} U_X^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} M_0 \Delta_n^{-1} U_X^*,$$

de donde se obtiene que

$$(3.2.8) \quad A_n U_X^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} U_X P_n(z) = A_n U_X^* U_X P_n(z) = A_n P_n(z).$$

De (3.2.7) y (3.2.8) se deduce que

$$\int P(t) dW R_z^*(t) = \sum_{i=0}^n A_i P_i(z) = P(z),$$

lo que concluye la demostración del lema 3.2.3. □

Cuando X es un ideal a la izquierda, también se satisface una propiedad de homogeneidad de las funciones matriciales de Christoffel. Efectivamente, para $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$, si escribimos

$$\lambda_{n,X,A}(z) = \inf \left\{ \int Q(t) dW(t) Q^*(t) : Q(z) = A, Q \in X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1} \right\},$$

entonces

Corolario 3.2.4. Si $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ y X es un ideal a la izquierda entonces

$$\lambda_{n,X,A}(z) = A \lambda_{n,X}(z) A^*.$$

Demostración.

Tomemos el polinomio núcleo $R_z(t)$ para W en z con respecto a $X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$. Entonces, por el lema 3.2.2 se tiene que $\lambda_{n,X}(z) = R_z^{-1}(z)$.

Consideremos el polinomio matricial $AR_z^{-1}(z)R_z(t)$ que evaluado en z verifica $AR_z^{-1}(z)R_z(z) = A$. Como X es un ideal a la izquierda, el polinomio matricial $AR_z^{-1}(z)R_z(t) \in X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$ y por consiguiente

$$\begin{aligned} \int AR_z^{-1}(z)R_z(t) dW(t) R_z^*(t) R_z^{-1}(z) A^* &= AR_z^{-1}(z)R_z(z)R_z^{-1}(z)A^* \\ &= AR_z^{-1}(z)A^* = A \lambda_{n,X}(z) A^*. \end{aligned}$$

Para demostrar que para cualquier polinomio matricial $P \in X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$ tal que $P(z) = A$, $\int P(t) dW(t) P^*(t) \geq A \lambda_{n,X}(z) A^*$ basta proceder como en (3.2.5). \square

3.3. Propiedad extremal de las funciones matriciales de Christoffel en la recta real

En esta sección, fijado un número entero h , $0 \leq h < N$, dado un ideal a la izquierda $X \subset \mathbb{C}^{N \times N}$ de dimensión hN , consideraremos la siguiente relación de equivalencia en el conjunto de las matrices peso en función del ideal X :

$$(3.3.1) \quad \nu \sim_{n,X} W \text{ si } \int P(t) d\nu(t) Q^*(t) = \int P(t) dW(t) Q^*(t),$$

para cualesquiera polinomios $P, Q \in X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$.

Demostraremos la siguiente propiedad extremal de las funciones matriciales de Christoffel, donde se hará uso de las fórmulas de cuadratura no gaussianas encontradas en la sección 2.2.2. del capítulo anterior.

Teorema 3.3.1. Sean X un ideal a la izquierda de dimensión hN y \mathcal{A} el siguiente conjunto

(3.3.2)

$$A = \{\text{ceros de } P_{n-1}(t)\} \cup \{\text{ceros de } [U_X P_n(t) P_{n-1}^{-1}(t) (A_n^*)^{-1} U_X^*]_{1,1}\}$$

que consta de a lo sumo $(n-1)N + h$ números reales (ver teorema 2.2.5). Entonces, para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$, $\lambda_{n,X}(x)$ es la máxima masa alcanzada en x para una matriz de medidas $\nu \sim_{n,X} W$, es decir,

(3.3.3)
$$\lambda_{n,X}(x) = \max \{ \nu(\{x\}) : \nu \sim_{n,X} W \}.$$

Daremos explícitamente la matriz peso ν , $\nu \sim_{n,X} W$, que alcanza dicho máximo.

Nota 3.3.2. Antes de demostrar el teorema, observemos que el conjunto de matrices peso $\{\nu : \nu \sim_{n,X} W\}$ (ver (3.3.1) para la definición de la relación de equivalencia $\sim_{n,X}$) coincide con el conjunto de soluciones de un cierto problema de momentos generado por W . Más precisamente, si denotamos por $V_{n,X}$ al conjunto de matrices peso siguiente

$$V_{n,X} = \left\{ \nu : \begin{array}{l} \int t^p dW(t) = \int t^p d\nu(t), \quad p = 0, \dots, n. \\ C \int t^{n+1} dW(t) = C \int t^{n+1} d\nu(t), \quad C \in X, \\ C \int t^{n+2} dW(t) D^* = C \int t^{n+2} d\nu(t) D^*, \quad C, D \in X. \end{array} \right\},$$

entonces, es fácil comprobar que $\nu \in V_{2n-2,X}$ si y solo si $\nu \sim_{n,X} W$.

Teniendo esto en cuenta, el teorema 3.3.1 es una extensión del teorema 3.1 [DL2, pp. 719].

La nota 3.3.2 nos será de utilidad en los ejemplos con los que se finaliza esta sección que muestran que, en general, el máximo en (3.3.3) no se alcanza cuando $x \in \{\text{ceros de } P_{n-1}(t)\} \cup \{\text{ceros de } [U_X P_n(t) P_{n-1}^{-1}(t) (A_n^*)^{-1} U_X^*]_{1,1}\}$.

Probemos ahora el teorema 3.3.1

Demostración del teorema 3.3.1.

Fijemos $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$ y consideremos el polinomio núcleo R_x para W en x con respecto a $X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$ dado en el lema 3.2.3. Por el lema 3.2.2 tenemos que

$$\lambda_{n,X}(x) = R_x^{-1}(x).$$

Para una matriz de medidas ν con $\nu \sim_{n,X} W$, por la definición de la relación de equivalencia $\sim_{n,X}$ (ver (3.3.1)), y teniendo en cuenta que $R_x \in X \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$, se tiene que

$$(\lambda_{n,X}(x))^{-1} = \int R_x(t) dW(t) R_x^*(t) = \int R_x(t) d\nu(t) R_x^*(t),$$

y por tanto

$$(\lambda_{n,X}(x))^{-1} \geq R_x(x)\nu(\{x\})R_x^*(x) = (\lambda_{n,X}(x))^{-1} \nu(\{x\}) (\lambda_{n,X}(x))^{-1},$$

de donde deducimos que $\lambda_{n,X}(x) - \nu(\{x\}) \geq \theta$ para todo $\nu \sim_{n,X} W$, esto es, $\lambda_{n,X}(x)$ es una cota superior del conjunto $\{\nu(\{x\}) : \nu \sim_{n,X} W\}$.

Para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$, tomemos ahora los nodos $x_k, k = 1, \dots, m$, y los coeficientes de cuadratura $\Gamma_k, k = 1, \dots, m$, dados en el teorema 2.2.5. Consideramos la matriz peso $\mu = \sum_{k=1}^m \Gamma_k \delta_{x_k}$. De la parte 1 del teorema 2.2.5, se sigue que $\mu \sim_{n,X} W$, y por la parte 2, se tiene para cierto $k_0, 1 \leq k_0 \leq m$, que

$$\mu(\{x\}) = \Gamma_{k_0} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} P_k(z)^* P_k(z) + P_n(z)^* U_X^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} U_X P_n(z) \right)^{-1}.$$

Observemos ahora que la expresión anterior para el coeficiente de cuadratura Γ_{k_0} coincide con la expresión (3.2.3) para la función matricial de Christoffel $\lambda_{n,X}(x)$ dada en el teorema 3.2.1. Tenemos por tanto que $\mu(\{x\}) = \Gamma_{k_0} = \lambda_{n,X}(x)$, de donde se deduce que $\lambda_{n,X}(x)$ es el máximo del conjunto $\{\nu(\{x\}) : \nu \sim_{n,X} W\}$. \square

Veamos ahora que cuando x es un cero del polinomio matricial $P_{n-1}(t)$ o un cero de la función racional matricial $[U_X P_n(t) P_{n-1}^{-1}(t) (A_n^*)^{-1} U_X^*]_{1,1}$, el máximo en el teorema 3.3.1, cuando existe, puede no alcanzarse.

Consideramos primero el siguiente ejemplo: Tomemos $n = 2, P_0(t) = Id_N, P_1(t) = t Id_N$ y $X = \emptyset$; Claramente, $t = 0$ es un cero del polinomio matricial $P_1(t)$.

Por el teorema 3.2.1, tenemos que

$$\lambda_{2,X}(0) = \sum_{k=0}^1 P_k(0)^* P_k(0) = Id_N,$$

y de la demostración del teorema 3.3.1 sabemos que Id_N es una cota superior para las matrices de medidas $\mu \sim_{2,X} W$. Eligiendo

$$\mu_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) Id_N \delta_0 + \frac{1}{2n^2} Id_N (\delta_{-n} + \delta_n),$$

observamos que el supremo de $\mu(\{0\})$, $\mu \sim_{2,X} W$, es Id_N .

Supongamos que existe una matriz de medidas $\mu \sim_{2,X} W$ tal que

$$\mu(\{0\}) = \lambda_{2,X}(0) = \max\{\nu(\{x\}) : \nu \sim_{2,X} W\} = Id_N.$$

Según la nota 3.3.2 $\mu \sim_{2,X} W$ si y solo si $\mu \in V_{2,X}$, esto es,

$$(3.3.4) \quad \int d\mu(t) = Id_N, \quad \int t d\mu(t) = \theta, \quad \int t^2 d\mu(t) = Id_N.$$

Como $\mu(\{0\}) = Id_N$, se tendrá que $\mu \geq \delta_0 Id_N$ y por tanto

$$Id_N = \int d\mu(t) \geq \int d(Id_N \delta_0)(t) = Id_N.$$

Por consiguiente, $\mu = \delta_0 Id_N$, pero $\int t^2 d(Id_N \delta_0)(t) = \theta$ lo que contradice (3.3.4).

Consideramos ahora un segundo ejemplo mostrando que el máximo en (3.3.3) no se alcanza cuando x es un cero de la función racional matricial $[U_X P_n(t) P_{n-1}^{-1}(t) (A_n^*)^{-1} U_X^*]_{1,1}$. Tomemos $n = 1$, h cualquier número entero tal que $0 \leq h < N$ y el ideal a la izquierda X dado por

$$X = \left\{ C \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} : C \in \mathbb{C}^{N \times N} \right\};$$

Consideremos $P_1(t) = t Id_N$ (esto es, los coeficientes de recurrencia $B_0 = \theta$ y $A_1 = Id_N$).

Bajo estas condiciones, podemos tomar la matriz asociada al ideal X , $U_X = Id_N$ (ver nota 2.2.4).

Se tiene entonces que $U_X P_1(t) P_0^{-1}(t) (A_1^*)^{-1} U_X^* = t Id_N$, y por tanto $t = 0$ es un cero de $[U_X P_1(t) P_0^{-1}(t) (A_1^*)^{-1} U_X^*]_{1,1}$.

Por el teorema 3.2.1, tenemos que $\lambda_{1,X}(0) = Id_N$, y procediendo como en el ejemplo anterior se puede demostrar que el supremo de $\mu(\{0\})$, $\mu \sim_{1,X} W$, es igual a Id_N .

Supongamos que existe una matriz de medidas $\mu \sim_{1,X} W$ tal que

$$\mu(\{0\}) = \lambda_{1,X}(0) = \max \{ \nu(\{x\}) : \nu \sim_{1,X} W \} = Id_N.$$

Como $\mu \sim_{1,X} W$, según la nota 3.3.2, $\mu \in V_{1,X}$, es decir,

$$(3.3.5) \quad \int d\mu(t) = Id_N, \quad C \int t d\mu(t) = \theta, \quad C \in X,$$

$$(3.3.6) \quad C \int t^2 d\mu(t) D^* = CD^*, \quad C, D \in X.$$

Dado que $\mu(\{0\}) = Id_N$ se verifica que $\mu \geq \delta_0 Id_N$ y por tanto

$$Id_N = \int d\mu(t) \geq \int d(Id_N \delta_0)(t) = Id_N.$$

Se tiene entonces que $\mu = \delta_0 Id_N$. Pero para cualesquiera $C, D \in X$, $C \int t^2 d(Id_N \delta_0)(t) D^* = \theta$ que es una contradicción con (3.3.6).

3.4. Comportamiento asintótico

Nuestro objetivo en esta sección es dar el comportamiento asintótico de

$$(3.4.1) \quad (P_n(z)^*)^{-1} (\lambda_{n, X_n}(z))^{-1} P_n^{-1}(z),$$

con X_n un cierto ideal a la izquierda asociado al polinomio P_n .

El comportamiento asintótico se demostrará para polinomios matriciales en la clase de Nevai matricial (ver pág. 8 en los preliminares).

Cuando A es no singular, el comportamiento asintótico de (3.4.1) viene dado por la matriz peso para los polinomios matriciales de Chebyshev de segunda especie (ver (1.0.17) en los preliminares).

Para establecer los resultados de comportamiento asintótico necesitamos la siguiente definición: Λ_n denotará al conjunto de los ceros del polinomio matricial P_n , i.e., los ceros de $\det(P_n)$. Escribimos

$$\Gamma = \bigcap_{N \geq 0} M_N, \quad \text{donde } M_N = \overline{\bigcup_{n \geq N} \Lambda_n}.$$

El resultado sobre el comportamiento asintótico de (3.4.1) es el siguiente

Teorema 3.4.1. *Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales en la clase de Nevai matricial $M(A, B)$. Eliijamos $M_n \in \mathbb{C}^{N \times N}$ tales que $\Delta_n M_n^{-1}$ es triangular inferior, y consideremos los ideales a la izquierda generados por M_n :*

$$X_n = \left\{ C \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} M_n : C \in \mathbb{C}^{N \times N} \right\}.$$

(a) Si $z \in \mathbb{R} \setminus \Gamma$ entonces

$$(3.4.2) \quad \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n(z)^*)^{-1} (\lambda_{n, X_n}(z))^{-1} P_n^{-1}(z) \\ = -A^* F'_{A,B}(z) A + \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, entonces

$$(3.4.3) \quad \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n(z)^*)^{-1} (\lambda_{n, X_n}(z))^{-1} P_n^{-1}(z) \\ = -A^* \frac{\Im F_{A,B}(z)}{\Im z} A + \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde la función matricial $F_{A,B}$ verifica la ecuación

$$A^* F_{A,B}(z) A F_{A,B}(z) + (B - z Id_N) F_{A,B}(z) + Id_N = \theta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma,$$

y la convergencia es uniforme para z en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Es más, si A no es singular entonces $F_{A,B}(z) = \int \frac{1}{z-t} dW_{A,B}(t)$, donde $W_{A,B}$ es la matriz de medidas que ortonormaliza a los polinomios de Chebyshev de segunda especie.

El comportamiento asintótico de las funciones de Christoffel dado en el teorema 3.4.1 es una consecuencia de la asintótica del cociente para los polinomios matriciales en la clase de Nevai (ver (1.0.19) en los preliminares).

Vamos a demostrar el teorema 3.4.1

Demostración del teorema 3.4.1.

Los ideales a la izquierda X_n están generados por las matrices M_n que verifican que la matriz $\Delta_n M_n^{-1}$ es triangular inferior. Por tanto, podemos tomar $U_{X_n} = Id_N$ en el teorema 3.2.1. Las funciones matriciales de Christoffel asociadas a $X_n \oplus \mathbb{P}_{N \times N}^{n-1}$ vienen dadas, según dicho teorema, por

$$\lambda_{n, X_n}(z) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} P_k(z)^* P_k(z) + P_n(z)^* \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} P_n(z) \right)^{-1}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} & (P_n(z)^*)^{-1} (\lambda_{n, X_n}(z))^{-1} P_n^{-1}(z) \\ &= (P_n(z)^*)^{-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} P_k(z)^* P_k(z) \right) P_n^{-1}(z) + \begin{pmatrix} Id_h & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y por tanto, basta demostrar el comportamiento asintótico del primer término.

(a) Si $z \in \mathbb{R} \setminus \Gamma$, entonces $P(z)^* = P^*(z)$. Derivando en (1.0.19) obtenemos

$$(3.4.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[P'_{n-1}(z) P_n^{-1}(z) + P_{n-1}(z) (P_n^{-1}(z))' \right] = (F_{A,B}(z))' A.$$

Usando la fórmula de Christoffel-Darboux dada por (2.3) de [D3] en p. 1182 (ver fórmula (1.0.9) en los preliminares)

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_k^*(z) P_k(z) = P_{n-1}^*(z) A_n P'_n(z) - P_n^*(z) A_n^* P'_{n-1}(z),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} (3.4.5) \quad & (P_n^*(z))^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} P_k^*(z) P_k(z) \right) P_n^{-1}(z) \\ &= P_n^*(z)^{-1} P_{n-1}^*(z) A_n P'_n(z) P_n^{-1}(z) - A_n^* P'_{n-1}(z) P_n^{-1}(z). \end{aligned}$$

Derivando la fórmula $P_n(z)P_n^{-1}(z) = Id_N$, obtenemos que

$$P'_n(z)P_n^{-1}(z) + P_n(z)(P_n^{-1}(z))' = \theta,$$

y por tanto de (3.4.5) se sigue que

$$\begin{aligned} (P_n^*(z))^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} P_k^*(z)P_k(z) \right) P_n^{-1}(z) \\ = -P_n^*(z)^{-1}P_{n-1}^*(z)A_nP_n(z)(P_n^{-1}(z))' - A_n^*P'_{n-1}(z)P_n^{-1}(z). \end{aligned}$$

Usando que $P_{n-1}^*(z)A_nP_n(z)$ es hermítica, $z \in \mathbb{R} \setminus \Gamma$, (ver [D3], (2,2) en p.1182, o fórmula (1.0.8)) en los preliminares) finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} (3.4.6) \quad (P_n^*(z))^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} P_k^*(z)P_k(z) \right) P_n^{-1}(z) \\ = -A_n^* [P_{n-1}(z)(P_n^{-1}(z))' + P'_{n-1}(z)P_n^{-1}(z)]; \end{aligned}$$

Basta ahora con aplicar (3.4.4).

(b) Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, entonces $P(z)^* = P^*(\bar{z})$.

Aplicando ahora la fórmula de Christoffel-Darboux dada en (2.1) de [D3], p. 1182, (ver (1.0.7) en los preliminares)

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_k(z)^*P_k(z) = \frac{P_{n-1}(z)^*A_nP_n(z) - P_n(z)^*A_n^*P_{n-1}(z)}{z - \bar{z}};$$

multiplicando la ecuación anterior a la izquierda por $(P_n(z)^*)^{-1}$ y a la derecha por $P_n^{-1}(z)$, obtenemos

$$\begin{aligned} (P_n(z)^*)^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} P_k(z)^*P_k(z) \right) P_n^{-1}(z) \\ = \frac{(P_n(z)^*)^{-1}P_{n-1}(z)^*A_n - A_n^*P_{n-1}(z)P_n^{-1}(z)}{z - \bar{z}}. \end{aligned}$$

Basta ahora con aplicar el resultado sobre la asintótica del cociente demostrados en los teoremas 1.1 y 1.2 de [D4](ver (1.0.19) en los preliminares).

□

Si escribimos $\sum_{j=0}^{n-1} P_j(z)^* P_j(z)$ en términos de la transformada de Cauchy de una cierta sucesión de medidas discretas $(\mu_n)_n$, se puede dar otra demostración alternativa del teorema 3.4.1.

Si usamos la fórmula de cuadratura con nodos en los ceros $x_{n,k}$, $k = 1, \dots, m$, del polinomio matricial $P_n(t)$ y coeficientes de cuadratura las matrices $\Gamma_{n,k}$ dadas en el teorema 3.1 de [D3] (ver teorema 1.0.4 en los preliminares), obtenemos

(3.4.7)

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} P_j(z)^* P_j(z) &= \int \left(\sum_{j=0}^{n-1} P_j(z)^* P_j(t) \right) dW(t) \left(\sum_{i=0}^{n-1} P_i(t)^* P_i(z) \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=0}^{n-1} P_j(z)^* P_j(x_{n,k}) \right) \Gamma_{n,k} \left(\sum_{i=0}^{n-1} P_i^*(x_{n,k}) P_i(z) \right). \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de Christoffel-Darboux (ver (2.1) de [D3] en p. 1182, o fórmula (1.0.7) en los preliminares) en (3.4.7), y usando que $P_n(x_{n,k})\Gamma_{n,k} = \Gamma_{n,k}P_n^*(x_{n,k}) = \theta$ (ver parte (4) del teorema 2.3 de [D3] o seguir el mismo razonamiento que en (2.2.18)) podemos escribir

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{n-1} P_j(z)^* P_j(z) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{P_n(z)^* A_n^* P_{n-1}(x_{n,k}) - P_{n-1}(z)^* A_n P_n(x_{n,k})}{\bar{z} - x_{n,k}} \cdot \Gamma_{n,k} \\ &\quad \cdot \frac{P_{n-1}^*(x_{n,k}) A_n P_n(z) - P_n^*(x_{n,k}) A_n^* P_{n-1}(z)}{z - x_{n,k}} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{P_n(z)^* A_n^* P_{n-1}(x_{n,k}) \Gamma_{n,k} P_{n-1}^*(x_{n,k}) A_n P_n(z)}{|z - x_{n,k}|^2}. \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

Por tanto tenemos

(3.4.9)

$$(P_n(z)^*)^{-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} P_j(z)^* P_j(z) \right) P_n^{-1}(z) = A_n^* \sum_{k=1}^m \frac{P_{n-1}(x_{n,k}) \Gamma_{n,k} P_{n-1}^*(x_{n,k})}{|z - x_{n,k}|^2} A_n$$

Consideremos ahora la siguiente sucesión de matrices de medidas discretas $(\mu_n)_n$ definidas por

$$(3.4.10) \quad \mu_n = \sum_{k=1}^m \delta_{x_{n,k}} P_{n-1}(x_{n,k}) \Gamma_{n,k} P_{n-1}^*(x_{n,k}), \quad n \geq 1,$$

entonces, (3.4.9) es igual a

$$(3.4.11) \quad A_n^* \int \frac{1}{|z-t|^2} d\mu_n(t) A_n.$$

La demostración se sigue de utilizar el comportamiento asintótico de $(\mu_n)_n$ como se da en [D2, secciones 2 y 4].

Capítulo 4

AUTOVALORES DE MATRICES DE TOEPLITZ POR BLOQUES

4.1. Preliminares

Sea $W = (\mu_{i,j})_{i,j=1}^N$ una matriz de medidas definida positiva, y sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a dicha matriz de medidas. Teniendo en cuenta la desigualdad $\theta \leq W \leq (\text{tr}W) Id_N$ (donde $\text{tr}W$ denota la medida traza de W), se tiene que cada medida $\mu_{i,j}$ es absolutamente continua con respecto a la medida traza ($\text{tr}W$). Por tanto, las derivadas de Radon-Nikodym $m_{i,j}(t) = \frac{d\mu_{i,j}(t)}{d\text{tr}W(t)}$ están bien definidas salvo en un conjunto de medida nula para la traza. La matriz de funciones

$$M(t) = (m_{i,j}(t))_{i,j=1}^N = \left(\frac{d\mu_{i,j}(t)}{d\text{tr}W(t)} \right)_{1 \leq i,j \leq N}$$

se denomina derivada de W respecto a su traza. La matriz $M(t)$ que es hermítica semidefinida positiva $\text{tr}W$ a.e., está formada por funciones medibles e integrables con respecto a $\text{tr}W$, y para cualquier conjunto de Borel $A \in \mathbb{R}$ se tiene la igualdad

$$\int_A M(t) d\text{tr}W(t) = W(A).$$

Escribiremos entonces a lo largo de este capítulo

$$(4.1.1) \quad dW(t) = M(t)d\text{tr}W(t)$$

con $M(t)$ la matriz de funciones derivada de la matriz de medidas W respecto a su traza.

A una función matricial $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$, verificando $G(t)M(t) = M(t)G^*(t)$ para todo $t \in \text{sop}(\text{tr}W)$ y las entradas de $t^n G(t)M(t) \in L^1(\text{tr}W)$, $n \in \mathbb{N}$, le asociamos una matriz infinita de Toeplitz por bloques T_G definida como

$$(4.1.2) \quad (T_G)_{[i,j]} = \int P_i(t)G(t)M(t)P_j^*(t)d\text{tr}W(t), \quad i, j \geq 0,$$

donde $A_{[i,j]} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ denota el bloque $[i, j]$ de la matriz $A = (A_{[i,j]})_{i,j \geq 0}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideraremos la matriz truncada de dimensión nN de la matriz de Toeplitz, que denotaremos por $(T_G)_{|nN}$, es decir,

$$(4.1.3) \quad (T_G)_{|nN} = \begin{pmatrix} \int P_0(t)G(t)M(t)P_0^*(t)d\text{tr}W(t) & \dots & \int P_0(t)G(t)M(t)P_{n-1}^*(t)d\text{tr}W(t) \\ \int P_1(t)G(t)M(t)P_0^*(t)d\text{tr}W(t) & \dots & \int P_1(t)G(t)M(t)P_{n-1}^*(t)d\text{tr}W(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int P_{n-1}(t)G(t)M(t)P_0^*(t)d\text{tr}W(t) & \dots & \int P_{n-1}(t)G(t)M(t)P_{n-1}^*(t)d\text{tr}W(t) \end{pmatrix}.$$

Sean $\{x_{G,i}\}_{i=1}^{nN}$ los autovalores (contando sus multiplicidades) de la matriz de Toeplitz truncada $(T_G)_{|nN}$ (que son números reales ya que $(T_G)_{|nN}$ es hermítica). Consideramos $(\sigma_{G,n})_n$ la sucesión de medidas contadoras de los autovalores de $(T_G)_{|nN}$, esto es,

$$(4.1.4) \quad \sigma_{G,n} = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^{nN} \delta_{x_{G,i}}, \quad n \geq 0.$$

El objetivo de este capítulo es estudiar la relación asintótica entre la sucesión de medidas $(\sigma_{G,n})_n$ y la sucesión de medidas contadoras $(\sigma_n)_n$ de los ceros de los polinomios ortogonales, donde

$$(4.1.5) \quad \sigma_n = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^{nN} \delta_{x_i}, \quad n \geq 0,$$

con $\{x_i\}_{i=1}^{nN}$ los ceros del polinomio $P_n(t)$. La sucesión de medidas $(\sigma_n)_n$ corresponde con la sucesión $(\sigma_{G,n})_n$ cuando $G(t) = tId_N$, ya que, en este caso, la matriz de Toeplitz truncada $(T_G)_{|nN}$ de dimensión nN coincide con la matriz de Jacobi (ver (1.0.3)) truncada $J_{|nN}$ de dimensión nN , cuyos autovalores son los ceros del polinomio matricial ortonormal n -ésimo $P_n(t)$ (ver lema 2.1 de [DL1] o lema 1.0.2 en los preliminares).

El resultado principal de este capítulo, que probaremos en la sección 2, lo establecemos para las funciones matriciales G hermiticas que se comporten “casi escalarmente con respecto a la matriz M ”, esto es, aquellas funciones matriciales $G(t)$ tales que $G(t)M(t) = M(t)G(t) = g(t)M(t)$, con g una función escalar continua. Este resultado es el siguiente:

Teorema 4.1.1. *Sea $dW(t) = M(t)dtrW(t)$ una matriz de medidas definida positiva y $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a W . Sea $G(t)$ una función matricial hermitica tal que se comporta casi escalarmente con respecto a la matriz M , esto es, $G(t) = G^*(t)$ y existe una función escalar g continua y acotada en $sop(trW)$ tal que $G(t)M(t) = M(t)G(t) = g(t)M(t)$. Sean $(\sigma_{G,n})_n$ y $(\sigma_n)_n$ las sucesiones de medidas dadas por (4.1.4) y (4.1.5) respectivamente. Si existe una medida σ tal que la sucesión $(\sigma_n)_n$ converge débilmente a σ entonces*

$$(4.1.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{G,n} = g^{-1} \circ \sigma,$$

donde

$$(4.1.7) \quad (g^{-1} \circ \sigma)(\Lambda) = \int_{\Lambda} g(t) d\sigma(t),$$

con $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto de Borel.

Es claro entonces que el teorema es cierto para funciones G de la forma $G(t) = g(t)Id_N$, con g una función escalar continua.

Veremos en la sección 2 como construir a partir de la matriz M , funciones matriciales G que se comportan casi escalarmente con respecto a la matriz M , completando la sección con un ejemplo de una función matricial G que no es escalar y tal que $G(t)M(t) = M(t)G(t) = g(t)M(t)$, con g una función escalar continua.

Finalmente, en la sección 3 aplicaremos los resultados obtenidos en la sección 2 al estudio de las funciones de segunda especie matriciales.

El problema de estudiar el comportamiento asintótico de los autovalores de la matriz de Toeplitz asociada a una sucesión de polinomios ortogonales $(p_n)_n$ y a una función real g tiene diversas aplicaciones en física y matemáticas. Por ejemplo, en [GS] se estudia dicha distribución asintótica bajo ciertas condiciones en la medida y exigiendo a la función g ser continua. En [N1] y [N3], Paul Nevai estudió dicho problema imponiendo condiciones más débiles y demostrando que se tiene convergencia cuando la función g pertenece a L^∞ . Posteriormente, Walter Van Assche estudió en [V] la conexión entre la distribución de los ceros de una sucesión de polinomios ortogonales y el comportamiento asintótico de los autovalores de la matriz de Toeplitz asociada a dicha sucesión de polinomios, generalizando así los resultados obtenidos por Paul Nevai. Dichos resultados los generalizamos en la sección 2 de este capítulo para el caso matricial.

4.2. Demostración del teorema 4.1.1

Dedicaremos esta sección a la demostración del teorema 4.1.1. La demostración sigue el mismo esquema que hace Walter Van Assche para el caso escalar en [V], que a su vez procede como P. Nevai en [N3], aunque aplica un resultado distinto para su demostración.

Para establecer la relación entre la convergencia de las medidas $(\sigma_{G,n})_n$ y $(\sigma_n)_n$ necesitaremos una tercera familia de medidas que pasamos a definir. Consideremos las matrices de medidas

$$(4.2.1) \quad d\nu_n(t) = \frac{1}{nN} \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t)M(t)P_i^*(t)d\text{tr}W(t), \quad n \geq 0.$$

Para una función G hermítica que se comporte “casi escalarmente con respecto a la matriz M ” con $G(t)M(t) = M(t)G(t) = g(t)M(t)$, y g una función escalar continua, definimos las matrices de medidas $G^{-1} \circ \nu_n$, $n \geq 0$ como

$$(4.2.2) \quad \int f(t)d(G^{-1} \circ \nu_n)(t) = \frac{1}{nN} \sum_{i=0}^{n-1} \int f(g(t))P_i(t)M(t)P_i^*(t)d\text{tr}W(t),$$

donde f es una función continua y acotada en $g(\text{sop}(\text{tr}W))$.

El teorema 4.1.1 será una consecuencia del siguiente teorema –que probaremos después– que establece la relación asintótica entre $(\sigma_{G,n})_n$ y $(G^{-1} \circ \nu_n)_n$.

Teorema 4.2.1. Sean $(\sigma_{G,n})_n$ y $(G^{-1} \circ \nu_n)_n$ las sucesiones de medidas dadas por (4.1.4) y (4.2.2) respectivamente. Entonces, en las hipótesis del teorema 4.1.1, si existe alguno de los límites $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{G,n}$ o $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{tr}(G^{-1} \circ \nu_n)$, existe el otro y

$$(4.2.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{G,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{tr}(G^{-1} \circ \nu_n).$$

Corolario 4.2.2. En particular, las sucesiones $\text{tr}(\nu_n)_n$ y $(\sigma_n)_n$ son asintóticamente equivalentes.

Demostración. Efectivamente, recordemos que para $G(t) = tId_N$, las sucesiones $(\sigma_{G,n})_n$ y $(\sigma_n)_n$ coinciden, y claramente, $G^{-1} \circ \nu_n = \nu_n$. Basta ahora aplicar el teorema 4.2.1. □

Estamos ya en condiciones para demostrar el teorema 4.1.1.

Demostración del teorema 4.1.1.

Por el teorema 4.2.1, se tiene que el límite débil de la sucesión $(\sigma_{G,n})_n$ coincide con el límite débil de la sucesión $(\text{tr}(G^{-1} \circ \nu_n))_n$. Basta entonces demostrar que si $(\sigma_n)_n$ converge débilmente a σ entonces $(\text{tr}(G^{-1} \circ \nu_n))_n$ también converge débilmente a σ . Para ello vamos a utilizar el método de los momentos (ver teorema 1.0.12 de los preliminares). Sea $l \geq 0$, por la definición (4.2.2) de las matrices de medidas $G^{-1} \circ \nu_n$ se tiene que

$$(4.2.4) \quad \int t^l d\text{tr}(G^{-1} \circ \nu_n)(t) = \int g^l(t) \text{tr} \left(\frac{1}{nN} \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t) M(t) P_i^*(t) d\text{tr} W(t) \right).$$

Por el corolario 4.2.2, el límite débil de la sucesión $(\text{tr} \nu_n)_n$ es el mismo que el de $(\sigma_n)_n$, entonces

$$(4.2.5) \quad \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int g^l(t) \text{tr} \left(\frac{1}{nN} \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t) M(t) P_i^*(t) d\text{tr} W(t) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int g^l(t) d\text{tr} \nu_n(t) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int g^l(t) d\sigma_n(t) = \int g^l(t) d\sigma(t) = \int t^l d(G^{-1} \circ \sigma)(t), \end{aligned}$$

que concluye la demostración del teorema, teniendo en cuenta que la función g es continua y que el soporte de la medida es compacto. □

El resto de la sección se dedicará a la demostración del teorema 4.2.1. La demostración será larga y requerirá de dos lemas que tienen interés por sí mismos. Los enunciaremos a continuación y los probaremos al final de la sección, de esta forma se podrá seguir más cómodamente la demostración del teorema 4.2.1.

En el primer lema consideraremos unas funciones vectoriales auxiliares que serán esenciales en la demostración del teorema 4.2.1. Se trata de las funciones que denotaremos por $\varphi_k(t) \in \mathbb{C}^N$, $k = 1, \dots, nN$, cuyas entradas son polinomios escalares de grado $n - 1$, que satisfacen, entre otras, ciertas propiedades de ortogonalidad. Para definir estas funciones $\varphi_k(t) \in \mathbb{C}^N$, $k = 1, \dots, nN$, y demostrar sus propiedades (lema 4.2.3) será suficiente suponer que G satisface $G(t)M(t) = M(t)G^*(t)$.

Sea $(T_G)_{|nN}$ la matriz de Toeplitz truncada de dimensión nN dada por (4.1.3). Sean $\{x_{G,i}\}_{i=1}^{nN}$ los autovalores de dicha matriz y $v_1, \dots, v_{nN} \in \mathbb{C}^{nN}$ un sistema ortonormal de autovectores a la izquierda de $(T_G)_{|nN}$. Es decir,

$$(4.2.6) \quad v_i(T_G)_{|nN} = x_{G,i}v_i \text{ y } v_i v_j^* = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, nN.$$

Escribimos los vectores v_i , $i = 1, \dots, nN$, como vectores filas por bloques, esto es,

$$v_i = (v_i^0, \dots, v_i^{n-1}), \quad i = 1, \dots, nN, \quad v_i^k \in \mathbb{C}^N, \quad k = 0, \dots, n - 1.$$

Definimos

$$(4.2.7) \quad \varphi_k(t) = \sum_{j=0}^{n-1} v_k^j P_j(t) \in \mathbb{C}^N, \quad k = 1, \dots, nN.$$

En lo que sigue, denotaremos por $\text{tr}(B)$ a la traza de una matriz B . Veamos en el siguiente lema que se demostrará al final de esta sección las propiedades de estas funciones.

Lema 4.2.3. Sean $\varphi_k(t)$, $k = 1, \dots, nN$, los polinomios vectoriales definidos por (4.2.7). Entonces se verifica que:

(1).- Para $i, j = 1, \dots, nN$,

$$(4.2.8) \quad \int \varphi_i(t)M(t)\varphi_j^*(t)dtrW(t) = \delta_{i,j}.$$

(2).- Para $i, j = 1, \dots, nN$,

$$(4.2.9) \quad \int \varphi_i(t)G(t)M(t)\varphi_j^*(t)dtrW(t) = \delta_{i,j}x_{G,i}.$$

(3).- Para cualquier función matricial C , se verifica

$$(4.2.10) \quad \sum_{k=1}^{nN} \varphi_k(t)C(t)\varphi_k^*(t) = tr \left(\sum_{i=0}^{n-1} P_i(t)C(t)P_i^*(t) \right).$$

En el segundo lema, consideramos otra sucesión de medidas vectoriales $(\xi_n)_n$ en este caso en \mathbb{R}^2 :

(4.2.11)

$$\xi_n(\Lambda) = \frac{1}{nN} \sum_{i=0}^{n-1} \int \int_{\Lambda} P_i(t)M(t)K_n(t, y)M(y)P_i^*(y)dtrW(t)dtrW(y),$$

$n \geq 0$, con $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ conjunto de Borel y $K_n(t, y) = \sum_{j=0}^{n-1} P_j^*(t)P_j(y)$.

El interés de las medidas $(\xi_n)_n$ es que son asintóticamente equivalentes a las medidas $(\nu_n)_n$ en el siguiente sentido:

Lema 4.2.4. Sean $dW(t) = M(t)dtrW(t)$ una matriz de medidas definida positiva con $sop(trW)$ compacto y $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a W . Entonces, dadas dos funciones $f(t)$, $h(y)$, continuas y acotadas en $sop(trW)$

$$(4.2.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \iint f(t)h(y)dtr\xi_n(t, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(t)h(t)dtr\nu_n(t).$$

Estamos ya en condiciones de abordar la demostración del teorema 4.2.1.

Demostración del teorema 4.2.1.

Para demostrar que las sucesiones $tr(G^{-1} \circ \nu_n)_n$ y $(\sigma_{G,n})$ tienen el mismo límite débil, consideremos f una función continua y con soporte compacto; tenemos que probar que

$$(4.2.13) \quad \left| \int f(t)d\sigma_{G,n}(t) - \int f(t)dtr(G^{-1} \circ \nu_n)(t) \right|$$

tiende a cero cuando n tiende a ∞ .

Para ello seguiremos los siguientes pasos:

PASO 1 *Encontramos expresiones equivalentes de las integrales que aparecen en (4.2.13) más apropiadas para proceder posteriormente a su acotación. Concretamente probaremos lo siguiente: Si φ_k , $k = 1, \dots, nN$, son los vectores dados por (4.2.7) entonces podemos escribir:*

(a)

$$(4.2.14) \quad \int f(t) d\sigma_{G,n}(t) = \frac{1}{nN} \sum_{k=1}^{nN} \int f(x_{G,k}) \varphi_k(t) M(t) \varphi_k^*(t) dtr W(t),$$

(b)

$$(4.2.15) \quad \int f(t) dtr(G^{-1} \circ \nu_n)(t) = \frac{1}{nN} \sum_{i=0}^{nN} \int f(g(t)) \varphi_k(t) M(t) \varphi_k^*(t) dtr W(t).$$

Demostración del Paso 1.

(a).- De la definición (4.1.4) de las medidas $(\sigma_{G,n})$ se tiene que

$$\int f(t) d\sigma_{G,n}(t) = \frac{1}{nN} \sum_{k=1}^{nN} f(x_{G,k}).$$

Por la propiedad (4.2.8) de los vectores φ_k podemos escribir

$$\int f(t) d\sigma_{G,n}(t) = \frac{1}{nN} \sum_{k=1}^{nN} \int f(x_{G,k}) \varphi_k(t) M(t) \varphi_k^*(t) dtr W(t).$$

(b).- De la definición (4.2.2) de las medidas $(G^{-1} \circ \nu_n)_n$ se tiene

$$\int f(t) dtr(G^{-1} \circ \nu_n)(t) = \frac{1}{nN} \int f(g(t)) \operatorname{tr} \left(\sum_{i=0}^{n-1} P_i(t) M(t) P_i^*(t) \right) dtr W(t);$$

aplicando la propiedad (4.2.10) de φ_k con $C(t) = M(t)$, podemos escribir

(4.2.16)

$$\begin{aligned} \int f(t) d\text{tr}(G^{-1} \circ \nu_n)(t) &= \frac{1}{nN} \int f(g(t)) \sum_{i=0}^{nN} \varphi_k(t) M(t) \varphi_k^*(t) d\text{tr}W(t) \\ &= \frac{1}{nN} \sum_{i=0}^{nN} \int f(g(t)) \varphi_k(t) M(t) \varphi_k^*(t) d\text{tr}W(t). \end{aligned}$$

□

Se deduce ahora del primer paso, [(4.2.14) y (4.2.15)], que

$$\begin{aligned} (4.2.17) \quad & \int f(t) d\sigma_{G,n}(t) - \int f(t) d\text{tr}(G^{-1} \circ \nu_n)(t) \\ &= \frac{1}{nN} \sum_{k=1}^{nN} \int (f(x_{G,k}) - f(g(t)) \varphi_k(t) M(t) \varphi_k^*(t) d\text{tr}W(t). \end{aligned}$$

Al ser f continua en $\text{sop}(\text{tr}W)$ compacto, es uniformemente continua luego dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que si $|t - y| < \delta$ entonces $|f(t) - f(y)| < \varepsilon$. Dividimos la integral (4.2.17) en dos:

$$\begin{aligned} (4.2.18) \quad & \int f(t) d\sigma_{G,n}(t) - \int f(t) d\text{tr}(G^{-1} \circ \nu_n)(t) \\ &= \frac{1}{nN} \sum_{k=1}^{nN} \int_{\{t: |x_{G,k} - g(t)| < \delta\}} + \frac{1}{nN} \sum_{k=1}^{nN} \int_{\{t: |x_{G,k} - g(t)| \geq \delta\}} \end{aligned}$$

PASO 2 Procedamos a acotar la primera integral:

$$(4.2.19) \quad H_1 = \frac{1}{nN} \sum_{k=1}^{nN} \int_{\{t: |x_{G,k} - g(t)| < \delta\}} (f(x_{G,k}) - f(g(t)) \varphi_k(t) M(t) \varphi_k^*(t) d\text{tr}W(t).$$

Demostración del Paso 2.

Dado que $M(t)$ es siempre semidefinida positiva, se tiene que

$$\begin{aligned} |H_1| &\leq \frac{1}{nN} \sum_{k=1}^{nN} \int_{\{t: |x_{G,k} - g(t)| < \delta\}} |f(x_{G,k}) - f(g(t))| \varphi_k(t) M(t) \varphi_k^*(t) dtr W(t) \\ &\leq \frac{1}{nN} \sum_{k=1}^{nN} \int \varepsilon \varphi_k(t) M(t) \varphi_k^*(t) dtr W(t) \\ &= \frac{\varepsilon}{nN} \sum_{k=1}^{nN} \int \varphi_k(t) M(t) \varphi_k^*(t) dtr W(t) = \varepsilon, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado la propiedad (4.2.8) de las funciones φ_k . Por tanto, $|H_1|$ tiende a cero, haciendo tender ε a cero. \square

Acotar la segunda integral en (4.2.18) será un proceso más arduo. En primer lugar tenemos:

PASO 3 Si

$$(4.2.20) \quad H_2 = \frac{1}{nN} \sum_{k=1}^{nN} \int_{\{t: |x_{G,k} - g(t)| \geq \delta\}} (f(x_{G,k}) - f(g(t))) \varphi_k(t) M(t) \varphi_k^*(t) dtr W(t)$$

entonces

$$(4.2.21) \quad |H_2| \leq \frac{K}{nN} \left| \sum_{k=1}^{nN} \int g(t)^2 \varphi_k(t) M(t) \varphi_k^*(t) dtr W(t) - \sum_{k=1}^{nN} x_{G,k}^2 \right|,$$

con $K = \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}$.

Demostración del Paso 3.

Como $M(t)$ es siempre semidefinida positiva, $\varphi_k(t) M(t) \varphi_k^*(t)$ también lo es y por tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned} |H_2| &= \left| \frac{1}{nN} \sum_{k=1}^{nN} \int_{\{t: |x_{G,k} - g(t)| \geq \delta\}} (f(x_{G,k}) - f(g(t))) \varphi_k(t) M(t) \varphi_k^*(t) dtr W(t) \right| \\ &\leq \frac{1}{nN} \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \sum_{k=1}^{nN} \int (x_{G,k} - g(t))^2 \varphi_k(t) M(t) \varphi_k^*(t) dtr W(t). \end{aligned}$$

Desarrollando el cuadrado del último término de la igualdad anterior y aplicando la propiedad (4.2.8) de los vectores φ_k se tiene

(4.2.22)

$$\begin{aligned} |H_2| &\leq \frac{K}{nN} \left(\sum_{k=1}^{nN} \int (x_{G,k}^2 + g(t)^2 - 2x_{G,k}g(t))\varphi_k(t)M(t)\varphi_k^*(t)dtrW(t) \right) \\ &= \frac{K}{nN} \left(\sum_{k=1}^{nN} x_{G,k}^2 + \sum_{k=1}^{nN} \int g(t)^2\varphi_k(t)M(t)\varphi_k^*(t)dtrW(t) \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{k=1}^{nN} x_{G,k} \int g(t)\varphi_k(t)M(t)\varphi_k^*(t)dtrW(t) \right), \end{aligned}$$

donde $K = \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}$.

Para simplificar la expresión anterior, usamos la propiedad (4.2.9) de φ_k ,

$$\begin{aligned} (4.2.23) \quad x_{G,k} &= \int \varphi_k(t)G(t)M(t)\varphi_k^*(t)dtrW(t) \\ &= \int g(t)\varphi_k(t)M(t)\varphi_k^*(t)dtrW(t). \end{aligned}$$

Sustituyendo (4.2.23) en el último término de (4.2.22) se obtiene (4.2.21) y queda demostrado el paso 3.1. \square

PASO 4 *Encontramos ahora expresiones adecuadas para las dos expresiones que aparecen acotando a $|H_2|$ en (4.2.21); en efecto, se tiene*

(a)

$$(4.2.24) \quad \frac{1}{nN} \sum_{k=1}^{nN} x_{G,k}^2 = \iint g(t)g(y)dtr\xi_n(t, y),$$

donde $(\xi_n)_n$ son las matrices de medidas vectoriales en \mathbb{R}^2 definidas por (4.2.11).

(b)

$$(4.2.25) \quad \frac{1}{nN} \sum_{k=1}^{nN} \int g(t)^2\varphi_k(t)M(t)\varphi_k^*(t)dtrW(t) = \int g^2(t)dtr\nu_n(t),$$

donde $(\nu_n)_n$ son las matrices de medidas definidas en (4.2.1).

Demostración del Paso 4.

(a).- Como $\{x_{G,i}\}_{i=1}^{nN}$ son los autovalores de $(T_G)_{nN}$, se tendrá que $\{x_{G,i}^2\}_{i=1}^{nN}$ son los autovalores de $((T_G)_{nN})^2$; entonces

$$\begin{aligned}
 (4.2.26) \quad & \sum_{k=1}^{nN} x_{G,k}^2 = \text{tr} \left((T_G)_{nN} \right)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \text{tr} \left(\left((T_G)_{nN} \right)^2 \right)_{[i,i]} \\
 & = \sum_{i=0}^{n-1} \text{tr} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \left(\int P_i(t)G(t)M(t)P_j^*(t)d\text{tr}W(t) \right) \right. \\
 & \quad \times \left. \left(\int P_j(y)G(y)M(y)P_i^*(y)d\text{tr}W(y) \right) \right) \\
 & = \text{tr} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \int \int P_i(t)G(t)M(t)K_n(t,y)G(y)M(y)P_i^*(y)d\text{tr}W(t)d\text{tr}W(y) \right).
 \end{aligned}$$

Finalmente teniendo en cuenta que por hipótesis

$$(4.2.27) \quad G(t)M(t) = M(t)G(t) = g(t)M(t),$$

de (4.2.26) se obtiene (4.2.24), aplicando la definición de las medidas (ξ_n) dada por (4.2.11)

(b).- Teniendo otra vez en cuenta (4.2.27), aplicando de nuevo la propiedad (4.2.10) de las funciones $\varphi_k(t)$ con $C(t) = G(t)G(t)M(t)$ y por las propiedades de la traza tenemos que

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{nN} \sum_{k=1}^{nN} \int g(t)^2 \varphi_k(t) M(t) \varphi_k^*(t) d\text{tr}W(t) \\
 &= \frac{1}{nN} \sum_{k=1}^{nN} \int \varphi_k(t) G(t) G(t) M(t) \varphi_k^*(t) d\text{tr}W(t) \\
 (4.2.28) \quad &= \frac{1}{nN} \sum_{i=0}^{n-1} \int \text{tr} (P_i(t) G(t) G(t) M(t) P_i^*(t) d\text{tr}W(t)) \\
 &= \int \text{tr} \left(\frac{1}{nN} \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t) G(t) M(t) G(t) P_i^*(t) d\text{tr}W(t) \right) \\
 &= \int g^2(t) \text{tr} \left(\frac{1}{nN} \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t) M(t) P_i^*(t) d\text{tr}W(t) \right).
 \end{aligned}$$

De (4.2.28) se obtiene (4.2.25), utilizando la definición de las medidas $(\nu_n)_n$ dada por (4.2.1). □

PASO 5 *El límite cuando n tiende a infinito de $|H_2|$ es cero.*

Demostración del Paso 5.

De (4.2.21), (4.2.24) y (4.2.25), se tiene que

$$(4.2.29) \quad |H_2| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \left| \iint g(t)g(y) d\text{tr}\xi_n(t, y) - \int g^2(t)(t) d\text{tr}\nu_n(t) \right|,$$

basta aplicar ahora el lema 4.2.4, con

$$f(t) = g(t) \text{ y } h(y) = g(y),$$

teniendo en cuenta que g es por hipótesis una función continua. □

□

□

Veamos ahora como, a partir de la matriz M , se pueden encontrar funciones matriciales G que se comporten casi escalarmente con respecto a la matriz M . La construcción se hace de la siguiente manera:

Primero: Elegimos una diagonalización de la matriz $M(t)$ con matriz de paso $V(t)$ unitaria:

$$(4.2.30) \quad M(t) = V(t) \begin{pmatrix} \rho_1(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \rho_N(t) \end{pmatrix} V^*(t),$$

y tal que sus autovalores $\{\rho_j(t)\}_{j=1}^N$ estén ordenados de forma creciente, esto es, para cada $t \in \text{sop}(\text{tr}W)$, $\rho_1(t) \leq \dots \leq \rho_N(t)$ (lo cual siempre es posible ordenando para cada $t \in \text{sop}(\text{tr}W)$ los autovalores de $M(t)$). En este caso, se tiene que $\text{sop}(\rho_1 \text{tr}W) \subseteq \dots \subseteq \text{sop}(\rho_N \text{tr}W)$ y por tanto, si escribimos

$$A_k = \text{sop}(\rho_k \text{tr}W) \setminus \text{sop}(\rho_{k-1} \text{tr}W),$$

se tiene que

- Si $k \neq i$, entonces $A_k \cap A_i = \emptyset$.

$$- \bigcup_{k=1}^N A_k = \text{sop}(\text{tr}W),$$

por lo que $(A_k)_{k=1}^N$ define una partición de $\text{sop}(\text{tr}W)$.

Segundo: Consideramos la siguiente función matricial $G(t)$:

$$(4.2.31) \quad G(t) = V(t) \begin{pmatrix} g_1(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & g_N(t) \end{pmatrix} V^*(t),$$

tal que los autovalores $\{g_j(t)\}_{j=1}^N$, de $G(t)$ sean “esencialmente iguales con respecto a los autovalores $\{\rho_j(t)\}_{j=1}^N$ de la matriz M ” y tal que $g_N(t)$ sea una función continua. Es decir, supondremos que la función $G(t)$ dada por (4.2.31) verifica la siguiente propiedad –que, como queda dicho, denominaremos “igualdad esencial de los autovalores de G con respecto a los de la matriz M ”– :

$$(4.2.32) \quad \text{si } t \in \text{sop}(\rho_k \text{tr}W) \text{ entonces } g_k(t) = g_{k+1}(t) = \dots = g_N(t).$$

Denotamos $g_{A_k}(t) = g_i(t)$, $t \in \text{sop}(\rho_k \text{tr}W)$, $i = 1, \dots, N$.

Se verifica entonces, como es fácil comprobar, que $G(t)M(t) = M(t)G(t) = g_N(t)M(t)$. Efectivamente, por la construcción de G podemos escribir

$$(4.2.33) \quad G(t) = \sum_{k=1}^N g_{A_k}(t) \chi_{A_k}(t) V(t) I_A V(t)^*, \quad t \in \text{sop}(\text{tr}W)$$

donde

$$I_{A,i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 0, & i = j < k; \\ 1, & i = j \geq k. \end{cases}$$

Para cada $t \in \text{sop}(\text{tr}W)$, se tiene que

$$\sum_{k=1}^N g_{A_k}(t) \chi_{A_k}(t) = g_N(t) \quad \text{y} \quad V(t) I_A V^*(t) M(t) = M(t) V(t) I_A V^*(t) = M(t);$$

Teniendo esto en cuenta, y multiplicando en (4.2.33) por $M(t)$, se deduce directamente que $G(t)M(t) = M(t)G(t) = g_N(t)M(t)$, y habíamos elegido g_N continua, por tanto, la función matricial G que hemos construido se comporta casi escalarmente con respecto a la matriz M .

EJEMPLO: Sea

$$\begin{aligned} M(t) &= \chi_{[-1,1]}(t) \\ &\times \begin{pmatrix} |t| \cos^2 t \chi_{[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]}(t) + (1+|t|) \text{sen}^2 t & \text{cost} \text{sent} \left(|t| \chi_{[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]}(t) - 1 - |t| \right) \\ \text{cost} \text{sent} \left(|t| \chi_{[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]}(t) - 1 - |t| \right) & |t| \text{sen}^2 t \chi_{[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]}(t) + (1+|t|) \cos^2 t \end{pmatrix} \\ G(t) &= \left(t^2 - \frac{1}{4} \right) \begin{pmatrix} \cos^2 t \chi_{[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]}(t) + \text{sen}^2 t & \text{cost} \text{sent} \left(\chi_{[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]}(t) - 1 \right) \\ \text{cost} \text{sent} \left(\chi_{[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]}(t) - 1 \right) & \text{sen}^2 t \chi_{[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]}(t) + \cos^2 t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Claramente, no existe ninguna función g escalar tal que $G(t) = g(t)Id_N$. Se tienen las siguientes diagonalizaciones:

$$M(t) = \begin{pmatrix} \text{cost} & -\text{sent} \\ \text{sent} & \text{cost} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |t| \chi_{[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]}(t) & 0 \\ 0 & (1+|t|) \chi_{[-1,1]}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{cost} & \text{sent} \\ -\text{sent} & \text{cost} \end{pmatrix},$$

$$G(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (t^2 - \frac{1}{4}) \chi_{[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]}(t) & 0 \\ 0 & (t^2 - \frac{1}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix},$$

y fácilmente se comprueba que el producto

$$G(t)M(t) = M(t)G(t) = \left(\frac{1}{4} - t^2\right) M(t),$$

por tanto, la función matricial G se comporta casi escalarmente con respecto a la matriz M .

Finalizamos esta sección demostrando los lemas 4.2.3 y 4.2.4.

Demostración del lema 4.2.3.

(1).- Teniendo en cuenta la ortogonalidad de la sucesión de polinomios matriciales $(P_n)_n$ con respecto a la matriz de medidas W , sustituyendo la definición de $\varphi_i(t)$ (ver (4.2.7)) y utilizando (4.2.6) obtenemos

$$\begin{aligned} \int \varphi_i(t) dW(t) \varphi_j^*(t) &= \sum_{l,h=0}^{n-1} v_i^l \int P_l(t) dW(t) P_h^*(t) (v_j^h)^* \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} v_i^l (v_j^l)^* = v_i v_j^* = \delta_{i,j}. \end{aligned}$$

(2).- Usando de nuevo la ortogonalidad, (4.2.7) y (4.2.6)

$$\begin{aligned} \int \varphi_i(t) G(t) dW(t) \varphi_j^*(t) &= \sum_{l,h=0}^{n-1} v_i^l \int P_l(t) G(t) dW(t) P_h^*(t) (v_j^h)^* \\ &= v_i (T_G)_{|nN} v_j^* = x_{G,i} \delta_{i,j}. \end{aligned}$$

(3).- Sea U la siguiente matriz de dimensión $nN \times nN$

$$U = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{nN} \end{pmatrix},$$

que es unitaria (ver (4.2.6)). Por la definición (4.2.7) de $\varphi_i(t)$ se tiene

$$U \begin{pmatrix} P_0(t) \\ \vdots \\ P_{n-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_{nN}(t) \end{pmatrix}.$$

Entonces, para cualquier función matricial C ,

$$\begin{aligned} (4.2.34) \quad & U \begin{pmatrix} P_0(t) \\ \vdots \\ P_{n-1}(t) \end{pmatrix} C(t) \begin{pmatrix} P_0^*(t) & \dots & P_{n-1}^*(t) \end{pmatrix} U^* \\ &= \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_{nN}(t) \end{pmatrix} C(t) \begin{pmatrix} \varphi_1^*(t) & \dots & \varphi_{nN}^*(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi_1(t)C(t)\varphi_1^*(t) & \dots & \varphi_1(t)C(t)\varphi_{nN}^*(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{nN}(t)C(t)\varphi_1^*(t) & \dots & \varphi_{nN}(t)C(t)\varphi_{nN}^*(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto, se verifica

$$\begin{aligned} (4.2.35) \quad & \text{tr} \left(U \begin{pmatrix} P_0(t) \\ \vdots \\ P_{n-1}(t) \end{pmatrix} C(t) \begin{pmatrix} P_0^*(t) & \dots & P_{n-1}^*(t) \end{pmatrix} U^* \right) \\ &= \sum_{k=1}^{nN} \varphi_k(t)C(t)\varphi_k^*(t). \end{aligned}$$

Por otro lado, para cualquier matriz B y cualquier matriz unitaria V $\text{tr}(VBV^*) = \text{tr}(B)$, por tanto,

$$\begin{aligned} (4.2.36) \quad & \text{tr} \left(U \begin{pmatrix} P_0(t) \\ \vdots \\ P_{n-1}(t) \end{pmatrix} C(t) \begin{pmatrix} P_0^*(t) & \dots & P_{n-1}^*(t) \end{pmatrix} U^* \right) \\ &= \text{tr} \left(\begin{pmatrix} P_0(t) \\ \vdots \\ P_{n-1}(t) \end{pmatrix} C(t) \begin{pmatrix} P_0^*(t) & \dots & P_{n-1}^*(t) \end{pmatrix} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \text{tr} (P_i(t)C(t)P_i^*(t)). \end{aligned}$$

De (4.2.35) y (4.2.36) se deduce (4.2.10), con lo que se concluye la demostración del lema 4.2.3. \square

Demostración del lema 4.2.4.

Nos restringimos a funciones continuas en $\text{sop}(\text{tr}W)$. Vamos a demostrar que

$$\left| \int \int f(t)h(y) d\text{tr}\xi_n(t, y) - \int f(t)h(t) d\text{tr}\nu_n(t) \right|$$

tiende a cero cuando n tiende a infinito. Para ello seguimos los siguientes pasos:

PASO 1 Se tiene que

$$(4.2.37) \quad \int \int f(t)h(y) d\text{tr}\xi_n(t, y) - \int f(t)h(t) d\text{tr}\nu_n(t) = \frac{1}{nN} \int \int f(t)(h(y) - h(t)) \text{tr}(K_n^*(t, y)M(t)K_n(t, y)M(y)) d\text{tr}W(t) d\text{tr}W(y)(t),$$

donde $K_n(t, y) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i^*(t)P_i(y)$.

Demostración del Paso 1.

Notemos primero que $K_n^*(t, y) = K_n(y, t)$. Como para cualesquiera matrices B y C se tiene que $\text{tr}(CB) = \text{tr}(BC)$ y la traza de la suma de matrices es la suma de las trazas, se verifica que

$$(4.2.38) \quad \sum_{i=0}^{n-1} \text{tr}(P_i(t)M(t)K_n(t, y)M(y)P_i^*(y)) = \text{tr} \left(\sum_{i=0}^{n-1} P_i^*(y)P_i(t)M(t)K_n(t, y)M(y) \right) \\ = \text{tr}(K_n(y, t)M(t)K_n(t, y)M(y)) = \text{tr}(K_n^*(t, y)M(t)K_n(t, y)M(y)).$$

Teniendo esto en cuenta, y aplicando la definición de ξ_n (ver (4.2.11)),

se obtiene

(4.2.39)

$$\begin{aligned} \int \int f(t)h(y)dtr\xi_n(t,y) &= \frac{1}{nN} \sum_{i=0}^{n-1} \\ &\int \int f(t)h(y)\text{tr}(P_i(t)M(t)K_n(t,y)M(y)P_i^*(y))dtrW(t)dtrW(y) \\ &= \frac{1}{nN} \int \int f(t)h(y)\text{tr}(K_n^*(t,y)M(t)K_n(t,y)M(y))dtrW(t)dtrW(y). \end{aligned}$$

Por otro lado, de la definición de ν_n (ver (4.2.1)) teniendo en cuenta que

$$P_i^*(t) = \int K_n(t,y)M(y)P_i^*(y)dtrW(y)$$

y aplicando de nuevo las propiedades de la traza, se verifica que

(4.2.40)

$$\begin{aligned} &\int f(t)h(t)dtr\nu_n(t) \\ &= \frac{1}{nN} \sum_{i=0}^{n-1} \int f(t)h(t)\text{tr}(P_i(t)M(t)P_i^*(t))dtrW(t) \\ &= \frac{1}{nN} \sum_{i=0}^{n-1} \int f(t)h(t)\text{tr}\left(P_i(t)M(t)\int K_n(t,y)M(y)P_i^*(y)dtrW(y)\right)dtrW(t) \\ &= \frac{1}{nN} \int \int f(t)h(t)\text{tr}(K_n^*(t,y)M(t)K_n(t,y)M(y))dtrW(t)dtrW(y). \end{aligned}$$

De (4.2.39) y (4.2.40) se deduce (4.2.37). □

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que si $|t - y| < \delta$ entonces $|h(t) - h(y)| < \varepsilon$. Dividimos la integral (4.2.37) en dos:

(4.2.41)

$$\begin{aligned} &\int \int f(t)h(y)dtr\xi_n(t,y) - \int f(t)h(t)dtr\nu_n(t) \\ &= \frac{1}{nN} \iint f(t)(h(y) - h(t))\text{tr}(K_n^*(t,y)M(t)K_n(t,y)M(y))dtrW(t)dtrW(y) \\ &= \frac{1}{nN} \int \left(\int_{|t-y|<\delta} + \int_{|t-y|\geq\delta} \right). \end{aligned}$$

PASO 2 Acotación de la primera integral.

Demostración del paso 2.

Llamamos

(4.2.42)

$$H_1 = \frac{1}{nN} \iint_{|t-y|<\delta} f(t)(h(y)-h(t)) \text{tr}(K_n^*(t,y)M(t)K_n(t,y)M(y)) d\text{tr}W(y)d\text{tr}W(t).$$

Como $K_n^*(t,y)M(t)K_n(t,y)$ es semidefinida positiva (ya que $M(t)$ lo es), por el teorema de Fejer (ver [HJ], pág. 459 o 1.0.10 de los preliminares), se verifica que para cualquier matriz A semidefinida positiva,

$$\text{tr}(K_n^*(t,y)M(t)K_n(t,y)A) \geq 0,$$

en particular, para $A = M(y)$, entonces

$$\text{tr}(K_n^*(t,y)M(t)K_n(t,y)M(y)) \geq 0.$$

Consecuentemente, teniendo en cuenta que

$$\iint \text{tr}(K_n^*(t,y)M(t)K_n(t,y)M(y)) d\text{tr}W(t)d\text{tr}W(y) = nN,$$

se tiene que

(4.2.43)

$$\begin{aligned} |H_1| &\leq \frac{1}{nN} \iint_{|t-y|<\delta} |f(t)||h(y)-h(t)| \text{tr}(K_n^*(t,y)M(t)K_n(t,y)M(y)) d\text{tr}W(y)d\text{tr}W(t) \\ &\leq \frac{1}{nN} \|f\|_\infty \varepsilon \iint \text{tr}(K_n^*(t,y)M(t)K_n(t,y)M(y)) d\text{tr}W(t)d\text{tr}W(y) \\ &= \|f\|_\infty \varepsilon, \end{aligned}$$

que tiende a cero haciendo tender ε a cero.

□

PASO 3 Acotación de la segunda integral.

Demostración del paso 3.

Llamamos

(4.2.44)

$$H_1 = \frac{1}{nN} \iint_{|t-y| \geq \delta} f(t)(h(y) - h(t)) \operatorname{tr}(K_n^*(t, y)M(t)K_n(t, y)M(y)) d\operatorname{tr}W(y) d\operatorname{tr}W(t).$$

Entonces, al igual que en la demostración del paso 2, podemos realizar la siguiente acotación:

(4.2.45)

$$\begin{aligned} & |H_2| \\ & \leq \frac{1}{nN} \iint_{|t-y| \geq \delta} |f(t)| |h(y) - h(t)| \operatorname{tr}(K_n^*(t, y)M(t)K_n(t, y)M(y)) d\operatorname{tr}W(t) d\operatorname{tr}W(y) \\ & \leq \frac{1}{nN} \|f\|_{\infty}^2 \|h\|_{\infty} \frac{1}{\delta^2} \\ & \quad \iint (y - t)^2 \operatorname{tr}(K_n^*(t, y)M(t)K_n(t, y)M(y)) d\operatorname{tr}W(t) d\operatorname{tr}W(y) \\ & = \frac{1}{nN} \|f\|_{\infty}^2 \|h\|_{\infty} \frac{1}{\delta^2} \\ & \quad \sum_{i=0}^{n-1} \iint (y - t)^2 \operatorname{tr}(P_i(t)M(t)K_n(t, y)M(y)P_i^*(y)) d\operatorname{tr}W(t) d\operatorname{tr}W(y), \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado las propiedades de la traza.

Aplicando la fórmula de Christoffel-Darboux

$$K_n(t, y) = \frac{P_{n-1}^*(t)A_n P_n(y) - P_n^*(t)A_n^* P_{n-1}(y)}{y - t},$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
 (4.2.46) \quad & \sum_{i=0}^{n-1} \iint (y-t)^2 P_i(t) M(t) K_n(t, y) M(y) P_i^*(y) d\text{tr}W(t) d\text{tr}W(y) \\
 & \leq \sum_{i=0}^{n-1} \iint (y-t)^2 P_i(t) M(t) \frac{P_{n-1}^*(t) A_n P_n(y) - P_n^*(t) A_n^* P_{n-1}(y)}{y-t} M(y) P_i^*(y) \\
 & \quad d\text{tr}W(t) d\text{tr}W(y) \\
 & = \sum_{i=0}^{n-1} \iint (y-t) P_i(t) M(t) (P_{n-1}^*(t) A_n P_n(y) - P_n^*(t) A_n^* P_{n-1}(y)) M(y) P_i^*(y) \\
 & \quad d\text{tr}W(t) d\text{tr}W(y);
 \end{aligned}$$

Desarrollando la última expresión obtenida en (4.2.46), por las propiedades de ortogonalidad de $(P_n)_n$ y aplicando la fórmula de recurrencia de

tres términos para $(P_n)_n$ (ver (1.0.1) en los preliminares) obtenemos

(4.2.47)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{n-1} \iint (y-t)^2 P_i(t) M(t) K_n(t, y) M(y) P_i^*(y) d\text{tr}W(t) d\text{tr}W(y) \\
 & \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\iint y P_i(t) M(t) P_{n-1}^*(t) A_n P_n(y) M(y) P_i^*(y) d\text{tr}W(t) d\text{tr}W(y) \right. \\
 & \quad - \iint t P_i(t) M(t) P_{n-1}^*(t) A_n P_n(y) M(y) P_i^*(y) d\text{tr}W(t) d\text{tr}W(y) \\
 & \quad - \iint y P_i(t) M(t) P_n^*(t) A_n^* P_{n-1}(y) M(y) P_i^*(y) d\text{tr}W(t) d\text{tr}W(y) \\
 & \quad \left. + \iint t P_i(t) M(t) P_n^*(t) A_n^* P_{n-1}(y) M(y) P_i^*(y) d\text{tr}W(t) d\text{tr}W(y) \right) \\
 & = \iint y P_{n-1}(t) M(t) P_{n-1}^*(t) A_n P_n(y) M(y) P_{n-1}^*(y) d\text{tr}W(t) d\text{tr}W(y) \\
 & \quad + \iint t P_{n-1}(t) M(t) P_n^*(t) A_n^* P_{n-1}(y) M(y) P_{n-1}^*(y) d\text{tr}W(t) d\text{tr}W(y). \\
 & = A_n \int y P_n(y) M(y) P_{n-1}^*(y) d\text{tr}W(y) \\
 & \quad + \int \int t P_{n-1}(t) M(t) P_n^*(t) d\text{tr}W(t) A_n^* \\
 & = 2A_n A_n^*;
 \end{aligned}$$

de (4.2.45) y (4.2.47) se sigue que

$$|H_2| \leq \frac{2K}{nN} \text{tr}(A_n A_n^*),$$

donde $K = \|f\|_\infty 2 \|h\|_\infty \frac{1}{\delta^2}$. Por tanto, $|H_2|$ tiende a cero cuando n tiende a infinito, teniendo en cuenta que por hipótesis $\text{sup}(\text{tr}W)$ es compacto, y esto es equivalente a decir que los coeficientes A_n están acotados (ver pág. 4 en los preliminares). □

□

Corolario 4.2.5. *Si los coeficientes de recurrencia de los polinomios $(P_n)_n$ (ver (1.0.1)) verifican que $\lim_n A_n = A$, $\lim_n B_n = B$, con A hermitica y*

no singular, entonces, para cualquier función matricial hermítica que se comporte casi escalarmente con respecto a la matriz M , con $G(t)M(t) = M(t)G(t) = g(t)M(t)$ donde g continua acotada en $\text{sop}(\text{tr}W)$ se tiene que

$$(4.2.48) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{G,n} = g^{-1} \circ \text{tr} \left(\frac{1}{N} X_{A,B} \right),$$

donde $X_{A,B}(t)$ es la matriz de medidas que ortonormaliza a los polinomios de Chevyshev de primera especie (ver (1.0.18) en los preliminares).

Demostración.

Cuando los coeficientes de recurrencia de los polinomios $(P_n)_n$ verifican que $\lim_n A_n = A$, $\lim_n B_n = B$, con A hermítica y no singular, se tiene que la sucesión de medidas $(\sigma_n)_n$ converge a $\text{tr}(\frac{1}{N} X_{A,B})$, con $X_{A,B}(t)$ la matriz de medidas que ortonormaliza a los polinomios de Chevyshev de primera especie (ver lemas 2.1 y 2.2 de [DLS] o lemas 1.0.6 y 1.0.7 de los preliminares).

Basta entonces aplicar el teorema 4.1.1. □

Queda por estudiar la convergencia de la sucesión de medidas $(\sigma_{G,n})_n$ para el caso general cuando G es una función matricial verificando que $G(t)M(t) = M(t)G^*(t)$. Sospechamos que en tal caso no tiene por qué existir convergencia aunque no hemos podido encontrar un contraejemplo.

4.3. Aplicación: Funciones de segunda especie matriciales

Dada una sucesión $(p_n)_n$ de polinomios escalares ortogonales con respecto a una medida definida positiva μ , las funciones de segunda especie $\{f_n(t)\}_{n \geq 0}$ se definen por la integral

$$f_n(t) = \int \frac{p_n(x)}{t-x} dW(x), \quad t \in \mathbb{C} \setminus \text{sop}(\mu).$$

Estas funciones aparecían ya en el trabajo fundamental de Stieltjes [S] a finales del siglo XIX y surgen de manera natural, ya que son los numeradores del límite de ciertas funciones continuas.

Las funciones de segunda especie matriciales $\{q_n(t)\}_{n \geq 0}$ están definidas por la integral

$$(4.3.1) \quad q_n(t) = \int \frac{P_n(x)}{t-x} dW(x), \quad t \in \mathbb{C} \setminus \text{sop}(\text{tr}W)$$

Si $(Q_n)_n$ es la sucesión de polinomios matriciales de segunda especie dada por (1.0.4), podemos escribir

$$(4.3.2) \quad \begin{aligned} q_n(t) &= \int \frac{P_n(x) - P_n(t)}{t-x} dW(x) + \int \frac{P_n(t)}{t-x} dW(x) \\ &= Q_n(t) + P_n(t) \int \frac{1}{t-x} dW(x), \quad t \in \mathbb{C} \setminus \text{sop}(\text{tr}W). \end{aligned}$$

Con esta expresión de las funciones de segunda especie se puede comprobar fácilmente que la sucesión $\{q_n(t)\}_{n \geq 0}$ satisface la misma relación de recurrencia que la sucesión $(P_n)_n$ (ver (1.0.1) de los preliminares) con condiciones iniciales $q_{-1}(t) = A_1^{-1}$ y $q_0(t) = \int \frac{1}{t-x} dW(x)$ (luego $q_0(t)$ es la transformada de Stieltjes de la matriz de medidas W).

La aplicación del teorema (4.2.1) a las funciones de segunda especie es la siguiente

Proposición 4.3.1. Sean W y $(P_n)_n$ una matriz de medidas con $\text{sop}(\text{tr}W)$ compacto y la sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a W respectivamente. Sean $\{x_i\}_{i=1}^{nN}$ los ceros del polinomio matricial $P_n(t)$, y sea $(\sigma_n)_n$ la sucesión de medidas contadoras de dichos ceros, donde recordemos

$$(4.3.3) \quad \sigma_n = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^{nN} \delta_{x_i}, \quad n \geq 0.$$

Si existe una medida σ tal que la sucesión $(\sigma_n)_n$ converge débilmente a σ entonces

$$(4.3.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{tr} \left(\frac{1}{nN} \sum_{k=0}^{n-1} q_k(t) P_k^*(t) \right) = \int \frac{1}{t-x} d\sigma(x) \quad t \in \mathbb{C} \setminus \text{sop}(\text{tr}W),$$

y la convergencia es uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \text{sop}(\text{tr}W)$.

Demostración.

Dado $k = 0, \dots, n - 1$, por la ortogonalidad de los polinomios $(P_n)_n$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
 (4.3.5) \quad q_k(t)P_k^*(t) &= \int \frac{P_k(x)}{t-x} dW(x)P_k^*(t) \\
 &= \int \frac{P_k(x)}{t-x} dW(x) (P_k^*(t) - P_k^*(x)) + \int \frac{P_k(x)}{t-x} dW(x)P_k^*(x) \\
 &= \int P_k(x)dW(x) \frac{P_k^*(t) - P_k^*(x)}{t-x} + \int \frac{P_k(x)}{t-x} dW(x)P_k^*(x) \\
 &= \int \frac{P_k(x)}{t-x} dW(x)P_k^*(x), \quad t \in \mathbb{C} \setminus \text{sop}(\text{tr}W).
 \end{aligned}$$

Sea $(\nu_n)_n$ la siguiente sucesión de matrices de medidas dada por (4.2.1), esto es,

$$(4.3.6) \quad d\nu_n(x) = \frac{1}{nN} \sum_{i=0}^{n-1} P_i(x)dW(x)P_i^*(x), \quad n \geq 0.$$

De (4.3.5) se sigue

$$\frac{1}{nN} \sum_{k=0}^{n-1} q_k(t)P_k^*(t) = \int \frac{1}{t-x} d\nu_n(x),$$

por tanto, para demostrar la proposición, tan sólo habría que ver que la sucesión de medidas $\text{tr}(\nu_n)$ converge débilmente a la medida σ , ya que, para cada $t \in \mathbb{C} \setminus \text{sop}(\text{tr}W)$ la función $f_t(x) = \frac{1}{t-x}$ es continua y acotada en $\text{sop}(\text{tr}W)$.

Pero por el corolario 4.2.3, las medidas $\text{tr}(\nu_n)$ y $(\sigma_n)_n$ son asintóticamente equivalentes, por tanto, como por hipótesis $(\sigma_n)_n$ converge a σ se tiene que $\text{tr}(\nu_n)$ converge débilmente a la medida σ .

La convergencia en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \text{sop}(\text{tr}W)$ se sigue del teorema de Stieltjes-Vitali (ver teorema 1.0.11 de los preliminares), ya que las entradas de $\int \frac{1}{t-x} d\nu_n(x)$ están uniformemente acotadas en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \text{sop}(\text{tr}W)$.

□

Corolario 4.3.2. *Si los coeficientes de recurrencia de los polinomios $(P_n)_n$ (ver (1.0.1)) verifican que $\lim_n A_n = A$, $\lim_n B_n = B$, con A hermítica y no singular y B hermítica, entonces,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n(t)P_n^*(t) = \int \frac{1}{t-x} dX_{A,B}(x), \quad t \in \mathbb{C} \setminus \text{sop}(\text{tr}W),$$

donde $X_{A,B}(t)$ es la matriz de medidas que ortonormaliza a los polinomios de Chebyshev de primera especie (ver (1.0.18) en los preliminares).

Demostración. De (4.3.5) se tiene que

$$q_n(t)P_n^*(t) = \int \frac{P_n(x)}{t-x} dW(x)P_n^*(x), \quad t \in \mathbb{C} \setminus \text{sop}(\text{tr}W).$$

Basta aplicar ahora el corolario 3.3 de [DDa] (Ver lema 1.0.13 de los preliminares), teniendo en cuenta que para cada $x \in \mathbb{C} \setminus \text{sop}(\text{tr}W)$ la función

$$f_t(x) = \frac{1}{t-x}$$

es continua en $\text{sop}(\text{tr}W)$.

□

Bibliografía

- [A] F. V. Atkinson, *Discrete and Continuous Boundary Problems*, Academic Press. N. Y. (1964).
- [AN] A. I. Aptekarev and E.M. Nikishin, *The scattering problem for a discrete Sturm-Liouville operator*, Mat. Sb. **121** (1983), 327-358; transl: *Mat. USSR Sb.* **49** (1984), 325-355.
- [B] Ju. M. Berezanskii, *Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators*, Translations of Mathematical Monographs. Providence, RI: American Mathematical Society. (1968)
- [BB] S. Basu and N.K. Bose, *Matrix Stieltjes series and network models*, Siam J. Math. Anal. **14** (1983), 209-222.
- [D1] A. J. Durán, *A generalization of Favard's theorem for polynomials satisfying a recurrence relation*, J. Approx. Theory **74** (1993), 83-109.
- [D2] A. J. Durán, *On orthogonal polynomials with respect to a positive definite matrix of measures*, Can. J. Math. **47** (1995), 88-112.
- [D3] A. J. Durán, *Markov's Theorem for Orthogonal Matrix Polynomials*, Can. J. Math. **48** (1996), 1180-1195.
- [D4] A. J. Durán, *Ratio Asymptotics for Orthogonal Matrix Polynomials*, J. Approx. Theory **100** (1999), 304-344.
- [DD] A.J. Durán y E. Defez, *Orthogonal matrix polynomial and quadrature formulae*, Linear Algebra Appl. **345** (2002), 71-84.

- [DL1] A. J. Durán, P. López-Rodríguez, *Orthogonal Matrix Polynomials: Zeros and Blumenthal's Theorem*, J. Approx. Theory **84** (1996), 96–118.
- [DL2] A. J. Durán, P. López-Rodríguez, *Density Questions for the Truncated Matrix Moment Problem*, Can. J. Math. **49** (1997), 708–721.
- [DLS] A. J. Durán, P. López-Rodríguez y E. B. Saff, *Zero Asymptotic Behaviour for Orthogonal Matrix Polynomials*, J. D'Analyse Mathématique **78** (1999), 37–60.
- [DDa] A.J. Duran y E. Daneri, *Weak convergence por orthogonal matrix polynomials*, (Preprint).
- [DS] A. J. Durán y E. B. Saff, *Zero Location for Nonstandard Orthogonal Polynomials*, J. Approx. Theory **113** (2001), 127–141.
- [DP1] A. J. Durán y B. Polo García, *Gaussian Quadrature formulae for matrix weights*. Aparecerá en Linear Algebra Appl.
- [DP2] A. J. Durán y B. Polo García, *Asymptotic for Matrix Christoffel Functions*. Preprint.
- [DV] A. J. Durán y W. van Assche, *Orthogonal Matrix Polynomials and Higher-Order Recurrence Relations.*, Linear Algebra Appl. **219** (1995), 261–280.
- [G] F. R. Gantmacher, *The theory of matrices*, Chelsea Publishing Company, New York **1** (1960).
- [Ge] J. S. Geronimo, U. *Scattering theory and matrix polynomials on the real line*, Circuits Systems Signal Process. **1** (1982), 471–495.
- [GS] U. Grenander and Szegő, *Toeplitz forms and their applications*, Univ. of California Press, Berkeley and Los Angeles, (1958).
- [HJ] R. A. Horn y C.A. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, (1985).
- [K] M. G. Krein, *Fundamental aspects of the representation theory of Hermitian Operators with deficiency index (m, n)* , Amer. Math. Soc. Transl. (2) **97**, 75–143; Original en Ukrain. Mat. Z. **1** 3–66.

- [N1] Paul Nevai, *Orthogonal polynomials*, Memoirs of the American Mathematical Society, **213**, Providence Rhode Island (1979).
- [N2] Paul Nevai, *Géza Freud, Orthogonal Polynomials and Christoffel Functions. A case Study*, J. Approx. Theory **48** (1986), 3–167.
- [N3] Paul Nevai, *Eigenvalue distribution of Toeplitz matrices*, Proceed. of the Am. Math. Society **80**, Number 2, (1980), 247–253.
- [R] M. Rosemberg, *The square-integrability of matrix-valued functions with respect to a non-negative hermitian measure*, Duke Math. J. **31** (1964), 291–298.
- [S] T. J. Stieltjes *Recherches sur les fractions continues*, Ann. Fac. Sci. Toulouse **8** (1894), J1–122; Ann. Fac. Sci. Toulouse **9** (1895) A1–47.
- [SV] A. Sinap, W. van Assche, *Polynomial Interpolation and Gaussian Quadrature for Matrix Valued Functions*, Linear Algebra Appl. **207** (1994), 71–114.
- [V] W. van Assche, *Eigenvalues of Toeplitz Matrices Associated with Orthogonal Polynomials*, J. Approx. Theory **51** (1987), 360–371.
- [Z] M. J. Zygmunt, *Matrix Chebyshev polynomials and continued fractions*, Linear Algebra Appl. **340** (2002), 155–168.
- [Zh] D. Zhani, *Problème des moments matriciels sur la droite: construction d'une famille de solutions et questions d'unicité*, Publications du Departement de Mathématiques, Université Claude-Bernard-Lyon I Nouvelle serie **21** (1984), 1–84.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de

REATRIZ POZO GARCÍA
titulada UN ESTUDIO CON APLICACIONES DE LAS FÓRMULAS DE
QUADRADA MATRICIALES

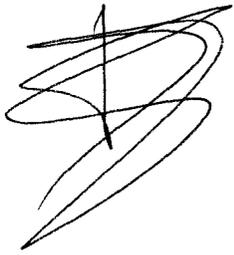
se acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente cum Laude
por unanimidad

Sevilla, 8 de Julio 2017

El Vocal,

Chusquea Berg

El Presidente



El Vocal,

Alfredo Ochoa

El Secretario,



El Vocal,

[Signature]

El Doctorado

