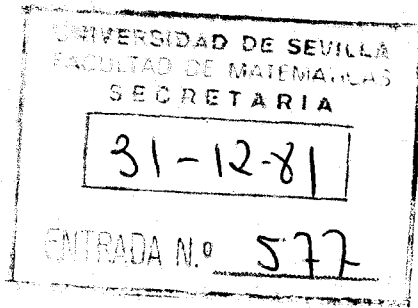


12-4251

043
137

LBS 1005346



INSTITUTO DE INVESTIGACIONES
MATEMÁTICAS
SEVILLA

SOBRE UN PROBLEMA DE CONTROL GEOMETRICO
ASOCIADO A INECUACIONES VARIACIONALES PARABOLICAS

Memoria que presenta
José D. Martín Gómez
para optar al grado
de Doctor en Ciencias
Matemáticas.

Sevilla, Enero de 1982

Vº Bº

EL DIRECTOR DEL TRABAJO

Fdo. Antonio VALLE SANCHEZ
Catedrático-Director del
Dpto. de Ecuaciones Funcionales
de la Facultad de Matemáticas
de la Universidad de Sevilla

Fdo. José D. Martín Gómez

Deseo expresar mi agradecimiento:

Al Profesor A. Valle, no solo como Director de este trabajo, sino también por su constante apoyo e incondicional ayuda.

Al Profesor C. Saguez, Encargado de Relaciones Industriales del I.N.R.I.A., por la proposición del presente trabajo y sus precisas orientaciones.

A los Profesores A. de Castro, R. Infante, J.L. Vicente, A. Pascual, J. Cortés y J. Arias de Reyna, que me han hecho el honor de aceptar formar parte del Tribunal tanto ti tulares como suplentes.

A mis compañeros, Rosa Echevarría, Ma. del Carmen Dominguez, Enrique Fernandez y José Real por sus inestimables consejos.

Al Centro de Cálculo de la Universidad de Sevilla por los servicios que me han prestado.

Y, finalmente, a los Servicios Científicos de la Em bajada de Francia, así como a I.B.M.-España por su ayuda económica, que ha facilitado mis desplazamientos al INRIA.

Sevilla, Enero de 1982.

INTRODUCCION

1 - PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Consideremos un medio físico que pueda presentarse en dos fases térmicas distintas, y llamemos θ su temperatura: $\theta = \theta(x, t)$ en el instante t y en el punto x . Se supone que esta temperatura es ≥ 0 en la primera fase y nula en la segunda, siendo $S(t)$ la frontera que "separa" ambas fases en el instante $t \in [0, T]$, donde $T > 0$; la región asociada a la fase 1 está limitada por una frontera fija Γ_1 y por la frontera libre $S(t)$, que depende del tiempo. En lo que sigue denotaremos $\Omega_1(t)$ esta región en el tiempo t y pondremos $Q_1 = \bigcup_{s \in]0, T[} (\Omega_1(s) \times \{s\})$ ($n=2$ ó 3 en los casos prácticos; véase la figura ($n=2$)).

Se tiene entonces que la temperatura en la fase 1 está regida por las ecuaciones siguientes:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \theta(x, t) &\geq 0 \quad \text{para } (x, t) \in Q_1, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta &= 0. \end{aligned}$$

Las condiciones de contorno son:

$$(1.2) \quad \theta(x, t) = g_0(x, t) \quad x \in \Gamma_1, t \in [0, T],$$

siendo g_0 una función ≥ 0 conocida (la función de calentamiento). Para $S = \bigcup_{t \in [0, T]} S(t)$, se tienen las siguientes condiciones

sobre la frontera libre

$$(1.3) \quad \theta(x, t) = 0 \quad (x, t) \in S,$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial \theta}{\partial n}(x, t) = -\ell \vec{v} \cdot \vec{n} \quad (x, t) \in S,$$

La igualdad (1.4) está relacionada con el paso del calor de la primera fase a la segunda fase. ℓ es una constante que indica el calor latente de fusión ($\ell \in \mathbb{R}^+$), y \vec{v} es la velocidad de desplazamiento de la frontera libre.

Dada una temperatura inicial $\theta_0(x) \geq 0$, imponemos la condición inicial

$$(1.5) \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad x \in \Omega_1(0)$$

El sistema (1.1)-(1.5) es un ejemplo típico de problema de frontera libre. Otros problemas relacionados pueden encontrarse en A. Friedman [2], L.C. Evans [1], C. Baiocchi [1]. ■

A continuación, presentamos una nueva formulación del mismo problema, que denominaremos ejemplo modelo.

2 - FORMULACION GENERALIZADA DEL EJEMPLO MODELO

Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n , ocupada por el medio físico en el que aparecen las dos fases térmicas.

Supondremos que Ω contiene a $\Omega_1(t) \forall t \in [0, T]$ y que su frontera se puede escribir $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, donde $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

De nuevo escribimos

$$Q = \Omega \times]0, T[,$$

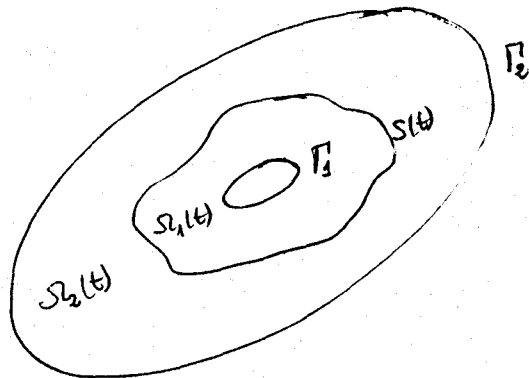
y llamamos χ_1 la función característica de Q_1 en Q , i.e.

$$(2.1) \quad \chi_1(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, t) \in Q_1, \\ 0 & \text{si } (x, t) \in Q \setminus Q_1. \end{cases}$$

Calculemos $\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} - \Delta \tilde{\theta}$ en el sentido de las distribuciones sobre Q ; con tal objetivo, dada una superficie S suficientemente regular (*), y una función g definida sobre S , se define la distribución $\{g\}_S$, mediante la expresión:

$$(2.3) \quad \langle \{g\}_S, \varphi \rangle = \int_S g \varphi \, dS \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q).$$

Por ejemplo, de clase C^1 a trozos.



Se tiene entonces (cf. L. Schwartz [1])

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} - \Delta \tilde{\theta}, \varphi \right\rangle = - \left\langle \tilde{\theta}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \tilde{\theta}, \Delta \varphi \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q),$$

donde

$$\left\langle \tilde{\theta}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle = \int_{Q_1} \tilde{\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt = - \int_{Q_1} \varphi \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} dx dt,$$

puesto que $\tilde{\theta} = 0$ sobre S . Por aplicación de la fórmula de Green,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(Q): \left\langle \tilde{\theta}, \Delta \varphi \right\rangle = \int_{Q_1} \tilde{\theta} \Delta \varphi dx dt = - \int_{Q_1} \nabla \tilde{\theta} \cdot \nabla \varphi dx dt + \int_S \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial n_x} \varphi ds,$$

donde \vec{n}_x es el vector normal exterior unitario a S en las variables espaciales.

Luego

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} - \Delta \tilde{\theta}, \varphi \right\rangle = \int_{Q_1} \left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} - \Delta \tilde{\theta} \right) \varphi dx dt + \int_S \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial n_x} \varphi ds.$$

Pero el primer término del segundo miembro es nulo

(debido a (1.1)), y utilizando (1.4) se obtiene:

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} - \Delta \tilde{\theta}, \varphi \right\rangle = - \ell \left\langle \{ \vec{v} \cdot \vec{n}_x \}_S, \varphi \right\rangle,$$

i.e.

$$(2.4) \quad \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} - \Delta \tilde{\theta} = - \ell \{ \vec{v} \cdot \vec{n}_x \}_S.$$

Por otra parte, si $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$,

$$\left\langle \frac{\partial \chi_1}{\partial t}, \varphi \right\rangle = - \left\langle \chi_1, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle = - \int_{Q_1} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt = - \int_S N_t \cdot \varphi ds$$

donde n_t es el vector normal exterior unitario a S en la variable t ; por tanto,

$$(2.5) \quad \frac{\partial \chi_1}{\partial t} = - \{ N_t \}_S$$

Obsérvese que si $F(x,t)=0$ es la ecuación de la superficie S , localmente se tiene (cf. Duvant [1])

$$\vec{n}_x = \frac{\text{grad } F}{\sqrt{(\text{grad } F)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2}} \quad n_t = \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{(\text{grad } F)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2}}$$

y

$$d(F(x,t)) = \vec{v} \cdot \text{grad } F + \frac{\partial F}{\partial t} = 0;$$

luego

$$\vec{v} \cdot \vec{n}_x = -N_t,$$

y de (2.4)-(2.5) se deduce que

$$(2.6) \quad \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} - \Delta \tilde{\theta} = -\ell \frac{\partial \chi_1}{\partial t} \quad \text{en } \mathcal{Q}'(\Omega),$$

con las condiciones de contorno:

$$(2.7) \quad \tilde{\theta}(x,t) = g_0(x,t) \quad \text{sobre } (x,t) \in \Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0,T[,$$

$$(2.8) \quad \tilde{\theta}(x,t) = 0 \quad \text{sobre } (x,t) \in \Sigma_2 = \Gamma_2 \times]0,T[,$$

y la condición inicial

$$(2.9) \quad \tilde{\theta}(x,0) = \tilde{\theta}_c(x) \quad \text{en } \Omega,$$

siendo $\tilde{\theta}_c$ la prolongación por cero a Ω de θ_0 . ■

Observación 2.1

Siendo χ_1 la función característica del soporte de θ , las ecuaciones (2.6)-(2.9) resumen toda la información que se posee, gracias a (1.1)-(1.5). ■

Se necesitará que θ_0 sea definida en todo Ω ; suponemos

$$(2.10) \quad \theta_0(x) = \overline{\theta}_c(x) \chi_{\Omega_1(0)}$$

donde $\overline{\theta}_c$ es una función definida en todo Ω . ■

3 - TRANSFORMACION EN UNA INECUACION VARIACIONAL

En esta Sección utilizaremos un cambio de variable funcional que convertirá el anterior problema de frontera libre (1.1)-(1.5) en una inecuación variacional (I.V.). De acuerdo con el carácter de la ecuación (2.6), parece natural introducir la transformación (de Baiocchi [4])

$$(3.1) \quad y(x,t) = \int_0^t \tilde{\theta}(x,s) ds.$$

La integración con respecto a la variable t conduce a la igualdad

$$(3.2) \quad \tilde{\theta}(x,t) - \tilde{\theta}(x,0) - \Delta y(x,t) = -\ell \chi_1(x,t) + \ell \chi_1(x,0).$$

Sea χ_{20} la función definida por

$$(3.3) \quad \chi_{20}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_2(0), \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_2(0), \end{cases}$$

donde

$$\Omega_2(0) = \Omega \setminus \Omega_1(0).$$

Se tiene que $\chi_1(x,0) = 1 - \chi_{20}(x)$; por tanto,

$$(3.4) \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) - \Delta y(x,t) = \tilde{\theta}(x,0) - \ell \chi_{20}(x) + \ell(1 - \chi_1(x,t)).$$

Definiendo la función f por

$$(3.5) \quad f(x) = \tilde{\theta}_0(x) - \ell \chi_{20}(x),$$

y observando que $y(1 - \chi_1) = 0$, se obtiene:

$$(3.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y - f \geq 0, \\ y \geq 0, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y - f \right) y = 0, \text{ en } Q, \end{cases}$$

$$(3.7) \quad y(x,t) = g(x,t) \quad \text{sobre } \Sigma_1,$$

$$(3.8) \quad y(x,t) = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_2,$$

$$(3.9) \quad y(x,0) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

En (3.7) hemos utilizado la notación

$$g(x,t) = \int_0^t g_0(x,s) ds$$

En consecuencia, la función transformada y (por (3.1)) de $\tilde{\theta}$ satisface la I.V. asociada a (3.6)-(3.9).

Recíprocamente, si y es una solución regular de (3.6)-(3.9), entonces $\tilde{\theta} = \frac{\partial y}{\partial t}$ es una solución del problema de frontera libre (2.6)-(2.9). ■

4 - FORMULACION VARIACIONAL FUERTE

De acuerdo con J.L. Lions [2, p. 266 y s.s.], introducimos los espacios

$$(4.1) \quad V_2 = \left\{ \varphi \mid \varphi \in L^2(\Omega), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \varphi = 0 \text{ sobre } \Gamma_2 \right\} \\ = \left\{ \varphi \mid \varphi \in H^1(\Omega), \varphi|_{\Gamma_2} = 0 \right\}.$$

$$(4.2) \quad H = L^2(\Omega),$$

las formas bilineales

$$(4.3) \quad a(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx$$

$$(4.4) \quad (\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi \cdot \psi dx$$

y la familia de convexos

$$(4.5) \quad K(t) = \left\{ \varphi \in V_2 \mid \varphi \geq 0 \text{ p.p. en } \Omega, \varphi(x) = g(x, t) \text{ sobre } \Gamma_1 \right\}.$$

Suponiendo que g_0 es regular, es fácil demostrar que $K(t)$ es una parte convexa cerrada no vacía de V_2 , lo que nos sitúa en las hipótesis de J.L. Lions [2]. La formulación variacional fuerte se deduce de las ecuaciones (3.6)-(3.9) por integración por partes:

$$(4.6) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial y}{\partial t}, \varphi - y \right) + a(y, \varphi - y) - (f, \varphi - y) \geq 0 \quad \forall \varphi \in K(t), \\ y(t) \in K(t), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Definición: Si la función y verifica $y \in L^2(0, T; V_2)$,

$\frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0, T; H)$, y las relaciones (4.6), se dice que y es una solución fuerte de dicho problema variacional. ■

5 - FORMULACION VARIACIONAL DEBIL

En general el problema de encontrar una solución fuerte de un problema variacional del tipo precedente es difícil. Debido a ello cobra interés el concepto de solución débil, que introducimos a continuación.

Sea K el convexo

$$(5.1) \quad K = \left\{ \varphi \mid \varphi \in L^2(0, T; V_2), \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^2(0, T; H), \varphi \geq 0 \text{ en } Q, \varphi = g(\Sigma_1) \right\}.$$

Si g es (como antes) suficientemente regular,

$$(5.2) \quad K \neq \emptyset$$

Introduzcamos el espacio

$$(5.3) \quad W(0, T) = \left\{ \varphi / \varphi \in L^2(0, T; V_2), \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^2(0, T; V_2') \right\}.$$

Si $\varphi \in W(0, T)$, se tiene

$$(5.4) \quad \int_0^T (\varphi', \varphi) dt = \int_0^T \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\varphi, \varphi) dt = \frac{1}{2} \|\varphi(t)\|_H^2 \Big|_{t=T} - \frac{1}{2} \|\varphi(t)\|_H^2 \Big|_{t=0}.$$

En consecuencia, si y es una solución fuerte de (4.6),

$$\begin{aligned} X &\equiv \int_0^T \{ (\varphi', \varphi - y) + a(\varphi, \varphi - y) - (f, \varphi - y) \} dt \\ &= \int_0^T \{ (\varphi', \varphi - y) + a(\varphi, \varphi - y) - (f, \varphi - y) \} dt + \int_0^T (\varphi' - y', \varphi - y) dt \\ &\geq \int_0^T (\varphi' - y', \varphi - y) dt = \frac{1}{2} (\|\varphi(T) - y(T)\|_H^2 - \|\varphi(0) - y(0)\|_H^2) \end{aligned}$$

Como $y(0) = 0$,

$$(5.5) \quad \int_0^T \{ (\varphi', \varphi - y) + a(\varphi, \varphi - y) - (f, \varphi - y) \} dt + \frac{1}{2} \|\varphi(0)\|_H^2 \geq 0$$

Definición: Si la función y verifica

$$(5.6) \quad \begin{aligned} y &\in L^2(0, T; V_2), \quad y \geq 0 \quad \text{en } Q, \\ y &= g \quad \text{sobre } \Sigma_1, \end{aligned}$$

y las desigualdades (5.5), se dice que y es una solución débil de (4.6). ■

Observación 5.1

La ecuación (5.5) tiene sentido bajo la única condición sobre y :

$$(5.7) \quad y \in L^2(0, T; V_2)$$

Las relaciones (5.6) se escribirán abreviadamente

$$(5.8) \quad y \in K = \left\{ \varphi \in L^2(0, T; V_2) / \varphi(t) \in K(t) \quad \text{c.p.d. } t \right\}. \quad \blacksquare$$

Las formulaciones fuerte y/o débil del problema físico ofrecen algunas ventajas, de entre las cuales resaltamos las siguientes:

1) Se pueden aplicar los resultados teóricos generales, como indicaremos más adelante.

2) Se pueden aplicar los métodos numéricos de inecuaciones

variacionales generales (cf. R.Glowinski-J.L.Lions-R.Trémolières [1], O.Pironneau [2], J.L.Lions [11])

3) Se puede utilizar el carácter de solución de una I.V. para obtener propiedades de la solución del problema físico. ■

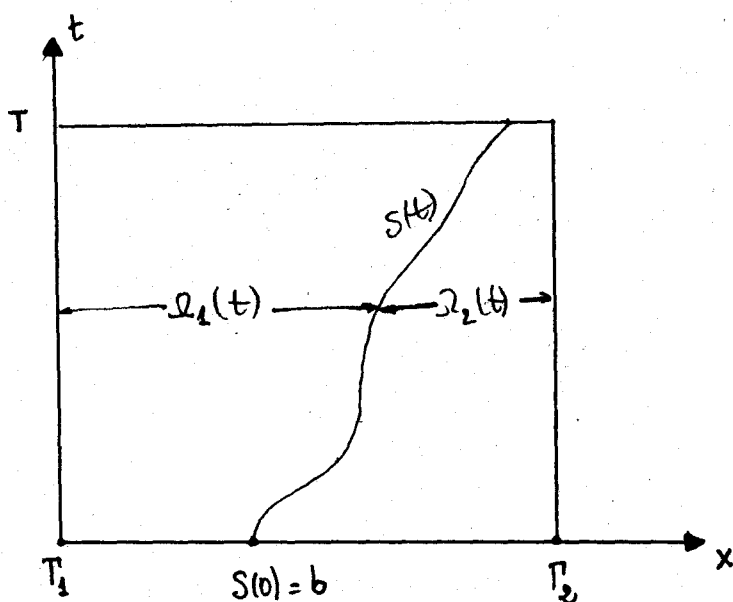
6 - PROBLEMAS DE CONTROL GEOMETRICO

Para una mayor claridad de la exposición consideremos el caso unidimensional, $n=1$.

Sea $\Omega =]0, a[$, ($a > 0$),
y supongamos que Ω contiene
todos los $\Omega_1(t)$, donde
 $t \in [0, T]$ (véase la Fig.).

La frontera Γ_1 está constituida por el origen, y por el punto a .

Sea $\Omega_1(0) =]0, b[$
donde $0 < b < a$, y χ_{20} la
función característica de $\Omega_2(0) =]b, a[$. La frontera libre estará definida por la curva $S(t)$ tal que $S(0) = b$.



Consideremos el problema de control siguiente:

Dada la familia \mathcal{D}_{ad} (de conjuntos admisibles), y un

funcional

$$(6.1) \quad J(\Omega_2(0)) = \int_Q |y(\Omega_2(0)) - z_d|^2 dx,$$

(donde $\Omega_2(0) \in \mathcal{D}_{ad}$, $z_d \in L^2(Q)$ es una función conocida y la función $y(\Omega_2(0))$ es la solución (al menos en el sentido débil) de la I.V.), hallar $\hat{\Omega}_2(0) \in \mathcal{D}_{ad}$ tal que:

$$(6.2) \quad J(\hat{\Omega}_2(0)) = \inf_{\Omega_2(0) \in \mathcal{D}_{ad}} J(\Omega_2(0))$$

Observación 6.1.

El problema (6.1)-(6.2), en este caso, es un problema de control en la variable b , y por tanto se puede formular como un problema de control clásico. En el caso $n > 1$ no aparece un problema de control geométrico, llamado también de diseño óptimo.

Este será el tipo de problemas estudiados en nuestro trabajo. ■

Observación 6.2.

Podríamos igualmente haber dejado Γ_1 (es decir, la parte de la frontera donde se produce fuente de calor) variable. En el caso unidimensional, volveremos a encontrar un problema de control clásico. ■

C A P I T U L O IINECUACIONES VARIACIONALES1 - INTRODUCCION

Desde el año 1964, en que G. Stampacchia [1] introduce el concepto de inecuación variacional, y fundamentalmente debido al empuje dado por J.L. Lions-G. Stampacchia [1], esta noción ha ido adquiriendo cada vez más importancia, tanto desde el punto de vista teórico como práctico, ya que intervienen en numerosos problemas de la Física y la Teoría de Control.

Algunos de los dominios que hacen surgir las inecuaciones variacionales son: los problemas unilaterales de la Mecánica Elastoplastica, Mecánica de fluidos no Newtonianos (del tipo de Bingham), Electromagnetismo, problemas de frontera libre del tipo de Stefan, Hidrodinámica de medios porosos, Juegos diferenciales, problemas estocásticos de tiempo de parada, Teoría de Control de sistemas distribuidos etc.

La teoría general ha sido desarrollada por numerosos autores, en particular por H. Brezis-G. Stampacchia [1] H. Brezis [1], F. Migñot-J. Puel [1], A. Bensoussan-J.L. Lions [1], H. Attouch-A. Damlamian [1], P. Charrier [1],

principalmente en cuanto a la regularidad de las soluciones.

En este trabajo nuestro objetivo es el estudio de ciertas inecuaciones variacionales parabólicas (I.V.P.). La formulación general de una I.V.P. es la que sigue.

Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert real (de una norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, asociada con el producto escalar $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$), \mathcal{V} un espacio de Banach real reflexivo y separable (de norma $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$), y \mathcal{V}' su dual topológico (de norma $\|\cdot\|_{\mathcal{V}'}$). Suponemos que

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}'$$

con inyecciones continuas y densas, y que tanto la norma de \mathcal{V} como la de \mathcal{V}' son estrictamente convexas (lo cual no es restrictivo).

Se nos da un conjunto K convexo cerrado de \mathcal{V} , y un operador A tal que $-A$ es el generador infinitesimal de un semigrupo $S \mapsto G(S)$ continuo en \mathcal{V} (resp. \mathcal{H} , \mathcal{V}') de dominio $D(A, \mathcal{V})$ (resp. $D(A, \mathcal{H})$, $D(A, \mathcal{V}')$), y de contracciones en \mathcal{H} .

Por último, sea $A: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ un operador pseudomonótono y coercivo en el sentido que exista $v_0 \in K$ tal que

$$\frac{(At(v), v - v_0)_{\mathcal{V}'\mathcal{V}}}{\|v\|_{\mathcal{V}}} \rightarrow +\infty \quad \text{si} \quad \|v\|_{\mathcal{V}} \rightarrow +\infty$$

Observación 1.1

Se recuerda que un operador $A: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ es pseu-

domonótono si es acotado y si cuando $u_j \rightarrow u$ en \mathcal{V} -débil y $\limsup (\mathcal{A}(u_j), u_j - u) \leq 0$, se tiene $\liminf (\mathcal{A}(u_j), u_j - v) \geq (\mathcal{A}(u), u - v) \forall v \in \mathcal{V}$. En particular \mathcal{A} es contínuo de \mathcal{V} -fuerte en \mathcal{V}' -débil. Este concepto está adaptado al estudio de las inecuaciones variacionales, y no es indispensable para la resolución de las mismas. ■

Observación 2.1

La hipótesis de separabilidad de \mathcal{V}' no es necesaria (cf. L. Tartar [1]). ■

A partir de estos datos podemos plantear dos formulaciones distintas de una inecuación variacional parabólica.

La primera llamada formulación fuerte (por que se exige una cierta regularidad sobre la derivada respecto al tiempo) se expresa como sigue:

Dada $f \in \mathcal{V}'$, encontrar u tal que:

$$u \in K$$

$$u \in D(\Lambda; \mathcal{V}')$$

$$(\Lambda u, v - u) + (\mathcal{A}(u), v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K$$

En esta formulación, bajo hipótesis razonables, se puede demostrar la unicidad de solución. Pero la existencia de la misma sólo puede obtenerse imponiendo hipótesis suplementarias bastantes restrictivas, de las que podrán deducirse los oportunos resultados de regularidad (cf. J.L. Lions [2]).

La segunda, llamada formulación débil (por no imponer ninguna regularidad en cuanto a la derivada respecto del tiempo), se escribe así:

Dada $f \in \mathcal{V}'$, encontrar u tal que:

$$u \in K$$

$$(\Lambda v, v-u) + (\mathcal{A}(u), v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K \cap D(\Lambda, \mathcal{V}')$$

En esta formulación, bajo hipótesis razonables, puede deducirse la existencia de soluciones (pues no se necesitan los anteriores resultados de regularidad), pero en general no hay unicidad (cf. J.L. Lions [5]).

El estudio general de las inecuaciones variacionales es un tema bastante amplio, como ya hemos indicado, y se encuentra un poco apartado de nuestro objetivo, que consiste en resolver las inecuaciones descritas en la Introducción. Obsérvese sin embargo que el hecho que la familia de convexos $K(t)$ dependa del tiempo es una dificultad esencial de la resolución de nuestro problema, y es por lo que un tratamiento general de ellas conducen a resultados poco provechosos comparados con los que deduciremos a continuación. ■

2 - PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Como en la Introducción, designamos por Ω un dominio regular acotado de \mathbb{R}^n , de frontera regular Γ (i.e., Γ es una variedad $(n-1)$ -dimensional de clase $W^{k,\sigma}$ por ejemplo $k=2$, $\sigma=+\infty$ situándose Ω localmente a un solo lado de Γ).

Supongamos que Γ puede escribirse de la forma

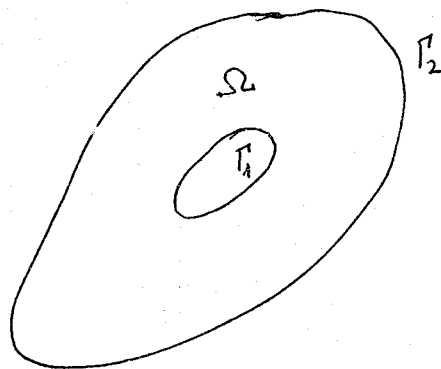
$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \text{ como en la Fig. 3}$$

Sea T un número real estrictamente positivo y pongamos

$$Q = \Omega \times]0, T[; \quad \partial Q = \Sigma = \Gamma \times]0, T[; \\ \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \quad ; \quad \Sigma_i = \Gamma_i \times]0, T[, \quad i=1, 2$$

en lo que sigue, se utilizarán los espacios de Hilbert

$$H = L^2(\Omega) ; \quad V = H^1(\Omega) ; \quad V_0 = H_C^1(\Omega)$$



$$V_2 = \{ \varphi \in V / \varphi|_{T_2} = 0 \}$$

$$\mathcal{H} = L^2(0, T; H) ; \quad \mathcal{V} = L^2(0, T; V) ; \quad \mathcal{V}_i = L^2(0, T; V_i) \quad i=0, 2$$

$$W(0, T) = \left\{ \varphi \in \mathcal{V} / \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in \mathcal{V}' \right\}$$

$$W_i(0, T) = \left\{ \varphi \in \mathcal{V}_i / \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in \mathcal{V}_i' \right\} \quad i=0, 2$$

$$\dot{W}(0, T) = \left\{ \varphi \in W(0, T) / \varphi(0) = 0 \right\}$$

$$\dot{W}_i(0, T) = \left\{ \varphi \in W_i(0, T) / \varphi(0) = 0 \right\} \quad i=0, 2$$

Estos espacios se dotan de sus normas usuales.

Se considera el operador diferencial lineal de segundo orden definido en Q:

$$(2.1) \quad A \varphi = - \sum_{i=1}^n D_i (a_{ij}(x) D_j \varphi) + \sum_{j=1}^n a_j(x) D_j \varphi + a_0(x) \varphi$$

asociado a la forma bilineal

$$(2.2) \quad a(\varphi \psi) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) D_j \varphi D_i \psi \, dx + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} a_j(x) D_j \varphi \psi \, dx + \int_{\Omega} a_0(x) \varphi \psi \, dx$$

En (2.1)-(2.2) los coeficientes se suponen que

$$(2.3) \quad a_{ij}, a_j, a_0 \in C^1(\bar{\Omega}), \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad a_0 \geq 0$$

y que el operador A es uniformemente elíptico:

$$(2.4) \quad \sum_{i=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \alpha > 0, \quad \text{cpd en } \Omega$$

Observación 2.1

Se podrían haber considerado también coeficientes

a_{ij} , etc. dependientes del tiempo, lo que contemplaría caso algo más general, para el que pueden deducirse los mismos resultados (cf. A. Bensoussan-J.L. Lions [4]). ■

Introducimos por último el convexo cerrado

$$(2.5) \quad K(t) = \left\{ \varphi \in V_2 / \varphi|_{\Omega} = g(x,t), \quad \varphi \geq 0 \text{ cpd en } \Omega \right\}$$

Entonces nuestro problema es, formalmente,

Encontrar $y(t) \in K(t)$ solución c.p.d. en $[0, T]$

de

$$(2.6) \quad \left(\frac{\partial y(t)}{\partial t}, \varphi - y(t) \right) + a(y(t)) \geq (f(t), \varphi - y(t)), \quad \forall \varphi \in K(t)$$

$$y(0) = 0$$

Observación 2.2

Dada una función ψ definida en Q , designamos $\Psi(t)$ la función (definida en Ω) que a cada x asocia el valor $\psi(x,t)$. Así, si $\psi \in L^2(0, T; V)$ (por ejemplo), entonces $\Psi(t) \in V$. ■

Observación 2.3

El problema (2.6) es un problema formal, ya que si bien $y(t) \in K(t)$, no exigimos ninguna regularidad en la variable t . ■

Antes de formularlo correctamente, resolveremos un problema que después se verá que es equivalente a él.

Como el problema (2.6) es no homogéneo intentaremos encontrar una prolongación \tilde{g} de g tal que, bajo un cambio de variables, (2.6) sea equivalente a un problema homogéneo. Consideremos entonces el problema:

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} + A \tilde{g} = 0 \quad \text{en } Q \\ \tilde{g} = g \quad \text{sobre } \Sigma_1 \\ \tilde{g} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_2 \\ \tilde{g}(0) = 0 \quad \text{en } \Omega \end{array} \right.$$

Se supone que g verifica la relación de compatibilidad

$$(2.8) \quad g(x,0) = 0 \quad \text{en } \Omega .$$

De acuerdo con los resultados de J.L. Lions E. Magenes [1] , se tiene que la hipótesis de regularidad

$$(2.9) \quad g \in H^{1/2,1/4}(\Sigma_1) ,$$

conduce a

$$(2.10) \quad \tilde{g} \in W(0,T) ,$$

y que si

$$(2.11) \quad g \in H^{3/2,3/4}(\Sigma_1) ,$$

entonces

$$(2.12) \quad \tilde{g} \in H^{2,1}(Q) ,$$

y la aplicación $g \mapsto \tilde{g}$ es continua de $H^{1/2,1/4}(\Sigma_1)$ en $W(0,T)$ y de $H^{3/2,3/4}(\Sigma_1)$ en $H^{2,1}(Q)$. Además el Principio del Máximo (véase O.A. Ladyzhenskaya - Uraltseva [1]) se tiene que si $g \geq 0$ entonces $\tilde{g} \geq 0$. En particular, suponiendo que

$$(2.13) \quad g \geq 0 \quad \text{sobre } \Sigma_1 ,$$

se tendrá

$$(2.14) \quad \tilde{g} \geq 0 \quad \text{en } Q$$

Introduzcamos el cambio de variable

$$(2.15) \quad z = y - \tilde{g} ;$$

entonces el problema (2.6) es equivalente al problema de encontrar z verificando, c.p.d. en $[0, T]$, $z(t) \in \tilde{K}(t)$, y la inecuación variacional

$$(2.16) \quad \left(\frac{\partial Z(t)}{\partial t}, \varphi - z(t) \right) + a(z(t), \varphi - z(t)) \geq (f(t), \varphi - z(t)) \quad \forall \varphi \in \tilde{K}(t)$$

$$(2.17) \quad z(0) = 0 ,$$

donde

$$(2.18) \quad \tilde{K}(t) = \left\{ \varphi \in V_0 / \varphi(x) \geq -\tilde{g}(x, t) \quad \text{c.p.d. en } \Omega \right\} .$$

Introducimos también los convexos

$$(2.19) \quad K = \left\{ \varphi \in V_0 / \varphi(t) \in \tilde{K}(t) \quad \text{c.p.d. en } [0, T] \right\}$$

$$(2.20) \quad \mathcal{K} = \left\{ \varphi \in W_0(0, T) / \varphi(t) \in \tilde{K}(t) \quad \text{c.p.d. en } (0, T) \right\}$$

Bajo la condición (2.13), el conjunto $K(t)$, definido por (2.5), es no vacío y por tanto $\tilde{K}(t)$, K y \mathcal{K} son no vacíos; además, como $K(t)$ es un convexo cerrado de V_2 se tiene que $\tilde{K}(t)$ (resp. K , \mathcal{K}) es un convexo cerrado de V_0 (resp. V_0 , $W_0(0, T)$).

Sea por último

$$(2.21) \quad f \in V' .$$

Podemos ya formular los dos problemas bajo consideración:

Problema fuerte

Encontrar u , solución fuerte, tal que

$$(2.22) \quad z \in \mathcal{K}$$

$$(2.23) \int_0^T \left(\frac{\partial z}{\partial t}, \varphi - z \right) dt + \int_0^T a(z, \varphi - z) dt \geq \int_0^T (f, \varphi - z) dt$$

$$\forall \varphi \in K$$

$$(2.24) \quad z(0) = 0 \quad \blacksquare$$

Observación 2.4

El problema fuerte es equivalente al problema fuerte siguiente

Encontrar $z \in W(0, T)$ tal que $z(t) \in K(t)$ cpd $[0, T]$ y z verifica cpd en t (2.16) y (2.17). \blacksquare

Observación 2.5

Si $z \in \tilde{K}$ entonces, en particular, $z \in W_0(0, T)$ y por tanto z es, salvo la modificación eventual de un conjunto de medida nula, continua de $[0, T]$ en H , i.e. $z \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ luego la traza de z en $t=0$ está bien definida, con lo que (2.24) tiene un sentido. \blacksquare

Observación 2.6

El resultado de existencia de soluciones fuertes necesita hipótesis de regularidad sobre los convexos y es por ello que resulta conveniente debilitar la formulación del problema fuerte. \blacksquare

Si z es solución de (2.22)-(2.24) y $\varphi \in K$ (y no solamente a K), se tiene:

$$\int_0^T \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \varphi - z \right) + a(z, \varphi - z) \right\} dt + \int_0^T \left(\frac{\partial(z - \varphi)}{\partial t}, \varphi - z \right) dt \geq$$

$$\geq \int_0^T (f, \varphi - z) dt$$

$$\text{luego } \int_0^T \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \varphi - z \right) + a(z, \varphi - z) \right\} dt + \frac{1}{2} |\varphi(0)|^2 \geq \int_0^T (f, \varphi - z) dt$$

En esta nueva inecuación no interviene $\frac{\partial z}{\partial t}$ y esta es la razón por la que se introduce el

Problema débil

Encontrar z , solución débil, tal que:

$$(2.25) \quad z \in K$$

$$(2.26) \quad \int_0^T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \varphi - z \right) dt + \int_0^T a(z, \varphi - z) dt + \frac{1}{2} |\varphi(0)|^2 \geq \int_0^T (f, \varphi - z) dt$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{K}$$

Todo consiste por tanto en resolver los problemas anteriores, pues una vez obtenido esto bastará tener en cuenta el cambio de variables (2.15) para poder resolver nuestro problema de partida. ■

3 - EXISTENCIA DE SOLUCIONES

3.1 Existencia y Unicidad de soluciones fuertes

La resolución de nuestras inecuaciones se obtendrá aproximándolas por ecuaciones no lineales (de carácter clásico), mediante el método de penalización. Antes de aplicar este método, recordemos algunos útiles de Análisis Funcional (cf. J.L. Lions [2]).

Sea E un espacio de Banach reflexivo de norma estrictamente convexa así como la de su dual E' y sea C un con-

vexo cerrado no vacío de E ; se dice que β es un operador de E en E' tal que

1) β es acotado, i.e. transforma los acotados de E en acotados de E'

2) β es monótono, i.e. $(\beta(\varphi) - \beta(\psi), \varphi - \psi) \geq 0$
 $\forall \varphi, \psi \in E$

3) β es hemicontinuo, i.e. $\forall \varphi, \psi, \xi \in E$ la función $\lambda \mapsto (\beta(\varphi + \lambda\psi), \xi)$ es continua.

4) $\{\varphi \in E / \beta(\varphi) = 0\} \equiv C$

Bajo las anteriores hipótesis sobre E y sobre C siempre se pueden asegurar la existencia de operadores de penalización.

Sea $E = \mathcal{H} = L^2(Q)$ y $C = \tilde{K} = \{\varphi \in \mathcal{H} / \varphi(t) \in \tilde{K}(t)\}$

entonces existe un operador de penalización en \mathcal{H} , dado por

$\beta = I - P$ donde P es la proyección de \tilde{K} sobre \mathcal{H} . Además, β es también un operador de penalización en \mathcal{V}_0 (cf. J.L. Lions [2]) ya que

$$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}_0$$

con inyecciones continuas y densas cada espacio es el siguiente.

La forma explícita del operador β es

$$(3.1) \quad \beta(z) = -(z + \tilde{g})^-$$

Teorema 3.1

Bajo las hipótesis (2.3), (2.4), (2.9) y (2.21) existe una única solución fuerte del problema (2.22)-(2.24).

Demostración

De (2.4) se deduce que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(3.2) \quad a(\varphi, \varphi) + \lambda |\varphi|^2 \geq \alpha \|\varphi\|^2 \quad \forall \varphi \in V.$$

Además, haciendo el cambio de v por $e^{kt}u$, con

$k \geq \lambda$, se puede suponer siempre

$$(3.3) \quad a(\varphi, \varphi) \geq \alpha \|\varphi\|^2 \quad \forall \varphi \in V$$

La demostración de la unicidad es inmediata, teniendo en cuenta (3.3) y el Lema de Gronwall. Para demostrar la existencia de soluciones introducimos el problema penalizado (donde $\varepsilon > 0$, y β viene dado por (3.1)):

$$(3.4) \quad \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial t} + Az_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \beta(z_\varepsilon) = f \quad \text{en } Q;$$

$$(3.5) \quad z_\varepsilon = 0 \quad \text{sobre } \Sigma,$$

$$(3.6) \quad z_\varepsilon(0) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

De la monotonía de β se deduce que el problema (3.4)-(3.6) admite una solución única z_ε , tal que

$$(3.7) \quad z_\varepsilon \in W_0(0, T)$$

Se pueden deducir ahora las estimaciones "a priori":

1) Multiplicando (3.4) por $z_\varepsilon \in \mathcal{V}$ y teniendo en cuenta que

$$\int_0^T (\beta(z_\varepsilon), z_\varepsilon) dt \geq \int_0^T |\beta(z_\varepsilon)|^2 dt$$

$$(3.8) \quad \|z_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; H)} + \|z_\varepsilon\|_{\mathcal{V}^0} \leq c_1$$

$$(3.9) \quad \left\| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \beta(z_\varepsilon) \right\|_{\mathcal{V}^0} \leq c_2$$

SI ahora multiplicamos (3.4) por $\beta(z_\varepsilon) \in \mathcal{V}$ y tenemos en cuenta que

$$\int_0^T \left(\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial t} + Az_\varepsilon, \beta(z_\varepsilon) \right) dt \geq 0$$

encontramos que

$$(3.10) \quad \left\| \frac{1}{\varepsilon} \beta(z_\varepsilon) \right\|_{\mathcal{H}} \leq c_3$$

De (3.4), (3.8) y (3.10) se obtiene ($f \in \mathcal{V}'$)

que

$$(3.11) \quad \left\| \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{\mathcal{V}'} \leq c_4$$

donde las c_i son constantes independientes de ε .

Tras la extracción de una subsucesión de $\{z_\varepsilon\}$ de nuevo llamada $\{z_\varepsilon\}$, se puede asegurar que

$$(3.12) \quad \begin{aligned} z_\varepsilon &\longrightarrow z \quad \text{en } \mathcal{V}\text{-débil} \\ \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial t} &\longrightarrow \frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{en } \mathcal{V}'\text{-débil} \\ \beta(z_\varepsilon) &\longrightarrow 0 \quad \text{en } \mathcal{H}\text{-débil} \\ Az_\varepsilon &\longrightarrow Az \quad \text{en } \mathcal{V}'\text{-débil} \end{aligned}$$

Fácilmente se prueba que $\beta(z)=0$, i.e. $z \in \mathcal{K}$ y si multiplicamos (3.4) por $\varphi - z_\varepsilon$ con $\varphi \in \mathcal{K}$, teniendo en cuenta (3.12) obtenemos que z es solución fuerte de (2.22)-(2.24). ■

Podemos ahora dar otro teorema de existencia, unicidad y regularidad de soluciones fuertes.

Teorema 3.2

Bajo las hipótesis (2.3), (2.4) y (2.11) y $f \in \mathcal{H}$ existe una única solución fuerte del problema (2.22)-(2.24) que además tiene la propiedad

$$(3.13) \quad z \in H^{2,1}(Q).$$

Demostración

Análoga al Teorema 3.1 (cf. Moreno-Saguez [1]). ■

Observación 3.1

Igual que se obtuvo la estimación (3.10) se obtienen en la demostración del Teorema 2.2 las estimaciones

$$(3.14) \quad \|\beta(z_\varepsilon)\|_{\mathcal{V}^p} \leq c_5 \sqrt{\varepsilon}$$

$$(3.15) \quad \|\beta(z_\varepsilon)\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq c_6 \sqrt{\varepsilon}$$

Estas estimaciones junto con (3.10) nos serán útiles para encontrar una estimación del error en el método de penalización, que será útil, a su vez, para la resolución numérica de nuestro problema. ■

3.2 Estimación del Error en la Penalización

Estimamos ahora la diferencia entre la solución fuerte de la inecuación variacional y la solución de la ecuación penalizada. Pongamos

$$(3.16) \quad z - z_\varepsilon = r_\varepsilon - \beta(z_\varepsilon).$$

Entonces

$$r_\varepsilon = z + \Psi - (z_\varepsilon + \Psi)^+$$

y de acuerdo con (3.10), intentamos encontrar una estimación

sobre r_ε . Tomando entonces

$$\Psi = z - r_\varepsilon = -\Psi + (z_\varepsilon + \Psi)^+$$

en (2.16), multiplicando (3.4) por r_ε y sumando, obtenemos

$$-((z-z_\varepsilon)', r_\varepsilon) - a(z-z_\varepsilon, r_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} (\beta(z_\varepsilon), r_\varepsilon) \geq 0$$

Pero como

$$(\beta(z_\varepsilon), r_\varepsilon) \leq 0$$

se deduce que

$$((z-z_\varepsilon)', r_\varepsilon) + a(z-z_\varepsilon, r_\varepsilon) \leq 0,$$

es decir

$$(3.17) \quad (r_\varepsilon', r_\varepsilon) + a(r_\varepsilon, r_\varepsilon) \leq ((\beta(z_\varepsilon))', r_\varepsilon) + a(\beta(z_\varepsilon), r_\varepsilon).$$

Ahora bien,

$$\int_0^t ((\beta(z_\varepsilon))', r_\varepsilon) ds = (\beta(z_\varepsilon)(t), r_\varepsilon(t)) - \int_0^t (\beta(z_\varepsilon), r_\varepsilon') ds,$$

y como

$$\left| \int_0^t (\beta(z_\varepsilon), r_\varepsilon') ds \right| = \left| \int_0^t (\beta(z_\varepsilon), \frac{\partial(z+\Psi)}{\partial t}) ds \right| \leq c\varepsilon,$$

integrando (2.17) llegamos a la desigualdad

$$(3.18) \quad \frac{1}{2} |r_\varepsilon(t)|^2 + a \int_0^t \|r_\varepsilon(s)\|^2 ds \leq \\ \leq c\sqrt{\varepsilon} \left\{ |r_\varepsilon(t)| + \left(\int_0^t \|r_\varepsilon(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \right\} + c\varepsilon.$$

De (3.18) se deduce teniendo en cuenta (3.10) y

(3.16) la estimación deseada:

$$(3.19) \quad \|z-z_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|z-z_\varepsilon\|_{V^p} \leq c\sqrt{\varepsilon}. \blacksquare$$

3.3 Existencia de Soluciones Débiles

Se va ahora a estudiar el problema débil. El resultado siguiente se encuentra en F. Mignot J.P. Puel [1]:

Teorema 3.3

Supongamos que se verifica (2.3)-(2.4), que $\mathcal{K} \neq \emptyset$ y que se tiene (2.21). Entonces existe al menos una solución débil del problema (2.25)-(2.26).

Observacion 3.2

El caracter convexo considerado es esencial para la existencia de soluciones fuertes, pues se pueden dar ejemplos de convexos para los cuales no hay soluciones fuertes y además y además no hay unicidad de soluciones débiles. En F. Mignot- J.P. Puel [1] se describe un ejemplo sencillo, donde se tiene que el conjunto de las soluciones débiles no se reduce a un sólo punto. ■

A continuación demostraremos (y comprobaremos numéricamente), que bajo la hipótesis $\mathcal{K} \neq \emptyset$ existe una solución mínima del problema débil (i.e. una solución \bar{z} tal que si z es cualquier otra solución entonces $\bar{z} \leq z$ para el orden natural de $L^2(Q)$). Además, \bar{z} es el límite en \mathcal{V} de las soluciones penalizadas.

Dicha solución mínima se llama la solución del problema débil o "solución física" del problema.

Comenzaremos probando el siguiente:

Lema 3.1

Bajo las hipótesis del Teorema 3.3, se tiene que la función $\xi \mapsto z_\xi$ es decreciente, i.e. si $\xi_1 > \xi_2$ entonces

$$z_{\xi_1} \leq z_{\xi_2} .$$

Demostración

Sea $z_i = z_{\xi_i}$, $i=1,2$. Multiplicando las ecuaciones penalizadas asociadas a ξ_1 y ξ_2 por $(z_2 - z_1)^+$ y restando llegamos a la igualdad

$$((z_2 - z_1)', (z_2 - z_1)^+) + a(z_2 - z_1, (z_2 - z_1)^+) + X = 0 ,$$

donde

$$X = \frac{1}{\xi_2} (\beta(z_2), (z_2 - z_1)^+) - \frac{1}{\xi_1} (\beta(z_1), (z_2 - z_1)^+) \geq 0 .$$

De esta expresión se deduce que $(z_2 - z_1)^+ = 0$. ■

Del Lema 3.1 obtenemos que

$$(3.20) \quad z_\xi \longrightarrow \bar{z} \text{ en } \mathcal{V} \text{ débil, } \xi \longrightarrow 0,$$

donde \bar{z} es una solución débil; además, como la inyección de \mathcal{V} en \mathcal{H} es compacta,

$$(3.21) \quad z_\xi \longrightarrow \bar{z} \text{ en } \mathcal{H} \text{ -fuerte.}$$

Se tiene ahora el siguiente

Teorema 3.4

Bajo las hipótesis del Teorema 3.3, si z es una solución débil de la inecuación variacional (2.26) y z_ξ es la solución del problema penalizado, entonces

$$(3.22) \quad z_\xi \leq z \quad \forall \xi > 0$$

Demostración

En (2.26), sea $z = u + z_\xi$, y $\varphi = w + z_\xi$. Entonces u

es solución de

$$\int_0^T \left\{ (w', w-u) + a(u, w-u) - \frac{1}{\varepsilon} (\beta(z_\varepsilon), w-u) \right\} dt + \frac{1}{2} |w(0)|^2 \geq 0$$

$$\forall w \in \mathcal{K}_{-z_\varepsilon}, \quad u \in K_{-z_\varepsilon}$$

Para probar (3.22), veamos que $u^- = 0$

Como suponemos que $\mathcal{K} \neq \emptyset$, sea $w_0 \in \mathcal{K}_{-z_\varepsilon}$ y

$$\theta \in W(0, T), \quad \theta \geq 0, \quad w_0 + \lambda \theta \in \mathcal{K}_{-z_\varepsilon} \quad \text{con} \quad \lambda > 0.$$

Tomemos $w = w_0 + \lambda \theta$ en la inecuación anterior.

Se obtiene que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |w_0(T) + \lambda \theta(T)|^2 - \int_0^T (w_0', u) + \int_0^T a(u, w_0 - u) - \\ & - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T (\beta(z_\varepsilon), w_0 - u) + \lambda \left\{ - \int_0^T (\theta', u) + \int_0^T a(u, \theta) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T (\beta(z_\varepsilon), \theta) \right\} \geq 0 \end{aligned}$$

Sea ahora θ tal que $\theta(T) = 0$, entonces si en la inecuación anterior dividimos por λ y hacemos tender λ a $+\infty$ se tiene:

$$(3.23) \quad \int_0^T \left\{ -(\theta', u) + a(u, \theta) - \frac{1}{\varepsilon} (\beta(z_\varepsilon), \theta) \right\} dt \geq 0$$

$$\theta \in W(0, T), \quad \theta \geq 0, \quad \theta(T) = 0$$

Sea ahora θ_η la aproximación de u^- definida

por

$$-\eta \frac{\partial \theta_\eta}{\partial t} + \theta_\eta = u^-, \quad \theta_\eta(T) = 0 \quad \text{con} \quad \eta > 0.$$

Se deduce que

$\theta_\eta \in W(0, T)$, $\theta_\eta \geq 0$, $\theta_\eta(T) = 0$ y $\theta_\eta \rightarrow u^-$ en V^p
 Tomamos ahora en (3.23) $\theta = \theta_\eta$, y se encuentra

la desigualdad

$$\int_0^T \left\{ -(\theta'_\eta, u) + a(u, \theta_\eta) - \frac{1}{\varepsilon} (\beta(z_\varepsilon), \theta_\eta) \right\} dt \geq 0,$$

de donde

$$\int_0^T (\theta'_\eta, u) dt \geq 0,$$

ya que

$$\int_0^T (\theta'_\eta, u^+) \geq 0 \quad \text{y} \quad \int_0^T (\theta'_\eta, u^-) \leq 0.$$

Es decir,

$$\int_0^T \left\{ a(u, \theta_\eta) - \frac{1}{\varepsilon} (\beta(z_\varepsilon), \theta_\eta) \right\} dt \geq 0,$$

y por paso al límite cuando $\eta \rightarrow 0$,

$$\int_0^T \left\{ a(u^-, u^-) + \frac{1}{\varepsilon} (\beta(z_\varepsilon), u^-) \right\} dt \leq 0.$$

Pero como

$$\int_0^T (\beta(z_\varepsilon), u^-) dt = 0,$$

resulta que

$$\int_0^T a(u^-, u^-) dt \leq 0,$$

de donde, finalmente $u^- = 0$. ■

Teorema 3.5

Bajo las hipótesis del Teorema 3.3 existe una solución mínima \bar{z} del problema débil, i.e. si z es cualquier otra solución débil, se tiene

$$(3.24) \quad z \geq \bar{z}$$

Demostración

Del Lema 3.1 se deduce que $z_\varepsilon \rightarrow \bar{z}$ en \mathcal{V}^0 -débil cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, donde \bar{z} es una solución del problema débil, y además

$$z_\varepsilon \rightarrow \bar{z} \text{ en } \mathcal{H} \text{ fuerte, } \varepsilon \rightarrow 0.$$

y del Teorema 3.4 se tiene que \bar{z} es solución mínima. ■

Se van a dar seguidamente algunas propiedades de la solución mínima, que naturalmente coincide con la solución fuerte en el caso de unicidad.

Proposición 3.1

Sean g_1, g_2 tales que los convexos asociados sean no vacíos y sean $f_1, f_2 \in \mathcal{H}$; entonces, si

$$g_1 \geq g_2 \quad \text{y} \quad f_1 \leq f_2$$

se tiene $\bar{z}_1 \leq \bar{z}_2$.

Demostración

Debido a las demostraciones precedentes bastará ver que se verifica esta propiedad para los problemas penalizados asociados a g_i, f_i , lo cual es inmediato. ■

Proposición 3.2

Sean g_1, g_2 dos funciones que verifican (2.9) y $f_1, f_2 \in \mathcal{H}$.

Bajo las hipótesis del Teorema 3.3, si z_i es una solución del problema débil asociado a (g_i, f_i) , se tiene:

$$\|z_1 - z_2\|_{L^\infty(Q)} \leq \| \tilde{g}_1 - \tilde{g}_2 \|_{L^\infty(Q)} + \|f_1 - f_2\|_{L^\infty(Q)}$$

Demostración

Bastará probarlo para las ecuaciones penalizadas asociadas a (g_i, f_i) , lo cual es fácil. ■

Para otras propiedades de las soluciones mínimas pueden consultarse A. Bensoussan- J.L. Lions [4], P. Charrier [4]. ■

C A P I T U L O I IPROPIEDADES GEOMETRICAS DE LOS DOMINIOS1 - INTRODUCCION

No es necesario ser un especialista en la Teoría de Optimización (ó en cualquier otra teoría matemática), para darse cuenta que una de las dificultades fundamentales en la resolución de un problema es la búsqueda de un marco adecuado para su planteamiento; así, en los problemas de Control geométrico la familia de dominios para la cual se plantea el problema juega un papel fundamental para la obtención de resultados de existencia de soluciones y de derivabilidad del funcional.

Por otra parte, es bien sabido que uno de los problemas más complicados del Análisis Funcional es la caracterización de dominios, es decir, encontrar las condiciones que debe satisfacer éste para que ciertas funciones definidas en el mismo verifiquen determinadas propiedades; así los Teoremas de Inyección de Sobolev, de Compacidad de Rellich-Kondrachov, de Trazas, ó los Teoremas de prolongación de Calderon y de Nikol'skii dependen de la regularidad del dominio. A título de ejemplo consideramos el problema de la prolongación: Si $\mathcal{F}(\Omega)$ es un espacio de funciones definidas en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, el problema es encontrar un operador de prolongación, i.e. dado

$u \in \mathcal{F}(\Omega)$ se trata de buscar $\tilde{u} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$(1.1) \quad \tilde{u}|_{\Omega} = u, \quad \|\tilde{u}\|_{\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{\mathcal{F}(\Omega)}$$

con $C > 0$ independiente de u , \tilde{u} .

La pregunta que surge es si existe una extensión de Ω a \mathbb{R}^n con la propiedad (1.1). La respuesta a tal cuestión está estrechamente ligada a las propiedades geométricas del dominio Ω . (cf. Kufner et al. [1] y R.A. Adams [1]).

Presentamos a continuación el concepto (y sus propiedades), de regularidad de un dominio. Aunque dicho concepto pueda definirse para un abierto general, nosotros nos restringiremos a dominios, y los utilizaremos exclusivamente en dominios acotados.

2 - EL CONCEPTO DE REGULARIDAD DE UN DOMINIO

Diferentes descripciones de la regularidad de un dominio se han dado por diferentes autores; entre éstos podemos mencionar a R.A. Adams [1], S. Agmon [1], D. Chenais [1][2], D. Gilbarg-N.S. Trudinger [1], A. Kufner et al. [1], O.A. Ladyzenskaja et al. [1], J.L. Lions - E. Magenes [1], F. Murat - J. Simon [2], J. Nečas [1], etc.

Esencialmente, la regularidad de un dominio la podemos expresar bajo tres puntos de vista que están muy relacionados:

2.1 Dominios de clase C

Este punto de vista es el utilizado en la obra

de J.L. Lions-E. Magenes [1] (véase también A. Kufner et al. [1]), así como F. Murat-J. Simon [2]), y coincide con el concepto de variedad con frontera de una determinada clase.

Definición 2.1

Se dice que un dominio Ω de R^n es de clase C si su frontera $\partial\Omega$ es una variedad de dimensión $n-1$ de clase C, estando Ω localmente situado de un solo lado de $\partial\Omega$, i.e. si para todo $x \in \partial\Omega$ existe un entorno U_x de x , un entorno V_x del origen de R^n , y una aplicación biyectiva Ψ_x de U_x sobre V_x tales que:

$$i) \quad \Psi_x(U_x \cap \Omega) = V_x \cap R_+^n = V_x \cap \{x=(x'; x_n) \in R^n / x_n \geq 0\},$$

$$ii) \quad \Psi_x(U_x \cap \partial\Omega) = V_x \cap \{x=(x'; x_n) \in R^n / x_n = 0\},$$

$$iii) \quad \Psi_x, \Psi_x^{-1} \text{ son de clase C,}$$

donde C designa una clase de funciones regulares (por ejemplo; contínuas, lipschitcianas, $C^{k,\alpha}$ con $k \in N$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $W^{k,\sigma}$ con $k \in N$ y $\sigma = \infty$ ó \bar{c} , C^∞ , etc.).

Se define también los dominios de clase C por trozos: Un dominio Ω se dice que tiene un trozo de frontera $\pi \subset \partial\Omega$ de clase C si en cada punto $x \in \pi$ existe un entorno U_x donde las condiciones anteriores se verifican y tal que $U_x \cap \partial\Omega \subset \pi$.

Se dice frecuentemente que el C-homeomorfismo Ψ_x enderezza la frontera cerca de x ■

Observación 2.1

i) Sea $C \equiv C^{k,\alpha}$ con $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha \leq 1$. De la Definición 2.1 se sigue inmediatamente que todo dominio de clase $C^{k,\alpha}$ es también de clase $C^{j,\beta}$ con $j+\beta < k+\alpha$, $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$.

ii) Sea $C \equiv W^{k,\sigma}$, con $k=0$ y $\sigma = \bar{c}$ ó $k \geq 1$ y $\sigma = \infty$ ó \bar{c} (ver el Apéndice), y $T \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$. Entonces por composición de cartas locales con T se deduce que si Ω es de clase $W^{k,\sigma}$, $T(\Omega)$ también lo es. ■

2.2 Dominios con frontera descrita por un grafo

Los dominios que vamos a definir son utilizados por J. Necas [4] así como por otros autores (O.A. Ladyzenkaja et al. [1], A. Kufner et al. [4] ...). La ventaja del concepto que sigue consiste en la descriptibilidad de la frontera del dominio, y corresponde a la definición de variedades por la condición de coordenadas.

Definición 2.2

Un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es un dominio con frontera localmente descrita por un grafo de clase C (ó brevemente un LG-dominio de clase C), si su frontera es localmente el grafo de una función de clase C , i.e., si para todo $x \in \partial \Omega$ existe un sistema local de coordenadas cartesianas $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) = (y', y_n)$, unos números reales $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y una función a definida en $\Delta =]-\alpha, +\alpha[^{n-1}$ tales que

$$i) \left\{ y \in \mathbb{R}^n / y' \in \bar{\Delta}, y_n = a(y') \right\} \subset \partial \Omega,$$

- ii) $\left\{ y \in \mathbb{R}^n / y' \in \bar{\Delta}, a(y') < y_n < a(y') + \beta \right\} \subset \Omega,$
 iii) $\left\{ y \in \mathbb{R}^n / y' \in \bar{\Delta}, a(y') - \beta < y_n < a(y') \right\} \subset \mathbb{R}^n - \Omega,$
 iv) a es de clase C en $\bar{\Delta},$

donde C de nuevo es una clase de funciones (como en la Definición 2.1).

Para dominios acotados introducimos una noción más precisa: suponemos que en \mathbb{R}^n tenemos un sistema de coordenadas fijo $x = (x_1, \dots, x_n)$ y los sistemas de coordenadas que introduciremos se suponen con la misma orientación y la misma unidad de longitud, i.e. si denotamos $x = (x_1, \dots, x_n)$ otro sistema, la transformación de coordenadas $x \rightarrow x'$ viene dada por una aplicación del tipo $x = Ax + c$, donde A es una matriz ortonormal con determinante unidad y c es un vector.

Definición 2.3

Un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es un dominio con frontera descrita por un grafo de clase C (ó brevemente un G -dominio de clase C) si se tiene:

- i) existen m sistemas de coordenadas cartesianas ($m \in \mathbb{N}$)

$$x_r = (x_{r,1}, \dots, x_{r,N-1}, x_{r,N}) = (x'_r, x_{rn}) \quad r=1, 2, \dots, m$$

- ii) existen un número real $\alpha > 0$ y m funciones a_r , $r=1, 2, \dots, m$ de clase C^m, Δ_r con $\Delta_r =]-\alpha, \alpha[$ $n-1$

- iii) existe un número real $\beta > 0$ tal que

- a) los conjuntos

$$\Lambda_r = A_r^{-1} \left(\left\{ x_r = (x'_r, x_{rn}) / x'_r \in \Delta_r \text{ y } x_{rn} = a_r(x'_r) \right\} \right)$$

son subconjuntos de $\partial\Omega$ para $r=1,2,\dots,m$ y

$$\partial\Omega = \bigcup_{r=1}^m \Lambda_r$$

donde $A_r: x \mapsto x_r$ es la transformación de coordenadas descrita anteriormente

b) para cada $r=1,2,\dots,m$ el conjunto

$$U_r^+ = A_r^{-1} \left(\left\{ x_r = (x'_r, x_{rn}) / x'_r \in \Delta_r \text{ y } a_r(x'_r) < x_{rn} < a_r(x'_r) + \beta \right\} \right)$$

es un subconjunto de Ω

c) para cada $r=1,2,\dots,m$ el conjunto

$$U_r^- = A_r^{-1} \left(\left\{ x_r = (x'_r, x_{rn}) / x'_r \in \Delta_r \text{ y } a_r(x'_r) - \beta < x_{rn} < a_r(x'_r) \right\} \right)$$

es un subconjunto de $R^n - \Omega$. ■

Observación 2.2

Los conjuntos Λ_r son relativamente abiertos en $\partial\Omega$. Los conjuntos U_r^+, U_r^- son abiertos acotados de R^n . Denotamos

$$U_r = U_r^+ \cup \Lambda_r \cup U_r^- \quad r=1,2,\dots,m.$$

Cada U_r es abierto; además, es fácil probar que existe un abierto $U_0 \subset \bar{U}_0 \subset \Omega$ tal que la familia $\{U_r\}_{r=0}^{r=m}$ es un recubrimiento abierto de $\bar{\Omega}$.

La familia $\{U_r\}_{r=1}^m$ es un recubrimiento abierto de $\partial\Omega$. ■

Observación 2.3

Los G-dominios de clase $C^{k,\alpha}$ con $k \geq 0$ son dominios de clase $C^{k,\alpha}$ pero el recíproco es falso si $k=0$ y verdadera

si $k \geq 1$, como lo prueba el ejemplo dado por R.A. Adams-Aronzajn-J. Smith [1], e incluso en el caso $C^{0,1}$ (cf. el ejemplo de Zerner, a partir de una función "diente sierra", en F. Murat-J. Simon [2]). ■

2.3 Dominios con la propiedad del cono

Por último consideremos el punto de vista adoptado por S. Agmon [1], R.A. Adams [1], [2], Kufner et al. [1]. D. Chénais [1], Gilbarg-Trudinger [1] ..., que puede parecer menos preciso en cuanto a la descripción de la regularidad de la frontera pero que, sin embargo, hace aparecer una condición de tipo geométrico simple. Estos dominios son adecuados para muchos de los objetivos que se mencionan en la Introducción.

Definición 2.4

Sea ξ un vector unitario de R^n , $\alpha \in]0, 1[$ y h un número real positivo; se llama cono finito recto de vértice el origen, eje ξ , apertura α (ó ángulo θ , donde $\tan \theta = \alpha$, $\theta \in]0, \pi/2[$) y altura h al conjunto $C(\xi, \alpha, h) \equiv C(\xi, \theta, h)$, definido por:

$$\begin{aligned} C(\xi, \alpha, h) &= B(0, h) \cap \bigcup_{\lambda > 0} \lambda B(\xi, \alpha) = \\ &= B(0, h) \cap \left\{ \lambda x / \lambda > 0, x \in R^n, |x - \xi| < \alpha \right\} \\ &= \left\{ x \in R^n / |x| < h, (x, \xi) > |x| \cos \theta \right\} \end{aligned}$$

donde $B(x, r)$ designa la bola abierta de centro x y radio r ;

$\|\cdot\|$ y (\cdot, \cdot) representan la norma y el producto escalar euclidianos de \mathbb{R}^n .

En el caso particular $\alpha = 0$ (ó $\theta = 0$), el cono se llama segmento de dirección ξ y altura h . ■

Observación 2.4

La anterior definición se puede generalizar en el siguiente sentido: Sea $x(\lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$ un arco simple de \mathbb{R}^n , $\alpha \in]0, 1[$ y $0 < h < |x(1) - x(0)|$; se llama conoide con vértice en $x(0)$, apertura α , arco axial $x(\lambda)$ y altura h al conjunto:

$$C(x(\lambda), \alpha, h) = B(x(0), h) \cap \bigcup_{0 < \lambda < 1} B(x(\lambda), \alpha |x(\lambda) - x(0)|)$$

Si $\alpha = 0$, al conjunto $C(x(\lambda), 0, h)$ se le llama arco de altura h .

Definición 2.5

Se dice que un dominio Ω tiene la propiedad del cono, (ó es un C-dominio), si dados $\alpha \in]0, 1[$, $h > 0$, y $r > 0$ ($2r \leq h$) $\forall x \in \partial\Omega$, $\exists C_x(\xi_x, \alpha, h) = C_x$ con vértice el origen, eje ξ_x , apertura α y altura h tal que

$$\forall y \in B(x, r) \cap \Omega$$

se tiene $y + C_x \subset \Omega$. ■

En el caso en que la propiedad se verifica sólo para $\alpha = 0$, se dice que Ω tiene la propiedad del segmento (ó es un S-dominio). ■

Observación 2.5

i) La propiedad del cono que acabamos de definir corresponde a la propiedad restringida de acuerdo con la terminología de S. Agmon[1].

Este autor introduce además la propiedad ordinaria más débil en general; sin embargo para dominios acotados, (lo que corresponde a nuestro caso, estas dos propiedades coinciden).

ii) La propiedad del segmento, definida anteriormente, coincide con la dada por S. Agmon para dominios acotados.

iii) La propiedad del segmento es suficiente para muchas de las condiciones que deben verificar los espacios de Sobolev (ver S. Agmon [1], R.A. Adams [1], ...); sin embargo, para otras condiciones (por ejemplo, los Teoremas de Inyección de Sobolev) es necesario (R.A. Adams [2]) exigir la propiedad del cono, e incluso (por ejemplo para los Teoremas de Trazas en los espacios de Sobolev) propiedades más fuertes.

Además, en los problemas de Control geométrico la propiedad del cono, es necesaria para la obtención de la existencia de soluciones.

Observación 2.6

Análogamente a como se hizo en la Observación 3.4, podemos introducir una generalización del concepto de C-domi-

nio: Sean $\varkappa \in]0,1[$ $h > 0$ suficientemente pequeño y $r > 0$ con $(2r \leq h)$. Se dice que un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad del conoide (Ω es un C-dominio) si $\forall x \in \partial\Omega$ existe un conoide $C_x = C_x(x(\lambda), \varkappa, h)$ de vértice $x(0)=0$, apertura \varkappa y altura h , tal que $\forall y \in B(x, r) \cap \Omega$ se tiene $y + C_x \subset \Omega$. ■

Observación 2.7

Se pueden considerar otras definiciones del concepto de regularidad de un dominio (dominios con la propiedad de la cuña, dominios con la propiedad del σ -cono, dominios de tipo A, dominios de tipo S (Kufner et al. [1]), dominios regulares con puntos cuspidales de tipo potencial (R. A. Adams [2]), etc.) que se utilizan para obtener propiedades en los espacios de funciones asociados, no obstante, nos limitaremos aquí a considerar dominios con la propiedad del cono σ , en general, dominios con la propiedad del conoide, por tener estos últimos la propiedad de invarianza bajo homeomorfismo bilipchicianos. En efecto,

Si C es un conoide de apertura \varkappa , altura h y vértice en x y T es un homeomorfismo bilipchiciano de constante de Lipschitz L , entonces $T(C)$ contiene un conoide C^* de apertura \varkappa/L^2 , altura h/L y vértice en $T(x)$ (ver H. Federer [1]).

En general, el resultado anterior no es cierto para dominios con la propiedad del cono, como lo muestra el e-

jemplo siguiente (dado por R.A. Adams-N. Aronszajn-J. Smith [1]):

En coordenadas polares de \mathbb{R}^2 , $\rho e^{i\theta} = x_1 + ix_2$, se define el homeomorfismo bilipchiciano

$$T(\rho e^{i\theta}) = \rho e^{i(\theta - \lg \rho)}$$

Si consideramos el cono

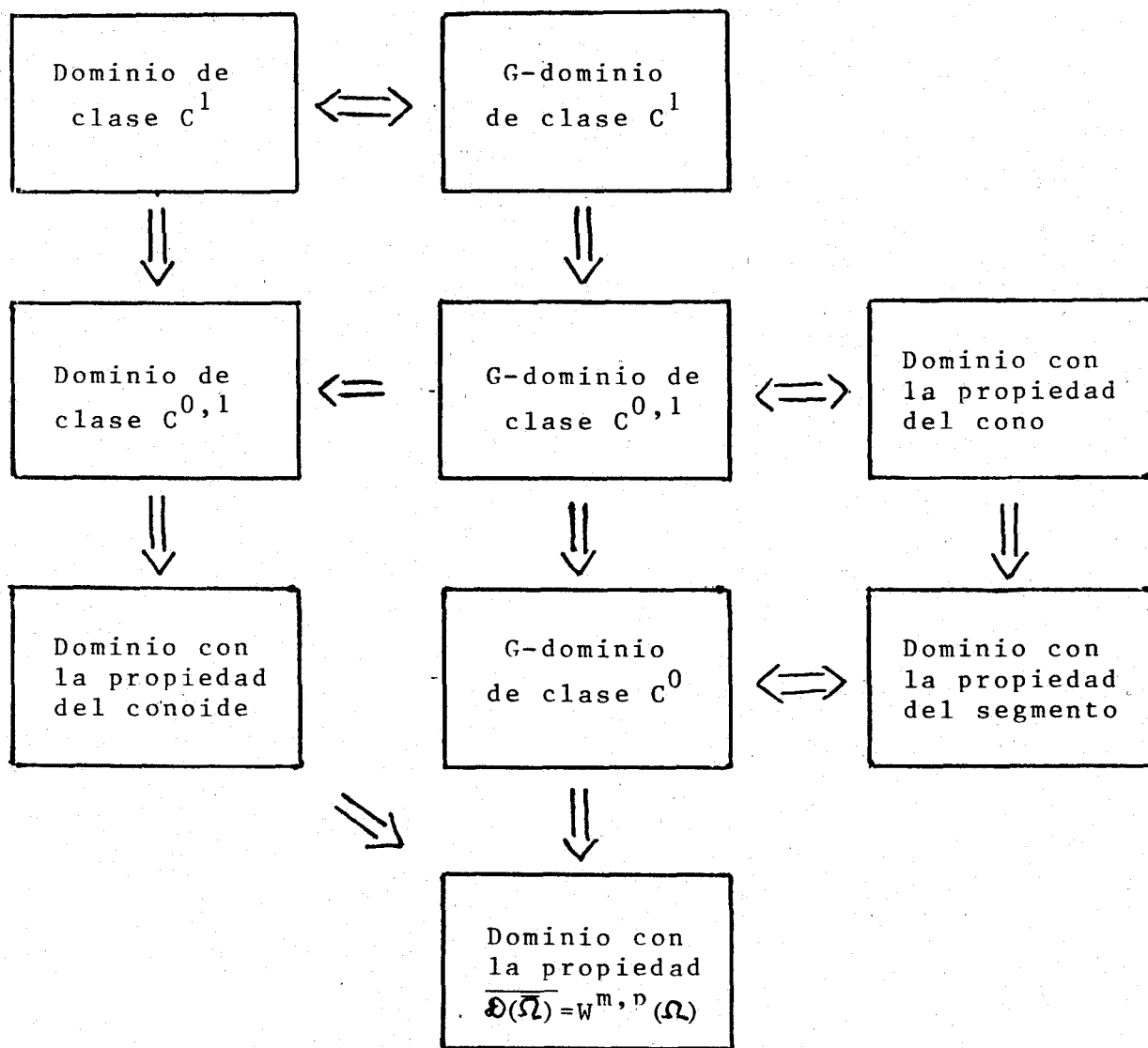
$$C = \{(\rho, \theta) / 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \pi/2\}$$

vemos que $T(C)$ no contiene ningún cono con vértice el origen. ■

3 - RELACIONES ENTRE LOS CONCEPTOS DE REGULARIDAD

Indicamos aquí las implicaciones que pueden establecerse entre las anteriores definiciones de regularidad de un dominio; algunas de las cuales pueden encontrarse en R. A. Adams [1]. Como ya hemos mencionado anteriormente, consideremos sólo dominios acotados.

Las relaciones vienen dadas por el diagrama de la página siguiente.



4 - FAMILIAS DE DOMINIOS. TOPOLOGIAS ASOCIADAS

4.1 Familias de Dominios

Sea D un dominio acotado de \mathbb{R}^n ; los problemas de diseño óptimo que se considerarán están planteados en una familia $\mathcal{D}(D)$ de dominios "regulares" (en alguno de los sentidos de los párrafos anteriores):

$$(4.1) \quad \mathcal{D}(D) = \left\{ \Omega / \Omega \text{ abierto regular de } \mathbb{R}^n \text{ con } \Omega \subset D \right\}.$$

Dicha familia $\mathcal{D}(D)$ ha de ser suficientemente amplia para tener en cuenta el mayor número posible de casos interesantes, pero a la vez, ha de ser lo suficientemente reducida como para que los resultados de existencia de soluciones de los problemas de control geométrico pueden obtenerse y aún más reducida si queremos, como en nuestro caso, dar condiciones necesarias de optimalidad.

Para trabajar cómodamente con los elementos de $\mathcal{D}(D)$, debemos exigirles la propiedad de prolongación uniforme en los espacios de Sobolev, ya que para un espacio de Sobolev de distribuciones definidas en $\Omega \in \mathcal{D}(D)$ existe un operador de prolongación uniforme que le lleva a un espacio de Sobolev análogo de distribuciones definidas en \mathbb{R}^n , se puede (por los teoremas de densidad, de inyección, de compacidad,...) reducirse a los espacios de Sobolev de distribuciones en \mathbb{R}^n (J. Necas [1]).

A título de orientación, consideremos el ejemplo

siguiente:

Sea $\Omega = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < x_1^r \right\}$,
 e $y(x_1, x_2) = x_1^\alpha$ con r y α dos constantes reales positivas.

Se prueba facilmente que $y \in H^1(\Omega)$ si $2\alpha + r > 1$.

Supongamos que existe un operador de prolongación uniforme, i.e. existe $\tilde{y} \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $\tilde{y}|_\Omega = y$. Por el Teorema de Inyección de Sobolev (J.L. Lions [13]), se tiene que $\tilde{y} \in L^p(\mathbb{R}^2)$ para todo p finito, de donde $y \in L^p(\Omega)$ para todo p finito. Ahora bien, si $y = x_1^\alpha$ es un elemento de $L^p(\Omega)$, se ha de tener $\alpha \geq 0$; pero si $y \in H^1(\Omega)$ se tiene $2\alpha + r > 1$, y tomando r suficientemente grande se llega a que $\alpha < 0$, lo cual es una contradicción.

En consecuencia, tal operador de prolongación no existe.

Este ejemplo indica que para que los dominios Ω tengan la propiedad de prolongación uniforme deben al menos ser tales que para cada punto de $\bar{\Omega}$ podamos tomar un entorno "parecido" a un entorno de \mathbb{R}_+^n . Por otra parte, se observa que el anterior Ω no cumple la propiedad del segmento, lo que sugiere por el parágrafo anterior considerar la familia \mathcal{D} (D) formada por elementos con la propiedad del cono de hecho, pueden darse Teoremas de inyección para dominios más generales (R.A. Adams [2]).

Además, se prueba en J. Necas [1] que todo dominio con frontera descrita localmente por una aplicación

lipschiciana tiene la propiedad de prolongación uniforme, y este autor hace ver que si existe el operador de prolongación, entonces el dominio ha de ser "casi" de este tipo.

No obstante, en los problemas de Dirichlet, la propiedad de prolongación de soluciones es siempre posible (lo cual no es cierto para condiciones de contorno de tipo Neumann).

Señalemos también que la existencia de controles óptimos, conduce a la consideración de dominios que unifiquen una hipótesis del tipo Blaschke, es decir, en cierto sentido, una propiedad de compacidad.

Los dominios con la propiedad del cono cumplen esta propiedad; sin embargo, esto no es cierto en general para los dominios con la propiedad del segmento, como se prueba en A. Bendali [1].

Para la obtención de condiciones necesarias de optimalidad es cómodo trabajar en una familia \mathcal{D} (D) de dominio que sean imágenes de un dominio fijo \mathcal{O} por biyecciones uniformemente bilipchicianas definidas sobre un entorno de \mathcal{O} . Ahora bien, la imagen de un dominio por una transformación de este tipo no es necesariamente un dominio con frontera localmente descrita por una aplicación lipchiciana, como lo muestra el ejemplo dado por R.A. Adams - N. Aronszajn - J. Smith [1].

Todas estas consideraciones conducen a la defi-

ción de las siguientes familias de dominios:

Definición 4.1

Sean r y λ dos números positivos dados; se define:

$$(4.2) \quad \mathcal{D}(r, \lambda) = \left\{ \Omega \in \mathcal{Q}(D) / \Omega \text{ es de clase } C^{0,1}, \right. \\ \left. \text{de constantes } \lambda, r \right\}. \blacksquare$$

Es decir, en la Definición 2.1 anterior, Ψ_x es bilipchiciana de constante λ , y $U_x = B(x, r)$.

Definición 4.2

Sea \mathcal{O} un dominio acotado fijo de clase $W^{k, \sigma}$ con $k=0$ y $\sigma = \bar{c}$ ó $k \geq 1$ y $\sigma = \infty$ ó \bar{c} , se define:

$$(4.3) \quad \mathcal{D}_{\mathcal{O}}^{k, \sigma} = \left\{ \Omega / \exists T \in \mathcal{T}^{k, \sigma} \text{ tal que } \Omega = T(\mathcal{O}) \right\} = \\ = \left\{ T(\mathcal{O}) / T \in \mathcal{T}^{k, \sigma} \right\}. \blacksquare$$

Definición 4.3

Sean λ y δ dos números positivos fijos, para $k \in \mathbb{Z}^+$ y $0 \leq \nu \leq 1$ se define:

$$(4.4) \quad \mathcal{Q}^{k, \nu}(\lambda, \delta) = \left\{ \Omega \in \mathcal{Q} / \Omega \text{ es un G dominio de} \right. \\ \left. \text{clase } C^{k, \nu} \text{ de constantes } \lambda, \delta \right\}. \blacksquare$$

Es decir, en la Definición 2.3 anterior, las a_r son funciones bilipchicianas de constante λ , y $\alpha = \delta$,

$$\beta = \lambda \delta \sqrt{n-1}. \blacksquare$$

Definición 4.4

Sean $x \in]0, 1[$, $h > 0$ y $r > 0$ fijos. Se define

$$(4.5) \quad \mathcal{D}(x, h, r) = \left\{ \Omega \in \mathcal{Q} / \Omega \text{ tiene la propiedad del} \right. \\ \left. \text{cono de constantes } x, h, r \right\}. \blacksquare$$

Es decir, que existe un cono de constantes \mathcal{X} , h , r para todos los dominios de $\mathcal{D}(\mathcal{X}, h, r)$.

Observación 4.1

i) Si \mathcal{V} es un G-dominio de clase $C^{0,1}$ se tiene:

$$(4.6) \quad \mathcal{D}_{\sigma}^{1, \bar{c}} \subset \mathcal{D}(\mathcal{X}, h, r) \equiv \mathcal{D}^{0,1}(\lambda, \delta) \subset \mathcal{D}_{\sigma}^{1, \infty} \subset \mathcal{D}(r, \lambda).$$

ii) Como hemos indicado al comienzo de este párrafo, estas familias familias estan adaptadas a distintas necesidades. Para los problemas que nos ocupan, utilizaremos frecuentemente la familia $\mathcal{D}^{0,1}(\lambda, \delta)$ pues, además de lo indicado, en tales dominios se puede definir un vector normal exterior en casi todo punto, así como la integral de superficie (independiente de las cartas locales) y otras muchas nociones asociadas a los espacios de Sobolev (J. Necas [4]). ■

4.2 Topologías asociadas

Una de las dificultades que existe en el tratamiento de los problemas de Control geométrico es la de encontrar un marco adecuado para expresar la idea de proximidad entre dominios. Esta dificultad no es tan insalvable como la de encontrar una estructura vectorial, pues se pueden introducir distintas topologías asociadas a las familias de dominios definidas en la Sección anterior, basadas en los siguientes puntos de vista:

i) Desplazamientos sobre la normal. Estudiado por J. Ha-

damard [4] en 1907 y utilizado en los problemas de diseño óptimo por O. Pironneau [4][2] [3].

ii) Representaciones por homeomorfismos regulares próximos de la identidad. Introducido por P.R. Garabedian-M. Schiffer [4] en 1952 y utilizado en problemas de control geométrico por F. Murat-J. Simon [1][2]. Una variante de este punto de vista ha sido introducida por J. Cea [2] .

iii) Variaciones de la función característica. Estudiado por J. Cea-A. Gioan-J. Michel en 1973 y utilizado por el grupo de Niza en los problemas de identificación de dominios.

Dependiendo de estos enfoques, y de las familias anteriormente definidas se introducen las topologías siguientes

4.2.1. Topología sobre $\mathcal{D}(r, \lambda)$

Bajo el punto de vista iii) se introduce la topología de las funciones características de los elementos de $\mathcal{D}(r, \lambda)$.

Dados dos elementos $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{D}(r, \lambda)$ se define la distancia

$$(4.7) \quad \delta(\Omega_1, \Omega_2) = \mu(\Omega_1 \Delta \Omega_2),$$

donde μ es la medida de Lebesgue n-dimensional y Δ es la diferencia simétrica de conjuntos.

Observación 4.2 (D. Chenais [2]),

i) Si χ_i denota la función característica de

Ω_i , $i=1,2$, la distancia (4.7) resulta ser

$$(4.8) \quad \delta(\Omega_1, \Omega_2) = \|\chi_1 - \chi_2\|_{L^1(D)}$$

Además, podemos substituir $L^1(D)$ por cualquier otro $L^p(D)$ con $1 \leq p < +\infty$, definiéndose siempre la misma topología, ya que

$$\|\chi_1 - \chi_2\|_{L^p(D)}^p = \|\chi_1 - \chi_2\|_{L^1(D)}$$

Diremos entonces que una sucesión $\|\Omega_n\|$ de elementos de $\mathcal{D}(r, \lambda)$ converge en medida a un elemento $\Omega \in \mathcal{D}(r, \lambda)$ si y solo si $\chi_n \rightarrow \chi$ en $L^1(D)$ -fuerte.

ii) La topología definida por (4.7) es una topología métrica puesto que si $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{D}(r, \lambda)$, entonces $\chi_1 = \chi_2$ cpd en D si y solo si $\chi_1 = \chi_2$ en todo D .

iii) La familia $\mathcal{D}(r, \lambda)$ dotada de la operación Δ y de la distancia δ es un grupo topológico conmutativo.

iv) Utilizando el Criterio de Rellich sobre las partes relativamente compactas de $L^p(\mathbb{R}^n)$, se deduce que $\mathcal{D}(r, \lambda)$ es un espacio topológico compacto.

v) El método de prolongación por reflexiones prueba que los espacios de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, con $\Omega \in \mathcal{D}(r, \lambda)$, tienen la propiedad de prolongación uniforme, es decir, existe una constante C que depende solamente de r , y λ tal que si $\Omega \in \mathcal{D}(r, \lambda)$ existe $p_\Omega \in \mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$ que verifica $\|p_\Omega\| \leq C$. ■

4.2.2 Topología sobre $\mathcal{D}_\sigma^{k,\sigma}$

Teniendo en cuenta las relaciones (4.6), se puede considerar la métrica (4.7) en las familias antes definidas; sin embargo, como $\mathcal{D}_\sigma^{k,\sigma}$ está construida a partir de los elementos de $\mathcal{C}^{k,\sigma}$, podemos introducir la topología transportada de $\mathcal{C}^{k,\sigma}$, bajo el punto de vista ii).

Sea \mathcal{O} un dominio acotado de clase $W^{k,\sigma}$ con $k=0$ y $\sigma=\bar{c}$ ó $k \geq 1$ y $\sigma = \infty$ ó \bar{c} . Dados dos elementos

$$(4.9) \quad \Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{D}_\sigma^{k,\sigma} \quad \text{se define la casidistancia}$$

$$d_{k,\sigma}(\Omega_1, \Omega_2) = \inf \left\{ \mathcal{S}_k(T, I) / T \in \mathcal{C}^{k,\sigma}, T(\Omega_1) = \Omega_2 \right\}$$

$$= \inf \left\{ \|T-I\|_k + \|T^{-1}-I\|_k / T \in \mathcal{C}^{k,\sigma}, T(\Omega_1) = \Omega_2 \right\}.$$

Observación 4.3 (F. Murat-J. Simon [2])

i) El conjunto $\mathcal{C}^{k,\sigma}$, es un grupo para la composición de aplicaciones, y así el espacio $\mathcal{D}_\sigma^{k,\sigma}$, dotado del grupo de operadores $\mathcal{C}^{k,\sigma}$, es un espacio homogéneo; de hecho $\mathcal{D}_\sigma^{k,\sigma}$ es la órbita de \mathcal{O} para el grupo de operadores $\mathcal{C}^{k,\sigma}$. Además, $\mathcal{L}_\sigma^{k,\sigma}$ es órbita de cada uno de sus elementos, es decir, si $\Omega \in \mathcal{L}_\sigma^{k,\sigma}$ entonces $\mathcal{L}_{\Omega}^{k,\sigma} = \mathcal{D}_\sigma^{k,\sigma}$ (N. Bourbaki [4][2]).

ii) Si ahora consideramos $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ con su topología, definida por \mathcal{S}_k (véase el Apéndice), se tiene:

- Para $k \geq 1$ y $\sigma = \infty$ ó \bar{c} , $\mathcal{D}_\sigma^{k,\sigma}$ es completo
- La aplicación $T \rightarrow T(\Omega)$ con $\Omega \in \mathcal{D}_\sigma^{k,\sigma}$, $k=0$ y $\sigma = \bar{c}$ ó $k \geq 1$ y $\sigma = \infty$ ó c es contractiva de $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ en $\mathcal{D}_\sigma^{k,\sigma}$.
- La aplicación $(T, \Omega) \rightarrow T(\Omega)$ es continua de

$\mathcal{C}^{k, \bar{c}} \times \mathcal{D}_\theta^{k, \bar{c}}$ en $\mathcal{L}_\epsilon^{k, \bar{c}}$ para $k \geq 0$.

d) Para $k \geq 1$, $\mathcal{L}_\epsilon^{k, \bar{c}}$ es un espacio topológico homogéneo.

iii) Se observa además que la casidistancia $d_{k, \sigma}$ no depende de θ ; sólo depende del orden de regularidad de los homeomorfismos.

iv) Teniendo en cuenta las observaciones anteriores, (4.9) se puede expresar de la manera que sigue:

$$(4.10) \quad d_{k, \sigma}(\Omega_1, \Omega_2) = \inf \left\{ \mathcal{J}_k(T_1, T_2) / T_1, T_2 \in \mathcal{C}^{k, \sigma}, T_1(\sigma_1) = \Omega_1, T_2(\sigma_1) = \Omega_2 \right\},$$

donde $\sigma_1, \Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{D}_\theta^{k, \sigma}$, ó bien, si $T_2 \in \mathcal{C}^{k, \sigma}$ es tal que $T_2(\sigma_1) = \Omega_2$, entonces

$$(4.11) \quad d_{k, \sigma}(\Omega_1, \Omega_2) = \inf \left\{ \mathcal{J}_k(T_1, T_2) / T_1 \in \mathcal{C}^{k, \sigma}, T_1(\sigma_1) = \Omega_1 \right\}.$$

v) De la relación (27) del Apéndice se deduce que

$$(4.12) \quad \mathcal{L}_\epsilon^{k+1, \bar{c}} \subset \mathcal{L}_\theta^{k+1} \subset \mathcal{D}_\theta^{k, \bar{c}} \quad \forall k \geq 0,$$

$$(4.13) \quad d_{k, \bar{c}}(\Omega_1, \Omega_2) \leq d_{k+1, \infty}(\Omega_1, \Omega_2) \leq d_{k+1, \bar{c}}(\Omega_1, \Omega_2) \\ \forall \Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{L}_\epsilon^{k+1, \bar{c}}$$

vi) Se tiene el siguiente resultado de compacidad: sea $\Omega_0 \in \mathcal{L}_\epsilon^{k, \sigma}$ y C un número positivo. Sea $k \geq 2$ y $\sigma = \infty$ ó \bar{c} ; entonces, de toda sucesión $\{\Omega_n\}$ de $\mathcal{L}_\epsilon^{k, \sigma}$ tal

que $d_{k,0}(\Omega_n, \Omega_0) \leq C$ (acotada), se puede extraer una sub-
sucesión convergente en $\mathcal{D}_\sigma^{k-1, \bar{c}}$ hacia un elemento
 $\Omega \in \mathcal{D}_\sigma^{k, \infty}$ tal que $d_{k,\infty}(\Omega_i, \Omega_0) \leq C$.

vii) Introduciendo el grupo de isotropía ó esta-
bilizador de σ en $\mathcal{C}^{k,0}$ mediante la igualdad

$$(4.14) \quad \mathcal{C}_\sigma^{k,\sigma} = \left\{ T \in \mathcal{C}^{k,\sigma} / T(\sigma) = \sigma \right\}$$

(un subgrupo de $\mathcal{C}^{k,\sigma}$), se puede definir una relación de
equivalencia sobre $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ por: $T_1 \sim T_2$ si y solo si
 $T_1 \circ T_2^{-1} \in \mathcal{C}_\sigma^{k,\sigma}$, es decir $T_1(\sigma) = T_2(\sigma)$. Esta relación de-
fine a su vez el espacio cociente $\mathcal{C}^{k,\sigma} / \mathcal{C}_\sigma^{k,\sigma}$. Se tiene
entonces que $\mathcal{D}_\sigma^{k,\sigma}$ es isomorfo a dicho grupo cociente, y
por tanto se puede transportar la topología cociente a
 $\mathcal{D}_\sigma^{k,\sigma}$. La topología así resultante en $\mathcal{D}_\sigma^{k,\sigma}$ no es unifor-
me y por tanto no es suficiente para cubrir nuestras nece-
sidades.

4.2.3 Topología de Hausdorff

La topología de F. Hausdorff [1] se introduce
en la familia de cerrados no vacíos de un espacio métrico
cualquiera; sin embargo nosotros la expondremos aquí en la
familia \mathcal{F} de cerrados no vacíos de \mathbb{R}^n y, en particular,
en los compactos de \mathbb{R}^n .

Dado un punto $a \in \mathbb{R}^n$ fijo se define la aplica-
ción

$$(4.15) \quad \begin{aligned} j: F \in \mathcal{F} &\longmapsto j_F \in C(\mathbb{R}^n), \\ j_F: x \in \mathbb{R}^n &\longmapsto j_F(x) = d(x, F) - d(x, a), \end{aligned}$$

donde $d(x, F) = \inf \{ |x-y| \mid y \in F \}$ y $C(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de las funciones continuas y acotadas con la norma de la convergencia uniforme.

Se demuestra fácilmente que j es una aplicación inyectiva, que $j(\mathcal{F})$ es un conjunto uniformemente equicontinuo de $C(\mathbb{R}^n)$, que $\|j_F\|_\infty = \sup \{ |j_F(x)| \mid x \in \mathbb{R}^n \} \leq d(a, F)$ y que

$$(4.16) \quad \|j_F - j_G\|_\infty = \sup \{ |d(x, F) - d(x, G)| \mid x \in \mathbb{R}^n \} \quad \forall F, G \in \mathcal{F}.$$

Sea D un acotado fijo de \mathbb{R}^n , se define $\mathcal{F}(D)$ como la familia de los conjuntos cerrados no vacíos contenidos en D , y se le dota de la distancia (llamada de Hausdorff).

$$(4.17) \quad \begin{aligned} h(F, G) &= \sup \left\{ |d(x, F) - d(x, G)| \mid x \in D \right\} \\ &= \max \left\{ \sup_{x \in F} \inf_{y \in G} |x-y|, \sup_{x \in G} \inf_{y \in F} |x-y| \right\} \\ &= \inf \left\{ \varepsilon > 0 \mid F \subset \bar{B}(G, \varepsilon), \quad G \subset \bar{B}(F, \varepsilon) \right\} \end{aligned}$$

para todo $F, G \in \mathcal{F}(D)$, donde $\bar{B}(F, \varepsilon) = \bigcup_{x \in F} \bar{B}(x, \varepsilon)$

Observación 4.4 (J.P. Aubin [2], H. Federer [1])

i) Como \mathbb{R}^n es localmente compacto, se puede introducir una topología menos fina que la de Hausdorff mediante un sistema de entornos de la forma

$$\left\{ F \in \mathcal{F}(D) \mid \sup_{x \in F} \inf_{y \in F_0} |x-y| < \varepsilon \right\}$$

para todo $F_0 \in \mathcal{F}(D)$ y todo $\varepsilon > 0$. Se ve inmediatamente que la semicontinuidad superior respecto a la topología de Hausdorff de una aplicación $f: X \rightarrow \mathcal{F}(D)$ (donde X es un espacio métrico), es equivalente a la continuidad respecto de la nueva topología.

ii) El límite (si existe) respecto de la métrica de Hausdorff, de una sucesión $\{F_n\} \subset \mathcal{F}(D)$ viene dado por:

$$(4.18) \quad F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n, \quad G_n = \overline{\bigcup_{m=n}^{\infty} F_m}$$

Así pues, si D es cerrado, resulta que $\mathcal{F}(D)$ es un espacio métrico completo; además, si D es compacto entonces $\mathcal{F}(D)$ es compacto (teorema de selección de Polaschke), y en tal caso si $E \subset D$ es un subconjunto denso de D , una sucesión $\{F_n\}$ de cerrados no vacíos de D converge en el sentido de Hausdorff a F si y solo si $\forall x \in E$ la sucesión $\{d(x, F_n)\}$ converge a $d(x, F)$. Esto demuestra que las partes finitas de D son densas en $\mathcal{F}(D)$.

iii) De la expresión (4.17) se ve inmediatamente que $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ y $\forall F, G \in \mathcal{F}(D)$ se tiene:

$$(4.19) \quad h(\bar{B}(F, \varepsilon_1), \bar{B}(G, \varepsilon_2)) \leq h(F, G) + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$$

iv) Si ahora $\Omega_i \in \mathcal{D}(D)$, $i=1, 2$ se tiene

$$(4.20) \quad h(\Omega_1, \Omega_2) = h(\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2) = h(D - \Omega_1, D - \Omega_2)$$

$$(4.21) \quad h(\Omega_1, \Omega_2) = 0 \quad \text{si y solo si} \quad \Omega_1 \subset \bar{\Omega}_2 \quad \text{y} \quad \Omega_2 \subset \bar{\Omega}_1$$

De (4.21) se deduce la relación de equivalencia:

$\Omega_1 \subset \bar{\Omega}_2$ si y solo si $\frac{c}{\Omega_1} = \frac{c}{\Omega_2}$; ó se considera también el conjunto cociente sobre \mathcal{D} . Es decir, podemos limitarnos a considerar abiertos para los que $\Omega = \frac{c}{\bar{\Omega}}$, ó abiertos regulares (N. Bourbaki [2]). Los abiertos de $\mathcal{D}(r, \lambda)$ (más aún, los abiertos con la propiedad del arco), son abiertos regulares.

4.2.4 Relaciones entre las topologías

Si \mathcal{O} es un dominio de clase $W^{1, \infty}$, se tiene

$$(4.22) \quad h(\Omega_1, \Omega_2) \leq d_{0, \bar{c}}(\Omega_1, \Omega_2) \quad \forall \Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{D}_{\mathcal{O}}^{0, \bar{c}}.$$

Esta desigualdad, junto con (4.13), da la relación entre la métrica de Hausdorff y las casidistancias.

Además, de toda sucesión $\{\Omega_n\} \subset \mathcal{D}_{\mathcal{O}}^{1, \sigma}$, $\sigma = \infty$ ó \bar{c} acotada (i.e. $d_{1, \sigma}(\Omega_n, \Omega_0) \leq C$ con $\Omega_0 \in \mathcal{D}_{\mathcal{O}}^{1, \sigma}$ y $C > 0$), se puede extraer una subsucesión $\{\Omega_{n_k}\}$ convergente en el sentido de Hausdorff hacia un elemento $\Omega \in \mathcal{D}_{\mathcal{O}}^{1, \sigma}$ tal que $d_{1, \sigma}(\Omega, \Omega_0) \leq C$.

Por otra parte se ve que los abiertos de $\mathcal{D}(r, \lambda)$ tienen frontera de medida nula (Adams-Aronszajn-Smith [1]); así pues, si $\{\Omega_n\} \subset \mathcal{D}(r, \lambda)$ y $\Omega \in \mathcal{D}(r, \lambda)$ entonces

$$(4.23) \quad h(\Omega_n, \Omega) \rightarrow 0 \Rightarrow \mu(\Omega_n \Delta \Omega) \rightarrow 0$$

Observación 4.5

i) La relación (4.23) dice que la aplicación

$\mu : \mathcal{D}(r, \lambda) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua respecto a la distancia de Hausdorff; sin embargo, en general sólo podemos afirmar que la aplicación $\mu : \mathcal{F}(D) \rightarrow \mathbb{R}$ es semicontinua superiormente respecto a la topología de Hausdorff. Para abiertos de clase $C^{0,1}$ no es válida la implicación (4.23), como lo muestra en \mathbb{R}^2 la curva de Osgood (1903), que es una curva de Jordan de área positiva y una vez considerado como abierto la correspondiente región de Jordan.

El dominio así definido es de clase $C^{0,1}$ (de hecho, la adherencia de este dominio es homeomorfa, de acuerdo con el Teorema de Carathéodory, al círculo unidad cerrado) y tiene frontera de medida no nula.

ii) Otras topologías pueden ser definidas. De hecho bajo el punto de vista de J. Hadamard, se introduce el siguiente concepto de convergencia. Sea Ω un dominio suficientemente regular como para que posea una normal n casi para todo punto de su frontera Γ (por ejemplo, $\Omega \in \mathcal{D}^{0,1}(\lambda, \delta)$); sea $\alpha : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ regular (por ejemplo de clase C^1); definimos entonces el dominio perturbado de Ω por Ω_α donde la frontera Γ viene dada por

$$(4.24) \quad \Gamma_\alpha = \left\{ x + \alpha(x)n(x) \mid x \in \Gamma \right\}$$

Se dice entonces que $\Omega_{\alpha_n} \rightarrow \Omega_\alpha$ si y solo si $\alpha_n \rightarrow \alpha$ en $C^1(\Gamma)$.

Este punto de vista es utilizado frecuentemente

por O. Pironneau en sus trabajos sobre diseño óptimo y es bastante satisfactorio bajo el punto de vista de la resolución numérica de tales problemas.

iii) Para G-dominios se pueden introducir otras nociones de convergencia basadas en la convergencia de las funciones que definen localmente la frontera del dominio. J. Necas [1], A. Bendali [1], Babuska [1], Stummel [1]. ■

5 - NOCIONES DE DIFERENCIABILIDAD RESPECTO A DOMINIOS

Es necesario señalar, en principio, que como no se conoce una estructura vectorial en una familia de dominios de los citados anteriormente, el concepto de diferencial no puede ser introducido de manera clásica. Sería muy importante encontrar una tal estructura para poder aplicar el material "standard" del Análisis Funcional. Este concepto es por otra parte necesario para obtener condiciones de optimalidad, así como para la resolución numérica de los problemas de Control geométrico mediante los métodos de tipo gradiente. Sin embargo, al resolver estos problemas, se verá que tal concepto no es estrictamente necesario, puesto que la discretización del problema conduce a esquemas en dimensión finita, y por tanto a derivadas parciales en un espacio finito-dimensional.

Expresamos ahora las principales nociones de "diferencial" respecto a un dominio, asociados a los diferentes

puntos de vista del párrafo anterior.

5.1 Variación de las funciones características

Sea D un compacto de \mathbb{R}^n con frontera regular, y sea $\mathcal{D}(D)$ el espacio topológico de los abiertos contenidos en D dotado de la distancia (4.7) (donde se identifican los abiertos que se diferencian en un conjunto de medida nula) por la relación de equivalencia: $\Omega_1 \sim \Omega_2$ si y solo si $\mu(\Omega_1 \Delta \Omega_2) = 0$.

Se va a introducir el concepto de aplicación diferenciable por analogía con el caso de un espacio normado (J. Dieudonné [])

Sean $\Omega \in \mathcal{D}(D)$, $\sigma \in \mathcal{D}(D)$, y pongamos:

$$\begin{aligned} |\delta\Omega| &= \Omega \Delta \sigma \\ (5.1) \quad \delta\Omega^- &= |\delta\Omega| \cap \Omega \\ \delta\Omega^+ &= |\delta\Omega| \cap \sigma \end{aligned}$$

Se puede escribir que $\sigma = \Omega + \delta\Omega^+ - \delta\Omega^- = \Omega + \delta\Omega$, obteniéndose así el concepto de incremento de Ω . Con estas notaciones, de la distancia (4.7) resulta la definición de convergencia

$$(5.2) \quad \Omega + \delta\Omega \rightarrow \Omega \quad \text{si y solo si} \quad \mu(|\delta\Omega|) \rightarrow 0.$$

Se dice que una aplicación $A: \mathcal{D}(D) \rightarrow \mathbb{R}$ es aditiva si $A(\Omega_1 \Delta \Omega_2) = A(\Omega_1) + A(\Omega_2)$, $\forall \Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{D}(D)$ con $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

Dadas dos aplicaciones $J_1, J_2: \mathcal{D}(D) \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que son tangentes en Ω , si

$$(5.3) \quad \lim_{\mu(|\delta\Omega|) \rightarrow 0} \frac{|J_1(\Omega + \delta\Omega) - J_2(\Omega + \delta\Omega)|}{\mu(|\delta\Omega|)} = 0$$

Se comprueba entonces que la tangencia es una relación de equivalencia; además, entre todas las aplicaciones tangentes a J en Ω existe a lo sumo una aplicación de la forma: $\mathcal{E} \mapsto J(\Omega) + A(\delta\Omega^+) - A(\delta\Omega^-)$, donde A es una aplicación aditiva.

Se dice que una aplicación continua $J: \mathcal{D}(D) \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $\Omega \in \mathcal{D}(D)$; si existe una aplicación aditiva $A: \mathcal{D}(D) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que la aplicación

$$\mathcal{E} \mapsto J(\Omega) + A(\delta\Omega^+) - A(\delta\Omega^-)$$

es tangente a J en el punto Ω . Como A es única, se le denomina la derivada de J en Ω y se indica por

$$(5.4) \quad \begin{aligned} A_1(\Omega, \delta\Omega^+) &= A(\delta\Omega^+), \\ A_2(\Omega, \delta\Omega^-) &= A(\delta\Omega^-), \end{aligned}$$

con el convenio

$$(5.5) \quad A_1(\Omega, \delta\Omega) = A_1(\Omega, \delta\Omega^+) - A_1(\Omega, \delta\Omega^-).$$

Observación 5.1

i) La definición anterior dice que la derivada de J en el punto Ω , si existe, es la aplicación aditiva $A_1(\Omega, \cdot)$ que verifica

$$(5.6) \quad \lim_{\mu(|\delta\Omega|) \rightarrow 0} \frac{|J(\Omega + \delta\Omega) - J(\Omega) - A_1(\Omega, \delta\Omega)|}{\mu(|\delta\Omega|)} = 0$$

ii) Si $J: \mathcal{D}(D) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y diferenciable en Ω , su derivada $A_1(\Omega, \cdot)$ es una aplicación aditiva continua de $\mathcal{D}(D) \rightarrow \mathbb{R}$.

iii) La derivada de una aplicación $A: \mathcal{D}(D) \rightarrow \mathbb{R}$ aditiva y continua existe en cada punto $\Omega \in \mathcal{D}(D)$, y se tiene $A(\Omega, \cdot) = A$.

iv) Existen aplicaciones aditivas continuas sobre $\mathcal{D}(D)$.

En efecto, sea $G \in L^1(D)$ y definamos $A: \mathcal{D}(D) \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$(5.7) \quad A(\Omega) = \int_{\Omega} G(x) dx$$

Entonces la aplicación A es obviamente aditiva y por el Teorema de la Convergencia Monótona de Lebesgue se prueba que es continua (cf. H. Federer [1]).

Además, si $G \in L^p(D)$, donde $1 < p \leq +\infty$, se tiene la mayoración uniforme $|A(\Omega)| \leq \|G\|_{L^p(\Omega)} (\mu(\Omega))^{1/q}$ donde q es el índice conjugado de p .

Si $A_1(\Omega, \cdot)$ es tal que $A_1(\Omega, \delta\Omega) = A_{\Omega}(\delta\Omega^+) - A_{\Omega}(\delta\Omega^-)$, donde A_{Ω} es del tipo (5.7), es decir, si existe $G_{\Omega} \in L^1(D)$ tal que

$$A_{\Omega}(\sigma) = \int_{\sigma} G_{\Omega}(x) dx,$$

entonces

$$(5.8) \quad A_1(\Omega, \delta\Omega) = \int_{\delta\Omega^+} G_\Omega(x) dx - \int_{\delta\Omega^-} G_\Omega(x) dx.$$

Decimos en tal caso que G_Ω es el gradiente de J en el punto Ω . Se comprueba que si G_Ω existe, entonces es única.

v) Se puede extender obviamente esta definición al caso de aplicaciones de $\mathcal{D}(D)$ en un espacio de Banach.

vi) En los problemas de control geométrico nos limitaremos a aquellos funcionales J que verifican, en $\Omega \in \mathcal{D}(D)$, el desarrollo limitado

$$(5.9) \quad J(\Omega + \delta\Omega) = J(\Omega) + A_1(\Omega, \delta\Omega) + A_2(\Omega, \delta\Omega) \\ \forall \delta\Omega^+, \delta\Omega^- \in \mathcal{D}(D)$$

donde

$$(5.10) \quad T_1(\Omega, \delta\Omega) = \int_{\delta\Omega^+} G_\Omega(x) dx - \int_{\delta\Omega^-} G_\Omega(x) dx \\ G_\Omega \in L^\infty(D)$$

$$|T_2(\Omega, \delta\Omega)| \leq \frac{1}{2} C \mu^2(|\delta\Omega|),$$

siendo C una constante dependiente de Ω . De (5.10) se deduce que

$$(5.11) \quad |T_1(\Omega, \delta\Omega)| \leq \|G_\Omega\|_{L^\infty(D)} \cdot \mu(|\delta\Omega|).$$

Para tales funciones podemos definir (clásicamente) el concepto de mínimo local y de punto crítico, así como la relación entre ellos: Un punto $\Omega \in \mathcal{D}(D)$ se llama mínimo local de J si existe $\delta > 0$ tal que $J(\Omega) \leq J(\Omega + \delta\Omega)$,

$\forall \delta \Omega$ tal que $\mu(|\delta \Omega|) < \delta$; Ω es un punto crítico si $A_1(\Omega, \delta \Omega) \geq 0$, $\forall \delta \Omega$ tal que $\mu(|\delta \Omega|) \leq \delta$. Se tiene entonces que Ω es un punto crítico de J si y solo si $G_\Omega \leq 0$ cpd en Ω y $G_\Omega \geq 0$ cpd en $D-\Omega$. Además, todo mínimo local es un punto crítico y una condición necesaria de optimalidad es que J admita un desarrollo limitado del tipo (5.9)-(5.10) tal que

$$(5.12) \quad \begin{aligned} G_\Omega &\leq 0 \quad \underline{\text{cpd en } \Omega} \\ G_\Omega &\geq 0 \quad \underline{\text{cpd en } D-\Omega} \end{aligned}$$

5.2 Variaciones interiores

Se introduce ahora el concepto de diferencial en los espacios de dominios $\mathcal{D}_c^{k,\sigma}$ mediante los homeomorfismos gracias a los cuales se les define. Esta idea responde al método de variaciones interiores de P.R. Garabedian-M. Schiffer.

Observemos que la definición de la derivada-Fréchet se introduce usualmente en un espacio afín normado V de un espacio vectorial \vec{V} subyacente utilizando la suma, aplicación de $V \times \vec{V} \rightarrow V$. En nuestro caso $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ va a jugar el papel de espacio vectorial subyacente en $\mathcal{D}_c^{k,\sigma}$, y la aplicación $(\Omega, \theta) \rightarrow (I+\theta)(\Omega)$ el papel de suma. Esto es lícito puesto que si $k \geq 1$, $\sigma = \infty$ ó \bar{c} y \mathcal{C} es un abierto de \mathbb{R}^n , por el Lema 4 del Apéndice, $I+\theta \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$; si $\Omega \in \mathcal{D}_c^{k,\sigma}$, entonces $(I+\theta)(\Omega) \in \mathcal{D}_\theta^{k,\sigma}$. Además, la aplica-

ción $\theta \mapsto (I+\theta)(\Omega)$, aunque no es inyectiva (i.e., la "substracción" es una aplicación multívoca), transforma una base de entornos del origen de $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ en una base de entornos de Ω en $\mathcal{D}_\theta^{k,\sigma}$; todo ello nos conduce de forma natural a las definiciones que siguen:

Una aplicación $J: \mathcal{D}_\theta^{k,\sigma} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice derivable en el punto $\Omega_0 \in \mathcal{D}_\theta^{k,\sigma}$, ($k \geq 1$ y $\sigma = \infty$ ó \bar{c}) si la aplicación $J^*: \theta \mapsto J^*(\theta) = J((I+\theta)(\Omega_0))$ es derivable-Fréchet de $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ en el origen. Se dirá entonces que la derivada de J en el punto Ω_0 es

$$(5.13) \quad J'(\Omega_0) = \frac{\partial J}{\partial \Omega}(\Omega_0) = \frac{\partial J^*}{\partial \theta}(0) \in \mathcal{L}(W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \mathbb{R})$$

Así pues, como usualmente, J es derivable en Ω_0 si y solo si existe una aplicación lineal y continua de $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, denotada por $J'(\Omega)$, tal que

$$(5.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} J((I+\theta)(\Omega_0)) = J(\Omega_0) + J'(\Omega_0)\theta + R(\Omega_0, \theta) \\ \qquad \qquad \qquad \forall \theta \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ \lim_{\|\theta\|_k \rightarrow 0} \frac{R(\Omega_0, \theta)}{\|\theta\|_k} = 0 \end{array} \right.$$

Esta definición puede extenderse al caso de una aplicación de $\mathcal{D}_\theta^{k,\sigma}$ en un espacio de Banach. Además, podemos introducir también el concepto de derivada de una aplicación de $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{D}_\theta^{k,\sigma}$ de la siguiente forma:

Una aplicación $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{D}_\theta^{k,\sigma}$ se dice derivable en el punto $r_0 \in \mathbb{R}$ si existe una aplicación $*G: \mathbb{R} \rightarrow W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

definida en un entorno \mathcal{U} de r_0 tal que

$$i) G(r) = (I + *G(r))(G(r_0)) \quad \forall r \in \mathcal{U},$$

$$ii) *G(r_0) = 0,$$

iii) $*G$ es derivable, en el sentido usual, en r_0 .

Se dice entonces que G admite derivada en el punto $r_0 \in R$

$$(5.15) \quad \frac{\partial G}{\partial r}(r_0) \in \mathcal{L}(R, W^{k, \sigma}(R^n, R^n)),$$

y se llama derivada multívoca de G en el punto r_0 al conjunto de las derivadas, denotado por

$$(5.16) \quad \frac{\partial G}{\partial r}(r_0) = \left\{ \frac{\partial *G}{\partial r}(r_0) \right\}.$$

Así pues, G es derivable en el punto r_0 si y solo si existe una aplicación lineal continua

$$\gamma: R \rightarrow W^{k, \sigma}(R^n, R^n)$$

y una aplicación $Q: R \rightarrow W^{k, \sigma}(R^n, R^n)$ tales que

$$(5.17) \quad \begin{cases} G(r_0+r) = (I + \gamma r + Q(r))(G(r_0)) & \forall r \in R, \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\|Q(r)\|_k}{r} = 0; \end{cases}$$

en tal caso, $\exists \in \frac{\partial G}{\partial r}(r_0)$

G es derivable en r_0 si y solo si existe una aplicación S , definida en un entorno \mathcal{U} de $r_0 \in R$ con valores en $\mathcal{V}^{k, \sigma}$, tal que $S(r_0) \in \mathcal{V}^{k, \sigma}$, $G(r) = S(r)(\sigma)$, $\forall r \in \mathcal{U}$, que es derivable en el punto r_0 ; entonces γ , definida por

$$\gamma_r = \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}_0) \mathbf{r} \circ (\mathbf{S}(\mathbf{r}_0))^{-1} \quad \forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}, \text{ pertenece a } \frac{\partial G}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}_0). \right.$$

Observación 5.2

i) Estas definiciones de derivabilidad poseen propiedades análogas a las de las funciones derivables en el sentido usual: una aplicación derivable es localmente lipchiana, la composición de dos aplicaciones derivables es derivable, una aplicación derivable sobre $\mathcal{D}_\varepsilon^{k,\sigma}$ lo es sobre $\mathcal{D}_\varepsilon^{k+1,\sigma}$, etc.

ii) Por el contrario, como la aplicación $(\Omega, \theta) \mapsto (I + \theta)(\Omega)$, que juega el papel de suma, no es inyectiva, la "substracción" asociada es multívoca, lo que hace que estas definiciones tengan propiedades específicas:

a) Sea $J: \mathcal{D}_\varepsilon^{k,\sigma} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en un punto Ω_0 , y sean $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{W}^{k,\sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Si Ω_0 es un abierto acotado de clase C^1 , si $\theta_1 - \theta_2 \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y $\langle \vec{n}, \theta_1 \rangle = \langle \vec{n}, \theta_2 \rangle$ sobre $\partial \Omega_0$ (donde \vec{n} es la normal exterior a Ω_0 en $\partial \Omega_0$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar en \mathbb{R}^n), o si Ω_0 es un dominio y $\theta_1 = \theta_2$ sobre $\partial \Omega_0$, se tiene $J'(\Omega_0) \theta_1 = J'(\Omega_0) \theta_2$, es decir la derivada de J en Ω_0 y en la dirección θ sólo depende de la componente normal $\langle \vec{n}, \theta \rangle$ del campo θ sobre la frontera, ó bien sólo depende de los valores de θ en la frontera.

b) Sea $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{D}_\varepsilon^{k,\infty}$ derivable en r_0 y sea $\delta \in \frac{\partial G}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}_0)$; se supone que $\Omega_0 = G(r_0)$ es un abierto acotado de clase C^1 ; entonces:

$$(5.18) \quad \frac{\partial G}{\partial r}(r_0) \subset \left\{ \delta + \theta / \theta \in W^{k, \infty}(R^n, R^n), \right. \\ \left. \langle \vec{n}, \theta \rangle = 0 \text{ sobre } \partial \Omega_0 \right\}$$

Por otra parte, si $\delta_1 \in \frac{\partial G}{\partial r}(r_0)$, está en $C^k(R^n, R^n)$, se tiene

$$(5.19) \quad \frac{\partial G}{\partial r}(r_0) \supset \left\{ \delta_1 + \theta_1 / \theta_1 \in W^{k, \infty}(R^n, R^n) \cap C^k(R^n, R^n), \right. \\ \left. \langle \vec{n}, \theta_1 \rangle = 0 \text{ sobre } \partial \Omega_0 \right\}$$

Además, si $\sigma = \bar{c}$ se tiene $\forall \delta \in \frac{\partial G}{\partial r}(r_0)$:

$$(5.20) \quad \frac{\partial G}{\partial r}(r_0) = \left\{ \delta + \theta / \theta \in W^{k, \bar{c}}(R^n, R^n), \right. \\ \left. \langle \vec{n}, \theta \rangle = 0 \text{ sobre } \partial \Omega_0 \right\}.$$

iii) Estas propiedades se interpretan geométricamente observando que cuando θ_1 y θ_2 son cercanos al origen de $W^{k, \infty}(R^n, R^n)$, $(I + \theta_1)(\Omega_0)$ e $(I + \theta_2)(\Omega_0)$ definen, en primera aproximación, el mismo dominio si y solo si

$$\langle \vec{n}, \theta_1 \rangle = \langle \vec{n}, \theta_2 \rangle \text{ sobre } \partial \Omega_0.$$

iv) Las definiciones anteriores se generalizan (clásicamente) a aplicaciones entre espacios normados.

v) Con este concepto de diferenciabilidad, se pueden dar unas condiciones necesarias de optimalidad de primer orden:

Sean $J: \mathcal{D}_\theta^{k, \sigma} \rightarrow R$ y \mathcal{D}_{ad} un subconjunto de $\mathcal{D}_\theta^{k, \sigma}$; si Ω_0 es un mínimo de J en \mathcal{D}_{ad} , i.e. si $\Omega_0 \in \mathcal{D}_{ad}$ es tal que $J(\Omega_0) \leq J(\Omega) \quad \forall \Omega \in \mathcal{D}_{ad}$, y si J es derivable en Ω_0 , entonces $J'(\Omega_0)\theta \geq 0$, $\forall \theta \in W^{k, \sigma}(R^n, R^n)$ tal que

$(I+h\epsilon)(\Omega_0) \in \mathcal{D}_{ad}$, para h suficientemente pequeño.

Ahora bien, existen familias $\mathcal{D}_{ad} \subset \mathcal{D}_\epsilon^{k,\sigma}$ para las cuales no existe o existen "pocos" elementos θ que verifiquen la condición anterior, (como por ejemplo cuando $\mathcal{D}_{ad} = \{ \Omega \in \mathcal{D}_\epsilon^{k,\sigma} / \mu(\Omega) = c \}$); es por ello que se introduce el espacio tangente como en el caso usual para el cual se tiene:

Sea $J: \mathcal{D}_\epsilon^{k,\sigma} \rightarrow \mathbb{R}$ y \mathcal{D}_{ad} un subconjunto de $\mathcal{D}_\epsilon^{k,\sigma}$; si Ω_0 es un mínimo de J sobre \mathcal{D}_{ad} y si J es derivable en el punto Ω_0 , entonces $J'(\Omega_0)\theta \geq 0, \forall \theta \in ET(\mathcal{D}_\epsilon^{k,\sigma}, \mathcal{D}_{ad}, \Omega_0)$ donde

$$ET(\mathcal{D}_\epsilon^{k,\sigma}, \mathcal{D}_{ad}, \Omega_0) = \left\{ \theta \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) / \exists G: [0,1] \rightarrow \mathcal{D}_\epsilon^{k,\sigma} \right. \\ \left. \text{derivable en el origen que verifica } G(0) = \Omega_0, \right. \\ \left. G(t) \in \mathcal{D}_{ad} \quad \forall t \in [0,1] \text{ y } \theta \in \frac{\partial G}{\partial t}(0) \right\} = \\ = \left\{ \theta \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) / \exists S: [0,1] \rightarrow \mathcal{D}_\epsilon^{k,\sigma} \text{ derivable en el} \right. \\ \left. \text{origen que verifica } S(0) = I, S(t)(\Omega_0) \in \mathcal{D}_{ad} \quad \forall t \in [0,1] \right. \\ \left. \text{y } \frac{\partial S}{\partial t}(0) = \theta \right\} \quad (\text{F. Murat-J. Simon [1]}).$$

vi) Introducimos ahora la derivada de la aplicación $J: \mathcal{D}_\epsilon^{k,\sigma} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(5.21) \quad J(\Omega) = \int_{\Omega} f(\Omega) dx,$$

donde

$$f: \mathcal{D}_\epsilon^{k,\sigma} \rightarrow L^1(D) \text{ es conocida.}$$

Se define la transformada de f por

$$f_{\Omega}(\theta) = f((I + \theta)(\Omega)) \cdot (I + \theta),$$

que es una aplicación de $W^{k, \sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow L^1(\Omega)$ (según se deduce del Lema 2.2 del Apéndice) para θ suficientemente pequeño (según Lema 1.4 Apéndice).

Si $\Omega_0 \in \mathcal{D}_{\sigma}^{k, \sigma}$ con $k \geq 1$ y $\sigma = \infty$ ó \bar{c} , \mathcal{C} es un abierto de \mathbb{R}^n , y si f_{Ω_0} es derivable de $W^{k, \sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow L^1(\Omega_0)$ en el origen, entonces la aplicación (5.21) es derivable de $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}^{k, \sigma} \rightarrow \mathbb{R}$ en el punto Ω_0 , y se tiene:

$$(5.22) \quad J'(\Omega_0) \zeta = \int_{\Omega_0} \left\{ f(\Omega_0) \operatorname{div} \zeta + \frac{\partial f_{\Omega}}{\partial \theta}(0) \zeta \right\} dx \\ \forall \zeta \in W^{k, \sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),$$

Lo que se prueba inmediatamente mediante el Lema 2.2 y el Lema 2.3 del Apéndice.

En particular, si f no depende de Ω y si $f \in W^{1, 1}(\mathbb{R}^n)$, entonces (5.21) es derivable en todo punto de $\mathcal{D}_0 \in \mathcal{D}_{\mathcal{C}}^{k, \sigma}$, y se tiene

$$(5.23) \quad J'(\Omega_0) \zeta = \int_{\Omega} \operatorname{div}(f \zeta) dx.$$

Si además, Ω_0 es un G -dominio acotado de clase $C^{0, 1}$, se tiene:

$$(5.24) \quad J'(\Omega_0) \zeta = \int_{\partial \Omega} \langle n, \zeta \rangle f d\sigma,$$

fórmula útil para los métodos numéricos de tipo gradiente. ■

5.3 Variaciones de la normal

Otros conceptos de diferenciabilidad pueden ser introducidos; seguidamente expondremos muy resumidamente la idea de J. Hadamard y utilizada por O. Pironneau.

Sea Ω un G-dominio de clase $C^{0,1}$ y n la normal exterior a Ω en $\partial\Omega = \Gamma$ definida cpd. (J. Nečas [1]). Sea $\alpha \in C^1(\Gamma)$ suficientemente pequeño para que $\Gamma_{t\alpha}$, definido por (4.24), sea la frontera de un dominio de $\mathcal{D}^{0,1}(r, \lambda)$, $\forall t \in [0, 1]$. Una aplicación $J: \mathcal{D}^{0,1}(r, \lambda) \rightarrow \mathbb{R}$ se dice diferenciable en el punto Ω y en la dirección α si existe

$$(5.25) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(\Omega_{t\alpha}) - J(\Omega)}{t},$$

y en tal caso se denota éste por $J'(\Omega, \alpha)$

Esta Definición es bastante útil para la resolución numérica de los problemas de diseño óptimo (O. Pironneau [3], E. Fernandez-Cara [1]). ■

C A P I T U L O I I IPROBLEMA DE CONTROL GEOMETRICO1 - INTRODUCCION

Los problemas de control geométrico (diseño óptimo, identificación de dominios, localización de dominios,...) han adquirido y continúan adquiriendo una gran importancia, debida fundamentalmente a su adaptabilidad a cuestiones de Ingeniería y otras Ciencias. Si se da un repaso a la Bibliografía, se podrá comprobar que estos problemas, aunque de origen muy lejano, han surgido con gran ímpetu hace aproximadamente unos diez años, debido principalmente a las aportaciones de J.L. Lions, O. Pironneau, F. Murat- J. Simón, J. Céa, así como otros muchos autores.

Como se ha podido comprobar en capítulos anteriores, dichos problemas poseen una dificultad esencial (ya que la variable de control es un dominio de R^n) para ser estudiados por métodos clásicos de la Teoría de Control o, en ge-

neral, de la Teoría de Optimización. Hemos de hacer notar que en el problema que nos ocupa hay que añadir una dificultad adicional, debida a que el estado del sistema es la solución de una inecuación variacional parabólica. Ya en los problemas de Control clásicos, esta dificultad hace que la resolución del problema sea complicada, y que sea necesario introducir capacidades para la obtención de condiciones necesarias de optimalidad (véase F. Mignot [1], A. Haraux [1][2], C. Saguez [4].)

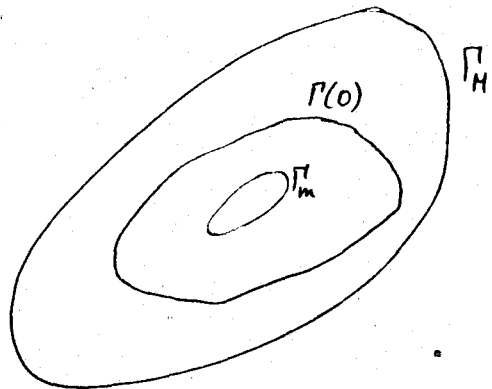
En este trabajo adoptaremos el punto de vista de C. Saguez [4] para la obtención de condiciones necesarias de optimalidad. ■

2 - CONTROL DEL DOMINIO INICIAL

Sea D_M un dominio acotado de R^n suficientemente regular (por ejemplo de clase C^1), de frontera Γ_M , y sea D_m otro dominio acotado de R^n suficientemente regular, $\bar{D}_m \subset D_M$, de frontera Γ_m , tal que:

$$(2.1) \quad \inf_{x \in \Gamma_m} \inf_{y \in \Gamma_M} |x-y|_{R^n} > \delta_0 > 0$$

Consideramos ahora un dominio $D(0)$ de frontera $\Gamma(0)$ y tal que:



$$(2.2) \quad \overline{D}_m \subset D(0) \subset \overline{D(0)} \subset D_M,$$

$$(2.3) \quad \inf_{x \in \Gamma_m} \inf_{y \in \Gamma(0)} |x-y| > \delta_1 > 0$$

con $\delta_0 > \delta_1$.

Definimos entonces $D = D_M - \overline{D}_m$, $Q = D \times]0, T[$, $\Omega = D(0) - \overline{D}_m$

y se considera la inecuación variacional parabólica

$$(2.4) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial y}{\partial t}, \varphi - y \right) + a(y, \varphi - y) \geq (f_1, \varphi - y) \quad \forall \varphi \in K(t) \\ y(t) \in K(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

donde:

$$(2.5) \quad K(t) = \left\{ \varphi \in V_2 / \varphi|_{\Gamma_m} = g(x, t), \quad \geq 0 \text{ c.p.d. en } D \right\},$$

$$(2.6) \quad V_2 = \left\{ \varphi \in H^1(D) / \varphi|_{\Gamma_H} = 0 \right\},$$

$$(2.7) \quad f(x) = \tilde{\theta}_0(x) - \ell \chi_{D-\Omega}(x)$$

y donde g y θ_0 son dos funciones dadas (a precisar más adelante), y ℓ una constante positiva.

Se denota por $y(\Omega)$ la solución de (2.4) asociada a Ω , es decir, a $D(0)$, si consideramos D_m fijo.

Se considera el funcional coste:

$$(2.8) \quad J(\Omega) = \int_0^T \int_D |y(\Omega) - z_d|^2 dx dt,$$

donde z_d , llamado estado deseado, es una función definida en $Q = D \times]0, T[$, tal que $z_d \in L^2(Q)$.

Dado un subconjunto de dominios \mathcal{D}_{ad} , llamado de dominios admisibles, se trata de estudiar el

PROBLEMA

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar un subdominio } \Omega \in \mathcal{D}_{ad} \text{ tal que:} \\ J(\hat{\Omega}) \leq J(\Omega), \quad \forall \Omega \in \mathcal{D}_{ad} \end{array} \right.$$

Observación 2.1

i) El problema anterior viene motivado de forma natural por la pregunta siguiente: ¿De qué dominio inicial debemos partir para conseguir un estado deseado?

Como se ha dicho en la Introducción, el problema físico asociado al problema (2.9) es: ¿De qué región inicialmente descongelada debemos partir para obtener una descongelación adecuada a nuestras necesidades?

ii) Otras aplicaciones de este problema pueden hallarse en el recalentamiento de la coraza de una cápsula espacial.

iii) Podríamos haber introducido otro funcional coste, como por ejemplo

$$(2.10) \quad J(\Omega) = \int_D |(y(\Omega)(T) - z_d)|^2 dx ;$$

ahora z_d es el estado final deseado, $z_d \in L^2(D)$, para el que puede formularse un problema análogo a (2.9), que puede resolverse de forma análoga. ■

3 - EXISTENCIA DE CONTROL OPTIMO

Nos proponemos en esta Sección expresar la dependencia del estado regido por la inecuación variacional (2.4) respecto de \mathcal{S} con D_m fijo, para posteriormente probar la existencia de soluciones del problema (2.9). Para ello nos situamos en las hipótesis del Capítulo I, es decir:

Suponemos que $a(.,.)$ es una forma bilineal simétrica, continua y coerciva, que para simplificar supondremos que puede escribirse

$$(3.1) \quad a(\varphi, \psi) = \int_D \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + a_0 \varphi \psi \right) dx$$

donde:

$$(3.2) \quad \begin{cases} a_{ij} = a_{ji}, a_{ij}, a_0 \in C^1(D), a_0 \geq 0 \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \alpha > 0 \end{cases}$$

En particular, se pondrá $a_{ij} = \delta_{ij}$, $a_0 = 0$.

Supondremos que la función g es tal que

$$(3.3) \quad \begin{cases} g(x, 0) = 0, g \geq 0 \text{ sobre } \sum_m = \overline{T}_m \cdot [0, T], \\ g \in H^{3/2, 3/4}(\sum_m). \end{cases}$$

Por último, supondremos que $\tilde{\xi}_0 \in L^2(D_M)$, y $\text{sop}(\tilde{\xi}_0) = \overline{D(0)} - D_m$. Se tiene entonces el

Teorema 3.1

Existe una única solución de la inecuación variacional (2.4), que además verifica:

$$(3.5) \quad y \in H^{2,1}(Q)$$

Demostración

De (2.7) resulta que $f \in L^2(Q)$, y por tanto podemos aplicar el Teorema 2.2 del Capítulo II. ■

Para la existencia de controles óptimos necesitamos un resultado de continuidad del estado respecto del control:

Teorema 3.2

Bajo las hipótesis precedentes, la aplicación que a Ω le hace corresponder $y(\Omega)$, solución de (2.4), es lipchiana de $\mathcal{D}(r, \lambda)$ con la métrica δ en $L^2(0, T; V_2)$ -fuerte.

Demostración

Sean $y_1 = y(\Omega_1)$, $y_2 = y(\Omega_2)$ las soluciones de (2.4) asociadas a $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{D}(r, \lambda)$ respectivamente, es decir:

$$\left(\frac{\partial y_1}{\partial t}, \varphi - y_1 \right) + a(y_1, \varphi - y_1) \geq (f_1, \varphi - y_1), \quad \forall \varphi \in K(t)$$

$$\left(\frac{\partial y_2}{\partial t}, \varphi - y_2 \right) + a(y_2, \varphi - y_2) \geq (f_2, \varphi - y_2), \quad \forall \varphi \in K(t)$$

donde $f_i = \tilde{E}_i - l \chi_{D-\Omega_i}$, $i=1,2$.

Si ponemos $\varphi = y_2(t) \in K(t)$ en la primera de estas desigualdades y $\varphi = y_2(t) \in K(t)$ en la segunda, y sumamos, obtendremos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}(y_1 - y_2), y_1 - y_2 \right) + a(y_1 - y_2, y_1 - y_2) \leq (f_1 - f_2, y_1 - y_2)$$

Integrando entre $[0, T]$, teniendo en cuenta la coercividad de $a(\cdot, \cdot)$ y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| y_1(T) - y_2(T) \right|_H^2 - \frac{1}{2} \left| y_1(0) - y_2(0) \right|_H^2 + \alpha \left\| y_1 - y_2 \right\|_{L^2(0, T; V_2)}^2 &\leq \\ &\leq \|f_1 - f_2\|_{L^2(Q)} \left\| y_1 - y_2 \right\|_{L^2(Q)} \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| y_1(T) - y_2(T) \right|_H^2 + \alpha \left\| y_1 - y_2 \right\|_{L^2(0, T; V_2)}^2 &\leq \\ &\leq \|f_1 - f_2\|_{L^2(Q)} \left\| y_1 - y_2 \right\|_{L^2(0, T; V_2)} \end{aligned}$$

Utilizando ahora la desigualdad

$$ab \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{\xi} + \xi b^2 \right) \quad \text{con } \xi > 0 \quad \text{y } a, b \in \mathbb{R},$$

se llega a la relación

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| y_1(T) - y_2(T) \right|_H^2 + \left(\alpha - \frac{\xi}{2} \right) \left\| y_1 - y_2 \right\|_{L^2(0, T; V_2)}^2 &\leq \\ &\leq \frac{1}{2\xi} \|f_1 - f_2\|_{L^2(Q)}^2. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
 \|f_1 - f_2\|_{L^2(Q)}^2 &= \int_Q (f_1 - f_2)^2 dx dt = \\
 &= \int_Q (\tilde{\Theta}_0 - \ell \chi_{D-\Omega_1} - \tilde{\Theta}_0 + \ell \chi_{D-\Omega_2})^2 dx dt = \\
 &= \ell^2 \int_0^T \int_D (\chi_{D-\Omega_1} - \chi_{D-\Omega_2})^2 dx dt = \ell^2 T \int_D (\chi_{\Omega_1} - \chi_{\Omega_2})^2 dx = \\
 &= \ell^2 T \mu(\Omega_1 \Delta \Omega_2) = \ell^2 T \delta(\Omega_1, \Omega_2).
 \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad \frac{1}{2} \|y_1(T) - y_2(T)\|_H^2 + \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) \|y_1 - y_2\|_{L^2(0, T; V_2)}^2 &\leq \\
 &\leq \frac{\ell^2 T}{2\varepsilon} \delta(\Omega_1, \Omega_2);
 \end{aligned}$$

la desigualdad (3.6) muestra, para $0 < \varepsilon < 2\alpha$, que la aplicación $\Omega \rightarrow y(\Omega)$ es lipchiciana de $\mathcal{D}(r, \lambda)$ con la métrica δ (definida en 4.2.1 del Capítulo II) en $L^2(0, T; V_2)$ -fuerte. ■

Corolario 3.1

La aplicación que a Ω hace corresponder $y(\mathcal{D}(T))$ es una aplicación lipchiciana de $\mathcal{D}(r, \lambda)$ con la métrica δ en $L^2(D) = H$ -fuerte.

Demostración

Basta tener en cuenta (3.6). ■

Corolario 3.2

La aplicación que a Ω hace corresponder $y(\Omega)$ es lipchiana de $\mathcal{D}^{0,1}(\lambda, \delta)$ con la métrica de Hausdorff en $L^2(0, T; V_2)$ -fuerte.

Demostración

Es fácil ver que para los elementos de $\mathcal{D}^{0,1}(\lambda, \delta)$ con frontera de medida superficial acotada se tiene

$$(3.7) \quad \mu(\Omega_1 \Delta \Omega_2) \leq c.h(\Omega_1, \Omega_2)$$

donde c es una constante que depende de la medida superficial (que está definida para todo G -dominio de clase $C^{0,1}$, y en particular para los elementos de $\mathcal{D}^{0,1}$) de Ω_1 y Ω_2 . Para ello basta introducir los entornos de la frontera de Ω_1 y Ω_2 , i.e. las bandas

$$B(\partial\Omega_i, \delta) = \bigcup_{x \in \partial\Omega_i} \overline{B(x, \delta)}$$

y expresar la integral de volumen por medio de una integral de superficie.

Para el caso de un elemento cualquiera de $\mathcal{D}^{0,1}(\lambda, \delta)$, véase D. Chenais [3]. ■

Utilizando el Teorema 3.2 y (3.7), se deduce inmediatamente el Corolario.

Corolario 3.3

Sea \mathcal{U} un dominio de clase $W^{1,\infty}$; entonces la aplicación

$\Omega \rightarrow y(\Omega)$, definida anteriormente por (2.4), es lipchiciana de $\mathcal{D}_{\epsilon}^{1, \bar{c}}$ con la casidistancia $d_{1, \bar{c}}$ en $L^2(0, T; V_2)$ -fuerte.

Demostración

Basta tener en cuenta la relación (4.22) del Capítulo II y el Corolario 3.2. ■

Observación 3.1

Los Corolarios 3.2 y 3.3 pueden adaptarse, como en el Corolario 3.1, al caso en que se considera el funcional (2.10). ■

Consideramos ahora las siguientes familia de dominios admisibles:

$$(3.8) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}_{ad}(r, \lambda), \text{ formada por los dominios } \Omega \in \mathcal{D}(r, \lambda) \\ \text{que verifiquen (2.1)-(2.3)} \end{array} \right.$$

$$(3.9) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}_{ad}^{0,1}(\lambda, \delta), \text{ formada por los dominios } \Omega \in \mathcal{D}^{0,1}(\lambda, \delta) \\ \text{que verifiquen (2.1)-(2.3) y compacta para la} \\ \text{distancia de Hausdorff.} \end{array} \right.$$

$$(3.10) \left\{ \begin{array}{l} \text{Sea } \mathcal{D}_{ad}^{k, \sigma} \text{ la familia de elementos } \Omega \in \mathcal{D}_{\sigma}^{k, \sigma} \\ \text{tales que se tenga (2.1)-(2.3) con } k \geq 2. \end{array} \right.$$

Teorema 3.3

Bajo las hipótesis anteriores, si \mathcal{D}_{ad} está definida

por (3.8), (3.9) ó (3.10), el problema (2.9) admite al menos una solución.

Demostración

Del Teorema anterior, junto con sus Corolarios, se deduce que J es un funcional continuo de $\mathcal{D}(r, \lambda)$ (respectivamente $\mathcal{L}^{0,1}(\lambda, \delta)$, $\mathcal{D}_\theta^{k, \theta}$ con $k \geq 1$ y $\theta = \bar{c}$ ó $k \geq 2$ y $\theta = \vartheta$ ó \bar{c}) en \mathbb{R} respecto a la topología \mathcal{S} (respectivamente h , $d_{k, \theta}$). Por tanto, observando que las familias admisibles definidas por (3.8) (3.9) ó (3.10), son compactas, se deduce la existencia de soluciones.

En efecto, la familia $\mathcal{D}_{ad}(r, \lambda)$ es compacta ya que, de acuerdo con la observación 4.1 del Capítulo II, $\mathcal{D}(r, \lambda)$ es un espacio topológico compacto, y obviamente $\mathcal{D}_{ad}(r, \lambda)$ es un cerrado de $\mathcal{D}(r, \lambda)$ respecto de la métrica δ .

$\mathcal{D}_{ad}^{0,1}(\lambda, \delta)$ es compacto por definición. Finalmente $\mathcal{D}_{ad}^{k, \theta}$ es compacto por la Observación 4.3 del Capítulo II. ■

Observación 3.2

Del Capítulo II se deduce la existencia de soluciones del problema (2.9) cuando \mathcal{D}_{ad} es un subconjunto de $\mathcal{D}_e^{1, \infty}$ acotado para la casidistancia $d_{1, \infty}$, y cerrado para la distancia de Hausdorff. ■

4 - PROBLEMAS DE CONTROL PENALIZADO Y PENALIZADO-
REGULARIZADO

En el párrafo anterior hemos demostrado la existencia de control geométrico; se desea ahora obtener condiciones necesarias de optimalidad para las soluciones del problema 2.9. Para la existencia de soluciones de la inecuación variacional 2.4 hemos utilizado en el Capítulo I el método de penalización, probándose además que la solución penalizada es "próxima" a la solución de la inecuación variacional. Así pues, es natural que nos planteemos el problema de Control geométrico para la ecuación penalizada. Esto lo haremos para el caso simple en que $A = -\Delta$.

Para cada $\varepsilon > 0$, se introduce la ecuación penalizada siguiente

$$(4.1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} - \Delta y_\varepsilon + \beta(y_\varepsilon) = f(\Omega) \quad \text{en } \Omega, \\ y_\varepsilon = g \quad \text{sobre } \Sigma_m, \\ y_\varepsilon = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_M, \\ y_\varepsilon(0) = 0 \quad \text{en } \Omega, \end{array} \right.$$

donde $\beta(\lambda) = -\frac{1}{\varepsilon} \lambda^-$, y $\lambda^- = \sup(0, -\lambda)$.

Bajo las hipótesis de los párrafos anteriores, y teniendo en cuenta que β es un operador de penalización (véase el Capítulo I), y es estrictamente monótono, podemos aplicar los resultados de monotonía de J.L. Lions [2], de

los que se deduce la existencia y unicidad de una solución penalizada y_ϵ tal que, si y es solución de la inecuación variacional,

$$(4.2) \quad y_\epsilon \in H^{2,1}(Q)$$

$$(4.3) \quad y_\epsilon \leq y \quad \underline{e} \quad y_\epsilon \rightarrow y \quad \underline{en} \quad H^{2,1}(Q)\text{-débil.}$$

Además, y_ϵ depende continuamente de los datos del problema.

Sea $y_\epsilon(\Omega)$ la solución de (4.1) asociada al control Ω , y consideremos el funcional coste:

$$(4.4) \quad J_\epsilon(\Omega) = \int_Q |y_\epsilon(\Omega) - z_d|^2 dx dt$$

Se trata de estudiar el

PROBLEMA PENALIZADO

$$(4.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \hat{\Omega}_\epsilon \in \mathcal{D}_{ad} \text{ tal que} \\ J_\epsilon(\hat{\Omega}_\epsilon) \leq J_\epsilon(\Omega), \forall \Omega \in \mathcal{D}_{ad}. \end{array} \right.$$

Proposición 4.1

La aplicación que a cada Ω hace corresponder $y_\epsilon(\Omega)$ es lipchiciana de $\mathcal{D}(r, \lambda)$ con la métrica δ en $L^2(0, T; V_2)$ -fuerte.

Demostración

Se hace por un razonamiento análogo al del Teorema 3.2. ■

Proposición 4.2

Si \mathcal{D}_{ad} viene definido por (3.8), (3.9) ó (3.10), el Problema de control penalizado (4.5) admite al menos una solución, denotada $(\hat{\Omega}_\epsilon, y_\epsilon(\hat{\Omega}_\epsilon))$.

Demostración

Utilizando la Proposición 4.1 y el razonamiento de la demostración del Teorema 3.3, se llega a este resultado. ■

Como se anunciaba en la Introducción, el problema penalizado 4.5 es próximo al problema 2.9; de hecho, se tiene:

Proposición 4.3

La solución del problema penalizado 4.5 converge a la solución del problema 2.9. Más precisamente,

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\Omega}_\epsilon \longrightarrow \hat{\Omega} \text{ en } (\mathcal{L}(r, \lambda), \mathcal{S}) \\ y_\epsilon(\hat{\Omega}_\epsilon) \longrightarrow y(\hat{\Omega}) \text{ en } L^2(0, T; V_2) \text{ -débil.} \end{array} \right.$$

Demostración

Análogamente a como se hizo en el Cap. I, introducimos g , definida por

$$(4.7) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} - \Delta \tilde{g} = 0 \text{ en } Q, \\ \tilde{g} = g \text{ sobre } \Sigma_m, \\ \tilde{g} = 0 \text{ sobre } \Sigma_M, \\ \tilde{g}(0) = 0 \text{ en } D. \end{array} \right.$$

Si hacemos el cambio de variables

$$(4.8) \quad y_\varepsilon = \tilde{g} + z_\varepsilon,$$

resulta que z_ε es solución de

$$(4.9) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial t} - \Delta z_\varepsilon + \beta(z_\varepsilon + \tilde{g}) = f \text{ en } Q, \\ z_\varepsilon = 0 \text{ sobre } \partial Q, \\ z_\varepsilon(0) = 0 \text{ en } D. \end{array} \right.$$

Si ahora hacemos el cambio de variables

$$(4.10) \quad y = \tilde{g} + z,$$

análogo a (4.8), en la inecuación variacional 2.4, se obtiene que z es solución de

$$(4.11) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial z}{\partial t}, \varphi - z \right) + a(z, \varphi - z) \geq (f, \varphi - z) \quad \forall \varphi \in K_{\tilde{g}}(t) \\ z(t) \in K_{\tilde{g}}(t), \\ z(0) = 0, \end{array} \right.$$

donde $K_{\tilde{g}}(t) = \left\{ \varphi \in H_0^1(D) = V_0 \mid \varphi \geq -\tilde{g}(t) \text{ cpd} \right\}$.

Bajo las hipótesis consideradas, estos problemas tienen solución (Véase el Cap. I).

Para cada $\varepsilon > 0$ consideramos $\hat{\Sigma}_\varepsilon \in C^2(r, \lambda)$, y

$y_\varepsilon \in H^{2,1}(Q)$ la solución de (4.1) asociada.

De (4.7) se deduce que \tilde{g} verifica:

$$(4.12) \quad \|\tilde{g}\|_{L^2(0,T;V_2)} \leq \text{cte.}$$

De (4.9) se deduce, multiplicando por z_ε e integrando, que

$$\left(\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial t}, z_\varepsilon \right) + a(z_\varepsilon, z_\varepsilon) + (\beta(z + \tilde{g}), z_\varepsilon) = (f_\varepsilon, z_\varepsilon),$$

donde $f_\varepsilon = f(\widehat{\Omega}_\varepsilon)$. Por la coercividad de $a(\cdot, \cdot)$, y después de una integración, se llega a la desigualdad

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |z_\varepsilon(T)|_{L^2(D)}^2 + \alpha \|z_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V_0)}^2 + \int_Q \beta(z_\varepsilon + \tilde{g}) z_\varepsilon \, dx \, dt \\ \leq \int_Q f_\varepsilon z_\varepsilon \, dx \, dt, \end{aligned}$$

de donde

$$|z_\varepsilon(T)|_{L^2(D)}^2 + (2\alpha - \nu) \|z_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V_0)}^2 \leq \frac{1}{\nu} \|f_\varepsilon\|_{L^2(Q)}^2.$$

Eligiendo $\nu > 0$ tal que $2\alpha - \nu > 0$ se llega a que

$$(4.13) \quad \|z_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V_0)} \leq \underline{\text{cte. independiente de } \varepsilon}.$$

puesto que, $u(\widehat{\Omega}_\varepsilon) \leq \mu(D) = \underline{\text{cte.}}$

Ahora bien, de (4.8), (4.12) y (4.13) se obtiene

$$(4.14) \quad \|y_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V_2)} \leq \underline{\text{cte independiente de } \varepsilon}.$$

Se establece entonces por métodos clásicos que

$$(4.15) \quad \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)} \leq \underline{\text{cte independiente de } \varepsilon}.$$

De (4.14) y (4.15) se deduce que se puede extraer una subsucesión de y_ϵ (de nuevo denotada por y_ϵ) tal que

$$(4.16) \left\{ \begin{array}{l} y_\epsilon \longrightarrow \bar{y} \quad \text{en } L^2(0, T; V_2) \text{-d\u00e9bil} \\ \frac{\partial y_\epsilon}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} \quad \text{en } L^2(Q) \text{-d\u00e9bil} \\ y_\epsilon \longrightarrow \bar{y} \quad \text{en } L^2(Q) \text{-fuerte} \end{array} \right.$$

Adem\u00e1s, como $\mathcal{D}(r, \lambda)$ es compacto para la m\u00e9trica δ , se tiene que

$$(4.17) \quad \hat{\Omega}_\epsilon \longrightarrow \hat{\Omega} \quad \text{en } (\mathcal{D}(r, \lambda), \delta)$$

Deseamos probar ahora que \bar{y} es la soluci\u00f3n asociada a $\hat{\Omega}$, es decir, que $\bar{y} = y(\hat{\Omega})$.

Se observa en principio que si multiplicamos (4.1) por y_ϵ^- e integramos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| y_\epsilon^-(T) \right|_{L^2(D)}^2 + \left\| \nabla y_\epsilon^- \right\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{1}{\epsilon} \left\| y_\epsilon^- \right\|_{L^2(Q)}^2 &\leq \\ &\leq \left\| f_\epsilon \right\|_{L^2(Q)} \left\| y_\epsilon^- \right\|_{L^2(Q)}, \end{aligned}$$

de donde

$$\left\| y_\epsilon^- \right\|_{L^2(Q)} \leq \text{cte. } \epsilon;$$

luego $\bar{y} \geq 0$ cpd.

De (4.9) se deduce que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z_\epsilon}{\partial t}, \varphi - z_\epsilon \right) + a(z_\epsilon, \varphi - z_\epsilon) + (\beta(z + \tilde{g}), \varphi - z_\epsilon) &= \\ &= (f_\epsilon, \varphi - z_\epsilon), \quad \forall \varphi \in K_g(t). \end{aligned}$$

Ahora bien, como $\psi + \tilde{g} \geq 0$ se tiene $\beta(\psi + \tilde{g}) = 0$,

y

$$(\beta(z_\varepsilon + \tilde{g}), \psi - z_\varepsilon) = -(\beta(z_\varepsilon + \tilde{g}) - \beta(\psi + \tilde{g}), \psi - z_\varepsilon) \leq 0;$$

por tanto,

$$(4.18) \quad \left(\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial t}, \psi - z_\varepsilon \right) + \alpha(z_\varepsilon, \psi - z_\varepsilon) \geq (f_\varepsilon, \psi - z_\varepsilon) \quad \forall \psi \in K_{\tilde{g}}(t).$$

De acuerdo con las estimaciones sobre z_ε , análogas a las de y_ε , se puede pasar al límite en (4.18):

$$\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial t}, \psi - \bar{z} \right) + \alpha(\bar{z}, \psi - \bar{z}) \geq (\bar{f}, \psi - \bar{z}) \quad \forall \psi \in K_{\tilde{g}}(t),$$

y como $\bar{y} = \tilde{g} + \bar{z}$, se tiene $\bar{y} = y(\hat{\Omega})$.

Probemos por último que $\hat{\Omega}$ es el control óptimo del problema (2.9). Supongamos que entonces existe $\bar{\Omega} \in \mathcal{D}(r, \lambda)$ tal que

$$J(\bar{\Omega}) \leq J(\hat{\Omega})$$

Pr definición de $\hat{\Omega}_\varepsilon$, se tiene que

$$J_\varepsilon(\hat{\Omega}_\varepsilon) \leq J(\hat{\Omega})$$

Pero como J_ε es semicontinua inferiormente para la topología débil, se tiene, pasando al límite, que

$$J(\hat{\Omega}) \leq J(\bar{\Omega}),$$

es decir $\hat{\Omega} = \bar{\Omega}$. ■

Bajo nuestro punto de vista (búsqueda de condiciones necesarias de optimalidad), el problema penalizado no es totalmente satisfactorio, puesto que el término de penalización en la ecuación penalizada (4.1) no es diferen-

ciable.

Es por ello que vamos a introducir un nuevo problema, llamado problema penalizado-regularizado.

Para $\nu < 0$ consideramos la función $\rho_\nu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, regularización de $\rho(\lambda) = -\lambda^-$ (cf. J.L. Lions [2]), definida por

$$(4.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_\nu(\lambda) \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}), \\ \rho_\nu(\lambda) \lambda \geq 0, \\ \rho'_\nu(\lambda) \begin{cases} = 1 & \text{si } \lambda \leq \nu, \\ \in [0,1] & \text{si } \nu \leq \lambda \leq 0, \\ 0 & \text{si } 0 \leq \lambda. \end{cases} \end{array} \right.$$

Por ejemplo,

$$(4.19) \quad \rho_\nu(\lambda) = \begin{cases} \lambda - \nu/2 & \text{si } \lambda \leq \nu, \\ \frac{1}{2\nu} \lambda^2 & \text{si } \nu \leq \lambda \leq 0, \\ 0 & \text{si } 0 \leq \lambda. \end{cases}$$

Se tiene entonces que

$$(4.20) \quad \rho_\nu(\nu) = c_\nu \geq \nu$$

Se considera la ecuación penalizada-regularizada

$$(4.21) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y_{\varepsilon, \nu}}{\partial t} - \Delta y_{\varepsilon, \nu} + \frac{1}{\varepsilon} \rho_{\nu}(y_{\varepsilon, \nu}) = f(\Omega) \text{ en } Q \\ y_{\varepsilon, \nu} = g \text{ sobre } \Sigma_m \\ y_{\varepsilon, \nu} = 0 \text{ sobre } \Sigma_M \\ y_{\varepsilon, \nu}(0) = 0 \text{ en } D \end{array} \right.$$

Denotamos por $y_{\varepsilon, \nu}(\Omega)$ la solución de (4.21) asociada al control Ω , y consideramos el funcional coste

$$(4.22) \quad J_{\varepsilon, \nu}(\Omega) = \int_Q |y_{\varepsilon, \nu}(\Omega) - z_d|^2 dx dt$$

PROBLEMA PENALIZADO-REGULARIZADO

$$(4.23) \quad \begin{array}{l} \text{Encontrar } \hat{\Omega}_{\varepsilon, \nu} \in \mathcal{D}_{ad} \text{ tal que:} \\ J_{\varepsilon, \nu}(\hat{\Omega}_{\varepsilon, \nu}) \leq J_{\varepsilon, \nu}(\Omega) \quad \forall \Omega \in \mathcal{D}_{ad} \end{array}$$

Gracias a los resultados de monotonía de J.L. Lions [3] se puede afirmar la existencia y unicidad de solución $y_{\varepsilon, \nu}$ de la ecuación penalizada-regularizada, y por los procedimientos antes citados, se obtiene la existencia de una solución $(\hat{\Omega}_{\varepsilon, \nu}, y_{\varepsilon, \nu}(\hat{\Omega}_{\varepsilon, \nu}))$ del problema penalizado-regularizado. ■

5 - CONDICIONES NECESARIAS DE OPTIMALIDAD

Una vez planteado el problema penalizado-regularizado, podemos ahora obtener unas condiciones necesarias de optimalidad para dicho problema ya que los términos que

en él aparecen son diferenciables (J.L. Lions [4]). Como se verá más adelante, este problema está muy relacionado con el problema penalizado (y éste a su vez con el problema de partida). Así, desde el punto de vista numérico, la resolución de las condiciones que buscamos nos dará una solución próxima al problema planteado; sin embargo, daremos las condiciones de optimalidad para el problema penalizado, por poseer para las soluciones del mismo una estimación del error.

Abordamos el cálculo del gradiente del problema penalizado-regularizado bajo el punto de vista (5.1). Sean entonces $\Omega, \Omega + \delta\Omega \in \mathcal{D}(r, \lambda)$ y pongamos $y_1 = y_{\epsilon, \nu}(\Omega)$, es decir:

$$(5.1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y_1}{\partial t} - \Delta y_1 + \frac{1}{\epsilon} \rho_\nu(y_1) = f(\Omega) \quad \underline{\text{en}} \quad Q, \\ y_1 = g \quad \underline{\text{sobre}} \quad \Sigma_m, \\ y_1 = 0 \quad \underline{\text{sobre}} \quad \Sigma_M, \\ y_1(0) = 0 \quad \underline{\text{en}} \quad D, \end{array} \right.$$

e $y_2 = y_{\epsilon, \nu}(\Omega + \delta\Omega)$, i.e. :

$$(5.2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y_2}{\partial t} - \Delta y_2 + \frac{1}{\epsilon} \rho_\nu(y_2) = f(\Omega + \delta\Omega) \quad \underline{\text{en}} \quad Q, \\ y_2 = g \quad \underline{\text{sobre}} \quad \Sigma_m, \\ y_2 = 0 \quad \underline{\text{sobre}} \quad \Sigma_M, \\ y_2(0) = 0 \quad \underline{\text{en}} \quad D, \end{array} \right.$$

Se tiene que

$$\frac{\partial (y_2 - y_1)}{\partial t} - \Delta (y_2 - y_1) + \frac{1}{\varepsilon} (\rho_\nu (y_2) - \rho_\nu (y_1)) = f(\Omega + \delta \Omega) - f(\Omega) \quad \text{en } Q,$$

$$y_2 - y_1 = 0 \quad \text{sobre } \partial Q,$$

$$(y_2 - y_1)(0) = 0 \quad \text{en } D,$$

ó bien,

$$(5.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial (y_2 - y_1)}{\partial t}, \varphi \right) + a(y_2 - y_1, \varphi) + \frac{1}{\varepsilon} (\rho_\nu (y_2) - \rho_\nu (y_1), \varphi) = \\ \quad = (f(\Omega + \delta \Omega) - f(\Omega), \varphi); \quad \forall \varphi \in V_0, \\ (y_2 - y_1)(t) \in V_0, \\ (y_2 - y_1)(0) = 0 \end{array} \right.$$

Observación 5.1

Los cálculos se llevarán a cabo como en el caso de condiciones de contorno homogéneas ($g=0$); para el caso general habría que introducir \tilde{g} y proceder como en la Proposición 4.3. ■

Sabemos que

$$\begin{aligned} J(\Omega + \delta \Omega) &= \int_Q |y_2 - z_d|^2 dx dt = \int_Q |y_2 - y_1 + y_1 - z_d|^2 dx dt \\ &= \int_Q |y_1 - z_d|^2 dx dt + 2 \int_Q (y_2 - y_1)(y_1 - z_d) dx dt + \\ &\quad + \int_Q |y_2 - y_1|^2 dx dt, \end{aligned}$$

luego

$$(5.4) \quad J(\Omega + \delta\Omega) = J(\Omega) + 2 \int_Q (y_2 - y_1)(y_2 - z_d) dx dt + \\ + \int_Q |y_2 - y_1|^2 dx dt.$$

Introducimos el espacio adjunto $p_{\epsilon, \nu}$ penalizado-regularizado, asociado a $(y_{\epsilon, \nu}, \Omega_{\epsilon, \nu})$.

$$(5.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial p_{\epsilon, \nu}}{\partial t} - \Delta p_{\epsilon, \nu} + \frac{1}{\epsilon} (\rho'_\nu(y_{\epsilon, \nu})) p_{\epsilon, \nu} = 2(y_{\epsilon, \nu} - z_d) \text{ en } Q, \\ p_{\epsilon, \nu} = 0 \text{ sobre } \partial Q, \\ p_{\epsilon, \nu}(T) = 0 \text{ en } D. \end{array} \right.$$

Esta ecuación admite solución, de acuerdo con las hipótesis impuestas a ρ_ν en (4.8), y se tiene que

$$(5.6) \quad \|p_{\epsilon, \nu}\|_{L^2(0, T; V_0)} \leq \text{cte.} \|y_{\epsilon, \nu} - z_d\|_{L^2(Q)},$$

$$(5.7) \quad \|p_{\epsilon, \nu}\|_{L^\infty(Q)} \leq \text{cte.}$$

Si ahora sustituímos en (5.3) ψ por $p = p_{\epsilon, \nu}(t) \in V_0$, se tiene:

$$(5.8) \quad \left(\frac{\partial(y_2 - y_1)}{\partial t}, p \right) + a(y_2 - y_1, p) + \frac{1}{\epsilon} (\rho'_\nu(y_2) - \rho'_\nu(y_1), p) = \\ = (f(\Omega + \delta\Omega) - f(\Omega), p),$$

y multiplicando (5.5) por $y_2 - y_1$ se llega a

$$(5.9) \quad -\left(\frac{\partial p}{\partial t}, y_2 - y_1 \right) + a(p, y_2 - y_1) + \frac{1}{\epsilon} (\rho'_\nu(y_1) p, y_2 - y_1) = \\ = 2(y_1 - z_d, y_2 - y_1).$$

De (5.8) y (5.9) se obtiene, tras integración

por partes,

$$(5.10) \quad 2(y_1 - z_d, y_2 - y_1) = (f(\Omega + \delta\Omega) - f(\Omega), p) - \\ - \frac{1}{\varepsilon} (\rho(y_2) - \rho(y_1) - \rho'(y_1)(y_2 - y_1), p).$$

Así pues, (5.4) se convierte en

$$(5.11) \quad J(\Omega + \delta\Omega) = J(\Omega) + \int_Q (f(\Omega + \delta\Omega) - f(\Omega)) p \, dx \, dt + \\ + \int_Q |y_2 - y_1|^2 \, dx \, dt - \frac{1}{\varepsilon} \int_Q (\rho(y_2) - \rho(y_1) - \rho'(y_1)(y_2 - y_1)) p \, dx \, dt.$$

Pero como

$$\int_Q (f(\Omega + \delta\Omega) - f(\Omega)) p \, dx \, dt = -\ell \int_Q (\chi_{D-(\Omega + \delta\Omega)} - \chi_{D-\Omega}) p \, dx \, dt = \\ = \ell \int_Q (\chi_{\Omega + \delta\Omega} - \chi_{\Omega}) p \, dx \, dt = \ell \int_0^T \left(\int_{\delta\Omega^+} p \, dx - \int_{\delta\Omega^-} p \, dx \right) dt \\ = \ell \int_0^T \int_{\delta\Omega} p \, dx \, dt,$$

de (5.11) se deduce que

$$(5.12) \quad J(\Omega + \delta\Omega) = J(\Omega) + \int_0^T \int_{\delta\Omega} \ell p \, dx \, dt + \int_Q |y_2 - y_1|^2 \, dx \, dt - \\ - \frac{1}{\varepsilon} \int_Q (\rho(y_2) - \rho(y_1) - \rho'(y_1)(y_2 - y_1)) p \, dx \, dt.$$

Así, teniendo presente 5.1.9 (Cap. II), defini-
mos

$$(5.13) \quad A_1(\Omega, \delta\Omega) = \int_0^T \int_{\delta\Omega} \ell_p \, dx \, dt,$$

$$(5.14) \quad A_2(\Omega, \delta\Omega) = \int_Q |y_2 - y_1|^2 \, dx \, dt - \\ - \frac{1}{\varepsilon} \int_Q (\rho_\nu(y_2) - \rho_\nu(y_1) - \rho'_\nu(y_1)(y_2 - y_1)) p \, dx \, dt,$$

resultando que

$$(5.15) \quad J(\Omega + \delta\Omega) = J(\Omega) + A_1(\Omega, \delta\Omega) + A_2(\Omega, \delta\Omega).$$

Proposición 5.1

Bajo las hipótesis hechas en el punto 3. el funcional J verifica (5.13) (5.14) (5.15); además, para todo $\Omega, \Omega + \delta\Omega \in \mathcal{D}(r, \lambda)$ se tiene que el gradiente definido por $G_\Omega = \ell_{p_{\varepsilon, \nu}}$ es tal que

$$(5.16) \quad G_\Omega \in L^\infty(Q),$$

$$(5.17) \quad |A_2(\Omega, \delta\Omega)| \leq \text{cte. } \mu^2(|\delta\Omega|).$$

Demostración

Como ℓ es una constante y se tiene (5.7) resulta que G_Ω verifica (5.16)

Poniendo en (5.3) $\varphi = y_2 - y_1$, y teniendo en cuenta la monotonía de ρ_ν , por un razonamiento análogo al del Teorema 3.2 se llega a que

$$(5.18) \quad \|y_2 - y_1\|_{L^2(Q)} \leq \text{cte } \mu(|\delta\Omega|)$$

Además, como $\rho_\nu \in W^{2, \infty}(R)$ y $p \in L^\infty(Q)$, se tiene

que

$$\left| -\frac{1}{\varepsilon} \int_Q (\rho(y_2) - \rho(y_1) - \rho'(y_1)(y_2 - y_1)) p \, dx \, dt \right| \leq \text{cte } \mu^2(|\delta\Omega|)$$

y de esta desigualdad y (5.18) se deduce (5.17). ■

Observación 5.2

Si suponemos que $\Omega \in \mathcal{D}^{0,1}(\lambda, \delta)$, de la definición (5.25) de derivación se deduce:

$$(5.19) \quad J'(\Omega, \alpha) = \ell \int_0^T \int_{\Gamma(0)} p \alpha \, d\sigma \, dt.$$

Incluso si $\Omega \in \mathcal{D}_\sigma^{k,\nu}$ con $k \geq 2$ y $\sigma = \infty$ ó \bar{c} , la definición (5.14) de derivación se obtiene:

$$(5.20) \quad J'(\Omega) \theta = \ell \int_0^T \int_{\Gamma(0)} \langle n, \theta \rangle p \, d\sigma, \quad \theta \in W^{k,\nu}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Las fórmulas (5.19) y (5.20) son útiles para la utilización del método del gradiente. ■

De la proposición 5.1 y la condición de punto crítico se deduce que las condiciones necesarias de optimalidad vienen dadas por

$$(5.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y_{\varepsilon,\nu}}{\partial t} - \Delta y_{\varepsilon,\nu} + \frac{1}{\varepsilon} \rho(y_{\varepsilon,\nu}) = f(\Omega_{\varepsilon,\nu}) \text{ en } Q, \\ y_{\varepsilon,\nu} = g \text{ sobre } \Sigma_m, \\ y_{\varepsilon,\nu} = 0 \text{ sobre } \Sigma_M, \\ y_{\varepsilon,\nu} = 0 \text{ en } D, \end{array} \right.$$

$$(5.22) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial p_{\epsilon, \nu}}{\partial t} - \Delta p_{\epsilon, \nu} + \frac{1}{\epsilon} \beta'_{\nu}(y_{\epsilon, \nu}) p_{\epsilon, \nu} = 2(y_{\epsilon, \nu} - z_d) \text{ en } Q, \\ p_{\epsilon, \nu} = 0 \text{ sobre } \partial Q, \\ p_{\epsilon, \nu}(T) = 0 \text{ en } D, \end{array} \right.$$

$$(5.23) \left\{ \begin{array}{l} p_{\epsilon, \nu}(x, t) \geq 0 \quad x \in D - \Omega_{\epsilon, \nu}, \quad t \in]0, T[, \\ p_{\epsilon, \nu}(x, t) \leq 0 \quad x \in \Omega_{\epsilon, \nu}, \quad t \in]0, T[, \end{array} \right.$$

O bien, de acuerdo con la observación anterior,

$$(5.24) \int_0^T \int_{\Gamma_{\epsilon, \nu}(0)} p_{\epsilon, \nu} \alpha \, d\sigma \, dt \geq 0 \quad \forall \alpha \text{ admisible},$$

$$(5.25) \int_0^T \int_{\Gamma_{\epsilon, \nu}(0)} \langle n_{\epsilon, \nu}, \theta \rangle p_{\epsilon, \nu} \, d\sigma \, dt \geq 0$$

$\forall \theta \in W^{k, \sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tal que $(I+h\theta)(\Omega_{\epsilon, \nu}) \in \mathcal{D}_{ad}$

Nuestro objetivo es ahora obtener las condiciones necesarias de optimalidad para el problema penalizado. Para ello, utilizaremos el

Lema 5.1

Sea $(\Omega_{\epsilon, \nu}, y_{\epsilon, \nu})$ solución del problema penalizado-regularizado y $(\Omega_{\epsilon}, y_{\epsilon})$ solución del problema penalizado, se tiene

$$(5.26) \left\{ \begin{array}{l} \Omega_{\epsilon, \nu} \longrightarrow \Omega_{\epsilon} \text{ en } (\mathcal{D}(r, \lambda), \delta), \\ y_{\epsilon, \nu} \longrightarrow y_{\epsilon} \text{ en } L^2(Q) \text{-fuerte}, \end{array} \right.$$

cuando $\nu \rightarrow 0$.

Demostración

Como $Dad(r, \lambda)$ es compacto, y $\Omega_{\epsilon, \nu} \in Dad(r, \lambda)$, se puede extraer una subsucesión, de nuevo denotada $\Omega_{\epsilon, \nu}$, tal que

$$\Omega_{\epsilon, \nu} \longrightarrow \bar{\Omega}_{\epsilon} \quad \text{cuando } \nu \longrightarrow 0.$$

De (5.21) se tiene

$$\int_0^T \left\{ \left(\frac{\partial y_{\epsilon, \nu}}{\partial t}, y_{\epsilon, \nu} \right) + a(y_{\epsilon, \nu}, y_{\epsilon, \nu}) + \frac{1}{\epsilon} (P_{\nu}(y_{\epsilon, \nu}), y_{\epsilon, \nu}) \right\} dt = \\ = \int_0^T (f_{\epsilon, \nu}, y_{\epsilon, \nu}) dt,$$

que junto con (4.18) y la desigualdad $P_{\nu}(\lambda)\lambda \geq 0$, conduce a

$$(5.27) \quad \|y_{\epsilon, \nu}\|_{L^2(0, T; V_2)} \leq \text{cte.}$$

Además, $P_{\nu}(y_{\epsilon, \nu})$ puede ser considerado como un operador de $L^2(Q)$ en sí mismo y se tiene:

$$(5.28) \quad \|P_{\nu}(y_{\epsilon, \nu})\|_{L^2(Q)} \leq \|y_{\epsilon, \nu}\|_{L^2(Q)}$$

De (5.27) y (5.28) se deduce que

$$(5.29) \quad \left\| \frac{\partial y_{\epsilon, \nu}}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)} \leq \text{cte.}$$

Luego podemos extraer de $y_{\epsilon, \nu}$ una subsucesión, de nuevo denotada $y_{\epsilon, \nu}$, tal que:

$$(5.30) \left\{ \begin{array}{l} y_{\epsilon, \nu} \longrightarrow \bar{y}_{\epsilon} \quad \text{en } L^2(0, T; V_2) \text{-débil,} \\ \frac{\partial y_{\epsilon, \nu}}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial \bar{y}_{\epsilon}}{\partial t} \quad \text{en } L^2(Q) \text{-débil.} \end{array} \right.$$

Probemos ahora que $\bar{y}_\epsilon = y_\epsilon(\bar{\Omega}_\epsilon)$.

De las definiciones de ρ_ν y ρ se tiene

$$\begin{aligned} |\rho_\nu(y_{\epsilon,\nu}) - \rho(\bar{y}_\epsilon)| &\leq |\rho_\nu(y_{\epsilon,\nu}) - \rho(y_{\epsilon,\nu})| + |\rho(y_{\epsilon,\nu}) - \rho(\bar{y}_\epsilon)| \leq \\ &\leq |\nu| + |y_{\epsilon,\nu} - \bar{y}_\epsilon|; \end{aligned}$$

luego

$$\|\rho_\nu(y_{\epsilon,\nu}) - \rho(\bar{y}_\epsilon)\|_{L^2(Q)} \leq c_1 |\nu| + c_2 \|y_{\epsilon,\nu} - \bar{y}_\epsilon\|_{L^2(Q)},$$

y por tanto, de (5.30), se llega a que

$$(5.31) \quad \rho_\nu(y_{\epsilon,\nu}) \rightarrow \bar{\rho}_\epsilon = \rho(\bar{y}_\epsilon) \quad \text{en } L^2(Q) \text{ -fuerte.}$$

Teniendo presente (5.30) y (5.31), se puede pasar al límite en la ecuación

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial y_{\epsilon,\nu}}{\partial t}, \varphi\right) + a(\bar{y}_{\epsilon,\nu}, \varphi) + \frac{1}{\epsilon} (\rho_\nu(y_{\epsilon,\nu}), \varphi) &= (f_{\epsilon,\nu}, \varphi) \\ &\forall \varphi \in V_2, \end{aligned}$$

y se obtiene:

$$\left(\frac{\partial \bar{y}_\epsilon}{\partial t}, \varphi\right) + a(\bar{y}_\epsilon, \varphi) + (\beta(y_\epsilon), \varphi) = (f(\bar{\Omega}_\epsilon), \varphi) \quad \forall \varphi \in V_2,$$

de donde

$$\bar{y}_\epsilon = y_\epsilon(\bar{\Omega}_\epsilon)$$

Demostremos, por último, que $\bar{\Omega}_\epsilon$ es un control óptimo.

Se tiene:

$$J_{\epsilon,\nu}(\bar{\Omega}_{\epsilon,\nu}) \leq J_{\epsilon,\nu}(\Omega) \quad \forall \Omega \in \mathcal{D}_{ad}(r, \lambda).$$

Debido a las acotaciones anteriores, se puede también pasar al límite en esta desigualdad, resultando que

$$J_\varepsilon(\bar{\Omega}_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(\Omega) \quad \forall \Omega \in \mathcal{D}_{bl}(r, \lambda),$$

lo que prueba que $\bar{\Omega}_\varepsilon$ es un control óptimo.

Además, en particular,

$$y_{\varepsilon, \nu} \longrightarrow y_\varepsilon(\Omega_\varepsilon) \quad \text{en } L^2(Q)\text{-fuerte.} \blacksquare$$

Para pasar al límite en el estado adjunto penalizado-regularizado (5.22), se introducen las funciones siguientes:

$$(5.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\chi}_{\varepsilon, \nu} = \chi_{\{(x, t) \in Q / y_{\varepsilon, \nu} \geq \nu\}}, \\ \underline{\chi}_{\varepsilon, \nu} = \chi_{\{(x, t) \in Q / y_{\varepsilon, \nu} \leq 0\}}, \\ \bar{\chi}_\varepsilon = \chi_{\{(x, t) \in Q / y_\varepsilon \geq 0\}}, \\ \underline{\chi}_\varepsilon = \chi_{\{(x, t) \in Q / y_\varepsilon \leq 0\}}. \end{array} \right.$$

Se tiene entonces el

Lema 5.2

$$(5.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\chi}_{\varepsilon, \nu} \longrightarrow \bar{\chi}_\varepsilon \quad \text{en } L^2(Q)\text{-fuerte} \\ \underline{\chi}_{\varepsilon, \nu} \longrightarrow \underline{\chi}_\varepsilon \quad \text{en } L^2(Q)\text{-fuerte} \end{array} \right.$$

Demostración

Como los resultados de convergencia anteriores son análogos, probamos solamente una de ellas, por ejemplo la primera; además, como $\bar{\chi}_\varepsilon$ es una función característica, sólo necesitamos probar la convergencia débil.

De la definición (5.32), se tiene:

$$(y_{\varepsilon, \nu} - \nu) \bar{\chi}_{\varepsilon, \nu} = (y_{\varepsilon, \nu} - \nu)^+$$

Ahora bien, $\overline{\chi}_{\varepsilon, \nu} \rightarrow L$ en $L^2(Q)$ -débil, y pasando al límite en la expresión anterior se tiene

$$(5.34) \quad y_\varepsilon \cdot L = y_\varepsilon^+ .$$

De la hipótesis (3.4) se deduce que

$$\mu(\{(x, t) \in Q / f_{\varepsilon, \nu}(x, t) = 0\}) = 0,$$

ya que $\Omega_{\varepsilon, \nu} \in \mathcal{D}(r, \lambda)$ (y por tanto tiene frontera de medida nula; véase 4.2.4); luego la regularidad de y_ε implica

$\mu(\{(x, t) \in Q / \underline{y}_\varepsilon(x, t) = 0\}) = 0$, y por tanto de (5.34) se deduce que $L = \overline{\chi}_\varepsilon$. ■

De este Lema se obtiene el

Lema 5.3

Sea $p_{\varepsilon, \nu}$ la solución de (5.22); entonces,

$$(5.35) \quad p_{\varepsilon, \nu} \rightarrow p_\varepsilon \quad \text{en } L^2(0, T; V_0)\text{-débil},$$

donde p_ε es la solución de

$$(5.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} - \Delta p_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \overline{\chi}_\varepsilon p_\varepsilon = 2(y - z_d) \quad \text{en } Q, \\ p_\varepsilon = 0 \quad \text{sobre } \partial Q, \\ p_\varepsilon(T) = 0 \quad \text{en } D. \end{array} \right.$$

Demostración

Como $\beta'_\nu(\lambda) \in [0, 1]$, se tienen las estimaciones

$$\|p_{\varepsilon, \nu}\|_{L^2(0, T; V_0)} \leq \text{cte.}$$

$$\left\| \frac{\partial p_{\varepsilon, \nu}}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)} \leq \text{cte.}$$

Luego se puede extraer de $p_{\varepsilon, \nu}$ una subsucesión, de nuevo denotada $p_{\varepsilon, \nu}$, tal que

$$p_{\varepsilon, \nu} \rightarrow p_{\varepsilon} \quad \text{en } L^2(0, T; V_0) \text{-débil,}$$

$$\frac{\partial p_{\varepsilon, \nu}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial t} \quad \text{en } L^2(Q) \text{-débil.}$$

Además,

$$(5.37) \quad \left\| \rho'_{\nu}(y_{\varepsilon, \nu}) - \underline{\chi}_{\varepsilon, \nu} \right\|_{L^2(Q)} \leq \left\| \rho'_{\nu}(y_{\varepsilon, \nu}) - \underline{\chi}_{\varepsilon, \nu} \right\|_{L^2(Q)} + \left\| \underline{\chi}_{\varepsilon, \nu} - \underline{\chi}_{\varepsilon} \right\|_{L^2(Q)}$$

Pero

$$\begin{aligned} \left\| \rho'_{\nu}(y_{\varepsilon, \nu}) - \underline{\chi}_{\varepsilon, \nu} \right\|_{L^2(Q)}^2 &= \int_{[\nu \leq y_{\varepsilon, \nu} \leq 0] \cap Q} |1 - \rho'_{\nu}(y_{\varepsilon, \nu})|^2 dx dt \leq \\ &\leq \mu(\{(x, t) \in Q \mid \nu \leq y_{\varepsilon, \nu}(x, t) \leq 0\}) \end{aligned}$$

Por tanto, de (5.32), se tiene:

$$\left\| \rho'_{\nu}(y_{\varepsilon, \nu}) - \underline{\chi}_{\varepsilon, \nu} \right\|_{L^2(Q)}^2 \leq \int_Q \bar{\chi}_{\varepsilon, \nu} \underline{\chi}_{\varepsilon, \nu} dx dt$$

Así pues, utilizando esta desigualdad y el Lema 5.2, se llega a

$$(5.38) \quad \rho'_{\nu}(y_{\varepsilon, \nu}) \rightarrow \underline{\chi}_{\varepsilon} \quad \text{en } L^2(Q) \text{ fuerte}$$

Se puede pasar al límite de la ecuación

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial p_{\varepsilon, \nu}}{\partial t}, \varphi\right) + a(p_{\varepsilon, \nu}, \varphi) + \frac{1}{\varepsilon} (\rho'_{\nu}(y_{\varepsilon, \nu}) p_{\varepsilon, \nu}, \varphi) = \\ = 2(y_{\varepsilon, \nu} - z_d, \varphi) \quad \forall \varphi \in V_0, \end{aligned}$$

lo que prueba que p_ε es solución de

$$-\left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t}, \varphi\right) + a(p_\varepsilon, \varphi) + \frac{1}{\varepsilon} (\chi_\varepsilon p_\varepsilon, \varphi) = 2(y_\varepsilon - z_d, \varphi), \quad \forall \varphi \in V_0,$$

y por tanto (5.36). ■

De los Lemas 5.1 y 5.3 se deduce que se puede pasar al límite en (5.23), obteniéndose:

$$(5.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_\varepsilon(x, t) \geq 0 \quad x \in D - \Omega_\varepsilon \quad t \in]0, T[, \\ p_\varepsilon(x, t) \leq 0 \quad x \in \Omega_\varepsilon \quad t \in]0, T[. \end{array} \right.$$

O bien (de (5.24) y (5.25)):

$$(5.40) \quad \int_0^T \int_{\Gamma_\varepsilon(0)} p_\varepsilon \alpha \, dx dt \geq 0 \quad \forall \alpha \text{ admisible}$$

$$(5.41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_{\Gamma_\varepsilon(0)} \langle n_\varepsilon, \theta \rangle p_\varepsilon \, dx dt \geq 0 \\ \forall \theta \in W^{k, \sigma}(R^n, R^n) \text{ tal que } (I+h\theta)(\Omega_\varepsilon) \in \mathcal{D}_{ad}^{k, \sigma} \\ \text{con } h \text{ pequeño} \end{array} \right.$$

De todo lo anterior se deduce que las condiciones necesarias de óptimalidad para el problema penalizado vienen dadas por

$$\begin{aligned}
 (5.42) \quad & \left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} - \Delta y_\varepsilon + \beta(y_\varepsilon) = f(\Omega_\varepsilon) \quad \underline{\text{en}} \quad Q, \\
 & y_\varepsilon = g \quad \underline{\text{sobre}} \quad \Sigma_m, \\
 & y_\varepsilon = 0 \quad \underline{\text{sobre}} \quad \Sigma_M, \\
 & y_\varepsilon(0) = 0 \quad \underline{\text{en}} \quad D, \\
 & -\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} - \Delta p_\varepsilon + \frac{-1}{\varepsilon} \chi_{[y_\varepsilon \leq 0]} p_\varepsilon = 2(y_\varepsilon - z_d) \quad \underline{\text{en}} \quad Q, \\
 & p_\varepsilon = 0 \quad \underline{\text{sobre}} \quad \partial Q, \\
 & p_\varepsilon(T) = 0 \quad \underline{\text{en}} \quad D, \\
 & p_\varepsilon(x, t) \geq 0 \quad \underline{\text{en}} \quad (D - \Omega_\varepsilon) \times]0, T[, \\
 & p_\varepsilon(x, t) \leq 0 \quad \underline{\text{en}} \quad \Omega_\varepsilon \times]0, T[.
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Observación 5.3

Las condiciones (5.42) son suficientes para nuestro objetivo, ya que según sabemos la solución del problema penalizado converge a la solución del problema original y, además tenemos una estimación del error. En la resolución numérica estas condiciones de optimalidad serán, en consecuencia, muy útiles.

Otra manera de obtener condiciones necesarias de optimalidad para el problema inicial consiste en aplicar los resultados C. Saguez [1]. Véanse también a este respecto los trabajos de F. Mignot [1] y A. Haraux [1][2]. ■

C A P I T U L O I VANALISIS NUMERICO DEL PROBLEMAA. PROBLEMA DISCRETIZADO1. INTRODUCCION

En el Capítulo anterior hemos visto que el problema original puede ser aproximado por el problema penalizado y para este hemos dado unas condiciones necesarias de optimalidad. Nuestro objetivo posterior es resolver numéricamente el problema penalizado mediante el método de los elementos finitos triangulares de orden 1.

Se puede hacer también un estudio teórico-numérico del problema original mediante la discretización de la inecuación variacional por los métodos de R. Glowinski- J.L. Lions- R. Tremolieres [1] y nos conduciría a la obtención de condiciones necesarias de optimalidad para el problema de control regido por inecuaciones. Dichas condiciones no

son fáciles de resolver numéricamente, es por lo que lo haremos para el problema penalizado.

Para la resolución numérica del problema penalizado tenemos dos **posibilidades**:

- a) Discretizar directamente las condiciones de optimalidad (5.4.2).
- b) Discretizar el problema penalizado (ecuación penalizada más funcional coste) y obtener para este problema las condiciones de optimalidad.

Abordaremos esta segunda posibilidad ya que, entre otras razones, nuestro problema de control geométrico se reduce a un problema de control clásico. ■

2 . DISCRETIZACION DE LOS ESPACIOS

Damos una aproximación interna de los espacios que intervienen en nuestro problema por medio de unos espacios del mismo tipo y de dimensión finita.

Definimos una triangulación \mathcal{T}_h de D formada por los triángulos T tales que

$$(2.1) \quad \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T \subset \bar{D}$$

y para todo $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h$ se tiene:

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_1 \text{ y } T_2 \text{ son disjuntos} \\ \text{ó } T_1 \text{ y } T_2 \text{ tienen un vértice común} \\ \text{ó } T_1 \text{ y } T_2 \text{ tienen un lado en común} \end{array} \right.$$

(Ver Perronnet, A. [1], Marocco, A.- Pironneau, O. [1])
siendo h la longitud del mayor lado de los triángulos de \mathcal{T}_h ; h será destinado a tender a cero.

Suponemos que la triangulación es regular (ver P.G. Ciarlet [1]) en el sentido que existe una constante c tal que

$$(2.3) \quad \frac{h(T)}{\rho(T)} \leq c, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \forall h$$

donde $h(T) = \text{diámetro}(T)$ y $\rho(T) = \sup \{ \text{diámetro}(S) / S \text{ es una bola contenida en } T \}$. Así pues $h = \max \{ h(T) / T \in \mathcal{T}_h \}$.

La condición (2.3) puede ser sustituida por: $\forall h$, los ángulos de los triángulos de \mathcal{T}_h están acotados inferiormente por un número estrictamente positivo independiente de h .

Ponemos entonces:

$$(2.4) \quad D_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$$

$$(2.5) \quad \bar{\theta}_h = \{ P / P \in \overline{D_h}, P \text{ es un vértice de } T \text{ con } T \in \mathcal{T}_h \}$$

$$(2.6) \quad \gamma_{m,h} = \Gamma_m \cap \bar{\theta}_h$$

$$(2.7) \quad \gamma_{M,h} = \Gamma_M \cap \bar{\theta}_h$$

$$(2.8) \quad \theta_h = \bar{\theta}_h - \gamma_{M,h}$$

$$(2.9) \quad \hat{\theta}_h = \theta_h - \gamma_{m,h}$$

Definimos también por $\Gamma_{m,h}$ (respectivamente $\Gamma_{M,h}$) la poligonal formada por los vértices de $\gamma_{m,h}$ (resp. $\gamma_{M,h}$).

Se supone además que los dominios considerados (D_M , D_m) son suficientemente regulares, por ejemplo de $\mathcal{D}^{0,1}(\lambda, \delta)$, de tal suerte que los dominios discretizados, o más precisamente, que las curvas poligonales $\Gamma_{m,h}$ (resp. $\Gamma_{M,h}$) converjan a Γ_m (resp. Γ_M) en el sentido de Hausdorff (ver Sendov, B. [1]).

Mediante la triangulación \mathcal{T}_h se aproximan los espacios V , V_0 , V_2 por

$$(2.10) \quad V_h = \{ \varphi_h \in C^0(D_h) / \varphi_h|_T \in P_1, \forall T \in \mathcal{T}_h \}$$

$$(2.11) \quad V_{0,h} = \{ \varphi_h \in V_h / \varphi_h = 0 \text{ sobre } \Gamma_{m,h} \cup \Gamma_{M,h} \}$$

$$(2.12) \quad V_{2,h} = \{ \varphi_h \in V_h / \varphi_h = 0 \text{ sobre } \Gamma_{M,h} \}$$

respectivamente. Donde P_ν es el espacio de polinomios de grado inferior ó igual a ν .

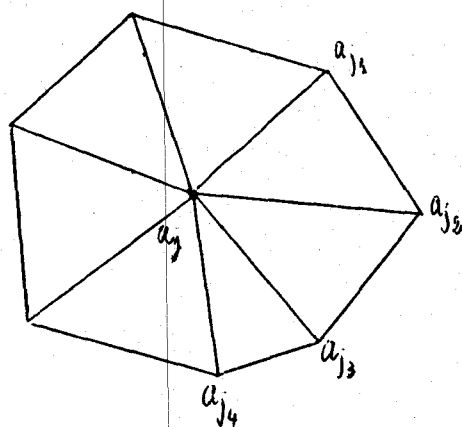
Como las funciones de V_h , $V_{0,h}$ y $V_{2,h}$ están determinadas unívocamente por los valores que toman en los vértices de la triangulación ya que los P_1 son polinomios de Lagrange (ver Raviart [1]), y los vértices de dicha triangulación son en número finito

gulación son en número finito, se tiene que V_h , $V_{0,h}$ y $V_{2,h}$ son espacios vectoriales de dimensión finita. Ver Babuska, I.- I. - Aziz, A.K. [1]. De hecho, si numeramos de 1 a $\bar{N}(h)$ (resp. de 1 a $\overset{\circ}{N}(h)$, de 1 a $N(h)$) dichos vértices, se tiene que $\bar{\theta}_h$ (resp. $\overset{\circ}{\theta}_h$, θ_h) es un conjunto de $\bar{N}(h)$ (resp. $\overset{\circ}{N}(h)$, $N(h)$) puntos. Así pues, V_h (resp. $V_{0,h}$, $V_{2,h}$) es un espacio vectorial de dimensión $\bar{N}(h)$ (resp. $\overset{\circ}{N}(h)$, $N(h)$) (ver Raviart, P.A. [1]. Perronnet, A. [1]).

Se define ahora una base de V_h (resp. $V_{0,h}$, $V_{2,h}$) por las únicas funciones $\{w_j^h\}$ que verifican

$$(2.13) \quad w_j^h(a_i) = \delta_{ij}, \quad i, j=1, 2, \dots, \bar{N}(h)$$

(resp. $i, j=1, 2, \dots, \overset{\circ}{N}(h)$; $i, j=1, 2, \dots, N(h)$) donde a_i son los vértices de la triangulación \mathcal{T}_h . Se observa inmediatamente que el soporte de w_j^h es el conjunto de los triángulos $T \in \mathcal{T}_h$ que contienen al vértice a_j , es decir, w_j^h es una función piramidal de altura 1 en a_j y con base el polígono (ver figura adjunta) de vértices los "vecinos" de a_j .



Se tiene entonces que V_h (resp. $V_{0,h}$, $V_{2,h}$) es una aproximación interna de V (resp. V_0 , V_2) es decir $V_h \subset V$ (resp. $V_{0,h} \subset V_0$, $V_{2,h} \subset V_2$) (ver Ciarlet, P.G. [1]) y si

$\varphi \in V$ definimos $\varphi_h \in V_h$ por

$$(2.14) \quad \varphi_h = \sum_{i=1}^{\bar{N}(h)} \varphi(a_i) w_i^h$$

y resulta que φ_h aproxima a φ en el sentido que $\varphi_h \rightarrow \varphi$ en V cuando $h \rightarrow 0$.

Se dota a V_h (resp. $V_{0,h}$, $V_{2,h}$) de dos normas equivalentes inducidas respectivamente por las normas sobre V y sobre H , sean estas $\|\cdot\|_h$, $|\cdot|_h$. Ver Trémolieres, R. [1]. Entonces, como V_h (resp. $V_{0,h}$, $V_{2,h}$) son de dimensión finita se tiene:

$$(2.15) \quad c_2(h) |\varphi_h|_h \leq \|\varphi_h\|_h \leq c_1(h) |\varphi_h|_h$$

con $c_1(h) \rightarrow \infty$ cuando $h \rightarrow 0$, en general.

Observación 2.1

Se podría ahora construir una aproximación de los convexos como en Trémolieres, R. [1], Brezzi, F.- Hager, W.W.- Raviart, P.A. [1], Glowinski, R.- Lions, J.L.- Trémolieres, R. [1] y entonces plantear la inecuación variacional discretizada como en Saguez, C. [1]. Ahora bien, en las aplicaciones prácticas, la construcción de tal aproximación es una de las dificultades en la resolución de los problemas de inecuación y nuestro objetivo es la resolución aproximada del problema, lo cual se consigue con la resolución del problema penalizado, como veremos posteriormente. ■

Se da ahora una subdivisión de $[0, T]$ en $N(k)$ intervalos de longitud k (k destinado a tender a cero y correlativamente $N(k) \rightarrow +\infty$). Si denotamos por $\chi_k^n(t)$ la función característica de $[nk, (n+1)k[$, $i=0, 1, \dots, N(k)$, entonces aproximamos $\xi_k \in L^2(0, T; V_h)$ por

$$(2.16) \quad \xi_{h,k} = \sum_{n=0}^{N(k)} \xi_h^n \chi_k^n$$

donde $\xi_h^n \in V_h$, $n=0, 1, \dots, N(k)$ son a elegir de tal forma que $\xi_{h,k} \rightarrow \xi_h$ en $L^2(0, T; V_h)$ cuando $k \rightarrow 0$.

3 . PROBLEMA PENALIZADO DISCRETIZADO

Con los elementos introducidos en el apartado anterior, estamos en condiciones de plantear el problema penalizado discretizado asociado a 4.1 del Capítulo III. Sea entonces $\xi = \xi(h)$ con $\xi(h) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$, e introducimos la "ecuación" penalizada semidiscretizada por un esquema totalmente implícito (ver Trémolieres, R. [1])

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{y^{n+1} - y^n}{k} - \Delta y^{n+1} + \beta(y^{n+1}) = f \quad \text{en } D \\ y^{n+1} = g^{n+1} \quad \text{sobre } \Sigma_m \\ y^{n+1} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_M \end{array} \right.$$

para $n=0, 1, \dots, N(k)-1$ y con la condición inicial

$$(3.2) \quad y^0 = 0 \quad \text{en } D$$

cuya formulación variacional es

$$(3.3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k}(y^{n+1} - y^n, \varphi) + a(y^{n+1}, \varphi) + \int_D \beta(y^{n+1}) \varphi dx = \int_D f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in V_0 \\ y^{n+1} - \tilde{g}^{n+1} \in V_0 \end{array} \right.$$

donde \tilde{g}^{n+1} es una prolongación por cero a todo D .

Si tomamos ahora la aproximación $V_{0,h}$ de V_0 se tiene la "ecuación" penalizada totalmente discretizada definida por:

$$(3.4) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k} \int_{D_h} (y_h^{n+1} - y_h^n) \varphi_h dx + \int_{D_h} \nabla y_h^{n+1} \nabla \varphi_h dx + \int_{D_h} \beta(y_h^{n+1}) \varphi_h dx = \\ = \int_{D_h} f_h \varphi_h dx, \quad \forall \varphi_h \in V_{0,h} \\ y_h^{n+1} - \tilde{g}_h^{n+1} \in V_{0,h} \end{array} \right.$$

para $n=0, 1, \dots, N(k)-1$ y con la condición inicial

$$(3.5) \quad y_h^0 = 0 \quad \text{en } D_h$$

donde $f_h = \tilde{\theta}_h - l \chi_{D_h - \Omega_h}$ y Ω_h una aproximación de Ω que se especificará posteriormente, \tilde{g}_h^{n+1} es una aproximación de \tilde{g}^{n+1} .

Como en el caso continuo del Capítulo III, esta ecuación, bajo unas hipótesis razonables, tiene solución única, además se tiene, como en Glowinski, R.- Lions, J.L.-Trémolieres, R. [1].

Teorema 3.1

Si ε es fijado independientemente de h , entonces

$$(3.6) \quad y_{h,k} \xrightarrow{k} y_\varepsilon \quad \text{en } L^2(0,T;V)\text{-fuerte; } h,k \rightarrow 0$$

y si $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$ entonces

$$(3.7) \quad y_{h,k} \xrightarrow{k} y \quad \text{en } L^2(0,T;V)\text{-fuerte; } k \rightarrow 0$$

siendo y e y_ε las soluciones de la inecuación variacional y de la ecuación penalizada. ■

Vamos a construir ahora el problema de control discretizado; para ello vamos a definir una discretización de Ω .

Consideramos una discretización "radial" del dominio D como la de la Figura 2 para el caso de una corona circular. Entonces Ω_h está definido por $\Gamma_{m,h}$ y por $\Gamma_h(0)$, siendo $\Gamma_h(0)$ la poligonal cerrada construida por los vértices $\gamma_h(0)$ que son puntos sobre los radios. En tal caso se tendrá

$$(3.8) \quad \text{card}(\gamma_{m,h}) = \text{card}(\gamma_{M,h}) = \text{card}(\gamma_h(0)) = N$$

Así pues, definimos $\gamma_h(0)$ por

$$(3.9) \quad \gamma_h(0) = \{u_h^i \in R \mid u_h^i \text{ "está en el radio" } i, i=1, \dots, N\}$$

Es decir, definimos \mathcal{D}_{ad}^h como el subconjunto de R^N tal que

$$(3.10) \quad \mathcal{D}_{ad}^h = \left\{ u_h \in R^N \mid \min_{i=1, \dots, N} \left\{ |u_h^i - \gamma_{m,h}^i|, |u_h^i - \gamma_{M,h}^i| \right\} \geq \sigma_0 > 0 \right\}$$

donde $\gamma_{m,h}^i, \gamma_{M,h}^i$ son los elementos de $\gamma_{m,h}$ y $\gamma_{M,h}$ respectivamente.

Denotamos por $y_h(u_h)$ la solución de (3.4)(3.5) asociada a $u_h \in \mathbb{R}^N$ y consideramos el funcional coste discretizado definido por

$$(3.11) \quad J_{h,k}(u_h) = \sum_{n=0}^{N(k)} k |y_h^n(u_h) - z_h^n|^2$$

donde z_h^n es una aproximación de z_d .

Asociado al convexo cerrado acotado \mathcal{D}_{ad}^h nos planteamos el

Problema penalizado discretizado

$$(3.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u_h \in \mathcal{D}_{ad}^h \text{ tal que} \\ J_{h,k}(u_h) \leq J_{h,k}(v_h), \quad v_h \in \mathcal{D}_{ad}^h \end{array} \right.$$

Para la existencia de solución del problema (3.12) se tiene la

Proposición 3.1

La aplicación que a u_h hace corresponder y_h , solución de (3.4)(3.5) es hólдерiana de orden $1/2$ de \mathbb{R}^N en $(V_{2,h})^{N(k)}$.

Demostración

Sean **pués** $u_h^{(1)}$ y $u_h^{(2)}$ dos puntos de \mathbb{R}^N , sean $\Omega_h^{(1)}$ y $\Omega_h^{(2)}$ los dominios asociados, $f_h^{(i)} = \tilde{\theta}_{0,h} - \chi_{D_h - Q_h^{(i)}}$, $i=1,2$ los segundos miembros de (3.4) e $y_{h,1}$, $y_{h,2}$ las

soluciones de (3.4) (3.5) asociadas respectivamente.

Escribiendo (3.4) para y_2 e y_1 ⁽¹⁾, restando y tomando
 $= y_2^{n+1} - y_1^{n+1}$ llegamos a

$$\frac{1}{k}(y_2^{n+1} - y_1^{n+1} - (y_2^n - y_1^n), y_2^{n+1} - y_1^{n+1})_h + a(y_2^{n+1} - y_1^{n+1}, y_2^{n+1} - y_1^{n+1})_h + (\beta(y_2^{n+1}) - \beta(y_1^{n+1}), y_2^{n+1} - y_1^{n+1})_h = (f^{(2)} - f^{(1)}, y_2^{n+1} - y_1^{n+1})_h$$

y como β es un operador monótono, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} |y_2^{n+1} - y_1^{n+1}|_h^2 - \frac{1}{k} (y_2^{n+1} - y_1^{n+1}, y_2^n - y_1^n)_h + \alpha c_2(h)^2 |y_2^{n+1} - y_1^{n+1}|_h^2 &\leq \\ &\leq |f^{(2)} - f^{(1)}|_h \cdot |y_2^{n+1} - y_1^{n+1}|_h \end{aligned}$$

Es decir

$$\left[\frac{1}{k} + \alpha c_2(h)^2 \right] |y_2^{n+1} - y_1^{n+1}|_h \leq |f^{(2)} - f^{(1)}|_h + \frac{1}{k} |y_2^n - y_1^n|_h$$

Si denotamos por c la cantidad positiva $1 + \alpha k c_2(h)^2$,
se tiene:

$$|y_2^{n+1} - y_1^{n+1}|_h \leq \frac{1}{c} |y_2^n - y_1^n|_h + \frac{k}{c} |f^{(2)} - f^{(1)}|_h$$

además, como $|y_2^0 - y_1^0|_h = 0$, se obtiene

$$(3.13) \quad |y_2^{n+1} - y_1^{n+1}|_h \leq c(h, k) |f^{(2)} - f^{(1)}|_h$$

(1) Por comodidad de notación, omitiremos a veces el índice h .

donde $c(h,k) = k \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c^i}$

Ahora bien:

$$(3.14) \quad \left| f^{(2)} - f^{(1)} \right|_h^2 = \int_{D_h} \left| \tilde{\theta}_{0,h} - l \chi_{D_h - \Omega_h^{(2)}} - \tilde{\theta}_{0,h} + l \chi_{D_h - \Omega_h^{(1)}} \right|^2 dx$$

$$= l^2 \int_{D_h} \left| \chi_{\Omega_h^{(2)}} - \chi_{\Omega_h^{(1)}} \right|^2 dx = l^2 \left| \chi_{\Omega_h^{(2)}} - \chi_{\Omega_h^{(1)}} \right|_h^2$$

Pero como

$$(3.15) \quad \left| \chi_{\Omega_h^{(2)}} - \chi_{\Omega_h^{(1)}} \right|_h^2 = \mu(\Omega_h^{(2)} \Delta \Omega_h^{(1)}) \leq \max \left\{ \mu(\Gamma_h^{(2)}(0)), \mu(\Gamma_h^{(1)}(0)) \right\} \cdot \left| u_2 - u_1 \right|_{\mathbb{R}^N}$$

donde $\mu(\Gamma_h^{(i)}(0))$, $i=1,2$ denota la longitud de la poligonal $\Gamma_h^{(i)}(0)$. Ver Sendov, B. [1].

De (3.13)(3.14) y (3.15) se deduce la proposición. ■

Como \mathcal{D}_{ad}^h es un convexo cerrado y acotado, y se tiene la proposición anterior, sabemos que existe una solución al problema (3.12); además si $\Gamma(0)$ es localmente parametrizable por funciones uniformemente lipchicianas, i.e. $\Omega \in \mathcal{D}^{0,1}(\lambda, \delta)$, entonces es rectificable y (ver Sendov, B. [1]) el problema penalizado discretizado converge al problema penalizado continuo para el caso $\mathcal{D}_{ad}^{0,1}(\lambda, \delta)$. Ver Trémolières, R. [1], Glowinski, R.- Lions, J.L.- Trémolières, R. [1], Raviart, P.G. [1]. ■

4 . CONDICIONES DE OPTIMALIDAD DISCRETAS

Nos proponemos ahora obtener las condiciones necesarias de optimalidad para el problema penalizado discretizado (3.12). Dichas condiciones las obtendremos formalmente; para su justificación se procede como en el caso continuo mediante la introducción del problema penalizado-regularizado discretizado.

Teniendo presente (2.14), ponemos

$$(4.1) \quad y_h^{n+1} = \sum_{i=1}^{N(h)} y_i^{n+1} \cdot w_i^h$$

Si tomamos $\psi_h = w_j^h$ en (3.4) se tiene

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{N(h)} (y_i^{n+1} - y_i^n) \int_{D_h} w_i w_j dx + \sum_{i=1}^{N(h)} y_i^{n+1} \int_{D_h} \nabla w_i \nabla w_j dx + \\ + \int_{D_h} \beta \left(\sum_{i=1}^{N(h)} y_i^{n+1} w_i \right) w_j = \int_{D_h} f_h w_j dx \quad j=N+1, \dots, N(h) \\ y_j^{n+1} = g_j^{n+1} \quad j=1, 2, \dots, N \end{array} \right.$$

para $n=0, 1, 2, \dots, N(k)-1$ y con la condición

$$(4.3) \quad y_j^0 = 0 \quad j=1, 2, \dots, N(h)$$

De (4.1) y (3.11) deducimos

$$(4.4) \quad J_{h,k}(u_h) = k \sum_{n=0}^{N(k)} \sum_{i,j=1}^{N(h)} (y_i^n - z_i^n) (y_j^n - z_j^n) \int_{D_h} w_i w_j dx$$

Ahora bien, como $\tilde{\theta}_{0,h}$ es una aproximación de θ_0 y θ_0 es la restricción a Ω de una función definida en todo D (ver Capítulo de introducción) suponemos entonces que

$\tilde{\theta}_{0,h}^{(x)} = \bar{\theta}_{0,h}(x) \chi_{\Omega_h}^{(x)}$ y se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{D_h} f_h w_j dx &= \int_{D_h} (\bar{\theta}_{0,h} \chi_{\Omega_h} - \ell \chi_{D_h - \Omega_h}) w_j dx = \\ &= -\ell \int_{D_h} w_j dx + \int_{\Omega_h} \hat{\theta}_{0,h} w_j dx \end{aligned}$$

con $\hat{\theta}_{0,h} = \ell + \bar{\theta}_{0,h}$

Así pues, el sistema (4.2) resulta ser

$$(4.5) \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{N(h)} (y_i^{n+1} - y_i^n) \int_{D_h} w_i w_j dx + \sum_{i=1}^{N(h)} y_i^{n+1} \int_{D_h} \nabla w_i \nabla w_j dx + \\ &+ \int_{D_h} \beta \left(\sum_{i=1}^{N(h)} y_i^{n+1} w_i \right) w_j dx = -\ell \int_{D_h} w_j dx + \int_{\Omega_h} \hat{\theta}_{0,h} w_j dx \\ & \qquad \qquad \qquad j=N+1, \dots, N(h) \\ & y_j^{n+1} = g_j^{n+1} \qquad \qquad \qquad j=1, 2, \dots, N \end{aligned} \right.$$

Obtengamos pues las condiciones de optimalidad.

Derivando (4.4) respecto a u_h^l , $l=1, 2, \dots, N$ se tiene:

$$(4.6) \quad \frac{\partial J_{h,k}}{\partial u_h^l}(u_h) = 2k \sum_{n=0}^{N(k)} \sum_{i,j=1}^{N(h)} (y_i^n - z_i^n) \frac{\partial y_j^h}{\partial u_h^l} \int_{D_h} w_i w_j dx$$

Por otra parte, si derivamos en (4.5) respecto a u_h^l ,
 $l=1,2,\dots,N$, obtenemos:

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{N(h)} \left(\frac{\partial y_i^{n+1}}{\partial u_h^l} - \frac{\partial y_i^n}{\partial u_h^l} \right) \int_{D_h} w_i w_j dx + \sum_{i=1}^{N(h)} \frac{\hat{c} y_i^{n+1}}{\partial u_h^l} \int_{D_h} \nabla w_i \nabla w_j dx + \\ + \int_{D_h} \frac{\partial}{\partial u_h^l} \beta \left(\sum_{i=1}^{N(h)} y_i^{n+1} w_i \right) w_j dx = \frac{\partial}{\partial u_h^l} \int_{D_h} \hat{\theta}_{0,h} w_j dx \\ \hspace{15em} j=N+1, \dots, N(h) \\ \frac{\partial y_i^{n+1}}{\partial u_h^l} = 0 \quad j=1, 2, \dots, N \end{array} \right.$$

para $n=0,1,\dots,N(k)-1$ y con la condición

$$(4.8) \quad \frac{\partial y_j^0}{\partial u_h^l} = 0 \quad j=1,2,\dots,N(h)$$

Aunque el término de penalización no es derivable se puede proceder como en el Capítulo III y obtener

$$\begin{aligned} \int_{D_h} \frac{\partial}{\partial u_h^l} \beta \left(\sum_{i=1}^{N(h)} y_i^{n+1} w_i \right) w_j dx &= \int_{D_h} \chi_{[y_h^{n+1} \leq 0]} \sum_{i=1}^{N(h)} \frac{\partial y_i^{n+1}}{\partial u_h^l} w_i w_j dx \\ &= \sum_{i=1}^{N(h)} \frac{\partial y_i^{n+1}}{\partial u_h^l} \int_{D_h \cap [y_h^{n+1} \leq 0]} w_i w_j dx \end{aligned}$$

donde $[y_h^{n+1} \leq 0] = \{x \in D_h / y_h^{n+1}(x) \leq 0\}$. Denotemos por

$D_h^- = D_h \cap [y_h^{n+1} \leq 0]$. Con esta expresión (4.7) resulta ser

$$\begin{aligned}
 (4.9) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{N(h)} \left(\frac{\partial y_i^{n+1}}{\partial u_h^l} - \frac{\partial y_i^n}{\partial u_h^l} \right) \int_{D_h} w_i w_j dx + \\
 & + \sum_{i=1}^{N(h)} \frac{\partial y_i^{n+1}}{\partial u_h^l} \int_{D_h} \nabla w_i \nabla w_j dx + \sum_{i=1}^{N(h)} \frac{\partial y_i^{n+1}}{\partial u_h^l} \int_{D_h^-} w_i w_j dx = \\
 & = \frac{\partial}{\partial u_h^l} \int_{D_h} \hat{\theta}_{0,h} w_j dx \quad j=N+1, \dots, N(h) \\
 & \frac{\partial y_i^{n+1}}{\partial u_h^l} = 0 \quad j=1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones (4.9) (4.8) nos conducen a introducir el estado adjunto discretizado penalizado por la solución del sistema retrógrado

$$(4.10) \quad p_j^{N(k)} = 0 \quad j=1, 2, \dots, N(h)$$

$$\begin{aligned}
 (4.11) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{N(h)} (p_i^n - p_i^{n+1}) \int_{D_h} w_i w_j dx + \sum_{i=1}^{N(h)} p_i^n \int_{D_h} \nabla w_i \nabla w_j dx + \\
 & + \sum_{i=1}^{N(h)} p_i^n \int_{D_h^-} w_i w_j dx = 2 \sum_{i=1}^{N(h)} (y_i^{n+1} - z_i^{n+1}) \int_{D_h} w_i w_j dx \\
 & \quad \quad \quad j=N+1, \dots, N(h) \\
 & p_j^n = 0 \quad j=1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

para $n=N(k)-1, N(k)-2, \dots, 2, 1, 0$.

Multiplicando (4.9) por p_j^n y sumando en $j=1, 2, \dots, N(h)$

se obtiene :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} \sum_{i,j=1}^{N(h)} \left(\frac{\partial y_i^{n+1}}{\partial u_h^l} - \frac{\partial y_i^n}{\partial u_h^l} \right) p_j^n \int_{D_h} w_i w_j dx + \\ & + \sum_{i,j=1}^{N(h)} \frac{\partial y_i^{n+1}}{\partial u_h^l} p_j^n \int_{D_h} \nabla w_i \nabla w_j dx + \sum_{i,j=1}^{N(h)} \frac{\partial y_i^{n+1}}{\partial u_h^l} p_j^n \int_{D_h} -w_i w_j dx = \\ & = \sum_{j=1}^{N(h)} p_j^n \frac{\partial}{\partial u_h^l} \int_{\Omega_h} \hat{\theta}_{0,h} w_j dx \end{aligned}$$

Comparando las dos ecuaciones anteriores y teniendo en cuenta las condiciones iniciales y finales se llega a

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i,j=1}^{N(h)} (y_i^{n+1} - z_i^{n+1}) \frac{\partial y_i^{n+1}}{\partial u_h^l} \int_{D_h} w_i w_j dx = \\ = \sum_{j=1}^{N(h)} p_j^n \frac{\partial}{\partial u_h^l} \int_{\Omega_h} \hat{\theta}_{0,h} w_j dx \end{aligned}$$

De esta expresión y (4.6) se obtienen las componentes del vector gradiente, es decir, se tiene:

$$(4.12) \quad \frac{\partial J_{h,k}}{\partial u_h^l} = k \sum_{n=0}^{N(k)} \sum_{j=1}^{N(h)} p_{j,l}^n \frac{\partial}{\partial u_h^l} \int_{\Omega_h} \hat{\theta}_{0,h} w_j dx ; l=1,2,\dots,N$$

Así pues, las condiciones de optimalidad para el problema penalizado discretizado vienen dadas por el sistema no lineal:

$$\begin{aligned}
 & y_j^0 = 0 \quad j=1,2,\dots,N(h) \\
 & n=0,1,\dots,N(k)-1 \\
 & \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{N(h)} (y_i^{n+1} - y_i^n) \int_{D_h} w_i w_j dx + \sum_{i=1}^{N(h)} y_i^{n+1} \int_{D_h} \nabla w_i \nabla w_j dx + \\
 & + \int_{D_h} \beta \left(\sum_{i=1}^{N(h)} y_i^{n+1} w_i \right) w_j dx = -\ell \int_{D_h} w_j dx + \int_{\Omega_h} \hat{\theta}_{0,h} w_j dx \\
 & \quad j=N+1,\dots,N(h) \\
 & y_j^{n+1} = g_j^{n+1}, \quad j=1,2,\dots,N \\
 & p_j^{N(k)} = 0, \quad j=1,2,\dots,N(h) \\
 & n=N(k)-1,\dots,2,1 \\
 & (4.13) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{N(h)} (p_{i,l}^n - p_{i,l}^{n+1}) \int_{D_h} w_i w_j dx + \sum_{i=1}^{N(h)} p_{i,l}^n \int_{D_h} \nabla w_i \nabla w_j dx + \\ & + \sum_{i=1}^{N(h)} p_{i,l}^n \int_{D_h^-} w_i w_j dx = 2 \sum_{i=1}^{N(h)} (y_i^{n+1} - z_i^{n+1}) \int_{D_h} w_i w_j dx \\ & \quad j=N+1,\dots,N(h) \\ & p_j^n = 0, \quad j=1,2,\dots,N \end{aligned} \right. \\
 & \left(k \sum_{n=0}^{N(k)} \sum_{j=1}^{N(h)} p_{j,l}^n \frac{\partial}{\partial u_h^l} \int_{\Omega_h} \hat{\theta}_{0,h} w_j dx, u_h^l - v_h^l \right)_{\mathbb{R}^N} \geq 0, \\
 & \quad \forall v \in \mathcal{Q}_{ad}^h.
 \end{aligned}$$

B . RESOLUCION DEL PROBLEMA MODELO

1 . INTRODUCCION

Nuestro último objetivo es la resolución computacional de las condiciones necesarias de optimalidad discretas del problema penalizado (3.12) para un dominio sencillo D , definido por un rectángulo. Dicho caso sencillo puede ser considerado como una aproximación local de un dominio mas general de tipo anular, como los estudiados en capítulos anteriores, como puede observarse comparando las figuras 3 y 4. Así pues nosotros supondremos un dominio D como el de la figura 5 tal que $\partial D = \Gamma_m \cup \Gamma_M \cup \Gamma$, donde Γ son los lados horizontales.

Para que el problema penalizado esté bien planteado necesitamos unas condiciones sobre la frontera Γ . Es natural suponer que por Γ no hay pérdida de calor, es decir que estos lados estan térmicamente aislados y por tanto añadiremos esta condición de contorno a nuestra ecuación penalizada. Se tiene así:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \beta(y) &= \tilde{\theta}_0 - l \chi_{D-\Omega} && \underline{\text{en}} \quad Q \\
 y &= g && \underline{\text{sobre}} \quad \Sigma_m \\
 \frac{\partial y}{\partial n} &= 0 && \underline{\text{sobre}} \quad \Sigma \\
 y &= 0 && \underline{\text{sobre}} \quad \Sigma_M \\
 y(0) &= 0 && \underline{\text{en}} \quad D
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

donde $\Sigma_m = \Gamma_m \times]0, T[$, $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$, $\Sigma_M = \Gamma_M \times]0, T[$.

El funcional coste será

$$(1.2) \quad J(\Omega) = \int_Q |y(\Omega) - z_d|^2 dx dt$$

siendo z_d el estado deseado dado, e $y(\Omega)$ la solución de (1.1).

Consideramos el problema

$$(1.3) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } \hat{\Omega} \in \mathcal{D}_{ad} \text{ tal que} \\ J(\hat{\Omega}) \leq J(\Omega), \forall \Omega \in \mathcal{D}_{ad} \end{cases}$$

donde \mathcal{D}_{ad} es una familia de dominios admisibles, definida por la frontera variable $\Gamma(0)$. Ver figura 5.

2 . ESTUDIO DEL PROBLEMA MODELO

Consideramos el rectángulo

$$D =]0, a[\times]0, b[$$

y lo discretizamos como en la figura 4. Entonces se obtienen las condiciones de optimalidad como en el punto A.4.

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & y_j^0 = 0 \quad j=1, 2, \dots, N(h) \\
 & n=0, 1, \dots, N(k)-1 \\
 & \sum_{i=1}^{N(h)} \left(\frac{1}{k} \int_{D_h} w_i w_j dx + \int_{D_h} \nabla w_i \nabla w_j dx \right) y_i^{n+1} + \\
 & + \int_{D_h} \beta \left(\sum_{i=1}^{N(h)} y_i^{n+1} w_i \right) w_j dx = \sum_{i=1}^{N(h)} \left(\frac{1}{k} \int_{D_h} w_i w_j dx \right) y_j^n - \\
 & - \ell \int_{D_h} w_j dx + \int_{\Omega_h} \hat{\theta}_{0,h} w_j dx \quad ; \quad j=N+1, \dots, N(h) \\
 & y_j^{n+1} = g_j^{n+1} \quad j=1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & p_j^{N(k)} = 0 \quad j=1, 2, \dots, N(h) \\
 & n=N(k)-1, \dots, 2, 1 \\
 & \sum_{i=1}^{N(h)} \left(\frac{1}{k} \int_{D_h} w_i w_j dx + \int_{D_h} \nabla w_i \nabla w_j dx + \int_{D_h^-} w_i w_j dx \right) p_i^n = \\
 & = \sum_{i=1}^{N(h)} \left(\frac{1}{k} \int_{D_h} w_i w_j dx \right) p_i^{n+1} + \\
 & + \sum_{i=1}^{N(h)} \left(2 \int_{D_h} w_i w_j dx \right) (y_i^{n+1} - z_i^{n+1}) \quad ; \quad j=N+1, \dots, N(h) \\
 & p_j^n = 0 \quad j=1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$(2.3) \quad \left(\frac{\partial^{J_{h,k}}}{\partial u_h^l} (u_h) , u_h^{l-v} \right)_{\mathbb{R}^N} \geq 0 \quad \forall v_h \in \mathcal{Q}_{ad}^h$$

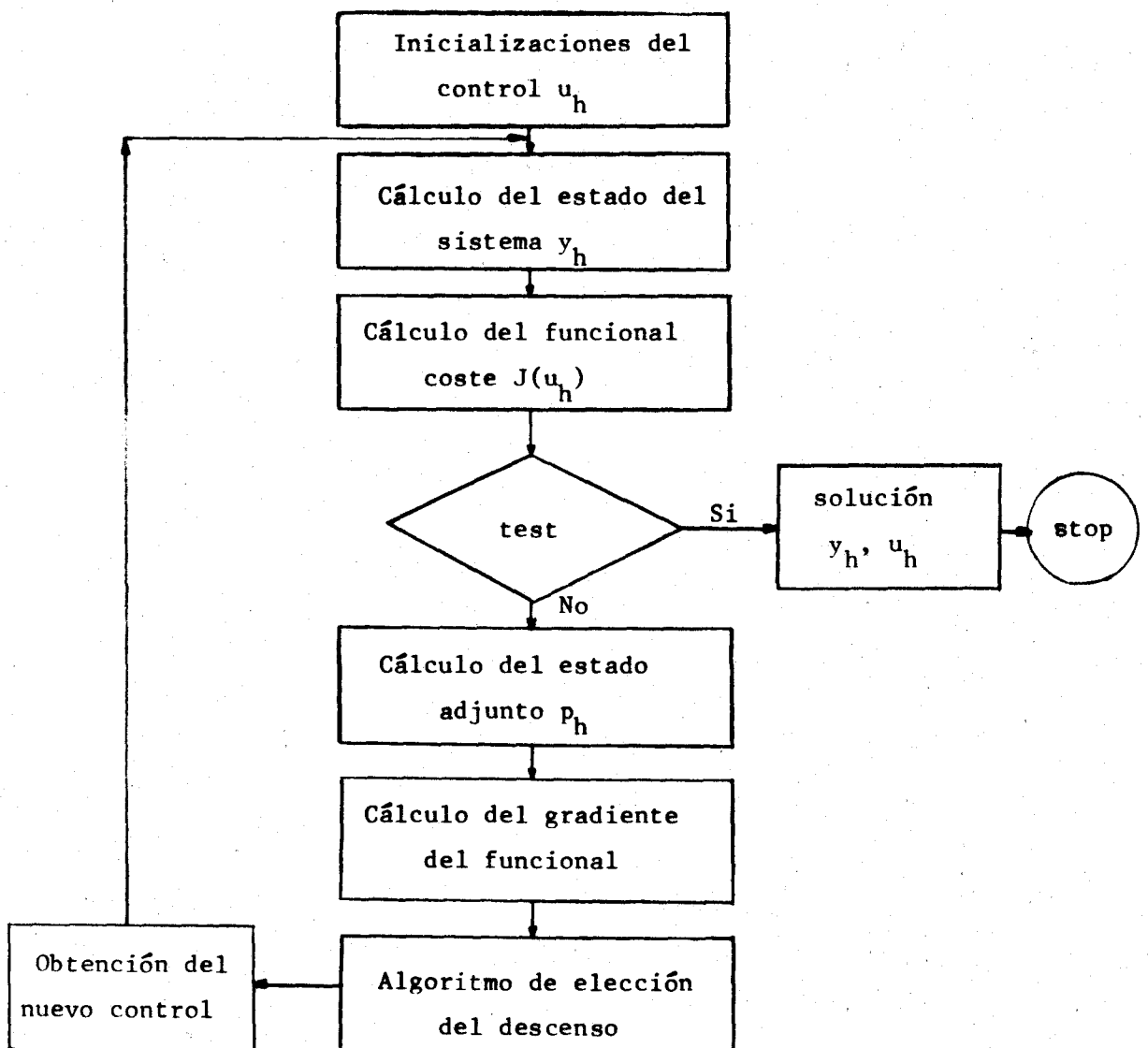
donde

$$(2.4) \quad \frac{\partial J_{h,k}}{\partial u_h^l}(u_h) = k \sum_{n=0}^{N(k)} \sum_{j=1}^{N(h)} p_j^n \frac{\partial}{\partial u_h^l} \int_{\Omega_h} \hat{\theta}_{0,h} w_j dx$$

$$l = 1, 2, \dots, N$$

y \mathcal{G}_{ad}^h vienen dados por los puntos sobre las horizontales como en la figura 6.

La resolución de (2.1)-(2.3) se hace mediante el organigrama:



Como vemos en este organigrama, hay tres pasos fundamentales: resolución del estado, resolución del estado adjunto y algoritmo de elección de descenso.

La resolución del estado adjunto es fácil por ser un sistema lineal y se hace por el método de Gauss-Seidel adaptado a este problema por las características especiales de la matriz (ver Perronet, A. [1], Lions, J.L. [6]).

La resolución del estado del sistema se hace por el método de linealización de Newton con relajación buscando un buen parámetro de relajación (ver figura 7) y después mediante el mismo procedimiento de Gauss-Seidel adaptado.

El algoritmo de elección de descenso se efectúa mediante el método de Polak-Ribière, E. [1], Pchénitchny, B.-Daniline, Y. [1]) del gradiente conjugado y eligiendo el paso por un método de M. Sourine [1]. Así mismo hemos utilizado el programa MIGCI adaptado de Tulowitzki, U. [1].

3 . RESULTADOS NUMERICOS

Hemos resuelto el problema para el caso $a=2.$, $b=1.$, haciendo una discretización regular de 66 vértices y 100 triángulos como en la figura 6, tomando $\bar{\theta}_0(x) = 0.$ y $g(x_2, t) = 10t.$

a) La solución del sistema viene dada para unos valores particulares en las figuras 8 y 9.

b) La convergencia de la ecuación penalizada se da en la figura 10.

c) la minimización del funcional viene dada en la tabla siguiente

Iteraciones	Control	Funcional
1	(0.3 , 0.3 , 0.3 , 0.3 , 0.3 , 0.3)	0.724 10^{-1}
2	(0.38 , 0.42 , 0.47 , 0.53 , 0.60 , 0.47)	0.667 10^{-1}
3	(0.33 , 0.41 , 0.46 , 0.51 , 0.56 , 0.45)	0.478 10^{-2}
4	(0.33 , 0.43 , 0.49 , 0.54 , 0.59 , 0.47)	0.171 10^{-2}
5	(0.35 , 0.49 , 0.53 , 0.53 , 0.52 , 0.42)	0.373 10^{-3}
6	(0.35 , 0.49 , 0.53 , 0.54 , 0.53 , 0.42)	0.276 10^{-3}
7	(0.35 , 0.50 , 0.54 , 0.53 , 0.52 , 0.42)	0.182 10^{-3}
8	(0.36 , 0.50 , 0.54 , 0.53 , 0.51 , 0.41)	0.161 10^{-3}
9	(0.36 , 0.51 , 0.54 , 0.53 , 0.51 , 0.41)	0.135 10^{-3}
10	(0.37 , 0.51 , 0.53 , 0.52 , 0.51 , 0.41)	0.126 10^{-3}

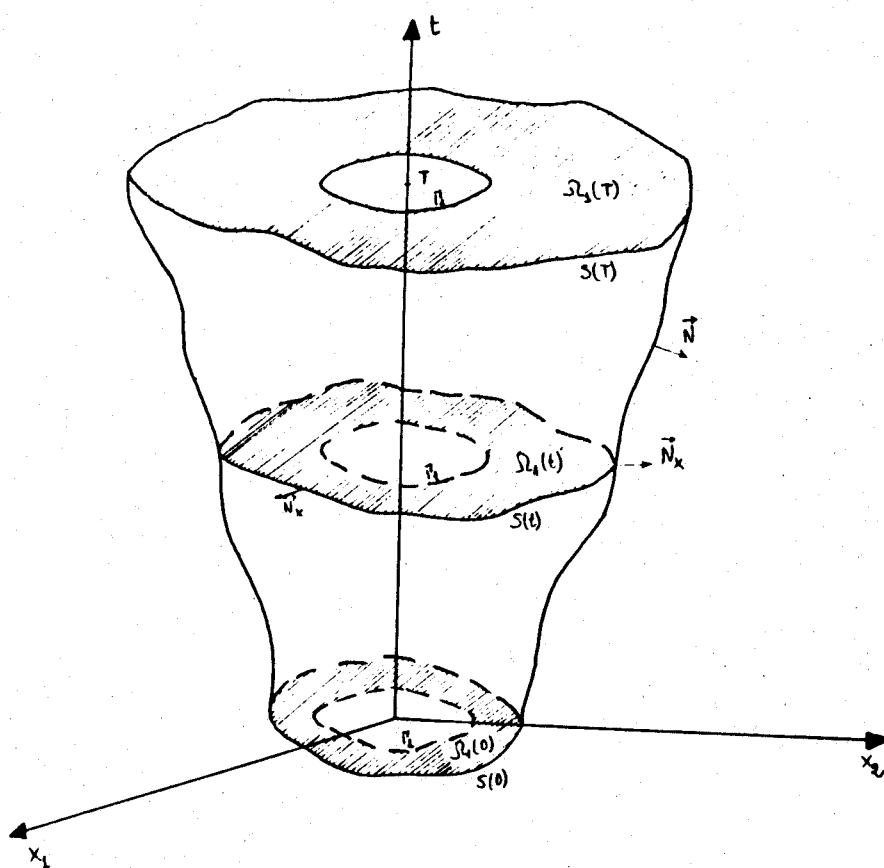


Fig. 1

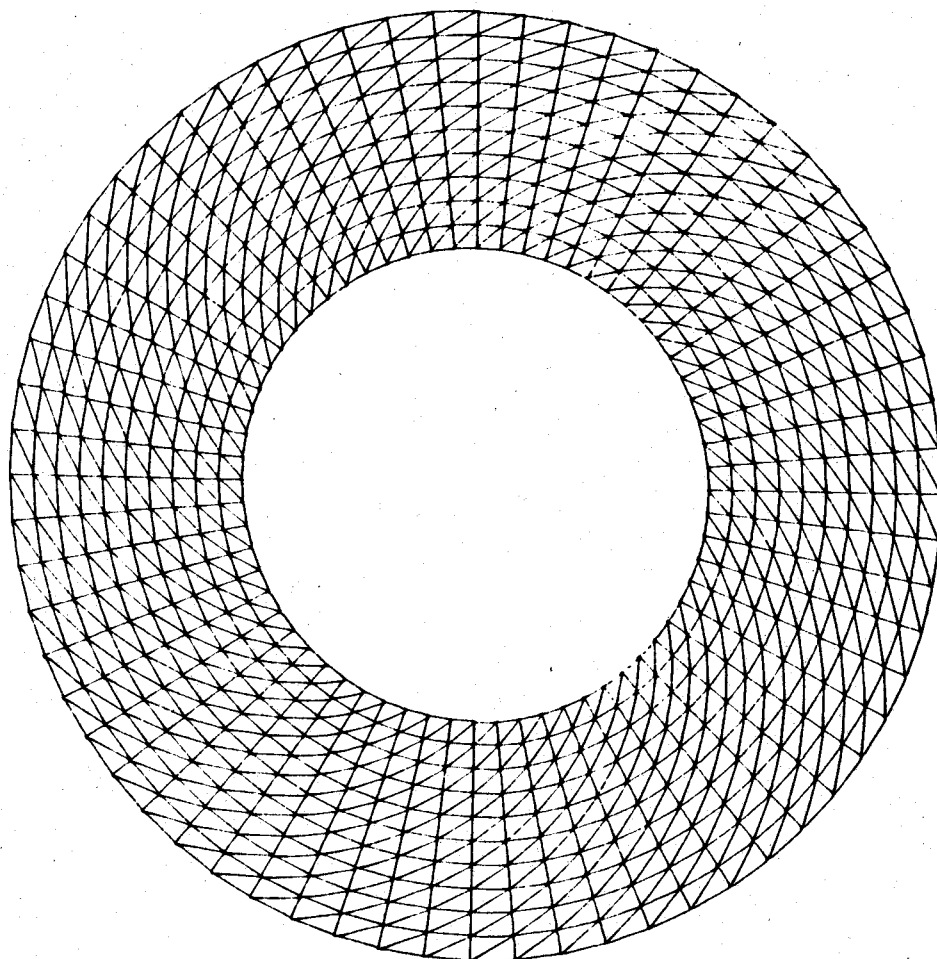


Fig. 2

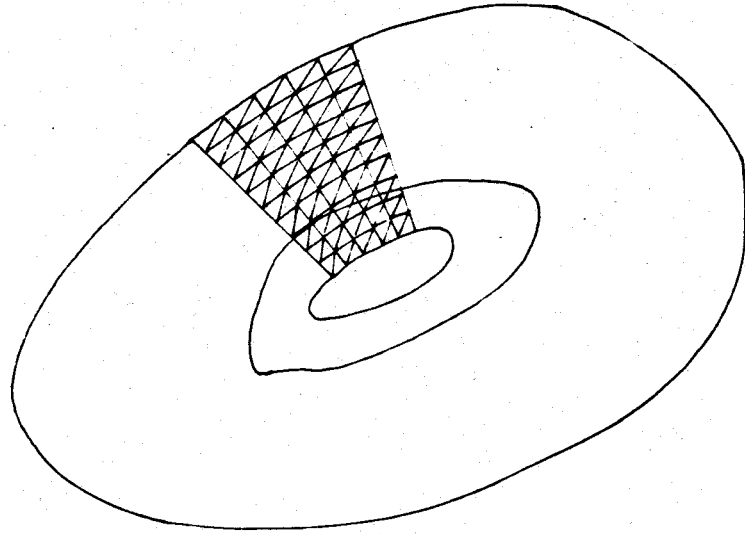


Fig. 3

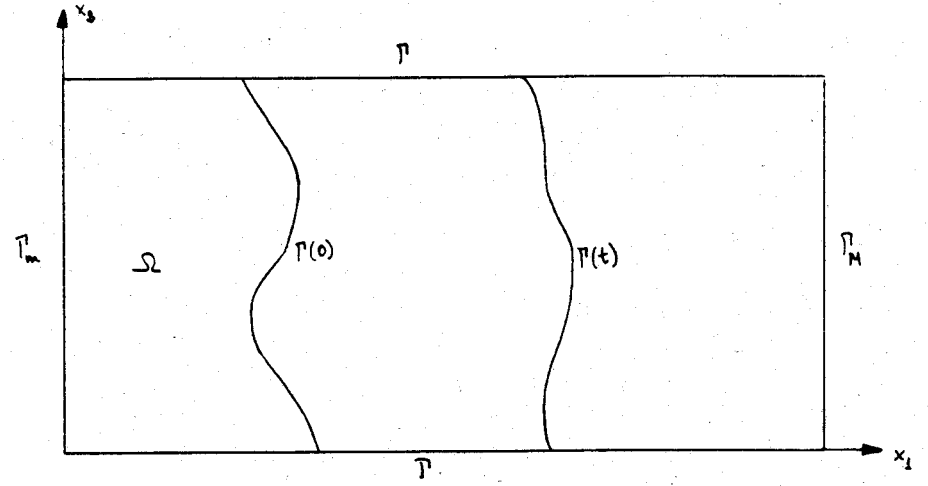


Fig. 5

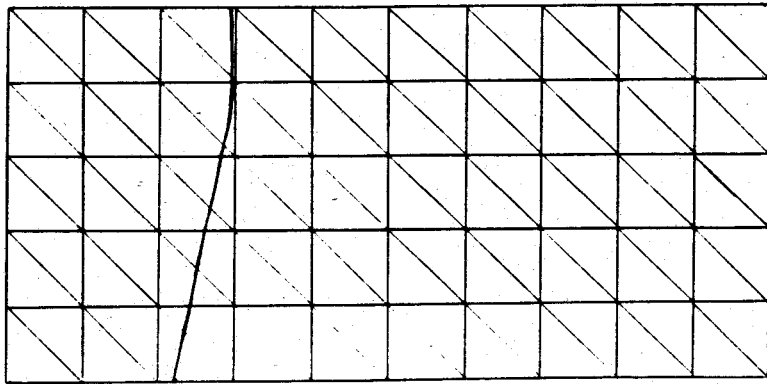


Fig. 4

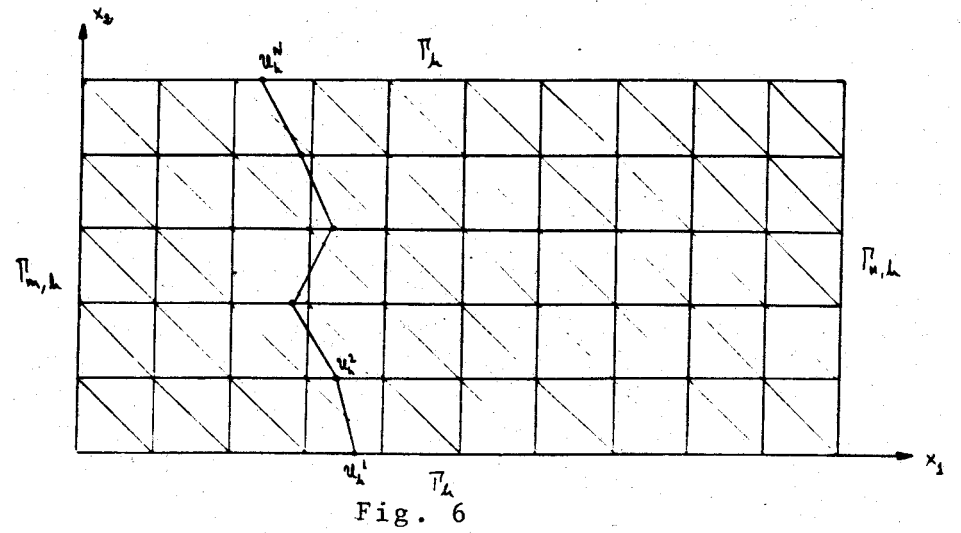


Fig. 6

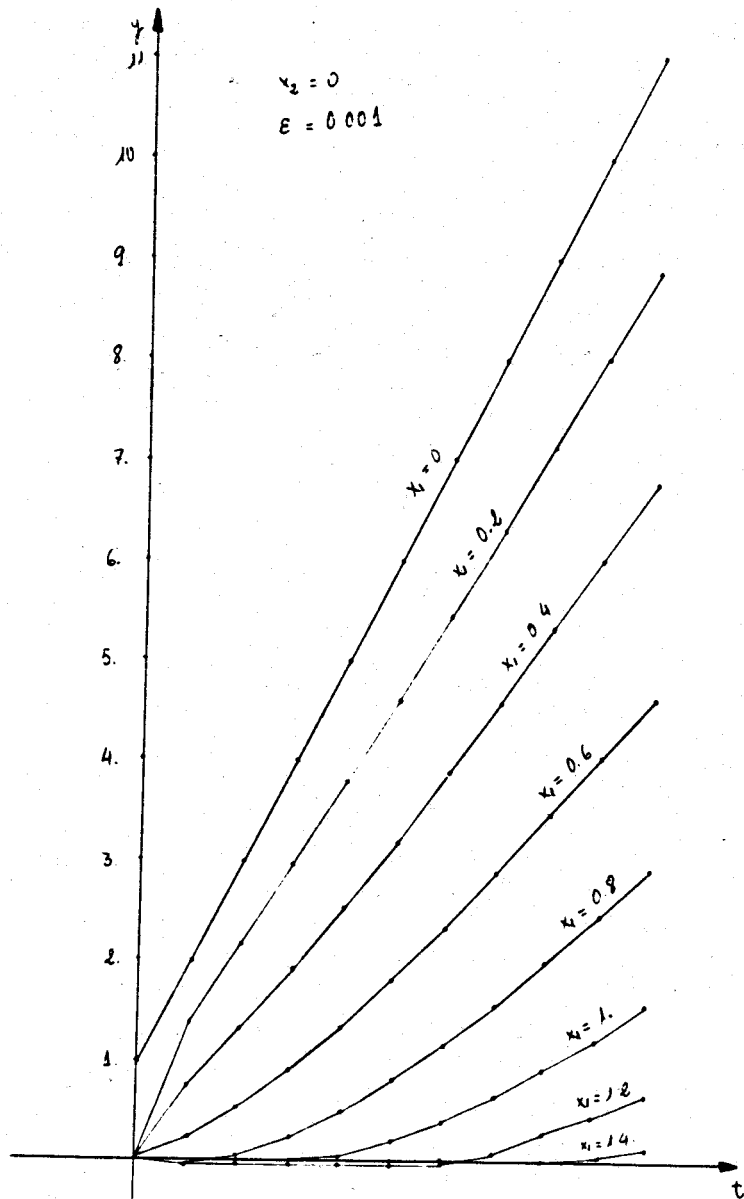


Fig. 8

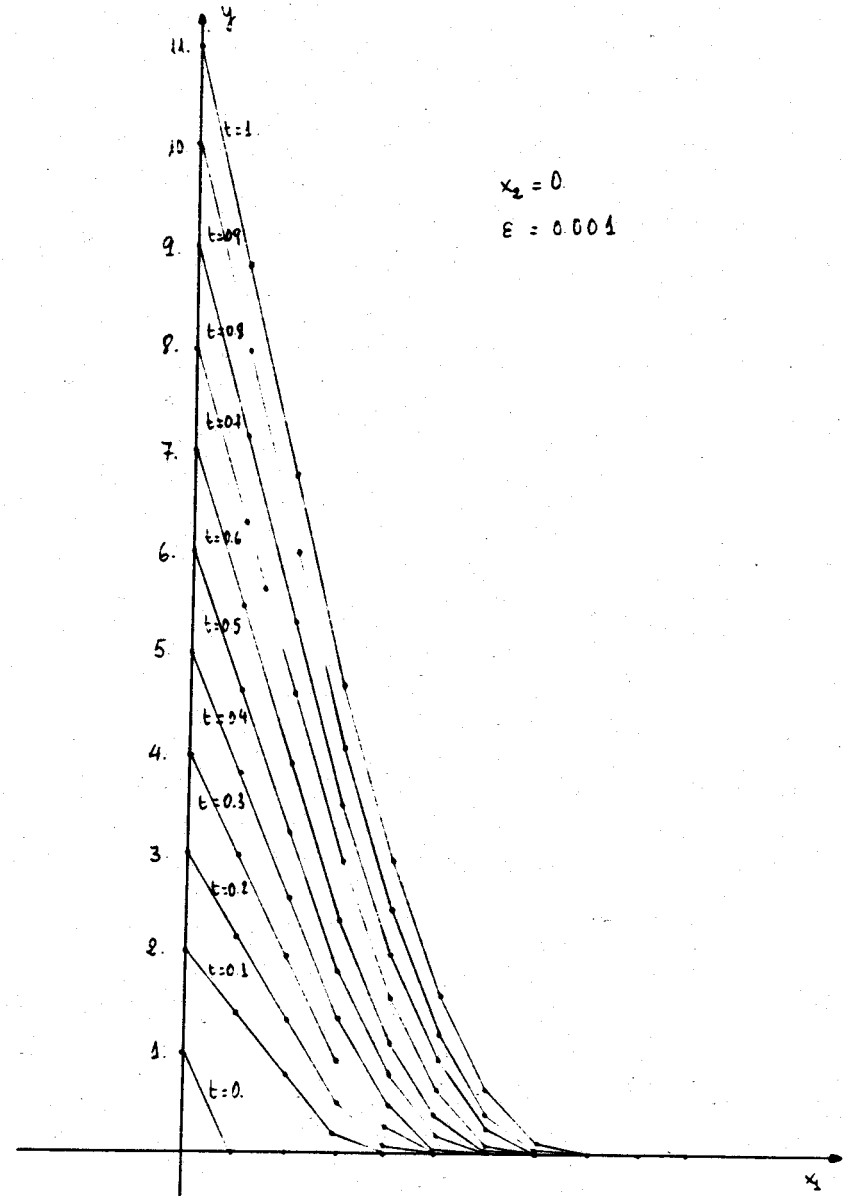
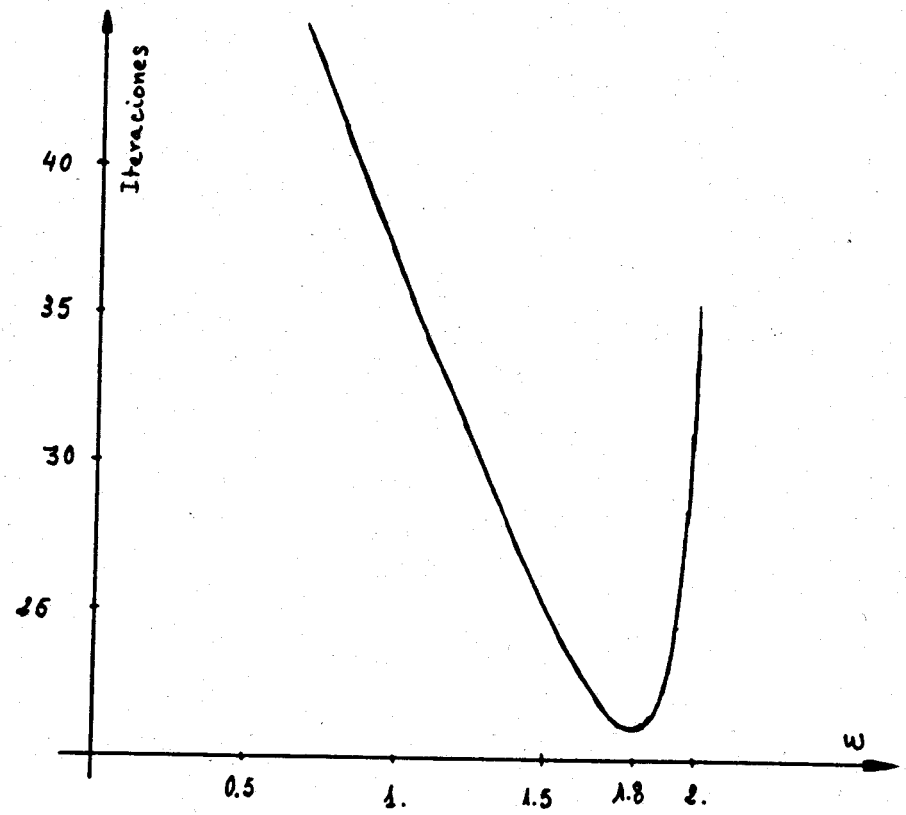
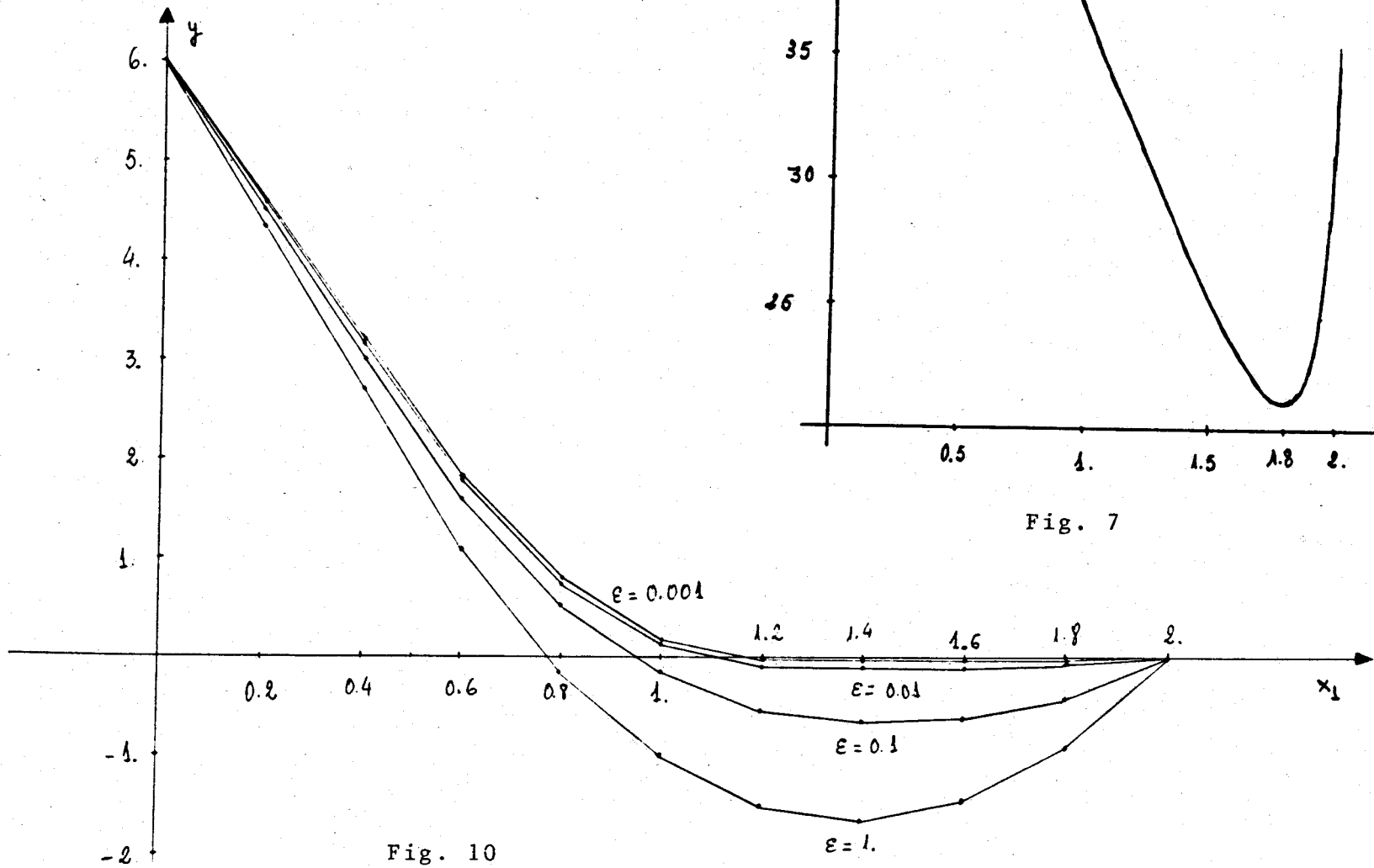


Fig. 9



APENDICEOBTENCION DE LA ECUACION DEL CALOR

Enunciamos en este apartado las leyes de la mecánica de los medios continuos que inducen la formulación precedente de nuestro problema.

1 - TENSOR DE ESFUERZOS

Consideremos un medio físico continuo que ocupa una región abierta Ω de R^3 localizada en un sistema de ejes ortonormales $Ox_1x_2x_3$. Se supone que el medio se encuentra en equilibrio bajo los efectos de esfuerzos exteriores, constituídos (en general) por una densidad volumínica de fuerzas definida en Ω , y una densidad superficial de fuerzas sobre la frontera Γ de Ω .

Estas fuerzas engendran en el seno del medio continuo un tensor de esfuerzos que puede ser descrito de la forma siguiente. Sea P un punto de Ω y \mathcal{V} una variedad bidimensional, continuamente diferenciable que pasa por P y divide (al menos localmente) el medio en dos regiones Ω_1 y Ω_2 . Sea \vec{n} el vector normal unitario a \mathcal{V} en P , dirigido hacia Ω_2 . Se establece entonces (a partir de ciertas hipótesis físicas generalmente bien satisfe-

chas) que la acción de Ω_2 sobre Ω_1 en P es equivalente a la de una densidad de fuerzas \vec{F} sobre \mathcal{V} y que \vec{F} depende del punto P y del vector normal mediante la igualdad

$$(1.1) \quad F_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j \quad i=1,2,3,$$

donde los coeficientes de σ_{ij} dependen de P.

Cuando se hace un cambio de sistema de referencia en R^3 , las cantidades F_i , n_j se transforman como componentes de un vector y las σ_{ij} son las componentes de un tensor de segundo orden, llamado el tensor de esfuerzos. Dicho tensor permite escribir las condiciones de contorno. ■

2 - LEYES DE CONSERVACION

Los axiomas o principios básicos de la mecánica clásica de los medios continuos son las tres leyes siguientes

- Ley de conservación de la masa

Sea $\vec{v}(P;t)$ el campo de velocidades en el instante t y en el punto P de un medio continuo en movimiento con respecto a un sistema ortonormal $Ox_1x_2x_3$. Designamos por \mathcal{O} un dominio cualquiera de R^3 contenido en la región ocupada por el medio continuo; \mathcal{V} contiene un cierto volumen de materia en cada instante. El principio de conservación de la masa se enuncia así:

La masa de materia contenida en el dominio \mathcal{O} (arbitrario) que le sigue en su movimiento, es independiente del tiempo. Esto es:

$$(1.2) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}} \rho \, dx = 0 \quad \forall \mathcal{O}$$

donde $\rho = \rho(P, t)$ es la densidad en P, t .

Si el campo de velocidades es continuo en \mathcal{O} , (1.2) es equivalente a la ecuación

$$(1.3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Observación 1

Si existen en el interior de \mathcal{O} discontinuidades de la velocidad, es necesario interpretar la ecuación (1.3) en el sentido de las distribuciones. ■

- Ley de conservación de la cantidad de movimiento

Esta ley, conocida también bajo el nombre de principio fundamental de la dinámica, se enuncia así:

Existe un sistema de coordenadas y una cronología t , llamados galileanos, tales que para todo sistema material y en cada instante, el torsor ⁽¹⁾ de las fuerzas exteriores

- (1) Se llama torsor el conjunto formado por :
- Un vector libre \vec{R} , llamado resultante del torsor
 - Un campo de vectores $\vec{M}(P)$ definido en cada punto P
- y tal que $\vec{M}(Q) = \vec{M}(P) + \vec{QP} \wedge \vec{R}$
para cualquier otro punto Q .

$\vec{M}(P)$ se llama momento resultante en P del torsor y el par $\vec{R}, \vec{M}(P)$ se llama elemento de reducción en P del torsor.

aplicadas al sistema es igual a la derivada con relación al tiempo del torsor de las cantidades de movimiento.

Es decir:

$$(1.4) \int_{\sigma} f_i dx + \sum_{j=1}^3 \int_{\partial\sigma} \sigma_{ij} n_j ds = \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \rho v_i dx, \quad \forall \sigma$$

$$(1.5) \sum_{j,k=1}^3 \int_{\sigma} \varepsilon_{ijk} x_j f_k dx + \sum_{j,k,l=1}^3 \int_{\partial\sigma} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l ds = \\ = \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k dx \quad \forall \sigma$$

En (1.4)-(1.5) f representa una distribución volumínica de fuerzas exteriores, los ε_{ijk} son las componentes del tensor de tercer orden completamente antisimétrico, tal que $\varepsilon_{123}=+1$. El término $\int_{\sigma} f_i dx$ representa por tanto la i -ésima componente de la resultante de las fuerzas volumínicas. Igualmente, $\sum_j \int_{\partial\sigma} \sigma_{ij} n_j ds$ representa la i -ésima componente de la resultante de las fuerzas superficiales aplicadas sobre la frontera de σ ; $\frac{d}{dt} \int_{\sigma} \rho v_i dx$ es la i -ésima componente de la derivada con respecto al tiempo de la resultante cinética. Los dos primeros términos de (1.5) son las i -ésimas componentes de los momentos resultantes en el origen de las fuerzas volumínicas y superficiales que actúan sobre σ , y el segundo miembro de (1.5) es la derivada con respecto al tiempo de la i -ésima componente del momento cinético en el origen.

Bajo ciertas hipótesis de regularidad, (1.4) es equivalente (utilizando la ley de conservación de masa) a la ecuación puntual:

$$(1.6) \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \gamma_i, \quad i=1,2,3$$

donde $\gamma_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j$ es la i -ésima componente de la aceleración

Las ecuaciones (1.6) (no lineales en \vec{v}) son conocidas como las ecuaciones del movimiento; en el caso estático ($v=0$) son las ecuaciones del equilibrio (lineales).

Observación 2

Sin imponer estas hipótesis de regularidad, de nuevo es necesario interpretar las ecuaciones del movimiento en el sentido de las distribuciones. ■

De (1.5), utilizando la conservación de masa y las ecuaciones del movimiento se deduce que el tensor de esfuerzos es simétrico, i.e. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. ■

- Ley de conservación de la energía.

Esta ley, conocida también bajo el nombre de primer principio de la termodinámica, expresa que la derivada con respecto al tiempo de la energía total de un sistema (energía interna + energía cinética) es igual a la potencia de los esfuerzos exteriores aplicados más la aportación de

energía por unidad de tiempo, esto es:

$$(1.7) \quad \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \rho \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 + e \right) dx = \sum_i \int_{\sigma} f_i v_i dx + \\ + \sum_{ij} \int_{\partial \sigma} \sigma_{ij} n_j v_i ds + \int_{\sigma} \rho w dx - \sum_i \int_{\partial \sigma} q_i n_i ds$$

En (1.7) e representa la energía interna específica del medio continuo y el primer miembro es la derivada con respecto a t de la energía total del sistema considerado. El escalar w designa la aportación de energía por unidad de masa y de tiempo, y el vector \vec{q} es el vector de transporte de energía.

Bajo ciertas hipótesis de regularidad, la ecuación (1.7) es equivalente (utilizando (1.3), (1.6) y $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) a:

$$(1.8) \quad \rho \frac{de}{dt} = \sum_{ij} \sigma_{ij} D_{ij} + \rho w - \sum_i \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

donde

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Observación 3

Una vez más, si no imponemos estas hipótesis, (1.8) ha de interpretarse en el sentido de las distribuciones. ■

Observación 4

Las ecuaciones (1.3), (1.6), (1.8) constituyen un sis-

tema de cinco ecuaciones con catorce incógnitas (seis del tensor simétrico σ_{ij} , tres de \vec{v} , la densidad ρ , la energía interna e , tres del vector de transporte \vec{q}), de donde es evidente que no se puede determinar el comportamiento físico del medio sólo con estas relaciones. Para la determinación de éste, además de las leyes de carácter universal enunciadas anteriormente para todo medio continuo sólido, líquido o gaseoso, es necesario completar la información con otras relaciones, llamadas leyes de comportamiento (que no son de carácter general), que caracterizan el comportamiento de cada medio continuo en particular. ■

3 - ECUACION DEL CALOR

La térmica es el estudio de la temperatura de un medio continuo. Si se supone que una deformación del medio no produce variación de la temperatura (fenómenos de deformación "découplés") y las velocidades son despreciables (linealización), las ecuaciones (1.3), (1.6), (1.8) se transforman en:

$$(2.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$(2.2) \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0; \quad i = 1, 2, 3$$

$$(2.3) \quad \rho \frac{\partial e}{\partial t} = \rho w - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

Las leyes de comportamiento consideradas son:

$$(2.4) \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{independiente de la temperatura}$$

$$(2.5) \quad e = c \cdot \theta,$$

$$(2.6) \quad q = - \tilde{K} \text{ grad } \theta,$$

donde θ es la temperatura, y c es el calor específico (>0).

Se supondrá que c depende de x . La ley (2.6) se llama Ley de Fourier y es lineal cuando el tensor \tilde{K} de segundo orden solo depende de x , lo que supondremos en lo que sigue. Además impondremos la condición

$$(2.7) \quad \sum_{i,j} \tilde{K}_{ij} x_i x_j \geq k_0 \sum_i x_i^2, \quad k_0 = \text{cte.} > 0,$$

que físicamente es razonable. Si el material es isótropo, el tensor \tilde{K} es esférico, i.e. $\tilde{K} = \tilde{k} \delta_{ij}$, y \tilde{k} es entonces el coeficiente de conductividad térmica del material.

Si se supone que el medio es homogéneo isótropo y que ρc es constante (en general depende sólo de x) se obtiene la única ecuación

$$(2.8) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \Delta \theta = g$$

donde $k = \tilde{k}/\rho c$; $g = w/c$, $\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

La ecuación (2.8) es la ecuación del calor.

En gran parte de lo que sigue, se escribirá (por simplicidad) la ecuación (2.8) con $k=1$, lo cual equivale a

normalizar el tiempo:

$$(2.9) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta = g$$

Nos proponemos seguidamente introducir las condiciones de contorno para (2.9), que vendrán dadas en función de los valores de θ ó bien de $\frac{\partial \theta}{\partial n}$ sobre la frontera de Ω .

Denotaremos por Ω el abierto de \mathbb{R}^n ($n \leq 3$) tomado en consideración; su frontera $\Gamma = \partial \Omega$ es regular, de vector normal exterior unitario \vec{n} . La región Ω está ocupada por un medio conductor del calor y es el soporte de una función de temperatura. ■

4 - CONDICIONES DE CONTORNO

Las condiciones de contorno que consideraremos en este trabajo serán de dos tipos:

- (a) 0 bien se impondrán los valores de la temperatura θ en puntos de la frontera Γ de Ω ,
- (b) ó bien, se supondrá conocido el flujo de calor que se introduce en Ω a través de una parte de Γ .

Sea entonces $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ una partición de Γ :

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$

Impondremos una condición de contorno de tipo (a) so-

sobre Γ_1 , y otra de tipo (b) sobre Γ_2 . En el primer caso tenemos:

$$(2.10) \quad \theta(x,t) = g_0(x,t), \quad x \in \Gamma_1, \quad t \in [0,T].$$

En el segundo, se puede deducir (como en I.G. Petrovskii [1]), una condición del tipo siguiente:

$$(2.11) \quad \frac{\partial \theta}{\partial n}(x,t) = g_1(x,t), \quad x \in \Gamma_2, \quad t \in [0,T].$$

Finalmente hagamos constar que es necesario introducir una condición inicial del tipo

$$(2.12) \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad x \in \Omega.$$

para que el problema físico esté bien planteado:

Dada una temperatura inicial θ_0 , una fuente de calor (medida por g) sobre Γ_2 y una restricción ($\theta = g_0$) sobre Γ_1 , se estudia el comportamiento térmico del medio físico que ocupa el abierto Ω de R^3 , durante el intervalo de tiempo $[0,T]$.

APENDICE1 - ESPACIOS DE DIFEOMORFISMOS DE R^n

Sea $L^\infty(R^n, R^n)$ el espacio de las aplicaciones medibles y acotadas de R^n en R^n y $\bar{C}(R^n, R^n)$ el espacio de las aplicaciones uniformemente continuas de R^n en R^n , y sea k un entero no negativo. Pongamos:

$$(1) \quad W^{k, \infty}(R^n, R^n) = \left\{ \varphi / D^\alpha \varphi \in L^\infty(R^n, R^n) \quad \forall \alpha \text{ tal que } 0 \leq |\alpha| \leq k \right\},$$

$$(2) \quad W^{k, \bar{c}}(R^n, R^n) = \left\{ \varphi / D^\alpha \varphi \in L^\infty(R^n, R^n) \cap \bar{C}(R^n, R^n) \quad \forall \alpha, \quad 0 \leq |\alpha| \leq k \right\},$$

donde D^α designa la derivación de orden α en el sentido de las distribuciones.

Denotaremos por σ un índice que vale ∞ ó \bar{c} , y por tanto $W^{k, \sigma}(R^n, R^n)$ denotará (1) ó (2); estos espacios son de Banach para la norma definida por

$$(3) \quad \|\varphi\|_k = \sup_{x \in R^n} \text{ess} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} |D^\alpha \varphi(x)|_{R^n}^2 \right)^{1/2}$$

Asociado a $W^{k, \sigma}(R^n, R^n)$, construimos el espacio afín normado completo definido por

$$(4) \quad V^{k, \sigma}(R^n, R^n) = \left\{ \varphi / \varphi - I \in W^{k, \sigma}(R^n, R^n) \right\}$$

donde I es la aplicación identidad de \mathbb{R}^n .

Para $k \geq 0$ se tiene:

$$(5) \quad V^{k+1, \varphi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \subset V^{k, \bar{c}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \subset V^{k, \varphi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

Finalmente definimos el espacio de difeomorfismos de \mathbb{R}^n

$$(6) \quad \mathcal{G}^{k, \sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \left\{ T / T \text{ biyección de } \mathbb{R}^n \text{ tal que} \right. \\ \left. T, T^{-1} \in V^{k, \delta}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \right\}.$$

Abreviadamente, denotaremos este espacio por $\mathcal{G}^{k, \sigma}$ y es de notar que no es vacío ya que $I \in \mathcal{G}^{k, \sigma}$.

Análogamente a los espacios $W^{k, \delta}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, se definen los espacios de aplicaciones matriciales $W^{k, \delta}(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n)$ (donde \mathcal{M}_n es el espacio de matrices cuadradas de orden n), con la norma

$$(7) \quad \|A\|_k = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \text{ess} \left(\sum_{\substack{0 \leq |\alpha| \leq k \\ i, j=1, \dots, n}} \left| \frac{1}{\alpha!} D^\alpha A_{ij}(x) \right| \right)_{\mathbb{R}^n}$$

Con esta norma los espacios $W^{k, \delta}(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n)$ son álgebras de Banach con elemento unidad y se tiene:

Lema 1

$$(8) \quad \text{Si } I \text{ es la matriz unidad entonces } \|I\|_k = n$$

$$(9) \quad \forall A, B \in W^{k, \delta}(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n) \text{ se tiene } \|A \cdot B\|_k \leq \|A\|_k \cdot \|B\|_k$$

(10) $\forall A \in W^{k, \sigma}(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}_n)$ con $\|A\|_k < 1$ se tiene:

a) $\exists (I-A)^{-1} \in W^{k, \sigma}(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}_n)$,

b) $(I-A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i$,

c) $\|(I-A)^{-1}\|_k \leq n-1 + \frac{1}{1-\|A\|_k}$,

d) $\|(I-A)^{-1}\|_k \leq \frac{\|A\|_k}{1-\|A\|_k}$.

Además, cuando $k \geq 1$ se tiene que $\varphi \in W^{k, \sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ si y solo si la matriz derivada $\varphi' = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right) \in W^{k-1, \sigma}(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}_n)$ y $\varphi \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, y en tal caso se tiene:

(11) $\|\varphi\|_k \leq (k-1)! \|\varphi'\|_{k-1} + \|\varphi\|_0$,

(12) $\|\varphi'\|_{k-1} \leq \sqrt{k \cdot n^{k+3}} \|\varphi\|_k$,

(13) $\begin{cases} \forall \varphi, \psi \in V^{1, \sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \text{ con } \varphi \in \mathcal{C}^{1, \alpha} \text{ si } \sigma = \alpha \text{ se tiene:} \\ \varphi \circ \psi \in V^{1, \sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \text{ y } (\varphi \circ \psi)' = (\varphi', \psi) \cdot \psi' \text{ c.p.d. } \mathbb{R}^n, \end{cases}$

(14) $\forall \varphi \in \mathcal{C}^{k, \sigma}$ con $k \geq 1$ se tiene $(\varphi^{-1})' = (\varphi')^{-1} \circ \varphi^{-1}$ c.p.d. \mathbb{R}^n . ■

Aunque $V^{k, \sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ no tiene estructura de álgebra de Banach, sin embargo sí posee algunas propiedades análogas.

Lema 2

a) Sea $\varphi \in W^{k, \sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\psi \in V^{k, \sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ con $k \geq 0$ y $\sigma = \infty$ ó \bar{c} y $\psi \in \mathcal{C}^{1, \alpha}$ si $\sigma = \alpha$; entonces $\varphi \circ \psi \in W^{k, \sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} \|\varphi_0 \Psi\|_k \leq \|\varphi\|_k (1 + c_k \|\Psi - I\|_k (1 + \|\Psi - I\|_k)^{k-1}) \quad \text{si } k > 1, \\ \|\varphi_0 \Psi\|_0 \leq \|\varphi\|_0, \end{array} \right.$$

donde c_k es una constante estrictamente positiva.

b) Sean $\varphi, \Psi \in V^{k, \sigma}(R^n, R^n)$ con $k \geq 0$ y $\sigma = \infty$ ó \bar{c} , y $\Psi \in \mathcal{C}^{1, \infty}$ si $\sigma = \infty$; entonces $\varphi_0 \Psi \in V^{k, \sigma}(R^n, R^n)$ y la aplicación $\Psi \mapsto \varphi_0 \Psi$ es afín continua de $V^{k, \sigma}(R^n, R^n)$ en sí mismo.

c) Sea $\varphi \in V^{k, \bar{c}}(R^n, R^n)$ con $k \geq 0$; la aplicación $\Psi \mapsto \varphi_0 \Psi$ es continua de $V^{k, \bar{c}}(R^n, R^n)$ en sí mismo.

d) Sea $k \geq 0$; la aplicación $\Psi \mapsto \varphi_0 \Psi$ definida sobre $V^{k, \infty}(R^n, R^n) \cap \mathcal{C}^{1, \infty}$ es continua de $V^{k, \infty}(R^n, R^n)$ en sí mismo si y solo si $\varphi \in V^{k, \bar{c}}(R^n, R^n)$.

e) Sea $\varphi \in W^{k+1, \infty}(R^n, R^n)$ con $k \geq 0$; la aplicación $\Psi \mapsto \varphi_0 \Psi$ es localmente lipchiciana de $V^{k, \sigma}(R^n, R^n)$ en $W^{k, \sigma}(R^n, R^n)$ y $\forall \Psi_1, \Psi_2 \in V^{k, \sigma}(R^n, R^n)$ se tiene:

$$(16) \quad \|\varphi_0 \Psi_1 - \varphi_0 \Psi_2\|_k \leq c_k \|\varphi\|_{k+1} \|\Psi_1 - \Psi_2\|_k (1 + \|\Psi_1 - I\|_k + \|\Psi_2 - I\|_k)^k$$

donde c_k es una constante estrictamente positiva.

f) Sea $\varphi \in V^{k+1, \infty}(R^n, R^n)$ con $k \geq 0$; la aplicación $\Psi \mapsto \varphi_0 \Psi$ es localmente lipchiciana de $V^{k, \sigma}(R^n, R^n)$ en sí mismo y $\forall \Psi_1, \Psi_2 \in V^{k, \sigma}(R^n, R^n)$ se tiene:

$$(17) \quad \begin{aligned} & \|\varphi_0 \Psi_1 - \varphi_0 \Psi_2\|_k \leq \\ & \leq \|\Psi_1 - \Psi_2\|_k (1 + \gamma_k \|\varphi - I\|_{k+1} (1 + \|\Psi_1 - I\|_k + \|\Psi_2 - I\|_k)^k) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Se puede probar un resultado análogo al Lema 2 en los espacios de aplicaciones matriciales; en particular se tiene:

Lema 3

Sea $A \in W^{k, \sigma}(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n)$ y $\Psi \in V^{k, \sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ con $k \geq 0$ y $\sigma = \infty$ ó \bar{c} , y $\Psi \in \mathcal{C}^{1, \sigma}$ si $\sigma = \infty$; entonces $A \circ \Psi \in W^{k, \sigma}(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n)$ y se tiene:

$$(18) \quad \|A \circ \Psi\|_k \leq c_k \|A\|_k (1 + \|\Psi - I\|_k)^k$$

donde $c_k > 0$ y $c_0 = 1$. ■

Además se tiene la propiedad de inversibilidad de los elementos próximos al elemento unidad, i.e.:

Lema 4

a) $\forall \Psi \in V^{k, \sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ con $k \geq 1$ y $\sigma = \infty$ ó \bar{c} que verifique:

$$(19) \quad \|\Psi - I\|_k \leq \frac{1}{2 \sqrt{k \cdot n^{k+3}}}$$

entonces $\Psi \in \mathcal{C}^{k, \sigma}$ y se tiene

$$(20) \quad \|\Psi^{-1} - I\|_k \leq c_k \|\Psi - I\|_k, \quad c_k > 0.$$

b) $\mathcal{U}^{k, \sigma}$ es un abierto en $V^{k, \sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ con $k \geq 1$ y $\sigma = \infty$ ó \bar{c}

c) La aplicación $\Psi \mapsto \Psi^{-1}$ es continua de $V^{k, \bar{c}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ en sí mismo con $k \geq 1$ en todo punto $\Psi \in \mathcal{U}^{k, \bar{c}}$.

d) La aplicación $\varphi \mapsto \varphi^{-1}$ es acotada de $V^{k,\omega}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ con $k \geq 1$, en sí mismo en el entorno de todo punto $\varphi \in \mathcal{C}^{k,\omega}$ y es continua de $V^{k,\omega}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ en sí mismo en $\varphi \in \mathcal{C}^{k,\omega}$ si y solo si $\varphi^{-1} \in V^{k,\bar{c}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

e) La aplicación $\varphi \mapsto \varphi^{-1}$ es derivable de $V^{k,\sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ con $k \geq 1$, $\sigma = \omega$ ó \bar{c} , en $V^{k-1,\bar{c}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ en el punto I y se tiene:

$$(21) \quad \frac{\partial(\varphi^{-1})}{\partial \varphi}(I) = -I_W$$

donde I_W es la identidad de $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ en sí mismo. ■

Acabamos este apartado dando algunos resultados sobre la topología de los espacios $\mathcal{C}^{k,\sigma}$.

Sea $k \geq 0$ y $\sigma = \omega$ ó \bar{c} ; definamos la aplicación

$$(22) \quad \delta_k: \mathcal{C}^{k,\sigma} \times \mathcal{C}^{k,\sigma} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

por:

$$(23) \quad \delta_k(T_1, T_2) = \|T_2 \circ T_1^{-1} - I\|_k + \|T_1 \circ T_2^{-1} - I\|_k$$

Se tiene entonces que δ_k es una casidistancia sobre $\mathcal{C}^{k,\sigma}$. Cuando $k \geq 1$, $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ es completo para esta casidistancia y además $\mathcal{C}^{k,\bar{c}}$ es un grupo topológico para la ley de composición y sin embargo $\mathcal{C}^{k,\omega}$ no lo es.

Observación 1

Llamamos casidistancia sobre un espacio E a una aplicación $\delta: E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ verificando

$$a) \delta(x,y)=0 \iff x=y$$

$$b) \delta(x,y)=\delta(y,x), \forall x,y \in E$$

c) Existe una función $\delta: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, continua y creciente, para la que se tiene, $\forall x,y,z \in E$:

$$\delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z) + \delta(x,y)\delta(y,z)$$

Si δ es una casidistancia sobre E y $\alpha \in (0,1)$, existe $\eta > 0$ tal que $\delta^{(\alpha)}$ definida por

$$(24) \quad \delta^{(\alpha)}(x,y) = \inf \left\{ \delta(x,y), \eta_\alpha \right\}$$

es una distancia sobre E .

Luego a las casidistancias definidas anteriormente se les pueden asociar unas distancias $\delta_k^{(\alpha)}$; sin embargo, se utilizarán las casidistancias por adaptarse mejor a los espacios $\mathcal{C}^{k,\alpha}$.

Por otra parte, las casidistancias definen una estructura uniforme y por tanto podemos trabajar con el concepto de sucesiones de Cauchy. ■

Observación 2

Las casidistancias δ_k verifican, como era de esperar, la invarianza a la derecha, i.e.

$$(25) \quad \delta_k(T_1 \circ T, T_2 \circ T) = \delta_k(T_1, T_2) \quad \forall T_1, T_2, T \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$$

Por otra parte se tiene

$$(26) \quad \mathcal{C}^{k+1,\omega} \subset \mathcal{C}^{k,\bar{c}} \quad \forall k \geq 0$$

i.e.

$$(27) \quad \delta_k(T_1, T_2) \leq \delta_{k+1}(T_1, T_2) \quad \forall T_1, T_2 \in \mathcal{C}^{k+1, \sigma}. \blacksquare$$

2 - DERIVACION RESPECTO A DIFEOMORFISMOS DE \mathbb{R}^n

Recordemos, en principio, algunas propiedades de los espacios de Sobolev sobre un abierto $W^{m,p}(\mathcal{O})$

Lema 1 (cf. Kufner [1, p.320 y ss.])

a) Si denotamos por $f|_{\mathcal{O}}$ la restricción de una función definida en \mathbb{R}^n sobre \mathcal{O} , se tiene:

$$f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f|_{\mathcal{O}} \in W^{m,p}(\mathcal{O})$$

b) Si \mathcal{O} es un abierto de clase $W^{1,\infty}$ y si $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < +\infty$ y nula c.p.d. $\mathbb{R}^n - \mathcal{O}$, entonces $f|_{\mathcal{O}} \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$.

c) Si \mathcal{O} es un abierto acotado con la propiedad del cono entonces $\forall f \in W^{1,p}(\mathcal{O})$ se tiene que $f|_{\partial\mathcal{O}}$ está definida y la aplicación $f \rightarrow f|_{\partial\mathcal{O}}$ es lineal y continua de $W^{1,p}(\mathcal{O})$ sobre $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\mathcal{O})$, donde $1 \leq p \leq \infty$. \blacksquare

Si consideramos $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ como un grupo topológico que opera sobre una familia de partes de \mathbb{R}^n , por ejemplo la de los abiertos de \mathbb{R}^n , entonces se pueden tomar los elementos de $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ para hacer cambios de variables en una integral; de hecho, se tiene:

Lema 2

Sea \mathcal{O} un abierto de \mathbb{R}^n , $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$ y $1 \leq p \leq +\infty$

a) $f \in L^p(T(\mathcal{O}))$ si y solo si $f \circ T \in L^p(\mathcal{O})$ y en tal caso se tiene:

$$(1) \quad \begin{cases} \int_{T(\mathcal{O})} f \, dx = \int_{\mathcal{O}} f \circ T |\det T^{-1}| \, dy \\ \int_{T(\mathcal{O})} f |\det(T^{-1})'| \, dx = \int_{\mathcal{O}} f \circ T \, dy \end{cases}$$

b) $f \in W^{1,p}(T(\mathcal{O}))$ si y solo si $f \circ T \in W^{1,p}(\mathcal{O})$ y en tal caso se tiene:

$$(2) \quad (\text{grad } f) \circ T = (T')^{-1} \text{grad}(f \circ T)$$

c) Sea $1 < p < +\infty$; entonces $f \in W_0^{1,p}(T(\mathcal{O}))$ si y solo si $f \circ T \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$. ■

Nuestro objetivo es señalar las propiedades de continuidad y de derivabilidad de la aplicación $T \mapsto f \circ T$; para ello necesitamos los siguientes Lemas.

Lema 3

Sea $k \geq 1$ y $\mathcal{J} = \alpha$ ó \bar{c} . La aplicación $T \mapsto |\det T'|$ es derivable de $V^{k,\sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ en $W^{k-1,\sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ en todo punto $T \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$ y se tiene $\forall \mathcal{C} \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$:

$$(3) \quad \frac{\partial (|\det T'|)}{\partial T}(T) \cdot \mathcal{C} = \left\{ (\text{div}(\mathcal{C} \circ T^{-1})) \circ T \right\} |\det T'| \quad \blacksquare$$

Lema 4

Sea $k > 1$, $\sigma = \infty$ ó \bar{c} . La aplicación $T \mapsto (T')^{-1}$ es derivable de $V^{k,\sigma}(R^n, R^n)$ en $W^{k-1,\sigma}(R^n, \mathcal{L}_n)$ en todo punto $T \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$ y $\forall \mathcal{C} \in W^{k,\sigma}(R^n, R^n)$ se tiene:

$$(4) \quad \frac{\partial((T')^{-1})}{\partial T}(T) \cdot \mathcal{C} = -(T')^{-1} \mathcal{C}' (T')^{-1} \quad \blacksquare$$

De estos Lemas deducimos inmediatamente que las funciones $T \mapsto \|\det T'\|_{L^\infty(R^n)}$, $T \mapsto \|\det(T')^{-1}\|_{L^\infty(R^n)}$, $T \mapsto \|T'\|_{L^\infty(R^n, \mathcal{L}_n)}$ y $T \mapsto \|(T')^{-1}\|_{L^\infty(R^n, \mathcal{L}_n)}$ son continuas de $V^{1,\omega}(R^n, R^n)$ en R en todo punto $T \in \mathcal{C}^{1,\omega}$.

Se tiene ahora la siguiente

Proposición 1

a) Sea $f \in W^{m,p}(R^n)$ con m entero no negativo y $1 \leq p < +\infty$. La aplicación $T \mapsto f \circ T$ es continua de $V^{k,\sigma}(R^n, R^n)$ en $W^{m,p}(R^n)$ en todo punto $T \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$ con $k \geq \sup(1, m)$ y $\sigma = \infty$ ó \bar{c} .

b) Sea ahora $m > 1$. La aplicación $T \mapsto f \circ T$ es derivable de $V^{k,\sigma}(R^n, R^n)$ en $W^{m-1,p}(R^n)$ en todo punto $T \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$ con $k > \sup(1, m-1)$ y $\sigma = \infty$ ó \bar{c} y se tiene:

$$(5) \quad \frac{\partial(f \circ T)}{\partial T}(T) \cdot \mathcal{C} = (\text{grad } f) \circ T, \mathcal{C} \Big|_{R^n}, \quad \forall \mathcal{C} \in W^{k,\sigma}(R^n, R^n).$$

Observación 1

De esta proposición se deduce que para un abierto \mathcal{C} de

\mathbb{R}^n la aplicación $T \mapsto (f \circ T)_{\sigma}$ es derivable en el sentido de b); además, si $f \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < +\infty$ y si \mathcal{C} es acotado con la propiedad del cono, entonces la aplicación $T \mapsto (f \circ T)_{|\partial \mathcal{C}}$ es derivable de $V^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ en $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial \mathcal{C})$ en todo $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$. ■

Para el caso en que f es únicamente integrable se tiene la

Proposición 2

Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < +\infty$. La aplicación $T \mapsto (f \circ T)_{|\det T'|}$ definida sobre $\mathcal{C}^{1,\infty}$ con valores en $L^p(\mathbb{R}^n)$, es derivable de $V^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ en $W^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$ en todo punto $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$ y $\forall \mathcal{C} \subset W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ se tiene:

$$(6) \quad \frac{\partial ((f \circ T)_{|\det T'|})}{\partial T}(T) \mathcal{C} = \left\{ (\operatorname{div}(f(\mathcal{C} \circ T^{-1}))) \circ T \right\}_{|\det T'|} \cdot \blacksquare$$

Observación 2

Se tiene un resultado análogo a la Observación 1. Por transposición, se obtiene la derivabilidad de la aplicación $T \mapsto ((f \circ T)_{|\det T'|})_{|\partial \mathcal{C}}$. ■

La Proposición 1 se puede generalizar al caso donde f depende de T :

Proposición 3

Sean m, k dos enteros tales que $m > 1$, $k \geq m$; $1 \leq p < +\infty$ y $\mathcal{C} = \alpha$ ó $\bar{\mathcal{C}}$. Sea $f: \mathcal{U}^{k,\sigma} \rightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ y supongamos que f

es derivable de $V^{k,\sigma}(R^n, R^n) \rightarrow W^{m,p}(R^n)$ en todo punto $T_0 \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$. Entonces la aplicación $T \rightarrow f(T) \circ T^{-1}$ es derivable de $V^{k,\sigma}(R^n, R^n)$ en $W^{m-1,p}(R^n)$ en T_0 y $\forall \zeta \in W^{k,\sigma}(R^n, R^n)$ se tiene:

$$(7) \quad \frac{\partial (f(T) \circ T^{-1})}{\partial T}(T_0) \cdot \zeta = \\ = \left(\frac{\partial f}{\partial T}(T_0) \cdot \zeta \right) \circ T_0^{-1} - \left(\text{grad}(f(T_0) \circ T_0^{-1}), \zeta \circ T_0^{-1} \right)_{R^n} \blacksquare$$

Análogamente al Lema 2, se obtiene la fórmula de cambio de variables en una integral de superficie^(*) en el

Lema 5

Sea \mathcal{O} un abierto acotado de R^n con la propiedad del cono, $T \in \mathcal{C}^{1,\bar{c}}$ y $f \in L^1(\partial(T(\mathcal{O})))$; entonces $f \circ T \in L^1(\partial\mathcal{O})$ y se tiene:

$$(8) \quad \int_{\partial(T(\mathcal{O}))} f \, d\mathcal{J} = \int_{\partial\mathcal{O}} f \circ T \, |\det T'| \, \|*(T')^{-1} \bar{n}\|_{R^n} \, d\sigma$$

donde \bar{n} es la normal exterior a $\partial\mathcal{O}$ (que está definida c.p.d. sobre $\partial\mathcal{O}$ ya que \mathcal{O} es un abierto con frontera descrita localmente por una función lipchiciana) y $*(T')^{-1}$ es la inversa traspuesta de la matriz derivada de T . ■

Se tiene también un resultado sobre las normales:

(*) Para su definición, véase (por ejemplo) J. Necas [4].

Lema 6

Sea \mathcal{C} un abierto de \mathbb{R}^n con la propiedad del cono y $T \in \mathcal{C}^{1, \bar{c}}$; entonces

$$(9) \quad \vec{n}(T(\mathcal{C}))_{\cdot T} = \frac{*(T')^{-1} \vec{n}(\mathcal{C})}{\|*(T')^{-1} \vec{n}(\mathcal{C})\|_{\mathbb{R}^n}} \quad \text{c.p.d. en } \partial \mathcal{C},$$

donde $\vec{n}(\Omega)$ es la normal exterior al dominio Ω en $\partial \Omega$. Además, si \mathcal{C} es de clase C^1 entonces la fórmula (9) es válida en todo punto de $\partial \mathcal{C}$. ■

Por último, señalamos una fórmula de integración por partes sobre la frontera de un abierto, que corresponde a una fórmula del tipo de Green sobre la frontera de un abierto.

Lema 7

Sea \mathcal{C} un abierto acotado de clase $W^{2, \alpha}$, $f \in W^{2, 1}(\mathcal{C})$ y $\mathcal{C} \in W^{1, \bar{c}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$; se tiene:

$$(10) \quad \int_{\partial \mathcal{C}} \left\{ (\mathcal{C}, \text{grad } f)_{\mathbb{R}^n} + f(\text{div } \mathcal{C} - (\mathcal{C}', \vec{n}, \vec{n})_{\mathbb{R}^n}) \right\} d\sigma = \\ = \int_{\partial \mathcal{C}} (\vec{n}, \mathcal{C})_{\mathbb{R}^n} \left\{ \frac{\partial f}{\partial n} + Hf \right\} d\sigma$$

donde \vec{n} es la normal exterior a $\partial \mathcal{C}$, $\frac{\partial f}{\partial n} = (\vec{n}, \text{grad } f)_{\mathbb{R}^n}$ y H la curvatura media de $\partial \mathcal{C}$. ■

Observación 3

Definimos la curvatura media de una hipersuperficie co

mo la traza de la aplicación de Weingarten. En nuestro caso, como \mathcal{O} es de clase $W^{2,0}$ entonces $\partial\mathcal{O}$ puede representarse localmente mediante un sistema de coordenadas por $x_n = \Psi(x')$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, donde Ψ es de clase $W^{2,\alpha}$ y entonces la curvatura media viene dada por

$$H = \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i^2} \left(1 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \right)^2 \right) - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \right] \right) / \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{3/2}$$

En particular, se tiene que $H \in L^\infty(\partial\mathcal{O})$. ■

También se puede definir la curvatura media por intermedio de la matriz Hessiana (véase D. Gilbarg- N.S. Trudinger [1]).

Introduciendo el gradiente tangencial, se tiene

$$H = -\delta_i \nu_i$$

donde δ_i (respectivamente ν_i) es la i -ésima componente del gradiente tangencial (respectivamente la normal). ■

B I B L I O G R A F I A

ADAMS, R.A.

- |1| Sobolev Spaces. Academic Press (1975)
- |2| Some integral inequalities with applications to the imbedding of Sobolev spaces defined over irregular domains. Trans. A.M.S. 178, (1973), 401-429.

ADAMS, R.A.- ARONSZAJN, N.- SMITH, K.T.

- |1| Theory of Bessel potential. Part II. Ann. Inst. Fourier 17,2 (1967), 1-135.

AGUIRRE- PUENTE, J. - FREMOND, M.

- |1| Frost propagation in west porous media. Lecture Notes in Math. 503, (1976), 137-147.

AGMON, S.

- |1| Lectures on Elliptic Boundary Value Problems. Van Nostrand (1965).

ATTOUCH, H.- DAMLAMIAN, A.

- |1| Strong solutions for parabolic variational inequalities. Non linear Analysis (Theory, Methods and Applications) 2, (1978), 829-353.

AUBIN, J.P.

- |1| Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems. Wiley Interscience (1972).
- |2| Applied Abstract Analysis. Wiley Interscience (1977)

BABUSKA, I.- AZIZ, A.K.

- |1| Survey lectures on the mathematical foundations of the finite elements methods. Proc. of Symposium Held at the University of Maryland (1972), 1-359.

BAIOCCHI, C.

- |1| Su un problema di frontiera libera connessa a questioni di idraulica. Ann. di Mat. Pura ed Appl. (1972), 107-127.

BAIOCCHI, C.- CAPELO, C.

- |1| Disequazioni variazionali e quasivariazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libera. U.M.I. Pitagora. Ed. Bologna (1978).

BAIOCCHI, C.- COMINCIOLI, V.- MAGENES, E.- POZZI, G.A.

- |1| Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media: existence and uniqueness theorems. Ann. di Mat. Pura ed Appl. 96, (1973), 1-82.

BEER, A.B.

- |1| The Hausdorff metric and convergence in measure. Michigan Math. J. 21, (1974), 63-64.
- |2| Starshaped sets and the Hausdorff metric. Pacific J. of Math. 61, 1, (1975), 21-27.

BEGIS, D.- GLOWINSKI, R.

- |1| Application de la méthode des éléments finis à l'approximation d'un problème de domaine optimal. Appl. Math. and Opt. 2,2, (1975).

BENDALI, A.

- |1| Existence et régularisation dans un problème d'identification de domaine. Thèse de l'Université d'Alger, (1975).

BENSOUSSAN, A. - LIONS, J.L.

- |1| Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique. Dunod, (1978)

BIROLI, M.

- |1| On mixed problem for parabolic variational inequalities. Ann. di Mat, Pura ed Appl. (1977)

BREZIS, H.

- |1| Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert. North Holland Math. Studies 5, (1973).
- |2| Un problème d'évolution avec contraintes unilatérales dépendant du temps. CRAS Paris 274, (1972), 310-312.

BREZIS, H.- STAMPACCHIA, G.

- |1| Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques. Bull. S.M.F. 96, (1968), 153-180.

BREZZI, F.- HAGER, W.W.- RAVIART, P.A.

- |1| Error estimates for finite element solution of variational inequalities.

BOURBAKI, N.

- |1| Algèbre. Hermann, (1970).
- |2| Topologie Générale. Hermann, (1971)

CEA, J.

- |1| Optimisation. Théorie et algorithmes. Dunod (1971)
- |2| Une méthode numérique pour la recherche d'un domaine optimal. Roma, (1975).
- |3| Approximation variationnelle des problèmes aux limites. Ann. Inst. Fourier, 14, 2, (1964).

CEA, J.- GIOAN, A.- MICHEL, J.

- |1| Quelques résultats sur l'identification de domaine. Calcolo 10, 3-4, (1973), 208-232.

CEA, J.- GLOWINSKI, R.

- |1| Sur des méthodes d'optimisation pour relaxation. RAIRO, R-3, (1973), 5-32.

CIARLET, P.G.

- |1| Numerical Analysis of the finite element method. Presses de l'Université de Montréal, (1976).

COURANT, R.- HILBERT, D.

- |1| Methods of Mathematical Physics. I. Interscience Pub. New York, (1953).

CHARRIER, P.

- |1| Contribution à l'étude des problèmes d'évolution. Thèse de l'Université de Bordeaux, (1978).

CHENAIS, D.

- |1| On the existence of a solution in a domain identification problem. J. of Math. Anal. and Appl. 52,2, (1975), 189-219.
- |2| Sur une famille de variétés à bord lipschitziennes. Application à un problème d'identification de domaines. Ann. Inst. Fourier, 27,4, (1977), 201-231.
- |3| Homéomorphisme entre ouverts lipschitziens. Ann. di Mat. Pura ed Appl. 4, 128, (1978) 343-398.

DANILJUK, I.I.

- |1| On integral functionals with a variable domain of integration. Proc. of the Steklov Inst. of Math. 118, (1972).

DERVIEUX, A.

- |1| Formule de Hadamard et applications. Séminaire d'Analyse Numérique. Univ. Paris-Sud, (1978)
- |2| A perturbation study of the obstacle problem by means of a generalized implicit function theorems. Rapport de Recherche 16, INRIA, (1980).
- |3| A perturbation study of a jet-like annular free boundary problem and an application to an optimal control problem. Rapport de Rech. 21, INRIA, (1980).
- |4| Approximation d'écoulements multifluides instationnaires. Rapport de Rech. 68, INRIA, (1981).

DERVIEUX, A.- PALMEIRO, B.

- |1| Identification de domaines et problèmes de frontière libre. Thèse de l'Université de Nice, (1974)

- |2| Une formule de Hadamard dans des problèmes d'optimisation design. Lecture Notes in Comp. Sci. (1975), 63-76.

DERVIEUX, A.- SAGUEZ, C.

- |1| Perturbation du domaine d'intégration pour une inéquation variationnelle elliptique. Rapport de Rech. 57, INRIA, (1981).

DESTUYNDER, P.

- |1| Etude théorique et numérique d'un algorithme d'optimisation de structures. Thèse de l'Université de Paris VI, (1975).

DJADANE, A.

- |1| Régularité d'une fonctionnelle de domaines et application à l'analyse numérique d'un problème modèle. Thèse de l'Université d'Alger, (1975)

DUVAUT, G.

- |1| Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus. Rapport de Rech. 185, IRIA, (1976).

DUVAUT, G.- LIONS, J.L.

- |1| Les inéquations en mécanique et physique. Dunod, (1972).
- |2| Résolution d'un problème de Stefan (Fusion d'un bloc de glace à zéro degrés) CRAS, Paris 276, (1973), 1461-1463.

EVANS, L.C.

- |1| Application of nonlinear semigroup theory to certain partial differential equations. Nonlinear Evolution Equations, Crandall Editor. Acad. Press, (1978)

FEDERER, H.

- |1| Geometric Measure Theory. Springer, (1969).

FERNANDEZ CARA, E.

- |1| Quelques applications de la méthode des éléments finis à des problèmes de la mécanique de fluides et de la physique des solides. Thèse de l'Université de Paris VI, (1981).

FRIEDMAN, A.

- |1| Parabolic variational inequalities in one space dimension and smoothness of the free boundary. J. of Func. Anal., 18, (1975), 151-176.
- |2| The Stefan problem in several space variable. Trans. A.M.S. 133, (1968), 51-87.
- |3| Analyticity of the free boundary for the Stefan problem. Arch. Rat. Mech. Anal. 61, (1976), 97-125.

FRIEDMAN, A.- KINDERLEHRER, D.

- |1| A one phase Stefan problem. Indiana Univ. Math. J. 24, (1975), 1005-1035.

GARABEDIAN. P.R.

- |1| Partial Differential Equations. John Wiley and Sons (1964)

GARABEDIAN, P.R.- SCHIFFER, M.

- |1| Convexity of domain functionals. J. Anal. Math. 2, (1952-53), 281-368.

GERMAIN, P.

- |1| Mécanique des milieux continus. Masson (1973).

GILBARG, D.- TRUDINGER, N.S.

- |1| Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer-Verlag, (1977).

GIOAN, A.

- |1| Une méthode d'approximations successives pour l'identification de domaines. Thèse de l'Université de Nice (1974).

GLOWINSKI, R.

- |1| Finite elements and variational inequalities. University of Wisconsin. Report 1885, (1978).
- 2 La méthode de relaxation. Séminaire d'Analyse Numérique. Univ. de Rome, (1971).

GLOWINSKI, R. - LIONS, J.L. - TREMOLIERES, R.

- |1| Analyse numérique des inéquations variationnelles. Dunod, (1976).

HADAMARD, J.

- |1| Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. (1907). Oeuvres de J. Hadamard. C.N.R.S., Paris, (1968).

HARAUX, A.

- | 1 | How to differentiate the projection on a convex set in Hilbert space. Some application to variational inequalities. Lab. d'Analyse Numérique. Université de Paris VI, (1975)
- | 2 | Dérivation dans les inéquations variationnelles. CRAS Paris 278, (1974), 1257-1260.

HAUSDORFF, F.

- | 1 | Set Theory. Chelsea Publ. Comp. (1957)

KINDERLEHRER, D. - STAMPACCHIA, G.

- | 1 | A free boundary value problem in potential theory. Ann. Inst. Fourier 25, 3 y 4, (1975), 323-344
- | 2 | An Introduction to Variational Inequalities and their Applications. Acad. Press. (1980).

KOENIG, M. - ZOLESIO, J.P.

- | 1 | Sur la localisation d'un domaine de forme donnée. Thèse de l'Université de Nice, (1973).

KUFNER, A. - JOHN, O. - FUCIK, S.

- | 1 | Function Space. Noordhoff Int. Publ. (1977).

LADYZENSKAJA, O.A. - SOLONNIKOV, V.A. - URAL'CEVA, N.N.

- | 1 | Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Vol. 23 A.M.S. (1968).

LIONS, J.L.

- | 1 | Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod,(1968).
- | 2 | Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod,(1969).
- | 3 | Remarques sur la méthode de pénalisation et applications. Lecture Notes in Math. 112, (1970), 21-32.
- | 4 | Some aspects of the optimal control of distributed parameter systems. Reg. Conf. S. in Appl. Math. SIAM(1972)
- | 5 | Partial differential inequalities. Rus. Math. Surveys 27, (1972), 91-159.
- | 6 | Cours d'Analyse Numérique. Hermann,(1973)
- | 7 | Various topics in the theory of optimal control of distributed systems. Lecture Notes in Econ. and Math. S. 105,(1974), 166-309.
- | 8 | On free surface problems: Methods of variational and quasivariational inequalities. Lecture Notes in Math. 461, (1975), 129-148.
- | 9 | Introduction to some aspect of free surface problems. Coll. SYNPADE. Maryland,(1975).
- | 10 | Asyntotic behaviour of solution of variational inequalities with hihgly oscillating coefficients. Lecture Notes in Math. 503, (1976), 30-55.
- | 11 | Sur quelques questions d'analyse, de mécanique et de contrôle optimal. Presses de l'Univ. de Montreal,(1976)
- | 12 | Remarks on the theory of optimal control of distributed systems. Aziz Ed. Acad.Press,(1977), 1-105.

- |13| Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles. Presses de l' Univ. de Montreal (1975).

LIONS, J.L. - MAGENES, E.

- |1| Problèmes aux limites non homogènes et applications Vol. I y II. Dunod, (1968)

LIONS, J.L. - STAMPACCHIA, G.

- |1| Variational inequalities. C.P.A.M. 20, (1967).
493-519.

MAROCCO, A. - PIRONNEAU, O.

- |1| Optimun design with lagrangian finite elements:
Design of an electromagnet - Rapport de Rech. 251, IRIA
(1977).

MARTIN, J.D.

- |1| Control geométrico en inecuaciones variacionales, III CEDYA.
Santiago de Compostela (1980).

MICHEL, J.

- |1| Une méthode de gradient pour l'identification de domaines. Thèse de l' Univ. de Nice, (1974).

MICHELETTI, A.M.

- |1| Perturbazione dello spettro dell'operatore di Laplace in relazione ad una variazione del campo. Ann.Sc.Norm. Sup. Pisa 26,1, (1972), 683-694.
- |2| Metrica per famiglie di domini limitati e proprietà generaliche degli autovalori. Ann.Sc.Norm.Sup. Pisa 26,1, (1972), 683-694.

MIGNOT, F.

- |1| Contrôle dans les inéquations variationnelles elliptiques. Thèse de l'Univ. de Paris VI, (1975).

MIGNOT, F. - PUEL, J.P.

- |1| Solution maximum de certaines inéquations d'évolution paraboliques et inéquations quasivariationnelles paraboliques. CRAS Paris, 280, (1975), 259-262.

MIGNOT, F. - MURAT, F. - PUEL, J.P.

- |1| Variation d'un point de retournement par rapport au domaine. Comm. in P.D.E. 4,11, (1979), 1263-1297.

MOREAU, J.J.

- |1| Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space. J. of Diff. Eq. 26, (1977), 347-374.

MORENO, C. - SAGUEZ, C.

- |1| Dépendance par rapport aux données de la frontière libre associée à certaines inéquations variationnelles d'évolution. Rapport de Rech. 298, IRIA, (1978)

MURAT, F. - SIMON, J.

- |1| Quelques résultats sur le contrôle par un domaine géométrique. Lab. d'Analyse Numérique. Université de Paris VI, (1974).
- |2| Sur le contrôle par un domaine géométrique. Thèse de l'Université de Paris VI, (1976).

NAKOULIMA, O.

- |1| Etude d'une inéquation variationnelle bilatérale et d'un système d'inéquations quasivariationnelles unilatérales associé. Thèse de l'Univ. de Bordeaux, (1977).

NECAS, J.

- |1| Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Masson et Cie. (1967).

OSGOOD, W.F.

- |1| A Jordan curve of positive area. Trans.A.M.S. 8,(1903)

PCHENITCHNY, B. - DANILINE, Y.

- |1| Méthodes numériques dans les problèmes d'extremum. MIR Moscu, (1977).

PERRNET, A.

- |1| Mise en oeuvre informatique de la méthode des éléments finis. Lab. d'Analyse Numérique. Univ. Paris VI, (1977)

PETROVSKII, I.G.

- |1| Partial Differential Equations. London Iliffe (1967)

PIERRE, M.

- |1| Problèmes d'évolution avec contraintes unilatérales et potentiels paraboliques. Comm. in P. D. E., 4, 10, (1979), 1149-1198.

PIRONNEAU, O.

- |1| Sur les problèmes d'optimisation de structure en mécanique de fluides. Thèse de l'Univ. Paris VI, (1976).
- |2| Variational methods for the numerical solution of free boundary problems. Aziz Ed. Acad. Press(1977), 209-230
- |3| Design optimal de systèmes elliptiques. Cours d'Analyse Numérique. Univ. Paris VI, (1980-81).

PIRONNEAU, O. - SAGUEZ, C.

- |1| Asyntotic behavior, with respect to the domain, of so lution of partial differential equations. Rapport de Rech. 218, IRIA, (1977).

POLAK, E.

- |1| Computational Methods in optimisation. Acad. Press (1971)

POLYA, G.

- |1| Le cercle, la sphère, la symétrisation, et quelques problèmes de physique classique. Beckenbach Ed. Dunod 2, (1968), 428-451.

PUEL, J.P.

- |1| Inéquations variationnelles d'évolution paraboliques du deuxième ordre. Ecole Polytechnique, (1974-75)

RAVIART, P.A.

- |1| Méthode des éléments finis. Lab. d'Analyse Numérique Univ. Paris VI, (1973).

ROUSSELET, B.

- |1| Identification de domaines et problèmes de valeurs pro pre. Thèse de l'Univ. de Nice, (1977).

SAGUEZ, C.

- |1| Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des inéqua tions variationnelles. Applications à des problèmes de frontière libre. Rapport de Rech. 191, IRIA, (1976).

- | 2 | Un problème de Stefan avec source sur la frontière libre. Rapport de Rech. 268, IRIA, (1977).
- | 3 | Contrôle optimal d'inéquations variationnelles avec observation de domaines. Rapport de Rech. 286, IRIA, (1978)
- | 4 | Conditions nécessaires d'optimalité pour des problèmes de contrôle optimal associé a des inéquations variationnelles. Rapport de Rech. 345, IRIA, (1979).

SCHWARTZ, L.

- | 1 | Théorie des distributions. Hermann, (1973).

SENDOV, B.

- | 1 | Some questions of the theory of approximation of functions and sets in the Hausdorff metric. Rus. Math. Surveys. 24, 5, (1969), 143-183.

SIMON, J.

- | 1 | Variation par rapport au domaine dans des problèmes aux limites. Lab. d'Analyse Numérique. Université de Paris VI, (1980).

SOURINE, M.

- | 1 | Comunicación personal.

STAMPACCHIA, G.

- | 1 | Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes. CRAS, Paris, 258, (1964), 4413-4416.

STUMMEL, F.

- | 1 | Perturbation of domains in elliptic boundary value pro

blems. Lecture Notes in Math. 503, (1976), 110-136.

TARTAR, L.

- |1| Topics in nonlinear analysis. Publication de Math. Univ. d'Orsay, (1978).

TREMOLIERES, R.

- |1| Inéquations variationnelles: Existence, approximation et résolution. Thèse Univ. de Paris VI, (1972).

TULOWITZKI, U.

- |1| Le module M1GC1. Modulopt. INRIA, (1980).

YVON, J.P.

- |1| Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des inéquations variationnelles. Rapport de Rech.53, IRIA, (1974).

ZOLESIO, J.P.

- |1| Sur un problème d'identification de domaine: localisation du support d'un contrôle optimal. Coll. d'Analyse convexe et ses applications. La Bourboule, (1976).
- |2| Un résultat d'existence de vitesse convergente dans des problèmes d'identification de domaines. CRAS, Paris, (1976).
- |3| Identification de domaines par déformation. Thèse de l'Université de Nice, (1980).

I N D I C E

pág.

INTRODUCCION

1. Planteamiento del problema	1
2. Formulación generalizada del ejemplo modelo	2
3. Transformación en una inecuación variacional	4
4. Formulación variacional fuerte	5
5. Formulación variacional débil	6
6. Problemas de control geométrico	8

CAPITULO I : INECUACIONES VARIACIONALES

1. Introducción	10
2. Planteamiento del problema	13
3. Existencia de soluciones	19
3.1. Existencia y unicidad de soluciones fuertes	19
3.2. Estimación del error en la penalización	23
3.3. Existencia de soluciones débiles	25

CAPITULO II : PROPIEDADES GEOMETRICAS DE LOS DOMINIOS

1. Introducción	31
2. El concepto de regularidad de un dominio	32
2.1. Dominios de clase C	32
2.2. Dominios con frontera descrita por un grafo	34
2.3. Dominios con la propiedad del cono	37
3. Relaciones entre los conceptos de regularidad	41
4. Familias de dominios. Topologías asociadas	43
4.1. Familias de dominios	43
4.2. Topologías asociadas	47
4.2.1. Topología sobre $\mathcal{D}(r, \lambda)$	48
4.2.2. Topología sobre $\mathcal{D}_{k, \sigma}$	50
4.2.3. Topología de Hausdorff	52
4.2.4. Relaciones entre las topologías	55

5. Nociones de diferenciabilidad respecto a dominios.....	57
5.1. Variación de las funciones características	58
5.2. Variaciones interiores	62
5.3. Variaciones de la normal	69
CAPITULO III : PROBLEMA DE CONTROL GEOMETRICO	
1. Introducción	70
2. Control del dominio inicial	71
3. Existencia de control óptimo	74
4. Problemas de control penalizado y penalizado-regularizado	81
5. Condiciones necesarias de optimalidad	89
CAPITULO IV : ANALISIS NUMERICO DEL PROBLEMA	
A . PROBLEMA DISCRETIZADO	
1. Introducción	104
2. Discretización de los espacios	105
3. Problema penalizado discretizado	110
4. Condiciones de optimalidad discretas	116
B . RESOLUCION DEL PROBLEMA MODELO	
1. Introducción	122
2. Estudio del problema modelo	123
3. Resultados numéricos	126
APENDICE I : OBTENCION DE LA ECUACION DEL CALOR	
1. Tensor de esfuerzos	132
2. Leyes de conservación	133
3. Ecuación del calor	138
4. Condiciones de contorno	140
APENDICE II .	
1. Espacios de difeomorfismos de R^n	142
2. Derivación respecto a difeomorfismos de R^n	149
BIBLIOGRAFIA	156

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. José Domingo Martín Gómez titulada "sobre un problema de Geometría asociado a Inclusiones Variacionales para balices" acuerdo otorgarle la calificación de Meritoria "Cum Laude"

Sevilla, 23 de Enero

El Vocal,



El Presidente.

El Vocal;



El Secretario;

1.9.82

El Vocal,



El Doctorad



