UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA II

ALGUNOS ASPECTOS DE LAS SUMAS GENERALIZADAS DE ESPACIOS NORMADOS

JOSÉ OLIVEROS TRONCOSO

TESIS DOCTORAL

Memoria que presenta
D. José Oliveros Troncoso
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

Fdo: José Oliveros Troncoso.

Miguel Florencio Lora, Catedrático de la Universidad de Sevilla, y Antonio Fernández Carrión, Profesor Titular de la Universidad de Sevilla

CERTIFICAN: Que la presente memoria "Algunos aspectos de las sumas generalizadas de espacios normados", ha sido realizada bajo la dirección de ambos por el Licenciado en Ciencias Matemáticas, D. José Oliveros Troncoso, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Fdo: Miguel Florencio Lora.

Fdo: Antonio Fernández Carrión.

Sevilla, abril de 1.994.

Quiero expresar mi agradecimiento a los profesores del Departamento de Matemática Aplicada II de la Universidad de Sevilla por el ánimo y apoyos recibidos. Al Dr. Pedro J. Paúl Escolano por sus sugerencias y observaciones. Y, especialmente, a los Drs. Miguel Florencio Lora y Antonio Fernández Carrión, por la ayuda que de ellos recibí en la realización de este trabajo.

Quiero expresar mi agradecimiento también a la Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía, por la iniciativa de convocar concurso público de méritos para destinar en comisión de servicios en la Universidad de Sevilla a Profesores de Enseñanzas Medias. Este trabajo es fruto de dicha iniciativa.

A Concha

y a nuestros hijos.

Contenido

Introducción

Como es bien sabido los espacios de sucesiones escalares comenzaron a estudiarse a comienzo de este siglo. Este estudio no sólo fue creciendo desde un principio, sino que se diversificó dando lugar a temas de investigación en otras direcciones, surgiendo distintas generalizaciones de los espacios de sucesiones.

Los nombres de insignes matemáticos como Hilbert, Fréchet, Schmidt, Fischer y Riesz están ligados a los que se pueden considerar primeros estudios en este terreno, como son las propiedades del espacio de sucesiones de cuadrado absolutamente sumable, ℓ^2, el espacio de todas las sucesiones numéricas, ω, y los espacios de sucesiones absolutamente p–sumables, ℓ^p. En la década de los años treinta publican Köthe y Toeplitz su trabajo sobre dualidad entre un espacio de sucesiones y su α–dual. Mackey, en la década siguiente, introduce el concepto de par dual y topología polar. Y aunque esta relación no pretende ser exhaustiva, sino marco para situar el trabajo realizado en esta memoria, son muy importantes en este terreno las aportaciones, entre otros, de Kōmura-Kōmura, Maddox, Ruckle, Valdivia y Vogt.

Orlicz en los años treinta da dos definiciones de convergencia incondicional de una serie infinita de elementos de un espacio de Banach (si cualquier reordenación de la serie es convergente, o si cualquier subserie es convergente) y demostró que ambas definiciones eran equivalentes. En los años cincuenta y sesenta se empiezan a estudiar los espacios de sucesiones con valores en un espacio localmente convexo por los autores Grothendieck y Pietsch, y le siguen, entre otros, De Grande–De Kimpe, Rosier, Lurje, Florencio y Paúl más recientemente. Estos espacios de sucesiones con valores en un espacio normado o en un espacio localmente convexo, constituyen una generalización de los espacios de sucesiones escalares.

Otra generalización consiste en considerar aplicaciones de un conjunto cualquiera X, en lugar del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, en el cuerpo $\mathbb{K}$ de los números reales o complejos. Si X es un espacio de medida y se consideran funciones medibles, se tiene otro campo de investigación que también fue iniciado en los años cincuenta, entre otros autores, por Lorentz, Dieudonné, Cooper y Halperin. Si X es un conjunto de índices cualquiera (que en adelante representaremos por I) se obtiene una familia de escalares.

Quizás fuese Moore en [36] el primero que reemplazó el conjunto $\mathbb{N}$ en la definición de sucesión, por un conjunto cualquiera y considerase de esta forma, por primera vez, familias escalares. En dicho trabajo define una suma general $\sum_{i\in I} x_i$, demuestra que si esa suma existe, entonces los x_i son nulos salvo, a lo sumo, en una cantidad numerable, y demuestra que en ese caso existe $\sum_{i\in I} |x_i|$. Cabe señalar aquí el trabajo, más reciente, de Bierstedt, Meise y Summers sobre espacios escalonados. Así como los de Drewnowski, Florencio y Paúl sobre la tonelación de espacios de familias vectoriales; y el de Kakol y Roelcke sobre el mismo tema.

Hildebrandt en [20] indica que la suma general $\sum_{i\in I} x_i$ puede extenderse al caso en que las x_i pertenezcan a un espacio de Banach, manejando de esta manera familias vectoriales, y si dicha suma existe, entonces también se verifica que los x_i son nulos salvo, a lo sumo, una cantidad numerable de los mismos. En el estudio de los espacios de familias vectoriales son importantes las aportaciones de Drewnowski, Florencio y Paúl sobre la tonelación de espacios de familias acotadas con valores en un espacio normado tonelado, si el conjunto de índices no es medible. Así como el trabajo de Kakol y Roelcke sobre la tonelación de los espacios ℓ^p–suma directa de espacios seminormados (para $1 \leq p \leq \infty$).

En esta memoria trataremos con espacios de familias escalares y con espacios de familias con valores en espacios normados. Actualmente el estudio de los espacios de sucesiones está perfectamente sistematizado y recogido en numerosos textos. En el caso de los espacios de funciones definidas sobre un conjunto al que se le dota de una topología, o bien en el caso de espacios de funciones medibles definidas sobre un espacio de medida, existen textos donde se recogen también de manera sistematizada resultados sobre distintos temas. No ocurre así con los espacios de familias escalares o vectoriales, de los que existen muchos resultados pero, la mayoría de las veces, recogidos a continuación de otro similar en el caso de los espacios de sucesiones.

Esta memoria es el resultado del trabajo realizado al resolver el siguiente problema propuesto por los profesores Florencio Lora y Fernández Carrión: establecer la tonelación y ultrabornología de un espacio λ–suma de espacios normados, siendo λ un espacio de familias escalares. Los resultados que recogemos sobre familias escalares no constituyen una relación exhaustiva de todos los que se conocen hasta el momento, sino que sólo señalamos los que necesitaremos más adelante para resolver el problema planteado con familias vectoriales.

Recientemente, Drewnowski, Florencio y Paúl han demostrado en [12] que si I es un conjunto de índices cualquiera y $1 \leq p < \infty$, el espacio ℓ_I^p–suma $\ell_I^p\{(E_i)\}$ es tonelado si, y sólo si, todos los espacios normados E_i son tonelados. Esto extiende un resultado que para espacios de sucesiones vectoriales había establecido Lurje en [29]: si cada espacio E_n es tonelado, entonces los espacios $\ell^p\{(E_n)_n\}$, con $1 \leq p \leq \infty$, son tonelados.

Para el caso $\ell_I^\infty\{(E_i)\}$, Drewnowski, Florencio y Paúl han demostrado en [14] que si I es un conjunto de índices, E es un espacio normado tonelado y card(I) ó card(E) no es medible, el espacio $\ell_I^\infty\{(E_i)\}$ es tonelado.

Por otra parte, Kakol y Roelcke en [23] han demostrado también que si $(E_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios seminormados y $1 \leq p \leq \infty$, entonces $\ell_I^p\{(E_i)\}$ es tonelado si, y sólo si, todos los E_i son tonelados. Sin embargo, la definición que establecen dichos autores para el espacio $\ell_I^\infty\{(E_i)\}$ hace que sólo consideren familias con, a lo sumo, una cantidad numerable de coordenadas no nulas.

Otros resultados conocidos hasta ahora sobre la tonelación o bornología de espacios de familias, se refieren a espacios de sucesiones. Pero hay que señalar que en muchos de los casos las sucesiones toman valores en un espacio localmente convexo.

Marquina y Sanz Serna establecieron en [33] la casi tonelación del espacio de sucesiones $c_0(E)$, siendo E un espacio localmente convexo. En el artículo de Mendoza [35] se obtiene la tonelación del espacio $c_0(E)$. La bornología y ultrabornología de dicho espacio la estudiaron Marquina y Schmets en [34], y Defant y Govaerts en [6]. Estos últimos, como consecuencia de su estudio sobre espacios $CB(X, F)$.

La casi tonelación (bornología) y tonelación (ultrabornología) de $\ell_\infty(E)$, siendo E un (DF)–espacio, la establecen Bierstedt y Bonet en [1].

Para un espacio de sucesiones escalares cualquiera λ y un espacio normado E, Florencio y Paúl establecen en [16] que $\lambda_r\{E\}$ es casi tonelado (siendo λ_r el subespacio regular de λ); y que $\lambda_r\{E\}$ es tonelado si, y sólo si, E es un espacio tonelado.

Florencio, Paúl y Sáez en [17] demuestran que si cada espacio normado E_n es tonelado, entonces $\lambda_r\{E_n\}$ es tonelado y que si λ_r es bornológico, entonces $\lambda_r\{E_n\}$ también lo es. Sáez, en su tesis doctoral [45, Cap. II Teor. 7.6], establece que si λ

es un espacio normal de sucesiones tonelado, siendo su dual fuerte su α–dual y E es un espacio normado, entonces $\lambda(E)$ es tonelado si, y sólo si, E es tonelado. En la demostración de este resultado interviene fuertemente el hecho de que se trata de un espacio de sucesiones. El razonamiento allí empleado no es válido si en lugar del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ se considera otro conjunto de índices I con $\mathrm{card}(I) > \mathrm{card}(\mathbb{N})$. Por último, señalar que Díaz, Fernández, Florencio y Paúl en [10] han estudiado en distintos casos la bornología y ultrabornología del espacio de sucesiones vectoriales $\lambda\{E\}$, donde λ es un espacio de sucesiones escalares y E es un espacio localmente convexo.

En esta memoria establecemos la tonelación, ultrabornología y completitud de un espacio λ–suma de una familia de espacios normados $(E_i)_{i\in I}$ en los dos casos siguientes:

1. cuando $\mathrm{card}(I)$ no es medible.

2. cuando $\mathrm{card}(E)$ no es medible, siendo todos los $E_i = E$.

Como consecuencia de este trabajo obtenemos, además, otra serie de resultados. Algunos son simples extensiones al caso de familias de propiedades conocidas en los espacios de sucesiones tanto escalares como vectoriales. Otros tienen interés por sí mismos. Todos ellos constituyen la presente memoria, que hemos ordenado en dos capítulos y cada uno de ellos en varias secciones.

En el primer capítulo tratamos de los espacios de familias escalares λ. En la primera sección recogemos las definiciones básicas de familia de escalares, espacio de familias, espacio normal, proyecciones sobre un espacio de familias, espacio α–dual $\lambda^\times$ y subespacios seccionales. También enumeramos una serie de ejemplos de espacios de familias a los que nos referiremos a lo largo de la memoria.

En la segunda sección describimos las topologías que vamos a considerar en los espacios de familias escalares. Estarán definidas por un sistema de seminormas sobre el espacio en cuestión, o bien, por lo que Rosier denomina en su tesis [42] y en [43] un sistema topologizante normal, formado por un determinado sistema de subconjuntos del espacio α–dual. Las denominaremos τ–topologías y casos particulares de las mismas son las topologías normal, la de Mackey y la fuerte del par dual $(\lambda, \lambda^\times)$, entre otras.

La sección tercera recoge los resultados que necesitaremos más adelante sobre la completitud de un espacio de familias escalares. En estos espacios, como en los de sucesiones, se sigue verificando el Teorema de Schur; y en relación con la topología normal se verifica que un espacio es perfecto si, y sólo si, es completo. Un resultado muy útil en lo que sigue y que recogemos en esta sección, se refiere a que si el espacio de familias λ es normal, entonces $\lambda^\times$ es sucesionalmente completo con la topología $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$. Esto implica que si λ es un espacio normal, entonces en $\lambda^\times$ se verifica el Teorema de Banach–Mackey. Estudiamos cuándo es completo un espacio de familias y si no lo es, cuál es su completación. Es interesante resaltar que en este caso la completación de un espacio de familias escalares sigue siendo un espacio de familias y la topología con que se le dota es una τ–topología. Por último, demostramos que si el espacio λ es localmente completo, entonces determinados subespacios de λ también son localmente completos.

La cuarta sección se dedica al estudio de la convergencia de secciones. Se recuerdan las definiciones de familia y espacio que tiene la propiedad AK y se demuestra que un espacio de familias con una topología compatible con el par dual posee la propiedad AK. Como, si λ es normal, las topologías $\beta^*(\lambda, \lambda^\times)$ y $\beta(\lambda, \lambda^\times)$ coinciden, interesará estudiar la convergencia de las secciones cuando se dota al espacio con la topología fuerte. Surge así la definición del subespacio regular λ_r como la clausura de ϕ_I en λ con la topología $\beta(\lambda, \lambda^\times)$. Se demuestran a continuación algunas propiedades del espacio λ_r y, entre ellas, que dicho espacio con la topología inducida por la fuerte es tonelado. Demostramos a continuación una propiedad que tienen las familias que poseen la propiedad AK en un espacio dotado de una topología normada o metrizable, como es que, a lo sumo, tienen una cantidad numerable de coordenadas no nulas.

En la sección quinta, con la que termina el primer capítulo, se caracterizan los espacios normales de familias escalares tonelados. Aquí cabe indicar que una propiedad característica de los espacios normales de sucesiones que son tonelados, es que son separables. En el caso de los espacios de familias obtenemos que existe un subconjunto denso en el espacio (cuando se le dota con la topología fuerte $\beta(\lambda, \lambda^{\times})$) y con cardinal igual al card(I). Terminamos la sección demostrando que si el espacio es casi tonelado, entonces ciertos subespacios también lo son.

Con el fin de hacer más cómoda la lectura de algunas secciones de este primer capítulo, se han omitido las demostraciones de algunos resultados de tipo técnico, cuando las mismas se obtienen por un método similar que las correspondientes en los espacios de sucesiones, extendiendo simplemente a un conjunto de índices I lo que allí se dice para $\mathbb{N}$. En estos casos se hace referencia de dónde se puede ver la demostración para espacios de sucesiones. No obstante, en algún caso se ha incluido la demostración y ésta aparece en letra pequeña.

El segundo capítulo trata de los espacios de familias vectoriales con valores en espacios normados. En la primera sección se recogen las definiciones de espacio λ–suma de espacios normados: el espacio que representaremos por $\lambda\{(E_i)\}$. Y las de espacio normal, proyecciones sobre el espacio, subespacios seccionales y relacionamos algunos ejemplos.

En la segunda sección describimos las topologías que consideraremos en el espacio $\lambda\{(E_i)\}$ y son las que usualmente se definen a partir de la τ–topología del espacio de familias escalares λ, y de la topología definida por la norma en cada espacio E_i. A continuación recordamos la definición de la propiedad AK para estos espacios y demostramos que el espacio $\lambda\{(E_i)\}$ posee la propiedad AK si, y sólo si, la posee el espacio de familias escalares λ. Se recogen a continuación la definición de subespacio regular $(\lambda\{(E_i)\})_r$ y deducimos algunas propiedades como consecuencia de algunas proposiciones anteriormente demostradas.

La completitud del espacio de familias $\lambda\{(E_i)\}$ la estudiamos en la tercera sección. Demostramos, en primer lugar, que si los espacios E_i son completos y el espacio de escalares λ dotado de una τ–topología es completo, sucesionalmente completo o localmente completo, entonces $\lambda\{(E_i)\}$ dotado con la τ–topología correspondiente es completo, sucesionalmente completo o localmente completo, respectivamente. El primer apartado de este teorema generaliza resultados conocidos sobre la completitud de los espacios de sucesiones $\ell^p\{(E_n)_n\}$, con $1 \leq p \leq \infty$, y $c_0\{(E_n)_n\}$ (ver [24, §26.8 pág. 359] y [21, §19.4.2 Prop. pág. 427]). Algún caso particular de completitud de espacios $\ell^p_I\{(E_i)\}$ puede verse en [25, §41.7(1) pág. 197 y en la demostración de §44.8(9) pág. 293].

A continuación demostramos que si el espacio λ dotado de una τ–topología es completo, entonces la completación del espacio $\lambda\{(E_i)\}$ es $\lambda\{(\widehat{E}_i)\}$, donde $\widehat{E}_i$ es la completación de E_i. Por último, demostramos que la completación del espacio $\lambda\{(E_i)\}$ es $\widehat{\lambda}\{(\widehat{E}_i)\}$, donde $\widehat{\lambda}$ es la completación del espacio de familias escalares λ y $\widehat{E}_i$ es la completación de cada espacio normado E_i. Bierstedt y Bonet en [1, §1.9 Lema] demuestran que para cualquier espacio (gDF)–espacio E, la completación del espacio $\ell_\infty(E)$ es topológicamente isomorfa a $\ell_\infty(\widehat{E})$. Aunque aquí los espacios E_i son normados, sin embargo, λ es un espacio de familias. En este sentido puede decirse que este resultado extiende el anterior.

La sección cuarta se dedica al estudio del espacio α–dual de $\lambda\{(E_i)\}$. Se extiende a espacios de familias el resultado de Florencio, Paúl y Sáez en [17]. Así, en primer lugar, se establece la igualdad entre los espacios $\lambda\{(E_i)\}^\times$, $\lambda^\times\{(E_i')\}$ y $\lambda^\times \cdot \ell^\infty_I\{(E_i')\}$. A continuación demostramos que si el espacio λ con una topología posee la propiedad AK, entonces en el espacio $\lambda\{(E_i)\}$ con la topología correspondiente se verifica que su dual coincide con su α–dual. Como consecuencia de esto deducimos las igualdades anteriores para el subespacio regular.

La tonelación de un espacio de familias vectoriales se estudia en las dos secciones siguientes. En la primera, donde recogemos resultados de tipo general, comenzamos demostrando que si el espacio de escalares λ es casi tonelado, entonces el espacio $\lambda\{(E_i)\}$ también lo es. Esto es una extensión de un resultado análogo establecido para espacios de sucesiones por Florencio, Paúl y Sáez en [17]. Como consecuencia obtenemos algunos resultados sobre la tonelación del espacio $\lambda\{(E_i)\}$. A continuación demostramos que si el espacio λ es normal y tonelado y los espacios normados E_i son tonelados, entonces el espacio $\lambda\{(E_i)\}^{\times}$ es sucesionalmente completo con la topología $\sigma\left(\lambda\{(E_i)\}^{\times}, \lambda\{(E_i)\}\right)$. Por último en esta sección, demostramos que si dotamos a λ con la topología fuerte y a $\lambda_r\{(E_i)\}$ con la topología correspondiente, éste espacio es tonelado si, y sólo si, todos los E_i lo son. Esto extiende el resultado dado para sucesiones vectoriales por Florencio, Paúl y Sáez (ver [17]).

En la sección sexta recogemos los resultados sobre tonelación del espacio $\lambda\{(E_i)\}$ cuando suprimimos la hipótesis sobre la propiedad AK en λ. En este caso exigimos al espacio λ que sea localmente completo. Estudiamos en primer lugar el caso en que el conjunto de índices I tiene cardinal no medible, es decir, no es posible definir una medida numerablemente aditiva μ en el conjunto de las partes de I con valores en $\{0,1\}$, tal que $\mu(I) = 1$ y $\mu(\{i\}) = 0$ para todo $i \in I$.

El teorema principal de esta sección establece las condiciones para que determinados espacios de familias vectoriales, Λ, contenidos en $\omega_I\{(E_i)_{i\in I}\}$ sin que tengan que ser espacios λ–suma para algún λ, sean espacios de Banach–Mackey. Es decir, si Λ está dotado de una topología localmente convexa y Λ' es su dual, se verifica que todo subconjunto de Λ' que es $\sigma(\Lambda', \Lambda)$–acotado, es $\beta(\Lambda', \Lambda)$–acotado. Como consecuencia obtenemos que si λ es un espacio de familias escalares dotado de una τ–topología respecto de la cual es localmente completo y (E_i) es una familia de espacios normados tonelados, entonces el espacio $\lambda\{(E_i)\}$ dotado de su τ–topología correspondiente, es un espacio de Banach–Mackey.

De los dos resultados anteriores se siguen los objetivos que nos habíamos propuesto:

1) Si I es un conjunto de índices con cardinal no medible, λ es un espacio normal de familias escalares con una τ–topología respecto de la cual es local-

mente completo y tonelado, y (E_i) es una familia de espacios normados, entonces se verifica que el espacio $\lambda\{(E_i)\}$ dotado de su τ–topología correspondiente es tonelado si, y sólo si, todos los E_i son tonelados.

2) Si I es un conjunto de índices cualquiera, todos los espacios normados tonelados E_i son iguales a un espacio normado tonelado E con card(E) no medible, λ es un espacio normal de familias escalares dotado de una τ–topología respecto de la cual es localmente completo y tonelado, entonces $\lambda\{(E_i)\}$ con su τ–topología correspondiente, es tonelado.

Obtenemos también la tonelación de los subespacios de $\lambda\{(E_i)\}$ formados por las familias $x = (x_i)$ tales que card$(\{x_i : i \in I\})$ no sea medible, y aquellos otros formados por las familias cuyo soporte tiene un cardinal estrictamente menor, o menor o igual que un determinado número cardinal $m \leq$ card(I).

La última sección se dedica al estudio de la bornología y ultrabornología del espacio $\lambda\{(E_i)\}$. Obtenemos que si el espacio de familias escalares λ es bornológico, entonces $\lambda\{(E_i)\}$ también lo es. Y siguiendo un esquema similar de trabajo al caso anterior sobre la tonelación, establecemos en primer lugar las condiciones para que determinados espacios de familias vectoriales, Λ, contenidos en $\omega_I\{(E_i)_{i\in I}\}$ sean ultrabornológicos. Como consecuencia obtenemos que si I es un conjunto de índices con card(I) no medible, λ es un espacio de familias escalares dotado de una τ–topología respecto de la cual es localmente completo y bornológico, (E_i) es una familia de espacios normados ultrabornológicos, entonces el espacio $\lambda\{(E_i)\}$ dotado de la τ–topología correspondiente, es un espacio ultrabornológico. Este resultado extiende el obtenido por Florencio, Paúl y Sáez en [17] que establece que si el espacio de sucesiones λ_τ es bornológico, entonces $\lambda_\tau\{E_n\}$ también lo es, siendo los E_n espacios normados; y el de Díaz, Fernández, Florencio y Paúl en [10] sobre la ultrabornología del espacio de sucesiones $\lambda\{E\}$, siendo E un espacio normado. Y aunque no puede decirse que extiende también los resultados de Marquina y Schmets en [34] sobre la bornología del espacio de sucesiones $c_0(E)$ y el de Defant y Govaerts en [6] sobre la ultrabornología de dicho espacio, ya que en ambos casos E es un espacio localmente convexo, sin embargo, en nuestro caso λ es un espacio de familias. En este sentido, puede decirse que extiende también esos resultados.

Terminología y notación

En esta memoria utilizaremos la siguiente notación:

1. El conjunto de los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos se representará, como es habitual, por el símbolo $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, respectivamente. En lo que sigue, $\mathbb{K}$ representará indistintamente al cuerpo de los números reales o complejos.

2. Cuando consideremos al cuerpo $\mathbb{K}$ como espacio topológico, su topología será la definida de manera usual por medio del módulo de los números reales y complejos.

3. Consideraremos que I es un conjunto no vacío de índices con $\mathrm{card}(I) \geq \aleph_0 = \mathrm{card}(\mathbb{N})$. En toda la memoria el símbolo I representará siempre al mismo conjunto de índices.

4. Representaremos por $\mathcal{P}(I)$ al conjunto de todas las partes de I, y por $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$ al conjunto de las partes finitas de I.

5. Una red será representada por $\{x^{(s)}, s \in D, \geq\}$ donde $x^{(s)}$ seran los elementos de la red en cuestión y D representará al conjunto de índices s que está dirigido por la relación binaria $\geq$.

6. El par dual formado por los espacios E_1 y E_2 se representará por (E_1, E_2).

7. El conjunto vacío se designará por el símbolo $\emptyset$.

8. Por χ_J se denotará la función característica del conjunto J.

9. El soporte de la familia α (conjunto de índices $i \in I$ para los cuales $\alpha_i \neq 0$), se designará por $\text{sop}(\alpha)$.

10. Por $e^{(i)}$ se representará a la familia que tiene todas sus coordenadas nulas excepto la correspondiente al índice i que vale 1, mientras que e representará a la familia que tiene todas sus coordenadas iguales a la unidad.

11. Si E es un espacio normado, $B_1(E)$ denotará a la bola unidad de E.

12. Si A y B son dos conjuntos $A \setminus B$ denotará la diferencia conjuntista entre A y B.

13. Si T_1 y T_2 son dos topologías sobre E, indicaremos que T_2 es más fina que T_1 así: $T_1 \leq T_2$.

14. El final de una demostración se indicará por el símbolo $\blacksquare$.

Esta memoria está dividida en dos capítulos, cada uno de los cuales está dividido a su vez en un número variable de secciones. La referencia a la sección n del capítulo m viene expresada por $m.n$. Algunas expresiones de esta memoria están etiquetadas con dos números entre paréntesis: $(p.k)$. De esta forma, una referencia $(p.k)$ indica la expresión k–ésima del capítulo p. Las proposiciones, lemas, teoremas, corolarios y algunos párrafos están etiquetados con tres números al comienzo de los mismos. Una referencia del tipo: Lema a.b.c, indica que se encuentra en la sección b del capítulo a; el número c indica el orden dentro de la sección.

Capítulo I

Espacios de familias escalares.

En este primer capítulo recogemos algunos conceptos, resultados básicos y de otro tipo que necesitaremos en el desarrollo de esta memoria, así como los ejemplos a los que nos referiremos y la notación que emplearemos.

En la primera sección recordamos los conceptos de espacio de familias, espacio normal, proyecciones, espacio α–dual, subespacios seccionales y recopilamos algunos ejemplos de espacios de familias escalares.

En la segunda sección indicamos el tipo de topología que vamos a considerar en los espacios de familias, que incluyen, entre otras, a las topologías del par dual formado por un espacio y su α–dual.

En la siguiente sección estudiamos la completitud de un espacio de familias indicando cuándo es completo y, si no lo es, cuál es su completación. Se recogen algunos resultados en relación con la topología débil y normal. Se indica también un resultado sobre completitud local de determinados subespacios.

La convergencia de las secciones se estudia en la sección cuarta. En ella recordamos la definición de la propiedad AK, del subespacio regular, y estudiamos algunas de sus propiedades. Recogemos también la propiedad que tienen las familias que poseen la propiedad AK y que pertenecen a un espacio dotado de una topología normada o metrizable: que poseen, a lo sumo, una cantidad numerable de coordendas no nulas.

Y en la última sección de este capítulo caracterizamos los espacios de familias escalares tonelados. Demostramos también la casi tonelación de determinados subespacios.

1.1 Espacios de familias.

De los espacios de sucesiones escalares se han hecho varias generalizaciones. Una de ellas ha sido considerar un conjunto de índices I en lugar del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$. Se obtiene de esta manera una familia de números, en lugar de una sucesión, y un espacio de familias, en lugar de un espacio de sucesiones. Los conceptos de espacio de familias normal, proyección sobre un espacio, F–sección de una familia de escalares, espacio α–dual y subespacio seccional, se obtienen sin dificultad de los correspondientes conceptos en los espacios de sucesiones mediante una sencilla extensión de los allí establecidos. Recordamos a continuación sólamente los que utilizaremos más adelante.

Una familia de escalares es una aplicación α de I en $\mathbb{K}$. Se suele identificar a la familia α con su imagen y se representa así $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I}$ o simplemente por $\alpha = (\alpha_i)$ cuando no haya lugar a confusión. El conjunto de todas las familias de escalares, $\mathbb{K}^I$, que se representa por ω_I, es un espacio lineal sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, definiendo las operaciones de suma de las familias α y β como la familia $(\alpha_i + \beta_i)$, y el producto de un escalar r por una familia α como la familia $(r\alpha_i)$. (Ver [24, pág. 56]).

Se dice que λ es un espacio de familias escalares, o simplemente un espacio, si es un subespacio lineal de ω_I.

Sea λ un espacio de familias. Se denomina envolvente normal de la familia $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$ al conjunto

$$N(\alpha) = \{(r_i\alpha_i)_{i\in I} : r_i \in \mathbb{K}, \quad |r_i| \leq 1 \text{ para todo } i \in I\}$$

Se denomina envolvente normal de un subconjunto A de λ al conjunto

$$N(A) = \bigcup_{\alpha \in A} N(\alpha)$$

Se dice que un subconjunto A del espacio λ es normal si coincide con su envolvente normal $N(A)$. Y se dice que el espacio de familias λ es normal si siempre que $\alpha \in \lambda$, se verifica que $N(\alpha) \subset \lambda$.

1.1.1 En el espacio de familias ω_I se define la siguiente relación:

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow |\alpha_i| \leq |\beta_i| \quad \forall\ i \in I.$$

Dado un espacio normal de familias escalares λ y un subconjunto J de I, se define la proyección P_J sobre λ así:

$$P_J : \alpha = (\alpha_i) \in \lambda \longrightarrow P_J(\alpha) = (\beta_i)_{i \in I} \in \lambda$$

siendo $\beta_i = \alpha_i$ si $i \in J$ y $\beta_i = 0$ si $i \notin J$. O sea, $P_J(\alpha) = (\alpha_i \chi_J(i))_{i \in I}$.

Si $\alpha \in \lambda$ y $F \in \mathcal{P_F}(I)$ se define la sección F ó F–sección de la familia α, como el elemento $P_F(\alpha)$.

Se denomina suma parcial finita de la familia de números $\alpha = (\alpha_i)$ a

$$S_F := \sum_{i \in F} \alpha_i, \qquad \text{con } F \in \mathcal{P_F}(I)$$

El conjunto $\mathcal{P_F}(I)$ es dirigido por la relación de inclusión. A cada subconjunto finito $F \in \mathcal{P_F}(I)$ se le asocia la suma parcial S_F, y se dice que la familia $\alpha = (\alpha_i)$ es sumable y que $S \in \mathbb{K}$ es su suma, si la red $\{S_F, F \in \mathcal{P_F}(I), \subset\}$ converge a S.

Simbólicamente esto se expresa asi: $\sum_{i\in I}\alpha_i = S$. Se verifica, además, la siguiente generalización del resultado de Riemann: *la familia de números* $\alpha = (\alpha_i)$ *es sumable si, y sólo si, es absolutamente sumable* (ver [25, §44.8(1) pág. 289]). Por tanto, se suele expresar el hecho de que la familia de números (α_i) es sumable, por la desigualdad $\sum_{i\in I}|\alpha_i| < +\infty$.

Indicaremos una propiedad de la que haremos uso más adelante: *si una familia de números es sumable, a lo sumo tiene una cantidad numerable de términos no nulos* (ver [39, pág. 21]).

El conjunto de todas las familias sumables de números se representa por ℓ_I^1 y es un espacio. Definiendo para cada familia sumable $\alpha = (\alpha_i)$ su norma-1:

$$\|\alpha\| = \sum_{i\in I}|\alpha_i|$$

el espacio ℓ_I^1 se convierte en un espacio normado. Este espacio es completo (Ver [24, pág. 137], [25, §44.8 pág. 289] y [21, §1.7 pág. 26]). Es claro que ℓ_I^1 es un espacio normal. Cuando $I = \mathbb{N}$ este espacio se representa por ℓ^1.

Se denomina espacio α–dual del espacio de familias λ y se representa por $\lambda^\times$, al conjunto formado por todas las familias de números $\eta = (\eta_i)$ tales que $\sum_{i\in I}|\alpha_i\eta_i| < +\infty$ para toda familia $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$.

Si $\alpha\eta$ denota a la familia $(\alpha_i\eta_i)$, simbólicamente:

$$\begin{aligned}\lambda^\times &= \{\eta = (\eta_i) \in \omega_I : \alpha\eta \in \ell_I^1 \text{ para toda } \alpha \in \lambda\}\\ &= \left\{\eta = (\eta_i) \in \omega_I : \sum_{i\in I}|\alpha_i\eta_i| < +\infty \text{ para toda } \alpha = (\alpha_i) \in \lambda\right\}\end{aligned}$$

El espacio $\lambda^\times$ siempre es normal.

Análogamente se define el espacio dual de $\lambda^\times$, es decir $(\lambda^\times)^\times$, al que se representa por $\lambda^{\times\times}$. Se dice que un espacio de familias λ es perfecto si $\lambda^{\times\times} = \lambda$.

1.1.2 En los espacios de familias, como en los espacios de sucesiones, también se verifica que $\lambda^\times$ siempre es un espacio perfecto; y si λ_1 y λ_2 son dos espacios de familias tales que $\lambda_1 \subset \lambda_2$, entonces $\lambda_2^\times \subset \lambda_1^\times$. Estas propiedades se demuestran de manera análoga a como se hace en el caso de los espacios de sucesiones (ver [24, §30.1 pág. 406]).

Si λ es un espacio de familias escalares y J es un subconjunto del conjunto de índices I, se define

$$\lambda_J := \{\alpha_J = (\alpha_j)_{j\in J} : \exists \ (\beta_i)_{i\in I} \in \lambda \text{ con } \beta_j = \alpha_j \quad \forall \ j \in J\}$$

Es claro que definiendo en λ_J las operaciones de suma de familias y producto de una familia por un escalar coordenada a coordenada, se tiene un espacio lineal al que se denomina *subespacio J–seccional de λ*. Si J es un conjunto finito, λ_J se puede identificar con el correspondiente espacio $\mathbb{K}^n$.

Se denomina *preimagen canónica de la familia $\alpha_J \in \lambda_J$* a la familia $\widetilde{\alpha}_J$, la cual coincide con α_J para todo $j \in J$ y tiene nulas las demás coordenadas.

Se denomina *preimagen canónica del subespacio J–seccional* λ_J, y se suele representar por $\widetilde{\lambda}_J$, al conjunto que contiene a las preimágenes canónicas de los elementos de λ_J. Definiendo en $\widetilde{\lambda}_J$ las operaciones de suma de familias y producto de un escalar por una familia coordenada a coordenada, es inmediato comprobar que tiene estructura algebraica de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Si el espacio λ es normal, $\widetilde{\lambda}_J$ será un subespacio vectorial de λ.

La imagen de la proyección P_J sobre λ es $\widetilde{\lambda}_J$, y su núcleo es $\widetilde{\lambda}_{I\setminus J}$.

Es inmediato comprobar que $(\lambda_J)^\times = (\lambda^\times)_J$ y que si λ es normal o perfecto, entonces λ_J también es normal o perfecto, respectivamente.

Ejemplos

A continuación indicamos algunos espacios de familias a los que nos referiremos más adelante en esta memoria:

1. Espacio de familias de soporte finito: ϕ_I.

   Representaremos por ϕ_I al espacio lineal generado por $\{e^{(i)} : i \in I\}$, es decir, las familias de ϕ_I tienen un número finito de coordenadas no nulas. Es un subespacio lineal de ω_I y, por consiguiente, un espacio de familias. (Ver [24, pág. 53 y 56]). Es claro que $(\phi_I)^\times = \omega_I$, de donde se sigue que ϕ_I es un espacio perfecto, ya que $(\omega_I)^\times = \phi_I$. Consideraremos la topología localmente convexa suma directa en ϕ_I, respecto de la cual se verifica que $(\phi_I)' = \omega_I$.

2. Espacios de familias p–sumables: ℓ_I^p.

   Consideremos ahora el caso en que $1 < p < +\infty$. Se dice que la familia de números $\alpha = (\alpha_i)$ es p–sumable si $\sum\limits_{i \in I} |\alpha_i|^p < +\infty$. Al conjunto de todas las familias p–sumables de números se suele representar por ℓ_I^p y es un espacio. Definiendo para cada familia p–sumable de números $\alpha = (\alpha_i)$ su norma-p:

   $$\|\alpha\| = \left(\sum_{i \in I} |\alpha_i|^p \right)^{1/p}$$

   el espacio ℓ_I^p se convierte en un espacio normado. Se verifica que es completo y que su dual es ℓ_I^q, siendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $(1 < p < +\infty)$ (Ver [24, pág. 137]). Se verifica, además, que $(\ell_I^p)^\times = \ell_I^q$, de donde se sigue que ℓ_I^p es perfecto. La demostración es análoga a la de los espacios de sucesiones (ver [24, §30.1(6) pág. 407]).

   Como caso particular, para $p = 2$ se obtiene el espacio ℓ_I^2 que se conoce como el *espacio generalizado de Hilbert de peso* card(I) (ver [50, 23.8 pág. 170] y [15, Cap.IX.8 pág. 191]).

Si en lugar de considerar el número p fijo consideramos la familia de números reales (p_i) tales que para todo $i \in I$ sea $1 < p_i \leq \sup_i p_i = M < +\infty$, entonces

$$\ell_I^{(p_i)} := \left\{ \alpha = (\alpha_i) \in \omega_I : \sum_{i\in I} |\alpha_i|^{p_i} < +\infty \right\}$$

con las definiciones de suma de familias y producto de un escalar por una familia coordenada a coordenada, es un espacio de familias escalares. Definiendo para cada $\alpha = (\alpha_i) \in \ell_I^{(p_i)}$:

$$|\alpha|_{(p_i)} := \left(\sum_{i\in I} |\alpha_i|^{p_i} \right)^{1/M}$$

el espacio $\ell_I^{(p_i)}$ se convierte en un espacio paranormado, y utilizando [32, Lema 1] se demuestra que es un espacio localmente convexo. Como en [31] se demuestra que $\left(\ell_I^{(p_i)}\right)^{\times} = \ell_I^{(q_i)}$ y que el dual de $\ell_I^{(p_i)}$ también es $\ell_I^{(q_i)}$, siendo $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$, si y sólo si $\inf_i p_i > 1$.

Utilizando una técnica similar a la empleada en [24, §14.8(7) pág. 136], se demuestra que $\left(\ell_I^{(p_i)}, |\cdot|_{(p_i)}\right)$ es completo. Y basándonos en [44, 1.30 Teor.pág. 20] y en [41, Teor.1 pág. 45] se sigue que $\ell_I^{(p_i)}$ es normable.

Estos espacios son una extensión de los espacios de sucesiones $\ell^{(p_n)}$ que han sido estudiados por varios autores: Bourgin, D.G. [4], Landsberg, M. [27], Nakano, H. [37], Simons, S. [47] y Maddox, I.J. [30],[31],[32].

Cuando $I = \mathbb{N}$ estos espacios se representan por ℓ^p ó por $\ell^{(p_n)}$.

3. Espacio de familias acotadas: ℓ_I^∞.

   Se dice que la familia de números $\alpha = (\alpha_i)$ está acotada si existe un número real positivo ρ tal que $|\alpha_i| \leq \rho$ para todo $i \in I$.

   El conjunto de todas las familias acotadas de números se suele representar por ℓ_I^∞, y es un espacio. Es un espacio normado definiendo la norma del supremo:

$$\|\alpha\| = \sup\{|\alpha_i| : i \in I\} \tag{1.1}$$

Respecto de la topología que define esta norma, es un espacio completo. (Ver [24, §14.8 pág. 137], [5, pág. 177] y [21, §1.7 pág. 26]).

Es inmediato comprobar que es un espacio normal. De la misma manera que en los espacios de sucesiones, se demuestra que $(\ell_I^\infty)^\times = \ell_I^1$ y que $(\ell_I^1)^\times = \ell_I^\infty$ (ver [24, §30.1(4) pág. 406]). O sea que los espacios ℓ_I^1 y ℓ_I^∞ son perfectos. Ahora bien, mientras que $(\ell_I^1)' = \ell_I^\infty$ (ver [24, §14.8 pág. 137]), se verifica que $(\ell_I^\infty)' \neq \ell_I^1$ (ver [24, §31.1 pág. 424]).

Si $(p_i)_{i\in I}$ es una familia de números reales positivos y acotada: $0 < \inf_i p_i \leq p_i \leq \sup_i p_i = M < +\infty$, entonces

$$\ell_I^\infty(p_i) := \{\alpha = (\alpha_i) \in \omega_I : \sup_i |\alpha_i|^{p_i} < +\infty\}$$

con las definiciones de suma de familias y producto de un escalar por una familia coordenada a coordenada, es un espacio de familias.

Definiendo para cada $\alpha = (\alpha_i) \in \ell_I^\infty(p_i)$:

$$|\alpha|_{(p_i)}^\infty := \sup_i |\alpha_i|^{p_i/M}$$

se tiene que $\ell_I^\infty(p_i)$ es un espacio paranormado y como en [32, Teor.2(ii)] se demuestra que este espacio es localmente convexo.

Por otra parte, y extendiendo lo expuesto en [28], se verifica que $(\ell_I^\infty(p_i))^\times = M_I^\infty(p_i)$ siendo

$$M_I^\infty(p_i) := \bigcap_{N=2}^{\infty} \left\{\alpha = (\alpha_i) \in \omega_I : \sum_{i\in I} |\alpha_i|\, N^{1/p_i} < \infty\right\}.$$

Como en el caso de los espacios de sucesiones se demuestra que el espacio $\left(\ell_I^\infty(p_i), |\cdot|_{(p_i)}^\infty\right)$ es completo (ver [24, §14.7(2) pág. 131]). Y basándonos en [44, 1.30 Teor.pág. 20] y en [41, Teor.1 pág. 45] se sigue que $\ell_I^\infty(p_i)$ es normable.

Estos espacios son la extensión de los espacios de sucesiones $m(p_n)$ que han sido estudiados, entre otros autores, por Simons, S. [47] y Maddox, I.J. [30],[31].

Cuando $I = \mathbb{N}$ estos espacios se representan por ℓ^∞ (también por m) y por $\ell^\infty(p_n)$ (también por $m(p_n)$.)

4. Espacio de familias convergentes a cero: c_{0I}.

Se dice que la familia de números $\alpha = (\alpha_i)$ converge a cero ($\alpha_i \longrightarrow 0$), si para cada $\varepsilon > 0$ y arbitrario existe un conjunto $F_0 \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$ tal que

$$|\alpha_i| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad i \notin F_0$$

Basándonos en una idea análoga a la utilizada en [39, Prop.1.1.5 pág. 21] para demostrar que cada familia sumable de números posee, a lo sumo, una cantidad numerable de términos no nulos, se demuestra que cada familia de números que converge a cero contiene también, a lo sumo, una cantidad numerable de términos no nulos.

Al conjunto de todas las familias convergentes a cero se suele representar por c_{0I} y es un espacio. Es también un espacio normado sin más que definir para cada familia la norma infinito (1.1).

El espacio c_{0I} es un subespacio de ℓ_I^∞ considerando en ambos la norma del supremo. (Véase [24, §31.1 pág. 425]). Este espacio es completo y la demostración es análoga a la correspondiente para espacios de sucesiones (ver [24, §14.7(3) pág. 131]).

Se verifica que $\ell_I^1 \subset c_{0I} \subset \ell_I^\infty$. Por otro lado, $(c_{0I})^\times = \ell_I^1$. Por tanto, c_{0I} es un ejemplo de espacio no perfecto. Se tiene, además, que $(c_{0I})' = \ell_I^1$ (ver [24, §31.1 pág. 425]).

Si (p_i) es una familia de números reales positivos tales que $0 < \inf_i p_i \leq p_i \leq$

$\sup\limits_i p_i = M < +\infty$, entonces

$$c_{0I}^{(p_i)} := \{\alpha = (\alpha_i) \in \omega_I : |\alpha_i|^{p_i} \longrightarrow 0\}$$

es un espacio de familias definiendo la suma de familias y el producto de un escalar por una familia coordenada a coordenada. Se trata, pues, de un subespacio de $\ell_I^\infty(p_i)$.

En este espacio se considera la restricción de la paranorma $|\cdot|_{(p_i)}^\infty$ definida en $\ell_I^\infty(p_i)$. Como en [32, Teor.2(i)] se demuestra que es un espacio localmente convexo. Y como en el caso de los espacios de sucesiones se puede demostrar que es completo (ver [24, §14.7(3) pág. 131]).

Se verifica que $(c_{0I})^\times = \ell_I^1$ si y sólo si $\inf\limits_i p_i > 0$ (ver [31]). Utilizando los mismos argumentos que los expuestos en los casos de los espacios $\ell_I^{(p_i)}$ y $\ell_I^\infty(p_i)$, se demuestra también en este caso que el espacio $c_{0I}^{(p_i)}$ es normable. Y como en [31] se demuestra que el dual de $c_{0I}^{(p_i)}$ es ℓ_I^1.

5. Espacio de familias convergentes: c_I.

   Se dice que la familia $\alpha = (\alpha_i)$ converge al número $l \in \mathbb{K}$, si dado un $\varepsilon > 0$ y arbitrario existe un conjunto $F_0 \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$ tal que

$$|\alpha_i - l| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad i \notin F_0$$

   Decir que la familia $\alpha = (\alpha_i)$ converge a l es equivalente a decir que la familia $\alpha - le$ converge a cero. De lo anterior se sigue que si la familia $\alpha = (\alpha_i)$ converge a l, entonces contiene, a lo sumo, una cantidad numerable de términos $\alpha_i \neq l$, siendo los restantes iguales a l.

   Al conjunto de todas las familias convergentes se suele denotar por c_I y es un espacio. Es también un espacio normado sin más que definir para cada familia la norma infinito (1.1). El espacio $(c_I, \|\cdot\|)$ es un subespacio de $(\ell_I^\infty, \|\cdot\|)$, y c_{0I} es un subespacio de c_I. Este espacio de familias convergentes, c_I, no es un espacio normal. Y análogamente a como se hace para los espacios de sucesiones, se demuestra que $(c_I, \|\cdot\|)$ es completo (ver [24, §14.7(3) pág. 131]).

6. Espacios escalonados de orden p: $\lambda_p(I, A)$.

Siguiendo el artículo de Bierstedt, Meise y Summers [3] recordamos en primer lugar que un conjunto $\mathcal{P}$ de familias $\eta = (\eta_i)$ con todas sus coordenadas $\eta_i \in \mathbb{R}$ se denomina un conjunto Köthe sobre I si se verifican las siguientes condiciones:

(i) $\eta_i \geq 0$ para cada $i \in I$ y para cada $\eta \in \mathcal{P}$;

(ii) para cada par $(\eta, \xi) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$, existe $v \in \mathcal{P}$ tal que $\max\{\eta_i, \xi_i\} \leq v_i$ para todo $i \in I$;

(iii) para cada $i \in I$, existe $\eta \in \mathcal{P}$ con $\eta_i > 0$.

Para $\eta \in \mathcal{P}$ y $\alpha \in \omega_I$ se define

$$q_\eta^p(\alpha) := \left(\sum_{i \in I} (\eta_i \, |\alpha_i|)^p\right)^{1/p}.$$

y a cada conjunto Köthe $\mathcal{P}$, se le asocian los espacios

$$\lambda_p\,(I, \mathcal{P}) := \{\alpha = (\alpha_i) \in \omega_I : q_\eta^p(\alpha) < \infty \quad \text{para cada } \eta \in \mathcal{P}\},$$

siendo $1 \leq p < \infty$;

$$\lambda_\infty\,(I, \mathcal{P}) := \{\alpha = (\alpha_i) \in \omega_I : q_\eta^\infty(\alpha) := \sup_{i \in I} \eta_i \, |\alpha_i| < \infty \text{ para cada } \eta \in \mathcal{P}\},$$

y

$$\lambda_0\,(I, \mathcal{P}) := \{\alpha = (\alpha_i) \in \omega_I : \eta_i \alpha_i \longrightarrow 0 \text{ para cada } \eta \in \mathcal{P}\}$$

Si $\mathcal{P}$ consiste unicamente en la familia e, estos espacios coinciden con ℓ_I^p $(1 \leq p \leq \infty)$ y c_{0I} de los ejemplos anteriores.

Con el sistema de seminormas $\{q_\eta^p : \eta \in \mathcal{P}\}$, $\lambda_p(I,\mathcal{P})$ con $1 \leq p \leq \infty$ es un espacio localmente convexo (Hausdorff) completo, mientras que $\lambda_0(I,\mathcal{P})$ es un subespacio cerrado de $\lambda_\infty(I;\mathcal{P})$ que será dotado con el correspondiente sistema inducido de seminormas. En realidad $\lambda_0(I,\mathcal{P})$ es la clausura en $\lambda_\infty(I;\mathcal{P})$ del espacio ϕ_I.

Si $\mathcal{P} = \left(\eta^{(n)}\right)_n$ es una sucesión creciente de familias estrictamente positivas, entonces $\mathcal{P}$ es un conjunto Köthe numerable que se denomina matriz de Köthe sobre I; los espacios $\lambda_p(I,\mathcal{P})$, con $p = 0$ ó $1 \leq p \leq \infty$, son espacios de Fréchet con la sucesión de normas $q_n = q^p_{\eta^{(n)}}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Representando por $\mathcal{V} = \left(\xi^{(n)}\right)_n$ a la sucesión decreciente (asociada) de familias $\xi^{(n)} = \frac{1}{\eta^{(n)}}$, se define

$$\kappa_p(I,\mathcal{V}) \cong ind_{n\to\infty}\ell_p\left(I,\xi^{(n)}\right), \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

y

$$\kappa_0(I,\mathcal{V}) \cong ind_{n\to\infty}c_0\left(I,\xi^{(n)}\right);$$

es decir, $\kappa_p(I,\mathcal{V})$, respectivamente $\kappa_0(I,\mathcal{V})$, es la unión creciente de los espacios de Banach $\ell_p\left(I,\xi^{(n)}\right)$, respectivamente $c_0\left(I,\xi^{(n)}\right)$, dotada con la topología localmente convexa más fina bajo la cual la inyección desde cada uno de esos espacios de Banach es continua (esta topología es más fina que la topología de la convergencia coordenada a coordenada y, por tanto, es Hausdorff).

Como $\kappa_p(I,\mathcal{V})$, para $p = 0$ ó $1 \leq p \leq \infty$, es un límite inductivo numerable de espacios de Banach, es un (DF)–espacio ultrabornológico.

Se dice que $\lambda_p(I,\mathcal{P})$ es un espacio escalonado de orden p, y $\kappa_q(I,\mathcal{V})$ es el espacio co-escalonado asociado de orden q, siendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $1 < p < \infty$. También $\kappa_\infty(I,\mathcal{V})$ es el espacio co–escalonado asociado al espacio escalonado $\lambda_1(I,E)$.

A estos ejemplos nos referiremos fundamentalmente a lo largo de esta memoria.

Observación

Todos los espacios de familias escalares λ que consideraremos en esta memoria, supondremos que contienen al espacio ϕ_I.

Terminamos esta sección con una proposición de la que haremos reiterado uso en lo que sigue, ya que la mayoría de los espacios de familias con que trataremos serán normales.

1.1.3 Proposición. *Un espacio de familias escalares λ es normal si, y sólo si, $\lambda = \ell_I^\infty \cdot \lambda$.*

DEMOSTRACIÓN:

Si λ es normal y $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$ entonces $|\alpha| = (|\alpha_i|) \in \lambda$ también, y definiendo $\beta_i = \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|}$ si $\alpha_i \neq 0$ y $\beta_i = 0$ en los demás casos, entonces es claro que $\beta = (\beta_i) \in \ell_I^\infty$ y se sigue que

$$\alpha = (\alpha_i) = (\beta_i \, |\alpha_i|) = (\beta_i)(|\alpha_i|) \in \ell_I^\infty \cdot \lambda.$$

Por tanto, $\lambda \subset \ell_I^\infty \cdot \lambda$. Para demostrar que $\ell_I^\infty \cdot \lambda \subset \lambda$ sea $\gamma\delta = (\gamma_i \delta_i) \in \ell_I^\infty \cdot \lambda$ con $\gamma \in \ell_I^\infty$ y $\delta \in \lambda$. Como $|\gamma_i| \, |\delta_i| \leq |\delta_i|$ para todo $i \in I$, se sigue que $\gamma\delta \in \lambda$ por ser λ normal.

Recíprocamente, si $\lambda = \ell_I^\infty \cdot \lambda$, $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$ y $\gamma = (\gamma_i)$ es tal que $|\gamma_i| \leq |\alpha_i|$ para todo $i \in I$, entonces la familia $\beta = (\beta_i)$ definida así: $\beta_i = \frac{\gamma_i}{\alpha_i}$ si $\alpha_i \neq 0$ y $\beta_i = 0$ en los demás casos, pertenece a ℓ_I^∞ y, por tanto, $\beta\alpha = (\frac{\gamma_i}{\alpha_i}\alpha_i) = (\gamma_i) = \gamma \in \lambda$. ∎

1.2 τ–Topologías de un espacio de familias.

En esta sección describimos las topologías que consideraremos en los espacios de familias escalares. Estarán definidas por un sistema de seminormas que verifican determinadas propiedades, o por un sistema de de subconjuntos del espacio α–dual. Demostramos que las topologías normal, de Mackey y fuerte del par dual $(\lambda, \lambda^\times)$ son topologías de este tipo.

Si λ es un espacio normal de familias escalares, que como se ha indicado anteriormente contiene a ϕ_I, entonces λ y su α–dual $\lambda^\times$ forman un par dual $(\lambda, \lambda^\times)$, con la forma bilineal

$$\langle \alpha, \eta \rangle := \sum_{i \in I} \alpha_i \eta_i \quad \text{siendo } \alpha = (\alpha_i) \in \lambda, \quad \eta = (\eta_i) \in \lambda^\times$$

Consideraremos en λ, entre otras, las topologías asociadas a este par dual: la topología débil $\sigma(\lambda, \lambda^\times)$, la de Mackey $\mu(\lambda, \lambda^\times)$, la fuerte $\beta(\lambda, \lambda^\times)$, etc... y las que definiremos a continuación.

1.2.1 Definición *Diremos que un subconjunto B del espacio λ está acotado si para cada $\eta = (\eta_i) \in \lambda^\times$ existe un número real $\rho > 0$ tal que $|\langle \beta, \eta \rangle| = \left| \sum_{i \in I} \beta_i \eta_i \right| \le \rho$ para todo $\beta = (\beta_i) \in B$.*

En realidad la definición anterior es lo mismo que decir que el conjunto B es $\sigma(\lambda, \lambda^\times)$-acotado. De la misma manera se puede definir cuándo un subconjunto de $\lambda^\times$ es $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$–acotado.

1.2.2 Sea Q un conjunto de seminormas definidas sobre el espacio de familias normal de escalares λ, que verifican las condiciones siguientes:

i) Si $\alpha \leq \beta$[1] $\Rightarrow q(\alpha) \leq q(\beta) \quad \forall\ q \in Q$.

ii) La topología determinada por el conjunto de seminormas Q es separada, es decir, para cada familia no nula $\alpha \in \lambda$ existe una seminorma $p \in Q$ tal que $p(\alpha) > 0$.

iii) Para cada $\eta \in \lambda^\times$ existe una seminorma $q \in Q$ tal que $|\langle\alpha,\eta\rangle| \leq q(\alpha)$ para todo $\alpha \in \lambda$.

Representaremos por τ a la topología localmente convexa definida en λ por la familia de seminormas Q.

De la condición i) anterior se sigue que $q(|\alpha|) = q(\alpha)$ para toda seminorma $q \in Q$ y para toda familia $\alpha \in \lambda$, siendo $|\alpha| = (|\alpha_i|)_i$.

Una base de entornos del origen $\mathcal{U}$ está formada por los conjuntos

$$U = \{\alpha \in \lambda : \sup_{1 \leq k \leq n} q_k(\alpha) \leq \varepsilon\}$$

siendo $\varepsilon > 0$ y $q_k \in Q$ para $k = 1, 2, ..., n$. De aquí y de i) se sigue que cada $U \in \mathcal{U}$ es normal.

Ahora bien, para cada $U \in \mathcal{U}$ consideremos su polar

$$U^\circ = \{\eta \in \lambda^\times : \sup_{\alpha \in U} |\langle\alpha,\eta\rangle| \leq 1\}$$

y, en general, la familia de subconjuntos de $\lambda^\times$:

$$\mathcal{M} = \{U^\circ : U \in \mathcal{U}\}$$

Esta familia verifica:

1) cada $U^\circ \in \mathcal{M}$ es absolutamente convexo, $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$–cerrado [41, Prop. 9 pág. 34] y $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$–acotado por ser cada $U \in \mathcal{U}$ absorbente [41, Lema 2 pág. 45].

[1] De acuerdo con la definición dada en el párrafo 1.1.1 de la relación $\alpha \leq \beta$.

2) si U_1° y $U_2^\circ \in \mathcal{M}$, entonces U_1 y $U_2 \in \mathcal{U}$ y, por tanto, existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subset U_1 \cap U_2$, es decir, que existe un $U^\circ \in \mathcal{M}$ tal que $U_1^\circ \cup U_2^\circ \subset U^\circ$.

3) si $U^\circ \in \mathcal{M}$ y $\rho > 0$ entonces $\rho U^\circ \in \mathcal{M}$, por la definición anterior de U.

4) si $\eta \in \lambda^\times$ existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $\eta \in U^\circ \in \mathcal{M}$, por la condición iii) anterior.

5) cada $U^\circ \in \mathcal{M}$ es normal.

En esta memoria utilizaremos en algunas demostraciones el hecho de que una topología de este tipo también puede ser definida mediante una familia $\mathcal{M}$ de subconjuntos de $\lambda^\times$ que verifican las condiciones:

1) cada $M \in \mathcal{M}$ es absolutamente convexo, $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$–cerrado y acotado;

2) si M_1 y $M_2 \in \mathcal{M}$, entonces existe un $M \in \mathcal{M}$ tal que $M_1 \cup M_2 \subset M$;

3) si $M \in \mathcal{M}$ y $\rho > 0$, entonces $\rho M \in \mathcal{M}$;

4) si $\eta \in \lambda^\times$, entonces existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $\eta \in M$;

5) cada elemento $M \in \mathcal{M}$ es normal;

y dotar a λ de la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos de $\mathcal{M}$.

En lo que sigue, a una familia $\mathcal{M}$ de subconjuntos de $\lambda^\times$ que verifique las cinco condiciones anteriores la denominaremos *sistema topologizante normal para* λ.

Una base de entornos del origen de λ, en este caso, está formado por los conjuntos

$$\bigcap_{1 \le k \le n} M_k^\circ = \left(\bigcup_{1 \le k \le n} M_k \right)^\circ$$

donde cada $M_k \in \mathcal{M}$ para $k = 1, 2, ..., n$.

Para cada M de $\mathcal{M}$ se puede definir una seminorma en λ que sería el calibrador de $M^\circ \subset \lambda$, y que representaremos por q_{M°. En general, podemos considerar la familia Q de seminormas q_{M°, que verifican las condiciones i), ii) y iii) anteriormente enunciadas, como es inmediato comprobar.

Introduciendo la topología en λ, tanto de una manera como de otra, puede decirse que las seminormas que la definen tienen por expresión

$$q_{M^\circ}(\alpha) = \sup_{\eta \in M} |\langle \alpha, \eta \rangle| = \sup_{(\eta_i) \in M} \left| \sum_{i \in I} \alpha_i \eta_i \right| = \sup_{(\eta_i) \in M} \sum_{i \in I} |\alpha_i| \, |\eta_i|$$

como es fácil comprobar.

En lo que sigue en esta memoria, nos referiremos a estas seminormas representándolas simplemente por una letra q, o por q_{M° cuando sea conveniente indicar que la seminorma corresponde al conjunto M de $\mathcal{M}$. Como ya hemos indicado, a este tipo de topologías que consideraremos definidas sobre λ las representaremos por τ; en ocasiones denotaremos al espacio λ dotado de la topología τ por (λ, τ), y nos referiremos a las propiedades y conceptos de la misma diciendo los conjuntos τ–acotados, el τ–límite, etc.... A veces necesitaremos considerar espacios distintos λ_1 y λ_2, y las τ–topologías correspondientes que un mismo sistema topologizante normal $\mathcal{M}$ define en cada uno de ellos; en estos casos representaremos a la topología por $\tau(\mathcal{M})$, y a los espacios por $(\lambda_1, \tau(\mathcal{M}))$ y $(\lambda_2, \tau(\mathcal{M}))$.

Análogamente, podríamos considerar una familia de subconjuntos de λ que fuese un sistema topologizante normal para $\lambda^\times$; las seminormas correspondientes se podrían definir sobre $\lambda^\times$ de manera similar a la aquí indicada para λ, y a las topologías sobre $\lambda^\times$ de este tipo la representaremos en lo que sigue por $\tau^\times$.

Cuando a un espacio normal de familias escalares se le dota de una τ–topología, se verifica la siguiente propiedad que también poseen los espacios de sucesiones (ver [24, §30.5(2)]):

1.2.3 Proposición. *Sea λ un espacio normal de familias escalares dotado de una τ–topología. La aplicación ψ_i definida así:*

$$\psi_i : \alpha \in \lambda \longrightarrow \psi_i(\alpha) = \alpha_i \in \mathbb{K}$$

es una aplicación lineal y uniformemente continua, considerando la topología usual en el cuerpo $\mathbb{K}$. *Por consiguiente, si* $\{\alpha^{(s)} = (\alpha_i^{(s)})_i,\ s \in D, \geq\}$ *es una red* τ*–Cauchy en* λ*, entonces para cada* $i \in I$ *la red* $\{\alpha_i^{(s)},\ s \in D, \geq\}$ *en* $\mathbb{K}$ *es de Cauchy; y toda red en* λ *que sea* τ*–convergente, es convergente coordenada a coordenada.*

DEMOSTRACIÓN:

Como $e^{(i)} \in \lambda^{\times}$, por la condición 4) anterior existe un $M_i \in \mathcal{M}$ tal que $e^{(i)} \in M_i$, o lo que es lo mismo, existe una seminorma $q_{M_i^\circ} \in Q$ tal que para todas las familias $\alpha = (\alpha_i), \beta = (\beta_i) \in \lambda$ que verifiquen $q_{M_i^\circ}(\alpha - \beta) < \varepsilon$, se tiene:

$$\begin{aligned} |\psi_i(\alpha - \beta)| &= |\alpha_i - \beta_i| = \left|\langle \alpha - \beta, e^{(i)}\rangle\right| \leq \sup_{\eta \in M_i} |\langle \alpha - \beta, \eta\rangle| \\ &= q_{M_i^\circ}(\alpha - \beta) < \varepsilon \end{aligned}$$

De donde se sigue que ψ_i es uniformemente continua.

Por último, si la red $\{\alpha^{(s)} = (\alpha_i^{(s)})_i, s \in D, \geq\}$ en λ es Cauchy con la topología τ (τ–convergente a $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$) en λ, entonces para cada $i \in I$ la red $\{\alpha_i^{(s)}, s \in D, \geq\}$ en $\mathbb{K}$ es de Cauchy (converge a $\alpha_i \in \mathbb{K}$), por ser ψ_i uniformemente continua. ∎

Observaciones

1. Según la proposición anterior, cuando dotemos a un espacio de familias λ de una τ–topología, tendremos un K-espacio, es decir, la inclusión $\lambda \hookrightarrow \omega_I$ es continua cuando se dota a ω_I de la topología de la convergencia coordenada a coordenada.

2. Los espacios ϕ_I, ℓ_I^p con $1 \leq p \leq +\infty$, c_I, c_{0I}, $\ell_I^{(p_i)}$, $\ell_I^\infty(p_i)$ y $c_{0I}^{(p_i)}$ son K-espacios cuando se considera en cada uno de ellos la topología indicada al estudiar los ejemplos en la sección anterior.

Las principales topologías que consideraremos en el par dual $(\lambda, \lambda^\times)$, salvo la topología débil, son τ–topologías. A continuación introduciremos la topología normal.

1.2.4 Proposición. *La colección $\mathcal{N}$ formada por las envolventes normales $N(\eta)$ de cada uno de los elementos $\eta \in \lambda^\times$, es el sistema topologizante normal más pequeño para λ y la τ-topología correspondiente, que en este caso representaremos por $\nu(\lambda, \lambda^\times)$, viene definida por las seminormas:*

$$q_\eta(\alpha) = \sum_{i\in I} |\eta_i \alpha_i|, \quad \alpha = (\alpha_i) \in \lambda, \quad \eta = (\eta_i) \in \lambda^\times$$

DEMOSTRACIÓN:

Es inmediato comprobar que $\mathcal{N}$ verifica las cinco condiciones exigidas en la sección 1.2 a un sistema topologizante normal para λ :

1) Si $\eta \in \lambda^\times$, se sigue que $N(\eta)$ es absolutamente convexo; además, $N(\eta)$ es $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$–acotado, pues para cada $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$ es

$$|\langle \alpha, \eta \rangle| \leq \sum_{i\in I} |\alpha_i|\, |\eta_i| = \rho < +\infty$$

de donde se sigue que para todo $\gamma = (\gamma_i) \in N(\eta)$ se tiene

$$|\langle \alpha, \gamma \rangle| \leq \sum_{i\in I} |\alpha_i|\, |\gamma_i| \leq \sum_{i\in I} |\alpha_i|\, |\eta_i| = \rho < +\infty.$$

Y $N(\eta)$ es $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$–cerrado porque si $\gamma = (\gamma_i) \in \overline{N(\eta)}^{\sigma(\lambda^\times,\lambda)}$, entonces existe una red $\{\gamma^{(s)} = (\gamma_i^{(s)}), s \in D, \geq\}$ en $N(\eta)$ tal que $\gamma = \lim_s \gamma^{(s)}$ en la topología $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$. Se sigue que para cada $i \in I$ es $\gamma_i^{(s)} = \lim_s \gamma_i^{(s)}$ y como para cada $s \in D$ es $\gamma^{(s)} \in N(\eta)$, es decir, $\left|\gamma_i^{(s)}\right| \leq |\eta_i|$ para todo $i \in I$, se sigue que $|\gamma_i| \leq |\eta_i|$ para todo $i \in I$. Por tanto, $\gamma \in N(\eta)$.

2) Si $\eta^{(k)} = (\eta_i^{(k)})$ para $k = 1, 2$ pertenecen a $\lambda^\times$ entonces para cada familia $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$ se tiene que $\sum_{i\in I} \left|\eta_i^{(k)} \alpha_i\right| < +\infty$ para $k = 1, 2$. Se sigue que

$\gamma = \left|\eta^{(1)}\right| + \left|\eta^{(2)}\right| = \left(\left|\eta_i^{(1)}\right| + \left|\eta_i^{(2)}\right|\right)$ pertenece a $\lambda^{\times}$ ya que

$$\sum_{i\in I}\left(\left|\eta_i^{(1)}\right| + \left|\eta_i^{(2)}\right|\right)|\alpha_i| \leq \sum_{i\in I}\left|\eta_i^{(1)}\right||\alpha_i| + \sum_{i\in I}\left|\eta_i^{(2)}\right||\alpha_i| < +\infty$$

para todo $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$. Por tanto, dados $N(\eta^{(k)})$ con $k = 1, 2$ pertenecientes a $\mathcal{N}$ existe $N(\gamma) \in \mathcal{N}$ tal que $N(\eta^{(1)}) \cup N(\eta^{(2)}) \subset N(\gamma)$.

3) Si $N(\eta) \in \mathcal{N}$ y $\rho \in \mathbb{K}$, $\rho > 0$, entonces es inmediato que $\rho N(\eta) = N(\rho\eta)$ y, por tanto, pertenece a $\mathcal{N}$.

4) Como cada η de $\lambda^{\times}$ pertenece a su envolvente normal $N(\eta)$, se sigue que $\mathcal{N}$ cubre $\lambda^{\times}$.

5) Cada $N(\eta)$ evidentemente es normal.

A esta topología se le denomina topología normal del espacio de familias λ. Por otra parte, $\mathcal{N}$ es el sistema topologizante normal más pequeño para λ, en el siguiente sentido: la topología normal $\nu(\lambda, \lambda^{\times})$ es más gruesa que cualquier otra topología τ definida por un sistema topologizante normal $\mathcal{M}$ para λ. En efecto, si $\eta \in \lambda^{\times}$, entonces $N(\eta) \in \mathcal{N}$ y, por tanto, $N(\eta)^{\circ}$ es un $\nu(\lambda, \lambda^{\times})$–entorno; por otra parte, existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $\eta \in M$ y $N(\eta) \subset M$, de donde se sigue que $M^{\circ} \subset N(\eta)^{\circ}$. Como M° es un τ–entorno, se sigue que $N(\eta)^{\circ}$ también lo es.

La topología normal $\nu(\lambda, \lambda^{\times})$ viene definida por las seminormas

$$q_{\eta}(\alpha) = \sum_{i\in I}|\alpha_i\eta_i| \qquad \alpha = (\alpha_i) \in \lambda, \quad \eta = (\eta_i) \in \lambda^{\times}.$$

■

1.2.5 Por último, dado $\eta \in \lambda^{\times}$ si se considera la topología $\sigma(\ell_I^{\infty}, \ell_I^1)$ en ℓ_I^{∞} y la topología $\sigma(\lambda^{\times}, \lambda)$ en $\lambda^{\times}$, la aplicación

$$T_{\eta} : \beta \in \ell_I^{\infty} \longrightarrow T_{\eta}(\beta) = \beta\eta \in \lambda^{\times}$$

es continua. Como $B_1(\ell_I^\infty)$ es $\sigma(\ell_I^\infty, \ell_I^1)$-compacta, se sigue que $T_\eta(B_1(\ell_I^\infty)) = N(\eta)$ es $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$–compacto. Por consiguiente, la topología normal es compatible con el par dual $(\lambda, \lambda^\times)$.

La misma prueba anterior demuestra que, si λ es normal, entonces la topología $\nu(\lambda^\times, \lambda)$ también es compatible.

Si la topología normal $\nu(\lambda, \lambda^\times)$ es la τ–topología más gruesa que se puede definir en un espacio de familias escalares λ, en el otro extremo de la gama se encuentra la τ–topología definida por la familia formada por todos los subconjuntos de $\lambda^\times$ que son absolutamente convexos, normales, $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$–cerrados y acotados.

Comprobaremos que esta topología coincide con la fuerte $\beta(\lambda, \lambda^\times)$, para ello demostraremos la siguiente proposición:

1.2.6 Proposición. *Si $M \subset \lambda^\times$ es $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$-acotado, entonces su envolvente normal $N(M)$ también es $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$-acotado.*

DEMOSTRACIÓN:

Si $M \subset \lambda^\times$ es $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$-acotado, entonces es acotado con la topología normal $\nu(\lambda^\times, \lambda)$ porque ésta es compatible con el par dual $(\lambda^\times, \lambda)$ (ver [41, Teor. 1 Cap. IV pág. 67]), es decir, para cada seminorma $q \in Q$ de las que definen la topología $\nu(\lambda^\times, \lambda)$ existe una constante $\rho > 0$ tal que $q(\eta) \leq \rho$ para todo $\eta \in M$. Si $\gamma = (\gamma_i) \in N(M)$ existe un $\eta = (\eta_i) \in M$ tal que $|\gamma_i| \leq |\eta_i|$ para todo $i \in I$, es decir, $\gamma \leq \eta$. Y por la condición i) que le hemos exigido a la familia de seminormas Q que definen la $\nu(\lambda^\times, \lambda)$–topología en $\lambda^\times$, se sigue que $q(\gamma) \leq q(\eta)$, es decir, que $N(M)$ es $\nu(\lambda^\times, \lambda)$-acotado. De donde se sigue que $N(M)$ es $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$-acotado. ■

1.2.7 Proposición. *La colección $\mathcal{B}$ formada por todos los subconjuntos de $\lambda^\times$ que son absolutamente convexos, normales, $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$-cerrados y acotados constituye el sistema topologizante normal más grande para λ; la τ-topología correspondiente coincide con la topología fuerte $\beta(\lambda, \lambda^\times)$, y viene definida por las seminormas:*

$$q_{M^\circ}(\alpha) = \sup_{(\eta_i)\in M} \sum_{i\in I} |\eta_i|\,|\alpha_i|$$

siendo $M \in \mathcal{B}$ y $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$.

DEMOSTRACIÓN:

Es inmediato comprobar que $\mathcal{B}$ verifica las cinco condiciones que impusimos para ser un sistema topologizante normal para λ :

La condición 1) es claro que la cumple; la 2) sigue por ser la unión de dos acotados otro acotado [24, §15.6(1)]; si $B \in \mathcal{B}$ y $\rho > 0$ es claro que $\rho B \in \mathcal{B}$, por lo que la condición 3) también se cumple; la 4) sigue porque si $\eta \in \lambda^\times$ entonces es claro que $B = N(\eta) \in \mathcal{B}$ y $\eta \in B$; la 5) se cumple evidentemente.

Por otra parte, $\mathcal{B}$ es el sistema topologizante normal más grande para λ en el sentido de que la topología que define sobre λ es más fina que la que define cualquier otro sistema topologizante normal. ■

A continuación demostramos algunas propiedades de esta topología, de las que haremos uso más adelante.

1.2.8 Proposición. *Si $A \subset \lambda^\times$ es $\beta(\lambda^\times, \phi_I)$-acotado, entonces A es acotado en la topología $\sigma(\lambda^\times, \lambda^{\times\times})$.*

DEMOSTRACIÓN:

Si $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda^{\times\times}$ el conjunto $G = \{P_F(\alpha) : F \in \mathcal{P_F}(I)\}$ es $\sigma(\phi_I, \lambda^\times)$-acotado, ya que para cada $\eta = (\eta_i) \in \lambda^\times$ es

$$|\langle\alpha, \eta\rangle| = \left|\sum_{i\in I} \alpha_i \eta_i\right| \le \sum_{i\in I} |\alpha_i \eta_i| < \infty.$$

Es decir, que para cada $\eta \in \lambda^\times$ existe un número real $\rho_1 > 0$ tal que

$$\left|\sum_{i\in F}\alpha_i\eta_i\right| \leq \sum_{i\in F}|\alpha_i\eta_i| \leq \rho_1$$

para todo $F \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$.

Por tanto, G (o su envolvente convexa) es uno de los conjuntos que definen las seminormas de la topología $\beta(\lambda^\times, \phi_I)$. Ahora bien, como A es $\beta(\lambda^\times, \phi_I)$-acotado entonces existe una constante $\rho > 0$ tal que $q_G(\beta) \leq \rho$ para todo $\beta \in A$. En particular tendremos que

$$\sup_{F\in\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)} |\langle\beta, P_F(\alpha)\rangle| \leq \rho \text{ para todo } \beta \in A$$

es decir,

$$\sup_{F\in\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)} \left|\sum_{i\in F}\beta_i\alpha_i\right| \leq \rho \text{ para todo } \beta \in A$$

de donde se deduce que

$$|\langle\beta, \alpha\rangle| = \left|\sum_{i\in I}\beta_i\alpha_i\right| \leq \rho \qquad \text{para todo } \beta \in A.$$

■

1.2.9 Proposición. *Si λ es un espacio normal de familias, entonces*

$$\beta(\lambda, \lambda^\times) = \beta(\lambda, \phi_I).$$

DEMOSTRACIÓN:

Si $M \subset \phi_I \subset \lambda^\times$ es $\sigma(\phi_I, \lambda)$–acotado, entonces es $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$–acotado. Es decir,

$$\beta(\lambda, \phi_I) \leq \beta(\lambda, \lambda^\times).$$

Si q_{M° es una de las seminormas que definen a la topología $\beta(\lambda, \lambda^\times)$, siendo $M \subset \lambda^\times$ acotado en la topología $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$, entonces para cada $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$ es

$$q_{M^\circ}(\alpha) = \sup_{(m_i)\in M}\sum_{i\in I}|\alpha_i m_i| = \sup_{(m_i)\in M}\sup_{F\in\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)}\sum_{i\in F}|\alpha_i m_i|.$$

Ahora bien, el conjunto $A = \{P_F(m) : m \in M,\ F \in \mathcal{P_F}(I)\}$ es claro que está contenido en ϕ_I y es $\sigma(\phi_I, \lambda)$–acotado; verificandose para cada $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$,

$$q_{A^\circ}(\alpha) = \sup_{(a_i)\in A} \sum_{i\in I} |\alpha_i a_i| = \sup_{(m_i)\in M} \sup_{F\in\mathcal{P_F}(I)} \sum_{i\in F} |\alpha_i m_i| = q_{M^\circ}(\alpha).$$

Por tanto, las dos topologías coinciden. ∎

En lo que sigue consideraremos, mientras no se indique lo contrario, sistemas topologizantes normales $\mathcal{M}$, como los aquí indicados, para definir la correspondiente τ–topología en λ, lo cual implica que $\mathcal{N} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{B}$.

Uno de estos sistemas topologizantes es el que se describe a continuación y que define a la topología de Mackey. Antes demostraremos la siguiente proposición:

1.2.10 Proposición. *Si λ es un espacio normal de familias y $M \subset \lambda^\times$ es acotado y cerrado en la topología $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$, entonces M es compacto en dicha topología si, y sólo si, se verifica que*

$$\nu(\lambda^\times, \lambda) - \lim_{F\in\mathcal{P_F}(I)} P_F(\eta) = \eta \quad \textit{uniformemente en } \eta \in M.$$

En particular, si $M \subset \lambda^\times$ es $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$–compacto, su envolvente normal también lo es.

DEMOSTRACIÓN:

($\Leftarrow$) Supongamos que se verifica que

$$\nu(\lambda^\times, \lambda) - \lim_{F\in\mathcal{P_F}(I)} P_F(\eta) = \eta \quad \text{uniformemente en } \eta \in M$$

y sea $\{\eta^{(s)} = (\eta_i^{(s)}),\ s \in D, \geq\}$ una red en M. Como M es $\sigma(\lambda^\times, \phi_I)$–acotado, entonces para cada $i \in I$ el conjunto $\psi_i(M)$ está acotado en $\mathbb{K}$, siendo ψ_i la aplicación definida en la proposición 1.2.3. Por tanto, el cierre $\overline{\psi_i(M)}$ es compacto en IK para cada $i \in I$ y, por consiguiente, el producto $\prod_{i \in I} \overline{\psi_i(M)}$ es compacto en ω_I con la topología producto.

Se sigue que la red dada

$$\{\eta^{(s)} = \left(\psi_i(\eta^{(s)}\right), s \in D, \geq\}$$

en dicho compacto posee un subred

$$\{\eta^{(s_v)} = \left(\psi_i(\eta^{(s_v)}\right), s_v \in D_v, \geq\}$$

(siendo D_v un subconjunto cofinal de D) que converge, con la topología producto, a un elemento $m = (m_i) \in \prod_{i \in I} \overline{\psi_i(M)} \in \omega_I$. Probaremos que $m \in M$ y que la subred indicada converge a m con la topología $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$.

Para demostrar que $m \in M$ veremos primero que está en $\lambda^\times$, es decir, que si $\alpha = (\alpha_i)$ es una familia cualquiera de λ, entonces la serie $\sum_{i \in I} |\alpha_i m_i|$ es de Cauchy. Para ello tendremos que demostrar que dado un número $\varepsilon > 0$ y arbitrario existe un $F_0' \in \mathcal{P}_\mathcal{F}(I)$, tal que si $F \in \mathcal{P}_\mathcal{F}(I)$ y es $F \supset F_0'$, entonces $\sum_{i \in F \setminus F_0'} |\alpha_i m_i| < \varepsilon$.

Ahora bien,

$$\sum_{i \in F \setminus F_0'} |\alpha_i m_i| \leq \sum_{i \in F \setminus F_0'} |\alpha_i| \left| m_i - \eta_i^{(s_v)} \right| + \sum_{i \in F \setminus F_0'} \left| \alpha_i \eta_i^{(s_v)} \right|.$$

Como, por hipótesis, $P_F(\eta) \xrightarrow{F} \eta$ uniformemente en $\eta \in M$ en la topología normal $\nu(\lambda^\times, \lambda)$, entonces dados el $\alpha \in \lambda$ y ε anteriores podemos asegurar que existe un $F_0' \in \mathcal{P}_\mathcal{F}(I)$ tal que

$$\sum_{i \in I \setminus F_0'} \left| \alpha_i \eta_i^{(s_v)} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall \ s_v \in D_v.$$

Entonces, si $F \in \mathcal{P}_\mathcal{F}(I)$, $F \supset F_0'$, tendremos

$$\sum_{i \in F \setminus F_0'} \left| \alpha_i \eta_i^{(s_v)} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall \ s_v \in D_v.$$

Por otra parte, como la subred $\{\eta^{(s_v)} = (\eta^{(s_v)})_i), s_v \in D_v, \geq\}$ converge a $m = (m_i)$ con la topología producto, se sigue que dado el número ε y el conjunto finito F_0', existe un $s_v^0 \in D_v$, tal que si $s_v \in D_v$, $s_v \geq s_v^0$, entonces se verifica

$$\left|\eta_i^{(s_v)} - m_i\right| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{h_1 \cdot \operatorname{card}(F \setminus F_0')} \quad \forall\ i \in F_0'.$$

donde F y F_0' son los conjuntos finitos anteriormente indicados y

$$h_1 = \max\{1, |\alpha_i|\ i \in F \setminus F_0'\}.$$

De todo lo anterior se deduce que dados $\alpha \in \lambda$ y ε existe el conjunto $F_0' \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$ anterior, tal que si $F \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$, $F \supset F_0'$, se verifica que

$$\begin{aligned}\sum_{i \in F \setminus F_0'} |\alpha_i m_i| &\leq \sum_{i \in F \setminus F_0'} |\alpha_i| \left|m_i - \eta_i^{(s_v)}\right| + \sum_{i \in F \setminus F_0'} \left|\alpha_i \eta_i^{(s_v)}\right| \\ &< h_1 \cdot \operatorname{card}(F \setminus F_0') \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{h_1 \cdot \operatorname{card}(F \setminus F_0')} + \frac{\varepsilon}{3} = 2\frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Demostremos ahora que la subred

$$\{\eta^{(s_v)} = \left(\psi_i(\eta^{(s_v)}\right), s_v \in D_v, \geq\}$$

converge a $m = (m_i)$ con respecto a la topología $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$. Tendremos que probar que dados un $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$ y un número $\varepsilon > 0$ arbitrarios, existe un $s_v^0 \in D_v$ tal que si $s_v \in D_v$ es $s_v \geq s_v^0$, entonces

$$\left|\langle \alpha, \eta^{(s_v)} - m\rangle\right| = \left|\sum_{i \in I} \alpha_i (\eta_i^{(s_v)} - m_i)\right| < \varepsilon.$$

Ahora

$$\begin{aligned}\left|\langle \alpha, \eta^{(s_v)} - m\rangle\right| &= \left|\sum_{i \in I} \alpha_i (\eta_i^{(s_v)} - m_i)\right| \leq \sum_{i \in I} |\alpha_i| \left|\eta_i^{(s_v)} - m_i\right| \\ &= \sum_{i \in F_0} |\alpha_i| \left|\eta_i^{(s_v)} - m_i\right| + \sum_{i \in I \setminus F_0} \left|\alpha_i \eta_i^{(s_v)}\right| + \sum_{i \in I \setminus F_0} |\alpha_i m_i|.\end{aligned}$$

Como la serie $\sum_{i \in I} |\alpha_i m_i|$ es de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe un $F_0'' \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$ tal que

$$\sum_{i \in I \setminus F_0''} |\alpha_i m_i| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por otra parte, como ya razonamos anteriormente, la subred

$$\{\eta^{(s_v)} = (\eta^{(s_v)}_i), s_v \in D_v, \geq\}$$

converge a $m = (m_i)$ con la topología producto, y se sigue que dado el número ε y el conjunto finito $F_0 = F_0' \cup F_0''$, existe un $s_v^0 \in D_v$, tal que si $s_v \in D_v$, $s_v \geq s_v^0$, entonces se verifica

$$\left|\eta_i^{(s_v)} - m_i\right| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{h \cdot \mathrm{card}(F_0)} \quad \forall\ i \in F_0.$$

donde $h = \max\{1, |\alpha_i|\ i \in F_0\}$.

De acuerdo con lo anterior, dado $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$ y $\varepsilon > 0$, existe $s_v^0 \in D_v$ tal que para todo $s_v \in D_v$, $s_v \geq s_v^0$, se verifica que

$$\begin{aligned}
\left|\langle \alpha, \eta^{(s_v)} - m\rangle\right| &= \left|\sum_{i\in I} \alpha_i(\eta_i^{(s_v)} - m_i)\right| \leq \sum_{i\in I} |\alpha_i| \left|\eta_i^{(s_v)} - m_i\right| \\
&= \sum_{i\in F_0} |\alpha_i| \left|\eta_i^{(s_v)} - m_i\right| + \sum_{i\in I\setminus F_0} \left|\alpha_i \eta_i^{(s_v)}\right| + \sum_{i\in I\setminus F_0} |\alpha_i m_i| \\
&< h \cdot \mathrm{card}(F_0) \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{h \cdot \mathrm{card}(F_0)} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

Como M es $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$–cerrado, entonces $m \in M$ y M es compacto en la topología $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$.

($\Rightarrow$) Recíprocamente, si M es $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$–compacto, entonces $P_F(\eta) \xrightarrow{F} \eta$ uniformemente en $\eta \in M$ con la topología $\nu(\lambda^\times, \lambda)$. Si no fuese así, existiría una familia $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$ y un $\varepsilon > 0$, tales que para cada F_0 de $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$ existiría un $F \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$, $F \supset F_0$, y un $\eta \in M$ de manera que

$$\sum_{i\in I\setminus F} |\alpha_i \eta_i| \geq \varepsilon.$$

Para cada $F \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$ representemos por

$$H_F = \{\eta = (\eta_i) \in M : \sum_{i\in I\setminus F} |\alpha_i \eta_i| \geq \varepsilon\}.$$

Esta familia de subconjuntos de M verifica las siguientes propiedades:

- cada $H_F \neq \emptyset$ ya que, al menos, pertenece la familia η de M que le corresponde a F tal como se indica más arriba;

- cada H_F es cerrado para la topología $\nu(\lambda^\times, \lambda)$;

- la familia $\mathcal{C} = \{H_F : F \in \mathcal{P_F}(I)\}$ tiene la propiedad de intersección finita, pues si $F_1, F_2 \in \mathcal{P_F}(I)$ entonces $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{P_F}(I)$; como $F_1 \subset F_1 \cup F_2$ entonces $H_{F_1 \cup F_2} \subset H_{F_1}$ y por la misma razón $H_{F_1 \cup F_2} \subset H_{F_2}$; por consiguiente, $H_{F_1 \cup F_2} \subset H_{F_1} \cap H_{F_2}$; de forma que si $H_{F_1} \cap H_{F_2}$ fuese vacía también lo sería $H_{F_1 \cup F_1}$ en contra de lo supuesto.

Como M es $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$–compacto, entonces $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{P_F}(I)} H_F \neq \emptyset$, es decir, que existe un $\delta = (\delta_i) \in M$ tal que $\sum\limits_{i \in I \setminus F} |\alpha_i \delta_i| \geq \varepsilon$ para todo $F \in \mathcal{P_F}(I)$, lo cual está en contradicción con que $\alpha \in \lambda$ y $\delta \in \lambda^\times$.

Por último, si $M \subset \lambda^\times$ es $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$–compacto y $\gamma = (\gamma_i) \in N(M)$, entonces existe un $\eta = (\eta_i) \in M$ tal que $|\gamma_i| \leq |\eta_i|$ para todo $i \in I$, de donde se sigue que

$$\sum_{i \in I \setminus F} |\alpha_i \gamma_i| \leq \sum_{i \in I \setminus F} |\alpha_i \eta_i| < \varepsilon.$$

Como esto se verifica para todo $\gamma \in N(M)$ y las secciones $P_F(\eta)$ convergen uniformemente en $\eta \in M$ respecto de la topología $\nu(\lambda^\times, \lambda)$, de la desigualdad anterior se deduce que la misma propiedad tienen las familias pertenecientes a $N(M)$. Por la primera parte de esta proposición se sigue que $N(M)$ es $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$–compacta. ∎

Observación

La equivalencia de la primera parte de esta proposición se obtiene con convergencia uniforme de las secciones para la topología normal $\nu(\lambda^\times, \lambda)$. Para la topología $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$ se puede demostrar que si $M \subset \lambda^\times$ es compacto con la topología $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$, entonces las secciones $P_F(\eta) \xrightarrow{F} \eta$ uniformemente en $\eta \in M$ con la topología $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$; sin embargo, no se puede demostrar la implicación en el otro sentido por no poderse asegurar que la familia

$$H_F = \left\{ \eta = (\eta_i) \in M : \left| \sum_{i \in I \setminus F} \alpha_i \eta_i \right| \geq \varepsilon \right\}$$

verifica la propiedad de intersección finita.

Describimos a continuación la topología de Mackey como una topología normal.

1.2.11 Proposición. *Si λ es un espacio normal de familias, la familia $\mathcal{K}$ formada por todos los subconjuntos de $\lambda^\times$ que son absolutamente convexos, normales y $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$–compactos constituye un sistema topologizante normal para λ, y la τ–topología correspondiente coincide con la topología de Mackey $\mu(\lambda, \lambda^\times)$, y viene dada por las seminormas:*

$$q_{M^\circ}(\alpha) = \sup_{(\eta_i) \in M} \sum_{i \in I} |\alpha_i \eta_i|$$

siendo $M \in \mathcal{K}$ y $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$.

DEMOSTRACIÓN:

Es inmediato comprobar que $\mathcal{K}$ verifica las cinco condiciones que impusimos en la sección 1.2 para ser un sistema topologizante normal para λ :

La condición 1) es claro que la cumple; la 2) sigue porque si M_1 y M_2 pertenecen a $\mathcal{K}$ entonces la envolvente absolutamente convexa cerrada de $M_1 \cup M_2$ es un subconjunto de $M_1 + M_2$ y, por tanto, $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$–compacto ([41, Lema 6(ii) pág. 52 y Lema 7(ii) pág. 53]); la condición 3), si $M \in \mathcal{K}$ y $\rho > 0$ entonces

$\rho M \in \mathcal{K}$ por [41, Lema 7(i) pág. 53]; la condición 4) sigue porque si $\eta \in \lambda^\times$ entonces $N(\eta) \in \mathcal{K}$ y $\eta \in N(\eta)$; la 5) se cumple evidentemente.

El hecho de que la τ–topología definida por $\mathcal{K}$ coincida con la topología de Mackey $\mu(\lambda, \lambda^\times)$ se sigue de la proposición 1.2.10. ∎

En lo que sigue haremos uso de las siguientes proposiciones.

1.2.12 Proposición. *Si λ es un espacio normal de familias y $A \subset \lambda$ es acotado y cerrado en la topología $\sigma(\lambda^{\times\times}, \lambda^\times)$, entonces A es $\mu(\lambda, \lambda^\times)$-compacto si, y sólo si, se verifica que*

$$\mu(\lambda, \lambda^\times) - \lim_{F \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)} P_F(\alpha) = \alpha \quad \textit{uniformemente en } \alpha \in A.$$

En particular, si $A \subset \lambda$ es $\mu(\lambda, \lambda^\times)$-compacto, su envolvente normal también lo es.

DEMOSTRACIÓN:

Seguiremos un esquema semejante al utilizado en la demostración de la proposición 1.2.10.

($\Leftarrow$) Sea $\{\alpha^{(s)} = (\alpha_i^{(s)}), s \in D, \geq\}$ una red en A. Como A es $\sigma(\lambda^\times, \phi_I)$-acotado, entonces para cada $i \in I$ el conjunto $\psi_i(A)$ está acotado en $\mathbb{K}$, siendo ψ_i la aplicación definida en la proposición 1.2.3. Por tanto, el cierre $\overline{\psi_i(A)}$ es compacto en $\mathbb{K}$ para cada $i \in I$ y, por consiguiente, el producto $\prod_{i \in I} \overline{\psi_i(A)}$ es compacto en ω_I con la topología producto.

Se sigue que la red dada

$$\{\alpha^{(s)} = \left(\psi_i(\alpha^{(s)})\right), s \in D, \geq\}$$

en dicho compacto posee un subred

$$\{\alpha^{(s_v)} = \left(\psi_i(\alpha^{(s_v)})\right), s_v \in D_v, \geq\}$$

(siendo D_v un subconjunto cofinal de D) que converge, con la topología producto, a un elemento $\beta = (\beta_i) \in \prod_{i\in I} \overline{\psi_i(M)} \in \omega_I$. Probaremos que $\beta \in A$ y que la subred indicada converge a β con la topología $\mu(\lambda, \lambda^\times)$.

Para demostrar que $\beta \in A$ veremos primero que está en λ, es decir, que si $\eta = (\eta_i)$ es una familia cualquiera de $\lambda^\times$, entonces la serie $\sum_{i\in I} |\beta_i \eta_i|$ es de Cauchy. Para ello tendremos que demostrar que dado un número $\varepsilon > 0$ y arbitrario existe un $F_0' \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$, tal que si $F \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$ y es $F \supset F_0'$, entonces $\sum_{i\in F\setminus F_0'} |\beta_i \eta_i| < \varepsilon$.

Ahora bien,

$$\sum_{i\in F\setminus F_0'} |\beta_i \eta_i| \leq \sum_{i\in F\setminus F_0'} \left|\beta_i - \alpha_i^{(s_v)}\right| |\eta_i| + \sum_{i\in F\setminus F_0'} \left|\beta_i \alpha_i^{(s_v)}\right|.$$

Si $\eta \in \lambda^\times$ su envolvente normal $N(\eta) \subset \lambda^\times$ es absolutamente convexa, y $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$–compacta y este conjunto define una seminorma q_{N° sobre λ de las que definen la topología $\mu(\lambda, \lambda^\times)$. Como, por hipótesis, $P_F(\alpha) \xrightarrow{F} \alpha$ uniformemente en $\alpha \in A$ en la topología $\mu(\lambda, \lambda^\times)$, entonces para la seminorma q_{N° y el número ε podemos asegurar que existe un $F_0' \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$ tal que

$$\sum_{i\in I\setminus F_0'} \left|\alpha_i^{(s_v)} \eta_i\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\ s_v \in D_v.$$

Entonces, si $F \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$, $F \supset F_0'$, tendremos

$$\sum_{i\in F\setminus F_0'} \left|\alpha_i^{(s_v)} \eta_i\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\ s_v \in D_v.$$

Por otra parte, como la subred $\{\alpha^{(s_v)} = (\alpha^{(s_v)})_i), s_v \in D_v, \geq\}$ converge a $\beta = (\beta_i)$ con la topología producto, se sigue que dado el número ε y el conjunto finito F_0', existe un $s_v^0 \in D_v$, tal que si $s_v \in D_v$, $s_v \geq s_v^0$, entonces se verifica

$$\left|\alpha_i^{(s_v)} - \beta_i\right| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{h_1 \cdot \mathrm{card}(F \setminus F_0')} \quad \forall\ i \in F_0'.$$

donde F y F_0' son los conjuntos finitos anteriormente indicados y

$$h_1 = \max\{1, |\eta_i|\ i \in F \setminus F_0'\}.$$

De todo lo anterior se deduce que dados $\alpha \in \lambda$ y ε existe el conjunto $F_0' \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$ anterior, tal que si $F \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$, $F \supset F_0'$, se verifica que

$$\begin{aligned}\sum_{i\in F\setminus F_0'} |\eta_i\beta_i| &\leq \sum_{i\in F\setminus F_0'} |\eta_i| \left|\beta_i - \alpha_i^{(s_v)}\right| + \sum_{i\in F\setminus F_0'} \left|\eta_i\alpha_i^{(s_v)}\right| \\ &< h_1 \cdot \operatorname{card}(F\setminus F_0')\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{1}{h_1\cdot\operatorname{card}(F\setminus F_0')} + \frac{\varepsilon}{3} = 2\frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Demostremos ahora que la subred

$$\left\{\alpha^{(s_v)} = \left(\psi_i(\alpha^{(s_v)})\right), s_v \in D_v, \geq\right\}$$

converge a $\beta = (\beta_i)$ con respecto a la topología $\mu(\lambda, \lambda^\times)$. Tendremos que probar que dada una seminorma cualquiera q_{M° sobre λ de las que definen la topología $\mu(\lambda, \lambda^\times)$ y un número $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $s_v^0 \in D_v$ tal que si $s_v \in D_v$ y es $s_v \geq s_v^0$, entonces

$$qM^\circ\left(\alpha^{(s_v)} - \beta\right) = \sup_{(m_i)\in M} \sum_{i\in I} \left|\alpha_i^{(s_v)} - \beta_i\right| |m_i| < \varepsilon.$$

Ahora

$$\sum_{i\in I} \left|\alpha_i^{(s_v)} - \beta_i\right| |m_i| = \sum_{i\in F_0} \left|\alpha_i^{(s_v)} - \beta_i\right| |m_i| + \sum_{i\in I\setminus F_0} \left|\alpha_i^{(s_v)} m_i\right| + \sum_{i\in I\setminus F_0} |\beta_i m_i|.$$

Como $M \subset \lambda^\times$ es absolutamente convexo, normal y compacto en la topología $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$, entonces $P_F(m) \xrightarrow{F} m$ uniformemente en $m \in M$ con la topología $\nu(\lambda^\times, \lambda)$, según la proposición 1.2.10. Es decir, dado $\beta \in \lambda$ existe un $F_0'' \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$ tal que

$$\sum_{i\in I\setminus F_0''} |\beta_i m_i| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para todo } m = (m_i) \in M.$$

Por otra parte, dada la seminorma q_{M° sobre λ de las que definen la topología $\mu(\lambda, \lambda^\times)$ y el número $\varepsilon > 0$ existe un $F_0' \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$ tal que

$$q_{M^\circ}\left(\alpha^{(s_v)} - P_{F_0'}\left(\alpha^{(s_v)}\right)\right) = \sup_{(m_i)\in M} \sum_{i\in I\setminus F_0'} \left|\alpha_i^{(s_v)} m_i\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $s_v \in D_v$, ya que por hipótesis $P_F(\alpha) \xrightarrow{F} \alpha$ uniformemente en $\alpha \in A$ con la topología $\mu(\lambda, \lambda^\times)$.

Por último, como la subred

$$\{\alpha^{(s_v)} = (\alpha^{(s_v)})_i), s_v \in D_v, \geq\}$$

converge a $\beta = (\beta_i)$ con la topología producto, se sigue que dados el número ε y el conjunto finito $F_0 = F_0' \cup F_0''$, existe un $s_v^0 \in D_v$, tal que si $s_v \in D_v$, $s_v \geq s_v^0$, entonces se verifica

$$\left|\alpha_i^{(s_v)} - \beta_i\right| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{h \cdot \operatorname{card}(F_0)} \quad \forall\ i \in F_0.$$

donde $h = \max\{1, |m_i|\ i \in F_0\,(m_i) \in M\}$ ya que $M \subset \lambda^\times$ es $\sigma(\lambda^\times, \phi_I)$-acotado

De acuerdo con lo anterior, dada la seminorma q_{M° sobre λ de las que definen la topología $\mu(\lambda, \lambda^\times)$ y $\varepsilon > 0$, existe $s_v^0 \in D_v$ tal que para todo $s_v \in D_v$, $s_v \geq s_v^0$, se verifica que

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}\left|\alpha_i^{(s_v)} - \beta_i\right||m_i| &= \sum_{i\in F_0}\left|\alpha_i^{(s_v)} - \beta_i\right||m_i| + \sum_{i\in I\setminus F_0}\left|\alpha_i^{(s_v)} m_i\right| + \sum_{i\in I\setminus F_0}|\beta_i m_i| \\ &< h \cdot \operatorname{card}(F_0)\frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{h \cdot \operatorname{card}(F_0)} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

para todo $(m_i) \in M$. Por consiguiente, se verifica que

$$q_{M^\circ}\left(\alpha^{(s_v)} - \beta\right) \leq \varepsilon \text{ para todo } s_v \geq s_v^0.$$

($\Rightarrow$) Recíprocamente, si A es $\mu(\lambda, \lambda^\times)$-compacto, entonces $P_F(\alpha) \xrightarrow{F} \alpha$ uniformemente en $\alpha \in A$ con la topología $\mu(\lambda, \lambda^\times)$. Si no fuese así, existiría una seminorma q_{M° sobre λ de las que definen la topología $\mu(\lambda, \lambda^\times)$ y un $\varepsilon > 0$, tales que para cada F_0 de $\mathcal{P}_\mathcal{F}(I)$ existiría un $F \in \mathcal{P}_\mathcal{F}(I)$, $F \supset F_0$, y un $\alpha \in A$ de manera que

$$q_{M^\circ}(\alpha - P_F(\alpha)) \geq \varepsilon.$$

Para cada $F \in \mathcal{P}_\mathcal{F}(I)$ representemos por

$$H_F = \{\alpha = (\alpha_i) \in A : q_{M^\circ}(\alpha - P_F(\alpha)) \geq \varepsilon\}.$$

Esta familia de subconjuntos de A verifica las siguientes propiedades:

- cada $H_F \neq \emptyset$ ya que, al menos, pertenece la familia α de A que le corresponde a F tal como se indica más arriba;

- cada H_F es cerrado para la topología $\mu(\lambda, \lambda^\times)$;

- la familia $\mathcal{C} = \{H_F : F \in \mathcal{P_F}(I)\}$ tiene la propiedad de intersección finita, pues si $F_1, F_2 \in \mathcal{P_F}(I)$ entonces $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{P_F}(I)$; como $F_1 \subset F_1 \cup F_2$ entonces $H_{F_1 \cup F_2} \subset H_{F_1}$ y por la misma razón $H_{F_1 \cup F_2} \subset H_{F_2}$; por consiguiente, $H_{F_1 \cup F_2} \subset H_{F_1} \cap H_{F_2}$; de forma que si $H_{F_1} \cap H_{F_2}$ fuese vacía también lo sería $H_{F_1 \cup F_1}$ en contra de lo supuesto.

Como A es $\mu(\lambda, \lambda^\times)$–compacto, entonces $\bigcap_{F \in \mathcal{P_F}(I)} H_F \neq \emptyset$, es decir, que existe un $\delta = (\delta_i) \in A$ tal que $q_{M^\circ}(\delta - P_F(\delta)) \geq \varepsilon$ para todo $F \in \mathcal{P_F}(I)$. Esto está en contradicción con el hecho de que $M \subset \lambda^\times$ sea $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$–compacto de acuerdo con la proposición 1.2.10, pues dada dicha familia $\delta \in \lambda$ el que

$$q_{M^\circ}(\delta - P_F(\delta)) = \sup_{(m_i) \in M} \sum_{i \in I \setminus F} |\delta_i m_i| \geq \varepsilon$$

para todo $F \in \mathcal{P_F}(I)$ significa que las secciones $P_F(m)$ no convergen a m uniformemente en $m \in M$ con la topología $\nu(\lambda^\times, \lambda)$.

Para cada $\gamma = (\gamma_i) \in N(A)$ existe un $\alpha = (\alpha_i) \in A$ tal que $|\gamma_i| \leq |\alpha_i|$ para todo $i \in I$, de donde se sigue que $\gamma - P_F(\gamma) \leq \alpha - P_F(\alpha$ para $F \in \mathcal{P_F}(I)$, (ver párrafo 1.1.1), y de aquí se deduce que $q(\gamma - P_F(\gamma)) \leq q(\alpha - P_F(\alpha))$ para cualquier seminorma q de las que definen una τ–topología sobre λ (ver condición i) del párrafo 1.2.2.

Si A es $\mu(\lambda, \lambda^\times)$–compacto entonces las secciones $P_F(\alpha)$ convergen a α uniformemente en $\alpha \in A$ con la topología $\mu(\lambda, \lambda^\times)$ de acuerdo con la primera parte de esta proposición. De la desigualdad antyerior se deduce que las familias pertenecientes a $N(A)$ poseen la misma propiedad. Por tanto, $N(A)$ es $\mu(\lambda, \lambda^\times)$–compacta. ∎

1.2.13 Proposición. *Sea λ un espacio normal de familias dotado de una τ–topología. Si $A \subset \lambda$ es normal, entonces el cierre de A en (λ, τ) también es normal.*

DEMOSTRACIÓN:

Si $\beta = (\beta_i) \in N\left(\overline{A}^{\tau}\right)$ entonces existe $\alpha = (\alpha_i) \in \overline{A}^{\tau}$ tal que $|\beta_i| \leq |\alpha_i|$ para todo $i \in I$, y existe también una red $\{\alpha^{(s)} = (\alpha_i^{(s)}),\ s \in D, \geq\}$ en A que τ–converge a α.

Definiendo $\gamma_i = \frac{\beta_i}{\alpha_i}$ si $\alpha_i \neq 0$ y $\gamma_i = 0$ si $\alpha_i = 0$, sea $\beta^{(s)} = (\beta_i^{(s)}) = (\gamma_i \alpha_i^{(s)})$. Se sigue que la red $\{\beta^{(s)},\ s \in D, \geq\}$ está contenida en A, pues A es normal, y para cada $s \in D$ es $\left|\beta_i^{(s)}\right| = \left|\gamma_i \alpha_i^{(s)}\right| \leq \left|\alpha_i^{(s)}\right|$ para todo $i \in I$.

Por otra parte, si $M \in \mathcal{M}$ y $s \in D$

$$\begin{aligned} q_{M^\circ}(\beta^{(s)} - \beta) &= \sup_{(\eta_i) \in M} \sum_{i \in I} \left|\beta_i^{(s)} - \beta_i\right| |\eta_i| = \sup_{(\eta_i) \in M} \sum_{i \in I} \left|\gamma_i(\alpha_i^{(s)} - \alpha_i)\eta_i\right| \\ &\leq \sup_{(\eta_i) \in M} \sum_{i \in I} \left|(\alpha_i^{(s)} - \alpha_i)\eta_i\right| = q_{M^\circ}(\alpha^{(s)} - \alpha) \end{aligned}$$

Por consiguiente, la red $\{\beta^{(s)},\ s \in D, \geq\}$ converge en la topología τ a β; de donde se deduce que $\beta \in \overline{A}^{\tau}$, es decir, $\overline{A}^{\tau} = N(\overline{A}^{\tau})$. ■

1.2.14 Proposición. *En todo espacio normal de familias λ dotado de una τ–topología se verifica que la familia de proyecciones $\{P_J : J \subset I\}$ es equicontinua.*

DEMOSTRACIÓN:

Para cada $J \in \mathcal{P}(I)$ es claro que $P_J(\alpha) \leq \alpha$ para toda $\alpha \in \lambda$, según la definición de esta relación (ver párrafo 1.1.1). Por la condición i) impuesta a la familia Q de seminormas que definen la τ–topología en λ se sigue que $q(P_J(\alpha)) \leq q(\alpha)$ para toda $q \in Q$ (ver párrafo 1.2.2). ■

Observaciones

1. Como vimos en la sección anterior, los espacios ℓ_I^p, siendo $1 \leq p < \infty$, y los espacios c_{0I}, c_I, $\ell_I^{(p_i)}$ y $c_{0I}^{(p_i)}$ son espacios de Banach y su α–dual coincide con su dual. Por tanto, la topología indicada en cada caso coincide con la topología fuerte, es decir, la topología con que se ha dotado cada uno de esos espacios es una τ–topología.

2. Los espacios ℓ_I^∞ y $\ell_I^\infty(p_i)$ son también espacios de Banach, pero su α–dual no coincide con su dual. La topología indicada en cada uno de estos espacios coincide con la topología fuerte.

3. En los espacios escalonados citados en los ejemplos de la sección anterior se verifica que su topología normal coincide con la topología fuerte.

4. Si $\mathcal{M}$ es un sistema topologizante normal del espacio normal de familias λ y J es un subconjunto de I, entonces la topología que se suele considerar en el subespacio J–seccional λ_J, salvo que se indique lo contario, es la definida por el sistema topologizante $\mathcal{M}_J$ formado, a partir de los conjuntos $M \in \mathcal{M}$, por

   $$M_J = \{\beta_J = (\beta_j)_{j\in J} \in (\lambda^\times)_J : \exists\ (\gamma_i)_{i\in I} \in M \text{ con } \beta_j = \gamma_j \,\forall\ j \in J\}$$

   Es inmediato comprobar que $(M_J)^\circ = (M^\circ)_J$.

   O bien, si la topología en el espacio λ está definida por el sistema de seminormas $Q = \{q_{M^\circ}\}$, entonces la topología que se suele considerar en el espacio λ_J es la definida por el sistema de seminormas $Q_J = \{q_{M_J^\circ}\}$. A esta topología sobre λ_J se representa también por τ, salvo que exista posibilidad de confusión, en cuyo caso se denota por τ_J.

1.3 Completitud de un espacio de familias.

En esta sección estudiaremos cuándo es completo un espacio de familias escalares λ y, si no lo es, cuál es su completación.

Exponemos en primer lugar los resultados sobre este aspecto en relación con las topologías débil y normal, a los que haremos referencia más adelante. A continuación reunimos en un teorema lo relativo a la completitud de un espacio de familias cuando se le dota de una τ–topología. Terminamos la sección demostrando que si el espacio en cuestión es localmente completo, entonces ciertos subespacios también son localmente completos.

En primer lugar indicaremos que en el caso de las familias escalares se verifica también el Teorema de Schur:

1.3.1 Teorema. *(Schur). Cada sucesión de familias en ℓ_I^1 que es de Cauchy respecto de la topología $\sigma(\ell_I^1, \ell_I^\infty)$, es $\|\cdot\|_1$–Cauchy.*

La demostración puede hacerse igual que para las sucesiones utilizando una técnica similar a la conocida como *joroba deslizante* (ver [24, pág. 283] y [21, §10.5 Teor. 2 pág. 205]). Para el caso en que el conjunto $I = \mathbb{N}$, este resultado fué probado en 1920 por J. Schur [46, III pág 82].

De aquí se deducen los siguientes corolarios a los que nos referiremos en varias ocasiones. La demostración del primero puede verse en [21, §10.5 Cor. 4 pág. 206] y como en las otras se utilizan técnicas semejantes a las empleadas en las correspondientes demostraciones en los espacios de sucesiones, las escribimos con letra pequeña.

1.3.2 Corolario. $(\ell_I^1, \sigma(\ell_I^1, \ell_I^\infty))$ *es sucesionalmente completo.*

1.3.3 Corolario. *Si λ es normal, entonces $(\lambda^\times, \sigma(\lambda^\times, \lambda))$ es sucesionalmente completo.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\left(\eta^{(n)}\right)_n = \left(\left(\eta_i^{(n)}\right)_i\right)_n$ una sucesión de Cauchy en $\lambda^\times$ con la topología $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$. Entonces para cada $i \in I$ la sucesión $\left(\eta_i^{(n)}\right)_n$ en $\mathbb{K}$ también es de Cauchy por la proposición 1.2.3 y, por tanto, converge a un cierto $\eta_i \in \mathbb{K}$. Sea $\eta = (\eta_i)$; veamos que $\eta \in \lambda^\times$ y que $\eta = \sigma(\lambda^\times, \lambda)\text{-}\lim_n \eta^{(n)}$.

En efecto, si $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$ es una familia arbitraria, como cada $\eta^{(n)} \in \lambda^\times$, se verifica que $\eta^{(n)}\alpha \in \ell_I^1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\left(\eta^{(n)}\alpha\right)_n = \left(\left(\eta_i^{(n)}\alpha_i\right)_i\right)_n$ es una sucesión en ℓ_I^1 que es $\sigma(\ell_I^1, \ell_I^\infty)$–Cauchy pues si $\beta = (\beta_i) \in \ell_I^\infty$, entonces $\alpha\beta = (\alpha_i\beta_i) \in \lambda$ por ser λ normal (proposición 1.1.3) y, por consiguiente, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq n_2 \geq n_0$, es

$$\left|\langle \eta^{(n_1)} - \eta^{(n_2)}, \alpha\beta\rangle\right| = \left|\langle \eta^{(n_1)}\alpha - \eta^{(n_2)}\alpha, \beta\rangle\right| < \varepsilon.$$

Como $(\ell_I^1, \sigma(\ell_I^1, \ell_I^\infty))$ es sucesionalmente completo por el corolario anterior, entonces la sucesión $\left(\eta^{(n)}\alpha\right)_n$ converge en la topología $\sigma(\ell_I^1, \ell_I^\infty)$ a $l = (l_i) \in \ell_I^1$. Como $e^{(i)} \in \ell_I^\infty$ se sigue que, para cada $i \in I$ existe un $n_{0_i} \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_{0_i}$, es $\left|\eta_i^{(n)}\alpha_i - l_i\right| < \varepsilon$. Pero si para cada $i \in I$ es $\eta_i^{(n)} \xrightarrow{n} \eta_i$, entonces $\eta_i^{(n)}\alpha_i \xrightarrow{n} \eta_i\alpha_i$ de donde se deduce que debe ser $l_i = \eta_i\alpha_i$, es decir, que la sucesión $\eta^{(n)}\alpha \xrightarrow{n} \eta\alpha \in \ell_I^1$ en la topología débil. Como $\alpha \in \lambda$ entonces $\eta \in \lambda^\times$.

Veamos que la sucesión considerada al principio converge con la topología $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$ a la familia η. Si $\eta^{(n)}\alpha \xrightarrow{n} \eta\alpha$ en la topología $\sigma(\ell_I^1, \ell_I^\infty)$, tomando $e \in \ell_I^\infty$ existe un $n_0 \in D$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ es

$$\begin{aligned}\left|\langle \eta^{(n)}\alpha - \eta\alpha, e\rangle\right| &= \left|\sum_{i\in I}(\eta_i^{(n)}\alpha_i - \eta_i\alpha_i)\right| = \left|\sum_{i\in I}(\eta_i^{(n)} - \eta_i)\alpha_i\right| \\ &= \left|\langle \eta^{(n)} - \eta, \alpha\rangle\right| < \varepsilon,\end{aligned}$$

es decir, que $\eta^{(n)} \xrightarrow{n} \eta \in \lambda^\times$ en la topología $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$, pues $\alpha = (\alpha_i)$ era una familia arbitraria de λ. ∎

1.3.4 Como una consecuencia inmediata del corolario que acabamos de demostrar y del Teorema de Banach–Mackey (ver [24, §20.11(8) pág. 254]), se sigue que si λ es un espacio normal, entonces (λ, τ) es un espacio de Banach–Mackey para toda topología τ compatible del par dual $(\lambda, \lambda^{\times})$. Es decir, todo subconjunto de $\lambda^{\times}$ que sea $\sigma(\lambda^{\times}, \lambda)$–acotado es $\beta(\lambda^{\times}, \lambda)$–acotado. Por consiguiente, si el espacio λ es normal, las topologías $\beta(\lambda, \lambda^{\times})$ y $\beta^{*}(\lambda, \lambda^{\times})$ coinciden. Es inmediato también el siguiente corolario:

1.3.5 Corolario. *Si el espacio normal de familias escalares λ dotado de una τ–topología es casi tonelado, entonces es tonelado.*

1.3.6 Corolario. *Si el espacio de familias escalares λ es perfecto, entonces es sucesionalmente completo con la topología $\sigma(\lambda, \lambda^{\times})$.*

DEMOSTRACIÓN:

Como $\lambda^{\times}$ es normal, aplicando el corolario 1.3.3 se sigue que el espacio $(\lambda^{\times})^{\times} = \lambda$ es $\sigma(\lambda, \lambda^{\times})$–sucesionalmente completo. ∎

En relación con la topología normal se verifica la siguiente proposición:

1.3.7 Proposición. *Un espacio de familias escalares λ es perfecto si, y sólo si, es completo con la topología normal $\nu(\lambda, \lambda^{\times})$.*

DEMOSTRACIÓN:

Si λ es perfecto y $\{\alpha^{(s)} = (\alpha_i^{(s)}),\ s \in D,\ \geq\}$ es una red en λ que es de Cauchy en la topología $\nu(\lambda, \lambda^\times)$, entonces por la proposición 1.2.3 se verifica que para cada $i \in I$ la red $\{\alpha_i^{(s)},\ s \in D,\ \geq\}$ en $\mathbb{K}$ también es de Cauchy y, por consiguiente, converge a un $\alpha_i \in \mathbb{K}$ para cada $i \in I$. Sea $\alpha = (\alpha_i)$. Veamos que $\alpha \in \lambda$ y que es el límite de la red dada con respecto a la topología $\nu(\lambda, \lambda^\times)$.

En efecto, si $\eta = (\eta_i)$ es una familia arbitraria de $\lambda^\times$, como cada $\alpha^{(s)} \in \lambda$ se verifica que $\alpha^{(s)}\eta \in \ell_I^1$ para cada $s \in D$. Por tanto, $\{\alpha^{(s)}\eta,\ s \in D,\ \geq\}$ es una red en ℓ_I^1 que es $\|\cdot\|$-Cauchy.[2] Como ℓ_I^1 es $\|\cdot\|$-completo, entonces converge a $l = (l_i) \in \ell_I^1$. Se sigue que para cada $i \in I$ es

$$\left|\alpha_i^{(s)}\eta_i - l_i\right| \leq \sum_{i \in I} \left|\alpha_i^{(s)}\eta_i - l_i\right| = \left\|\alpha^{(s)}\eta - l\right\| < \varepsilon$$

desde un cierto $s_0 \in D$. Como para cada $i \in I$ es $\alpha_i^{(s)} \xrightarrow{s} \alpha_i$, entonces $\alpha_i^{(s)}\eta_i \xrightarrow{s} \alpha_i\eta_i$ de donde se deduce que debe ser $l_i = \alpha_i\eta_i$, es decir, que la red $\alpha^{(s)}\eta \xrightarrow{s} \alpha\eta \in \ell_I^1$ en la topología de la norma. Como $\eta \in \lambda^\times$, entonces $\alpha \in \lambda^{\times\times} = \lambda$.

Veamos que la red $\alpha^{(s)} \xrightarrow{s} \alpha$ en la topología $\nu(\lambda, \lambda^\times)$. Como η es una familia arbitraria de $\lambda^\times$ y $\alpha^{(s)}\eta \xrightarrow{s} \alpha\eta$ en la topología de la norma de ℓ_I^1, entonces se verifica que

$$q_\eta\left(\alpha^{(s)} - \alpha\right) = \sum_{i \in I} \left|\alpha_i^{(s)} - \alpha_i\right| |\eta_i| = \left\|\alpha^{(s)}\eta - \alpha\eta\right\| < \varepsilon$$

desde un cierto $s_0 \in D$.

Recíprocamente, si $(\lambda, \nu(\lambda, \lambda^\times))$ es completo y $\alpha \in \lambda^{\times\times}$, entonces para cada $F \in \mathcal{P}_\mathcal{F}(I)$ es $P_F(\alpha) \in \lambda \subset \lambda^{\times\times}$ ya que $\phi_I \subset \lambda$ y, además

$$\alpha = \nu(\lambda^{\times\times}, \lambda^\times) - \lim_{F \in \mathcal{P}_\mathcal{F}(I)} P_F(\alpha).$$

Como las topologías $\nu(\lambda, \lambda^\times)$ y $\nu(\lambda^{\times\times}, \lambda^\times)$ coinciden en λ, también es

$$\alpha = \nu(\lambda, \lambda^\times) - \lim_{F \in \mathcal{P}_\mathcal{F}(I)} P_F(\alpha).$$

Como $(\lambda, \nu(\lambda, \lambda^\times))$ es completo, entonces $\alpha \in \lambda$, es decir, λ es perfecto. ∎

Al estudiar la completitud de un espacio de familias respecto de cualquier otra topología del par dual de tipo normal, no se puede repetir el esquema utilizado anteriormente para la topología más gruesa de este tipo. Entre otras

[2] Ya que en ℓ_I^1 la topología normal $\nu(\ell_I^1, \ell_I^\infty)$ coincide con la de la norma.

razones, y en el caso concreto de la topología de Mackey, debido a que en el caso de la topología normal se puede asegurar que las topologías $\nu(\lambda^{\times\times}, \lambda^{\times})$ y $\nu(\lambda, \lambda^{\times})$, coinciden en λ. En cambio, al tratar con las topologías $\mu(\lambda^{\times\times}, \lambda^{\times})$ y $\mu(\lambda, \lambda^{\times})$ (y más finas que ellas) no se puede asegurar lo mismo. En efecto, la primera tiene como sistema topologizante normal una familia de subconjuntos de $\lambda^{\times}$ (verificando las condiciones indicadas en la sección 1.2) cada uno de los cuales es $\sigma(\lambda^{\times}, \lambda^{\times\times})$–compacto, mientras que los subconjuntos de la familia que define la segunda topología son $\sigma(\lambda^{\times}, \lambda)$–compactos. Como se verifica que la topología $\sigma(\lambda^{\times}, \lambda)$ es más gruesa que $\sigma(\lambda^{\times}, \lambda^{\times\times})$, todo subconjunto de $\lambda^{\times}$ que sea $\sigma(\lambda^{\times}, \lambda^{\times\times})$–compacto es también $\sigma(\lambda^{\times}, \lambda)$–compacto (ver [41, Lema 5 Cap. III pág. 52]), pero la recíproca no tiene por qué ser cierta. Por consiguiente, en general, se verifica que $\mu(\lambda^{\times\times}, \lambda^{\times}) \leq \mu(\lambda, \lambda^{\times})$ en λ.

Sin embargo, dado cualquier sistema $\mathcal{M}$ de subconjuntos de $\lambda^{\times}$ que verifique las condiciones 1) a 5) indicadas en la sección 1.2, se puede considerar como un sistema topologizante normal para el espacio normal λ y también para $\lambda^{\times\times}$. En efecto, cada $M \subset \lambda^{\times}$ perteneciente a $\mathcal{M}$ es absolutamente convexo, normal, $\sigma(\lambda^{\times}, \lambda)$–cerrado y acotado. Como $\lambda^{\times}$ es un espacio Banach–Mackey, por el corolario 1.3.3, entonces M es $\beta(\lambda^{\times}, \lambda)$–acotado y por las proposiciones 1.2.9 y 1.2.8 se sigue que M es $\sigma(\lambda^{\times}, \lambda^{\times\times})$–acotado.

Como ya indicamos, cuando se considere un mismo sistema topologizante normal $\mathcal{M}$ para definir topologías en espacios distintos, por ejemplo en λ y $\lambda^{\times\times}$, la representaremos por el símbolo $\tau(\mathcal{M})$; y a cada espacio con la topología correspondiente por $(\lambda, \tau(\mathcal{M}))$ y por $(\lambda^{\times\times}, \tau(\mathcal{M}))$. Una base de $\tau(\mathcal{M})$–entornos del origen en λ estará formada por los conjuntos M° (tomando polares en el par dual $(\lambda, \lambda^{\times})$) cuando M recorre los elementos de la familia $\mathcal{M}$; mientras que en $\lambda^{\times\times}$ estará formada por los conjuntos $M^{\bullet}$ (tomando polares en el par dual $(\lambda^{\times\times}, \lambda^{\times})$). Es claro que $M^{\bullet} \cap \lambda = M^{\circ}$ con lo que ambas topologías coinciden en λ (esta es la notación que se sigue, por ejemplo, en el texto de Wilanski [49, 10-1.1. Remark pág. 150]).

Teniendo en cuenta estas consideraciones podemos enunciar el siguiente teorema en relación con la completitud.

1.3.8 Teorema. *Si λ es un espacio normal de familias escalares dotado de una $\tau(\mathcal{M})$-topología, se verifica:*

(i) *Si λ es perfecto, entonces es $\tau(\mathcal{M})$-completo.*

(ii) *La clausura de λ en $(\lambda^{\times\times}, \tau(\mathcal{M}))$, con la topología inducida por $\tau(\mathcal{M})$, es la completación $\widehat{\lambda}$ de $(\lambda, \tau(\mathcal{M}))$.*

(iii) *La completación $\widehat{\lambda}$ de $(\lambda, \tau(\mathcal{M}))$ es un espacio normal de familias escalares.*

DEMOSTRACIÓN:

(i) Si λ es perfecto entonces $(\lambda, \nu(\lambda, \lambda^{\times}))$ es completo por la proposición 1.3.7. Ahora bien, la topología $\tau(\mathcal{M})$ es más fina que la topología normal $\nu(\lambda, \lambda^{\times})$ y posee una base de entornos del origen que son $\nu(\lambda, \lambda^{\times})$-cerrados por [41, Cap. II Prop. 9(i) y Prop. 8 pág. 34]. Por tanto, $(\lambda, \tau(\mathcal{M}))$ es completo en virtud del lema de Bourbaki–Robertson (ver [21, §3.2 Teor. 4 pág. 59]).

(ii) Como $\lambda^{\times\times}$ es perfecto, entonces $(\lambda^{\times\times}, \tau(\mathcal{M}))$ es completo por el apartado (i) anterior. Por consiguiente, la conclusión se deduce inmediatamente.

(iii) Se deduce de la proposición 1.2.13. ∎

Observación

La completación $\widehat{\lambda}$ de un espacio de familias λ es un subespacio lineal de $\lambda^{\times\times}$ (ver [24, §15.2(7) pág. 148]), por consiguiente, es un subespacio lineal de ω_I y, de acuerdo con la definición dada anteriormente, es un espacio de familias.

Ahora bien, si consideramos la topología $\tau(\mathcal{M})$ en λ definida por el sistema de seminormas $Q = \{q_{M^\circ}\}$, entonces la topología de su completación $\widehat{\lambda}$, que representaremos por $\mathcal{T}$, viene definida por el sistema de seminormas $\widehat{Q} = \{\widehat{q}_{M^\circ}\}$, donde $\widehat{q}_{M^\circ}$ es la extensión continua unívocamente definida de q_{M° a $\widehat{\lambda}$ (ver [24, §18.4(1) y (2) pág. 208, 209]). Para cada $\widehat{\alpha} = (\widehat{\alpha}_i) \in \widehat{\lambda}$ se tendría:

$$\widehat{q}_{M^\circ}(\widehat{\alpha}) = \sup_{(m_i)\in M} \sum_{i\in I} |\widehat{\alpha}_i m_i|$$

Ahora bien, como $\lambda \subset \widehat{\lambda} \subset \lambda^{\times\times}$ se sigue que $\widehat{\lambda}^{\times} = \lambda^{\times}$. Por tanto, el mismo sistema topologizante normal $\mathcal{M}$ que define las topologías $\tau(\mathcal{M})$ en λ y en $\lambda^{\times\times}$, define una τ–topología $\tau(\mathcal{M})$ en $\widehat{\lambda}$. Esta topología vendría definida por un sistema de seminormas $\widetilde{Q} = \{\widetilde{q}_{M^\circ}\}$ tal que para cada $\widehat{\alpha} = (\widehat{\alpha}_i) \in \widehat{\lambda}$:

$$\widetilde{q}_{M^\circ}(\widehat{\alpha}) = \sup_{(m_i)\in M} \sum_{i\in I} |\widehat{\alpha}_i m_i| = \widehat{q}_{M^\circ}(\widehat{\alpha})$$

Es claro que las topologías $\tau(\mathcal{M})$ definidas en $\widehat{\lambda}$ y en $\lambda^{\times\times}$ coinciden en $\widehat{\lambda}$. Pero además, en este caso, coincide también con la topología $\mathcal{T}$. Por consiguiente, la topología que consideraremos en la completación de λ es una τ–topología.

Terminamos esta sección con un resultado sobre completitud local que necesitaremos en el capítulo siguiente.

1.3.9 Proposición. *Sea I un conjunto de índices cualquiera, m un número cardinal infinito tal que $m \leq card(I)$ y λ un espacio normal de familias escalares dotado de una τ–topología, respecto de la cual es localmente completo. Se verifica que los siguientes subespacios de λ*

$$\kappa_1 = \{\alpha \in \lambda : card(sop(\alpha)) \leq m\}$$

$$\kappa_2 = \{\alpha \in \lambda : card(sop(\alpha)) < m\}$$

son localmente completos, considerando en cada uno de ellos la correspondiente topología inducida.

DEMOSTRACIÓN:

Teniendo en cuenta que en la suma y producto de números cardinales infinitos se verifica que $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$ (ver [22, Cap. 1 §3 Teor. 8 y Cor. pág. 25 y 26]), es claro que cada κ_v $(v = 1, 2)$ es un subespacio de λ. Todo lo que sigue en la demostración es válido tanto para κ_1, como para κ_2, y para evitar repetir los valores de $v = 1, 2$, nos referiremos a ambos subespacios por κ_v.

Si B_v es un disco en κ_v también lo es en λ, por tanto, $\overline{B}_v$ es un disco cerrado en λ. Sea $\left(x_v^{(n)}\right)_n$ una sucesión en $B_v \subset \overline{B}_v \subset \lambda$; como λ es localmente completo, $\overline{B}_v$ es un disco de Banach en λ, por lo que, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_v^{(n)}$ converge en λ a un elemento x de $\overline{B}_v$. Ahora bien, por una parte, las aplicaciones

$$\psi_i : \alpha = (\alpha_i) \in \lambda \longrightarrow \psi_i(\alpha) = \alpha_i \in \mathbb{K}$$

para cada $i \in I$ son continuas (proposición 1.2.3) y la sucesión de sumas parciales $\left(\sum_{s=1}^{n} 2^{-s} x_v^{(s)}\right)_n$ converge coordenada a coordenada; y, por otra parte, si consideramos $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{sop}(x^{(n)})$, entonces

$$\text{para } v = 1 \quad \operatorname{card}(T) \leq \aleph_0 \cdot m = m$$
$$\text{y para } v = 2 \quad \operatorname{card}(T) < \aleph_0 \cdot m = m$$

ya que m es un número cardinal infinito, $\aleph_0 \leq m \leq \operatorname{card}(I)$ y

$$\aleph_0 \cdot m = \max\{\aleph_0, m\}$$

(ver [22, Cap.1§3 Teor.8 y Cor.pág. 25 y 26]). Por tanto, $x \in B_v$ en cada caso $(v = 1, 2)$. ∎

1.4 Convergencia de las secciones.

En esta sección hemos recogido lo relativo a la propiedad AK en espacios de familias. Comenzamos recordando la definición de esta propiedad y a continuación demostramos que siempre que se dote al espacio con una topología compatible con el par dual, el espacio posee esta propiedad. Surge, pues, estudiar el subespacio formado por los elementos que poseen la propiedad AK cuando se dota al espacio de la topología fuerte. Se define el subespacio regular y se resumen en una proposición sus propiedades más utilizadas en lo que sigue.

Después de este estudio demostraremos que si el espacio está dotado de una topología normada o metrizable, las familias que tienen la propiedad AK tienen, a lo sumo, una cantidad numerable de coordenadas no nulas.

1.4.1 Definición *Sea λ un espacio normal de familias escalares dotado de una τ–topología. Se dice que el elemento $\alpha \in \lambda$ posee la propiedad AK si*

$$\alpha = \lim_{F \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)} P_F(\alpha).$$

Si todos los elementos del espacio poseen la propiedad AK, se dice que λ posee la propiedad AK.

Al igual que en los espacios de sucesiones también se verifica que si un espacio de familias λ está dotado de una topología compatible con el par dual $(\lambda, \lambda^{\times})$, entonces posee la propiedad AK. Esto lo demostramos a continuación.

1.4.2 Proposición. *Un espacio normal de familias λ dotado con la topología $\mu(\lambda, \lambda^{\times})$ posee la propiedad AK.*

DEMOSTRACIÓN:

Dada cualquier familia $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$, cualquier seminorma q_{M° sobre λ de las que definen la topología $\mu(\lambda, \lambda^\times)$, y cualquier número $\varepsilon > 0$, como $M \subset \lambda^\times$ es absolutamente convexo, normal y $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$–compacto, se verifica que

$$\lim_{F \in \mathcal{P}_\mathcal{F}(I)} \sup_{(\eta_i) \in M} \sum_{i \in I \setminus F} |\alpha_i \eta_i| = 0$$

en virtud de la proposición 1.2.10. Pero eso es lo mismo que decir que dada la seminorma q_{M° y el número $\varepsilon > 0$ existe $F \in \mathcal{P}_\mathcal{F}(I)$ tal que

$$q_{M^\circ}(\alpha - P_F(\alpha)) < \varepsilon$$

es decir, $P_F(\alpha) \xrightarrow{F} \alpha$ en la topología $\mu(\lambda, \lambda^\times)$. ∎

1.4.3 Corolario. *Un espacio normal de familias λ posee la propiedad AK siempre que se le dote de una topología compatible con el par dual $(\lambda, \lambda^\times)$.*

Sin embargo, si consideramos una topología no compatible con el par dual, puede ocurrir que no todos los elementos del espacio tengan la propiedad AK. Basta considerar el espacio ℓ_I^∞ con la topología definida por la norma infinita (ver (1.1)) y la familia $e \in \ell_I^\infty$ (ver [19, Prop. 6.12 y Ejerc. 6.13 pág. 110]).

Si λ es un espacio normal de familias escalares y se dota de una topología compatible con el par dual $(\lambda, \lambda^\times)$, entonces posee la propiedad AK de acuerdo con el corolario 1.4.3. Por otra parte, las topologías $\beta(\lambda, \lambda^\times)$ y $\beta^*(\lambda, \lambda^\times)$ coinciden (ver párrafo 1.3.4). Por consiguiente, si deseamos estudiar la convergencia de las secciones en un espacio normal, lo consideraremos dotado de la topología fuerte. Antes demostraremos la siguiente propiedad de la topología fuerte de la que haremos uso más adelante.

1.4.4 Proposición. *Si λ es un espacio normal, se verifica que las topologías $\beta(\lambda^{\times\times}, \lambda^\times)$ y $\beta(\lambda, \lambda^\times)$ coinciden en λ.*

DEMOSTRACIÓN:

En general se verifica que $\beta(\lambda^{\times\times},\lambda^{\times}) \leq \beta(\lambda,\lambda^{\times})$ ya que la topología $\beta(\lambda,\lambda^{\times})$ está definida por todos los subconjuntos de $\lambda^{\times}$ que son $\sigma(\lambda^{\times},\lambda)$-acotados, mientras que $\beta(\lambda^{\times\times},\lambda^{\times})$ está definida por los subconjuntos de $\lambda^{\times}$ que son $\sigma(\lambda^{\times},\lambda^{\times\times})$-acotados. Como $\lambda \subset \lambda^{\times\times}$, entonces $\sigma(\lambda^{\times},\lambda) \leq \sigma(\lambda^{\times},\lambda^{\times\times})$ y, por tanto, todos los subconjuntos $\sigma(\lambda^{\times},\lambda^{\times\times})$-acotados, son $\sigma(\lambda^{\times},\lambda)$-acotados, es decir, $\beta(\lambda^{\times\times},\lambda^{\times}) \leq \beta(\lambda,\lambda^{\times})$.

Por otra parte, si $A \subset \lambda^{\times}$ es $\sigma(\lambda^{\times},\lambda)$-acotado, entonces es $\beta(\lambda^{\times},\lambda)$-acotado, como consecuencia del la proposición 1.3.3 (ver párrafo 1.3.4). Como $\beta(\lambda^{\times},\phi_I) \leq \beta(\lambda^{\times},\lambda)$, entonces A es $\beta(\lambda^{\times},\phi_I)$-acotado y de aquí se sigue que A es $\sigma(\lambda^{\times},\lambda^{\times\times})$-acotado por la proposición 1.2.8. Por tanto, $\beta(\lambda,\lambda^{\times}) \leq \beta(\lambda^{\times\times},\lambda^{\times})$. ∎

1.4.5 Definición *Se denomina subespacio regular del espacio normal de familias λ, y se suele representar por λ_r, a la clausura de ϕ_I en $(\lambda,\beta(\lambda,\lambda^{\times}))$:*

$$\lambda_r := \overline{\phi_I}^{\beta(\lambda,\lambda^{\times})} \quad en\ \lambda.$$

En λ_r se considera la topología inducida por la topología $\beta(\lambda,\lambda^{\times})$.

Este concepto para espacios de sucesiones fue introducido por Kōmura y Kōmura (ver [26]), y para espacios de familias aparece en la tesis doctoral de Reiher [40]. Las siguientes propiedades son extensiones de las que en este aspecto se verifican en los espacios de sucesiones.

1.4.6 Proposición. (i) $\lambda_r = \{\alpha \in \lambda : \alpha = \beta(\lambda,\lambda^{\times}) - \lim_{F\in\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)} P_F(\alpha)\}$.

(ii) *λ_r es un espacio normal.*

(iii) $c_{0I} \cdot \lambda \subset \lambda_r$.

(iv) $(\lambda_r)^{\times} = \lambda^{\times}$.

(v) $\beta(\lambda,\lambda^{\times})|_{\lambda_r} = \beta(\lambda,\phi_I)|_{\lambda_r} = \beta(\lambda_r,\lambda^{\times}) = \beta(\lambda_r,\phi_I)$.

(vi) $(\lambda_r,\beta(\lambda_r,\lambda^{\times}))' = \lambda^{\times}$.

(vii) *La topología fuerte en* $\lambda_r' = \lambda^{\times}$ *es* $\beta(\lambda^{\times},\lambda_r) = \beta(\lambda^{\times},\lambda)$.

DEMOSTRACIÓN:

(i) Para demostrar la igualdad, como es claro que si se verifica que

$$\alpha = \beta(\lambda,\lambda^{\times}) - \lim_{F\in\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)} P_F(\alpha)$$

entonces $\alpha \in \lambda_r$; bastará ver que si $\alpha \in \lambda_r$ se verifica que $P_F(\alpha) \xrightarrow{F} \alpha$ en la topología $\beta(\lambda,\lambda^{\times})$.

Si $\alpha \in \lambda_r$, q_{M° es una seminorma sobre λ de las que definen la topología $\beta(\lambda,\lambda^{\times})$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe una familia $\gamma = (\gamma_i) \in \phi_I$ tal que $q_{M^\circ}(\alpha-\gamma) < \varepsilon$. Sea $F_0 = \mathrm{sop}(\gamma)$. Entonces

$$\begin{aligned} q_{M^\circ}(\alpha-\gamma) &= \sup_{(m_i)\in M}\sum_{i\in I}|\alpha_i-\gamma_i|\,|m_i| \\ &= \sup_{(m_i)\in M}\left(\sum_{i\in F_0}|\alpha_i-\gamma_i|\,|m_i| + \sum_{i\in I\setminus F_0}|\alpha_i|\,|m_i|\right) < \varepsilon \end{aligned}$$

de donde se deduce que $\sup\limits_{(m_i)\in M}\sum\limits_{i\in I\setminus F_0}|\alpha_i|\,|m_i| < \varepsilon$ y de aquí se sigue para todo F perteneciente a $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$, $F \supset F_0$, que

$$q_{M^\circ}(\alpha - P_F(\alpha)) = \sup_{(m_i)\in M}\sum_{i\in I\setminus F}|\alpha_i|\,|m_i| < \varepsilon$$

es decir, que $P_F(\alpha) \xrightarrow{F} \alpha$ en la topología $\beta(\lambda,\lambda^{\times})$.

(ii) Es una consecuencia de la proposición 1.2.13, ya que el espacio ϕ_I es normal.

(iii) Sea $\gamma = (\gamma_i) \in c_{0I}$ y $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$. Dada cualquier seminorma q_{M° sobre λ de las que definen la topología $\beta(\lambda.\lambda^{\times})$ y cualquier número $\varepsilon > 0$, por ser $\gamma \in c_{0I}$, podemos asegurar que existe un $F_0 \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$ tal que

$$|\gamma_i| < \frac{\varepsilon}{1+q_{M^\circ}(\alpha)} \quad \text{para todo } i \in I\setminus F_0$$

Entonces

$$\begin{aligned} q_{M^\circ}(\gamma\alpha - P_{F_0}(\gamma\alpha)) &= \sup_{(m_i)\in M}\sum_{i\in I\setminus F_0}|\gamma_i|\,|\alpha_i m_i| \\ &\le \frac{\varepsilon}{1+q_{M^\circ}(\alpha)}\cdot\sup_{(m_i)\in M}\sum_{i\in I\setminus F_0}|\alpha_i m_i| \le \frac{\varepsilon}{1+q_{M^\circ}(\alpha)}\cdot q_{M^\circ}(\alpha) \le \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto $P_F(\gamma\alpha) \xrightarrow{F} \gamma\alpha$ en la topología $\beta(\lambda, \lambda^\times)$, es decir, $\gamma\alpha \in \lambda_r$.

(iv) Como $\lambda_r \subset \lambda$ se sigue que $\lambda^\times \subset (\lambda_r)^\times$ (ver párrafo 1.1.2). Ahora si $\eta \in (\lambda_r)^\times$ y $\alpha \in \lambda$, se verifica que para cada $\gamma \in c_{0I}$ es $\gamma\alpha \in \lambda_r$ por el apartado (iii) de esta misma proposición. Se sigue que $\gamma\alpha\eta \in \ell_I^1$ y de aquí que $\alpha\eta \in \ell_I^1$ por ser $(c_{0I})^\times = \ell_I^1$ (ver Ejemplos de la primera sección). Entonces $\eta \in \lambda^\times$.

(v) Demostratremos en primer lugar que las topologías $\beta(\lambda, \lambda^\times)$ y $\beta(\lambda_r, \lambda^\times)$ coinciden en λ_r. Como $\lambda_r \subset \lambda$ entonces los subconjuntos de $\lambda^\times$ que son $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$–acotados, son acotados en la topología $\sigma(\lambda^\times, \lambda_r)$. Por tanto, $\beta(\lambda, \lambda^\times) \leq \beta(\lambda_r, \lambda^\times)$.

Por otra parte, si $M \subset \lambda^\times$ es $\sigma(\lambda^\times, \lambda_r)$–acotado entonces es $\beta(\lambda^\times, \lambda_r)$–acotado, por ser el espacio λ_r normal (ver párrafo 1.3.4). Se sigue que M es $\sigma(\lambda^\times, \lambda^{\times\times})$–acotado por las proposiciones 1.2.9 y 1.2.8. Por tanto es acotado en la topología $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$. Es decir, que $\beta(\lambda_r, \lambda^\times) \leq \beta(\lambda, \lambda^\times)$.

Las otras igualdades siguen de esta y de la proposición 1.2.9.

(vi) Estableceremos una correspondencia biyectiva entre $(\lambda_r, \beta(\lambda_r, \lambda^\times))'$ y $\lambda^\times$.

Como $\lambda^\times$ está contenido en $(\lambda_r, \beta(\lambda_r, \lambda^\times))'$ está clara la inmersión del primer espacio en el segundo: si $\eta = (\eta_i) \in \lambda^\times$ le hacemos coresponder f definido así:

$$f : \alpha = (\alpha_i) \in \lambda_r \longrightarrow \langle \alpha, f \rangle := \sum_{i \in I} \alpha_i \eta_i \in \mathbb{K}.$$

Recíprocamente, si $f \in (\lambda_r, \beta(\lambda_r, \lambda^\times))'$ definimos para cada $i \in I : \langle e^{(i)}, f \rangle := \eta_i$. Sea $\eta = (\eta_i)$. Le haremos corresponder a f la familia η así definida y demostraremos que pertenece a $\lambda^\times$.

Sean $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$ y $\gamma = (\gamma_i) \in c_{0_I}$ arbitrarios y $\beta = (\beta_i)$ siendo

$$\beta_i = \begin{cases} \frac{|\gamma_i \alpha_i \eta_i|}{\gamma_i \alpha_i \eta_i} & \text{si } \gamma_i \alpha_i \eta_i \neq 0 \\ 0 & \text{si } \gamma_i \alpha_i \eta_i = 0 \end{cases}$$

con lo que $\beta = (\beta_i) \in B_1(\ell_I^\infty)$ y $\beta\alpha \in \lambda$ porque λ es normal (ver proposición 1.1.3). Se verifica también que $\gamma\beta\alpha \in \lambda_r$ por el apartado (iii) de esta misma proposición y, por tanto, $\gamma\beta\alpha = \lim_{F \in \mathcal{P}_\mathcal{F}(I)} P_F(\gamma\beta\alpha)$ en la topología $\beta(\lambda_r, \lambda^\times)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \langle \gamma\beta\alpha, f \rangle &= \left\langle \lim_F P_F(\gamma\beta\alpha), f \right\rangle = \lim_F \langle P_F(\gamma\beta\alpha), f \rangle \\ &= \lim_F \left\langle \sum_{i \in F} \gamma_i \beta_i \alpha_i e^{(i)}, f \right\rangle = \lim_F \sum_{i \in F} \gamma_i \beta_i \alpha_i \langle e^{(i)}, f \rangle \\ &= \lim_F \sum_{i \in F} |\gamma_i \alpha_i \eta_i| < +\infty. \end{aligned}$$

Como $\gamma \in c_{0_I}$ era arbitraria, entonces $\alpha\eta \in \ell_I^1$; y si α era una familia arbitraria de λ, entonces $\eta \in \lambda^\times$.

Existe, pues, una correspondencia biyectiva

$$\lambda^\times \longrightarrow (\lambda_r, \beta(\lambda_r, \lambda^\times))'$$

$$\eta = (\eta_i) \longrightarrow f$$

tal como hemos definido anteriormente a f y a cada η_i, en cada caso. Es inmediato comprobar que se trata de un isomorfismo algebraico, y en virtud de él identificaremos ambos elementos f y η, y en este sentido entenderemos la igualdad enunciada.

(vii) Es claro que

$$\beta(\lambda^\times, \phi_I) \leq \beta(\lambda^\times, \lambda_r) \leq \beta(\lambda^\times, \lambda) \leq \beta(\lambda^\times, \lambda^{\times\times})$$

pero $\beta(\lambda^\times, \lambda^{\times\times}) = \beta(\lambda^\times, \phi_I)$ por la proposición 1.2.9.

Se sigue que el isomorfismo establecido anteriormente entre $(\lambda^\times, \beta(\lambda^\times, \lambda))$ y $(\lambda'_r, \beta(\lambda'_r, \lambda_r))$ es también topológico. ∎

1.4.7 Corolario. *El espacio $(\lambda_r, \mu(\lambda_r, \lambda^\times))$ es tonelado.*

DEMOSTRACIÓN:

Es una consecuencia inmediata del apartado (vi) de la proposición 1.4.6 anterior que nos dice que $\mu(\lambda_r, \lambda^\times) = \beta(\lambda_r, \lambda^\times)$. ∎

En la siguiente proposición se muestra una propiedad que tienen las familias con la propiedad AK, cuando el espacio al que pertenecen está dotado de una topología normada o metrizable.

1.4.8 Proposición. *Si λ es un espacio de familias escalares dotado de una topología τ que es normada o metrizable, entonces las familias que posean la* *propiedad AK tienen, a lo sumo, una cantidad numerable de coordenadas distintas de cero.*

DEMOSTRACIÓN:

Si $\alpha \in \lambda$ tiene la propiedad AK entonces dada una seminorma $q \in Q$ y un $\varepsilon > 0$ existe un $F_0 \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$ tal que para todo $F \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$, $F \supset F_0$, es $q(\alpha - P_F(\alpha)) < \varepsilon$.

Entonces para cada valor de $\varepsilon = \frac{1}{k} > 0$, $k \in \mathbb{N}$, existirá en cada caso un $F_k \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$, de forma que para todo $F \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$, $F \supset F_k$, se verifica

$$q(\alpha - P_F(\alpha)) < \frac{1}{k}$$

para $k \in \mathbb{N}$. Sea $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Entonces G es finito o numerable y $F_n \subset G$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente,

$$q(\alpha - P_G(\alpha)) < \frac{1}{n} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

de donde se sigue que $q(\alpha - P_G(\alpha)) = 0$.

Si q es una norma se tendría que $\alpha - P_G(\alpha) = 0$ por lo que $\alpha = P_G(\alpha)$, es decir, que α tendría, a lo sumo, una cantidad numerable de coordenadas no nulas.

Si la topología τ viene dada por una familia numerable de seminormas, $(q_n)_n$, razonando de la misma manera que en el caso anterior para cada una de ellas, podemos considerar la sucesión $G_1, G_2, \cdots, G_n, \cdots$, de subconjuntos numerables de I de forma que para todo $H \in \mathcal{P}(I)$, $H \supset G_k$, se verifica

$$q_k(\alpha - P_H(\alpha)) = 0.$$

Sea $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$. Entonces $G \subset I$ es numerable y $G_n \subset G$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$q_n(\alpha - P_G(\alpha)) = 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

de donde se deduce que $\alpha - P_G(\alpha) = 0$. ∎

Observaciones

1. En este caso están incluidos todos los elementos de los espacios de familias escalares ℓ_I^p, $(1 \leq p < +\infty)$, c_{0I}, $\ell_I^{(p_i)}$ y $c_{0I}^{(p_i)}$ indicados en los ejemplos anteriores.

2. El caso del espacio ω_I muestra que la conclusión no es cierta en general.

1.5 Tonelación de un espacio de familias.

La propiedad de tonelación del espacio λ será muy importante en el capítulo siguiente. Como trataremos sólo con espacios normales, el ser casi tonelado implica ser tonelado (ver corolario 1.3.5) y por este motivo recogemos en esta sección la caracterización de los espacios de familias que son tonelados. Una variante digna de mención es que en los espacios normales de sucesiones que son tonelados, una de sus características es la separabilidad, mientras que en los espacios normales de familias demostraremos que existe un subconjunto, con cardinal igual al card(I), que es denso en el espacio cuando se le dota de la topología fuerte del par dual $(\lambda, \lambda^\times)$.

Terminamos la sección con una proposición en la que se demuestra que si el espacio λ es casi tonelado, entonces ciertos subespacios son también casi tonelados.

En el siguiente teorema se caracteriza a los espacios normales de familias que son tonelados.

1.5.1 Teorema. *Si λ es un espacio normal de familias escalares, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *El espacio* λ *con la topología* $\mu(\lambda, \lambda^\times)$ *es tonelado, es decir, las topologías* $\mu(\lambda, \lambda^\times)$ *y* $\beta(\lambda, \lambda^\times)$ *coinciden en* λ.

(2) *Si* $B \subset \lambda$ *es* $\beta(\lambda, \lambda^\times)$*-compacto, entonces* $N(B)$ *es* $\beta(\lambda, \lambda^\times)$*-compacto.*

(3) *Para cada* $\alpha \in \lambda$, $P_F(\alpha) \xrightarrow{F} \alpha$ *en* $\beta(\lambda, \lambda^\times)$, *es decir,* $\lambda = \lambda_r$.

(4) *El conjunto* $X = \{\xi = (\xi_i) \in \phi_I : \xi_i \in \mathbb{Q}\}^3$ *es denso en* $(\lambda, \beta(\lambda, \lambda^\times))$.

DEMOSTRACIÓN:

(1) $\Rightarrow$ (2) Si $B \subset \lambda$ es $\beta(\lambda, \lambda^\times)$-compacto, entonces es $\mu(\lambda, \lambda^\times)$-compacto, ya que por (1) las topologías $\mu(\lambda, \lambda^\times)$ y $\beta(\lambda, \lambda^\times)$ coinciden en λ. Como λ es normal se sigue que la envolvente normal $N(B)$ es $\mu(\lambda, \lambda^\times)$-compacta en virtud de la proposición 1.2.12. Entonces $N(B)$ es $\beta(\lambda, \lambda^\times)$-compacta por la misma razón anterior.

(2) $\Rightarrow$ (3) Si $\alpha \in \lambda$ entonces $\{\alpha\}$ es $\beta(\lambda, \lambda^\times)$-compacto, y por (2) tenemos que $N(\alpha)$ también es compacto en $\beta(\lambda, \lambda^\times)$. Por otra parte, si $F \in \mathcal{P}_\mathcal{F}(I)$, entonces $P_F(\alpha) \in N(\alpha)$, $\alpha \in N(\alpha)$, y $P_F(\alpha) \xrightarrow{F} \alpha$ en $\sigma(\lambda, \phi_I)$.

Para demostrar que $P_F(\alpha)$ también converge a α en la topología $\beta(\lambda, \lambda^\times)$, aplicaremos [21, §3.5 Prop. 4 pág. 65]. Para ello tenemos que demostrar que la topología $\beta(\lambda, \lambda^\times)$ es más fina que la $\sigma(\lambda, \phi_I)$ y que tiene una base de entornos formada por conjuntos $\sigma(\lambda, \phi_I)$-cerrados.

Veamos en primer lugar que $\beta(\lambda, \lambda^\times) \geq \sigma(\lambda, \phi_I)$. Se verifica que

$$\sigma(\lambda, \phi_I) \leq \sigma(\lambda, \lambda^\times) \leq \mu(\lambda, \lambda^\times) \leq \beta(\lambda, \lambda^\times)$$

donde todas las desigualdades son claras.

En segundo lugar veamos que la topología $\beta(\lambda, \lambda^\times)$ tiene una base de entornos del origen formada por conjuntos $\sigma(\lambda, \phi_I)$-cerrados. En efecto, si $B \subset \lambda^\times$ es un

[3] Si las coordenadas ξ_i son números complejos, se entiende, como es usual, que las partes real e imaginaria son racionales.

conjunto absolutamente convexo, cerrado y acotado en la topología $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$, entonces B° es un entorno en $\beta(\lambda, \lambda^\times)$ y

$$B^\circ = \bigcap_{m\in B} \bigcap_{F\in\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)} \left\{\alpha \in \lambda : |\langle\alpha, P_F(m)\rangle| = \sum_{i\in F} |\alpha_i m_i| \leq 1\right\}$$

con lo que B° es $\sigma(\lambda, \phi_I)$–cerrado por ser intersección de conjuntos cerrados en esa topología.

(3) $\Rightarrow$ (4) Si $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$, entonces $P_F(\alpha) \xrightarrow{F} \alpha$ en $\beta(\lambda, \lambda^\times)$ por (3). Es decir, que para cada seminorma q_{M° sobre λ de las que definen la topología $\beta(\lambda, \lambda^\times)$ en λ y $\varepsilon > 0$, existe un $F_0 \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$, tal que

$$q_{M^\circ}(\alpha - P_{F_0}(\alpha)) = \sup_{(m_i)\in M} \sum_{i\in I\setminus F_0} |\alpha_i m_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otra parte, si $M \subset \lambda^\times$ es el $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$–acotado que define la seminorma q_{M° anterior, dado $e^{(i)} \in \lambda$ existirá un $\rho_i > 0$ tal que

$$\left|\langle m, e^{(i)}\rangle\right| = |m_i| \leq \rho_i \quad \forall\ m = (m_i) \in M.$$

Sea $\rho = \max\{1, \rho_i : i \in F_0\}$. Dado $\varepsilon > 0$ podemos asegurar que para cada $i \in F_0$ existe un $\xi_i \in \mathbb{Q}$ tal que

$$|\alpha_i - \xi_i| < \frac{\varepsilon}{2\rho\,\mathrm{card}(F_0)}.$$

Tomando $\xi_i = 0$ para todo $i \in I \setminus F_0$, sea $\xi = (\xi_i) \in X$ y se verifica que

$$\begin{aligned} q_{M^\circ}(\alpha - \xi) &= \sup_{(m_i)\in M} \sum_{i\in I} |\alpha_i - \xi_i|\,|m_i| \\ &\leq \sup_{(m_i)\in M} \sum_{i\in F_0} |\alpha_i - \xi_i|\,|m_i| + \sup_{(m_i)\in M} \sum_{i\in I\setminus F_0} |\alpha_i m_i| \\ &< \rho\,\mathrm{card}(F_0)\frac{\varepsilon}{2\rho\,\mathrm{card}(F_0)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(4) $\Rightarrow$ (3) Por (4) se tiene que X es denso en λ con la topología $\beta(\lambda, \lambda^\times)$ y por la definición del subespacio regular $\lambda_r := \overline{\phi_I}^{\beta(\lambda,\lambda^\times)}$ en λ. Se sigue que $\lambda = \lambda_r$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Si para cada $\alpha \in \lambda$ se verifica que $P_F(\alpha) \xrightarrow{F} \alpha$ en la topología $\beta(\lambda, \lambda^\times)$, entonces $\lambda = \lambda_r$ por el apartado (i) de la proposición 1.4.6; y por el corolario 1.4.7 se sigue que el espacio $(\lambda, \mu(\lambda, \lambda^\times))$ es tonelado. ∎

Observación

Como $\text{card}(I) = \text{card}(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I))$ según [22, Cap. 1§5 Ej. 5.2 pág. 40] y en X consideramos los elementos de ϕ_I con coordenadas racionales, se sigue que $\text{card}(X) = \text{card}(I)$. Por tanto, si el espacio normal $(\lambda, \mu(\lambda, \lambda^\times))$ es tonelado, entoces existe un subconjunto $X \subset \lambda$ con $\text{card}(X) = \text{card}(I)$ que es denso en λ.

Ejemplos

1. Los espacios ℓ_I^p con $1 \le p < \infty$, c_{0I}, $\ell_I^{(p_i)}$ con $1 < p_i \le M$ para todo $i \in I$ y $c_{0I}^{(p_i)}$ poseen la propiedad AK considerando en cada caso la topología que se ha indicado anteriormente, que como se ha visto coincide con la topología fuerte.

2. Los espacios ℓ_I^∞ y $\ell_I^\infty(p_i)$ con $1 < p_i \le M$ para todo $i \in I$, no poseen la propiedad AK considerando en ellos la topología fuerte. Ahora bien, se verifica que $(\ell_I^\infty)_r = c_{0I}$ y $(\ell_I^\infty(p_i))_r = c_{0I}^{(p_i)}$.

Por último, demostramos la casi tonelación de ciertos subespacios a los que nos referiremos en el siguiente capítulo.

1.5.2 Proposición. *Sea I un conjunto de índices cualquiera, m un número cardinal infinito tal que $m \leq card(I)$ y λ un espacio normal de familias escalares dotado de una τ-topología, respecto de la cual es casi tonelado. Se verifica que los siguientes subespacios de λ*

$$\kappa_1 = \{\alpha \in \lambda : card(sop(\alpha)) \leq m\}$$

$$\kappa_2 = \{\alpha \in \lambda : card(sop(\alpha)) < m\}$$

son casi tonelados, considerando en cada uno de ellos la correspondiente topología inducida.

DEMOSTRACIÓN:

Teniendo en cuenta que en la suma y producto de números cardinales infinitos se verifica que $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$ (ver [22, Cap.1 §3 Teor.8 y Cor.pág. 25 y 26]), es claro que cada κ_υ, $\upsilon = 1, 2$ es un subespacio de λ. Todo lo que sigue en la demostración es válido tanto para κ_1, como para κ_2, y para evitar repetir los valores de $\upsilon = 1, 2$, nos referiremos a ambos subespacios por κ_υ.

Sea N_υ un subconjunto de κ'_υ que es $\beta(\kappa'_\upsilon, \kappa_\upsilon)$–acotado, y sean

$$H_1 = \{\beta = (\beta_i) : \beta_i \in \mathbb{K}, \quad \text{card}(\text{sop}(\beta)) \leq m \text{ y } |\beta_i| = 1 \text{ si } \beta_i \neq 0\}$$

$$H_2 = \{\beta = (\beta_i) : \beta_i \in \mathbb{K}, \quad \text{card}(\text{sop}(\beta)) < m \text{ y } |\beta_i| = 1 \text{ si } \beta_i \neq 0\}$$

que son subconjuntos de $B_1(\ell_I^\infty)$ y que nos referiremos a ellos por H_υ de acuerdo con la observación hecha anteriormente.

Para cada $\beta \in H_\upsilon$ podemos definir la siguiente correspondencia, que para los valores de $\upsilon = 1, 2$ representaremos por la misma letra:

$$J_\beta : \alpha = (\alpha_i) \in \lambda \longrightarrow J_\beta(\alpha) := (\beta_i \alpha_i)_i = \beta\alpha \in \kappa_\upsilon$$

- Cada J_β es una aplicación lineal como es inmediato comprobar.

- Cada J_β es continua, considerando las topologías indicadas en las hipótesis, ya que al ser $|\beta_i \alpha_i| \leq |\alpha_i|$ para todo $i \in I$, entonces $J_\beta(\alpha) \leq \alpha$, y basta considerar la condición ii) de la sección 1.2.

Entonces cada $N_v^* = \{f \circ J_\beta : f \in N_v, \quad \beta \in H_v\}$ es un subconjunto de λ', y para cada subconjunto τ–acotado A de λ podemos definir

$$AH_v = \{a\beta = (a_i\beta_i) : \beta = (\beta_i) \in H_v, \quad a = (a_i) \in A\}$$

que, en cada caso, es un subconjunto de κ_v por ser λ normal, por verificar la condición acerca del cardinal del soporte, y por estar acotado por estarlo A.

Como $N_v \subset \kappa_v'$ es $\beta(\kappa_v', \kappa_v)$-acotado, al actuar sobre AH_v dará un conjunto acotado, es decir, que existe un número $\rho > 0$ tal que si $a\beta = (a_i\beta_i)_i \in AH_v$ y $f \in N_v$ entonces

$$|\langle a\beta, f\rangle| \leq \rho \quad \forall\ \beta \in H_v, \quad a \in A, \quad f \in N_v$$

es decir,

$$|\langle J_\beta(a), f\rangle| = |\langle a, f \circ J_\beta\rangle| \leq \rho$$

para todo $a \in A$ y para toda $f \circ J_\beta \in N_v^*$. De donde se sigue que N_v^* es $\beta(\lambda', \lambda)$–acotado y como λ es casi-tonelado, entonces N_v^* es equicontinuo en λ'. Por consiguiente, existe una seminorma q_{M° en λ tal que

$$|\langle \cdot, f \circ J_\beta\rangle| < q_{M^\circ}(\cdot)$$

para toda $f \in N_v, \quad \beta \in H_v$. De donde se deduce que cada N_v es equicontinuo en su respectivo κ_v'. ∎

Capítulo II

Espacios de familias vectoriales con valores en espacios normados.

En este capítulo recogemos los resultados que hemos obtenido relativos a los problemas que originaron esta memoria sobre la tonelación y ultrabornología de un espacio de familias vectoriales con valores en espacios normados, así como otros resultados sobre completitud de un espacio de ese tipo.

En la primera sección recogemos los conceptos de espacio de familias vectoriales, espacio normal, proyecciones, subespacios seccionales e indicamos algunos ejemplos. En la siguiente sección definimos el tipo de topología con que dotaremos a estos espacios, y a continuación definimos la propiedad AK, demostramos que $\lambda\{(E_i)\}$ tiene esa propiedad si, y sólo si, la posee λ, y definimos el subespacio regular de $\lambda\{(E_i)\}$.

En la tercera sección se establece cuándo es completo un espacio de familias vectoriales de los que aquí estudiamos y, si no lo es, cuál es su completación. En la sección siguiente se establecen las relaciones algebraicas existentes entre el espacio α–dual de Köthe generalizado de un espacio de este tipo y su dual topológico.

En las secciones quinta y sexta tratamos de la tonelación en dos casos: cuando el card(I) no es medible y cuando se trata de un conjunto de índices cualquiera, pero las familias toman valores en un espacio normado cuyo cardinal no es medible. En la última sección estudiamos la bornología y ultrabornología de espacios de familias vectoriales.

2.1 El espacio $\lambda\{(E_i)_{i\in I}\}$

Sea $(E_i)_{i\in I}$ una familia de espacios normados sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Es usual representar por $\omega_I\{(E_i)_{i\in I}\} := \prod_{i\in I} E_i$ al espacio lineal de todas las familias $x = (x_i)_{i\in I}$, con cada $x_i \in E_i$ (ver [24, §7.8 pág. 56]); y por $\phi_I\{(E_i)_{i\in I}\}$ al subespacio lineal de $\omega_I\{(E_i)_{i\in I}\}$ formado por todas las familias con un número finito de coordenadas distintas de cero (ver [24, §7.8 pág. 57]).

2.1.1 Definición *Si λ es un espacio normal de familias escalares, se define la λ–suma de la familia de espacios normados $(E_i)_{i\in I}$ así*

$$\lambda\{(E_i)_{i\in I}\} := \{(x_i)_{i\in I} \in \omega_I\{(E_i)_{i\in I}\} : x_i \in E_i,\ y\ (\|x_i\|)_{i\in I} \in \lambda\}$$

El hecho de que λ sea un espacio normal garantiza que $\lambda\{(E_i)_{i\in I}\}$ sea un subespacio lineal de $\omega_I\{(E_i)_{i\in I}\}$ ya que si $x = (x_i), y = (y_i) \in \lambda\{(E_i)_{i\in I}\}$, entonces $x_i, y_i \in E_i$ para cada $i \in I$ y $(\|x_i\|), (\|y_i\|) \in \lambda$. De aquí se sigue que

$$(\|x_i\|) + (\|y_i\|) = (\|x_i\| + \|y_i\|) \in \lambda.$$

Como $x_i + y_i \in E_i$ y $\|x_i + y_i\| \leq \|x_i\| + \|y_i\|$ para cada $i \in I$, al ser λ normal podemos asegurar que $(\|x_i + y_i\|) \in \lambda$ y, por tanto, que $x + y \in \lambda\{(E_i)_{i\in I}\}$. Si $r \in \mathbb{K}$ y $x \in \lambda\{(E_i)_{i\in I}\}$ es claro que $r\,x \in \lambda\{(E_i)_{i\in I}\}$.

En lo que sigue y siempre que no haya lugar a confusión, en lugar de representar este espacio por $\lambda\{(E_i)_{i\in I}\}$, lo denotaremos por $\lambda\{(E_i)\}$; y a sus elementos por $(x_i)_i$ o simplemente por (x_i).

En el caso escalar se denomina espacio de familias a todo subespacio lineal de ω_I. Ahora tratamos familias vectoriales y se denomina espacio de familias vectoriales, o también espacio de familias, o simplemente espacio, a todo subespacio lineal de $\omega_I\{(E_i)_{i\in I}\}$.

2.1.2 Como λ es normal se verifica que $\lambda\{(E_i)\}$ también lo es, en el sentido de que si $x=(x_i)\in\lambda\{(E_i)\}$ entonces su envolvente normal:

$$N(x) := \{\alpha x = (\alpha_i x_i) : \alpha_i \in \mathbb{K}, \quad |\alpha_i| \leq 1 \quad \forall\ i \in I\}$$

está contenida en $\lambda\{(E_i)\}$.

Las proyecciones se definen de manera análoga al caso escalar.

2.1.3 Definición *Dado el espacio normal de familias $\lambda\{(E_i)\}$ y un subconjunto cualquiera J de I, se define la proyección P_J así*

$$P_J : x = (x_i)_{i\in I} \in \lambda\{(E_i)\} \longrightarrow P_J(x) = (y_i)_{i\in I} \in \lambda\{(E_i)\}$$

siendo $y_i = x_i$ si $i \in J$ e $y_i = 0$ si $i \notin J$. O sea $P_J(x) = (x_i\chi_J(i))_{i\in I}$.

De la misma manera se extienden al caso vectorial las definiciones de F–sección de una familia, y de subespacio J–seccional. Si $x \in \lambda\{(E_i)\}$ y $F \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$ se denomina sección F de x, o F–sección de x, a $P_F(x)$.

Si $\lambda\{(E_i)_{i\in I}\}$ es el espacio λ–suma de los espacios normados $(E_i)_{i\in I}$, y J es un subconjunto del conjunto de índices I, entonces

$$(\lambda\{(E_i)_{i\in I}\})_J := \{(x_j)_{j\in J} : \exists\ (y_i)_{i\in I} \in \lambda\{(E_i)_{i\in I}\} \text{ con } y_j = x_j \quad \forall\ j \in J\}$$

De aquí se sigue que $(\lambda\{(E_i)_{i\in I}\})_J = \lambda_J\{(E_j)_{j\in J}\}$, donde λ_J es el subespacio J-seccional de λ, definido en el capítulo anterior. Es claro que definiendo en $\lambda_J\{(E_j)_{j\in J}\}$ las operaciones de suma de familias y producto de un escalar por una familia coordenada a coordenada, se tiene un espacio lineal. Es decir, el espacio λ_J–suma de los espacios normados $(E_j)_{j\in J}$, que se denomina *subespacio J-seccional de* $\lambda\{(E_i)_{i\in I}\}$

Se denomina *preimagen canónica de la familia* x_J perteneciente a $\lambda_J\{(E_j)_{j\in J}\}$, a la familia $\tilde{x}_J$, la cual coincide con x_J para todo $j \in J$ y tiene nulas las demás coordenadas.

Se denomina *preimagen canónica del subespacio J-seccional* $\lambda_J\{(E_j)_{j\in J}\}$, y se representa por $\lambda_J\{\widetilde{(E_j)}_{j\in J}\}$,[1] al conjunto que contiene a las preimágenes canónicas de los elementos de $\lambda_J\{(E_j)_{j\in J}\}$. Definiendo en él las operaciones de suma de familias y producto de una familia por un escalar coordenada a coordenada, es inmediato comprobar que tiene estructura de espacio lineal. Si el espacio $\lambda\{(E_i)\}$ es normal, entonces $\lambda_J\{\widetilde{(E_j)}_{j\in J}\}$ es un subespacio lineal de $\lambda\{(E_i)\}$.

La imagen de la proyección P_J sobre $\lambda\{(E_i)\}$ es $\lambda_J\{\widetilde{(E_j)}_{j\in J}\}$ y su núcleo es $\lambda_{I\setminus J}\{\widetilde{(E_i)}_{i\in I\setminus J}\}$.

Ejemplos

De los ejemplos de espacios de familias escalares vistos en la primera sección del capítulo anterior, y considerando una familia $(E_i)_{i\in I}$ de espacios normados, se tienen los siguientes espacios de familias vectoriales:

$\ell_I^p\{(E_i)\}$ con $1 \le p < \infty$, en el que definiendo para cada $x = (x_i)$

$$\|x\| := \left(\sum_{i\in I} \|x_i\|^p\right)^{1/p}$$

se tiene un espacio normado.

[1] Debe entenderse que la tilde afecta a todo el símbolo.

$\ell_I^{(p_i)}\{(E_i)\}$ con $1 < p_i \leq \sup_i p_i = M < +\infty$, en el que se considera la topología definida por la paranorma:

$$|x|_{(p_i)} := \left(\sum_{i\in I} \|x_i\|^{p_i}\right)^{1/M}$$

$\ell_I^{\infty}\{(E_i)\}$ y $c_{0I}\{(E_i)\}$ que son unos espacios normados definiendo para cada familia $x = (x_i)$

$$\|x\| := \sup_i \|x_i\| .$$

$\ell_I^{\infty}(p_i)\{(E_i)\}$ y $c_{0I}^{(p_i)}\{(E_i)\}$ con $0 < \inf_i p_i \leq p_i \leq \sup_i p_i = M < +\infty$, en los que se considera la topología definida por la paranorma

$$|x|_{(p_i)}^{\infty} := \sup_i \|x_i\|^{p_i/M} .$$

2.2 τ–Topologías en $\lambda\{(E_i)_{i\in I}\}$.

En esta sección se define una topología en el espacio $\lambda\{(E_i)\}$ a partir de la topología de λ y de la topología definida por la norma en cada E_i. Se define también la propiedad AK y se demuestra que el espacio $\lambda\{(E_i)\}$ dotado de la topología definida anteriormente posee dicha propiedad si, y sólo si, la posee el espacio λ dotado de una τ–topología. Por último, se define el subespacio de $\lambda\{(E_i)\}$ formado por todas las familias con la propiedad AK.

A partir de la τ–topología definida en el espacio de familias escalares λ por el sistema de seminormas Q (ver sección 1.2) y de la topología definida por la norma en cada E_i, se define la topología en $\lambda\{(E_i)\}$ como es usual hacerlo en los espacios de sucesiones vectoriales (ver [7] y [43]).

2.2.1 Definición *Sea Q un sistema de seminormas definidas sobre el espacio normal de familias escalares λ que verifica las condiciones i)-iii) indicadas en la sección 1.2 y que define en λ una τ–topología localmente convexa y separada.*

Para cada seminorma $q \in Q$ se define:

$$\sigma_q : x = (x_i) \in \lambda\{(E_i)\} \longrightarrow \sigma_q(x) := q(\|x_i\|) \in \mathbb{R}$$

Es inmediato comprobar que cada σ_q así definida es una seminorma sobre $\lambda\{(E_i)\}$. Al conjunto formado por todas estas seminormas lo denotaremos por S.

Consideraremos en $\lambda\{(E_i)\}$ la topología localmente convexa definida por el sistema de seminormas S, a la que se representa también por τ y nos referiremos a ella como la τ–topología correspondiente. Al ser separada la τ–topología sobre λ, la definida de esta manera sobre $\lambda\{(E_i)\}$ también lo es.

Observación

En el capítulo anterior hemos visto que la topología que se considera en cada uno de los espacios de familias de los ejemplos anteriores, coincide con la topología fuerte. De esta forma, la topología correspondiente en el espacio de familias vectoriales, será, en cada caso, la definida por dicha topología fuerte y la topología de las normas de los $(E_i)_i$.

2.2.2 Proposición. *Considerando la τ–topología en el espacio normal de familias escalares λ, la topología de la norma en cada E_i, y la correspondiente τ–topología en $\lambda\{(E_i)\}$, se verifica:*

i) *Para cada $i \in I$ la correspondencia*

$$\psi_i : x = (x_i) \in \lambda\{(E_i)\} \longrightarrow \psi_i(x) := x_i \in E_i$$

es una aplicación lineal y continua.

ii) *Para cada $i \in I$ la correspondencia*

$$\Psi_i : x_i \in E_i \longrightarrow \Psi_i(x_i) := x_i e^{(i)} \in \lambda\{(E_i)\}$$

es una aplicación lineal y continua.

iii) *La correspondencia*

$$\psi_\lambda : x = (x_i) \in \lambda\{(E_i)\} \longrightarrow \psi_\lambda(x) := (\|x_i\|) \in \lambda$$

es una aplicación uniformemente continua.

iv) *Si $v = (v_i) \in B_1(\ell_I^\infty\{(E_i)\})$ la correspondencia*

$$\Upsilon_v : \alpha = (\alpha_i) \in \lambda \longrightarrow \Upsilon_v(\alpha) := \alpha \cdot v = (\alpha_i v_i) \in \lambda\{(E_i)\}$$

es una aplicación lineal continua.

La demostración es inmediata.

2.2.3 Proposición. *Si $N \subset \lambda$ es un τ–acotado en λ, entonces el conjunto $M = N \cdot B_1(\ell_I^\infty\{(E_i)\})$ es un τ–acotado en $\lambda\{(E_i)\}$.*

Si $M \subset \lambda\{(E_i)\}$ es τ–acotado, entonces existe un subconjunto τ–acotado $N \subset \lambda$, tal que $M \subset N \cdot B_1(\ell_I^\infty\{(E_i)\})$.

DEMOSTRACIÓN:

La primera parte es inmediata. Y si $M \subset \lambda\{(E_i)\}$ es τ–acotado, entonces

$$N := \psi_\lambda(M) = \{(\|x_i\|)_i \in \lambda : x = (x_i) \in M\}$$

es τ–acotado por ser la aplicación ψ_λ uniformemente continua por la proposición 2.2.2 iii). Y si $x = (x_i) \in M$ entonces

$$x = (\|x_i\| \cdot v_i) \in N \cdot B_1(\ell_I^\infty\{(E_i)\})$$

siendo $v_i = \frac{x_i}{\|x_i\|}$ si $\|x_i\| \neq 0$ y $v_i = 0$ si $\|x_i\| = 0$. ∎

La siguiente proposición sobre las proyecciones será utilizada más adelante.

2.2.4 Proposición. *Si λ es un espacio normal de familias escalares dotado de una τ-topología, $\lambda\{(E_i)\}$ es el espacio λ–suma de la familia de espacios normados $(E_i)_{i\in I}$ dotado de la τ-topología correspondiente, entonces se verifica que la familia de proyecciones $\{P_J : J \subset I\}$ es τ–equicontinua.*

DEMOSTRACIÓN:

Para cada $x = (x_i) \in \lambda\{(E_i)\}$ y cada $J \subset I$ se verifica que la familia $(\|P_J(x)\|) \leq ((\|x_i\|)_i)$, donde $(\|P_J(x)\|)$ representa la familia de λ que tiene por coordenadas la norma de cada componente de $P_J(x) \in \lambda\{(E_i)\}$. Entonces para toda $q \in Q$ se verifica:

$$\sigma_q(P_J(x)) = q\left(\|P_J(x)\|\right) \leq q\left((\|x_i\|)_i\right) = \sigma_q(x)$$

∎

A continuación se da la definición de familia de vectores con la propiedad AK, se relaciona la propiedad AK del espacio $\lambda\{(E_i)\}$ con la de λ, se caracteriza el subespacio de $\lambda\{(E_i)\}$ formado por todas las familias cuyas secciones convergen a la familia en cuestión y se estudia su estructura.

2.2.5 Definición *Sea $\lambda\{(E_i)\}$ un espacio de familias de vectores dotado de una τ-topología. Se dice que la familia $x \in \lambda\{(E_i)\}$ posee la propiedad AK si $x = \lim_F P_F(x)$.*

Si todas las familias del espacio poseen la propiedad AK, se dice que $\lambda\{(E_i)\}$ *posee la propiedad AK.*

2.2.6 Proposición. *Si* λ *es un espacio normal de familias escalares dotado de una* τ*–topología y* $\lambda\{(E_i)\}$ *es el espacio de familias vectoriales* λ*–suma de la familia de espacios normados* $(E_i)_{i\in I}$*, dotado de la* τ*–topología correspondiente, se verifica que* $\lambda\{(E_i)\}$ *tiene la propiedad AK si, y sólo si, la tiene* λ.

DEMOSTRACIÓN:

Si $\lambda\{(E_i)\}$ posee la propiedad AK y $\alpha = (\alpha_i)$ es una familia de escalares arbitraria perteneciente a λ, dada cualquier seminorma $q_{M^0} \in Q$ sobre λ y cualquier número $\varepsilon > 0$, basta considerar en cada E_i un $y_i \in E_i$ con $\|y_i\| = 1$ y se sigue que $\alpha y = (\alpha_i y_i) \in \lambda\{(E_i)\}$. Como a la seminorma $q_{M^0} \in Q$ le corresponde una seminorma $\sigma_q \in S$ sobre $\lambda\{(E_i)\}$ y como este espacio posee la propiedad AK, podemos asegurar que existe un $F_0 \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$ tal que para todo $F \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$, $F \supset F_0$, se verifica que

$$\begin{aligned} q_{M^0}(\alpha - P_F(\alpha)) &= \sup_{(\eta_i)\in M} \sum_{i\in I\setminus F} |\eta_i|\,|\alpha_i| = \sup_{(\eta_i)\in M} \sum_{i\in I\setminus F} |\eta_i|\,\|\alpha_i y_i\| \\ &= \sigma_q(\alpha y - P_F(\alpha y)) < \varepsilon \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\alpha = \tau\text{-}\lim_F P_F(\alpha)$, es decir, que λ posee la propiedad AK.

Recíprocamernte, si λ tiene la propiedad AK y $x = (x_i) \in \lambda\{(E_i)\}$ es una familia de vectores arbitraria, entonces dada cualquier seminorma $\sigma_q \in S$ en $\lambda\{(E_i)\}$ y cualquier número $\varepsilon > 0$, como $(\|x_i\|) \in \lambda$, para la seminorma $q \in Q$ existe un $F_0 \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$ tal que para todo $F \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$, $F \supset F_0$, es

$$\sigma_q(x - P_F(x)) = q((\|x_i\|) - P_F((\|x_i\|))) < \varepsilon$$

es decir, que $x = \tau\text{-}\lim_F P_F(x)$; luego $\lambda\{(E_i)\}$ tiene la propiedad AK. ■

De acuerdo con el corolario 1.4.3, siempre que dotemos al espacio de familias escalares λ con una topología compatible con el par dual $(\lambda, \lambda^\times)$, este espacio λ posee la propiedad AK. En este caso, y de acuerdo con la proposición que acabamos de demostrar, cuando dotemos a $\lambda\{(E_i)\}$ de la τ–topología correspondiente, este espacio también posee la propiedad AK.

De la misma manera que para los espacios de familias escalares interesará estudiar el caso en que se dote a λ de la topología fuerte $\beta(\lambda, \lambda^\times)$ y a $\lambda\{(E_i)\}$ de la topología correspondiente que representaremos por $(\mathcal{B})$.

2.2.7 Definición *A la clausura de $\phi_I\{(E_i)\}$ en el espacio $\lambda\{(E_i)\}$ cuando se dota a éste con la $(\mathcal{B})$–topología, se representa por $(\lambda\{(E_i)\})_r$ y, por analogía con el caso escalar, se le denomina* subespacio regular *de $\lambda\{(E_i)\}$. Es decir,*

$$(\lambda\{(E_i)\})_r = \overline{\phi_I\{(E_i)\}}^{(\mathcal{B})} \quad en\ \lambda\{(E_i)\}.$$

A $(\lambda\{(E_i)\})_r$ lo dotaremos con la topología inducida por la $(\mathcal{B})$–topología.

Esta definición del espacio $\lambda_r\{(E_i)\}$ es la extensión natural de lo que se considera en el caso de sucesiones vectoriales (ver [16, 3.1 pág. 156] y [38, 4.9.7 pág. 147]).

Se verifica que

$$(\lambda\{(E_i)\})_r = \overline{\phi_I\{(E_i)\}}^{(\mathcal{B})} = \{x \in \lambda\{(E_i)\} : x = (\mathcal{B}) - \lim_F P_F(x)\} = \lambda_r\{(E_i)\}.$$

La igualdad segunda se justifica porque si $x \in \lambda\{(E_i)\}$ es tal que en la topología $(\mathcal{B})$ es $x = \lim_F P_F(x)$, entonces es claro que $x \in (\lambda\{(E_i)\})_r = \overline{\phi_I\{(E_i)\}}^{(\mathcal{B})}$. Para demostrar la otra inclusión basta tener en cuenta la aplicación uniformemente continua

$$\psi_\lambda : x = (x_i) \in \lambda\{(E_i)\} \longrightarrow \psi_\lambda(x) := (\|x_i\|) \in \lambda$$

definida en la proposición 2.2.2. Se tiene que $\psi_\lambda(\phi_I\{(E_i)\}) \subset \phi_I$ y por ser ψ_λ continua se verifica:

$$\psi_\lambda\left(\overline{\phi_I\{(E_i)\}}^{(\mathcal{B})}\right) \subset \overline{\psi_\lambda(\phi_I\{(E_i)\})}^{\beta(\lambda,\lambda^\times)} \subset \overline{\phi_I}^{\beta(\lambda,\lambda^\times)} = \lambda_r$$

con lo que si $x \in (\lambda\{(E_i)\})_r$ entonces $\psi_\lambda(x) \in \lambda_r$, es decir, que en la topología $\beta(\lambda,\lambda^\times)$ es $(\|x_i\|) = \lim_F P_F((\|x_i\|))$; de donde se sigue que $x = (\mathcal{B})\text{-}\lim_F P_F(x)$ como es inmediato comprobar.

La tercera igualdad sigue de la proposición 2.2.6.

Teniendo en cuenta que λ_r es un espacio normal (ver apartado (ii) de la proposición 1.4.6) y el párrafo 2.1.2, se sigue que el espacio $(\lambda\{(E_i)\})_r = \lambda_r\{(E_i)\}$ es un espacio normal de familias de vectores.

2.3 Completitud de $\lambda\{(E_i)_{i\in I}\}$.

La hipótesis de completitud juega un papel muy importante en los resultados sobre tonelación de $\lambda\{(E_i)\}$ que vamos a exponer a continuación. Aunque fundamentalmente trataremos la completitud local, reunimos en esta sección otros resultados sobre este tema. Demostramos que el espacio completado de $\lambda\{(E_i)\}$ es $\widehat{\lambda}\{(\widehat{E_i})\}$, siendo $\widehat{\lambda}$ el completado de λ y $\widehat{E_i}$ el completado de E_i para cada $i \in I$.

2.3.1 Teorema. *Sea λ un espacio normal de familias escalares dotado de una τ-topología y $\lambda\{(E_i)\}$ el espacio λ-suma de la familia de espacios de Banach $(E_i)_{i\in I}$, dotado de su τ-topología correspondiente. Se verifica:*

i) *Si λ es completo, entonces $\lambda\{(E_i)\}$ es completo.*

ii) *Si λ es sucesionalmente completo, entonces $\lambda\{(E_i)\}$ es sucesionalmente completo.*

iii) *Si λ es localmente completo, entonces $\lambda\{(E_i)\}$ es localmente completo.*

DEMOSTRACIÓN:

i) Sea $\left\{x^{(s)} = \left(x_i^{(s)}\right), s \in D \geq\right\}$ una red τ–Cauchy en $\lambda\{(E_i)\}$, es decir, dada cualquier seminorma σ_q en $\lambda\{(E_i)\}$ y cualquier número $\varepsilon > 0$ existe $s_0 \in D$ tal que para $s_1, s_2 \in D, s_1 \geq s_0$, $s_2 \geq s_0$, se verifica

$$\sigma_q\left(x^{(s_1)} - x^{(s_2)}\right) = q\left(\left(\left\|x_i^{(s_1)} - x_i^{(s_2)}\right\|\right)_i\right) < \varepsilon.$$

Como la aplicación $\psi_\lambda : \lambda\{(E_i)\} \longrightarrow \lambda$ es uniformemente continua, según iii) de la proposición 2.2.2, se sigue que la red $\left\{\left(\left\|x_i^{(s)}\right\|\right), s \in D, \geq\right\}$ en λ es τ–Cauchy, y como λ es τ–completo dicha red converge a una familia $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$. Es decir, que dada cualquier seminorma q en λ y cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un $s_0' \in D$ tal que para todo s de D que sea $s \geq s_0'$, es $q\left((\alpha_i) - \left(\left\|x_i^{(s)}\right\|\right)\right) < \varepsilon$.

Como para cada $i \in I$ la aplicación

$$\psi_i : x = (x_i) \in \lambda\{(E_i)\} \longrightarrow \psi_i(x) := x_i \in E_i$$

es continua, según i) de la proposición 2.2.2, se deduce que la red

$$\{x_i^{(s)}, s \in D, \geq\}$$

en cada E_i es $\|\cdot\|$–Cauchy, y como cada E_i es completo entonces para cada $i \in I$ existe $y_i \in E_i$ tal que $y_i = \|\cdot\| - \lim_s x_i^{(s)}$, es decir, dado un $\varepsilon > 0$ existe $s_{0_i}'' \in D$ tal que para todo $s \in D$ que sea $s \geq s_{0_i}''$, es $\left\|y_i - x_i^{(s)}\right\| < \varepsilon$. Sea $y = (y_i)$.

Veamos que $y = (y_i) \in \lambda\{(E_i)\}$ y que $y = \tau\text{-}\lim_s x^{(s)}$. En efecto, de lo anterior se sigue que para cada $i \in I$ es

$$\left|\|y_i\| - \left\|x_i^{(s)}\right\|\right| \leq \left\|y_i - x_i^{(s)}\right\| < \varepsilon$$

para todo $s \in D$ que sea $s \geq s_{0_i}''$. De donde se deduce que para cada $i \in I$ la red $\left\{\left\|x_i^{(s)}\right\|, s \in D, \geq\right\}$ tiende a $\|y_i\|$. Pero por lo expuesto anteriormente la red $\left\{\left(\left\|x_i^{(s)}\right\|\right)_i, s \in D, \geq\right\}$ tiende a $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$ y por la proposición 1.2.3 se verifica que para cada $i \in I$ la red $\left\{\left\|x_i^{(s)}\right\|, s \in D, \geq\right\}$ tiende a α_i. Por consiguiente, para cada $i \in I$ es $\|y_i\| = \alpha_i$, es decir, $y = (y_i) \in \lambda\{(E_i)\}$.

Para ver que el límite es y distinguiremos dos casos: a) $y=0$, b) $y\neq 0$ y nos basaremos en que una red

$$x^{(s)} \xrightarrow{s} 0 \text{ en } \lambda\{(E_i)\} \Leftrightarrow \left(\left\|x_i^{(s)}\right\|\right)_i \xrightarrow{s} 0 \text{ en } \lambda$$

pues para cada $q\in Q$ se verifica que

$$\sigma_q(x^{(s)}-0)=\sigma(x^{(s)})=q\left(\left(\left\|x_i^{(s)}\right\|\right)_i\right)=q\left(\left(\left\|x_i^{(s)}\right\|\right)_i-0\right).$$

a) Si $y=0\in\lambda\{(E_i)\}$ entonces $y_i=0\in E_i$ para cada $i\in I$ y, por tanto, $\alpha=0\in\lambda$. En este caso la red $\left\{\left(\left\|x_i^{(s)}\right\|\right), s\in D, \geq\right\}$ en λ tiende a $0\in\lambda$, y por lo anterior se sigue que la red $\{x^{(s)}, s\in D,\geq\}$ en $\lambda\{(E_i)\}$ tiende a $0\in\lambda\{(E_i)\}$.

b) Si $y\neq 0$ definimos la red $\{z^{(s)}=x^{(s)}-y,\, s\in D,\geq\}$ que claramente es τ–Cauchy, y como $x_i^{(s)} \xrightarrow{s} y_i\in E_i$, entonces $z_i^{(s)} \xrightarrow{s} 0\in E_i$. Entonces la red $\{z^{(s)}, s\in D, \geq\}$ estaría en las condiciones del apartado a) anterior y, por consiguiente, $z^{(s)} \xrightarrow{s} 0\in\lambda\{(E_i)\}$. Se sigue que $x^{(s)}=y+(x^{(s)}-y)\xrightarrow{s} y+0=y$ en $\lambda\{(E_i)\}$.

ii) La demostración es análoga a la del apartado i) anterior, considerando como conjunto D el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales dirigido por la relación de orden $\leq$.

iii) Según [38, Prop. 5.1.6 pág. 152] $\lambda\{(E_i)\}$ será localmente completo si, y sólo si, cada disco cerrado B en él es un disco de Banach; y según [38, Prop. 3.2.3 pág. 83] si B es un disco tal que para cada sucesión $\left(x^{(n)}\right)_n$ en B la serie $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}x^{(n)}$ converge en $\lambda\{(E_i)\}$ a un elemento de B, entonces B es un disco de Banach.

Sea, pues, $\left(x^{(n)}\right)_n$ una sucesión de elementos del disco cerrado B de $\lambda\{(E_i)\}$. Como B es acotado entonces $\left(x^{(n)}\right)_n=\left(\left(x_i^{(n)}\right)_i\right)_n$ es una sucesión acotada, es decir, para cada seminorma σ_q en $\lambda\{(E_i)\}$ existe una constante $\rho>0$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ es

$$\sigma_q\left(x^{(n)}\right)=q\left(\left(\left\|x_i^{(n)}\right\|\right)_i\right)\leq\rho$$

Sea $M = \{(\|x_i\|)_i : x = (x_i) \in B\} \subset \lambda$. Teniendo en cuenta la proposición 2.2.2 es claro que M es acotado en λ, pues B lo es en $\lambda\{(E_i)\}$.

Sea D la envolvente absolutamente convexa y cerrada de M. Entonces D será un disco cerrado en λ, y como λ es localmente completo, D será un disco de Banach en λ. Por tanto, como la sucesión $\left(\alpha^{(n)}\right)_n = \left(\left(\left\|x_i^{(n)}\right\|\right)_i\right)_n \subset D$, se verifica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\left(\left\|x_i^{(n)}\right\|\right)_i$ converge en λ a un elemento $\alpha = (\alpha_i) \in D \subset \lambda$. Así

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\left(\left\|x_i^{(n)}\right\|\right)_i = \alpha \quad \text{en } (\lambda,\tau). \tag{2.1}$$

Por la proposición 1.2.3, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\left\|x_i^{(n)}\right\| = \alpha_i. \tag{2.2}$$

Ahora bien, para cada $i \in I$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}x_i^{(n)}$ es $\|\cdot\|$-Cauchy en E_i, pues como la sucesión $\left(x^{(n)}\right)_n = \left(\left(x_i^{(n)}\right)_i\right)_n$ está acotada entonces para cada $i \in I$ la sucesión $(x_i^{(n)})_n \subset E_i$ está acotada por la proposición 2.2.2 (iii); y como la serie $\sum_1^n 2^{-n}$ es convergente, dado cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ de manera que para todos los $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, posteriores a ese n_1 se verifica que

$$\left\|\sum_{k=n}^{m} 2^{-k}x_i^{(k)}\right\| \leq \sum_{k=n}^{m} 2^{-k}\left\|x_i^{(k)}\right\| \leq \rho\sum_{k=n}^{m} 2^{-k} < \rho\frac{\varepsilon}{\rho} = \varepsilon.$$

Como cada E_i es completo, entonces cada serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}x_i^{(n)}$ converge a un $x_i \in E_i$, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}x_i^{(n)} = x_i. \tag{2.3}$$

Sea $x = (x_i)$. Veamos que $x = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}x^{(n)}$ y que $x \in B$.

De (2.3) se sigue que para cada $i \in I$ es

$$x_i - \sum_{n=1}^{k} 2^{-n}x_i^{(n)} = \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n}x_i^{(n)}$$

de donde se deduce que para cada $i \in I$ es

$$\left\| x_i - \sum_{n=1}^{k} 2^{-n} x_i^{(n)} \right\| = \left\| \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n} x_i^{(n)} \right\| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n} \left\| x_i^{(n)} \right\|. \tag{2.4}$$

Denotando por $\beta_i^{(k)} := \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n} \left\| x_i^{(n)} \right\|$ para cada $i \in I$ y $\beta^{(k)} = \left(\beta_i^{(k)}\right)_i$, se verifica que $\left|\beta_i^{(k)}\right| \leq |\alpha_i|$ para cada $i \in I$ por la ecuación (2.2) y, por tanto, $\beta^{(k)} \in \lambda$ por ser λ un espacio normal.

Sea q una seminorma cualquiera sobre λ y sea ε cualquier número positivo. Por verificarse (2.1) podemos asegurar que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$q\left(\sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n} \left(\left\| x_i^{(n)} \right\| \right)_i \right) = q\left(\beta^{(k)}\right) < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Teniendo en cuenta la condición (i) impuesta a las seminormas que definen la τ–topología en λ (ver párrafo 1.2.2) y la relación (2.4), dada una seminorma cualquiera σ_q sobre $\lambda\{(E_i)\}$ (correspondiente a la seminorma q sobre λ) y un número $\varepsilon > 0$, podemos asegurar que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \sigma_q\left(x - \sum_{n=1}^{k} 2^{-n} x^{(n)} \right) &= q\left(\left(\left\| x_i - \sum_{n=1}^{k} 2^{-n} x_i^{(n)} \right\| \right)_i \right) \leq q\left(\left(\beta_i^{(k)} \right)_i \right) \\ &= q\left(\beta^{(k)}\right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

De donde se deduce que $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x^{(n)} = x$.

Por último, $x \in B$ porque al ser B absolutamente convexo, cada suma parcial $\sum_{n=1}^{k} 2^{-n} x^{(n)}$ pertenece a B y de lo anterior se deduce que $x \in \overline{B}$, pero como B es un disco cerrado entonces $x \in B$. ■

Observaciones

1. Con el apartado (i) de este teorema se generalizan una serie de resultados conocidos para espacios de sucesiones vectoriales, como son los del tipo:

si los E_n son espacios de Banach, entonces $\ell^p\{(E_n)_n\}$, con $1 \leq p \leq \infty$, y $c_0\{(E_n)_n\}$ son completos, recogidos, por ejemplo, en [24, §26.8 pág. 359] y en [21, §19.4.2 Prop. pág. 427].

2. Como los espacios ℓ_I^p con $1 \leq p \leq \infty$ son completos (ver [24, §14.8 pág. 137]), se sigue que si $(E_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios de Banach, entonces cada $\ell_I^p\{(E_i)\}$ es completo. Algún caso particular de este tipo se puede ver en [25, §41.7(1) pág. 197 y §44.8.dem(9) pág. 293].

3. Como los espacios $\ell_I^{(p_i)}$, $\ell_I^\infty(p_i)$ y $c_{0I}^{(p_i)}$ son espacios completos respecto de la topología que en cada uno de ellos define la paranorma correspondiente, se deduce de lo anterior que si $(E_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios de Banach, entonces los espacios $\ell_I^{(p_i)}\{(E_i)\}$, $\ell_I^\infty(p_i)\{(E_i)\}$ y $c_{0I}^{(p_i)}\{(E_i)\}$ son completos respecto de la topología que en cada uno de ellos define la paranorma correspondiente.

A continuación trataremos de la completación del espacio de familias escalares λ, de cada E_i y del espacio de familias vectoriales $\lambda\{(E_i)\}$. Recuérdese que en la sección 1.3 vimos que la completación $\widehat{\lambda}$ de $(\lambda, \tau(\mathcal{M}))$ es la clausura de λ en $(\lambda^{\times\times}, \tau(\mathcal{M}))$, con la topología inducida por $\tau(\mathcal{M})$. En la Observación 1 de esa misma sección y en el apartado (iii) de la proposición 1.3.8 vimos que $\widehat{\lambda}$ es un espacio normal de familias.

Según el teorema anterior el espacio $\widehat{\lambda}\{(\widehat{E}_i)\}$ es completo. Demostraremos que en efecto es la completación del espacio $\lambda\{(E_i)\}$. En primer lugar demostramos el siguiente teorema:

2.3.2 Teorema. *Si λ es un espacio normal de familias escalares dotado de una τ–topología respecto de la cual es completo, y $(E_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios* *normados, entonces se verifica que la completación de $\lambda\{(E_i)\}$ es $\lambda\{(\hat{E}_i)\}$, donde $\hat{E}_i$ es la completación de E_i para $i \in I$.*

DEMOSTRACIÓN:

De acuerdo con el teorema anterior se verifica que $\lambda\{(\hat{E}_i)\}$ es completo. Demostraremos que $\lambda\{(E_i)\}$ es denso en $\lambda\{(\hat{E}_i)\}$, es decir, dada cualquier familia de vectores $\hat{x} = (\hat{x}_i) \in \lambda\{(\hat{E}_i)\}$, cualquier seminorma $\hat{\sigma}_q$ en $\lambda\{(\hat{E}_i)\}$ y cualquier número $\varepsilon > 0$, existe una familia de vectores $x = (x_i) \in \lambda\{(E_i)\}$ tal que $\hat{\sigma}_q(\hat{x} - x) < \varepsilon$.

En efecto, si $\hat{x} \neq 0$, $\hat{x} = (\hat{x}_i) \in \lambda\{(\hat{E}_i)\}$ entonces $\hat{x}_i \in \hat{E}_i$ para cada $i \in I$ y $\alpha = (\alpha_i) = (\|\hat{x}_i\|) \in \lambda$. Se puede asegurar que existe una constante $r > 0$ tal que $q((r\alpha_i)_i) < \varepsilon$.

Como $q(\alpha) > 0$ y cada E_i es denso en $\hat{E}_i$, podemos asegurar que para cada $i \in I$ existe un $x_i \in E_i$ tal que $\|\hat{x}_i - x_i\| \leq r\alpha_i$. Sea $x = (x_i)$. Como

$$\|x_i\| \leq \|x_i - \hat{x}_i\| + \|\hat{x}_i\| \leq r\alpha_i + \alpha_i = (1+r)\alpha_i \tag{2.6}$$

para cada $i \in I$, y $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$, se sigue que $((1+r)\alpha_i)_i \in \lambda$ también, y como λ es normal, de la ecuación (2.6) se deduce que $(\|x_i\|)_i \in \lambda$.

Por tanto, $x = (x_i) \in \lambda\{(E_i)\}$. Además

$$\hat{\sigma}_q(\hat{x} - x) = q((\|\hat{x}_i - x_i\|)_i) \leq q((r\alpha_i)_i) = q(r\alpha) < \varepsilon.$$

∎

2.3.3 Teorema. *Sea λ un espacio normal de familias escalares dotado de una τ-topología, $(E_i)_{i\in I}$ una familia de espacios normados y consideremos $\lambda\{(E_i)\}$ con su τ-topología correspondiente. Se verifica que la completación del espacio $\lambda\{(E_i)\}$ es $\hat{\lambda}\{(\widehat{E_i})\}$, donde $\hat{\lambda}$ es la completación de λ y $\widehat{E_i}$ es la completación de E_i para cada $i \in I$.*

DEMOSTRACIÓN:

En virtud del teorema 2.3.1 apartado i) el espacio $\widehat{\lambda}\{(\widehat{E}_i)\}$ es completo, y por el teorema 2.3.2 es la completación del espacio $\widehat{\lambda}\{(E_i)\}$. Basta probar que $\lambda\{(E_i)\}$ es denso en $\widehat{\lambda}\{(E_i)\}$.

Dado cualquier elemento $x = (x_i)$ de $\widehat{\lambda}\{(E_i)\}$ se verifica que cada $x_i \in E_i$ y siempre podremos expresarlo así: $x_i = \widehat{\alpha_i} y_i$, siendo $y_i \in E_i$ con $\|y_i\| \leq 1$ y $(\widehat{\alpha}_i) \in \widehat{\lambda}$. Por tanto, dada cualquier seminorma $\widehat{q}$ sobre $\widehat{\lambda}$ y cualquier número $\varepsilon > 0$, existe un elemento $\alpha = (\alpha_i) \in \lambda$ tal que

$$\widehat{q}(\widehat{\alpha} - \alpha) = \widehat{q}((\widehat{\alpha_i} - \alpha_i)_i) = \widehat{q}\left(\left(\left|\widehat{\alpha_i} - \alpha_i\right|\right)_i\right) < \varepsilon. \tag{2.7}$$

Dado cualquier elemento $x = (x_i) \in \widehat{\lambda}\{(E_i)\}$, cualquier seminorma $\widehat{\sigma_q}$ sobre dicho espacio y cualquier número $\varepsilon > 0$, podemos asegurar que existe una familia $z = (z_i)$ siendo cada $z_i = \alpha_i y_i$, que evidentemente pertenece a cada E_i y $(\|z_i\|)$ pertenece a λ, ya que λ es normal y para cada $i \in I$ es

$$\|z_i\| = \|\alpha_i y_i\| = |\alpha_i|\,\|y_i\| \leq |\alpha_i|,$$

tal que

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma_q}(x - z) &= \widehat{q}\left(\left(\|x_i - z_i\|\right)_i\right) = \widehat{q}\left(\left(\|\widehat{\alpha}_i y_i - \alpha_i y_i\|\right)_i\right) \\ &= \widehat{q}\left(\left(|\widehat{\alpha}_i - \alpha_i|\,\|y_i\|\right)_i\right) \leq \widehat{q}\left(\left(|\widehat{\alpha}_i - \alpha_i|\right)_i\right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Observación

Bierstedt y Bonet establecen en [1, §1.9. Lema] que para cualquier (gDF)-espacio E, la completación de $\ell_\infty(E)$ es topológicamente isomorfa a $\ell_\infty(\widehat{E})$. Aunque aquí los espacios E_i son espacios normados, sin embargo, el espacio de familias escalares es cualquier espacio normal λ. En este sentido puede entenderse que este teorema extiende ligeramente dicho resultado.

2.4 El espacio α–dual de Köthe generalizado de $\lambda\{(E_i)_{i\in I}\}$.

En esta sección se define el espacio α–dual generalizado de $\lambda\{(E_i)\}$, y se estudia la relación algebraica existente entre los espacios $\lambda\{(E_i)\}^\times$, $\lambda_r\{(E_i)\}^\times$ y $(\lambda_r\{(E_i)\},\tau)'$.

2.4.1 Definición *Sea λ un espacio normal de familias escalares y $\lambda\{(E_i)\}$ el espacio λ–suma de la familia de espacios normados $(E_i)_{i\in I}$. Se define el α–dual de Köthe generalizado de $\lambda\{(E_i)\}$ así:*

$$\lambda\{(E_i)\}^\times = \{u=(u_i) : u_i \in E_i' \ y \sum_{i\in I} |\langle x_i, u_i\rangle| < \infty \quad \forall\ x=(x_i)\in\lambda\{(E_i)\}\}.$$

2.4.2 Teorema. *Sea λ un espacio normal de familias escalares y sea $\lambda\{(E_i)\}$ el espacio λ–suma de la familia de espacios normados $(E_i)_{i\in I}$. Se verifican las siguientes igualdades:*

$$\lambda\{(E_i)\}^\times = \lambda^\times\{(E_i')\} = \lambda^\times \cdot \ell_I^\infty\{(E_i')\}.$$

DEMOSTRACIÓN:

Demostraremos las igualdades por las inclusiones de izquierda a derecha y cerraremos el círculo.

1) Si $u=(u_i)\in\lambda\{(E_i)\}^\times$ entonces $u_i\in E_i'$ para cada $i\in I$, de acuerdo con la definición anterior, y debemos demostrar que $(\|u_i\|)_i \in \lambda^\times$, es decir, que si $\alpha=(\alpha_i)\in\lambda$ es una familia de escalares arbitraria se verifica que

$$\sum_{i\in I} |\alpha_i|\,\|u_i\| < +\infty.$$

Sean $J = \{i \in I : \alpha_i \neq 0\}$ y $N = \{i \in J : \|u_i\| > 0\}$. Como

$$\|u_i\| = \sup\{|\langle x_i, u_i\rangle| : x_i \in E_i,\ \|x_i\| = 1\},$$

para cada $i \in N$ existe un $z_i \in E_i$ con $\|z_i\| = 1$, tal que $|\langle z_i, u_i\rangle| > 0$. Por tanto, $|\alpha_i|\,|\langle z_i, u_i\rangle| > 0$ para todo $i \in N$. Para $i \in I \setminus N$ tomamos $z_i \in E_i$ cualquiera con $\|z_i\| = 1$ y representamos por $z = (z_i) \in \omega_I\{(E_i)\}$. Es claro que $\alpha z = (\alpha_i z_i) \in \lambda\{(E_i)\}$, y como $u = (u_i)$ pertenece a $\lambda\{(E_i)\}^\times$, entonces

$$\sum_{i\in I} |\langle \alpha_i z_i, u_i\rangle| = \sum_{i\in I} |\alpha_i|\,|\langle z_i, u_i\rangle| < +\infty$$

es decir, $(|\alpha_i|\,|\langle z_i, u_i\rangle|)_i \in \ell_I^1$. Por tanto, dicha familia de ℓ_I^1 tendrá a lo sumo una cantidad numerable de coordenadas distintas de cero, es decir, N debe ser numerable y, por tanto, lo denotaremos por

$$N = \{i_n \in J : \|u_i\| > 0 \text{ con } \in \mathbb{N}\}.$$

Se tiene

$$\sum_{i\in I} |\alpha_i|\,\|u_i\| = \sum_{i_n\in N} |\alpha_{i_n}|\,\|u_{i_n}\|.$$

Por consiguiente, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos asegurar que existe un $y_{i_n} \in E_{i_n}$ con $\|y_{i_n}\| = 1$ y tal que

$$\|u_{i_n}\| < |\langle y_{i_n}, u_{i_n}\rangle| + \frac{1}{2^n\,|\alpha_{i_n}|}$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} |\alpha_i|\,\|u_i\| &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_{i_n}|\,\|u_{i_n}\| < \sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_{i_n}|\,|\langle y_{i_n}, u_{i_n}\rangle| + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle \alpha_{i_n} y_{i_n}, u_{i_n}\rangle| + 1 < +\infty.\end{aligned}$$

Por tanto, $(\|u_i\|)_i \in \lambda^\times$ y $u = (u_i) \in \lambda^\times\{(E_i')\}$.

2) Si $u = (u_i) \in \lambda^\times\{(E_i')\}$ basta considerar $v = (v_i)$ siendo $v_i = \dfrac{u_i}{\|u_i\|}$ si $\|u_i\| \neq 0$ y $v_i = 0$ si $\|u_i\| = 0$, y se tiene que $u = (u_i) = (\|u_i\| \cdot v_i) = (\|u_i\|) \cdot (v_i)$, que es claro que pertenece a $\lambda^\times \cdot \ell_I^\infty\{(E_i')\}$.

3) Si $\eta\cdot v\in\lambda^\times\cdot\ell_I^\infty\{(E_i')\}$, con $\eta=(\eta_i)\in\lambda^\times$ y $v=(v_i)\in\ell_I^\infty\{(E_i')\}$, entonces cada $v_i\in E_i'$ y $(\|v_i\|)\in\ell_I^\infty$, es decir, que existe un número $r>0$ tal que $\|v_i\|\le r$ para todo $i\in I$. Si $x=(x_i)\in\lambda\{(E_i)\}$, como $v_i\in E_i'$ para cada $i\in I$ entonces $\eta_i v_i\in E_i'$ para cada $i\in I$ y se verifica:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}|\langle x_i,\eta_i v_i\rangle| &= \sum_{i\in I}|\eta_i|\,|\langle x_i,v_i\rangle|\le\sum_{i\in I}|\eta_i|\,\|x_i\|\,\|v_i\|\\ &\le r\sum_{i\in I}|\eta_i|\,\|x_i\|<+\infty\end{aligned}$$

por ser $(\eta_i)\in\lambda^\times$ y $(\|x_i\|)\in\lambda$. Por tanto, $\eta v=(\eta_i v_i)\in\lambda\{(E_i)\}^\times$. ■

2.4.3 Teorema. *Sea λ un espacio normal de familias escalares dotado de una τ–topología respecto de la cual posee la propiedad AK. Sea $\lambda\{(E_i)\}$ el espacio λ–suma de la familia de espacios normados $(E_i)_{i\in I}$ con su τ–topología correspondiente. Entonces se verifica que $\lambda\{(E_i)\}^\times=(\lambda\{(E_i)\},\tau)'$.*

DEMOSTRACIÓN:

Estableceremos una correspondencia biyectiva entre los espacios $\lambda\{(E_i)\}^\times$ y $(\lambda\{(E_i)\},\tau)'$.

Si $u=(u_i)\in\lambda\{(E_i)\}^\times$ le hacemos corresponder el siguiente elemento f de $(\lambda\{(E_i)\},\tau)'$ definido así:

$$f:x=(x_i)\in\lambda\{(E_i)\}\longrightarrow\langle x,f\rangle:=\sum_{i\in I}\langle x_i,u_i\rangle\in\mathbb{K}.$$

En efecto, f está bien definida pues

$$|\langle x,f\rangle|=\left|\sum_{i\in I}\langle x_i,u_i\rangle\right|\le\sum_{i\in I}|\langle x_i,u_i\rangle|\le\sum_{i\in I}\|x_i\|\,\|u_i\|<+\infty$$

ya que $(\|x_i\|)_i\in\lambda$ y $(\|u_i\|)_i\in\lambda^\times$.

Es claro que f es lineal.

Además f es continua porque si $(\|u_i\|) \in \lambda^{\times}$, entonces por la condición 4) impuesta al sistema topologizante normal $\mathcal{M}$ que define la τ–topología en λ, existe un conjunto $M \in \mathcal{M}$ tal que $(\|u_i\|) \in M$. Existe, por tanto, la seminorma q_{M° en λ y la correspondiente σ_q en $\lambda\{(E_i)\}$, y se verifica

$$\begin{aligned} |\langle x, f\rangle| &\leq \sum_{i\in I} \|u_i\|\,\|x_i\| \leq \sup_{(\eta_i)\in M} \sum_{i\in I} |\eta_i|\,\|x_i\| \\ &= q_{M^\circ}((\|x_i\|)_i) = \sigma_q(x). \end{aligned}$$

Recíprocamente, si $f \in (\lambda\{(E_i)\}, \tau)'$ consideramos la aplicación lineal continua

$$\Psi_i : x_i \in E_i \longrightarrow \Psi_i(x_i) := x_i e^{(i)} \in \lambda\{(E_i)\}$$

y definimos para cada $i \in I$ la aplicación $u_i = f \circ \Psi_i$

$$u_i : E_i \xrightarrow{\Psi_i} \lambda\{(E_i)\} \xrightarrow{f} \mathbb{K}$$

$$x_i \longrightarrow x_i e^{(i)} \longrightarrow \langle x_i, u_i\rangle := \langle \Psi_i(x_i), f\rangle$$

Cada $u_i \in E_i'$ por ser composición de aplicaciones lineales continuas. En la correspondencia que estamos considerando, entre $\lambda\{(E_i)\}^{\times}$ y $(\lambda\{(E_i)\}, \tau)'$ le haremos corresponder a $f \in (\lambda\{(E_i)\}, \tau)'$ la familia $u = (u_i)$ que demostraremos que pertenece a $\lambda\{(E_i)\}^{\times}$.

Sean $x = (x_i) \in \lambda\{(E_i)\}$ y $\alpha = (\alpha_i) \in c_{0_I}$ arbitrarios, y $\beta = (\beta_i)$ siendo

$$\beta_i = \begin{cases} \frac{|\alpha_i\langle x_i, u_i\rangle|}{\alpha_i\langle x_i, u_i\rangle} & \text{si } \alpha_i\langle x_i, u_i\rangle \neq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha_i\langle x_i, u_i\rangle = 0 \end{cases}$$

con lo que $\beta = (\beta_i) \in B_1(\ell_I^\infty)$. Entonces $\beta x \in \lambda\{(E_i)\}$ porque $\lambda\{(E_i)\}$ es normal (ver 2.1.2), $\alpha\beta x \in \lambda\{(E_i)\}$ por el apartado (iii) de la proposición 1.4.6 y, por tanto, se verifica que $\alpha\beta x = \lim_{F\in\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)} P_F(\alpha\beta x)$. Entonces:

$$\langle \alpha\beta x, f\rangle = \left\langle \lim_F P_F(\alpha\beta x), f \right\rangle = \lim_F \langle P_F(\alpha\beta x), f\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_F \left\langle \sum_{i\in F} \Psi_i(\alpha_i\beta_i x_i), f \right\rangle = \lim_F \sum_{i\in F} \langle \alpha_i\beta_i x_i, f\circ\Psi_i\rangle \\
&= \lim_F \sum_{i\in F} \langle \alpha_i\beta_i x_i, u_i\rangle = \lim_F \sum_{i\in F} \alpha_i\beta_i \langle x_i, u_i\rangle \\
&= \lim_F \sum_{i\in F} |\alpha_i\langle x_i, u_i\rangle| = \sum_{i\in I} |\alpha_i|\,|\langle x_i, u_i\rangle| < +\infty
\end{aligned}
$$

y como $\alpha = (\alpha_i) \in c_{0_I}$ era arbitraria, entonces $(|\langle x_i, u_i\rangle|)_i \in \ell^1_I$; y si $x = (x_i)$ era una familia arbitraria de $\lambda\{(E_i)\}$, entonces $u = (u_i) \in \lambda\{(E_i)\}^\times$.

Existe, pues, una correspondencia biyectiva

$$
\begin{aligned}
\lambda\{(E_i)\}^\times &\longleftrightarrow (\lambda\{(E_i)\}, \tau)' \\
u = (u_i) &\longleftrightarrow f
\end{aligned}
$$

tal como hemos definido anteriormente a f y a cada u_i, en cada caso. Es inmediato comprobar que se trata de un isomorfismo algebraico, y en virtud de él identificaremos ambos elementos f y u, y en este sentido entenderemos la igualdad del teorema enunciado. ■

Observaciones

1. Aunque $\lambda\{(E_i)\}$ no tenga la propiedad AK, la misma definición de f a partir de $u = (u_i) \in \lambda\{(E_i)\}^\times$ dada en la demostración del teorema 2.4.3, nos permite definir un funcional lineal continuo sobre $\lambda\{(E_i)\}$:

$$f : x = (x_i) \in \lambda\{(E_i)\} \longrightarrow \langle x, f\rangle := \sum_{i\in I} \langle x_i, u_i\rangle \in \mathbb{K}.$$

La demostración hecha allí sirve para probar que esta f así definida pertenece a $(\lambda\{(E_i)\}, \tau)'$. Puede decirse que $\lambda\{(E_i)\}^\times$ está contenido en el espacio $(\lambda\{(E_i)\}, \tau)'$. Sin embargo, la otra inclusión, en general, no es cierta como muestra el ejemplo $(\ell^\infty_I)' \neq \ell^1_I$.

2. Este teorema es una ligera extensión del resultado obtenido por Florencio, Paúl y Sáez para el caso de sucesiones en [17]. La demostración es semejante.

2.4.4 Corolario. *Sea λ es un espacio normal de familias escalares dotado de la τ-topología $\beta(\lambda,\lambda^\times)$; sea $\lambda\{(E_i)\}$ el espacio λ-suma de la familia de espacios normados $(E_i)_{i\in I}$ dotado de la $(\mathcal{B})$-topología correspondiente. Considerando en $\lambda_r\{(E_i)\}$ la topología inducida por la $(\mathcal{B})$-topología, se verifican las siguientes igualdades:*

$$\lambda_r\{(E_i)\}^\times = \lambda\{(E_i)\}^\times = \lambda^\times\{(E_i')\} = \lambda^\times \cdot \ell_I^\infty\{(E_i')\} = \lambda_r\{(E_i)\}'.$$

DEMOSTRACIÓN:

Ya que $\lambda_r^\times = \lambda^\times$ por el apartado (iv) de la proposición 1.4.6, y por el teorema 2.4.3. ∎

2.5 Tonelación de $\lambda\{(E_i)_{i\in I}\}$: resultados generales.

En las dos secciones siguientes estudiaremos la tonelación de un espacio λ–suma de una familia de espacios normados $(E_i)_{i\in I}$. En esta primera sección dedicada a este tema comenzamos demostrando que si el espacio normal de familias escalares λ es tonelado, entonces el espacio $\lambda\{(E_i)\}$ es casi tonelado.[2] Teniendo en cuenta los resultados anteriores sobre el espacio $\lambda_r\{(E_i)\}$ y sobre la completitud

[2]Recuérdese que si λ es normal y casi tonelado, entonces es tonelado en virtud del corolario 1.3.5. Como el espacio λ debe ser normal para garantizar que $\lambda\{(E_i)\}$ sea un espacio lineal, en todos las proposiciones que siguen acerca de la tonelación impondremos directamente la condición que λ sea tonelado.

de $\lambda\{(E_i)\}$, deducimos varios corolarios sobre la tonelación del espacio $\lambda_r\{(E_i)\}$ y $\lambda\{(E_i)\}$. A continuación demostramos que si el espacio de familias escalares λ está dotado de una τ-topología respecto de la cual es tonelado y posee la propiedad AK, entonces el espacio $\lambda\{(E_i)\}$ es tonelado si, y sólo si, todos los E_i son tonelados.

2.5.1 Teorema. *Si λ es un espacio normal de familias escalares dotado de una τ-topología, respecto de la cual es tonelado, $(E_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios normados, y consideramos en $\lambda\{(E_i)\}$ la correspondiente τ-topología, entonces $\lambda\{(E_i)\}$ es casi tonelado.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $N \subset \lambda\{(E_i)\}'$ acotado en $\beta\left(\lambda\{(E_i)\}', \lambda\{(E_i)\}\right)$. Consideremos el subconjunto

$$H = \{v = (v_i) : v_i \in E_i, \quad \|v_i\| = 1 \quad \forall\ i \in I\}$$

contenido en la bola unidad de $\ell_I^\infty\{(E_i)\}$, que nos va a permitir definir la siguiente aplicación lineal para cada v:

$$\Upsilon_v : \alpha = (\alpha_i) \in \lambda \longrightarrow \Upsilon_v(\alpha) = (\alpha_i v_i) \in \lambda\{(E_i)\}$$

que es continua por la proposición 2.2.2 (iv).

Entonces para cada $f \in N$ y $v \in H$ es $f \circ \Upsilon_v \in \lambda'$, por lo que

$$N^* = \{f \circ \Upsilon_v : f \in N, \quad v \in H\} \subset \lambda'$$

Si A es un subconjunto de λ que es τ-acotado, entonces el conjunto

$$AH = \{\alpha v = (\alpha_i v_i) : \alpha = (\alpha_i) \in A, \quad v = (v_i) \in H\}$$

está contenido en $\lambda\{(E_i)\}$, pues cada $\alpha_i v_i \in E_i$ y $(\|\alpha_i v_i\|) = (|\alpha_i|) \in \lambda$, y está acotado ya que

$$\sigma_q(\alpha v) = q((\|\alpha_i v_i\|)_i) = q((|\alpha_i|)_i) = q(\alpha) \leq \rho_A$$

para todo $v \in H$ y para todo $\alpha \in A$, porque A es τ–acotado.

Ahora bien, como N es $\beta\left(\lambda\{(E_i)\}', \lambda\{(E_i)\}\right)$–acotado, al actuar sobre el conjunto AH estará acotado, es decir, que existe un número $\rho > 0$ tal que $|\langle\alpha v, f\rangle| \leq \rho$ para todo $\alpha v = (\alpha_i v_i) \in AH$ y $f \in N$. Pero esto se puede escribir también así

$$|\langle\alpha v, f\rangle| = |\langle\Upsilon_v(\alpha), f\rangle| = |\langle\alpha, f \circ \Upsilon_v\rangle| \leq \rho$$

para todo $\alpha \in A$ y para toda $f \circ \Upsilon_v \in N^*$. Por consiguiente N^* es acotado en $\beta(\lambda', \lambda)$ y como λ es tonelado, entonces es casi tonelado y se deduce que N^* es un subconjunto equicontinuo de λ', es decir, que existe una seminorma $q \in Q$ en λ tal, que

$$|\langle\cdot, f \circ \Upsilon_v\rangle| \leq q(\cdot)$$

para toda $f \in N$ y para todo $v \in H$.

Se sigue de aquí que N es un subconjunto equicontinuo de $\lambda\{(E_i)\}'$, pues si $u = (u_i) \in \lambda\{(E_i)\}$ se puede escribir $u = (\|u_i\|\, v_i)$ siendo $v_i = \dfrac{u_i}{\|u_i\|}$ si es $u_i \neq 0$ y si es $u_i = 0$ se toma como v_i cualquier elemento de E_i tal que $\|v_i\| = 1$. De esta forma $v = (v_i)$ pertenece a H y para cualquier $f \in N$ y $u = (u_i) \in \lambda\{(E_i)\}$ se verifica

$$|\langle u, f\rangle| = |\langle(\|u_i\|\, v_i)_i, f\rangle| = |\langle(\|u_i\|)_i, f \circ \Upsilon_v\rangle| \leq q((\|u_i\|)_i) = \sigma_q(u)$$

■

Observación

Obsérvese que de esta prueba se deduce que la $(\mathcal{B})$–topología de $\lambda\{(E_i)\}^\times$ como espacio de familias vectoriales, coincide con la topología que induce en ese espacio el dual fuerte de $\lambda\{(E_i)\}$.

2.5.2 Corolario. *Si λ es un espacio normal de familias escalares dotado con la topología $\beta(\lambda,\lambda^\times)$ y $(E_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios normados, entonces el espacio $\lambda_r\{(E_i)\}$ dotado con la topología inducida por la $(\mathcal{B})$-topología es casi tonelado.*

DEMOSTRACIÓN:

Es una consecuencia inmediata del teorema que se acaba de demostrar y del corolario 1.4.7. ■

2.5.3 Corolario. *Si λ es un espacio normal de familias escalares dotado de una τ-topología respecto de la cual es tonelado y localmente completo, y $\lambda\{(E_i)\}$ es el espacio λ-suma de la familia de espacios de Banach $(E_i)_{i\in I}$ dotado de la τ-topología correspondiente, entonces $\lambda\{(E_i)\}$ es tonelado.*

DEMOSTRACIÓN:

En efecto, si λ es localmente completo, entonces $\lambda\{(E_i)\}$ también lo es por el apartado (iii) del teorema 2.3.1. Si λ es tonelado, entonces $\lambda\{(E_i)\}$ es casi tonelado por el teorema 2.5.1. Si $\lambda\{(E_i)\}$ es localmente completo y casi tonelado, entonces es tonelado (ver [38, Cor. 5.1.10 pág. 153]). ■

2.5.4 Corolario. *Si λ es un espacio perfecto de familias escalares dotado de una τ-topología respecto de la cual es tonelado, y $\lambda\{(E_i)\}$ es el espacio λ-suma de la familia de espacios de Banach $(E_i)_{i\in I}$ dotado de la τ-topología correspondiente, entonces $\lambda\{(E_i)\}$ es tonelado.*

DEMOSTRACIÓN:

Si λ es perfecto, entonces es completo por el apartado (i) del teorema 1.3.8; se sigue que $\lambda\{(E_i)\}$ es completo por el teorema 2.3.1 i). Si λ es tonelado, entonces $\lambda\{(E_i)\}$ es casi tonelado por el teorema 2.5.1. Entonces $\lambda\{(E_i)\}$ es tonelado por [38, Cor. 5.1.10 pág. 153]. ∎

Observaciones

1. En [17, Remark pág. 216] se establece que si $(E_n)_n$ es una sucesión de espacios normados y (λ,τ) es un espacio de sucesiones escalares casi tonelado, entonces $(\lambda\{(E_n)_n\},\tau)$ es casi tonelado. La proposición que acabamos de demostrar es una ligera extensión de este resultado.

2. La demostración, que sigue el mismo esquema que la de la proposición 1.5.2, se basa en la idea utilizada en la prueba del teorema 4 del mencionado artículo [17] y en la demostración del teorema 1 de [13].

A continuación demostramos que el espacio $\lambda\{(E_i)\}^\times$ es sucesionalmente completo con la topología $\sigma\left(\lambda\{(E_i)\}^\times, \lambda\{(E_i)\}\right)$. Resultado que utilizaremos en la demostración del último teorema de esta sección.

2.5.5 Lema. *Si λ es un espacio normal de familias escalares y $(E_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios normados tonelados, entonces el espacio $\lambda\{(E_i)\}^\times$ es sucesionalmente completo con la topología $\sigma\left(\lambda\{(E_i)\}^\times, \lambda\{(E_i)\}\right)$.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\left(u^{(n)}\right)_n = \left(\left(u_i^{(n)}\right)_i\right)_n$ una sucesión de elementos de $\lambda\{(E_i)\}^\times$ que es $\sigma\left(\lambda\{(E_i)\}^\times, \lambda\{(E_i)\}\right)$-Cauchy. Como $\phi_I \subset \lambda$ entonces para cada $i \in I$ la sucesión $\left(u_i^{(n)}\right)_n$ de elementos de E_i' es $\sigma(E_i', E_i)$-Cauchy. Como todos los E_i son tonelados, se sigue que cada E_i' es $\sigma(E', E_i)$-casi-completo (ver [24, §23.6(4) pág. 305]), de donde se deduce que cada E_i' es $\sigma(E', E_i)$-sucesionalmente completo. Por tanto, cada sucesión $\left(u_i^{(n)}\right)_n$ es $\sigma(E_i', E_i)$-convergente a un elemento u_i de E_i'. Representaremos por $u = (u_i)_{i\in I}$ y demostraremos que $u \in \lambda\{(E_i)\}^\times$ y que $u = \lim_n u^{(n)}$ en la topología $\sigma\left(\lambda\{(E_i)\}^\times, \lambda\{(E_i)\}\right)$.

En efecto, si $x = (x_i)$ pertenece a $\lambda\{(E_i)\}$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ es $\alpha^{(n)} = \left(\langle u_i^{(n)}, x_i\rangle\right)_i \in \ell_I^1$ y $(\alpha^{(n)})_n$ es una sucesión $\sigma(\ell_I^1, \ell_I^\infty)$-Cauchy, pues si $\beta = (\beta_i) \in \ell_I^\infty$ entonces $\beta x \in \lambda\{(E_i)\}$ por ser λ normal (ver 2.1.2) y se verifica que

$$\begin{aligned}\left|\langle\alpha^{(m)} - \alpha^{(n)}, \beta\rangle\right| &= \left|\sum_{i\in I}\langle u_i^{(m)} - u_i^{(n)}, x_i\rangle\beta_i\right| = \left|\sum_{i\in I}\langle u_i^{(m)} - u_i^{(n)}, \beta_i x_i\rangle\right| \\ &= \left|\langle u^{(m)} - u^{(n)}, \beta x\rangle\right| < \varepsilon\end{aligned}$$

desde un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ en adelante, por ser $\left(u^{(n)}\right)_n$ una sucesión de Cauchy en la topología $\sigma\left(\lambda\{(E_i)\}^\times, \lambda\{(E_i)\}\right)$. Por el corolario 1.3.2 del Teorema de Schur 1.3.1 podemos asegurar que $\left(\alpha^{(n)}\right)_n$ es $\sigma(\ell_I^1, \ell_I^\infty)$-convergente a algún $\alpha = (\alpha_i)$ de ℓ_I^1.

Entonces para cada $i \in I$ es $\alpha_i = \lim_n \langle u_i, x_i\rangle$ y como $u_i^{(n)} \longrightarrow u_i$ en $\sigma(E_i', E_i)$ se sigue que

$$\alpha_i = \lim_n \langle u_i^{(n)}, x_i\rangle = \langle u_i, x_i\rangle$$

para cada $i \in I$. Es decir, que $(\langle u_i, x_i\rangle)_{i\in I} \in \ell_I^1$ con lo que $u \in \lambda\{(E_i)\}^\times$.

Por último, $u = \lim_n u^{(n)}$ en la topología $\sigma\left(\lambda\{(E_i)\}^\times, \lambda\{(E_i)\}\right)$ pues si $x = (x_i) \in \lambda\{(E_i)\}$

$$\begin{aligned}\left|\langle u^{(n)} - u, x\rangle\right| &= \left|\sum_{i\in I}\langle u^{(n)_i} - u_i, x_i\rangle\right| \leq \sum_{i\in I}\left|\langle u_i^{(n)}, x_i\rangle - \langle u_i, x_i\rangle\right| \\ &= \sum_{i\in I}\left|\alpha_i^{(n)} - \alpha_i\right| = \left\|\alpha^{(n)} - \alpha\right\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

desde un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ en adelante. ∎

2.5.6 Teorema. *Si λ un espacio normal de familias escalares dotado de la topología $\beta(\lambda, \lambda^\times)$, entonces se verifica que el espacio $\lambda_r\{(E_i)\}$ dotado con la topología inducida por la $(\mathcal{B})$–topología es tonelado si, y sólo si, todos los espacios normados E_i son tonelados.*

DEMOSTRACIÓN:

Como $(\lambda_r, \beta(\lambda_r, \lambda^\times))$ es tonelado por el corolario 1.4.7, entonces $\lambda_r\{(E_i)\}$ es casi tonelado por el Teorema 2.5.1. Será tonelado si el espacio $\lambda_r\{(E_i)\}'$ es $\sigma(\lambda_r\{(E_i)\}', \lambda_r\{(E_i)\})$-sucesionalmente completo (ver [24, §20.11(8) pág. 254]). Ahora bien, en virtud del Teorema 2.4.3 se verifica que

$$\lambda_r\{(E_i)\}' = \lambda_r\{(E_i)\}^\times.$$

Entonces el espacio $\lambda_r\{(E_i)\}$ es tonelado por el lema 2.5.5.

Recíprocamente, si $\lambda_r\{(E_i)\}$ es tonelado entonces E_i es tonelado para todo $i \in I$, pues cada E_i es un cociente de $\lambda_r\{(E_i)\}$. ∎

Teniendo en cuenta que el espacio $(\lambda, \mu(\lambda, \lambda^\times))$ posee la propiedad AK por la proposición 1.4.2, es inmediata la siguiente conclusión:

2.5.7 Corolario. *Si el espacio normal de familias escalares λ dotado de la topología $\mu(\lambda, \lambda^\times)$ es tonelado, entonces el espacio $\lambda\{(E_i)\}$ con la topología correspondiente es tonelado si, y sólo si, todos los espacios normados E_i son tonelados.*

2.6 Tonelación de $\lambda\{(E_i)_{i\in I}\}$: cardinales no medibles.

En esta sección vamos a estudiar cuándo es tonelado el espacio $\lambda\{(E_i)\}$ suprimiendo la hipótesis anterior relativa a la propiedad AK del espacio λ. Para la demostración que vamos a realizar necesitamos introducir una condición de completitud: exigiremos que λ sea localmente completo.

Estudiaremos la tonelación del espacio $\lambda\{(E_i)\}$ en estos dos casos:

1. consideraremos que el conjunto de índices I no sea medible; y

2. supondremos que todos los espacios normados E_i son iguales a un espacio normado E cuyo cardinal no es medible.

Recordemos que el conjunto I, o el número cardinal $\mathrm{card}(I)$, se dice que es medible si existe una medida numerablemente aditiva μ en $\mathcal{P}(I)$ con valores en $\{0,1\}$, tal que $\mu(I) = 1$ y $\mu(i) = 0$ para todo $i \in I$. Es un problema abierto el saber si existen cardinales medibles. Como indican Gillman y Jerison [18, pág. 165-166], no se puede demostrar (con el sistema de axiomas estandar—de Zermelo Fraenkel—de la teoría de conjuntos) que existan esos cardinales.

Antes de estudiar la tonelación del espacio $\lambda\{(E_i)_{i\in I}\}$ en el caso en que $\mathrm{card}(I)$ no sea medible, vamos a demostrar que ciertos espacios de familias vectoriales, Λ, que verifican determinadas condiciones que enunciaremos a continuación, y que están contenidos en $\omega_I\{(E_i)\}$, sin que tengan que ser espacios λ–suma para algún λ, son espacios de Banach–Mackey. Es decir, si Λ está dotado de una topología localmente convexa y Λ' es su dual, se verifica que todo subconjunto de Λ' que es $\sigma(\Lambda',\Lambda)$–acotado, es $\beta(\Lambda',\Lambda)$–acotado.

2.6.1 En el espacio de familias $\omega_I\{(E_i)_{i\in I}\}$ se define la siguiente relación:

$$\|x\| \leq \|y\| \Leftrightarrow \|x_i\| \leq \|y_i\| \text{ para todo } i \in I.$$

Sea $\Lambda \hookrightarrow \omega_I\{(E_i)_{i\in I}\}$ un subespacio normal de familias vectoriales de $\omega_I\{(E_i)_{i\in I}\}$, tal que $\phi_I\{(E_i)\} \subset \Lambda$, y sea R un conjunto de seminormas sobre Λ que verifica las siguientes condiciones:

(1) Si $x, y \in \Lambda$ y $\|x\| \leq \|y\| \Rightarrow \sigma(x) \leq \sigma(y)$ para toda $\sigma \in R$.

(2) La topología determinada en Λ por el conjunto de seminormas R es separada, es decir, para cada familia no nula $x \in \Lambda$ existe una seminorma $\sigma \in R$ tal que $\sigma(x) > 0$.

(3) Para cada $i \in I$ la correspondencia

$$\psi_i : x = (x_i) \in \Lambda \longrightarrow \psi_i(x) := x_i \in E_i$$

es una aplicación lineal continua.

(4) Para cada $i \in I$ la correspondencia

$$\Psi_i : x_i \in E_i \longrightarrow \Psi_i(x_i) := x_i e^{(i)} \in \Lambda$$

es una aplicación lineal continua.

Consideraremos en Λ la topología $\mathcal{T}$ localmente convexa definida por la familia de seminormas R. Un caso particular son los espacios $\lambda\{(E_i)\}$ con la topología definida en ellos como se indicó en la sección 2.2.

De la condición (1) anterior se sigue que $\sigma(x) = \sigma(y)$ para toda $\sigma \in R$ y para todas las familias $x = (x_i), y = (y_i) \in \Lambda$ tales que $\|x\| = (\|x_i\|) = (\|y_i\|) = \|y\|$, teniendo en cuenta la definición dada en el párrafo 2.6.1.

Para un espacio normal de familias $\Lambda \hookrightarrow \omega_I\{(E_i)\}$ se define la proyección P_J, siendo $J \subset I$, como en la definición 2.1.3 y se sigue verificando que la familia de proyecciones $\{P_J : J \subset I\}$ es equicontinua (ver proposición 2.2.4).

En virtud de [8, Lema y Prop. de §2] se verifica el siguiente lema, del que haremos uso tanto en el estudio que sigue de la tonelación como en la sección que dedicaremos al estudio de la ultrabornología.

2.6.2 Lema. *Sea $\Lambda \hookrightarrow \omega_I\{(E_i)\}$ un espacio normal de familias vectoriales dotado de un topología localmente convexa, $\mathcal{T}$, definida por una familia de seminormas R que verifica las condiciones (1) a (4) anteriores y la condición :*

> *(C) Si $(z^{(k)})_k$ es una sucesión acotada en Λ y $(\alpha_k)_k$ es una sucesión de ℓ^1, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k z^{(k)}$ converge en Λ.*

Entonces el conjunto $D = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k z^{(k)} : \alpha = (\alpha_k)_k \in B_1\left(\ell^1\right)\right\}$ es un disco de Banach.

Demostraremos a continuación el teorema principal de esta sección:

2.6.3 Teorema. *Sea I un conjunto de índices con card(I) no medible; sea $(E_i)_{i\in I}$ una familia de espacios normados tonelados; y sea $\Lambda \hookrightarrow \omega_I\{(E_i)_{i\in I}\}$ un espacio normal de familias vectoriales dotado de una topología localmente convexa $\mathcal{T}$, definida por una familia de seminormas R que verifica las condiciones (1) a (4) anteriores, y tal que verifica la siguiente condición:*

> *(*) Si $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos de I con $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n = \emptyset$, $(z^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en Λ tal que sop$(z^{(n)}) \subset J_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $\ell^1_{\mathbb{N}}$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n z^{(n)}$ converge en Λ.*

Entonces los subconjuntos de Λ' que son $\sigma(\Lambda', \Lambda)$-acotados, son acotados en la topología $\beta(\Lambda', \Lambda)$.[3]

DEMOSTRACIÓN:

La prueba que realizaremos será por reducción al absurdo y está dividida en dos partes. En la primera, de suponer que existe un subconjunto de Λ' que

[3]Es decir, Λ es un espacio Banach–Mackey (ver [49, pág. 158]).

es $\sigma(\Lambda',\Lambda)$–acotado y no $\beta(\Lambda',\Lambda)$–acotado, se sigue que es posible definir una función de conjunto en $\mathcal{P}(I)$ con valores en $[0,+\infty]$ que verifica una serie de propiedades. En la segunda parte de la prueba, y basándonos en la función de conjunto definida anteriormente, construimos un ultrafiltro sobre el conjunto I que nos determinará una medida en I, finitamente aditiva y con valores en $\{0,1\}$. La hipótesis de ser card(I) no medible resulta primordial pues nos permitirá llegar a una contradicción.

1. Construcción de una función de conjunto en $\mathcal{P}(I)$.

Si un conjunto $G \subset \Lambda'$ es $\sigma(\Lambda',\Lambda)$–acotado pero no es $\beta(\Lambda',\Lambda)$–acotado, se puede asegurar que existe un conjunto acotado $A \subset \Lambda$ tal que

$$\sup\{|\langle a,u\rangle| : u \in G, \quad a \in A\} = +\infty \tag{2.8}$$

Consideremos el conjunto $B = \bigcup_{J\in\mathcal{P}(I)} P_J(A)$; como A es acotado y el conjunto de proyecciones $\{P_J : J \subset I\}$ es equicontinuo por la proposición 2.2.4, entonces el conjunto B también es acotado.

Estos conjuntos $G \subset \Lambda'$ y $B \subset \Lambda$ nos permiten definir una función de conjunto f_{GB} en $\mathcal{P}(I)$, con valores en $[0,+\infty] \subset \mathbb{R}$, de la siguiente manera:

$$f_{GB}(J) = \begin{cases} \sup\{|\langle x,u\rangle| : u \in G, \quad x \in B, \quad \mathrm{sop}(x) \subset J\} & \text{si } J \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } J = \emptyset \end{cases}$$

que verifica las siguientes propiedades:

(i) f_{GB} es una submedida,

(ii) no decreciente,

(iii) $f_{GB}(\{j\}) < +\infty$ para cada $j \in I$,

(iv) $f_{GB}(I) = +\infty$, y

(v) si $(J_n)_n$ es una sucesión decreciente de subconjuntos de I tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $f_{GB}(J_n) = +\infty$, entonces se verifica que $f_{GB}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n\right) = +\infty$.

En efecto,

(i) f_{GB} está unívocamente definida y es subaditiva, es decir,

$$f_{GB}(J_1 \cup J_2) \leq f_{GB}(J_1) + f_{GB}(J_2)$$

siendo J_1 y J_2 subconjuntos disjuntos de I; pues si $\mathrm{sop}(x) \subset J_1 \cup J_2$ entonces $x = P_{J_1}(x) + P_{J_2}(x)$ y

$$|\langle x, u\rangle| \leq |\langle P_{J_1}(x), u\rangle| + |\langle P_{J_2}(x), u\rangle| \leq f_{GB}(J_1) + f_{GB}(J_2)$$

de donde sigue que $f_{GB}(J_1 \cup J_2) \leq f_{GB}(J_1) + f_{GB}(J_2)$.

(ii) La función f_{GB} es no decreciente, pues si $J_1 \subset J_2$ entonces

$$f_{GB}(J_1) \leq f_{GB}(J_2)$$

como se deduce inmediatamente de la definición dada de f_{GB}.

(iii) Si j es un índice de I, se verifica que $f_{GB}(\{j\}) < +\infty$. En efecto, si $\mathrm{sop}(x) \subset \{j\}$ entonces $x \in P_{\{j\}}(\Lambda)$. La proyección $P_{\{j\}}(\Lambda)$ es isomorfa al espacio E_j. La aplicación

$$\Psi_j : x_j \in E_j \longrightarrow \Psi_j(x_j) := x_j e^{(j)} \in \Lambda$$

es una aplicación lineal y continua por la condición (4) que hemos exigido a la familia R de seminormas que definen la topología en Λ, y la composición

$$u \circ \Psi_j : E_j \xrightarrow{\Psi_j} \Lambda \xrightarrow{u} \mathbb{K}$$

para cada $u \in G$ es una aplicación lineal y continua, por ser composición de aplicaciones de ese tipo. Por consiguiente, el conjunto $L = \{u \circ \Psi_j : u \in G\}$

contenido en E_j', es $\sigma\left(E_j', E_j\right)$–acotado, porque G lo es por hipótesis. Como E_j es tonelado, entonces L será $\beta\left(E_j', E_j\right)$–acotado.

Al ser B un subconjunto acotado de Λ, el subconjunto $P_{\{j\}}(B)$ de E_j formado con las correspondientes proyecciones de los elementos de B

$$P_{\{j\}}(B) = \{P_{\{j\}}(x) = x_j \in E_j : x = (x_i) \in B\}$$

es acotado. Por tanto, se puede asegurar que existe una constante $\rho > 0$ tal que

$$\sup\{|\langle x_j, u \circ \Psi_j\rangle| : u \in G, \quad x_j \in P_{\{j\}}(B)\} \leq \rho$$

de donde se sigue que

$$\sup\left\{\left|\langle P_{\{j\}}(x), u\rangle\right| : u \in G, \quad x \in B\right\} \leq \rho$$

es decir, que $f_{GB}(\{j\}) < +\infty$.

(iv) Por la relación (2.8) se verifica que $f_{GB}(I) = +\infty$.

(v) La haremos por reducción al absurdo y nos basaremos en la propiedad que tienen los toneles de absorber a los discos de Banach.

Como G es $\sigma(\Lambda', \Lambda)$–acotado, entonces su polar G° es un tonel en Λ; sin embargo, construiremos un disco de Banach a partir de algunos elementos del conjunto acotado B anteriormente considerado, tal que el tonel G° no lo absoberá.

Si existiese una sucesión decreciente $(J_n)_n$ de subconjuntos de I, tales que $f_{GB}(J_n) = +\infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y, sin embargo, $f_{GB}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n\right) < +\infty$, entonces los conjuntos $J_n' = J_n \setminus \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n\right)$ formarían una sucesión decreciente con intersección vacía y $f_{GB}(J_n') = +\infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, si suponemos que es $f_{GB}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n\right) < +\infty$, podemos considerar que la sucesión original tiene intersección vacía.

Ahora bien, como para cada $k \in \mathbb{N}$ es

$$f_{GB}(J_k) = \sup\{|\langle x, u\rangle| : u \in G, \quad x \in B, \quad \operatorname{sop}(x) \subset J_k\} = +\infty,$$

podremos encontrar un $z^{(k)} = (z_i^{(k)})_{i\in I} \in B$ con $\mathrm{sop}(z^{(k)}) \subset J_k$ y un $u^{(k)} \in G$, tales que

$$\left|\langle z^{(k)}, u^{(k)}\rangle\right| > k. \tag{2.9}$$

La sucesión $(z^{(k)})_k$ así obtenida está acotada por estar contenida en el conjunto acotado B. Además, como la sucesión $(J_k)_k$ es decreciente y con $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_k = \emptyset$, se verifica que dado un $i \in I$ fijo, ó bien $i \notin J_1$, ó bien existe un único $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $i \in J_{n_i}$, pero $i \notin J_k$ para todo $k > n_i$, de forma que en ambos casos

$$P_{\{i\}}(z^{(k)}) = 0 \quad \forall\ k > n_i. \tag{2.10}$$

Consideremos el conjunto

$$D = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^{(k)} : \alpha = (\alpha_k) \in B_1\left(\ell^1\right) \right\}.$$

Por la condición $(*)$ y el lema 2.6.2, se verifica que D es un disco de Banach.

Como G° es un tonel en Λ entonces debe existir un número $\rho > 0$ tal que $D \subset \rho G^\circ$. En concreto, para cada $k \in \mathbb{N}$ tendría que ser $z^{(k)} \in \rho G^\circ$, pero tal como elegimos los elementos $z^{(k)}$ (ver la relación (2.9)) es claro que $z^{(k)} \notin kG^\circ$ para cada $k \in \mathbb{N}$, con lo que se llega a una contradicción.

2. Definición de una medida en I finitamente aditiva.

Basándonos en esta función f_{GB} de conjunto en $\mathcal{P}(I)$ vamos a definir un ultrafiltro en $\mathcal{P}(I)$ y al considerar la medida correspondiente en I, llegaremos a una contradicción con la hipótesis de que $\mathrm{card}(I)$ no es 2–medible.

A partir de la función f_{GB} definimos

$$\mathcal{F} = \{J \subset I : f_{GB}(J^c) < +\infty\}$$

donde J^c representa el conjunto complementario de J en I. Se verifica que $\mathcal{F}$ es un filtro, pues:

- Es una familia no vacía de subconjuntos de I, ya que para cada $i \in I$ es $f_{GB}(\{i\}) < +\infty$ luego $\{i\}^c \in \mathcal{F}$.

- Si $J \in \mathcal{F}$ y K es un subconjunto de I tal que $J \subset K$, entonces $K^c \subset J^c$ y como f_{GB} es no decreciente, $f_{GB}(K^c) \leq f_{GB}(J^c) < +\infty$ y, por consiguiente, $K \in \mathcal{F}$.

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$ ya que $f_{GB}(I) = +\infty$

- Si $J_1, J_2 \in \mathcal{F}$ entonces se verifica que (a) $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$ y (b) $J_1 \cap J_2 \in \mathcal{F}$, pues: si fuese $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ entonces $J_1 \subset J_2^c$, es decir, que sería

$$f_{GB}(J_1) \leq f_{GB}(J_2^c) < +\infty$$

y llegaríamos a la contradicción de ser

$$f_{GB}(I) = f_{GB}(J_1 \cup J_1^c) \leq f_{GB}(J_1) + f_{GB}(J_1^c) < +\infty$$

Y $J_1 \cap J_2 \in \mathcal{F}$ ya que

$$\begin{aligned} f_{GB}\left((J_1 \cap J_2)^c\right) &= f_{GB}(J_1^c \cup J_2^c) \leq f_{GB}(J_1^c \setminus J_2^c) + f_{GB}(J_2^c \setminus J_1^c) \\ &+ f_{GB}(J_1^c \cap J_2^c) \leq f_{GB}(J_1^c) + f_{GB}(J_2^c) + f_{GB}(J_1^c) < +\infty \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{U}$ el ultrafiltro generado por $\mathcal{F}$. A partir de $\mathcal{U}$ definimos la siguiente aplicación μ en $\mathcal{P}(I)$ con valores en $\{0,1\}$: si $J \subset I$

$$\mu(J) = \begin{cases} 1 & \text{si } J \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{si } J \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

que es una medida finitamente aditiva, ya que

- la aplicación μ está bien definida porque dado cualquier $J \subset I$, o bien es $J \in \mathcal{U}$, en cuyo caso $\mu(J) = 1$, ó bien $J^c \in \mathcal{U}$ y $\mu(J) = 0$.

- $\mu(\emptyset) = 0$ ya que $\emptyset \notin \mathcal{U}$

- $\mu(I) = 1$ por ser $I \in \mathcal{U}$, ya que $I \in \mathcal{F}$ al ser $f_{GB}(I^c) = f_{GB}(\emptyset) = 0$.

- $\mu(\{i\}) = 0$ por ser $\{i\} \notin \mathcal{U}$ para cada $i \in I$, ya que $f_{GB}(\{i\}) < +\infty$, es decir, $\{i\}^c \in \mathcal{F}$ y, por tanto, $\{i\}^c \in \mathcal{U}$.

- Si J_1 y J_2 son dos subconjuntos disjuntos de I, entonces $J_1 \cup J_2 \in \mathcal{U}$ si, y sólo si, exactamente uno de los subconjuntos J_1, J_2 pertenecen a $\mathcal{U}$, en cuyo caso, si $J_1 \in \mathcal{U}$ y $J_2 \notin \mathcal{U}$,

$$\mu(J_1 \cup J_2) = 1 = 1 + 0 = \mu(J_1) + \mu(J_2).$$

Si $J_1 \cup J_2 \notin \mathcal{U}$, entonces $J_1 \notin \mathcal{U}$ y $J_2 \notin \mathcal{U}$ (los dos subconjuntos no pueden pertenecer a $\mathcal{U}$ porque son disjuntos), en cuyo caso

$$\mu(J_1 \cup J_2) = 0 = 0 + 0 = \mu(J_1) + \mu(J_2).$$

Ahora bien, como el conjunto I no es medible, entonces μ no es numerablemente aditiva, es decir, existe una sucesión $(J_k)_k$ de subconjuntos disjuntos de I de medida nula, $\mu(J_k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y tal que $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k\right) = 1$. A partir de ella formamos esta otra sucesión:

$$I_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k; \quad I_2 = \bigcup_{k=2}^{\infty} J_k; \quad I_3 = \bigcup_{k=3}^{\infty} J_k; \cdots ; I_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} J_k; \cdots$$

verificándose que

a) la sucesión $(I_n)_n$ es decreciente;

b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$;

c) para cada $n \in \mathbb{N}$ es $\mu(I_n) = 1$ pues μ es finitamente aditiva y se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k\right) = \mu\left(J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_{n-1} \bigcup_{k=n}^{\infty} J_k\right) \\ &= \mu(J_1) + \mu(J_2) + \cdots + \mu(J_{n-1}) + \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} J_k\right) \\ &= 0 + 0 + \cdots + 0 + \mu(I_n) = \mu(I_n) \end{aligned}$$

De aquí se sigue que $f_{GB}(I_n) = +\infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$, pues si fuese finito entonces $I_n^c \in \mathcal{F}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y se tendría que $I_n^c \in \mathcal{U}$, es decir, que para cada n de $\mathbb{N}$ sería $I_n \notin \mathcal{U}$ y, por tanto, $\mu(I_n) = 0$ pa todo $n \in \mathbb{N}$ en contra de lo anterior.

Obtenemos, pues, una sucesión decreciente $(I_n)_n$ de subconjuntos de I, tales que $f_{GB}(I_n) = +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, sin embargo, $f_{GB}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) = f_{GB}(\emptyset) = 0$ en contra de la propiedad (v) de f_{GB} demostrada anteriormente.

Por tanto, el espacio $(\Lambda, \mathcal{T})$ es de Banach–Mackey. ∎

Observación

La técnica empleada en la demostración de la primera parte del teorema anterior ha sido utilizada en numerosas ocasiones, por lo que la idea primitiva ha resultado fructífera. Díaz, Florencio y Paúl la utilizan en [8, §3] para establecer la tonelación del espacio normado $L^\infty(\mu, E)$, y remiten a Bierstedt y Bonet en [1, §1.8. Cor.] donde estos autores caracterizan la tonelación y ultrabornología del espacio de sucesiones $\ell_\infty(E)$. Aquí se indica que la técnica empleada es la que Defant y Govaerts usan en [6, 1.2] para demostrar la ultrabornología de un espacio $C(X, F)$. Posteriormente Bierstedt, Bonet y Schmets generalizan esta técnica en [2, 10. Lema] para obtener un resultado parcial en el estudio de la tonelación de los espacios $CB(X, E)$. Y también ha sido utilizada en otras ocasiones como, por ejemplo, en [9], [11] [10] y [14] para demostrar, como en el caso que nos ocupa, que determinados espacios son de Banach–Mackey.

Como un caso particular del teorema 2.6.3, si el espacio Λ es un espacio λ–suma de una familia de espacios normados $(E_i)_{i\in I}$ verificándose las condiciones que a continuación detallamos, obtenemos que $\lambda\{(E_i)\}$ es un espacio de Banach–Mackey.

2.6.4 Corolario. *Si I es un conjunto de índices con card(I) no medible; λ es un espacio normal de familias escalares dotado de una τ-topología respecto de la cual es localmente completo; y $(E_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios normados tonelados; entonces $\lambda\{(E_i)\}$ con la τ-topología correspondiente es un espacio de Banach-Mackey.*

DEMOSTRACIÓN:

Basta aplicar el teorema 2.6.3 a este caso en que $\Lambda = \lambda\{(E_i)\}$; la topología $\mathcal{T} = \tau$ está definida por una familia de seminormas S (ver sección 2.2) que es inmediato comprobar que verifica las condiciones (1) a (4) exigidas a la familia de seminormas R. Comprobemos que la condición $(*)$ se cumple. Sea $(J_n)_n$ una sucesión decreciente de subconjuntos de I tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n = \emptyset$, sea $(z^{(n)})_n = ((z_i^{(n)})_i)_n$ una sucesión acotada en $\lambda\{(E_i)\}$ tal que $\operatorname{sop}(z^{(n)}) \subset J_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y $(\alpha_n)_n \in \ell^1$. Veamos que entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^{(n)}$ converge en $\lambda\{(E_i)\}$. En efecto:

- dado un $i \in I$ fijo, o bien $i \notin J_1$, ó bien existe un único $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $i \in J_{n_i}$, pero $i \notin J_k$ para todo $k > n_i$, de forma que en ambos casos

$$P_{\{i\}}\left(z^{(k)}\right) = 0 \quad \forall\ k > n_i \tag{2.11}$$

- si $\widehat{E}_i$ es la completación de E_i, para cada $i \in I$, como λ es localmente completo entonces $\lambda\{(\widehat{E}_i)\}$ es localmente completo por el teorema 2.3.1 (iii).

  Ahora bien, esto equivale a decir que cada subconjunto acotado de $\lambda\{(\widehat{E}_i)\}$ está contenido en un disco de Banach ([38, Prop. 5.1.6 pág. 152]). Como $(z^{(n)})_n$ es también una sucesión acotada en $\lambda\{(\widehat{E}_i)\}$ se verifica que si $(\alpha_n)_n$ es de ℓ^1, entonces la sucesión de sumas parciales $(S_n)_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z^{(k)}\right)_n$ es un subconjunto acotado de $\lambda\{(E_i)\}$ ya que

$$\sigma_q(S_n) \;=\; \sigma_q\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z^{(k)}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \sigma_q\left(\alpha_k z^{(k)}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \, \sigma_q(z^{(k)}) \leq \rho$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, está acotada en $\lambda\{(\widehat{E}_i)\}$. De donde se sigue que la sucesión de sumas parciales está contenida en un disco de Banach. Como es una sucesión de Cauchy, como es inmediato comprobar, se sigue que cada serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^{(n)}$ converge a un elemento de $\lambda\{(\widehat{E}_i)\}$ que representaremos por $z = (z_i)_{i\in I}$. No obstante, cada z_i pertenece al E_i correspondiente, pues fijado un $i \in I$,

$$\begin{aligned} z_i &= P_{\{i\}}(z) = P_{\{i\}}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^{(k)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k P_{\{i\}}(z^{(k)}) \\ &= \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_k P_{\{i\}}(z^{(k)}) \in E_i \end{aligned}$$

por la ecuación (2.11) y llegar en el último miembro a tener una combinación lineal finita de elementos de E_i.

■

Del teorema 2.6.3 y del corolario 2.6.4 se sigue fácilmente una de las generalizaciones anunciadas: la tonelación de $\lambda\{(E_i)\}$ cuando el card(I) no es medible.

2.6.5 Corolario. *Sea I un conjunto de índices con card(I) no medible; sea λ un espacio normal de familias escalares dotado de una τ-topología respecto de la cual es localmente completo y tonelado; y sea $\lambda\{(E_i)\}$ el espacio λ-suma de la familia de espacios normados $(E_i)_{i\in I}$ dotado de la τ-topología correspondiente. Se verifica que el espacio de familias vectoriales $\lambda\{(E_i)\}$ es tonelado si, y sólo si, todos los E_i son tonelados.*

DEMOSTRACIÓN:

Si λ es tonelado, entonces $\lambda\{(E_i)\}$ es casi tonelado por el teorema 2.5.1. Además, si todos los espacios normados E_i son tonelados, entonces $\lambda\{(E_i)\}$ es un espacio de Banach-Mackey por el corolario 2.6.4. Es decir, $\lambda\{(E_i)\}$ es tonelado.

Recíprocamente, si $\lambda\{(E_i)\}$ es tonelado entonces cada E_i también lo es por ser isomorfo a un cociente de $\lambda\{(E_i)\}$. ∎

Observaciones

1. Drewnowski, Florencio y Paúl demuestran en [14] la tonelación del espacio $\ell_\infty(S, E)$, siendo E un espacio normado y S un conjunto no medible. Es la primera vez que al estudiar la tonelación de un espacio de familias con valores en un espacio normado se supone que el cardinal del conjunto de índices es no medible.

2. Del corolario 2.6.5 se deducen como casos particulares importantes, la tonelación de los espacios $\ell^p_I\{(E_i)\}$ con $1 \leq p \leq \infty$, siendo I un conjunto no medible.

3. Si en [9, §2 Cor. 1 del Teor. 1] tomamos como caso particular $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, μ es la medida cardinal, las proyecciones son las definidas en 2.1.3 y $E = \lambda\{(E_n)_n\}$, entonces el corolario citado demuestra que si λ es tonelado y localmente completo, y los espacios normados E_n son tonelados, entonces $\lambda\{(E_n)_n\}$ es tonelado. Sin embargo, si en lugar del conjunto de índices $\mathbb{N}$ consideramos otro conjunto I, siendo card(I) no medible, no es aplicable el razonamiento anterior porque la medida cardinal ahora no sería σ–finita como se pide en dicho artículo.

A continuación vamos a obtener la generalización en el otro sentido que indicábamos al comienzo de esta sección. Es decir, el conjunto de índices será cualquiera, mientras que supondremos que todos los espacios E_i son iguales a un espacio E al que le vamos la imponer la condición de tener cardinal no medible. Entonces supondremos que card(I) es medible (si existe alguno), porque en caso contrario bastaría aplicar el corolario 2.6.5.

2.6.6 Corolario. *Si I es un conjunto de índices cualquiera; todos los espacios normados tonelados E_i son iguales a un espacio normado tonelado E, tal que card(E) no es medible; λ es un espacio normal de familias de escalares dotado de una τ–topología respecto de la cual es localmente completo y tonelado; y consideramos en $\lambda\{(E)\}$ la τ–topología correspondiente; entonces $\lambda\{(E)\}$ es tonelado.*

DEMOSTRACIÓN:

Si λ es tonelado entonces $\lambda\{(E)\}$ es casi tonelado por el teorema 2.5.1. Para demostrar que $\lambda\{(E)\}$ es un espacio de Banach–Mackey demostraremos que si $H \subset \lambda\{(E)\}'$ es $\sigma(\lambda\{(E)\}', \lambda\{(E)\})$-acotado, entonces para toda sucesión acotada $\left(x^{(n)}\right)_n = \left(\left(x_i^{(n)}\right)_i\right)_n$ contenida en $\lambda\{(E)\}$ es

$$\sup\left\{\left|\langle h, x^{(n)}\rangle\right| : h \in H,\, n \in \mathbb{N}\right\} < +\infty.$$

Definimos la aplicación

$$\varphi : i \in I \longrightarrow \varphi(i) := \left(x_i^{(n)}\right)_n \in \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n \qquad \text{con } E_n = E \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

A la imagen de φ la representaremos por J

$$J = \varphi(I) = \left\{\varphi(i) = \left(x_i^{(n)}\right)_n : i \in I\right\} \subset \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$$

y se verifica que card(J) no es medible [18, Teor. 12.5 pág. 164].

Considerando a J como conjunto de índices, la apliacación φ hace corresponder a cada $i \in I$ un $t \in J$:

$$\varphi : i \in I \longrightarrow \varphi(i) = t \in J$$

con lo cual $\{\varphi^{-1}(t) : t \in J\}$ constituye una partición del conjunto de índices I. Para cada $t \in J$ es $\varphi^{-1}(t) \neq \emptyset$ pues de acuerdo con la definición dada de φ, al menos, existe un $i \in \varphi^{-1}(t)$.

Aplicando el axioma de elección le podemos hacer corresponder a cada $t \in J$ un único índice $i_t \in \varphi^{-1}(t) \subset I$. Representaremos por I' al subconjunto de I formado por los índices $i_t \in \varphi^{-1}(t) \subset I$ cuando t recorre J.

Consideremos los espacios de familias vectoriales $\omega_{I'}\{(E)\}$ y $\omega_I\{(E)\}$. Definimos entre ellos la siguiente aplicación:

$$\varrho : (y_{i_t})_{i_t\in I'} \in \omega_{I'}\{(E)\} \longrightarrow \varrho\left((y_{i_t})_{i_t\in I'}\right) := (x_s)_{s\in I} \in \omega_I\{(E)\}$$

donde $x_s = y_{i_t}$ para todo $s \in \varphi^{-1}(t)$.

Sea

$$Y = \left\{y = (y_{i_t})_{i_t\in I'} \in \omega_{I'}\{(E)\} : \varrho(y) \in \lambda\{(E)\}\right\}$$

y representaremos también por ϱ a la restricción de la aplicación anterior al conjunto Y; ahora ϱ será una aplicación lineal inyectiva de Y sobre $\varrho(Y)$ contenido en $\lambda\{(E)\}$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $y^{(n)} \in Y$ tal que $\varrho(y^{(n)}) = x^{(n)}$.

Para dotar de una topología a Y consideramos la familia de seminormas S que define la τ–topología localmente convexa separada en $\lambda\{(E)\}$. Para cada seminorma $\sigma_q \in S$ definimos

$$\widetilde{\sigma} : y \in Y \longrightarrow \widetilde{\sigma}(y) := \sigma_q(\varrho(y))$$

y es inmediato comprobar que cada $\widetilde{\sigma}$ es una seminorma sobre Y. Representaremos por S' al conjunto formado por todas estas seminormas. Consideraremos en Y la topología localmente convexa $\mathcal{I}'$ definida por la familia de seminormas S'. Al ser separada la τ–topología sobre $\lambda\{(E)\}$, es claro que $\mathcal{I}'$ sobre Y también lo es.

Considerando estas topologías se sigue que la aplicación ϱ, además es bicontinua. Por último, podemos aplicar el teorema 2.6.3 a este caso en que tenemos: el conjunto de índices es I', cuyo cardinal no es medible; $\Lambda = Y$; la familia de seminormas $R = S'$ verifica:

(1) si $x, y \in Y$ y $\|x\| \leq \|y\|$ entonces $\widetilde{\sigma}(x) \leq \widetilde{\sigma}(y)$ para toda $\widetilde{\sigma} \in S'$;

(2) la topología $\mathcal{I}'$ es separada;

(3) para cada $i_t \in I'$ la correspondencia

$$\widehat{\psi}_{i_t} : y = (y_{i_t}) \in Y \longrightarrow \widehat{\psi}_{i_t}(y) := y_{i_t} \in E$$

es una aplicación lineal y continua por ser igual a la composición de dos aplicaciones de este tipo:

$$\widehat{\psi}_{i_t} : Y \xrightarrow{\varrho} \lambda\{(E)\} \xrightarrow{\psi_{i_t}} E$$

(ver proposición 2.2.2 (i));

(4) para cada $i_t \in I'$ la correspondencia

$$\widehat{\Psi}_{i_t} : y_{i_t} \in E \longrightarrow \widehat{\Psi}_{i_t}(y_{i_t}) := y_{i_t} e^{(i_t)} \in Y$$

es una aplicación lineal y continua por ser igual a la composición de dos aplicaciones de este tipo:

$$\widehat{\Psi}_{i_t} : E \xrightarrow{\Psi_{i_t}} \lambda\{(E)\} \xrightarrow{\varrho} Y$$

(ver proposición 2.2.2 (ii)).

Y se verifica la condición $(*)$: sea $(J'_n)_n$ una sucesión decreciente de subconjuntos de I' con $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J'_n = \emptyset$, sea $(z^{(n)})_n = \left(\left(z^{(n)}_{i_t}\right)_{i_t\in I'}\right)_n$ una sucesión acotada en Y tal que $\mathrm{sop}(z^{(n)}) \subset J'_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y sea $(\alpha_n)_n$ una sucesión de ℓ^1, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^{(n)}$ converge en Y, pues como $I' \subset I$ se tiene que $(J'_n)_n$ es también una sucesión decreciente de subconjuntos de I con intersección vacía $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J'_n = \emptyset$; teniendo en cuenta como hemos definido la topología en Y podemos asegurar que $(\varrho(z^{(n)}))_n$ es también una sucesión acotada en $\lambda\{(E)\}$. Recuérdese cómo está definida la aplicación ϱ, de forma que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\varrho(z^{(n)}) = \varrho\left(\left(z^{(n)}_{i_t}\right)_{i_t\in I'}\right) = \left(x^{(n)}_s\right)_{s\in I} \in \lambda\{(E)\}$$

siendo $x_s^{(n)} = z_{i_t}^{(n)}$ para todo $s \in \varphi^{-1}(t)$.

Si $\widehat{E}$ es la completación de E, como λ es localmente completo, entonces $\lambda\{(\widehat{E})\}$ es localmente completo por el teorema 2.3.1 (iii). Esto equivale a decir que cada subconjunto acotado de $\lambda\{(\widehat{E})\}$ está contenido en un disco de Banach [38, Prop. 5.1.6 pág. 152]. Como $(\varrho(z^{(n)}))_n$ es también una sucesión acotada en $\lambda\{(\widehat{E})\}$, se verifica que si $(\alpha_n)_n \in \ell^1$ entonces la sucesión de sumas parciales $(S_n)_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varrho\left(z^{(k)}\right)\right)_n$ es un subconjunto acotado de $\lambda\{(E)\}$ y, por tanto, de $\lambda\{(\widehat{E})\}$.

Se sigue que dicho conjunto de sumas parciales está contenido en un disco de Banach y, como es una sucesión de Cauchy como es inmediato comprobar, podemos asegurar que cada serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varrho(z^{(n)})$ converge a un elemento de $\lambda\{(\widehat{E})\}$ que representaremos por $x = (x_s)_{s\in I}$. En esta familia se verificará que, fijado un índice $t \in J$, para cada $s \in \varphi^{-1}(t)$ todas las coordenadas x_s serán iguales. Fijemos un $t \in J$ y el $i_t \in I'$ correspondiente. Como $(J'_n)_n$ es una sucesión decreciente de subconjuntos de I' con $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J'_n = \emptyset$, o bien $i_t \notin J'_1$, ó bien existe un único $n_{i_t} \in \mathbb{N}$ tal que $i_t \in J'_{n_{i_t}}$, pero $i_t \notin J'_k$ para todo $k > n_{i_t}$, forma que en ambos casos

$$P_{\{i_t\}}\left(z^{(k)}\right) = 0 \quad \forall\ k > n_{i_t}. \tag{2.12}$$

Se sigue que fijado un $t \in J$, para i_t en $\varphi^{-1}(t)$ también es $P_{\{i_t\}}\left(\varrho\left(z^{(k)}\right)\right) = 0$ para todo $k > n_{i_t}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} x_{i_t} &= P_{\{i_t\}}(x) = P_{\{i_t\}}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varrho\left(z^{(k)}\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k P_{\{i_t\}}\left(\varrho\left(z^{(k)}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n_{i_t}} \alpha_k P_{\{i_t\}}\left(\varrho\left(z^{(k)}\right)\right) \in E \end{aligned}$$

por la ecuación (2.12) y llegar en el último miembro a tener una combinación lineal finita de elementos de E.

Por consiguiente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^{(n)}$ converge en Y al elemento $z = \varrho^{-1}(x)$.

Aplicando el teorema 2.6.3 se deduce que Y es un espacio de Banach–Mackey. Si $H \subset \lambda\{(E)\}'$ es $\sigma(\lambda\{(E)\}', \lambda\{(E)\})$-acotado, entonces

$$H' = \{u \circ \varrho : u \in H\}$$

es un subconjunto de Y' que es $\sigma(Y', Y)$-acotado por ser H acotado en la topología $\sigma(\lambda\{(E)\}', \lambda\{(E)\})$; de donde se sigue que H' es $\beta(Y', Y)$-acotado.

Como $(y^{(n)})_n \subset Y$ es una sucesión acotada entonces existe una constante $\rho > 0$ tal que

$$\sup\left\{\left|\langle y^{(n)}, u \circ \varrho\rangle\right| : u \in H,\, n \in \mathbb{N}\right\} \leq \rho$$

pero

$$\left|\langle y^{(n)}, u \circ \varrho\rangle\right| = \left|\langle \varrho(y^{(n)}), u\rangle\right| = \left|\langle x^{(n)}, u\rangle\right|$$

de donde

$$\sup\left\{\left|\langle x^{(n)}, u\rangle\right| : u \in H,\, n \in \mathbb{N}\right\} \leq \rho$$

es decir, H es $\beta(\lambda\{(E)\}', \lambda\{(E)\})$-acotado y, por consiguiente, $\lambda\{(E)\}$ es tonelado. ■

Por último, daremos dos resultados relativos a la tonelación de ciertos subespacios de $\lambda\{(E)\}$: el de las familias cuya imagen o cuyo soporte tienen un cardinal no medible.

2.6.7 Corolario. *Sea I un conjunto de índices cualquiera; λ un espacio normal de familias escalares dotado de una τ-topología respecto de la cual es localmente completo; E un espacio normado tonelado ; $\lambda\{(E)\}$ el espacio λ-suma con la τ-topología correspondiente; y sea m un cardinal infinito no medible. Si los subespacios de $\lambda\{(E)\}$:*

$$X_1 = \left\{x = (x_i) \in \lambda\{(E)\} : card(\{x_i : i \in I\}) \leq m^{\aleph_0}\right\}$$

y

$$X_2 = \{x = (x_i) \in \lambda\{(E)\} : card(\{x_i : i \in I\}) \text{ no es medible } \}$$

son casi tonelados, entonces son tonelados.

DEMOSTRACIÓN:

Todo lo que sigue en la demostración es válido tanto para X_1 como para X_2, y para evitar repetir los valores de $v = 1, 2$, nos referiremos a ambos subespacios por X_v.

La demostración es análoga a la del corolario anterior. Sea $H \subset X_v'$ un subconjunto $\sigma(X_v', X_v)$–acotado y sea $(x^{(n)})_n = \left(\left(x_i^{(n)}\right)_i\right)_n$ una sucesión acotada contenida en X_v.

Definimos la aplicación

$$\varphi : i \in I \longrightarrow \varphi(i) := (x_i^{(n)})_n \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \{x_i^{(n)} : i \in I\}.$$

A la imagen de φ la representaremos por J :

$$J = \varphi(I) = \{\varphi(i) : i \in I\} \subset \prod_{n\in\mathbb{N}} \{x_i^{(n)} : i \in I\}$$

y se verifica que card(J) no es medible en virtud de [18, 12.5 Teor. pág. 164].

A cada $t \in J$ le podemos hacer corresponder un índice $i_t \in \varphi^{-1}(t) \subset I$. Sea $I' \subset I$ formado por todos los índices i_t cuando t recorre J.

Definimos la siguiente aplicación:

$$\varrho : (y_{i_t})_{i_t\in I'} \in \omega_{I'}\{(E)\} \longrightarrow \varrho\left((y_{i_t})_{i_t\in I'}\right) := (x_s)_{s\in I} \in \omega_I\{(E)\}$$

donde $x_s = y_{i_t}$ para todo $s \in \varphi^{-1}(t)$.

Sea $Y = \left\{y = (y_{i_t})_{i_t\in I'} \in \omega_{I'}\{(E)\} : \varrho(y) \in X_v \subset \lambda\{(E)\}\right\}$ y representaremos también por ϱ a la restricción de la aplicación anterior al conjunto Y; ahora ϱ será una aplicación lineal inyectiva de Y sobre $\varrho(Y)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $y^{(n)} \in Y$ tal que $\varrho(y^{(n)}) = x^{(n)}$.

Definiendo una topología en Y como en la demostración del corolario 2.6.6, se llega a que la aplicación ϱ es bicontinua.

Podemos aplicar el teorema 2.6.3 a este caso tomando $\Lambda = Y$; el conjunto de índices es I' cuyo cardinal es no medible; la familia de seminormas $R = S'$ definida de manera análoga a allí indicada y que verifica las condiciones (1) a (4) por las mismas razones expuestas en la demostración de dicho corolario 2.6.6; y se cumple también la condición $(*)$. Se sigue que Y es un espacio de Banach–Mackey.

Si $H \subset X'_v$ es $\sigma(X'_v, X_v)$-acotado, entonces $H' = \{u \circ \varrho : u \in H\}$ es un subconjunto de Y' que es $\sigma(Y', Y)$-acotado por ser H acotado en la topología $\sigma(X'_v, X_v)$. Se sigue que H' es $\beta(Y', Y)$-acotado.

Como $(y^{(n)})_n \subset Y$ es una sucesión acotada entonces existe una constante $\rho > 0$ tal que

$$\sup\left\{\left|\langle y^{(n)}, u \circ \varrho\rangle\right| : u \in H,\, n \in \mathbb{N}\right\} \leq \rho$$

pero

$$\left|\langle y^{(n)}, u \circ \varrho\rangle\right| = \left|\langle \varrho(y^{(n)}), u\rangle\right| = \left|\langle x^{(n)}, u\rangle\right|$$

de donde

$$\sup\left\{\left|\langle x^{(n)}, u\rangle\right| : u \in H,\, n \in \mathbb{N}\right\} \leq \rho$$

es decir, H es $\beta(X'_v, X_v)$-acotado y, por consiguiente, X_v es tonelado. ∎

Observación

Entre las hipótesis del corolario anterior figura que X_v sea casi tonelado. Téngase en cuenta que si λ y E son espacios normados, entonces $\lambda\{(E_i)\}$ también lo es. Los subespacios X_v también serían normados y, por consiguiente, casi-tonelados. Este es el caso, por ejemplo, de $\ell^\infty_I\{(E)\}$ con E normado. En [14, §3] se estudia la tonelación de algunos subespacios de $\ell^\infty_I\{(E)\}$.

2.6.8 Corolario. *Si I es un conjunto de índices cualquiera; m es un número cardinal infinito no medible, tal que $m \leq card(I)$; λ es un espacio normal de familias escalares dotado de una τ-topología respecto de la cual es tonelado y localmente completo; y $(E_i)_{i\in I}$ una familia de espacios normados tonelados, entonces se verifica que*

$$X_1 = \{x \in \lambda\{(E_i)\} : card(sop(x)) \leq m\}$$

y

$$X_2 = \{x \in \lambda\{(E_i)\} : card(sop(x)) < m\}$$

son subespacios tonelados de $\lambda\{(E_i)\}$.

DEMOSTRACIÓN:

Como en las Proposiciones 1.3.9 y 1.5.2 representaremos por

$$\kappa_1 = \{\alpha \in \lambda : \text{card}(\text{sop}(\alpha)) \leq m\}$$

y por

$$\kappa_2 = \{\alpha \in \lambda : \text{card}(\text{sop}(\alpha)) < m\}$$

a los correspondientes subespacios de λ, y abreviadamente por κ_v, $v = 1,2$. Con lo que podemos escribir que $X_v = \kappa_v\{(E_i)\}$ $v = 1,2$.

Si λ es casi-tonelado, entonces κ_v es casi-tonelado por la proposición 1.5.2. Si λ es localmente completo, entonces κ_v también lo es por la proposición 1.3.9. Por el corolario 2.6.5 se sigue que X_v es tonelado, para $v \doteq 1,2$. ∎

De este corolario se sigue que si E es un espacio normado tonelado, los subespacios de $\ell_I^\infty\{(E)\}$ formados por familias de soporte numerable, son tonelados.

Observación

En esta sección tratábamos de dar respuesta a la siguiente pregunta: Si λ es un espacio de familias escalares dotado de una τ–topología y $\lambda\{(E_i)\}$ es el espacio λ–suma de la familia de espacios normados $(E_i)_{i\in I}$ dotado de la τ–topología correspondiente, ¿se verifica que

λ *y* E_i *tonelados* $\Rightarrow$ $\lambda\{(E_i)\}$ *tonelado?*

Como hemos indicado anteriormente, el espacio λ debe ser normal para garantizar que $\lambda\{(E_i)\}$ sea un espacio lineal. La pregunta queda formulada entonces de esta manera: ¿se verifica que

λ *normal y tonelado y* E_i *tonelados* $\Rightarrow$ $\lambda\{(E_i)\}$ *tonelado?.*

Una primera respuesta la dimos en el teorema 2.5.6 en el que demostramos:

λ *normal, AK, y tonelado y* E_i *tonelados* $\Rightarrow$ $\lambda\{(E_i)\}$ *tonelado.*

Intentamos suprimir la condición de que λ tuviese la propiedad AK, pero fué necesario exigir la completitud local de λ; así en el corolario 2.6.5 demostramos, que si el conjunto de índices tenía cardinal no medible y:

λ *normal, localmente completo, y tonelado y* E_i *tonelados* $\Rightarrow$ $\lambda\{(E_i)\}$ *es tonelado.*

Para esclarecer en lo posible la conjetura buscamos algún ejemplo en el que no se verificase alguna (o algunas) de las hipótesis indicadas. A continuación describimos el

ESPACIO DE SUCESIONES CON SOPORTE DE DENSIDAD CERO:

En este caso consideraremos que el conjunto de índices $I = \mathbb{N}$. Para cada $M \subset \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$ se define

$$d_n(M) = \frac{1}{n}\operatorname{card}(M \cap \{1,2,\ldots,n\}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\chi_M(i)$$

Si $\lim_n d_n(M) = 0$ se dice que el conjunto M es de *densidad cero.* A la familia de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ de densidad cero se representa por $\mathcal{Z}$.

Si λ es un espacio normal de sucesiones, $\mathcal{Z}(\lambda)$ representa al subespacio formado por todas las sucesiones de λ que tienen su soporte en $\mathcal{Z}$. (Ver [11, Remark 1]).

Considerando el caso en que $\lambda = \ell^\infty$, se verifica que el espacio $\mathcal{Z}(\ell^\infty)$ es un subespacio tonelado de ℓ^∞ [11, Cor. 7 y Prop. 6]. No obstante, este espacio

$\mathcal{Z}(\ell^\infty)$ no posee la propiedad AK, ni es localmente completo.

Por otra parte, si E es un espacio normado y tonelado entonces el espacio $\ell^\infty\{(E)\}$ es tonelado [29].

En resumen, si consideramos:

- $\lambda = \mathcal{Z}(\ell^\infty)$ que es un espacio tonelado, pero no posee la propiedad AK, ni es localmente completo;

- $E =$ a un espacio normado y tonelado,

como $\mathcal{Z}\left(\ell^\infty\{(E)\}\right)$ es tonelado (ver [11]), entonces el espacio $\mathcal{Z}\left(\ell^\infty\{(E)\}\right) = \mathcal{Z}\left(\ell^\infty\right)\{(E)\}$ es tonelado.

En este caso se verifica que λ es normal y tonelado, el espacio normado E es tonelado, y $\lambda\{(E)\}$ es tonelado. Es un ejemplo que nos podría inclinar a pensar que puede ser cierta la conjetura: si λ es un espacio normal de familias y tonelado y todos los espacios normados E_i son tonelados, entonces el espacio $\lambda\{(E_i)\}$ es tonelado. No obstante, es este un problema que queda abierto.

En cambio si parece conveniente señalar que con el teorema 2.5.6 y los corolarios del teorema 2.6.3 demostrados anteriormente, se abarca una amplia clase de espacios de familias, ya que la mayoría de los que usualmente se manejan verfican que son normales y poseen la propiedad AK, o bien son normales y localmente completos.

2.7 Bornología de $\lambda\{(E_i)_{i\in I}\}$.

Concluimos el segundo capítulo, y esta memoria, estudiando la bornología del espacio de familias vectoriales $\lambda\{(E_i)\}$. Comenzamos demostrando que si el espacio λ es bornológico, entonces $\lambda\{(E_i)\}$ también lo es. A continuación y haciendo un desarrollo paralelo al seguido en el estudio de la tonelación, vamos a demostrar que ciertos espacios de familias vectoriales Λ que son bornológicos, que verifican determinadas condiciones y que están contenidos en $\omega_I\{(E_i)\}$, sin que sean espacios λ–suma para algún λ, son espacios ultrabornológicos. Después estableceremos cuándo un espacio λ–suma de espacios normados es ultrabornológico.

Sin embargo, en el caso de la bornología no hay unas condiciones apropiadas que exigidas al espacio λ nos garanticen que dicho espacio sea bornológico. Por ejemplo, si $(\lambda, \beta(\lambda, \lambda^\times))$ posee la propiedad AK entonces es tonelado, mientras que existen espacios λ_r que no son bornológicos (ver [26]).

2.7.1 Teorema. *Si λ es un espacio normal de familias escalares dotado de una τ–topología respecto de la cual es bornológico, y $\lambda\{(E_i)\}$ es el espacio λ–suma de la familia de espacios normados $(E_i)_{i\in I}$, dotado de la τ–topología correspondiente, entonces $\lambda\{(E_i)\}$ es bornológico también.*

DEMOSTRACIÓN:

Si λ es bornológico entonces es casi tonelado y, por el teorema 2.5.1, se sigue que $\lambda\{(E_i)\}$ es casi tonelado también (y por consiguiente lleva su topología de Mackey). Teniendo en cuenta [24, §28.1(3) pág. 379] será suficiente demostrar que si f es un funcional lineal localmente acotado sobre $\lambda\{(E_i)\}$, entonces f es continuo.

Si

$$U = \{\alpha \in \lambda : |\langle \alpha v, f\rangle| \leq 1 \quad \forall\ v \in B_1(\ell_I^\infty\{(E_i)\})\}$$

se verifica:

- U es absolutamente convexo, porque si $\alpha, \beta \in U$ y $r, s \in \mathbb{K}$ tales que $|r|+|s| \leq 1$, entonces $r\alpha + s\beta \in U$ ya que

$$\begin{aligned} |\langle (r\alpha + s\beta)v, f\rangle| &= |\langle r\alpha v + s\beta v, f\rangle| = |r\langle \alpha v, f\rangle + s\langle \beta v, f\rangle| \\ &\leq |r|\,|\langle \alpha v, f\rangle| + |s|\,|\langle \beta v, f\rangle| \leq |r| + |s| \leq 1 \end{aligned}$$

para todo $v \in B_1(\ell_I^\infty\{(E_i)\})$.

- U es bornívoro pues si $N \subset \lambda$ es acotado entonces $M = N \cdot B_1(\ell_I^\infty\{(E_i)\})$ es un acotado en $\lambda\{(E_i)\}$ (ver proposición 2.2.3), y como f es localmente acotado entonces para todo $x = \alpha v \in M$ con $\alpha \in N$ y $v \in B_1(\ell_I^\infty\{(E_i)\})$ es

$$|\langle x, f\rangle| = |\langle \alpha v, f\rangle| \leq \rho.$$

Se sigue que $\dfrac{1}{\rho}|\langle \alpha v, f\rangle| = \left|\langle \dfrac{\alpha}{\rho} v, f\rangle\right| \leq 1$ para todo $v \in B_1(\ell_I^\infty\{(E_i)\})$, por tanto, $\frac{\alpha}{\rho} \in U$, o lo que es lo mismo, $\alpha \in \rho U$. Es decir, $N \subset \rho U$.

Como λ es bornológico, entonces U es un entorno del origen en $(\lambda, \mu(\lambda, \lambda^\times))$. Se sigue que existirá un elemento de la base de entornos que define a la topología $\mu(\lambda, \lambda^\times)$ contenido en U, o lo que es lo mismo, existirá una seminorma q sobre λ de las que definen la topología $\mu(\lambda, \lambda^\times)$, tal que si $q(\alpha) < 1$, entonces $\alpha \in U$, es decir, $|\langle \alpha v, f\rangle| \leq 1$ para todo $v \in B_1(\ell_I^\infty\{(E_i)\})$. Ahora bien, la seminorma q define una seminorma σ_q sobre $\lambda\{(E_i)\}$, y se tiene que si $\sigma_q(x) = q((\|x_i\|)) < 1$, entonces $|\langle (\|x_i\|)v, f\rangle| \leq 1$ para todo $v \in B_1(\ell_I^\infty\{(E_i)\})$.

Teniendo en cuenta [41, Lema 2 Cap. I pág. 13] se sigue que f es continua porque si $x = (x_i) \in \lambda\{(E_i)\}$ entonces $x = (\|x_i\| v_i)$ con $v_i = \dfrac{x_i}{\|x_i\|}$ si $\|x_i\| \neq 0$ y $v_i = 0$ si $\|x_i\| = 0$, es decir, $(\|x_i\|) \in \lambda$ y (v_i) pertenece a $B_1(\ell_I^\infty\{(E_i)\})$ con lo cual

$$|\langle x, f\rangle| = |\langle (\|x_i\| v_i), f\rangle| \leq \sigma_q(x).$$

■

Observación

Este resultado extiende al caso de las familias el resultado de Florencio, Paúl y Sáez en [17], y el de Díaz, Fernández, Florencio y Paúl en [10] sobre la bornología del espacio $\lambda\{E\}$, siendo E un espacio normado.

2.7.2 Teorema. *Sea I un conjunto de índices con card(I) no medible; sea $(E_i)_{i\in I}$ una familia de espacios normados ultrabornológicos; y sea $\Lambda \hookrightarrow \omega_I\{(E_i)_{i\in I}\}$ un espacio normal de familias vectoriales dotado de una topología localmente convexa $\mathcal{T}$, definida por una familia de seminormas R que verifica las condiciones (1) a (4) de la sección 2.6, respecto de la cual el espacio Λ es bornológico, y tal que verifica la siguiente condición:*

> (*) *Si $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos de I con $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n = \emptyset$, $(z^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en Λ tal que sop$(z^{(n)}) \subset J_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y $(\alpha_n)_n$ es una sucesión de ℓ^1, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n z^{(n)}$ converge en Λ.*

Entonces el espacio $(\Lambda, \mathcal{T})$ es ultrabornológico.

DEMOSTRACIÓN:

Recuérdese que si Λ es bornológico entonces cada subconjunto de Λ absolutamente convexo que absorbe los subconjuntos acotados en Λ, es un entorno del origen en Λ. Y es ultrabornológico si cada subconjunto absolutamente convexo que absorbe los discos de Banach de Λ, es un entorno del origen en dicho espacio. Si representamos por $\mathcal{U}$ a la familia de $\mathcal{T}$–entornos del origen en Λ; por $\mathcal{B}$ a la familia de subconjuntos absolutamente convexos que absorben a los $\mathcal{T}$–acotados de Λ; y por $\mathcal{D}$ a la familia de subconjuntos absolutamente convexos que absorben a los $\mathcal{T}$–discos de Banach, en general, se tendrá la relación:

$$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}. \tag{2.13}$$

Por tanto, es bornológico si $\mathcal{U} = \mathcal{B}$; y es ultrabornológico si $\mathcal{U} = \mathcal{B} = \mathcal{D}$.

Haremos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos entonces que Λ es bornológico, pero no es ultrabornológico. Según la relación (2.13) esto quiere decir que

$$\mathcal{U} = \mathcal{B} \neq \mathcal{D}$$

esto es, que existe un subconjunto T de Λ que es absolutamente convexo, que absorbe los discos de Banach de Λ y, sin embargo, existe un subconjunto acotado A de Λ tal que T no lo absorbe

Consideremos el conjunto $B = \bigcup_{J\in\mathcal{P}(I)} P_J(A)$; como A es acotado y el conjunto de proyecciones $\{P_J : J \subset I\}$ es equicontinuo por la proposición 2.2.4, entonces el conjunto B también es acotado. Además, T tampoco absorbe a B.

A partir de los subconjuntos T y B definimos:

$$\mathcal{F} = \{J \subset I : T \text{ absorbe a } P_{J^c}(B)\}$$

donde J^c representa el conjunto complementario de J en I.

Se verifica que $\mathcal{F}$ es un filtro, pues:

- $\mathcal{F}$ es una familia no vacía de subconjuntos de I. En efecto, para cada $i \in I$ la proyección $P_{\{i\}}(\Lambda)$ es isomorfa a E_i; $P_{\{i\}}(B)$ es isomorfo a un determinado subconjunto acotado C de E_i y, por tanto, C está contenido en una determinada bola cerrada H de E_i (que es un disco de Banach); la proyección $P_{\{i\}}(T)$ es isomorfa a un subconjunto T_i de E_i que absorberá a los discos de Banach de ese espacio. Se sigue que T_i absorbe a H y, por tanto, a C; es decir, $P_{\{i\}}(T)$ absorbe a $P_{\{i\}}(B)$ y, por consiguiente, T absorbe a $P_{\{i\}}(B)$. Por tanto, $\{i\}^c \in \mathcal{F}$.

- Como T absorbe a $P_\emptyset(B) = \{0\}$, entonces $I \in \mathcal{F}$, mientras que $\emptyset \notin \mathcal{F}$ ya que T no absorbe a $P_I(B) = B$ por hipótesis.

- Si $J \in \mathcal{F}$ y K es un subconjunto de I tal que $J \subset K$, entonces $K^c \subset J^c$ y como T absorbe a $P_{J^c}(B)$, entonces absorbe también a $P_{K^c}(B)$. De donde se sigue que $K \in \mathcal{F}$.

- Si $J_1, J_2 \in \mathcal{F}$ entonces se verifica que (a) $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$ y (b) $J_1 \cap J_2 \in \mathcal{F}$, pues: si fuese $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ entonces $J_1 \subset J_2^c$, es decir, T absorbe a $P_{J_1}(B)$ y como

$J_1 \in \mathcal{F}$, entonces T absorbe también a $P_{J_1^c}(B)$, es decir, que T absorbe a B en contra de lo supuesto al principio.

Y $J_1 \cap J_2 \in \mathcal{F}$ ya que

$$(J_1 \cap J_2)^c = J_1^c \cup J_2^c = (J_1^c \setminus J_2^c) \cup (J_2^c \setminus J_1^c) \cup (J_1^c \cap J_2^c)$$

de donde se sigue que

$$P_{(J_1\cap J_2)^c}(B) = P_{J_1^c \cup J_2^c}(B) \subseteq P_{J_1^c}(B) + P_{J_2^c}(B).$$

por tanto, cada $x \in P_{J_1^c\cup J_2^c}(B)$ con $\mathrm{sop}(x) \subset J_1^c \cup J_2^c$, se puede escribir como $x = x_1 + x_2$ siendo $x_1 \in P_{J_1^c}(B)$ con $\mathrm{sop}(x_1) \subset J_1^c$, y $x_2 \in P_{J_2^c}(B)$ con $\mathrm{sop}(x_2) \subset J_2^c$. Como T absorbe a $P_{J_1^c}(B)$ y a $P_{J_2^c}(B)$, entonces T absorbe a $P_{J_1^c\cup J_2^c}(B)$ y $J_1 \cap J_2 \in \mathcal{F}$ como queríamos probar.

Sea $\mathcal{U}$ el ultrafiltro generado por $\mathcal{F}$. A partir de $\mathcal{U}$ definimos la siguiente aplicación μ en $\mathcal{P}(I)$ con valores en $\{0,1\}$: si $J \subset I$

$$\mu(J) = \begin{cases} 1 & \text{si } J \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{si } J \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

que es una medida finitamente aditiva, ya que

- la aplicación μ está bien definida porque dado cualquier $J \subset I$, o bien es $J \in \mathcal{U}$, en cuyo caso $\mu(J) = 1$, ó bien $J^c \in \mathcal{U}$ y $\mu(J) = 0$.

- Como $I \in \mathcal{F}$ se sigue que $I \in \mathcal{U}$ y, por tanto, $\mu(I) = 1$. Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, se sigue que $I^c = \emptyset \notin \mathcal{U}$, es decir, $\mu(\emptyset) = 0$.

- Como $\{i\}^c \in \mathcal{F}$ entonces $\{i\}^c \in \mathcal{U}$ y, por tanto, $\{i\} \notin \mathcal{U}$ por lo que $\mu(\{i\}) = 0$ para cada $i \in I$

- Si J_1 y J_2 son dos subconjuntos disjuntos de I, entonces $J_1 \cup J_2 \in \mathcal{U}$ si, y sólo si, exactamente uno de los subconjuntos J_1, J_2 pertenecen a $\mathcal{U}$, en cuyo caso, si $J_1 \in \mathcal{U}$ y $J_2 \notin \mathcal{U}$,

$$\mu(J_1 \cup J_2) = 1 = 1 + 0 = \mu(J_1) + \mu(J_2).$$

Si $J_1 \cup J_2 \notin \mathcal{U}$, entonces $J_1 \notin \mathcal{U}$ y $J_2 \notin \mathcal{U}$ (los dos subconjuntos no pueden pertenecer a $\mathcal{U}$ porque son disjuntos), en cuyo caso

$$\mu(J_1 \cup J_2) = 0 = 0 + 0 = \mu(J_1) + \mu(J_2).$$

Ahora bien, como el conjunto I no es medible, entonces μ no es numerablemente aditiva, es decir, existe una sucesión $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos disjuntos de I de medida nula, $\mu(J_k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y tal que $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k\right) = 1$. A partir de ella formamos esta otra sucesión:

$$I_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k; \quad I_2 = \bigcup_{k=2}^{\infty} J_k; \quad I_3 = \bigcup_{k=3}^{\infty} J_k; \cdots; I_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} J_k; \cdots$$

verificándose que

a) la sucesión $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente;

b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$;

c) para cada $n \in \mathbb{N}$ es $\mu(I_n) = 1$ pues μ es finitamente aditiva y se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k\right) = \mu\left(J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_{n-1} \bigcup_{k=n}^{\infty} J_k\right) \\ &= \mu(J_1) + \mu(J_2) + \cdots + \mu(J_{n-1}) + \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} J_k\right) \\ &= 0 + 0 + \cdots + 0 + \mu(I_n) = \mu(I_n) \end{aligned}$$

Se sigue que cada $I_n \in \mathcal{U}$ y, por consiguiente, T no absorbe a $P_{I_n}(B)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, pues de lo contrario cada I_n^c pertenecería a $\mathcal{F}$, es decir, cada $I_n^c \in \mathcal{U}$, lo cual no es posible porque $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro.

Obtenemos, pues, una sucesión decreciente $(I_n)_n$ de subconjuntos de I, tales que T no absorbe a $P_{I_n}(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un $z^{(k)} = (z_i^{(k)})_{i\in I} \in B$ con $\mathrm{sop}(z^{(k)}) \subset I_k$ tal que $z^{(k)} \notin kT$.

La sucesión $(z^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ así obtenida está acotada por estar contenida en el conjunto acotado B. Considerando el conjunto

$$D=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k z^{(k)} : \alpha=(\alpha_k)\in B_1\left(\ell^1\right)\right\}.$$

se verifica que D es un disco de Banach por la condición $(*)$ y por el lema 2.6.2. Como T absorbe a los discos de Banach por hipótesis, entonces T debe absorber a D, lo cual está en contradicción con que $z^{(k)}\notin kT$ para cada $k\in\mathbb{N}$.

El espacio Λ, por tanto, es ultrabornológico como queríamos demostrar. ■

Como un caso particular, cuando Λ sea un espacio λ–suma tenemos:

2.7.3 Corolario. *Si I es un conjunto de índices con card(I) no medible; λ es un espacio normal de familias escalares dotado de una τ–topología respecto de la cual es localmente completo y bornológico; y $(E_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios normados ultrabornológicos; entonces $\lambda\{(E_i)\}$ con la τ–topología correspondiente es un espacio ultrabornológico.*

DEMOSTRACIÓN:

Si λ es bornológico entonces $\lambda\{(E_i)\}$ también lo es por la proposición 2.7.1. Y razonando como en la demostración del corolario 2.6.4 se prueba que con las hipótesis enunciadas el espacio $\lambda\{(E_i)\}$ verifica las condiciones del teorema 2.7.2, por tanto, es ultrabornológico. ■

Observaciones

1. Este resultado extiende al caso de las familias el resultado obtenido por Díaz, Fernández, Florencio y Paúl en [10] sobre la ultrabornología del espacio de sucesiones $\lambda\{E\}$, siendo E un espacio normado.

2. Del corolario 2.7.3 se deducen, como casos particulares dignos de mención, la ultrabornología de los espacios $\ell_I^p\{(E_i)\}$ para $1 \leq p \leq \infty$, siendo I un conjunto de índices no medible.

Referencias

[1] BIERSTEDT, K.D. y BONET, J. *Dual density condition in (DF)-spaces, I.* Resultate Math. **14** (1988) 242-274.

[2] BIERSTEDT, K.D., BONET, J. y SCHMETS, J. *(DF)-spaces of type $CB(X,E)$ and $C\overline{V}(X,E)$.* Note Mat. **10**, suppl. 1 (1990) 127-148.

[3] BIERSTEDT, K.D., MEISE, R.G. y SUMMERS, W.H. *Köthe sets and Köthe sequence spaces.* Functional analysis, holomorphy and approximation theory (Rio de Janeiro, 1980), pp. 27-91, North-Holland, Amsterdam y Nueva Yok, 1982.

[4] BOURGIN, D.G. *Linear topological spaces.* Amer. J. Math. **65** (1943) 637-659.

[5] CONSTANTINESCU, C. *Spaces of Measures.* Walter de Gruyter. Berlín y Nueva York (1984).

[6] DEFANT, A. y GOVAERTS, W. *Bornological and ultrabornological spaces of type $C(X,F)$ and $E\varepsilon F$.* Math. Ann. **268** (1984) 347-355.

[7] DE GRANDE–DE KIMPE, N. *Generalized sequence spaces.* Bull. Soc. Math. Belgique **XXIII** (1971) 123-166.

[8] DÍAZ, J.C., FLORENCIO, M., y PAÚL, P.J. *A uniform boundedness theorem for $L^\infty(\mu,E)$.* Arch. Math.(Basel) **60** (1993) 73-78.

[9] DÍAZ, S., FERNÁNDEZ, A., FLORENCIO, M. y PAÚL, P.J. *An abstract Banach-Steinhaus theorem and applications to function spaces.* Resultate

Math. **23** (1993) 242-250.

[10] DÍAZ, S., FERNÁNDEZ, A., FLORENCIO, M. y PAÚL, P.J. *A wide class of ultrabornological spaces of measurable functions.* J. Math. Anal. Appl. (por aparecer).

[11] DREWNOWSKI, L., FLORENCIO, M. y PAÚL, P.J. *Barrelled subspaces of spaces with subseries descompositions or Boolean rings of projections.* Glasgow Math. J. **36** (1994) 57-69.

[12] DREWNOWSKI, L., FLORENCIO, M. y PAÚL, P.J. *Uniform boundedness of operators and barrelledness in spaces with Boolean algebras of proyections.* Atti. Sem. Mat. Univ. Modena **XLI** (1993) 317-329.

[13] DREWNOWSKI, L., FLORENCIO, M. y PAÚL, P.J. *Barrelled function spaces.* Progress in Functional Analysis. K.D. Bierstedt et al. (Eds.) North–Holland Math. Studies. Elsevier/North–Holland. Amsterdam, Oxford, Nueva York y Tokyo (1992) 191-199.

[14] DREWNOWSKI, L., FLORENCIO, M. y PAÚL, P.J. *On the barrelledness of spaces of bounded vector functions.* Arch. Math. (Basel) (por aparecer).

[15] DUGUNDJI, J. *Topology.* Allyn and Bacon. Boston (1966).

[16] FLORENCIO, M. y PAÚL, P.J. *Barrelledness conditions on certain vector valued sequence.* Arch. Math. (Basel) **48** (1987) 153-164.

[17] FLORENCIO, M., PAÚL, P.J., y SÁEZ, C. *Barrelledness in λ–sums of normed spaces.* Simon Stevin **63** (1989) 209-217.

[18] GILLMAN, L. y JERISON, M. *Rings of Continuous Functions.* Graduate Texts in Mathematics vol. 43. Springer-Verlag. Nueva York, Heidelberg y Berlín (1976).

[19] KAMTHAN, P.K. y GUPTA, M. *Sequence Spaces and Series*. Marcel Dekker, Nueva York y Basilea (1981).

[20] HILDEBRANDT, T.H. *On unconditional convergence in normed vector spaces*. Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940) 959-962.

[21] JARCHOW, H. *Locally Convex Spaces*. B.G. Teubner. Stuttgart (1981).

[22] JECH, T. *Set Theory*. Academic Press, San Diego, CA (1978).

[23] KAKOL, J. y ROELCKE, W. *On the barrelledness of ℓ^p–direct sums of seminormed spaces for $1 \leq p \leq \infty$*. Arch. Math. (Basel) (por aparecer).

[24] KÖTHE, G. *Topological Vector Spaces I*. Springer-Verlag. Berlín, Heidelberg y Nueva York (1969).

[25] KÖTHE, G. *Topological Vector Spaces II*. Springer-Verlag. Berlín, Heidelberg y Nueva York (1979).

[26] KŌMURA, T y KŌMURA, Y. *Sur les espaces parfaits de suites et leurs généralisations*. J. Math. Soc. Japan **15** (1963) 319-338.

[27] LANDSBERG, M. *Lineare topologische Räume, die nicht lokalconvex sind*. Math. Zeitschrift **65** (1956) 104-112.

[28] LASCARIDES, C.G. y MADDOX, I.J. *Matrix transformations between some classes of sequences*. Proc. Camb. Phil. Soc. **68** (1970) 99-104.

[29] LURJE, P. *Tonneliertheit in Lokalconvexen Vektorgruppen*. Manuscripta Math. **14** (1974) 107-121.

[30] MADDOX, I.J. *Paranormed sequence spaces generated by infinite matrices*. Proc. Camb. Phil. Soc. **64** (1968) 335-340.

[31] MADDOX, I.J. *Continuous and Köthe-Toeplitz duals of certain sequence spaces.* Proc. Camb. Phil. Soc. **65** (1969) 431-435.

[32] MADDOX, I.J. *Absolute convexity in certain topological linear spaces.* Proc. Camb. Phil. Soc. **66** (1969) 541-545.

[33] MARQUINA, A. y SANZ SERNA, J.M. *Barrelledness conditions on $c_0(E)$.* Arch. Math. (Basel) **31** (1978) 589-596.

[34] MARQUINA, A. y SCHMETS, J. *On bornological $c_0(E)$ spaces.* Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **51** (1982) 170-173.

[35] MENDOZA, J. *A barrelledness criterion for $c_0(E)$.* Arch. Math. (Basel) **40** (1983) 156-158.

[36] MOORE, E.H. *General Analysis.* Memoirs of the American Philosophical Society, vol. 1, part 2 (1939).

[37] NAKANO, H. *Modulared sequence spaces.* Proc. Japan Acad. **27** (1953) 29-49.

[38] PÉREZ CARRERAS, P. y BONET, J. *Barrelled Locally Convex Spaces.* North-Holland Math. Studies vol. 131. North-Holland. Amsterdam, Nueva York, Oxford y Tokyo (1987).

[39] PIETSCH, A. *Nuclear Locally Convex Spaces.* Springer-Verlag. Berlín, Heideberg y Nueva York (1972).

[40] REIHER, K. *Zur theorie verallgemeinerter Köthescher folgen- und funktionenräume.* Dissertation. Universität Paderborn (1986).

[41] ROBERTSON, A.P. y ROBERTSON, W. *Topological Vector Spaces.* Segunda edición. Cambridge University Press. Cambridge, Londres, Nueva York, New Rochelle, Melbourne y Sydney (1980).

[42] ROSIER, R.C. *Generalized Sequence Spaces*. Tesis Doctoral. Universidad de Maryland.

[43] ROSIER, R.C. *Dual spaces of certain vector sequence spaces*. Pacific J. Math. **46** (1973) 487-501.

[44] RUDIN, W. *Análisis Funcional*. Editorial Reverté. Barcelona (1979).

[45] SÁEZ, C. *Espacios de Funciones Vectoriales*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla. Sevilla (1989).

[46] SCHUR, J. *Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen*. J. Reine Angew. Math. **151** (1920) 79-111.

[47] SIMONS, S.: *The sequence spaces $\ell(p_v)$ and $m(p_v)$*. Proc. London Math. Soc. **15** (1965) 422-436.

[48] VALDIVIA, M. *Topics in Locally Convex Spaces*. North-Holland Math. Studies, vol. 67. Amsterdam, Nueva York y Oxford (1982).

[49] WILANSKY, A. *Modern Methods in Topological Vector Spaces*. McGraw Hill, Nueva York (1978).

[50] WILLARD, S. *General Topology*. Addison-Wesley Publishing Company. Reading, MA, (1970).

[illegible]

[illegible] antes
[illegible] al de
JOSE OLIVEROS TRONCOSO
[illegible] ALGUNOS ASPECTOS DE LAS SUMAS GENERALIZADAS
DE ESPACIOS NORMADOS

[illegible] APTO CUM LAUDE

[illegible], 16 de MAYO 1994

El Vocal,	El Vocal,	El Vocal,
El Presidente	El Secretario,	El Doctorado,