UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

Familias de leyes de álgebras de Lie nilpotentes

Vº Bº
del Director

Fdo.: José Ramón Gómez Martín, Catedrático de E. U. del Departamento de Matemática Aplicada I de la Universidad de Sevilla.

Memoria presentada por Antonio Jiménez Merchán para optar al grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Sevilla, febrero de 1995

A Isidora y Ana María

Resumen

Se presentan en esta memoria resultados que pueden ser enmarcardos dentro de los problemas de clasificación de álgebras de Lie.

En la primera parte se da un algoritmo que genera, en tiempo polinomial, familias de leyes de álgebras de Lie filiformes de dimensión n. Se obtiene, de la aplicación del algoritmo a través de su implementación en un lenguaje formal, una parametrización del conjunto algebraico afín formado por la familia de leyes filiformes de dimensión 11; posteriormente, se presenta también una parametrización de la familia de leyes filiformes de dimensión 12.

Cuando se considera la filtración natural que produce la sucesión central descendente de un álgebra de Lie nilpotente, se obtiene un álgebra graduada finita que, en cierto modo, constituye el "esqueleto" del álgebra que se considera. Éstas álgebras graduadas están determinadas en el caso filiforme. Las álgebras ***casifiliformes*** son las que tienen una sucesión característica inmediatamente inferior a las filiformes.

En la segunda parte de esta memoria se obtiene la clasificación de las álgebras graduadas casifiliformes en cualquier dimensión finita. Los resultados dan una explicación al diferente grado de dificultad en la clasificación de las álgebras de Lie filiformes y casifiliformes, en términos del número de álgebras graduadas no isomorfas que se obtienen.

Agradecimientos

Fruto de la colaboración entre el profesor M. Goze y los miembros del grupo de investigación *Métodos Computacionales de la Matemática Aplicada* surgió la propuesta de trabajar bajo su supervisión y con la dirección del profesor J. R. Gómez, en la realización de un proyecto de tesis doctoral. En distintos encuentros, tanto en Mulhouse (Francia) como en Sevilla, se han ido planteando problemas y consolidando resultados que concluyen en la memoria de investigación que se presenta.

Sean mis primeras palabras de agradecimiento para José Ramón Gómez, de quien partió la iniciativa, con el absoluto convencimiento de que este trabajo no se hubiera realizado sin su apoyo y ayuda; y para su familia, especialmente Concha, con quien alguna deuda me cabe por las horas de trabajo extra que su marido compartió conmigo.

Mi agradecimiento y consideración a Michel Goze por su inestimable colaboración y asesoramiento. Dejo aquí constancia de que sus "peut-être" pueden ser problemas de tal envergadura que concluyan en una tesis con un montón de problemas abiertos.

De Alberto Márquez no tengo pudor en decir que se ha dejado *exprimir*, regalándome generosamente parte de su experiencia, a cambio tan sólo de amistad. Gracias.

En el tiempo trascurrido desde que encontrar la solución a alguno de los problemas que se presentan en esta memoria me parecían una aventura, son

muchos los momentos en los que el ánimo decaía inevitablemente. Gracias a los compañeros y amigos que tuvieron una palabra amable en los momentos difíciles, como Elena Martín o Juan Carlos Dana, que no tenían reparos en excederse; o como Gerardo Valeiras, quien no pocas veces añadía alguna sugerencia que siempre fue bien recibida.

Finalmente, no puedo saldar la deuda que tengo con mi mujer y mi hija. Son coautoras de este trabajo por su constante estímulo y por el tiempo que, aun siendo un robo consentido a la familia, no les dediqué...

Introducción

La importancia de la teoría de grupos de Lie y álgebras de Lie en Matemática Aplicada ha ido aumentando en los últimos años. Continúa siendo una poderosa utilidad en el estudio de las ecuaciones diferenciales y en la teoría de perturbaciones. Su presencia en la física del estudio de las simetrías que se originan en la mecánica clásica o cuántica, modelizando sistemas dinámicos donde el estado del sistema puede ser descrito por puntos o en términos de espacios de Hilbert, la han llevado a ser considerada la matemática de la simetría. La teoría de grupos y álgebras de Lie encuentra aplicaciones no sólo en la física de las partículas elementales o en física nuclear, sino también en diversos campos como la teoría de la relatividad, la física del estado solido, la mecánica continua, cosmología, teoría de control, etc.

El estudio de los aspectos constructivos se ha desarrollado enormemente con el uso de los ordenadores. Se tiene una poderosa herramienta que permite observar pruebas de conjeturas teóricas sobre las representaciones de álgebras de Lie. Este área de la teoría de álgebras de Lie augura un rápido desarrollo [6] en un futuro próximo. Entre los aspectos constructivos que primero pueden considerarse estarían los relacionados con problemas de clasificación.

La clasificación de álgebras de Lie, bajo isomorfismo, es un problema fundamental. Probablemente, es uno de los primeros problemas que se encuentran cuando se quiere comprender "el conjunto" de álgebras de Lie. Clasificar las álgebras de Lie equivale a fibrar el conjunto que las tiene como elementos, correspondiendo las fibras a las clases de isomorfía.

La clasificación de las álgebras de Lie ha quedado reducida al problema abierto de la clasificación de las álgebras de Lie resolubles y, en particular, a las nilpotentes (véase [18]). Las más estudiadas de entre las álgebras de Lie nilpotentes son las filiformes. Los últimos resultados publicados, que sepamos, proporcionan la clasificación de las álgebras de Lie filiformes para las dimensiones 8, 9 y 10 [2], [13] y [7]. A medida que aumenta la dimensión, además de tener que ir afinando cada vez más en la selección de invariantes, se tropieza con la dificultad creciente de los cálculos implicados.

No puede ser ignorado el empuje recibido en la capacidad de cálculo, vía ordenador, en ninguna rama de las matemáticas. Con los sistemas de cálculo formal pueden ser considerados algoritmos que resuelvan problemas planteados en términos de un lenguaje simbólico o, al menos, se pueden considerar algoritmos que permitan convertir el ordenador en un "asistente" matemático para la resolución de tales problemas. Así, con éstas técnicas, se han podido determinar explícitamente las 8 componentes irreducibles cuya unión constituye el conjunto de álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 8 [28] y [4]. En el Capítulo I de esta memoria se continúa en ésta línea y se se desarrolla un método para el tratamiento efectivo de la obtención de familias de leyes filiformes.

Se presentará en la Sección 1.3 un algoritmo que, construido para ser implementado en un lenguaje simbólico, permite la generación de familias de álgebras de Lie filiformes de dimensión finita. En la Sección 1.5 obtendremos, como aplicación, una parametrización del conjunto de leyes de álgebras de Lie filiformes de dimensión 11 y también una parametrización del conjunto de leyes de álgebras de Lie filiformes de dimensión 12.

Se ha utilizado el software *Matemathica* en la implementación del algoritmo. Además de sus capacidades de lenguaje de programación y de cálculo simbólico, diseñado especialmente para hacer matemáticas (ver [31]), permite un tratamiento computacional interactivo que, junto con la teoría de bases de Gröbner [8], facilita los cálculos en la resolución de los problemas planteados.

La ayuda que proporciona la capacidad de cálculo del ordenador no debe ser confundida con las ideas y resultados matemáticos que subyacen en la elaboración de un algoritmo: el modo que permite decir a un ordenador cómo obtener resultados es, en sí mismo, un resultado más. Un algoritmo es independiente del ordenador y del lenguaje empleado en su implementación y, en este trabajo, se enfatiza en las propiedades de las álgebras de Lie filiformes que permiten generar familias de leyes y facilitar su determinación. No se hace, pues, un estudio "informático" y ni siquiera se proporciona el código del programa elaborado que, como aplicación del algoritmo, se utiliza en la obtención de las familias de leyes filiformes. Es más, como los resultados en dimensiones concretas obtenidos son independientes del algoritmo, pueden ser verificados incluso a mano (desde luego, llevaría su tiempo...), aunque la mejor forma de hacerlo es, lógicamente, implementar el algoritmo en algún lenguaje formal y utilizarlo.

El Capítulo II de la memoria está dedicado a la clasificación de las álgebras de Lie casifiliformes graduadas.

La sucesión característica de un álgebra de Lie nilpotente es un invariante que ha permitido la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 7 [3]. Es un invariante que, para cada dimensión, efectúa una partición del conjunto de álgebras de Lie nilpotentes en subconjuntos, determinados por las distintas sucesiones características que pueden ser consideradas y que se ordenan lexicográficamente. Las álgebras filiformes tienen la mayor sucesión característica posible, que refleja el hecho de que son las de índice de nilpotencia maximal, entre las de su dimensión; es decir, son las álgebras "menos nilpotentes" entre las nilpotentes. Las álgebras que tienen una sucesión característica inmediatamente inferior a las filiformes se han denominado, en este trabajo, *casifiliformes.*

Sobre las dimensiones para las que es conocida su clasificación (véase [18]), puede comprobarse que aparecen "más fibras" en las álgebras casifiliformes que en las filiformes. Ello traduce la mayor dificultad que presenta el estudio de tales álgebras.

La sucesión central descendente de un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ produce una filtración de $\mathfrak{g}$ que le asocia, de forma natural, un álgebra de Lie graduada

$\operatorname{gr}\mathfrak{g}$. En general, $\mathfrak{g}$ y $\operatorname{gr}\mathfrak{g}$ no son isomorfas, pero el conocimiento de las álgebras filiformes para las que $\mathfrak{g} = \operatorname{gr}\mathfrak{g}$ ha permitido obtener resultados relevantes sobre las dimensiones de las componentes irreducibles de la variedad de álgebras de Lie nilpotentes [30] o en la descripción del conjunto de álgebras filiformes característicamente nilpotentes [19] y [17]. Al pretender avanzar en el estudio de problemas similares para álgebras no filiformes, nos ha parecido natural el estudio de las álgebras graduadas casifiliformes.

M. Vergne [30] obtuvo que había dos álgebras filiformes graduadas distintas para cada dimensión par y una sola cuando la dimensión es impar. Se mostrará cómo para las álgebras casifiliformes aparece también una familia finita de álgebras graduadas para cada dimensión, pero el número de álgebras de la familia no es constante en cada dimensión n, de la misma paridad: a partir de $n = 10$ se evitan comportamientos extraños y se tienen $(3n-8)/2$ álgebras, si n es par, y $3n-9$ álgebras, si n es impar.

En la Sección 2.3 se estudia y justifica la necesidad de considerar, para las álgebras casifiliformes, una generalización de la graduación natural, que hemos llamado p-graduación. El hecho de que para las álgebras filiformes no caben ser consideradas p-graduaciones, aclara la simplicidad de la obtención de las graduadas filiformes, que por otra parte, proporcionan la caracterización de las álgebras casifiliformes 1-graduadas. En la Sección 2.4 se determina la estructura que deben tener las álgebras p-graduadas y en las siguientes secciones se estudian los distintos tipos de p-graduaciones que producen álgebras no isomorfas y se obtiene su clasificación.

La lista de las álgebras p-graduadas de dimensión n, dada en función de los productos no nulos, salvo antisimetría, en una base $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$, es la siguiente:

Si $n \geq 4$, el álgebra

$$L_{n-1} \oplus \mathbf{C} = \{ \ \ [X_0, X_i] = X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-3.$$

Si $n \geq 7$ y n es impar, el álgebra

$$Q_{n-1} \oplus \mathbb{C} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-2} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-3}{2}. \end{cases}$$

Si $n \geq 5$, para $2 \leq p \leq n-3$, las álgebras

$$\mathcal{A}_{(n,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_i] = X_{i+p} & 1 \leq i \leq n-2-p. \end{cases}$$

Si $n \geq 5$ y n es impar, para $2 \leq p \leq n-3$, las álgebras

$$\mathcal{B}_{(n,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_i] = X_{i+p} & 1 \leq i \leq n-2-p, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-2} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-3}{2}. \end{cases}$$

Si $n \geq 5$, para $3 \leq p \leq n-2$ y p impar, las álgebras

$$\mathcal{C}_{(n,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{p-i}] = (-1)^{i-1} Y_0 & 1 \leq i \leq \dfrac{p-1}{2}. \end{cases}$$

Si $n \geq 7$ y n es impar, para $3 \leq p \leq n-4$ y p impar, las álgebras

$$\mathcal{D}_{(n,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{p-i}] = (-1)^{i-1} Y_0 & 1 \leq i \leq \dfrac{p-1}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-2} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-3}{2}. \end{cases}$$

Si $n \geq 6$ y n es par, el álgebra

$$\mathcal{T}_{(n,n-3)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_1] = \dfrac{n-4}{2} X_{n-2} & \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1} (X_{n-3} + Y_0) & 1 \leq i \leq \dfrac{n-4}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} \dfrac{n-2-2i}{2} X_{n-2} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-4}{2}. \end{cases}$$

Si $n \geq 7$ y n es impar, el álgebra

$$\mathcal{T}_{(n,n-4)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_i] = \dfrac{n-5}{2} X_{n-4+i} & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{n-4-i}] = (-1)^{i-1} (X_{n-4} + Y_0) & 1 \leq i \leq \dfrac{n-5}{2}, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1} \dfrac{n-3-2i}{2} X_{n-3} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-5}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i} (i-1) \dfrac{n-3-i}{2} X_{n-2} & 2 \leq i \leq \dfrac{n-3}{2}. \end{cases}$$

En la Subsección 2.6.3 se verá que las dimensiones 7 y 9 son casos particulares que se comportan de forma excepcional, ya que aparecen, además, otras álgebras $(n-4)$-graduadas.

Cada uno de los capítulos se cierra con una sección en la que presentamos algunas conclusiones y problemas abiertos, que pensamos contribuyen a fijar el alcance y la posible prolongación de los temas estudiados y de otros temas mencionados.

Se concluye con una sección donde se cita la bibliografía empleada, así como algunas referencias básicas que se han utilizado para el desarrollo de este trabajo.

Por último, no sé si es éste el mejor lugar para referenciarlo, pero esta memoria ha sido escrita usando el TEXde Knuth y, más concretamente, se ha usado mayoritariamente el conjunto de macros LaTeXde Lamport; sus manuales [23] y [24] son la consulta obligada que permite fácilmente la transcripción para la presentación final de la tesis.

Índice

Capítulo 0

Preliminares

En este capítulo se darán las nociones y definiciones generales que serán utilizadas a lo largo de esta Tesis. Se referencian algunos textos introductorios sobre álgebras de Lie, allí donde creemos pueden consultarse aspectos generales, pero importantes, aunque sean suficientemente conocidos para el especialista.

Si el lector no está suficientemente familiarizado con los tópicos que se tratan, podría recurrir a los textos que se citan a continuación.

Podrían ser considerados básicos los textos de Jacobson [22] o Humphreys [21] y el "survey" de Belifante y Kolman [6]. Más recientemente, con un enfoque muy actual, puede ser consultado el texto de Bäuerle y Kerf [5]. Un texto muy reciente pero imprescindible, dedicado especialmente a las álgebras de Lie nilpotentes, objeto de estudio en esta Tesis, es el de Goze y Hakimjanov [18]. Para fijar la terminología en los tópicos relacionados con Geometría Algebraica podría consultarse el primer capítulo del Hartshorne [20]. También muy recientemente se ha publicado un excelente texto de Adams y Loustaunau [1] sobre bases de Gröbner que puede ser consultado como texto básico y que cubre perfectamente las aplicaciones de dicha teoría en Geometría Algebraica, que se han usado en el primer capítulo de esta memoria.

0.1 Notaciones y terminología

Un *álgebra de Lie* $(\mathfrak{g}, \mu)$ *sobre un cuerpo* $\mathbf{K}$ es un un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbf{K}$ con una aplicación bilineal $\mu : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, llamada ***producto o ley del álgebra***, que cumple, para todos los elementos x, y, z de $\mathfrak{g}$, las propiedades

$$\mu(x, x) = 0$$

y la identidad de Jacobi, que se expresa como

$$\mu(x, \mu(y, z)) + \mu(y, \mu(z, x)) + \mu(z, \mu(x, y)) = 0.$$

Se suele designar $\mu(x, y)$ por $[x, y]$ y, así, μ es conocido en la literatura como *producto corchete*; por otra parte, $\mathfrak{g}$ designa el álgebra o el espacio vectorial indistintamente, según el contexto. A la dimensión del espacio vectorial subyacente $\mathfrak{g}$ se le llama también *dimensión del álgebra.* Las álgebras de Lie, en este trabajo, serán consideradas sobre el cuerpo $\mathbf{C}$ y de dimensión finita. Es habitual en la literatura sobre álgebras de Lie usar la notación $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ para una base del álgebra y expresar los elementos del álgebra en letras mayúsculas, con lo que el producto corchete de dos vectores genéricos aparece como $[X, Y]$. En el Capítulo II de esta memoria seguiremos tal convenio, es más las bases serán denotadas, por conveniencia, como $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$. En el Capítulo I hemos respetado la notación que sobre el ordenador resultó más cómoda en la implementación del algoritmo que se presenta, debido a las peculiaridades del lenguaje simbólico que se utilizó.

Si $A = \mathbf{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ es el anillo de polinomios en n variables sobre $\mathbf{C}$, interpretaremos los polinomios $f \in A$ como funciones del espacio afín $\mathbf{C}^n$ en $\mathbf{C}$. Si $T \subset A$, el *conjunto de ceros* de T es

$$Z(T) = \{P \in \mathbf{C}^n : f(P) = 0,\ \forall f \in T\}.$$

Si $\mathfrak{a}$ es el ideal de A generado por T, entonces $Z(T) = Z(\mathfrak{a})$ y como A es noetheriano $Z(T)$ puede ser expresado como el conjunto de ceros de un conjunto finito de generadores de $\mathfrak{a}$.

Un subconjunto Y de $\mathbf{C}^n$ es un *conjunto algebraico afín* o conjunto algebraico si existe $T \subseteq A$ de modo que $Y = Z(T)$. Los complementos de los conjuntos algebraicos son el sistema de abiertos de la *topología de Zariski* en $\mathbf{C}^n$, menos fina que la topología euclídea. Un conjunto algebraico es *irreducible* si no puede ser expresado como una unión de subconjuntos propios de él, que a su vez sean algebraicos. Una *variedad algebraica* es un cerrado irreducible en la topología de Zariski. Cada conjunto algebraico puede ser expresado de forma única como una unión de variedades algebraicas, tal que ninguna esté contenida en otra, que se llaman *componentes irreducibles.*

El Nullstellensatz de Hilbert, en nuestro caso, dice que si $\mathfrak{a}$ es un ideal de $A = \mathbf{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ y un polinomio f de A se anula para todos los puntos de $Z(\mathfrak{a})$, entonces para algún número natural n se verifica $f^n \in \mathfrak{a}$. El *radical* del ideal $\mathfrak{a}$ está definido como

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{f \in A \colon\ f^n \in \mathfrak{a},\ \text{para algún}\ \ n\}$$

y es una consecuencia inmediata del resultado anterior que para todo ideal $\mathfrak{a}$ se tiene que

$$\{f \in A \colon\ f(P) = 0,\ \forall P \in Z(\mathfrak{a})\} = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Una base de Gröbner de un ideal $\mathfrak{a}$ de $A = \mathbf{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ es un sistema generador que tiene la propiedad de que la "división" sobre él proporciona un resto nulo, cuando se toma un polinomio $f \in \mathfrak{a}$ como dividendo. El algoritmo de Buchberger [8] u otros mejorados [1] proporcionan bases de Gröbner de un ideal, en un análogo del algoritmo de Euclides para varias variables, que también puede ser interpretado como una generalización de la eliminación gaussiana en el caso no lineal.

Si suponemos elegido en $\mathbf{N}^n$ un orden total cumpliendo las propiedades, para cada $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in \mathbf{N}^n$, siguientes:

$$0 \leq \alpha \qquad \text{y} \qquad \beta_1 \leq \beta_2 \Rightarrow \beta_1 + \alpha \leq \beta_2 + \alpha$$

como pueden ser el orden lexicográfico, el diagonal, etc. podemos definir el *exponente privilegiado* de un polinomio no nulo $f \in A = \mathbf{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ (respecto al orden elegido), como

$$\exp(f) = \max\{\alpha \in \mathbb{N}^n : f_\alpha \neq 0\},$$

donde $f = \sum_\alpha f_\alpha X^\alpha$ y se ha denotado para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ el término $x_1^{\alpha_1}, \cdots, x_n^{\alpha_n}$ del polinomio por X^α.

Si $\mathfrak{a}$ es un ideal no nulo de A, se define el conjunto de exponentes del ideal como

$$E(\mathfrak{a}) = \{\exp(f) : f \in \mathfrak{a}\}$$

y, claramente, se tiene que $E(\mathfrak{a}) + \mathbb{N}^n = E(\mathfrak{a})$. Los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{N}^n$ con esta propiedad se llaman ideales de $\mathbb{N}^n$. Una ***base de Gröbner*** o ***base de división*** de $\mathfrak{a}$ es una familia finita $f_1, \ldots, f_r$ de elementos de $\mathfrak{a}$ tales que

$$E(\mathfrak{a}) = \bigcup_{i=1}^{r} (\exp(f_i) + \mathbb{N}^n).$$

Se tiene, entonces, que

1. Todo ideal $\mathfrak{a}$ de A posee una base de Gröbner.
2. Una base de Gröbner de $\mathfrak{a}$ es un sistema generador del ideal.
3. Existe una división en A de un polinomio entre una familia de polinomios de modo que un polinomio $f \in \mathfrak{a}$ si y sólo si es nulo el resto de dividirlo entre una base de Gröbner del ideal.
4. Existen algoritmos que permiten encontrar bases de Gröbner de un ideal $\mathfrak{a}$ definido por un sistema generador.

El sistema de cálculo formal *Mathematica* viene con una eficiente implementación de un álgoritmo de cálculo de bases de Gröbner, que ha sido utilizado para la reducción de las restricciones obtenidas sobre las constantes de estructura proporcionadas en las aplicaciones que, del algoritmo ALFIL, se hacen en el Capítulo I y en la obtención de ejemplos de álgebras graduadas, que se utilizaron en el Capítulo II.

Si llamamos $\mathcal{B}^2(\mathbf{C}^n)$ al espacio vectorial de las aplicaciones bilineales de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$ en $\mathbf{C}^n$ y fijamos una base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de $\mathbf{C}^n$, podemos determinar un elemento $\alpha \in \mathcal{B}^2(\mathbf{C}^n)$ por sus *constantes de estructura*: el conjunto de escalares $\{C_{ij}^k\}$, definidos por las fórmulas $\alpha(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k e_k$; de este modo, $\mathcal{B}^2(\mathbf{C}^n)$ puede ser dotado con estructura de espacio afín. Así, también podemos considerar un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como un elemento de $\mathcal{B}^2(\mathbf{C}^n)$; el conjunto $\mathcal{L}_n$ de leyes de álgebras de Lie sobre $\mathbf{C}^n$ es, entonces, un conjunto algebraico afín inmerso en $\mathbf{C}^{\frac{n^3-n^2}{2}}$, definido por las relaciones polinomiales

1. $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$,
2. $\sum_{l=1}^{n} C_{ij}^l C_{kl}^s + C_{jk}^l C_{il}^s + C_{ki}^l C_{jl}^s = 0$,

y parametrizado por las $(n^3 - n^2)/2$ constantes C_{ij}^k.

Un álgebra de Lie no abeliana $\mathfrak{g}$ es *simple* si no tiene ideales propios y *semi simple* si no tiene ideales propios abelianos. Las álgebras semisimples son sumas directas de álgebras simples y éstas son perfectamente conocidas desde los trabajos de Killing y Cartan y están clasificadas (puede verse en [18] ó [21]).

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y se pone

$$\begin{cases} D^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \\ D^1\mathfrak{g} = \mu(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}), \\ D^{k+1}\mathfrak{g} = \mu\left(D^k\mathfrak{g}, D^k\mathfrak{g}\right), \quad k \geq 1, \end{cases}$$

la sucesión de ideales

$$\mathfrak{g} = D^0\mathfrak{g} \supset D^1\mathfrak{g} \supset \cdots \supset D^i\mathfrak{g} \supset \cdots$$

se llama *sucesión derivada de* $\mathfrak{g}$ y si existe un entero k para el que $D^k\mathfrak{g} = \{0\}$ el álgebra se dice *resoluble*; en tal caso, el menor k que lo cumple se llama índice de resolubilidad de $\mathfrak{g}$.

El Teorema de Lévi (véanse, por ejemplo, [18] ó [22]) nos dice que toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ admite una descomposición en suma semidirecta de su radical (el ideal resoluble maximal del álgebra) y una subálgebra semisimple (la subálgebra de Lévi)

Si denotamos

$$\begin{cases} C^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \\ C^{k+1}\mathfrak{g} = \mu\left(C^k\mathfrak{g}, \mathfrak{g}\right), \quad k \geq 0, \end{cases}$$

la sucesión de ideales

$$\mathfrak{g} = C^0\mathfrak{g} \supset C^1\mathfrak{g} \supset \cdots \supset C^i\mathfrak{g} \supset \cdots$$

se llama *sucesión central descendente de* $\mathfrak{g}$ y si existe un entero k para el que $C^k\mathfrak{g} = \{0\}$ el álgebra se dice *nilpotente*; en tal caso, el menor k que lo cumple se llama *índice de nilpotencia de* $\mathfrak{g}$. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *filiforme* si $\dim_{\mathbb{C}} C^i\mathfrak{g} = n - 1 - i$ para $1 \leq i \leq n-1$.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y $x \in \mathfrak{g}$, se denota por $\operatorname{ad} x$ la *aplicación adjunta* asociada a x, es decir, el endomorfismo de $\mathfrak{g}$ definido por

$$y \mapsto \mu(x, y).$$

La aplicación

$$\operatorname{ad} \colon \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(\mathfrak{g})$$

es una representación de $\mathfrak{g}$, llamada *representación adjunta* del álgebra. El Teorema de Engel nos dice que un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es nilpotente si y sólo si $\operatorname{ad} x$ es nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Un endomorfismo f de $\mathfrak{g}$ se dice que es una *derivación* del álgebra si

$$\mu\left(f(x), y\right) + \mu\left(x, f(y)\right) = f\left(\mu(x, y)\right), \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Si todas las derivaciones de un álgebra son nilpotentes, el álgebra se dice *característicamente nilpotente*. El conjunto de las derivaciones de $\mathfrak{g}$, denotado por $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, es un álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$, definiendo

$$\mu(f, g) = f \circ g - g \circ f.$$

Se tiene que, para todo $x \in \mathfrak{g}$, el endomorfismo $\operatorname{ad} x$ es una derivación que se dice *interna* del álgebra. El conjunto de las derivaciones interiores, $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$, es un ideal de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Módulo el estudio de las derivaciones de las álgebras de Lie resolubles, la clasificación de las álgebras de Lie se reduce, vía el Teorema de Levi, a la de las resolubles y en particular a las nilpotentes (véase [18]).

El decidir si dos álgebras nilpotentes son no isomorfas no es una cuestión fácil, por lo que recordamos los *invariantes* más comunes de un álgebra, es decir, las propiedades que se conservan bajo isomorfismos, de entre las que la dimensión y el índice de nilpotencia del álgebra son las más simples. Son también invariantes las dimensiones de los ideales que nos proporcionan la sucesión derivada

$$\mathfrak{g} = D^0\mathfrak{g} \supset D^1\mathfrak{g} \supset \cdots \supset D^p\mathfrak{g} = \{0\}$$

la sucesión central descendente

$$\mathfrak{g} = C^0\mathfrak{g} \supset C^1\mathfrak{g} \supset \cdots \supset C^s\mathfrak{g} = \{0\}$$

así como la *sucesión central ascendente* que se define como

$$\{0\} = C_0(\mathfrak{g}) \subset C_1(\mathfrak{g}) \subset \cdots \subset C_s(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$$

donde

$$\begin{cases} C_0(\mathfrak{g}) = \{0\}, \\ C_{k+1}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} :\ \mu(x, \mathfrak{g}) \subset C_k(\mathfrak{g}), \quad k \geq 0\} . \end{cases}$$

Es decir, si ponemos

$$d_i = \dim(D^i\mathfrak{g}), \quad c^i = \dim(C^i\mathfrak{g}), \quad c_i = \dim(\, C_i(\mathfrak{g})\,),$$

entonces la sucesión de dimensiones

$$\left(n, d_1, \ldots, d_{p-1}/c^1, \ldots, c^{s-1}/c_1, \ldots, c_{s-1}\right)$$

es un invariante de $\mathfrak{g}$. La clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensiones menores o iguales a 6 se puede obtener utilizando estos invariantes.

Recordemos que la *subalgebra derivada* de $\mathfrak{g}$ es

$$\mu(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = C^1\mathfrak{g} = D^1\mathfrak{g}$$

y que el *centro* del álgebra está definido como

$$\operatorname{cen} \mathfrak{g} = C_1(\mathfrak{g}).$$

A veces, es suficiente para descartar álgebras no isomorfas estudiar las dimensiones de estos ideales, o de algunos obtenidos, a partir de ellos. Por ejemplo, si $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$, el *centralizador* de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$ se define como

$$\{x \in \mathfrak{g} : \ \mu(x, \mathfrak{h}) = 0\}$$

y su dimensión es también un invariante de $\mathfrak{g}$. Un invariante más potente *la sucesión característica*, con el que puede obtenerse la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de hasta dimensión 7, será utilizado en el Capítulo II (ver la Subsección 2.2.4) para definir las álgebras casifiliformes.

Capítulo 1

Generación de leyes de Álgebras de Lie

En este capítulo se estudian algunas propiedades de las álgebras de Lie filiformes que conducen a la presentación un algoritmo, que permite generar familias de leyes de este tipo de álgebras. Se obtuvo una implementación en el lenguaje simbólico del sistema *Mathematica* y se ha utilizado en la determinación de las familias de álgebras filiformes de dimensiones 11 y 12.

1.1 Introducción

La determinación de listas exhaustivas de álgebras de Lie se torna un problema más y más complejo, conforme aumenta la dimensión. La clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes es un problema abierto que ha sido abordado por distintos autores, pudiéndose ver en los trabajos de Dixmier [10] y Vergne [29] las listas completas para dimensiones $n \leq 5$ y $n = 6$ respectivamente; en Ancochea y Goze [3] o en Romdhani [27], por otro procedimiento, se obtienen las de dimensión $n = 7$. En el caso de las álgebras de Lie filiformes, definidas por M. Vergne [30], la clasificación para las de dimensión $n = 8$ fue obtenida por Ancochea y Goze [2].

Echarte y Gómez han obtenido la clasificación de las álgebras de Lie filiformes de dimensión $n = 9$ [13] y Boza, Echarte y Núñez han obtenido las de dimensión $n = 10$ [7].

El interés se va desplazando a responder otras cuestiones que plantea la Geometría Algebraica, como la determinación de los conjuntos algebraicos de leyes de álgebras de Lie y sus componentes irreducibles. Con métodos convencionales parece difícil aportar nuevos resultados, ya que la dificultad de los cálculos implicados los hace prácticamente inaccesibles. Ancochea, Gómez, Goze y Valeiras [4], [28] han probado que el conjunto de leyes de álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 8, $\mathcal{N}_8$, es la unión de 8 componentes irreducibles; las han determinado explícitamente, haciendo uso del ordenador como asistente matemático y empleando algoritmos desarrollados sobre paquetes de cálculo simbólico.

Es posible, abundando en la idea de utilizar lenguajes de cálculo formal, obtener un *uso inteligente* del ordenador como asistente matemático, hasta el punto de implementar algoritmos generados para familias de álgebras, en las que la dimensión sea un elemento más del conjunto de datos. Vamos a desarrollar un algoritmo que permita generar, sobre un lenguaje simbólico, las familias de leyes de álgebras de Lie filiformes. Utilizaremos el sistema de cálculo formal *Mathematica* para obtener una implementación del algoritmo y avanzar en el estudio de las álgebras de Lie filiformes.

1.2 Resultados preliminares

Pretendemos en esta sección encontrar, a partir de resultados conocidos, una base del álgebra de Lie filiforme en la que podamos encontrar un buen número de productos nulos que involucren a sus elementos; ello permitirá definir el álgebra, en función de una tal base, con un número considerablemente menor de constantes de estructura no nulas que si partimos de una base arbitraria.

Al elegir la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, para determinar el álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{g}$, se intentará obtener el mayor número de productos $\mu(e_i, e_j)$ nulos. Así, se tomará e_1 de entre los vectores del conjunto $\{x : x \notin C^1\mathfrak{g}\}$ y los otros elementos mediante la asignación de $\operatorname{ad} e_1$ según el siguiente teorema de estructura:

Teorema 1.1 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme de dimensión n. Existe una base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de $\mathfrak{g}$, con $e_1 \in \mathfrak{g} \backslash C^1\mathfrak{g}$, tal que*

1. $\mu(e_1, e_i) = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1,$
2. $\operatorname{cen} \mathfrak{g} =< e_n >,$
3. $\mu(e_i, e_{n-1}) = 0, \quad 2 \leq i \leq n-2.$

Diremos que $\mathcal{B}$ es una base adaptada *del álgebra.*

Demostración Sin más que considerar el cambio de bases adecuado, puede verse una demostración en [16, pags. 59–64]. □

Si $\mathcal{B}$ es una base adaptada del álgebra $\mathfrak{g}$, entonces la matriz del endomorfismo $\operatorname{ad} e_1$ con respecto a la base $\mathcal{B}$ tiene un bloque de Jordan de orden $n-1$; además $C^i\mathfrak{g}$ es el espacio vectorial generado por $\{e_{i+2}, e_{i+3}, \ldots, e_n\}$, $1 \leq i \leq n-2$, y se tiene finalmente $C^{n-1}\mathfrak{g} = \{0\}$.

Se pueden conseguir más productos nulos, recurriendo a las propiedades de los $C^i\mathfrak{g}$. En efecto, la proposición siguiente se sigue de forma inmediata de la relación $\mu\left(C^i\mathfrak{g}, C^j\mathfrak{g}\right) \subset C^{i+j+1}\mathfrak{g}$.

Proposición 1.2 *Sea $\mathcal{B}$ una base adaptada de $\mathfrak{g}$. Entonces*

1. $\mu(e_i, e_j) = \sum\limits_{k=i+j-1}^{n} c_{ij}^k e_k, \quad 5 \leq i+j \leq n+1;$
2. $\mu(e_i, e_j) = 0, \quad n+2 \leq i+j.$

1.3 Generación de leyes de álgebras de Lie filiformes

1.3.1 El descenso de un vector

La clave del método para generar álgebras de Lie filiformes está en obtener una formulación recursiva para los productos de los elementos de una base adaptada del álgebra que, partiendo de los resultados de la sección anterior, no son necesariamente nulos. A cada $x \in C^3\mathfrak{g}$ le será asociado un vector, en función de la base adaptada de $\mathfrak{g}$, como se indica en la siguiente definición.

Definición 1.3 Si $\mathcal{B}$ es una base adaptada de $\mathfrak{g}$ y $x \in C^3\mathfrak{g}$, con $x = \sum_{i=5}^{n} x^i e_i$, llamaremos *descenso* de x al vector

$$\operatorname{Des} x = \begin{cases} \sum_{i=5}^{n} x^i e_{i-1} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

No hay dificultad en comprobar que para todos los vectores $x, y \in C^3\mathfrak{g}$ se verifica

$$\operatorname{Des}(\alpha x + \beta y) = \alpha \operatorname{Des} x + \beta \operatorname{Des} y$$

es decir

$$x \mapsto \operatorname{Des} x$$

es una aplicación lineal. Sí conviene considerar aparte el hecho de que si un vector $x \in C^3\mathfrak{g}$ es la imagen de otro $y \in C^2\mathfrak{g}$ mediante la aplicación $\operatorname{ad} e_1$, es decir $x = \operatorname{ad} e_1(y)$, se tiene que el vector y es una combinación lineal del descenso de x y del vector e_n.

Lema 1.4 *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme, $x \in C^3\mathfrak{g}$ y $\mathcal{B}$ una base adaptada de $\mathfrak{g}$. Entonces, si $x = \mu(e_1, y)$, siendo $y \in C^2\mathfrak{g}$, existe un escalar $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $y = \operatorname{Des} x + \alpha\, e_n$.*

Demostración. Sean los vectores $y \in C^2\mathfrak{g}$ y $x = \sum_{i=5}^{n} x^i\, e_i$ tales que

$$\mu(e_1, y) = x.$$

Entonces, si $y = \sum_{i=4}^{n} y^i\, e_i$, por el Teorema 1.1 se tiene la igualdad

$$\mu(e_1, y) = \sum_{i=5}^{n} y^{i-1}\, e_i.$$

Así, se verifica

$$y^{i-1} = x^i, \quad 5 \leq i \leq n$$

y se obtiene el vector y expresado como

$$y = \mathrm{Des}\, x + y^n\, e_n. \qquad \square$$

Ahora estamos en condiciones de poder expresar el producto $\mu(e_i, e_j)$ mediante una relación recursiva, utilizando la relación de Jacobi que deben verificar los vectores e_1, e_2 y e_3.

Proposición 1.5 *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme y $\mathcal{B}$ una base adaptada de $\mathfrak{g}$. Sean i, j números enteros cumpliendo que $2 \leq i < j \leq n-2$, $i + j \leq n$. Entonces, para algún $c_{i\,j}^{n} \in \mathbf{C}$ se tiene*

$$\mu(e_i, e_j) = \mathrm{Des}(\mu(e_{i+1}, e_j)) + \mathrm{Des}(\mu(e_i, e_{j+1})) + c_{i\,j}^{n}\, e_n.$$

Demostración. Si $x, y, z \in \mathfrak{g}$, denotaremos como $J(x, y, z) = 0$ la identidad de Jacobi asociada a los vectores correspondientes. Para cada par de enteros i, j con $2 \leq i < j$, $i + j \leq n$, se obtiene de la relación de Jacobi $J(e_1, e_i, e_j) = 0$ la igualdad

$$\mu(e_1, \mu(e_i, e_j)) = \mu(e_{i+1}, e_j) + \mu(e_i, e_{j+1}).$$

Esto implica que a los vectores

$$y = \mu(e_i, e_j) \in C^2\mathfrak{g}$$

y

$$x = \mu(e_{i+1}, e_j) + \mu(e_i, e_{j+1}) \in C^3\mathfrak{g}$$

se les puede aplicar el Lema 1.4, de donde se obtiene el resultado llamando c^n_{ij} al α correspondiente. □

1.3.2 El algoritmo ALFIL

Utilizando los resultados de esta sección y de la sección anterior es posible dar un algoritmo que genera la familia de leyes filiformes de dimensión n. El conjunto de condiciones que deben verificar los parámetros, obtenido por el algoritmo de las relaciones de Jacobi, puede permitir la eliminación de algunos de ellos; es decir, el número de parámetros que proporciona la salida no es minimal.

Teorema 1.6 *Existe un algoritmo polinomial que genera el conjunto de leyes de álgebras de Lie filiformes de dimensión n.*

Demostración. El algoritmo es el que se describe:

ALFIL

Entrada

La dimensión $n(> 5)$ del álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{g}$.

Salida

El conjunto de leyes μ de álgebras de Lie filiformes para una base adaptada $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Método

Paso 1 Se introduce la dimensión n del álgebra. Se establecen las propiedades que definen a μ (bilineal alternada) y al descenso (linealidad).

En un lenguaje simbólico se pueden definir objetos o funciones mediante un conjunto de *reglas* de forma que, en la obtención de valores, se tengan en cuenta. Se establecen estas propiedades de las aplicaciones μ y Des para poder obtener valores en vectores arbitrarios en función sólo de los que toman en los elementos de una base lo que, en el caso de μ, determina la ley del álgebra (véase la Sección 1.4).

Paso 2 Asigna los $\mu(e_1, e_i)$ no nulos obtenidos del Teorema 1.1.

Paso 3 Asigna los $\mu(e_i, e_j)$ nulos obtenidos del Teorema 1.1 y de la Proposición 1.2.

Paso 4 Obtiene los $\mu(e_i, e_j)$ del apartado 1 de la proposición 1.2, aplicando la recurrencia obtenida en la proposición 1.5.

Puede hacerse mediante un doble `for-next` variando en el bucle exterior j desde $j = n - 2$ hasta $j = 2$, y variando en el bucle interior i desde $i = \min\{n - j - 1, j + 1\}$ (el primer índice que no sea necesariamente $\mu(e_i, e_j) = 0$) hasta $i = 2$. Así se hizo en la implementación con el lenguaje *Mathematica* que luego fue utilizada en la obtención de los resultados de las secciones siguientes.

Paso 5 Calcula las condiciones que, obtenidas de las relaciones de Jacobi, deben cumplir los parámetros c_{ij}^n para que μ sea álgebra de Lie.

Una vez que se tiene la ley del álgebra en función de los parámetros proporcionados por el paso anterior, se seleccionan los coeficientes no idénticamente nulos de los vectores resultantes de todas las condiciones de Jacobi; éstas pueden ser obtenidas mediante un triple `for-next`. Se obtiene un conjunto de ecuaciones polinómicas que definen al conjunto algebraico afín $\mathcal{F}_n$, de leyes de álgebras de Lie filiformes que tienen dimensión n.

Paso 6 Responde dando la ley y las relaciones polinomiales de los parámetros.

El tiempo que toman los pasos 2 y 3 es $O(n^2)$. Para ver cuántas operaciones se realizan en el paso 4 basta observar que el descenso de un vector lleva $O(n)$ y que, en el doble bucle ($O(n^2)$ ejecuciones), cuando se realiza un cálculo, ya se conocen los productos $\mu(e_{i+1}, e_j)$ y $\mu(e_i, e_{j+1})$, que son los vectores en los que se aplican los descensos de la recurrencia; por tanto, calcular $\mu(e_i, e_j)$ sólo cuesta $O(n)$ y, en total, una cota del tiempo invertido en el paso 3 es $O(n^3)$. En el paso 5 el número de relaciones de Jacobi, los productos necesarios para obtener cada una de ellas y la selección de los coeficientes no nulos dan $O(n^5)$ como cota del tiempo.

En total, el algoritmo se ejecuta en tiempo $O(n^5)$. □

1.4 Implementación del algoritmo

Se ha realizado una implementación del algoritmo ALFIL para el sistema de cálculo formal **Mathematica** del cual, entre otras ventajas, podemos señalar

Interactividad: el sistema debe ser imaginado como un *ordenador que sabe de álgebras de Lie*, más que como un "artilugio" que lee datos e imprime resultados. La interacción humana en el desarrollo de los cálculos es *indispensable* para poder completar algunos de los resultados obtenidos en las secciones posteriores.

Portabilidad: **Mathematica**, así como el software que se desarrolle con él, se ejecuta sin cambios en muchas plataformas informáticas distintas. La mayor parte del trabajo la hemos realizado en un ordenador personal con microprocesador 80386/87 a 33 MHz, 8MB de RAM y un disco duro de 105Mb. Por otra paerte tenemos acceso a sistemas **Mathematica** instalados en VAX/VMS, VAX/UNIX y estaciones de trabajo SUN. Evidentemente la mayor capacidad de estos sistemas daría una solución más rápida de los cálculos planteados y permitiría abordar otros más complicados. Hemos preferico un PC por tener un mejor interface de usuario que lo hacía más *amistoso* que en los sistemas mayores.

Expresividad: El lenguaje mixto procedural/de reglas/funcional de **Mathematica** hace que su código sea muy expresivo y legible, lo que disminuye sensiblemente el riesgo de errores de programación. Así la parte del código en donde se definen las propiedades que definen al del descenso de un vector, **Paso 1** del algoritmo ALFIL, y la parte donde se obtienen los productos no nulos del **Paso 4** del algoritmo, se pueden escribir en el lenguaje **Mathematica** como

```
(* Propiedades del descenso *)
Des[0, base_:x]=0;
Des[a_ base_[i_], base_] := If[i>4, a  base[i-1], 0];
Des[x_ + y_, base_] := Des[x, base] + Des[y, base];


(* Productos no nulos generados en el PASO 4 *)
    For[k=2, k<dim-2, k++,
        For[j=Min[k+1, dim-k-1]; i=j, i>1, i--,
            mu[base[i], base[dim-k]] =
                Des[mu[base[i+1], base[dim-k  ]], base] +
                Des[mu[base[i  ], base[dim-k+1]], base] +
                c[i,dim-k] base[dim]
        ]
    ];
```

No desarrollamos el código completo del programa, ya que el algoritmo puede ser implementado fácilmente en cualquier lenguaje formal que permita cálculo simbólico. Las líneas de código mostradas sólo pretenden dar una idea de la sencillez y claridad de expresión que se consigue en el entorno **Mathematica.**

1.5 Aplicaciones del algoritmo ALFIL

Usando la implementación del algoritmo ALFIL que se ha realizado para este trabajo, hemos podido utilizar la salida proporcionada en los casos $n = 11$ y $n = 12$ para determinar la parametrización que se expresa en el teorema enunciado a continuación y en el análogo que se obtendrá en la Subsección 1.5.2.

1.5.1 El conjunto de leyes de álgebras de Lie filiformes de dimensión 11

Vamos a considerar en esta subsección el conjunto de leyes de álgebras de Lie filiformes de dimensión 11. Podemos encontrar una expresión para la familia como se expresa en el teorema siguiente:

Teorema 1.7 *El conjunto de leyes de álgebras de Lie filiformes de dimensión 11 puede ser parametrizado por los puntos de un conjunto algebraico afín* $\mathcal{F}_{11} \subset \mathbf{C}^{16}$. *Además, si* $\mathfrak{g} = (\mathbf{C}^{11}, \mu)$ *es un álgebra de Lie filiforme, entonces existe una base* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{11}\}$ *de* $\mathfrak{g}$ *tal que:*

1. $\mu(e_1, e_i) =, e_{i+1} \quad 2 \leq i \leq 10$
2. $\mu(e_2, e_9) = c_{2,9}\, e_{11}$
3. $\mu(e_3, e_8) = c_{3,8}\, e_{11}$
4. $\mu(e_2, e_8) = (c_{2,9} + c_{3,8})\, e_{10} + c_{2,8}\, e_{11}$

5. $\mu(e_4, e_7) = c_{4,7}\, e_{11}$

6. $\mu(e_3, e_7) = (c_{3,8} + c_{4,7})\, e_{10} + c_{3,7}\, e_{11}$

7. $\mu(e_2, e_7) = (c_{2,9} + 2\, c_{3,8} + c_{4,7})\, e_9 + (c_{2,8} + c_{3,7})\, e_{10} + c_{2,7}\, e_{11}$

8. $\mu(e_5, e_6) = c_{5,6}\, e_{11}$

9. $\mu(e_4, e_6) = (c_{4,7} + c_{5,6})\, e_{10} + c_{4,6}\, e_{11}$

10. $\mu(e_3, e_6) = (c_{3,8} + 2\, c_{4,7} + c_{5,6})\, e_9 + (c_{3,7} + c_{4,6})\, e_{10} + c_{3,6}\, e_{11}$

11. $\mu(e_2, e_6) = (c_{2,9} + 3\, c_{3,8} + 3\, c_{4,7} + c_{5,6})\, e_8 + (c_{2,8} + 2\, c_{3,7} + c_{4,6})\, e_9 + (c_{2,7} + c_{3,6})\, e_{10} + c_{2,6}\, e_{11}$

12. $\mu(e_4, e_5) = (c_{4,7} + c_{5,6})\, e_9 + c_{4,6}\, e_{10} + c_{4,5}\, e_{11}$

13. $\mu(e_3, e_5) = (c_{3,8} + 3\, c_{4,7} + 2\, c_{5,6})\, e_8 + (c_{3,7} + 2\, c_{4,6})\, e_9 + (c_{3,6} + c_{4,5})\, e_{10} + c_{3,5}\, e_{11}$

14. $\mu(e_2, e_5) = (c_{2,9} + 4\, c_{3,8} + 6\, c_{4,7} + 3\, c_{5,6})\, e_7 + (c_{2,8} + 3\, c_{3,7} + 3\, c_{4,6})\, e_8 + (c_{2,7} + 2\, c_{3,6} + c_{4,5})\, e_9 + (c_{2,6} + c_{3,5})\, e_{10} + c_{2,5}\, e_{11}$

15. $\mu(e_3, e_4) = (c_{3,8} + 3\, c_{4,7} + 2\, c_{5,6})\, e_7 + (c_{3,7} + 2\, c_{4,6})\, e_8 + (c_{3,6} + c_{4,5})\, e_9 + c_{3,5}\, e_{10} + c_{3,4}\, e_{11}$

16. $\mu(e_2, e_4) = (c_{2,9} + 5\, c_{3,8} + 9\, c_{4,7} + 5\, c_{5,6})\, e_6 + (c_{2,8} + 4\, c_{3,7} + 5\, c_{4,6})\, e_7 + (c_{2,7} + 3\, c_{3,6} + 2\, c_{4,5})\, e_8 + (c_{2,6} + 2\, c_{3,5})\, e_9 + (c_{2,5} + c_{3,4})\, e_{10} + c_{2,4}\, e_{11}$

17. $\mu(e_2, e_3) = (c_{2,9} + 5\, c_{3,8} + 9\, c_{4,7} + 5\, c_{5,6})\, e_5 + (c_{2,8} + 4\, c_{3,7} + 5\, c_{4,6})\, e_6 + (c_{2,7} + 3\, c_{3,6} + 2\, c_{4,5})\, e_7 + (c_{2,6} + 2\, c_{3,5})\, e_8 + (c_{2,5} + c_{3,4})\, e_9 + c_{2,4}\, e_{10} + c_{2,3}\, e_{11}$

siendo el resto de los productos nulos y con los $c_{ij} \in \mathbb{C}$ verificando las siguientes cuatro ecuaciones: $P_i = 0$, $1 \leq i \leq 4$, donde

$P_1 : -4\, c_{3,7}{}^2 - 8\, c_{3,6}\, c_{3,8} + 2\, c_{2,9}\, c_{4,5} + 3\, c_{3,8}\, c_{4,5} + 3\, c_{2,8}\, c_{4,6} - c_{3,7}\, c_{4,6} + 5\, c_{4,6}{}^2 + 4\, c_{2,7}\, c_{4,7} - 6\, c_{3,6}\, c_{4,7} + 11\, c_{4,5}\, c_{4,7} + 2\, c_{2,7}\, c_{5,6} - 5\, c_{3,6}\, c_{5,6} + 5\, c_{4,5}\, c_{5,6}$

P_2 : $-7\,c_{3,7}\,c_{3,8}+2\,c_{2,9}\,c_{4,6}-3\,c_{3,8}\,c_{4,6}+3\,c_{2,8}\,c_{4,7}-6\,c_{3,7}\,c_{4,7}+3\,c_{2,8}\,c_{5,6}+c_{3,7}\,c_{5,6}+5\,c_{4,6}\,c_{5,6}$

P_3 : $-3\,{c_{3,8}}^2+2\,c_{2,9}\,c_{4,7}-3\,c_{3,8}\,c_{4,7}-6\,c_{3,8}\,c_{5,6}-9\,c_{4,7}\,c_{5,6}-5\,{c_{5,6}}^2$

P_4 : $-4\,c_{3,8}\,c_{4,7}-6\,{c_{4,7}}^2+2\,c_{2,9}\,c_{5,6}+5\,c_{3,8}\,c_{5,6}+6\,c_{4,7}\,c_{5,6}+5\,{c_{5,6}}^2$

Demostración. Denotando, por simplicidad, las constantes de estructura $c_{i\,j}^n$ como $c_{i\,j}$, se obtiene como salida del algoritmo ALFIL en el caso $n = 11$:

Ley del álgebra

1. $\mu(e_1, e_2) = e_3$
2. $\mu(e_1, e_3) = e_4$
3. $\mu(e_1, e_4) = e_5$
4. $\mu(e_1, e_5) = e_6$
5. $\mu(e_1, e_6) = e_7$
6. $\mu(e_1, e_7) = e_8$
7. $\mu(e_1, e_8) = e_9$
8. $\mu(e_1, e_9) = e_{10}$
9. $\mu(e_1, e_{10}) = e_{11}$
10. $\mu(e_3, e_9) = c_{3,9}\,e_{11}$
11. $\mu(e_2, e_9) = c_{3,9}\,e_{10} + c_{2,9}\,e_{11}$
12. $\mu(e_4, e_8) = c_{4,8}\,e_{11}$
13. $\mu(e_3, e_8) = (c_{3,9} + c_{4,8})\,e_{10} + c_{3,8}\,e_{11}$

14. $\mu(e_2, e_8) = (2\, c_{3,9} + c_{4,8})\, e_9 + (c_{2,9} + c_{3,8})\, e_{10} + c_{2,8}\, e_{11}$

15. $\mu(e_5, e_7) = c_{5,7}\, e_{11}$

16. $\mu(e_4, e_7) = (c_{4,8} + c_{5,7})\, e_{10} + c_{4,7}\, e_{11}$

17. $\mu(e_3, e_7) = (c_{3,9} + 2\, c_{4,8} + c_{5,7})\, e_9 + (c_{3,8} + c_{4,7})\, e_{10} + c_{3,7}\, e_{11}$

18. $\mu(e_2, e_7) = (3\, c_{3,9} + 3\, c_{4,8} + c_{5,7})\, e_8 + (c_{2,9} + 2\, c_{3,8} + c_{4,7})\, e_9 + (c_{2,8} + c_{3,7})\, e_{10} + c_{2,7}\, e_{11}$

19. $\mu(e_5, e_6) = c_{5,7}\, e_{10} + c_{5,6}\, e_{11}$

20. $\mu(e_4, e_6) = (c_{4,8} + 2\, c_{5,7})\, e_9 + (c_{4,7} + c_{5,6})\, e_{10} + c_{4,6}\, e_{11}$

21. $\mu(e_3, e_6) = (c_{3,9} + 3\, c_{4,8} + 3\, c_{5,7})\, e_8 + (c_{3,8} + 2\, c_{4,7} + c_{5,6})\, e_9 + (c_{3,7} + c_{4,6})\, e_{10} + c_{3,6}\, e_{11}$

22. $\mu(e_2, e_6) = (4\, c_{3,9} + 6\, c_{4,8} + 4\, c_{5,7})\, e_7 + (c_{2,9} + 3\, c_{3,8} + 3\, c_{4,7} + c_{5,6})\, e_8 + (c_{2,8} + 2\, c_{3,7} + c_{4,6})\, e_9 + (c_{2,7} + c_{3,6})\, e_{10} + c_{2,6}\, e_{11}$

23. $\mu(e_4, e_5) = (c_{4,8} + 2\, c_{5,7})\, e_8 + (c_{4,7} + c_{5,6})\, e_9 + c_{4,6}\, e_{10} + c_{4,5}\, e_{11}$

24. $\mu(e_3, e_5) = (c_{3,9} + 4\, c_{4,8} + 5\, c_{5,7})\, e_7 + (c_{3,8} + 3\, c_{4,7} + 2\, c_{5,6})\, e_8 + (c_{3,7} + 2\, c_{4,6})\, e_9 + (c_{3,6} + c_{4,5})\, e_{10} + c_{3,5}\, e_{11}$

25. $\mu(e_2, e_5) = (5\, c_{3,9} + 10\, c_{4,8} + 9\, c_{5,7})\, e_6 + (c_{2,9} + 4\, c_{3,8} + 6\, c_{4,7} + 3\, c_{5,6})\, e_7 + (c_{2,8} + 3\, c_{3,7} + 3\, c_{4,6})\, e_8 + (c_{2,7} + 2\, c_{3,6} + c_{4,5})\, e_9 + (c_{2,6} + c_{3,5})\, e_{10} + c_{2,5}\, e_{11}$

26. $\mu(e_3, e_4) = (c_{3,9} + 4\, c_{4,8} + 5\, c_{5,7})\, e_6 + (c_{3,8} + 3\, c_{4,7} + 2\, c_{5,6})\, e_7 + (c_{3,7} + 2\, c_{4,6})\, e_8 + (c_{3,6} + c_{4,5})\, e_9 + c_{3,5}\, e_{10} + c_{3,4}\, e_{11}$

27. $\mu(e_2, e_4) = (6\, c_{3,9} + 14\, c_{4,8} + 14\, c_{5,7})\, e_5 + (c_{2,9} + 5\, c_{3,8} + 9\, c_{4,7} + 5\, c_{5,6})\, e_6 + (c_{2,8} + 4\, c_{3,7} + 5\, c_{4,6})\, e_7 + (c_{2,7} + 3\, c_{3,6} + 2\, c_{4,5})\, e_8 + (c_{2,6} + 2\, c_{3,5})\, e_9 + (c_{2,5} + c_{3,4})\, e_{10} + c_{2,4}\, e_{11}$

28. $\mu(e_2, e_3) = (6\,c_{3,9} + 14\,c_{4,8} + 14\,c_{5,7})\,e_4 + (c_{2,9} + 5\,c_{3,8} + 9\,c_{4,7} + 5\,c_{5,6})\,e_5 + (c_{2,8} + 4\,c_{3,7} + 5\,c_{4,6})\,e_6 + (c_{2,7} + 3\,c_{3,6} + 2\,c_{4,5})\,e_7 + (c_{2,6} + 2\,c_{3,5})\,e_8 + (c_{2,5} + c_{3,4})\,e_9 + c_{2,4}\,e_{10} + c_{2,3}\,e_{11}$

donde las constantes de estructura c_{ij} tienen que verificar las ecuaciones polinómicas $J_k = 0$, con $1 \leq k \leq 20$, siguientes:

Expresiones polinómicas

J_1 : $-4\,{c_{3,7}}^2 - 8\,c_{3,6}\,c_{3,8} - 8\,c_{3,5}\,c_{3,9} + 2\,c_{2,9}\,c_{4,5} + 3\,c_{3,8}\,c_{4,5} + 3\,c_{2,8}\,c_{4,6} - c_{3,7}\,c_{4,6} + 5\,{c_{4,6}}^2 + 4\,c_{2,7}\,c_{4,7} - 6\,c_{3,6}\,c_{4,7} + 11\,c_{4,5}\,c_{4,7} + 5\,c_{2,6}\,c_{4,8} - 12\,c_{3,5}\,c_{4,8} + 2\,c_{2,7}\,c_{5,6} - 5\,c_{3,6}\,c_{5,6} + 5\,c_{4,5}\,c_{5,6} + 5\,c_{2,6}\,c_{5,7} - 14\,c_{3,5}\,c_{5,7}$

J_2 : $-7\,c_{3,7}\,c_{3,8} - 7\,c_{3,6}\,c_{3,9} - 7\,c_{3,9}\,c_{4,5} + 2\,c_{2,9}\,c_{4,6} - 3\,c_{3,8}\,c_{4,6} + 3\,c_{2,8}\,c_{4,7} - 6\,c_{3,7}\,c_{4,7} + 4\,c_{2,7}\,c_{4,8} - 10\,c_{3,6}\,c_{4,8} - 14\,c_{4,5}\,c_{4,8} + 3\,c_{2,8}\,c_{5,6} + c_{3,7}\,c_{5,6} + 5\,c_{4,6}\,c_{5,6} + 6\,c_{2,7}\,c_{5,7} - 6\,c_{3,6}\,c_{5,7} - 12\,c_{4,5}\,c_{5,7}$

J_3 : $-3\,{c_{3,8}}^2 - 6\,c_{3,7}\,c_{3,9} - 12\,c_{3,9}\,c_{4,6} + 2\,c_{2,9}\,c_{4,7} - 7\,c_{3,8}\,c_{4,7} - 6\,{c_{4,7}}^2 + 3\,c_{2,8}\,c_{4,8} - 9\,c_{3,7}\,c_{4,8} - 27\,c_{4,6}\,c_{4,8} + 2\,c_{2,9}\,c_{5,6} - c_{3,8}\,c_{5,6} - 3\,c_{4,7}\,c_{5,6} + 6\,c_{2,8}\,c_{5,7} - 18\,c_{4,6}\,c_{5,7}$

J_4 : $-3\,{c_{3,8}}^2 - 6\,c_{3,7}\,c_{3,9} - 7\,c_{3,9}\,c_{4,6} + 2\,c_{2,9}\,c_{4,7} - 3\,c_{3,8}\,c_{4,7} + 3\,c_{2,8}\,c_{4,8} - 6\,c_{3,7}\,c_{4,8} - 14\,c_{4,6}\,c_{4,8} - 6\,c_{3,8}\,c_{5,6} - 9\,c_{4,7}\,c_{5,6} - 5\,{c_{5,6}}^2 + 3\,c_{2,8}\,c_{5,7} - 4\,c_{3,7}\,c_{5,7} - 14\,c_{4,6}\,c_{5,7}$

J_5 : $-5\,c_{3,9}\,c_{4,6} - 4\,c_{3,8}\,c_{4,7} - 6\,{c_{4,7}}^2 - 3\,c_{3,7}\,c_{4,8} - 13\,c_{4,6}\,c_{4,8} + 2\,c_{2,9}\,c_{5,6} + 5\,c_{3,8}\,c_{5,6} + 6\,c_{4,7}\,c_{5,6} + 5\,{c_{5,6}}^2 + 3\,c_{2,8}\,c_{5,7} + 4\,c_{3,7}\,c_{5,7} - 4\,c_{4,6}\,c_{5,7}$

J_6 : $-2\,{c_{3,9}}^2 - 7\,c_{3,9}\,c_{4,8} - 14\,{c_{4,8}}^2 - 14\,c_{4,8}\,c_{5,7}$

J_7 : $-3\,{c_{4,8}}^2 + 2\,c_{3,9}\,c_{5,7} - 3\,c_{4,8}\,c_{5,7}$

J_8 : $-5\,c_{3,8}\,c_{3,9} - 15\,c_{3,9}\,c_{4,7} + 2\,c_{2,9}\,c_{4,8} - 9\,c_{3,8}\,c_{4,8} - 39\,c_{4,7}\,c_{4,8} - 10\,c_{3,9}\,c_{5,6} - 28\,c_{4,8}\,c_{5,6} + 4\,c_{2,9}\,c_{5,7} - 3\,c_{3,8}\,c_{5,7} - 33\,c_{4,7}\,c_{5,7} - 26\,c_{5,6}\,c_{5,7}$

J_9 : $-5\,c_{3,8}\,c_{3,9} - 11\,c_{3,9}\,c_{4,7} + 2\,c_{2,9}\,c_{4,8} - 6\,c_{3,8}\,c_{4,8} - 23\,c_{4,7}\,c_{4,8} - 6\,c_{3,9}\,c_{5,6} - 15\,c_{4,8}\,c_{5,6} + 2\,c_{2,9}\,c_{5,7} - 6\,c_{3,8}\,c_{5,7} - 27\,c_{4,7}\,c_{5,7} - 19\,c_{5,6}\,c_{5,7}$

$J_{10}: -4\,c_{3,9}\,c_{4,7}-3\,c_{3,8}\,c_{4,8}-9\,c_{4,7}\,c_{4,8}-6\,c_{3,9}\,c_{5,6}-15\,c_{4,8}\,c_{5,6}+2\,c_{2,9}\,c_{5,7}-4\,c_{4,7}\,c_{5,7}-14\,c_{5,6}\,c_{5,7}$

$J_{11}: -4\,c_{3,9}\,c_{4,7}-3\,c_{3,8}\,c_{4,8}-16\,c_{4,7}\,c_{4,8}-4\,c_{3,9}\,c_{5,6}-13\,c_{4,8}\,c_{5,6}+2\,c_{2,9}\,c_{5,7}+3\,c_{3,8}\,c_{5,7}-6\,c_{4,7}\,c_{5,7}-7\,c_{5,6}\,c_{5,7}$

$J_{12}: -5\,c_{3,8}\,c_{3,9}-7\,c_{3,9}\,c_{4,7}+2\,c_{2,9}\,c_{4,8}-3\,c_{3,8}\,c_{4,8}-14\,c_{4,7}\,c_{4,8}-6\,c_{3,8}\,c_{5,7}-23\,c_{4,7}\,c_{5,7}-5\,c_{5,6}\,c_{5,7}$

$J_{13}: -7\,c_{4,7}\,c_{4,8}+2\,c_{3,9}\,c_{5,6}+2\,c_{4,8}\,c_{5,6}+3\,c_{3,8}\,c_{5,7}-2\,c_{4,7}\,c_{5,7}+7\,c_{5,6}\,c_{5,7}$

$J_{14}: -2\,{c_{3,9}}^2-16\,c_{3,9}\,c_{4,8}-32\,{c_{4,8}}^2-20\,c_{3,9}\,c_{5,7}-80\,c_{4,8}\,c_{5,7}-50\,{c_{5,7}}^2$

$J_{15}: -2\,{c_{3,9}}^2-13\,c_{3,9}\,c_{4,8}-23\,{c_{4,8}}^2-14\,c_{3,9}\,c_{5,7}-53\,c_{4,8}\,c_{5,7}-32\,{c_{5,7}}^2$

$J_{16}: -3\,c_{3,9}\,c_{4,8}-9\,{c_{4,8}}^2-6\,c_{3,9}\,c_{5,7}-27\,c_{4,8}\,c_{5,7}-18\,{c_{5,7}}^2$

$J_{17}: -3\,c_{3,9}\,c_{4,8}-6\,{c_{4,8}}^2-8\,c_{3,9}\,c_{5,7}-24\,c_{4,8}\,c_{5,7}-18\,{c_{5,7}}^2$

$J_{18}: -2\,{c_{3,9}}^2-10\,c_{3,9}\,c_{4,8}-17\,{c_{4,8}}^2-6\,c_{3,9}\,c_{5,7}-29\,c_{4,8}\,c_{5,7}-14\,{c_{5,7}}^2$

$J_{19}: -3\,c_{3,9}\,c_{4,8}-3\,{c_{4,8}}^2-6\,c_{3,9}\,c_{5,7}-15\,c_{4,8}\,c_{5,7}-14\,{c_{5,7}}^2$

$J_{20}: -4\,c_{3,9}\,c_{5,7}-6\,c_{4,8}\,c_{5,7}-4\,{c_{5,7}}^2$

La familia resultante es el nuevo punto de partida para expresar una parametrización del conjunto algebraico afín de las álgebras de Lie filiformes de dimensión 11.

Denotemos por $\mathbf{C}[X]=\mathbf{C}[c_{2,3},c_{2,4},c_{2,5},c_{2,6},c_{2,7},c_{2,8},c_{2,9},c_{3,4},c_{3,5},c_{3,6},c_{3,7},c_{3,8},c_{3,9},c_{4,5},c_{4,6},c_{4,7},c_{4,8},c_{5,6},c_{5,7}]$ y sea $\mathfrak{a}$ el ideal de $\mathbf{C}[X]$ generado por el conjunto de polinomios $\{J_i : 1 \leq i \leq 20\}$. Una base de Gröbner del ideal de $\mathbf{C}[X]$ generado por $\{J_i : 15 \leq i \leq 20\}$ viene dada por el conjunto de polinomios $\{GB_i : 1 \leq i \leq 6\}$, siendo

$GB_1: {c_{5,7}}^3$

$GB_2: c_{4,8}\,{c_{5,7}}^2$

$GB_3 : \; 3\,c_{4,8}{}^2 - (-6\,c_{4,8} - 2\,c_{5,7})\,c_{5,7}$

$GB_4 : \; 2\,c_{3,9}\,c_{5,7} - (-3\,c_{4,8} - 2\,c_{5,7})\,c_{5,7}$

$GB_5 : \; c_{3,9}\,c_{4,8} + 2\,c_{5,7}{}^2$

$GB_6 : \; 3\,c_{3,9}{}^2 - c_{5,7}\,(21\,c_{4,8} + 35\,c_{5,7})$

de donde se deduce que $c_{3,9} = 0, c_{4,8} = 0$ y $c_{5,7} = 0$ en el conjunto algebraico afín definido por $\mathfrak{a}$. Así, el conjunto de leyes de álgebras de Lie filiformes de dimensión 11 es el conjunto algebraico afín $\mathcal{F}_{11}$, determinado en $\mathbb{C}^{16}$ por la imagen de $\sqrt{\mathfrak{a}}$ en el anillo cociente $\mathbb{C}[X] \,/ < c_{3,9}, c_{4,8}, c_{5,7} >$, que seguiremos denotando por $\sqrt{\mathfrak{a}}$. Un sistema minimal de generadores de $\sqrt{\mathfrak{a}}$ viene dado por P_1, P_2, P_3 y P_4. □

1.5.2 El conjunto de leyes de álgebras de Lie filiformes de dimensión 12

Vamos a considerar ahora el conjunto de leyes de álgebras de Lie filiformes de dimensión 12, que podemos determinar en un teorema análogo al anterior.

Teorema 1.8 *El conjunto de leyes de álgebras de Lie filiformes de dimensión 12 puede ser parametrizado por los puntos de un conjunto algebraico afín $\mathcal{F}_{12} \subset \mathbb{C}^{21}$. Además, si $\mathfrak{g} = (\mathbb{C}^{12}, \mu)$ es un álgebra de Lie filiforme, entonces existe una base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{12}\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que:*

1. $\mu(e_1, e_i) = e_{i+1} \quad 2 \leq i \leq 11$
2. $\mu(e_3, e_{10}) = -(c_{6,7}\, e_{12})$
3. $\mu(e_2, e_{10}) = -(c_{6,7}\, e_{11}) + c_{2,10}\, e_{12}$
4. $\mu(e_4, e_9) = c_{6,7}\, e_{12}$

5. $\mu(e_3, e_9) = c_{3,9}\, e_{12}$

6. $\mu(e_2, e_9) = -(c_{6,7}\, e_{10}) + (c_{2,10} + c_{3,9})\, e_{11} + c_{2,9}\, e_{12}$

7. $\mu(e_5, e_8) = -(c_{6,7}\, e_{12})$

8. $\mu(e_4, e_8) = c_{4,8}\, e_{12}$

9. $\mu(e_3, e_8) = (c_{3,9} + c_{4,8})\, e_{11} + c_{3,8}\, e_{12}$

10. $\mu(e_2, e_8) = -(c_{6,7}\, e_9) + (c_{2,10} + 2\, c_{3,9} + c_{4,8})\, e_{10} + (c_{2,9} + c_{3,8})\, e_{11} + c_{2,8}\, e_{12}$

11. $\mu(e_6, e_7) = c_{6,7}\, e_{12}$

12. $\mu(e_5, e_7) = c_{5,7}\, e_{12}$

13. $\mu(e_4, e_7) = (c_{4,8} + c_{5,7})\, e_{11} + c_{4,7}\, e_{12}$

14. $\mu(e_3, e_7) = (c_{3,9} + 2\, c_{4,8} + c_{5,7})\, e_{10} + (c_{3,8} + c_{4,7})\, e_{11} + c_{3,7}\, e_{12}$

15. $\mu(e_2, e_7) = -(c_{6,7}\, e_8) + (c_{2,10} + 3\, c_{3,9} + 3\, c_{4,8} + c_{5,7})\, e_9 + (c_{2,9} + 2\, c_{3,8} + c_{4,7})\, e_{10} + (c_{2,8} + c_{3,7})\, e_{11} + c_{2,7}\, e_{12}$

16. $\mu(e_5, e_6) = c_{5,7}\, e_{11} + c_{5,6}\, e_{12}$

17. $\mu(e_4, e_6) = (c_{4,8} + 2\, c_{5,7})\, e_{10} + (c_{4,7} + c_{5,6})\, e_{11} + c_{4,6}\, e_{12}$

18. $\mu(e_3, e_6) = (c_{3,9} + 3\, c_{4,8} + 3\, c_{5,7})\, e_9 + (c_{3,8} + 2\, c_{4,7} + c_{5,6})\, e_{10} + (c_{3,7} + c_{4,6})\, e_{11} + c_{3,6}\, e_{12}$

19. $\mu(e_2, e_6) = -(c_{6,7}\, e_7) + (c_{2,10} + 4\, c_{3,9} + 6\, c_{4,8} + 4\, c_{5,7})\, e_8 + (c_{2,9} + 3\, c_{3,8} + 3\, c_{4,7} + c_{5,6})\, e_9 + (c_{2,8} + 2\, c_{3,7} + c_{4,6})\, e_{10} + (c_{2,7} + c_{3,6})\, e_{11} + c_{2,6}\, e_{12}$

20. $\mu(e_4, e_5) = (c_{4,8} + 2\, c_{5,7})\, e_9 + (c_{4,7} + c_{5,6})\, e_{10} + c_{4,6}\, e_{11} + c_{4,5}\, e_{12}$

21. $\mu(e_3, e_5) = (c_{3,9} + 4\, c_{4,8} + 5\, c_{5,7})\, e_8 + (c_{3,8} + 3\, c_{4,7} + 2\, c_{5,6})\, e_9 + (c_{3,7} + 2\, c_{4,6})\, e_{10} + (c_{3,6} + c_{4,5})\, e_{11} + c_{3,5}\, e_{12}$

22. $\mu(e_2, e_5) = -(c_{6,7}\, e_6) + (c_{2,10} + 5\, c_{3,9} + 10\, c_{4,8} + 9\, c_{5,7})\, e_7 + (c_{2,9} + 4\, c_{3,8} + 6\, c_{4,7} + 3\, c_{5,6})\, e_8 + (c_{2,8} + 3\, c_{3,7} + 3\, c_{4,6})\, e_9 + (c_{2,7} + 2\, c_{3,6} + c_{4,5})\, e_{10} + (c_{2,6} + c_{3,5})\, e_{11} + c_{2,5}\, e_{12}$

23. $\mu(e_3,e_4) = (c_{3,9}+4\,c_{4,8}+5\,c_{5,7})\,e_7+(c_{3,8}+3\,c_{4,7}+2\,c_{5,6})\,e_8+(c_{3,7}+2\,c_{4,6})\,e_9+(c_{3,6}+c_{4,5})\,e_{10}+c_{3,5}\,e_{11}+c_{3,4}\,e_{12}$

24. $\mu(e_2,e_4) = -(c_{6,7}\,e_5)+(c_{2,10}+6\,c_{3,9}+14\,c_{4,8}+14\,c_{5,7})\,e_6+(c_{2,9}+5\,c_{3,8}+9\,c_{4,7}+5\,c_{5,6})\,e_7+(c_{2,8}+4\,c_{3,7}+5\,c_{4,6})\,e_8+(c_{2,7}+3\,c_{3,6}+2\,c_{4,5})\,e_9+(c_{2,6}+2\,c_{3,5})\,e_{10}+(c_{2,5}+c_{3,4})\,e_{11}+c_{2,4}\,e_{12}$

25. $\mu(e_2,e_3) = -(c_{6,7}\,e_4)+(c_{2,10}+6\,c_{3,9}+14\,c_{4,8}+14\,c_{5,7})\,e_5+(c_{2,9}+5\,c_{3,8}+9\,c_{4,7}+5\,c_{5,6})\,e_6+(c_{2,8}+4\,c_{3,7}+5\,c_{4,6})\,e_7+(c_{2,7}+3\,c_{3,6}+2\,c_{4,5})\,e_8+(c_{2,6}+2\,c_{3,5})\,e_9+(c_{2,5}+c_{3,4})\,e_{10}+c_{2,4}\,e_{11}+c_{2,3}\,e_{12}$

siendo el resto de los productos nulos y con los $c_{ij} \in \mathbb{C}$ verificando las siguientes ocho ecuaciones: $P_i = 0$, $1 \le i \le 8$, donde

P_1 : $-4\,c_{3,8}^2-8\,c_{3,7}\,c_{3,9}+2\,c_{2,10}\,c_{4,6}-3\,c_{3,9}\,c_{4,6}+3\,c_{2,9}\,c_{4,7}-6\,c_{3,8}\,c_{4,7}+4\,c_{2,8}\,c_{4,8}-10\,c_{3,7}\,c_{4,8}+3\,c_{2,9}\,c_{5,6}+2\,c_{3,8}\,c_{5,6}+9\,c_{4,7}\,c_{5,6}+5\,c_{5,6}^2+6\,c_{2,8}\,c_{5,7}-5\,c_{3,7}\,c_{5,7}+5\,c_{4,6}\,c_{5,7}$

P_2 : $-7\,c_{3,8}\,c_{3,9}+2\,c_{2,10}\,c_{4,7}-8\,c_{3,9}\,c_{4,7}+3\,c_{2,9}\,c_{4,8}-10\,c_{3,8}\,c_{4,8}-16\,c_{4,7}\,c_{4,8}+2\,c_{2,10}\,c_{5,6}-c_{3,9}\,c_{5,6}-3\,c_{4,8}\,c_{5,6}+6\,c_{2,9}\,c_{5,7}+c_{3,8}\,c_{5,7}+5\,c_{5,6}\,c_{5,7}$

P_3 : $-3\,c_{3,9}^2+2\,c_{2,10}\,c_{4,8}-11\,c_{3,9}\,c_{4,8}-16\,c_{4,8}^2+4\,c_{2,10}\,c_{5,7}-4\,c_{3,9}\,c_{5,7}-23\,c_{4,8}\,c_{5,7}-9\,c_{5,7}^2$

P_4 : $-4\,c_{3,9}\,c_{4,8}-10\,c_{4,8}^2+2\,c_{2,10}\,c_{5,7}+3\,c_{3,9}\,c_{5,7}-5\,c_{4,8}\,c_{5,7}+5\,c_{5,7}^2$

P_5 : $-9\,c_{3,7}\,c_{3,8}-9\,c_{3,6}\,c_{3,9}+2\,c_{2,10}\,c_{4,5}+4\,c_{3,9}\,c_{4,5}+3\,c_{2,9}\,c_{4,6}+4\,c_{2,8}\,c_{4,7}-5\,c_{3,7}\,c_{4,7}+14\,c_{4,6}\,c_{4,7}+5\,c_{2,7}\,c_{4,8}-11\,c_{3,6}\,c_{4,8}+16\,c_{4,5}\,c_{4,8}+2\,c_{2,8}\,c_{5,6}-5\,c_{3,7}\,c_{5,6}+5\,c_{4,6}\,c_{5,6}+5\,c_{2,7}\,c_{5,7}-14\,c_{3,6}\,c_{5,7}+14\,c_{4,5}\,c_{5,7}+2\,c_{2,6}\,c_{6,7}+5\,c_{3,5}\,c_{6,7}$

P_6 : $-5\,c_{3,9}\,c_{4,7}-4\,c_{3,8}\,c_{4,8}-16\,c_{4,7}\,c_{4,8}+2\,c_{2,10}\,c_{5,6}+6\,c_{3,9}\,c_{5,6}+11\,c_{4,8}\,c_{5,6}+3\,c_{2,9}\,c_{5,7}+5\,c_{3,8}\,c_{5,7}+19\,c_{5,6}\,c_{5,7}-2\,c_{2,8}\,c_{6,7}-7\,c_{3,7}\,c_{6,7}-7\,c_{4,6}\,c_{6,7}$

P_7 : $-4\,c_{4,8}^2+3\,c_{3,9}\,c_{5,7}-c_{4,8}\,c_{5,7}+5\,c_{5,7}^2-2\,c_{3,8}\,c_{6,7}-7\,c_{4,7}\,c_{6,7}-5\,c_{5,6}\,c_{6,7}$

P_8 : $2\,c_{2,10}\,c_{6,7}+9\,c_{3,9}\,c_{6,7}+16\,c_{4,8}\,c_{6,7}+14\,c_{5,7}\,c_{6,7}$

Demostración. Denotando, como en la sección anterior las constantes de estructura c^n_{ij} como c_{ij}, se obtiene como salida del algoritmo ALFIL en el caso $n = 12$:

Ley del álgebra

1. $\mu(e_1, e_2) = e_3$
2. $\mu(e_1, e_3) = e_4$
3. $\mu(e_1, e_4) = e_5$
4. $\mu(e_1, e_5) = e_6$
5. $\mu(e_1, e_6) = e_7$
6. $\mu(e_1, e_7) = e_8$
7. $\mu(e_1, e_8) = e_9$
8. $\mu(e_1, e_9) = e_{10}$
9. $\mu(e_1, e_{10}) = e_{11}$
10. $\mu(e_1, e_{11}) = e_{12}$
11. $\mu(e_3, e_{10}) = c_{3,10}\, e_{12}$
12. $\mu(e_2, e_{10}) = c_{3,10}\, e_{11} + c_{2,10}\, e_{12}$
13. $\mu(e_4, e_9) = c_{4,9}\, e_{12}$
14. $\mu(e_3, e_9) = (c_{3,10} + c_{4,9})\, e_{11} + c_{3,9}\, e_{12}$
15. $\mu(e_2, e_9) = (2\, c_{3,10} + c_{4,9})\, e_{10} + (c_{2,10} + c_{3,9})\, e_{11} + c_{2,9}\, e_{12}$
16. $\mu(e_5, e_8) = c_{5,8}\, e_{12}$
17. $\mu(e_4, e_8) = (c_{4,9} + c_{5,8})\, e_{11} + c_{4,8}\, e_{12}$

18. $\mu(e_3, e_8) = (c_{3,10} + 2\,c_{4,9} + c_{5,8})\,e_{10} + (c_{3,9} + c_{4,8})\,e_{11} + c_{3,8}\,e_{12}$

19. $\mu(e_2, e_8) = (3\,c_{3,10}+3\,c_{4,9}+c_{5,8})\,e_9+(c_{2,10}+2\,c_{3,9}+c_{4,8})\,e_{10}+(c_{2,9}+c_{3,8})\,e_{11}+ c_{2,8}\,e_{12}$

20. $\mu(e_6, e_7) = c_{6,7}\,e_{12}$

21. $\mu(e_5, e_7) = (c_{5,8} + c_{6,7})\,e_{11} + c_{5,7}\,e_{12}$

22. $\mu(e_4, e_7) = (c_{4,9} + 2\,c_{5,8} + c_{6,7})\,e_{10} + (c_{4,8} + c_{5,7})\,e_{11} + c_{4,7}\,e_{12}$

23. $\mu(e_3, e_7) = (c_{3,10} + 3\,c_{4,9} + 3\,c_{5,8} + c_{6,7})\,e_9 + (c_{3,9} + 2\,c_{4,8} + c_{5,7})\,e_{10} + (c_{3,8} + c_{4,7})\,e_{11} + c_{3,7}\,e_{12}$

24. $\mu(e_2, e_7) = (4\,c_{3,10} + 6\,c_{4,9} + 4\,c_{5,8} + c_{6,7})\,e_8 + (c_{2,10} + 3\,c_{3,9} + 3\,c_{4,8} + c_{5,7})\,e_9 + (c_{2,9} + 2\,c_{3,8} + c_{4,7})\,e_{10} + (c_{2,8} + c_{3,7})\,e_{11} + c_{2,7}\,e_{12}$

25. $\mu(e_5, e_6) = (c_{5,8} + c_{6,7})\,e_{10} + c_{5,7}\,e_{11} + c_{5,6}\,e_{12}$

26. $\mu(e_4, e_6) = (c_{4,9}+3\,c_{5,8}+2\,c_{6,7})\,e_9+(c_{4,8}+2\,c_{5,7})\,e_{10}+(c_{4,7}+c_{5,6})\,e_{11}+c_{4,6}\,e_{12}$

27. $\mu(e_3, e_6) = (c_{3,10} + 4\,c_{4,9} + 6\,c_{5,8} + 3\,c_{6,7})\,e_8 + (c_{3,9} + 3\,c_{4,8} + 3\,c_{5,7})\,e_9 + (c_{3,8} + 2\,c_{4,7} + c_{5,6})\,e_{10} + (c_{3,7} + c_{4,6})\,e_{11} + c_{3,6}\,e_{12}$

28. $\mu(e_2, e_6) = (5\,c_{3,10}+10\,c_{4,9}+10\,c_{5,8}+4\,c_{6,7})\,e_7+(c_{2,10}+4\,c_{3,9}+6\,c_{4,8}+4\,c_{5,7})\,e_8+ (c_{2,9}+3\,c_{3,8}+3\,c_{4,7}+c_{5,6})\,e_9+(c_{2,8}+2\,c_{3,7}+c_{4,6})\,e_{10}+(c_{2,7}+c_{3,6})\,e_{11}+c_{2,6}\,e_{12}$

29. $\mu(e_4, e_5) = (c_{4,9}+3\,c_{5,8}+2\,c_{6,7})\,e_8+(c_{4,8}+2\,c_{5,7})\,e_9+(c_{4,7}+c_{5,6})\,e_{10}+c_{4,6}\,e_{11}+ c_{4,5}\,e_{12}$

30. $\mu(e_3, e_5) = (c_{3,10} + 5\,c_{4,9} + 9\,c_{5,8} + 5\,c_{6,7})\,e_7 + (c_{3,9} + 4\,c_{4,8} + 5\,c_{5,7})\,e_8 + (c_{3,8} + 3\,c_{4,7} + 2\,c_{5,6})\,e_9 + (c_{3,7} + 2\,c_{4,6})\,e_{10} + (c_{3,6} + c_{4,5})\,e_{11} + c_{3,5}\,e_{12}$

31. $\mu(e_2, e_5) = (6\,c_{3,10} + 15\,c_{4,9} + 19\,c_{5,8} + 9\,c_{6,7})\,e_6 + (c_{2,10} + 5\,c_{3,9} + 10\,c_{4,8} + 9\,c_{5,7})\,e_7 + (c_{2,9} + 4\,c_{3,8} + 6\,c_{4,7} + 3\,c_{5,6})\,e_8 + (c_{2,8} + 3\,c_{3,7} + 3\,c_{4,6})\,e_9 + (c_{2,7} + 2\,c_{3,6} + c_{4,5})\,e_{10} + (c_{2,6} + c_{3,5})\,e_{11} + c_{2,5}\,e_{12}$

32. $\mu(e_3,e_4) = (c_{3,10}+5\,c_{4,9}+9\,c_{5,8}+5\,c_{6,7})\,e_6+(c_{3,9}+4\,c_{4,8}+5\,c_{5,7})\,e_7+(c_{3,8}+3\,c_{4,7}+2\,c_{5,6})\,e_8+(c_{3,7}+2\,c_{4,6})\,e_9+(c_{3,6}+c_{4,5})\,e_{10}+c_{3,5}\,e_{11}+c_{3,4}\,e_{12}$

33. $\mu(e_2,e_4) = (7\,c_{3,10}+20\,c_{4,9}+28\,c_{5,8}+14\,c_{6,7})\,e_5+(c_{2,10}+6\,c_{3,9}+14\,c_{4,8}+14\,c_{5,7})\,e_6+(c_{2,9}+5\,c_{3,8}+9\,c_{4,7}+5\,c_{5,6})\,e_7+(c_{2,8}+4\,c_{3,7}+5\,c_{4,6})\,e_8+(c_{2,7}+3\,c_{3,6}+2\,c_{4,5})\,e_9+(c_{2,6}+2\,c_{3,5})\,e_{10}+(c_{2,5}+c_{3,4})\,e_{11}+c_{2,4}\,e_{12}$

34. $\mu(e_2,e_3) = (7\,c_{3,10}+20\,c_{4,9}+28\,c_{5,8}+14\,c_{6,7})\,e_4+(c_{2,10}+6\,c_{3,9}+14\,c_{4,8}+14\,c_{5,7})\,e_5+(c_{2,9}+5\,c_{3,8}+9\,c_{4,7}+5\,c_{5,6})\,e_6+(c_{2,8}+4\,c_{3,7}+5\,c_{4,6})\,e_7+(c_{2,7}+3\,c_{3,6}+2\,c_{4,5})\,e_8+(c_{2,6}+2\,c_{3,5})\,e_9+(c_{2,5}+c_{3,4})\,e_{10}+c_{2,4}\,e_{11}+c_{2,3}\,e_{12}$

donde las constantes de estructura c_{ij} tienen que verificar las ecuaciones polinómicas $J_k=0$, con $1\le k\le 34$, siguientes:

Expresiones polinómicas

J_1 : $-9\,c_{3,7}\,c_{3,8}-9\,c_{3,6}\,c_{3,9}-9\,c_{3,5}\,c_{3,10}+2\,c_{2,10}\,c_{4,5}+4\,c_{3,9}\,c_{4,5}+3\,c_{2,9}\,c_{4,6}+4\,c_{2,8}\,c_{4,7}-5\,c_{3,7}\,c_{4,7}+14\,c_{4,6}\,c_{4,7}+5\,c_{2,7}\,c_{4,8}-11\,c_{3,6}\,c_{4,8}+16\,c_{4,5}\,c_{4,8}+6\,c_{2,6}\,c_{4,9}-18\,c_{3,5}\,c_{4,9}+2\,c_{2,8}\,c_{5,6}-5\,c_{3,7}\,c_{5,6}+5\,c_{4,6}\,c_{5,6}+5\,c_{2,7}\,c_{5,7}-14\,c_{3,6}\,c_{5,7}+14\,c_{4,5}\,c_{5,7}+9\,c_{2,6}\,c_{5,8}-28\,c_{3,5}\,c_{5,8}+5\,c_{2,6}\,c_{6,7}-14\,c_{3,5}\,c_{6,7}$

J_2 : $-4\,{c_{3,8}}^2-8\,c_{3,7}\,c_{3,9}-8\,c_{3,6}\,c_{3,10}-8\,c_{3,10}\,c_{4,5}+2\,c_{2,10}\,c_{4,6}-3\,c_{3,9}\,c_{4,6}+3\,c_{2,9}\,c_{4,7}-6\,c_{3,8}\,c_{4,7}+4\,c_{2,8}\,c_{4,8}-10\,c_{3,7}\,c_{4,8}+5\,c_{2,7}\,c_{4,9}-15\,c_{3,6}\,c_{4,9}-20\,c_{4,5}\,c_{4,9}+3\,c_{2,9}\,c_{5,6}+2\,c_{3,8}\,c_{5,6}+9\,c_{4,7}\,c_{5,6}+5\,{c_{5,6}}^2+6\,c_{2,8}\,c_{5,7}-5\,c_{3,7}\,c_{5,7}+5\,c_{4,6}\,c_{5,7}+10\,c_{2,7}\,c_{5,8}-16\,c_{3,6}\,c_{5,8}-26\,c_{4,5}\,c_{5,8}+5\,c_{2,7}\,c_{6,7}-9\,c_{3,6}\,c_{6,7}-14\,c_{4,5}\,c_{6,7}$

J_3 : $-7\,c_{3,8}\,c_{3,9}-7\,c_{3,7}\,c_{3,10}-14\,c_{3,10}\,c_{4,6}+2\,c_{2,10}\,c_{4,7}-8\,c_{3,9}\,c_{4,7}+3\,c_{2,9}\,c_{4,8}-10\,c_{3,8}\,c_{4,8}-16\,c_{4,7}\,c_{4,8}+4\,c_{2,8}\,c_{4,9}-13\,c_{3,7}\,c_{4,9}-38\,c_{4,6}\,c_{4,9}+2\,c_{2,10}\,c_{5,6}-c_{3,9}\,c_{5,6}-3\,c_{4,8}\,c_{5,6}+6\,c_{2,9}\,c_{5,7}+c_{3,8}\,c_{5,7}+5\,c_{5,6}\,c_{5,7}+10\,c_{2,8}\,c_{5,8}-6\,c_{3,7}\,c_{5,8}-42\,c_{4,6}\,c_{5,8}+6\,c_{2,8}\,c_{6,7}-18\,c_{4,6}\,c_{6,7}$

J_4 : $-6\,c_{3,10}\,c_{4,6}-5\,c_{3,9}\,c_{4,7}-4\,c_{3,8}\,c_{4,8}-16\,c_{4,7}\,c_{4,8}-3\,c_{3,7}\,c_{4,9}-18\,c_{4,6}\,c_{4,9}+2\,c_{2,10}\,c_{5,6}+6\,c_{3,9}\,c_{5,6}+11\,c_{4,8}\,c_{5,6}+3\,c_{2,9}\,c_{5,7}+5\,c_{3,8}\,c_{5,7}+19\,c_{5,6}\,c_{5,7}+4\,c_{2,8}\,c_{5,8}+4\,c_{3,7}\,c_{5,8}-14\,c_{4,6}\,c_{5,8}+2\,c_{2,8}\,c_{6,7}-9\,c_{4,6}\,c_{6,7}$

J_5 : $-7\,c_{3,8}\,c_{3,9}-7\,c_{3,7}\,c_{3,10}-8\,c_{3,10}\,c_{4,6}+2\,c_{2,10}\,c_{4,7}-3\,c_{3,9}\,c_{4,7}+3\,c_{2,9}\,c_{4,8}-6\,c_{3,8}\,c_{4,8}+4\,c_{2,8}\,c_{4,9}-10\,c_{3,7}\,c_{4,9}-20\,c_{4,6}\,c_{4,9}-7\,c_{3,9}\,c_{5,6}-14\,c_{4,8}\,c_{5,6}+3\,c_{2,9}\,c_{5,7}-4\,c_{3,8}\,c_{5,7}-14\,c_{5,6}\,c_{5,7}+6\,c_{2,8}\,c_{5,8}-10\,c_{3,7}\,c_{5,8}-28\,c_{4,6}\,c_{5,8}+4\,c_{2,8}\,c_{6,7}-9\,c_{4,6}\,c_{6,7}$

J_6 : $-5\,c_{3,9}\,c_{3,10}-8\,c_{3,10}\,c_{4,8}+2\,c_{2,10}\,c_{4,9}-3\,c_{3,9}\,c_{4,9}-20\,c_{4,8}\,c_{4,9}-7\,c_{3,9}\,c_{5,8}-42\,c_{4,8}\,c_{5,8}-14\,c_{5,7}\,c_{5,8}-14\,c_{4,8}\,c_{6,7}$

J_7 : $-2\,{c_{3,10}}^2-8\,c_{3,10}\,c_{4,9}-20\,{c_{4,9}}^2-28\,c_{4,9}\,c_{5,8}-14\,c_{4,9}\,c_{6,7}$

J_8 : $-3\,{c_{3,9}}^2-6\,c_{3,8}\,c_{3,10}-18\,c_{3,10}\,c_{4,7}+2\,c_{2,10}\,c_{4,8}-11\,c_{3,9}\,c_{4,8}-16\,{c_{4,8}}^2+3\,c_{2,9}\,c_{4,9}-12\,c_{3,8}\,c_{4,9}-54\,c_{4,7}\,c_{4,9}-12\,c_{3,10}\,c_{5,6}-39\,c_{4,9}\,c_{5,6}+4\,c_{2,10}\,c_{5,7}-4\,c_{3,9}\,c_{5,7}-23\,c_{4,8}\,c_{5,7}-9\,{c_{5,7}}^2+9\,c_{2,9}\,c_{5,8}-54\,c_{4,7}\,c_{5,8}-45\,c_{5,6}\,c_{5,8}+6\,c_{2,9}\,c_{6,7}+6\,c_{3,8}\,c_{6,7}-18\,c_{4,7}\,c_{6,7}-18\,c_{5,6}\,c_{6,7}$

J_9 : $-3\,{c_{3,9}}^2-6\,c_{3,8}\,c_{3,10}-13\,c_{3,10}\,c_{4,7}+2\,c_{2,10}\,c_{4,8}-7\,c_{3,9}\,c_{4,8}-6\,{c_{4,8}}^2+3\,c_{2,9}\,c_{4,9}-9\,c_{3,8}\,c_{4,9}-33\,c_{4,7}\,c_{4,9}-7\,c_{3,10}\,c_{5,6}-21\,c_{4,9}\,c_{5,6}+2\,c_{2,10}\,c_{5,7}-7\,c_{3,9}\,c_{5,7}-18\,c_{4,8}\,c_{5,7}-14\,{c_{5,7}}^2+6\,c_{2,9}\,c_{5,8}-4\,c_{3,8}\,c_{5,8}-38\,c_{4,7}\,c_{5,8}-28\,c_{5,6}\,c_{5,8}+3\,c_{2,9}\,c_{6,7}-c_{3,8}\,c_{6,7}-18\,c_{4,7}\,c_{6,7}-14\,c_{5,6}\,c_{6,7}$

J_{10} : $-5\,c_{3,10}\,c_{4,7}-4\,c_{3,9}\,c_{4,8}-6\,{c_{4,8}}^2-3\,c_{3,8}\,c_{4,9}-13\,c_{4,7}\,c_{4,9}-7\,c_{3,10}\,c_{5,6}-21\,c_{4,9}\,c_{5,6}+2\,c_{2,10}\,c_{5,7}-4\,c_{4,8}\,c_{5,7}+3\,c_{2,9}\,c_{5,8}-10\,c_{4,7}\,c_{5,8}-28\,c_{5,6}\,c_{5,8}+3\,c_{2,9}\,c_{6,7}+5\,c_{3,8}\,c_{6,7}+5\,c_{4,7}\,c_{6,7}-9\,c_{5,6}\,c_{6,7}$

J_{11} : $-3\,{c_{3,9}}^2-6\,c_{3,8}\,c_{3,10}-8\,c_{3,10}\,c_{4,7}+2\,c_{2,10}\,c_{4,8}-3\,c_{3,9}\,c_{4,8}+3\,c_{2,9}\,c_{4,9}-6\,c_{3,8}\,c_{4,9}-20\,c_{4,7}\,c_{4,9}-7\,c_{3,9}\,c_{5,7}-14\,c_{4,8}\,c_{5,7}-14\,{c_{5,7}}^2+3\,c_{2,9}\,c_{5,8}-4\,c_{3,8}\,c_{5,8}-28\,c_{4,7}\,c_{5,8}-6\,c_{3,8}\,c_{6,7}-23\,c_{4,7}\,c_{6,7}-5\,c_{5,6}\,c_{6,7}$

J_{12} : $-5\,c_{3,10}\,c_{4,7}-4\,c_{3,9}\,c_{4,8}-10\,{c_{4,8}}^2-3\,c_{3,8}\,c_{4,9}-21\,c_{4,7}\,c_{4,9}-5\,c_{3,10}\,c_{5,6}-18\,c_{4,9}\,c_{5,6}+2\,c_{2,10}\,c_{5,7}+3\,c_{3,9}\,c_{5,7}-5\,c_{4,8}\,c_{5,7}+5\,{c_{5,7}}^2+3\,c_{2,9}\,c_{5,8}+4\,c_{3,8}\,c_{5,8}-16\,c_{4,7}\,c_{5,8}-17\,c_{5,6}\,c_{5,8}+3\,c_{2,9}\,c_{6,7}+7\,c_{3,8}\,c_{6,7}-4\,c_{5,6}\,c_{6,7}$

J_{13} : $-4\,{c_{4,8}}^2-8\,c_{4,7}\,c_{4,9}+2\,c_{3,10}\,c_{5,6}+3\,c_{4,9}\,c_{5,6}+3\,c_{3,9}\,c_{5,7}-c_{4,8}\,c_{5,7}+5\,{c_{5,7}}^2+4\,c_{3,8}\,c_{5,8}-6\,c_{4,7}\,c_{5,8}+11\,c_{5,6}\,c_{5,8}+2\,c_{3,8}\,c_{6,7}-5\,c_{4,7}\,c_{6,7}+5\,c_{5,6}\,c_{6,7}$

J_{14} : $-5\,c_{3,9}\,c_{3,10}-20\,c_{3,10}\,c_{4,8}+2\,c_{2,10}\,c_{4,9}-12\,c_{3,9}\,c_{4,9}-68\,c_{4,8}\,c_{4,9}-25\,c_{3,10}\,c_{5,7}-92\,c_{4,9}\,c_{5,7}+6\,c_{2,10}\,c_{5,8}-6\,c_{3,9}\,c_{5,8}-84\,c_{4,8}\,c_{5,8}-126\,c_{5,7}\,c_{5,8}+4\,c_{2,10}\,c_{6,7}+c_{3,9}\,c_{6,7}-36\,c_{4,8}\,c_{6,7}-59\,c_{5,7}\,c_{6,7}$

J_{15} : $-5\, c_{3,9}\, c_{3,10} - 16\, c_{3,10}\, c_{4,8} + 2\, c_{2,10}\, c_{4,9} - 9\, c_{3,9}\, c_{4,9} - 45\, c_{4,8}\, c_{4,9} - 17\, c_{3,10}\, c_{5,7} - 55\, c_{4,9}\, c_{5,7} + 4\, c_{2,10}\, c_{5,8} - 8\, c_{3,9}\, c_{5,8} - 62\, c_{4,8}\, c_{5,8} - 84\, c_{5,7}\, c_{5,8} + 2\, c_{2,10}\, c_{6,7} - 4\, c_{3,9}\, c_{6,7} - 33\, c_{4,8}\, c_{6,7} - 46\, c_{5,7}\, c_{6,7}$

J_{16} : $-5\, c_{3,9}\, c_{3,10} - 12\, c_{3,10}\, c_{4,8} + 2\, c_{2,10}\, c_{4,9} - 6\, c_{3,9}\, c_{4,9} - 29\, c_{4,8}\, c_{4,9} - 7\, c_{3,10}\, c_{5,7} - 21\, c_{4,9}\, c_{5,7} + 2\, c_{2,10}\, c_{5,8} - 7\, c_{3,9}\, c_{5,8} - 46\, c_{4,8}\, c_{5,8} - 42\, c_{5,7}\, c_{5,8} - 6\, c_{3,9}\, c_{6,7} - 29\, c_{4,8}\, c_{6,7} - 28\, c_{5,7}\, c_{6,7}$

J_{17} : $-4\, c_{3,10}\, c_{4,8} - 3\, c_{3,9}\, c_{4,9} - 9\, c_{4,8}\, c_{4,9} - 7\, c_{3,10}\, c_{5,7} - 21\, c_{4,9}\, c_{5,7} + 2\, c_{2,10}\, c_{5,8} - 4\, c_{4,8}\, c_{5,8} - 28\, c_{5,7}\, c_{5,8} - 6\, c_{3,9}\, c_{6,7} - 15\, c_{4,8}\, c_{6,7} - 28\, c_{5,7}\, c_{6,7}$

J_{18} : $-4\, c_{3,10}\, c_{4,8} - 3\, c_{3,9}\, c_{4,9} - 16\, c_{4,8}\, c_{4,9} - 10\, c_{3,10}\, c_{5,7} - 34\, c_{4,9}\, c_{5,7} + 2\, c_{2,10}\, c_{5,8} - c_{3,9}\, c_{5,8} - 16\, c_{4,8}\, c_{5,8} - 42\, c_{5,7}\, c_{5,8} + 2\, c_{2,10}\, c_{6,7} + 2\, c_{3,9}\, c_{6,7} - 4\, c_{4,8}\, c_{6,7} - 18\, c_{5,7}\, c_{6,7}$

J_{19} : $-4\, c_{3,10}\, c_{4,8} - 3\, c_{3,9}\, c_{4,9} - 23\, c_{4,8}\, c_{4,9} - 8\, c_{3,10}\, c_{5,7} - 37\, c_{4,9}\, c_{5,7} + 2\, c_{2,10}\, c_{5,8} + 2\, c_{3,9}\, c_{5,8} - 22\, c_{4,8}\, c_{5,8} - 42\, c_{5,7}\, c_{5,8} + 2\, c_{2,10}\, c_{6,7} + 5\, c_{3,9}\, c_{6,7} - 3\, c_{4,8}\, c_{6,7} - 13\, c_{5,7}\, c_{6,7}$

J_{20} : $-7\, c_{4,8}\, c_{4,9} + 2\, c_{3,10}\, c_{5,7} - 3\, c_{4,9}\, c_{5,7} + 3\, c_{3,9}\, c_{5,8} - 6\, c_{4,8}\, c_{5,8} + 3\, c_{3,9}\, c_{6,7} + c_{4,8}\, c_{6,7} + 5\, c_{5,7}\, c_{6,7}$

J_{21} : $-5\, c_{3,10}\, c_{5,7} - 10\, c_{4,9}\, c_{5,7} - 4\, c_{3,9}\, c_{5,8} - 6\, c_{4,8}\, c_{5,8} - 14\, c_{5,7}\, c_{5,8} + 2\, c_{2,10}\, c_{6,7} + 5\, c_{3,9}\, c_{6,7} + 10\, c_{4,8}\, c_{6,7} + 5\, c_{5,7}\, c_{6,7}$

J_{22} : $-3\, c_{3,10}\, c_{4,9} - 3\, {c_{4,9}}^2 - 7\, c_{3,10}\, c_{5,8} - 21\, c_{4,9}\, c_{5,8} - 28\, {c_{5,8}}^2 - 14\, c_{5,8}\, c_{6,7}$

J_{23} : $-2\, {c_{3,10}}^2 - 11\, c_{3,10}\, c_{4,9} - 23\, {c_{4,9}}^2 - 7\, c_{3,10}\, c_{5,8} - 49\, c_{4,9}\, c_{5,8} - 28\, {c_{5,8}}^2 - 14\, c_{4,9}\, c_{6,7} - 14\, c_{5,8}\, c_{6,7}$

J_{24} : $-3\, {c_{4,9}}^2 + 2\, c_{3,10}\, c_{5,8} - 7\, c_{4,9}\, c_{5,8} - 6\, {c_{5,8}}^2 + 2\, c_{3,10}\, c_{6,7} - c_{4,9}\, c_{6,7} - 3\, c_{5,8}\, c_{6,7}$

J_{25} : $-2\, {c_{3,10}}^2 - 20\, c_{3,10}\, c_{4,9} - 50\, {c_{4,9}}^2 - 36\, c_{3,10}\, c_{5,8} - 180\, c_{4,9}\, c_{5,8} - 162\, {c_{5,8}}^2 - 20\, c_{3,10}\, c_{6,7} - 100\, c_{4,9}\, c_{6,7} - 180\, c_{5,8}\, c_{6,7} - 50\, {c_{6,7}}^2$

J_{26} : $-2\, {c_{3,10}}^2 - 17\, c_{3,10}\, c_{4,9} - 38\, {c_{4,9}}^2 - 27\, c_{3,10}\, c_{5,8} - 126\, c_{4,9}\, c_{5,8} - 108\, {c_{5,8}}^2 - 14\, c_{3,10}\, c_{6,7} - 67\, c_{4,9}\, c_{6,7} - 117\, c_{5,8}\, c_{6,7} - 32\, {c_{6,7}}^2$

J_{27} : $-3\, c_{3,10}\, c_{4,9} - 12\, {c_{4,9}}^2 - 9\, c_{3,10}\, c_{5,8} - 54\, c_{4,9}\, c_{5,8} - 54\, {c_{5,8}}^2 - 6\, c_{3,10}\, c_{6,7} - 33\, c_{4,9}\, c_{6,7} - 63\, c_{5,8}\, c_{6,7} - 18\, {c_{6,7}}^2$

J_{28} : $-3\,c_{3,10}\,c_{4,9}-9\,c_{4,9}{}^2-11\,c_{3,10}\,c_{5,8}-47\,c_{4,9}\,c_{5,8}-48\,c_{5,8}{}^2-8\,c_{3,10}\,c_{6,7}-32\,c_{4,9}\,c_{6,7}-60\,c_{5,8}\,c_{6,7}-18\,c_{6,7}{}^2$

J_{29} : $-2\,c_{3,10}{}^2-14\,c_{3,10}\,c_{4,9}-29\,c_{4,9}{}^2-16\,c_{3,10}\,c_{5,8}-79\,c_{4,9}\,c_{5,8}-60\,c_{5,8}{}^2-6\,c_{3,10}\,c_{6,7}-35\,c_{4,9}\,c_{6,7}-57\,c_{5,8}\,c_{6,7}-14\,c_{6,7}{}^2$

J_{30} : $-3\,c_{3,10}\,c_{4,9}-6\,c_{4,9}{}^2-9\,c_{3,10}\,c_{5,8}-30\,c_{4,9}\,c_{5,8}-32\,c_{5,8}{}^2-6\,c_{3,10}\,c_{6,7}-21\,c_{4,9}\,c_{6,7}-43\,c_{5,8}\,c_{6,7}-14\,c_{6,7}{}^2$

J_{31} : $-4\,c_{3,10}\,c_{5,8}-6\,c_{4,9}\,c_{5,8}-4\,c_{5,8}{}^2-6\,c_{3,10}\,c_{6,7}-15\,c_{4,9}\,c_{6,7}-20\,c_{5,8}\,c_{6,7}-9\,c_{6,7}{}^2$

J_{32} : $-3\,c_{4,9}{}^2+2\,c_{3,10}\,c_{5,8}-3\,c_{4,9}\,c_{5,8}-6\,c_{4,9}\,c_{6,7}-9\,c_{5,8}\,c_{6,7}-5\,c_{6,7}{}^2$

J_{33} : $-4\,c_{3,10}\,c_{5,8}-10\,c_{4,9}\,c_{5,8}-10\,c_{5,8}{}^2-4\,c_{3,10}\,c_{6,7}-10\,c_{4,9}\,c_{6,7}-14\,c_{5,8}\,c_{6,7}-4\,c_{6,7}{}^2$

J_{34} : $-4\,c_{4,9}\,c_{5,8}-6\,c_{5,8}{}^2+2\,c_{3,10}\,c_{6,7}+5\,c_{4,9}\,c_{6,7}+6\,c_{5,8}\,c_{6,7}+5\,c_{6,7}{}^2$

Como en el caso de la anterior dimensión, la familia resultante es punto de partida para expresar una parametrización del conjunto algebraico afín de las álgebras de Lie filiformes de dimensión 12.

Denotando ahora por $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[c_{2,3}, c_{2,4}, c_{2,5}, c_{2,6}, c_{2,7}, c_{2,8}, c_{2,9}, c_{2,10}, c_{3,4}, c_{3,5}, c_{3,6}, c_{3,7}, c_{3,8}, c_{3,9}, c_{3,10}, c_{4,5}, c_{4,6}, c_{4,7}, c_{4,8}, c_{4,10}, c_{5,6}, c_{5,7}, c_{5,8}, c_{6,7}]$ y sea $\mathfrak{a}$ el ideal de $\mathbb{C}[X]$ generado por el conjunto de polinomios $\{J_i : 1 \leq i \leq 34\}$. Una base de Gröbner del ideal de $\mathbb{C}[X]$ generado por $\{J_i : 22 \leq i \leq 34\}$ viene dada por el conjunto de polinomios $\{GB_i : 1 \leq i \leq 9\}$, siendo

GB_1 : $c_{6,7}\,(c_{5,8}+c_{6,7})^2$

GB_2 : $(c_{5,8}-2\,c_{6,7})\,(c_{5,8}+c_{6,7})^2$

GB_3 : $(c_{4,9}-c_{6,7})\,c_{6,7}\,(c_{5,8}+c_{6,7})$

GB_4 : $(c_{5,8}+c_{6,7})\,(c_{4,9}\,c_{5,8}-c_{4,9}\,c_{6,7}+2\,c_{6,7}{}^2)$

GB_5 : $3\,c_{4,9}{}^2+12\,c_{4,9}\,c_{5,8}+11\,c_{5,8}{}^2+6\,c_{4,9}\,c_{6,7}+10\,c_{5,8}\,c_{6,7}+2\,c_{6,7}{}^2$

GB_6 : $-4\,c_{4,9}\,c_{5,8}-6\,c_{5,8}{}^2+2\,c_{3,10}\,c_{6,7}+5\,c_{4,9}\,c_{6,7}+6\,c_{5,8}\,c_{6,7}+5\,c_{6,7}{}^2$

$$GB_7 : \; 2\,c_{3,10}\,c_{5,8} + 9\,c_{4,9}\,c_{5,8} + 11\,c_{5,8}{}^2 + c_{5,8}\,c_{6,7} - 3\,c_{6,7}{}^2$$

$$GB_8 : \; 6\,c_{3,10}\,c_{4,9} - 45\,c_{4,9}\,c_{5,8} - 43\,c_{5,8}{}^2 - 12\,c_{4,9}\,c_{6,7} + c_{5,8}\,c_{6,7} + 17\,c_{6,7}{}^2$$

$$GB_9 : \; c_{3,10}{}^2 + 4\,c_{4,9}\,c_{5,8} - 8\,c_{5,8}{}^2 - 5\,c_{4,9}\,c_{6,7} - 34\,c_{5,8}\,c_{6,7} - 18\,c_{6,7}{}^2$$

de donde se deduce que $c_{3,10} = -c_{6,7}, c_{4,9} = c_{6,7}$ y $c_{5,8} = -c_{6,7}$ en el conjunto algebraico afín definido por $\mathfrak{a}$. El conjunto de leyes de álgebras de Lie filiformes de dimensión 12 es, entonces, el conjunto algebraico afín $\mathcal{F}_{12}$, determinado en $\mathbf{C}^{21}$ por la imagen de $\sqrt{\mathfrak{a}}$ en el anillo cociente $\mathbf{C}[X] / < c_{3,10}+c_{6,7}, c_{4,9}-c_{6,7}, c_{5,8}+c_{6,7} >$, que continuaremos denotando por $\sqrt{\mathfrak{a}}$. Un sistema minimal de generadores de $\sqrt{\mathfrak{a}}$ viene dado por $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ y P_8. $\square$

1.6 Conclusiones y problemas abiertos

En un primer momento, al iniciar el trabajo se tenía la idea de que podría ser posible observar pautas en las familias generadas que permitieran una mejor comprensión de su estructura y que hicieran más fácil seguir su evolución y el estudio las propiedades geométricas al aumentar la dimensión del álgebra.

Es de reconocer que las familias presentadas, de dimensiones 11 y 12 (así como el estudio previo de las familias de dimensión 13) no aporta resultados que permitan conjeturar una "formula" que dé directamente la familia de leyes de algebras de Lie filiformes para una dimensión determinada (¿o quizá es todavía prematuro?) con el mínimo número de parámetros. Parece que la fórmula no es alcanzable o, en otro caso, debe ser considerado una cuestión abierta.

Quedan pendiente, además, abordar de forma efectiva los problemas de clasificación, determinación de componentes irreducibles, etc., que ayuden a comprender la geometría que subyace en los conjuntos algebraicos obtenidos, y que definen a las familias de leyes de álgebras de Lie filiformes para las dimensiones estudiadas.

Capítulo 2

Álgebras de Lie Casifiliformes Graduadas

En este capítulo se aborda un problema de clasificación de álgebras de Lie nilpotentes graduadas de dimensión finita, que no son filiformes.

El primer problema que surge es que la filtración natural produce una graduación en la que la dimensión de los subespacios que se obtienen no determina todas las posibilidades de obtener las álgebras graduadas, al contrario de lo que ocurría con las álgebras filiformes [30].

2.1 Introducción

En el estudio de la cohomología de las álgebras de Lie nilpotentes que hace M. Vergne y que aplica al estudio de la variedad de leyes de álgebras de Lie nilpotentes [30], la clasificación de las álgebras filiformes graduadas desempeña un papel importante al permitir expresar un álgebra filiforme de una forma simplificada. En efecto, Vergne obtiene que hay sólo dos álgebras filiformes graduadas no isomorfas cuando la dimensión es par y una cuando la dimensión es impar.

Encuentra una base en la que la expresión de las graduadas es "cómoda" y la filtración natural proporciona el resto de los productos necesarios que deben ser conocidos, para determinar cualquier álgebra filiforme a partir de las graduadas. Así, las álgebras graduadas aparecen como la estructura básica de un álgebra filiforme.

Vergne obtiene en este trabajo [30], entre otros resultados, que cada componente irreducible del conjunto algebraico de álgebras de Lie nilpotentes, que corte al abierto de las filiformes, contiene siempre una de las álgebras filiformes graduadas y proporciona, además, una mayoración de la dimensión de la componente irreducible en función de la dimensión del espacio vectorial subyacente.

Las álgebras filiformes pueden ser caracterizadas por tener sucesión característica $(n-1, 1)$, y cabe entonces interesarse por las álgebras graduadas de otras sucesiones características para ver si es posible obtener resultados que aporten nuevos datos en el estudio de la variedad de las álgebras de Lie nilpotentes.

Sin embargo, el planteamiento del problema que origina la búsqueda de nuevas álgebras nilpotentes graduadas surgió cuando se intentaba extender la caracterización de las álgebras de Lie filiformes característicamente nilpotentes obtenida por M. Goze y Y. Hakimjanov [17] a otro tipo de álgebras de Lie nilpotentes distintas de las filiformes.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión finita, sobre un cuerpo de característica nula, característicamente nilpotente, es decir, con todas sus derivaciones nilpotentes, entonces es necesariamente nilpotente. En efecto, ya que todas sus derivaciones interiores son nilpotentes el teorema de Engel (véase [18] o [21] nos asegura que el álgebra es nilpotente.

La definición y el primer ejemplo de un álgebra de Lie de este tipo la dieron Dixmier y Lister [11]. Los trabajos de Dyer [12], Favre [15] y Luks [25] describiendo ejemplos de estas álgebras en dimensiones pequeñas y la no existencia de ellas en dimensiones menores que 7, como resultado de la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes sobre un cuerpo de característica nula [11] y [26], hacían suponer que la clase de las álgebras característicamente nilpotente era relativamente escasa.

Echarte, Gómez y Núñez [14] han caracterizado las álgebras de Lie filiformes característicamente nilpotentes como aquellas que no son derivadas de ninguna otra álgebra de Lie. Prueban, además, que dicha caracterización no tiene sentido para las álgebras de Lie nilpotentes que no son filiformes.

El conjunto de las álgebras de Lie filiformes característicamente nilpotentes ha sido finalmente descrito por Goze y Hakimjanov [17]. Establecen que toda componente irreducible de la variedad $\mathcal{F}_n$ de leyes filiformes contiene un abierto de Zariski no vacío constituido de álgebras de Lie característicamente nilpotentes a partir de $n \geq 8$, generalizando el resultado que obtuvo Hakimjanov [19] para un tipo particular de componentes. En la obtención de los resultados utilizan el concepto de *álgebra de apoyo* de un álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{g}$ en función de la clasificación que obtuvo Vergne de las álgebras de Lie filiformes graduadas.

Parece natural, entonces, al abordar el problema del estudio de álgebras característicamente nilpotentes no filiformes, tratar de determinar la estructura de las álgebras graduadas de la clase que se consideren. Se ha iniciado el problema cuando la sucesión caracteristica del álgebra es $(n-2,1,1)$, álgebras que hemos llamado *casifiliformes*, al ser las "menos nilpotentes" de entre las nilpotentes no filiformes.

La filtración natural es suficiente para la clasificación de las álgebras graduadas filiformes [30], para las que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 + \cdots + \mathfrak{g}_{n-1}.$$

En este capítulo se pone de manifiesto que tal filtración no basta para determinar las álgebras graduadas no filiformes, de sucesión característica $(n-2,1,1)$, cuando se tiene

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 + \cdots + \mathfrak{g}_{n-2}.$$

Se ha tenido que considerar, entonces, una generalización de la filtración natural, que hemos llamado p-filtración, para que permita caracterizar las álgebras graduadas que eran objeto de estudio. La caracterización obtenida permite distinguir las álgebras graduadas producidas por la filtración natural de entre las álgebras graduadas que, además de las anteriores, son determinadas por las p-filtraciones.

Una vez que se precisa la estructura general de las álgebras p-graduadas en cualquier dimensión, se procede a obtener la clasificación de las álgebras casifiliformes p-graduadas y que no son álgebras graduadas por la filtración natural. Finalmente, se obtiene la clasificación de las álgebras casifiliformes graduadas naturalmente. Es clave para proceder, en éste último caso, un conocimiento previo de la clasificación de las álgebras graduadas obtenidas cuando la filtración natural coincide con algunas p-filtraciones particulares: las correspondientes a los dos valores mayores de p, en los que es posible tal coindicencia, para cada dimensión.

La estructura que presentamos, con un desarrollo que sugiere una "forma natural" de obtener los resultados es, sin duda, una consecuencia que produce el conocimiento completo de la solución del problema y que permite presentarlo de una forma tan elaborada que puede dejar oculta la dificultad que presentó encontrar pautas para su resolución. No quisiera que esa impresión llevara a engaño. Cuando se comenzó y se presentaron las primeras dificultades reales, era difícil prever la sencillez en que puede resumirse el resultado final, así como el camino que debíamos seguir para su obtención.

En el desarrollo de los trabajos se ha hecho uso intensivo del ordenador, creando y modificando programas que nos permitieran generar ejemplos de las álgebras que se estaban considerando. Esto ha sido fundamental para la comprensión de la estructura de los objetos (se necesitaban ejemplos en dimensiones suficientemente grandes) que han permitido la obtención paulatina de los resultados. La observación en dimensiones pequeñas era a veces frustrante y sólo permitía aventurar el comportamiento que seguía un tipo de álgebras cuando se identificaban los problemas que producían comportamientos que parecían anómalos, bien fuese por las peculiaridades de la dimensión o por las de la p-graduación (o ambas, incluso). Se podían tomar entonces nuevos puntos de partida y, a medida que se conocía más de las álgebras que se estaban considerando, probar o refutar las conjeturas que los datos obtenidos permitían formular. Esencialmente se ha usado el lenguaje *Mathematica* para la generación de familias de álgebras graduadas que, en ejemplos concretos, se determinaban, haciendo uso de las capacidades de cálculo simbólico del sistema formal, hasta poder proceder a su clasificación. Y se han tenido que obtener un número razonable de familias...

Los resultados que se han conseguido van en la línea de generalizar el teorema de clasificación de M.Vergne con un nuevo conjunto de álgebras graduadas, que determinan la estructura sobre la que se sustenta cualquier álgebra de Lie casifiliforme. No es un único número de álgebras para cada dimensión, cómo en las filiformes, pero sí un número finito de ellas, que aumenta con la dimesión; es decir, la familia de p-graduadas es localmente finita para la dimensión.

2.2 Notación y preliminares

En esta sección se recuerdan los conceptos básicos sobre álgebras de Lie filtradas y graduadas que pueden ser consultados en los textos de Jacobson [22] o Goze y Hakimjanov [18]. Se precisan las graduaciones que van a ser consideradas, las graduaciones asociadas a la filtración del álgebra por la sucesión central descendente y se recuerdan los resultados obtenidos por M. Vergne sobre las álgebras graduadas filiformes. Finalmente, la sucesión característica de un álgebra de Lie nilpotente nos permitirá definir el conjunto de álgebras cuyas graduadas serán objeto de estudio en este capítulo.

2.2.1 Álgebras de Lie graduadas

Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice $\mathbb{Z}$-*graduada* si puede ser descompuesta vectorialmente como

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$$

donde los $\mathfrak{g}_i$ son subespacios que verifican $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$, para todo $i, j \in \mathbf{Z}$.

Diremos que $\bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} \mathfrak{g}_i$ ó $\bigoplus \mathfrak{g}_i$ es una $\mathbf{Z}$-graduación del álgebra y usaremos, en lo que sigue, el término graduación como sinónimo de $\mathbf{Z}$-graduación. Si es finito el conjunto de índices i para los que $\mathfrak{g}_i \neq \{0\}$ la graduación se dice *finita.*

Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice $\mathbf{Z}$*-filtrada* si existen subespacios S_i, siendo $i \in \mathbf{Z}$ tales que

1. $\mathfrak{g} = \bigcup_{i\in\mathbf{Z}} S_i$
2. $[S_i, S_j] \subset S_{i+j}, \quad i, j \in \mathbf{Z}$
3. $S_i \subset S_j, \quad$ si $i > j$ (se dice, entonces, $\mathbf{Z}$-filtración *descendente*).

Diremos, entonces, que $(S_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ ó (S_i) es una $\mathbf{Z}$-filtración del álgebra y usaremos, en adelante, el término filtración como sinónimo de $\mathbf{Z}$-filtración. Una filtración descendente $(S_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ es *finita* si existen $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$, tales que

$$\begin{cases} S_i = \mathfrak{g}, & i \leq n_1 \text{ y} \\ S_i = \{0\}, & i \geq n_2. \end{cases}$$

Si un álgebra de Lie es graduada y es $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} \mathfrak{g}_i$, puede considerarse definida una filtración asociada a la graduación tomando $S_k = \bigoplus_{i\geq k} \mathfrak{g}_i$

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie filtrada, con $\mathfrak{g} = \bigcup_{i\in\mathbf{Z}} S_i$, puede construirse, a partir de ella, un álgebra de Lie graduada, (con espacio vectorial subyacente isomorfo a $\mathfrak{g}$), poniendo

$$\operatorname{gr}\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} \mathfrak{g}_i, \qquad \text{con } \mathfrak{g}_i = \frac{S_i}{S_{i+1}},$$

y definiendo en $\operatorname{gr}\mathfrak{g}$ el producto $[\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{[X, Y]}$, donde $\overline{[X, Y]}$ es la clase del elemento $[X, Y] \in S_{i+j}$, cuando X e Y son representantes en S_i y S_j de las clases $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ respectivamente.

2.2.2 Ejemplo de graduación

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente. La sucesión central descendente formada por los ideales $C^i\mathfrak{g}$ es finita y si k es el índice de nilpotencia del álgebra se tiene

$$\mathfrak{g} = C^0\mathfrak{g} \supset C^1\mathfrak{g} \supset \cdots \supset C^{k-1}\mathfrak{g} \supset \{0\}.$$

Esta sucesión define una filtración finita (descendente) sin más que considerarla de la forma siguiente

$$S_{i+1} = \begin{cases} \mathfrak{g} & \text{si } i \leq 0, \\ C^i\mathfrak{g} & \text{si } 1 \leq i \leq k-1, \\ \{0\} & \text{si } i \geq k. \end{cases}$$

Se dirá en lo sucesivo que $(S_i) = C^{i-1}\mathfrak{g}$ es la *filtración natural* de $\mathfrak{g}$. La correspondiente álgebra de Lie graduada que se obtiene de la filtración natural poniendo

$$\operatorname{gr}\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i, \qquad \text{con } \mathfrak{g}_i = \frac{C^{i-1}\mathfrak{g}}{C^i\mathfrak{g}},$$

es un álgebra de Lie graduada y finita, que será denotada, en lo sucesivo, como

$$\operatorname{gr}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k.$$

Definición 2.1 El álgebra $\mathfrak{g}$ se dice que es de *tipo* $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ si

$$\dim\left(\frac{C^{i-1}\mathfrak{g}}{C^i\mathfrak{g}}\right) = p_i, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Se sabe que $\dim(C^0\mathfrak{g}/C^1\mathfrak{g}) \geq 2$ y que las álgebras $\mathfrak{g}$ y $\operatorname{gr}\mathfrak{g}$ tienen el mismo tipo; pero, en general, $\mathfrak{g}$ no es isomorfa al álgebra graduada $\operatorname{gr}\mathfrak{g}$, como se puede observar en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.2 Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de dimensión 6 definida por

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = X_3 \\ [X_1, X_3] = X_4 \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_1, X_5] = X_6 \\ [X_2, X_3] = X_6 \end{cases}$$

donde $\{X_1, \ldots, X_6\}$ es una base de $\mathfrak{g}$ y el resto de los productos corchetes para los elementos de la base es nulo, salvo antisimetría.

Se tiene que la sucesión central descendente está formada, para el álgebra considerada, por

$$C^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g},$$
$$C^1\mathfrak{g} =< X_3, X_4, X_5, X_6 >,$$
$$C^2\mathfrak{g} =< X_4, X_5, X_6 >,$$
$$C^3\mathfrak{g} =< X_5, X_6 >,$$
$$C^4\mathfrak{g} =< X_6 >,$$
$$C^5\mathfrak{g} = \{0\},$$

siendo $< X_i >$ el subespacio engendrado por los X_i.

Si denotamos de nuevo por X_i a la clase a la que pertenece dicho vector en cada uno de los correspondientes subespacios $\mathfrak{g}_i = C^{i-1}\mathfrak{g}/C^i\mathfrak{g}$, se tiene

$$\mathfrak{g}_1 =< X_1, X_2 >,$$
$$\mathfrak{g}_2 =< X_3 >,$$
$$\mathfrak{g}_3 =< X_4 >,$$
$$\mathfrak{g}_4 =< X_5 >,$$
$$\mathfrak{g}_5 =< X_6 > .$$

Entonces $\mathrm{gr}\,\mathfrak{g}$, el álgebra graduada que se obtiene, es la que está definida por los corchetes

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = X_3 \\ [X_1, X_3] = X_4 \\ [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_1, X_5] = X_6 \end{cases}$$

y puede verse en la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 6, obtenida por Cerezo [9], que $\mathrm{gr}\,\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}$ aparecen como álgebras no isomorfas, como demuestra directamente el hecho de que el centralizador de $C^1\mathfrak{g}$ tiene dimensión 4 y el centralizador de $C^1(\mathrm{gr}\,\mathfrak{g})$ tiene dimensión 5.

Consideraremos en esta sección las álgebras de Lie en las que por la graduación precedente se obtiene un álgebra de Lie isomorfa a la de partida.

Definición 2.3 [30] Se dice que un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ es o está ***graduada naturalmente*** si es isomorfa al álgebra graduada $\mathrm{gr}\,\mathfrak{g}$, obtenida de la filtración natural del álgebra.

Es decir, $\mathfrak{g}$ es un álgebra graduada naturalmente si, siendo

$$\mathrm{gr}\,\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i, \qquad \text{con } \mathfrak{g}_i = \frac{C^{i-1}\mathfrak{g}}{C^i\mathfrak{g}},$$

se tiene

$$\mathfrak{g} = \mathrm{gr}\,\mathfrak{g}.$$

- Se considerará, a partir de ahora, que las álgebras graduadas serán álgebras graduadas naturalmente.

2.2.3 Álgebras de Lie filiformes graduadas

Las álgebras filiformes graduadas han sido determinadas por M.Vergne [30]. En esta sección se recuerdan sus resultados.

Un álgebra de Lie *filiforme* es la que tiene tipo $\{2,1,1,\ldots,1\}$. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie filiforme graduada de dimensión n tenemos, de la definición, que

$$\begin{cases} \dim(C^1\mathfrak{g}) = n-2, \\ \dim(C^i\mathfrak{g}) = n-i-1 \quad \text{si } 2 \le i \le n-1. \end{cases}$$

Se tiene, con la notación precedente, que

$$\dim \mathfrak{g}_1 = 2$$

y

$$\dim \mathfrak{g}_i = 1 \quad \text{para } 2 \le i \le n-1.$$

El primer paso para determinar las álgebras graduadas filiformes es encontrar una base de $\mathfrak{g}$ que permita expresar el álgebra de una forma sencilla.

Lema 2.4 [30] *Existe una base $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ de $\mathfrak{g}$, que se dirá adaptada al álgebra, tal que*

$$[X_0, X_i] = X_{i+1} \quad \text{si } 1 \le i \le n-2.$$

Se deduce de la determinación para el vector X_0 del operador adjunto $\operatorname{ad} X_0$, en el lema anterior, que

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_1 = < X_0, X_1 >, \\ \mathfrak{g}_i = < X_i > \qquad \text{si } 2 \le i \le n-1. \end{cases}$$

El álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{g}$ es, entonces, graduada si y sólamente si

$$[X_i, X_j] = a_{ij} X_{i+j}$$

siendo las $\{a_{ij}\}$ constantes que verifican las condiciones algebraicas obtenidas de las ecuaciones de Jacobi.

El resultado principal lo obtiene Vergne viendo que en una base adaptada un álgebra graduada filiforme puede ser expresada de tal forma que permite obtener como corolario el teorema siguiente:

Teorema 2.5 [30] *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie filiforme graduada de dimensión $n(\geq 3)$, entonces se puede encontrar una base $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ de $\mathfrak{g}$ de forma tal que $\mathfrak{g} = L_n$ si n es impar, y $\mathfrak{g} = L_n$ ó $\mathfrak{g} = Q_n$ cuando n es par, siendo, si se omiten los productos nulos,*

L_n el álgebra definida por

$$[X_0, X_i] = X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-2.$$

Q_n el álgebra definida, si $n = 2q$, $q \geq 2$, de la forma

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-1} & 1 \leq i \leq q-1. \end{cases}$$

Obsérvese que $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ es una base adaptada de $\mathfrak{g}$ y resulta, como corolario, que en cualquier álgebra de Lie filiforme puede encontrarse una base en la que se tengan los corchetes de L_n ó Q_n, según la paridad de la dimensión, más los corchetes

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n-1-i-j} c_{ij}^k X_{i+j+k}.$$

2.2.4 La sucesión característica

Vamos a considerar ahora otro tipo de álgebras de Lie nilpotentes no filiformes que resultan, de modo natural, al considerar como invariante la sucesión característica. Es un invariante basado en conceptos elementales relacionados con la forma canónica de Jordan y aparece utilizado explícitamente por primera vez en los trabajos de Ancochea y Goze [2] y [3].

La sucesión característica se define como el máximo de los símbolos de Segre de las aplicaciones lineales nilpotentes $\mathrm{ad}\,X$, siendo X un elemento del complementario de la subálgebra derivada.

Definición 2.6 [2] Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente compleja de dimensión finita n. Para todo $X \in \mathfrak{g} - [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ se denota

$$c(X) = (c_1(X), c_2(X), \ldots, 1)$$

la sucesión en orden decreciente de las dimensiones de los subespacios característicos del operador nilpotente $\mathrm{ad}\,X$. Ordenando el conjunto de estas sucesiones por el orden lexicográfico se define

$$c(\mathfrak{g}) = \sup\{c(X) : X \in \mathfrak{g} - [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}$$

y se le llama *sucesión característica.*

Evidentemente $c(\mathfrak{g})$ es un invariante para los isomorfismos y, por construcción, existe al menos un $X \in \mathfrak{g} - [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ tal que $c(X) = c(\mathfrak{g})$; un tal vector se dice *característico* del álgebra.

El álgebra abeliana tiene por sucesión característica $(1, \ldots, 1)$, las álgebras metaabelianas tienen sucesiones de la forma $(2, \ldots, 2, 1, \ldots, 1)$ y el álgebra de Heisenberg $(2, 1, \ldots, 1)$.

Se deduce directamente de la definición de álgebra de Lie filiforme la siguiente caracterización, en términos de la sucesión característica.

Lema 2.7 *El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión n es filiforme si y sólo si tiene por sucesión característica* $c(\mathfrak{g}) = (n-1, 1)$.

Así, el Teorema 2.5 determina las álgebras graduadas de sucesión característica $(n-1, 1)$ y tiene sentido preguntarse por la caracterización de álgebras graduadas cuya sucesión característica no sea la de las filiformes.

2.3 Álgebras casifiliformes

El tipo de álgebras de Lie que se van a considerar quedan precisadas como las que tienen sucesión característica inmediatamente inferior a las filiformes.

Definición 2.8 Un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ de dimensión n se dirá que es *casifiliforme*[1] si tiene por sucesión característica $c(\mathfrak{g}) = (n-2, 1, 1)$.

El objeto del resto del capítulo es abordar el estudio y determinación las álgebras casifiliformes que admiten una graduación

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-2}$$

en la que se tiene $\mathfrak{g}_i \neq \{0\}$, para todo $1 \leq i \leq n-2$.

Veremos que éstas álgebras *no siempre son graduadas naturalmente*, es decir, habrá álgebras $\mathfrak{g}$ que admitan tal graduación y para las que se tendrá

$$\mathfrak{g} \neq \operatorname{gr} \mathfrak{g}.$$

[1] El nombre fue propuesto por M. Goze en una sesión de trabajo en Mulhouse (Francia).

Será necesario para estudiarlas considerar una generalización de la filtración natural en un sentido que se precisará. Se obtendrán de las nuevas filtraciones un tipo de álgebras, que llamaremos p-graduadas, entre las que, como caso particular, estarán las graduadas naturalmente.

2.3.1 Álgebras casifiliformes graduadas naturalmente

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra casifiliforme de dimensión n. Si X_0 es un vector característico del álgebra, existe una base en la que el operador $\operatorname{ad} X_0$ está determinado por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Denotando la base como $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$, los productos del vector característico X_0 por los restantes elementos de la base los podemos expresar como

$$\begin{aligned} &[X_0, X_i] = X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-3, \\ &[X_0, X_{n-2}] = 0, \\ &[X_0, Y_0] = 0. \end{aligned}$$

Una tal base será llamada, en adelante, ***base adaptada*** del álgebra. Por tanto, en una base adaptada, la sucesión central descendente verifica las siguientes relaciones de inclusión:

$$C^1\mathfrak{g} \supset < X_2, \ldots, X_{n-2} >,$$

$$C^2\mathfrak{g} \supset < X_3, \ldots, X_{n-2} >,$$

$$\vdots$$

$$C^{n-3}\mathfrak{g} \supset < X_{n-2} > .$$

En éstas condiciones podemos resaltar el resultado siguiente:

Proposición 2.9 *Si $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$ es una base adaptada del álgebra $\mathfrak{g}$, entonces el vector $X_1 \notin C^1\mathfrak{g}$ y el vector $Y_0 \notin C^{n-2}\mathfrak{g}$.*

Demostración. Los condiciones de Jacobi para los vectores X_0, X_i y X_j, que denotaremos por $J(X_0, X_i, X_j) = 0$, implican

$$[X_0, [X_i, X_j]] = [X_{i+1}, X_j] + [X_i, X_{j+1}], \quad 1 \leq i < j < n-2,$$

y

$$[X_0, [X_i, X_{n-2}]] = [X_{i+1}, X_{n-2}], \quad 1 \leq i < n-2.$$

Pueden, entonces, obtenerse los diferentes productos corchetes entre los elementos de la base del álgebra con la ayuda del proceso recurrente

$$[X_{n-3}, X_{n-2}], [X_{n-4}, X_{n-2}], [X_{n-4}, X_{n-3}], \ldots, [X_t, X_{n-2}], \ldots, [X_t, X_{t+1}], \ldots$$

Sea (r, s) con $r < s$ tal que $[X_r, X_s]$ es el primer producto que contiene X_1 como sumando, con coeficiente no nulo, en la combinación lineal en que se expresa. Las relaciones anteriores de Jacobi muestran que tiene que ser $r = 1$ y de las condiciones de nilpotencia se tiene que es imposible que X_1 esté en un producto $[X_1, X_s]$. Tampoco puede estar X_1 en un producto $[Y_0, X_i]$, con $2 \geq i \geq n-2$, ya que de la relación de Jacobi $J(Y_0, X_0, X_{i-1}) = 0$, cuando $2 \leq i \leq n-3$, se tendría X_1 en la imagen de $\operatorname{ad} X_0$; las condiciones de nilpotencia aseguran, entonces, que X_1 no puede estar en la imagen de $\operatorname{ad} Y_0$. Luego X_1 no está en la subálgebra derivada de $\mathfrak{g}$.

Para probar que $Y_0 \notin C^{n-2}\mathfrak{g}$, basta considerar que si $Y_0 \in C^{n-2}\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{g}$ tendría que ser un álgebra de índice de nilpotencia $n-1$ y, por tanto, sería filiforme; la sucesión característica de $\mathfrak{g}$ debería ser $(n-1, 1)$. □

Obsérvese que si se identifica cada vector a su clase, se obtienen las relaciones de contenido

$$\frac{C^0\mathfrak{g}}{C^1\mathfrak{g}} \supset < X_0, X_1 >$$

y

$$\frac{C^{i-1}\mathfrak{g}}{C^i\mathfrak{g}} \supset < X_i >, \quad 2 \leq i \leq n-2.$$

En alguno de los cocientes debe estar el vector Y_0, y ello motiva la consideración de notaciones distintas, relacionadas con el subespacio al que pertenece, para las álgebras graduadas que se obtienen de la sucesión central descendente.

Así, dada un álgebra de Lie casifiliforme $\mathfrak{g}$, de dimensión n, se obtiene por la graduación asociada a la filtración natural un álgebra graduada, que denotaremos $\mathrm{gr}_q\,\mathfrak{g}$, para indicar:

- En el caso $q = 1$, que el tipo del álgebra es $\{3, 1, 1, \ldots, 1\}$; es decir,
$$\dim\left(\frac{C^0\mathfrak{g}}{C^1\mathfrak{g}}\right) = 3 \quad \text{y} \quad \dim\left(\frac{C^{i-1}\mathfrak{g}}{C^i\mathfrak{g}}\right) = 1, \quad 2 \leq i \leq n-2.$$
- En los casos $2 \leq q \leq n-2$ indicamos, para cada q, que el tipo correspondiente al álgebra es $\{2, 1, \ldots, 1, 2, 1, \ldots, 1\}$, donde el segundo 2 está situado en el lugar q-ésimo; es decir, se tiene
$$\dim\left(\frac{C^0\mathfrak{g}}{C^1\mathfrak{g}}\right) = 2, \ \dim\left(\frac{C^{q-1}\mathfrak{g}}{C^q\mathfrak{g}}\right) = 2 \ \text{ y } \ \dim\left(\frac{C^{i-1}\mathfrak{g}}{C^i\mathfrak{g}}\right) = 1, \quad \text{si } i \neq 1, q.$$

Nota 2.10 Un álgebra de Lie casifiliforme $\mathfrak{g}$ graduada naturalmente será de ahora en adelante, en la nueva notación, un álgebra para la que se tiene $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_q\,\mathfrak{g}$.

Denotaremos, en lo que sigue, una base de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión n como $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$ y expresaremos el álgebra, como hemos venido haciendo, dando los productos no nulos, salvo antisimetría.

2.3.2 Álgebras casifiliformes p-graduadas

El ejemplo siguiente muestra que, si se toma una base adaptada de un álgebra de Lie casifiliforme $\mathfrak{g}$, la graduación obtenida de la sucesión central descendente produce un álgebra $\mathrm{gr}_q\,\mathfrak{g}$ no isomorfa a $\mathfrak{g}$; pero una leve modificación de la filtración nos encuentra una graduación finita de $\mathfrak{g}$, con el mismo número de subespacios que producía la filtración natural.

Ejemplo 2.11 Un álgebra $\mathfrak{g}$, de tipo $\{3, 1, 1\}$, para la que $\mathfrak{g} \neq \mathrm{gr}_1\,\mathfrak{g}$.

Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra definida, en función de la base $\{X_0, X_1, X_2, X_3, Y_0\}$ por

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_1] = X_2 \\ [X_0, X_2] = X_3 \\ [Y_0, X_1] = X_3 \end{cases}$$

El álgebra es casifiliforme y la base considerada es una base adaptada. Si ponemos, identificando cada elemento a su clase,

$$\mathfrak{g}_1 = \frac{C^0\mathfrak{g}}{C^1\mathfrak{g}} =< X_0, X_1, Y_0 >,$$

$$\mathfrak{g}_2 = \frac{C^1\mathfrak{g}}{C^2\mathfrak{g}} =< X_2 >,$$

$$\mathfrak{g}_3 = \frac{C^2\mathfrak{g}}{C^3\mathfrak{g}} =< X_3 >;$$

entonces, el álgebra graduada que se obtiene,

$$\mathrm{gr}_1\,\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3,$$

está definida como

$$\mathrm{gr}_1\,\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_1] = X_2 \\ [X_0, X_2] = X_3 \end{cases}$$

y claramente $\mathfrak{g}$ y $\mathrm{gr}_1\,\mathfrak{g}$ son no isomorfas, sin más que considerar las dimensiones de sus centros.

El resultado $\mathfrak{g} \neq \mathrm{gr}_1\, \mathfrak{g}$ obtenido en el ejemplo anterior puede considerarse consecuencia de que el elemento Y_0 no queda "bien situado" por la graduación precedente, obtenida de la filtración natural (S_i), en la que para cada $1 \leq i \leq n-1$ se está obligado a tomar $S_i = C^{i-1}\mathfrak{g}$.

Puede observarse en el álgebra $\mathfrak{g}$, del mismo Ejemplo 2.11 considerado, que $< X_2, X_3, Y_0 >$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, que en el subespacio $S_2 =< X_2, X_3 >$ se tiene $[Y_0, S_2] = \{0\}$ y que $[Y_0, S_1] \subset S_3$. Entonces, poniendo

$$\begin{cases} S'_1 = C^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \\ \\ S'_2 =< X_2, X_3, Y_0 > \supset C^1\mathfrak{g} =< X_2, X_3 >, \\ \\ S'_3 =< X_3 >= C^2\mathfrak{g}, \\ \\ S'_4 = C^3\mathfrak{g} = \{0\}, \end{cases}$$

se obtiene (S'_i), que es una nueva filtración de $\mathfrak{g}$. Ésta no es, obviamente, la filtración natural, pero si identificamos cada elemento a su nueva clase en el álgebra graduada

$$\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3$$

que resulta y que denotaremos $\mathfrak{g}_{(5,2)}$, tenemos ahora que

$$\mathfrak{g}_1 = \frac{S'_1}{S'_2} =< X_0, X_1 >,$$

$$\mathfrak{g}_2 = \frac{S'_2}{S'_3} =< X_2, Y_0 >,$$

$$\mathfrak{g}_3 = \frac{S'_3}{S'_4} =< X_3 >,$$

y entonces sí que se tiene el isomorfismo. Es decir,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(5,2)}$$

y hemos encontrado, por tanto, una graduación para el álgebra $\mathfrak{g}$.

Obsérvese que el tipo del álgebra $\mathfrak{g}$ es $\{3,1,1\}$ y la nueva filtración lo que ha hecho es considerarlo como $\{2,2,1\}$. La base adaptada en el álgebra graduada $\mathrm{gr}_1\,\mathfrak{g}$, obtenida de la filtración (S_i), en realidad, es

$$\begin{aligned}
\overline{X_0} &= X_0+ < X_2, X_3 >,\\
\overline{X_1} &= X_1+ < X_2, X_3 >,\\
\overline{Y_0} &= Y_0+ < X_2, X_3 >,\\
\overline{X_2} &= X_2+ < X_3 >,\\
\overline{X_3} &= X_3.
\end{aligned}$$

La base adaptada de $\mathfrak{g}_{(5,2)}$, sin embargo, es

$$\begin{aligned}
\overline{X_0} &= X_0+ < X_2, X_3, Y_0 >,\\
\overline{X_1} &= X_1+ < X_2, X_3, Y_0 >,\\
\overline{Y_0} &= Y_0+ < X_3 >,\\
\overline{X_2} &= X_2+ < X_3 >,\\
\overline{X_3} &= X_3.
\end{aligned}$$

La única diferencia para las clases distintas a las anteriores es la consideración de Y_0 como nuevo elemento de la clase nula correspondiente, es decir, como elemento del ideal sobre el que se efectúa el cociente en la filtración y que produce el elemento $\overline{X_i} \neq 0$ en la nueva graduación; excepto para la clase del propio vector Y_0, que se obtiene eliminando de la clase nula del cociente, al que Y_0 pertenecía inicialmente, los vectores necesarios (en éste caso, sólo X_2) para que la operación anterior de adjuntar Y_0 a ideales en los que no estaba, tenga sentido en la nueva filtración.

Lógicamente, un procedimiento semejante no siempre tiene por qué dar lugar a una filtración del álgebra. De nuevo en el álgebra $\mathfrak{g}$ del Ejemplo 2.11, podemos ver como la consideración también de Y_0 en el subespacio $S_3' =< X_3, Y_0 >$, para modificar el tipo del álgebra a $\{2,1,2\}$ no tendría éxito. En efecto, sería $X_1 \in S_1'$, $Y_0 \in S_3'$ y tendríamos

$$[Y_0, X_1] = X_3 \notin S_4' = \{0\},$$

luego (S'_i) no es una filtración de $\mathfrak{g}$.

Así, cuando un álgebra de Lie es casifiliforme, una filtración relacionada con la sucesión central descendente que coloque el vector Y_0 de una base adaptada de forma conveniente, puede dar lugar a que se obtenga un álgebra graduada isomorfa a la de partida. Ello motiva la definición siguiente:

Definición 2.12 Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie casifiliforme de dimensión n y p un entero, con $1 \leq p \leq n-2$. Se dirá que $(S_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ es una *p-filtración* o una *filtración de índice p* del álgebra si los S_i son subespacios tales que

$$\begin{cases} S_i = C^0\mathfrak{g} & i \leq 1, \\ S_i \supset C^{i-1}\mathfrak{g} & 2 \leq i \leq p, \quad (p>1) \\ S_i = C^{i-1}\mathfrak{g} & p+1 \leq i \leq n-2, \quad (p<n-2) \\ S_i = \{0\} & i \geq n-1; \end{cases}$$

y se verifica que $(S_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ es una filtración finita de $\mathfrak{g}$, cumpliéndose:

Si $p=1$,

$$\begin{cases} \dim\left(\frac{S_1}{S_2}\right) = 3, \\ \dim\left(\frac{S_i}{S_{i+1}}\right) = 1, \quad 2 \leq i \leq n-2. \end{cases}$$

Si $2 \leq p \leq n-2$,

$$\begin{cases} \dim\left(\frac{S_1}{S_2}\right) = \dim\left(\frac{S_p}{S_{p+1}}\right) = 2, \\ \dim\left(\frac{S_i}{S_{i+1}}\right) = 1, \quad 2 \leq i \leq n-2, \quad i \neq p. \end{cases}$$

Se verifica, entonces, que las p-filtraciones se obtienen tomando la filtración natural que produce la sucesión central descendente, y cuando se tenga

$$\begin{cases} \dim\left(\dfrac{C^{q-1}\mathfrak{g}}{C^q\mathfrak{g}}\right) \neq 1, \\ \dim\left(\dfrac{C^{i-1}\mathfrak{g}}{C^i\mathfrak{g}}\right) = 1, \quad q+1 \leq i \leq n-2, \end{cases}$$

se aumenta en una unidad (si $q < n-2$) la dimensión de los subespacios

$$C^q\mathfrak{g},\ C^{q+1}\mathfrak{g},\ \ldots,\ C^{p-1}\mathfrak{g}$$

de forma que, llamando $NC^i\mathfrak{g}$, para $q \leq i \leq p-1$, a los nuevos subespacios obtenidos, se tenga que la sucesión (S_i), con

$$\begin{cases} S_i = C^{i-1}\mathfrak{g} & \text{si } i \in \mathbf{Z} - \{q+1, q+2, \ldots, p\}, \\ S_i = NC^{i-1}\mathfrak{g} & \text{si } i \in \{q+1, q+2, \ldots, p\}, \end{cases}$$

es una filtración del álgebra en la que se verifican las condiciones de dimensión impuestas en la definición.

Nota 2.13 Observando que la filtración natural nos da el tipo del álgebra, una p-filtración puede ser interpretada, como hicimos en el Ejemplo 2.11, del siguiente modo:

Caso $q = 1$. El tipo del álgebra es

$$\left\{3, 1, 1, \ldots, 1, \overset{\text{lugar } p}{1}, 1, \ldots, 1\right\}$$

y la p-filtración lo considera

$$\left\{2, 1, 1, \ldots, 1, \overset{\text{lugar } p}{2}, 1, \ldots, 1\right\}.$$

Caso $q > 1$. El tipo del álgebra es

$$\left\{2, 1, 1, \ldots, 1, \overset{\text{lugar } q}{2}, 1, \ldots, 1, \overset{\text{lugar } p}{1}, 1, \ldots, 1\right\}$$

y la p-filtración lo considera

$$\left\{2, 1, 1, \ldots, 1, \overset{\text{lugar } q}{1}, 1, \ldots, 1, \overset{\text{lugar } p}{2}, 1, \ldots, 1\right\}.$$

Fijaremos la notación para el álgebra graduada que se obtiene al considerar una p-filtración de un álgebra de Lie, para distinguirla de la que produce la filtración natural.

Nota 2.14 El álgebra graduada asociada a la p-filtración, que se obtiene de la forma usual, poniendo

$$\mathfrak{g}_i = \frac{S_i}{S_{i+1}}$$

será denotada, de ahora en adelante, por $\mathfrak{g}_{(n,p)}$, donde n y p son, respectivamente, la dimensión del álgebra y el índice de la filtración.

Abordaremos, en el resto de este trabajo, el estudio y determinación de las álgebras de Lie casifiliformes en las que, por la graduación precedente, obtenida de una p-filtración, el álgebra graduada que se obtiene es isomorfa a la de partida. Dichas álgebras serán llamadas p-graduadas y las definimos con precisión.

Definición 2.15 Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra casifiliforme de dimensión n y p un entero, con $1 \leq p \leq n-2$. Se dirá que $\mathfrak{g}$ es un álgebra *p-graduada* o que es un álgebra *graduada de índice p* cuando es isomorfa al álgebra graduada $\mathfrak{g}_{(n,p)}$, obtenida de una p-filtración.

Es decir, si $(S_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ es una p-filtración de $\mathfrak{g}$ para la que se obtiene

$$\mathfrak{g}_{(n,p)} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_p \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-2},$$

siendo

$$\mathfrak{g}_i = \frac{S_i}{S_{i+1}}, \quad 1 \leq i \leq n-2,$$

entonces se tiene

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}.$$

La filtración natural, que produce la sucesión central descendente, es el caso más simple de p-filtración, lo que establece una primera relación entre las álgebras casifiliformes graduadas naturalmente y las p-graduadas, que se muestra en la proposición siguiente:

Proposición 2.16 *Si el álgebra $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{g}$ es un álgebra p-graduada.*

Demostración. En efecto, basta observar que si $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g}$, tomando la propia sucesión central descendente como p-filtración, se tiene que $\mathfrak{g}$ es p-graduada, ya que se verifica

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)} = \mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g}. \qquad \square$$

Las álgebras 1-graduadas se corresponden, obviamente, con las que tienen el tipo $\{3,1,1,\ldots,1\}$ y son graduadas naturalmente, ya que $S_i = C^{i-1}\mathfrak{g}$, para todo i, y la 1-filtración coincide con la filtración natural. También es claro para un álgebra de tipo $\{2,1,1,\ldots,2\}$, que la única p-filtración posible es la filtración natural.

Cuando $2 \leq p \leq n-2$, entre las álgebras p-graduadas están las que tienen el tipo $\{2,1,\ldots,1,2,\ldots\}$, con el segundo 2 en el lugar p-ésimo (el adecuado para que $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g}$) y son graduadas naturalmente. Pero, en general, para un álgebra p-graduada se tiene

$$1 \leq \dim\left(\frac{C^{p-1}\mathfrak{g}}{C^p\mathfrak{g}}\right) \leq 2$$

y pudiera ser

$$\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_q\,\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}, \quad \text{con } q < p.$$

Esto se corresponde con el Caso $p > 1$ de la Nota 2.13, cuando $\mathfrak{g}$ fuese graduada, p-graduada y $p \neq q$. En su momento, veremos que tal situación sólo puede darse cuando $q = 1$ (ver Proposición 2.25).

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra p-graduada y elegimos una base adaptada, de acuerdo con la Proposición 2.9, podemos determinar los subespacios $\mathfrak{g}_i$ como se especifican en la proposición siguiente:

Proposición 2.17 *Si $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$ es una base adaptada del álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$, entonces se tiene la descomposición*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_p \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-2}$$

con

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}, \quad i, j \in \mathbf{Z},$$

y el vector $Y_0 \in \mathfrak{g}_p$, siendo:

$$Si \quad p = 1, \qquad \begin{cases} \mathfrak{g}_1 =< X_0, X_1, Y_0 >, & \\ \mathfrak{g}_i =< X_i > & \text{si } 2 \leq i \leq n-2. \end{cases}$$

$$Si \quad p \neq 1 : \qquad \begin{cases} \mathfrak{g}_1 =< X_0, X_1 >, & \\ \mathfrak{g}_p =< X_p, Y_0 >, & \\ \mathfrak{g}_i =< X_i > & \text{si } 2 \leq i \leq n-2, \ i \neq p. \end{cases}$$

Demostración. Si $p = 1$ o si $p > 1$ y $C^{p-1}\mathfrak{g} =< X_p, X_{p+1}, \ldots, X_{n-2}, Y_0 >$, la conclusión es inmediata.

Sean $C^{p-1}\mathfrak{g} =< X_p, X_{p+1}, \ldots, X_{n-2} >$, con $1 < p \leq n-2$, y (S_i) una p-filtración del álgebra. Suponiendo

$$S_p =< X_p, X_{p+1}, \ldots, X_{n-2}, X_j >, \quad \text{con } 1 \leq j < p,$$

es decir, tal que

$$S_j =< X_j, X_{j+1}, \ldots, X_p, \ldots >,$$

se tendría que

$$[X_0, X_j] = X_{j+1} \in S_{p+1};$$

pero eso es imposible, ya que $p+1 > j+1$ y se tienen

$$S_{p+1} = C^p\mathfrak{g} =< X_{p+1}, X_{p+2}, \ldots, X_{n-2} >, \quad \text{si} \;\; p \leq n-3,$$

y

$$S_{p+1} = \{0\}, \quad \text{si} \;\; p = n-2.$$

Si ponemos

$$S_p =< X_p, X_{p+1}, \ldots, X_{n-2}, X_0 >,$$

obtenemos la misma conclusión considerando el producto $[X_0, X_1] = X_2 \in S_{p+1}$.

Luego la única posibilidad de que (S_i) sea una filtración del álgebra es poniendo

$$S_p =< X_p, X_{p+1}, \ldots, X_{n-2}, Y_0 >$$

y entonces, como

$$S_{p+1} = C^p\mathfrak{g} =< X_{p+1}, X_{p+2}, \ldots, X_{n-2} >$$

y el álgebra $\mathfrak{g}$ es p-graduada se tiene la conclusión. $\square$

La sucesión característica $(n-2,1,1)$ de un álgebra casifiliforme $\mathfrak{g}$ tiene sentido para $n > 2$. Si $n = 3$, el álgebra sólo puede ser la abeliana de tal dimensión. Vamos a utilizar la proposición anterior para estudiar, en el caso en que $\mathfrak{g}$ sea de dimensión $n = 4$, cuándo el álgebra es p-graduada.

Ejemplo 2.18 Álgebras p-graduadas de dimensión 4.

Sólo caben considerarse las graduaciones de índices $p = 1$ y $p = 2$.

– Si $p = 2$, entonces, en una base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, Y_0\}$, el único producto no nulo de $\mathfrak{g}$, entre los elementos de la base, es $[X_0, X_1] = X_2$ y por tanto

$$\mathfrak{g} = L_3 \oplus < Y_0 > .$$

– Si $p = 1$, en una base adaptada se tendría

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_1] = X_2 \\ [Y_0, X_1] = \alpha X_2 \end{cases}$$

Haciendo el cambio de base

$$\begin{cases} Y_0' = Y_0 - \alpha X_0, & \\ X_i' = X_i & 0 \leq i \leq 2, \end{cases}$$

se tendría que

$$[Y_0', X_1'] = [Y_0 - \alpha X_0, X_i] = \alpha X_2 - \alpha X_2 = 0;$$

por tanto, podemos suponer $\alpha = 0$ y obtenemos el mismo resultado que en el caso $p = 2$.

Se tiene, entonces, que sólo hay un álgebra casifiliforme p-graduada de dimensión $n = 4$ que es escindida, es decir, suma directa de otras; en concreto, suma directa del álgebra abeliana de dimensión 1 ($\mathbf{C}$) y del álgebra de Heisemberg de dimensión 3 (L_3).

El ejemplo anterior muestra que $L_3 \oplus \mathbf{C}$ es la única álgebra p-graduada (en este caso graduada) de dimensión 4. Para estudiar las álgebras p-graduadas de dimensiones superiores, expresaremos las condiciones de la Proposición 2.17 en términos de la forma que adopta la ley del álgebra, en función de los productos, no necesariamente nulos, en una base adaptada. Podemos establecer la proposición siguiente:

Proposición 2.19 *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie casifiliforme p-graduada de dimensión n y $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$ una base adaptada del álgebra. Entonces se tiene*

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le n-3, \\ [Y_0, X_i] = a_i\, X_{i+p} & 1 \le i \le n-2-p \quad (p \le n-3), \\ [X_i, X_j] = a_{ij}\, X_{i+j} & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor,\ i < j \le n-2-i, j \ne p-i; \\ [X_i, X_{p-i}] = a_{i\,p-i}\, X_p + b_i\, Y_0 & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor \ (p \ge 3). \end{cases}$$

siendo, según el caso, las $\{a_i\}$, las $\{b_i\}$ y las $\{a_{ij}\}$ constantes que verifican las condiciones algebraicas obtenidas de las ecuaciones de Jacobi.

Demostración. En efecto, basta considerar la descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_p \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-2}$$

de la Proposición 2.17 e imponer las condiciones generales para que se cumpla que $\mathfrak{g}$ sea un álgebra de Lie y se verifique

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}, \quad i, j \in \mathbb{Z}. \qquad \square$$

Separando en una nota los casos en que algunos de los productos desaparecen, debido a las propiedades del vector Y_0 en las p-filtraciones correspondientes a los casos extremos, aclaramos el significado de los paréntesis en la expresión de $\mathfrak{g}$ de la proposición anterior.

Nota 2.20

- *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra $(n-2)$-graduada, en la Proposición 2.19 se pone:*

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{ij}\, X_{i+j} & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor, i < j < n-2-i; \\ [X_i, X_{n-2-i}] = a_{i\,n-2-i}\, X_{n-2} + b_i\, Y_0 & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor. \end{cases}$$

En efecto, ya que se tiene $Y_0 \in \operatorname{cen} \mathfrak{g}$, porque en la $(n-2)$-filtración es $Y_0 \in S_{n-2}$, $(S_i) = \{0\}$, para $i > n-2$, y

$$[X_i, Y_0] \in [S_i, S_{n-2}] = S_{n-2+i}, \quad i \geq 1.$$

Por tanto, como $[X_0, Y_0] = 0$, se tiene $[Y_0, \mathfrak{g}] = \{0\}$. $\square$

- *Si $\mathfrak{g}$ es 1-graduada o 2-graduada, en la Proposición 2.19 se pone:*

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_i] = a_i X_{i+p} & 1 \leq i \leq n-2-p, \\ [X_i, X_j] = a_{ij} X_{i+j} & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor, \ i < j \leq n-2-i. \end{cases}$$

En efecto, en los casos $p = 1$ y $p = 2$, el vector $Y_0 \notin C^1\mathfrak{g}$. $\square$

2.3.3 Álgebras 1-graduadas

Entre las álgebras de tipo $\{3, 1, 1 \ldots, 1\}$ están $L_{n-1} \oplus \mathbf{C}$ y $Q_{n-1} \oplus \mathbf{C}$, que puede verse directamente que son p-graduadas, para cualquier índice $1 \leq p \leq n-2$. Podemos usar el segundo resultado expresado en la nota anterior para probar que son las únicas álgebras 1-graduadas que existen.

Se tiene el siguiente resultado de clasificación:

Teorema 2.21 *Si el álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1)}$, entonces*

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} L_{n-1} \oplus \mathbf{C} & \text{si} \quad n = \dot{2}, \\ L_{n-1} \oplus \mathbf{C} \quad \text{ó} \quad Q_{n-1} \oplus \mathbf{C} & \text{si} \quad n \neq \dot{2}. \end{cases}$$

Demostración. Sea $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$ una base adaptada de $\mathfrak{g}$. Si consideramos la relación de Jacobi $J(X_0, Y_0, X_i) = 0$, siendo $1 \leq i \leq n-4$, que se expresa

$$[X_0, [Y_0, X_i]] + [Y_0, [X_i, X_0]] + [X_i, [X_0, Y_0]] = 0,$$

y sustituimos los corchetes interiores por su valor, según la Proposición 2.19, se obtiene

$$[X_0, a_i X_{i+1}] + [Y_0, -X_{i+1}] + [X_i, 0] = 0,$$

de donde se deduce

$$(a_i - a_{i+1}) X_{i+2} = 0.$$

Haciendo variar i desde 1 hasta $n-4$, tenemos

$$a_{n-3} = a_{n-4} = \cdots = a_2 = a_1$$

y el álgebra $\mathfrak{g}$ viene expresada, en la base adaptada, como

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_i] = a_1 X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{ij} X_{i+j} & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor, \ i < j \leq n-2-i. \end{cases}$$

Si se realiza el cambio de base definido por las relaciones

$$\begin{cases} Y_0' = Y_0 - a_1 X_0, \\ X_i' = X_i \quad 0 \leq i \leq n-2, \end{cases}$$

se puede suponer que $a_1 = 0$. Se tiene, entonces, que el álgebra viene expresada como

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{ij} X_{i+j} & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor, \ i < j \leq n-2-i; \end{cases}$$

luego se verifica que $Y_0 \notin C^1\mathfrak{g}$ y, además, $Y_0 \in \operatorname{cen}\mathfrak{g}$, lo que prueba que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \ < Y_0 >,$$

siendo $\mathfrak{g}'$ el álgebra $< X_0, X_1, \ldots, X_{n-2} >$. Pero en $\mathfrak{g}'$ el vector X_0 tiene sucesión característica $c(X_0) = (n-2, 1)$, así $\mathfrak{g}'$ es un álgebra de Lie filiforme de dimensión $n-1$ graduada naturalmente ya que

$$\mathfrak{g}' = \bigoplus \frac{\mathfrak{g}_i}{< Y_0 >}$$

y la restricción de la 1-graduación a los cocientes prueba

$$\left[\frac{\mathfrak{g}_i}{< Y_0 >}, \frac{\mathfrak{g}_j}{< Y_0 >}\right] \subset \frac{\mathfrak{g}_{i+j}}{< Y_0 >}, \quad i, j \in \mathbf{Z}.$$

Podemos, en esas condiciones, aplicar el Teorema 2.5 y se obtiene directamente el resultado. $\square$

Como se tiene que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1)}$ es equivalente a $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_1\,\mathfrak{g}$, el teorema anterior indica que las álgebras casifiliformes graduadas naturalmente de tipo $\{3, 1, \ldots, 1\}$ son únicamentes álgebras escindidas con una parte filiforme graduada de dimensión $n-1$ que, según la paridad de la dimensión, queda determinada por las que obtuvo Vergne [30].

Nota 2.22 Diremos, en lo sucesivo, para referirnos a $L_{n-1} \oplus \mathbf{C}$ y $Q_{n-1} \oplus \mathbf{C}$ que son las álgebras *graduadas escindidas* y usaremos la notación

$$\mathfrak{g} = \mathcal{LQ}$$

para indicar que

$$\begin{cases} \mathfrak{g} = L_{n-1} \oplus \mathbf{C} & \text{si } n = \dot{2}, \\ \mathfrak{g} = L_{n-1} \oplus \mathbf{C} \ \text{ ó } \ \mathfrak{g} = Q_{n-1} \oplus \mathbf{C} & \text{si } n \neq \dot{2}. \end{cases}$$

El Teorema 2.21, con la nueva notación, se enunciaría:

Si el álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1)}$, entonces $\mathfrak{g} = \mathcal{LQ}$.

Dado que la definición de álgebra p-graduada, cuando $p > 1$, lo está en términos de una filtración relacionada con la sucesión central descendente mediante inclusión, puede parecer que un álgebra casifiliforme podría ser a la vez graduada de distintos índices. El siguiente teorema muestra que sólo es posible tal resultado para las álgebras graduadas escindidas.

Teorema 2.23 *Si $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie de dimensión n casifiliforme p-graduada y p'-graduada, con $p \neq p'$, entonces existe un álgebra filiforme $\mathfrak{g}'$, de dimensión $n-1$, graduada naturalmente, tal que*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathbf{C}$$

Demostración. Supongamos que $p < p'$. Por la Proposición 2.17 sabemos que existen dos descomposiciones

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_p \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-2},$$

procedente de una p-filtración (S_i), y

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'_1 \oplus \mathfrak{g}'_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}'_p \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}'_{p'} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}'_{n-2},$$

procedente de una p'-filtración (S'_i), tales que si las bases adaptadas son, respectivamente, $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$ y $\left\{X'_0, X'_1, \ldots, X'_{n-2}, Y'_0\right\}$, se tiene que

$$\mathfrak{g}_1 = < X_0, X_1, Y_0 > \quad \text{ó} \quad \mathfrak{g}_p = < X_p, Y_0 >$$

y

$$\mathfrak{g}'_{p'} = < X'_{p'}, Y'_0 > .$$

Supongamos $p > 1$.

Como $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$, se tiene que $Y_0 \notin [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]$ para todo $i, j \in \mathbf{Z}$ que cumplan $2 \leq i + j \neq p$. Si existen i, j, con $i + j = p$, tales que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \mathfrak{g}_p$, entonces existen $X \in C^{i-1}\mathfrak{g}$, $Y \in C^{j-1}\mathfrak{g}$ de forma que $[X, Y] = Y_0$, por tanto se tiene

$$\dim \left(\frac{C^{p-1}\mathfrak{g}}{C^p\mathfrak{g}} \right) = 2;$$

como $p < p'$ y los subespacios $S_i = C^{i-1}\mathfrak{g}$, para $p+1 \leq i$, tiene que ser

$$\dim\left(\frac{C^{p'-1}\mathfrak{g}}{C^{p'}\mathfrak{g}}\right) = 1.$$

Luego, si i, j son tales que $i + j = p'$, será

$$[\mathfrak{g}'_i, \mathfrak{g}'_j] =< X'_{p'} >\subset \mathfrak{g}_{p'} =< X'_{p'}, Y'_0 >;$$

pero eso significa que $Y'_0 \notin C^1\mathfrak{g}$ y entonces $\mathfrak{g}$ tiene que ser un álgebra de tipo $\{3, 1, 1 \ldots, 1\}$, lo que contradice que la dimensión de $C^{p-1}\mathfrak{g}/C^p\mathfrak{g}$ sea 2. Luego no puede ser $p \neq 1$ y el álgebra es 1-graduada, por lo que el Teorema 2.21 nos garantiza que $\mathfrak{g} = \mathcal{LQ}$ y se se tiene $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathbb{C}$, donde $\mathfrak{g}' = L_{n-1}$ ó $\mathfrak{g}' = Q_{n-1}$.
□

Podemos utilizar la determinación de las álgebras filiformes graduadas del Teorema 2.5 para precisar, como corolario, las álgebras casifiliformes que pueden admitir dos p-graduaciones distintas.

Corolario 2.24 *Las únicas álgebras de Lie casifiliformes de dimensión n que son simultáneamente p-graduadas de índices distintos son:*

1. *Si $n = \dot{2}$, el álgebra $L_{n-1} \oplus \mathbb{C}$.*
2. *Si $n \neq \dot{2}$, las álgebras $L_{n-1} \oplus \mathbb{C}$ y $Q_{n-1} \oplus \mathbb{C}$.*

Demostración. En efecto, si el álgebra $\mathfrak{g} = \mathcal{LQ}$, es claro que $\mathfrak{g}$ está graduada para cualquier índice, ya que Y_0 cen $\mathfrak{g}$; por tanto del Teorema 2.23 se tiene la equivalencia

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)} = \mathfrak{g}_{(n,p')}, \text{ con } p \neq p' \iff \mathfrak{g} = \mathcal{LQ}.$$

Queda claro entonces que la hipotética situación que planteamos en el comentario de la página 57 no puede darse, como destacamos en la siguiente proposición.

Proposición 2.25 *Si un álgebra* $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_q\,\mathfrak{g}$ *es de tipo* $\{2, 1, \ldots, 1\}$, *no puede obtenerse una p-filtración para la que* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$ *con* $p > q$.

Demostración. En efecto, tenemos $q \neq 1$ y $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_q\,\mathfrak{g}$. Si se obtuviera $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$ significaría que el álgebra es q-graduada, según la Proposición 2.16 y p-graduada de índices $q \neq p$. Según el Corolario 2.24, tendría que ser $\mathfrak{g} = \mathcal{L}Q$ y se contradice con el tipo supuesto del álgebra. □

Sería bueno dejar constancia de que hemos encontrado un invariante de las álgebras p-graduadas no escindidas.

Proposición 2.26 Exceptuando las álgebras graduadas escindidas, el índice de un álgebra casifiliforme p-graduada es un invariante.

Demostración. En efecto, sólo estamos diciendo que si $\mathfrak{g} \neq \mathcal{L}Q$ y $p \neq p'$, no puede ser $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p')}$. □

Cuando el índice de un álgebra casifiliforme p-graduada es $p = n - 2$ y el álgebra está graduada naturalmente, entonces la filtración natural coincide con la $(n-2)$-filtración, si el vector Y_0 "no ha sido llevado" desde $C^0\mathfrak{g}$. Como se ha observado en la Nota 2.20, el vector Y_0 es un elemento central en las álgebras casifiliformes $(n-2)$-graduadas. Ello permite asegurar que para éste índice, cuando la dimensión de la subálgebra derivada sea $n - 3$, las únicas álgebras graduadas naturalmente también son las graduadas escindidas.

Proposición 2.27 *Si el álgebra* $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_{(n-2)}\,\mathfrak{g}$ *tiene* $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n - 3$, *entonces* $\mathfrak{g} = \mathcal{L}Q$.

Demostración. Si $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_{(n-2)}\,\mathfrak{g}$, la Proposición 2.16 nos dice que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,n-2)}$. Entonces, tenemos $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n - 3$ y el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,n-2)}$. Puede verse en la Nota 2.20 que Y_0 es central y, por otra parte, Y_0 no puede estar en $C^1\mathfrak{g}$, ya que

$C^1\mathfrak{g}$ contiene a los $n-3$ vectores $\{X_2, X_3, \dots, X_{n-2}\}$. Se tiene, entonces, que la sucesión central descendente es una 1-filtración de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1)}$, luego

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,n-2)} = \mathfrak{g}_{(n,1)}$$

y el Corolario 2.24 impide que los índices de la graduación sean distintos, excepto en el caso de ser $\mathfrak{g} = \mathcal{L}\mathcal{Q}$. □

La dimensión de la subálgebra derivada nos ha determinado fácilmente las álgebras $(n-2)$-graduadas que eran escindidas. La clave es el vector Y_0, ya que cuando se tiene $Y_0 \in C^1\mathfrak{g}$, entonces se tiene $Y_0 \in C^{p-1}\mathfrak{g}$ y la filtración natural y la p-filtración son la misma. Ello permite dar una condición necesaria fácil para que un álgebra sea simultáneamente graduada y p-graduada, cuando no es escindida.

Proposición 2.28 *Sea el álgebra* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$ *tal que* $\mathfrak{g} \neq \mathcal{L}\mathcal{Q}$. *Si* $\mathfrak{g}$ *está graduada naturalmente, entonces* $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n-2$.

Demostración. Sea el álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$ graduada naturalmente. Entonces se tiene que $\mathfrak{g} = \operatorname{gr}_q \mathfrak{g}$ y el Teorema 2.21 nos dice que $p \neq 1$, ya que las únicas álgebras 1-graduadas son $\mathfrak{g} = \mathcal{L}\mathcal{Q}$. Por tanto, se tiene $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$, $\mathfrak{g} = \operatorname{gr}_q \mathfrak{g}$ y $q > 1$ y la Proposición 2.25 nos dice que tiene que ser $q = p$. Entonces $\mathfrak{g} = \operatorname{gr}_p \mathfrak{g}$ y $p > 1$, luego

$$\dim\left(\frac{C^{p-1}\mathfrak{g}}{C^p\mathfrak{g}}\right) = 2$$

y

$$\dim\left(\frac{C^0\mathfrak{g}}{C^1\mathfrak{g}}\right) = 2,$$

con lo que se verifica que $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n-2$. □

Obsérvese que, por ahora, pudiera darse el caso de ser $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$ y $\dim(C^{q-1}\mathfrak{g}/C^q\mathfrak{g}) = 2$, para algún $2 < q < p$. Entonces, se tendría $\mathfrak{g} \neq \operatorname{gr}_p \mathfrak{g}$ y

$\dim(C^1\mathfrak{g}) = n-2$, pero la p-filtración, obviamente, no sería la filtración natural. Veremos más adelante, que también tal situación es imposible y se verifica el recíproco de la proposición anterior, es decir: si un álgebra p-graduada no está graduada naturalmente, tiene que ser precisamente de tipo $\{3,1,1,\ldots,1\}$ (ver Proposición 2.35).

Podemos precisar ahora que, cuando la p-filtración no coincide con la filtración natural, las álgebras graduadas escindidas son las únicas álgebras simultáneamente p-graduadas y graduadas naturalmente, lo que damos en forma de caracterización.

Proposición 2.29 *Una condición necesaria y suficiente para que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$ sea un álgebra graduada naturalmente es*

$$\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g} \quad \text{ó} \quad \mathfrak{g} = \mathcal{L}\mathcal{Q}.$$

Demostración. Como $\mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g}$, $L_{n-1} \oplus \mathbf{C}$ y $Q_{n-1} \oplus \mathbf{C}$, son álgebras graduadas naturalmente, que la condición es suficiente es evidente.

Veamos que la disyunción es condición necesaria para que si admitimos $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$ se tenga $\mathfrak{g}$ graduada naturalmente. Distinguiremos tres casos según los valores del índice de la graduación.

Caso $p = 1$.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1)}$, entonces el Teorema 2.21 nos dice que ambas afirmaciones en la disyunción son ciertas, es decir

$$\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_1\,\mathfrak{g} \quad \text{y} \quad \mathfrak{g} = \mathcal{L}\mathcal{Q}.$$

Caso $p = n-2$.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,n-2)}$, entonces la Proposición 2.27 nos dice que cuando $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n-3$ se tiene $\mathfrak{g} = \mathcal{L}\mathcal{Q}$. Si $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n-2$ y está graduada naturalmente se tiene

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,n-2)}$ y $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_q\,\mathfrak{g}$ para algún $q \neq 1$, luego la Proposición 2.25 nos implica que $q = n - 2$ y se tiene

$$\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_{(n-2)}\,\mathfrak{g}.$$

Caso $1 < p < n - 2$.

Si el álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$, con $1 < p < n - 2$, está graduada naturalmente y $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_q\,\mathfrak{g}$, entonces si $q = 1$ el Teorema 2.21 nos dice que $\mathfrak{g} = \mathcal{L}\mathcal{Q}$. En otro caso tenemos $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$, $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_q\,\mathfrak{g}$ y $q \neq 1$; nuevamente la Proposición 2.25 nos implica que $q = p$ y se tiene

$$\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g}. \qquad \square$$

Por tanto, si tenemos $1 < p < n - 2$ y el subespacio $C^{p-1}\mathfrak{g}/C^p\mathfrak{g}$ tiene dimensión 1, p-graduada significa no graduada naturalmente. Veremos posteriormente, haciendo uso de nuevos resultados en la estructura que tienen las álgebras p-graduadas, cómo se podrá ser cada vez más preciso.

2.4 Estructura de las álgebras p-graduadas

En esta sección vamos a obtener algunos resultados que nos van a facilitar la determinación de las álgebras p-graduadas. De hecho, nos van a permitir reducir el número de constantes de estructura que definen el álgebra en una base adaptada y determinar, de forma precisa, una caracterización de las álgebras $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$ para las que $\mathfrak{g} \neq \mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g}$. Presentaremos también, en esta sección, ejemplos de álgebras casifiliformes p-graduadas, no escindidas, a las que nos referiremos posteriormente.

2.4.1 Los casos $p = \dot{2}$ y $p \neq \dot{2}$

El argumento utilizado en la prueba del Teorema 2.21, como caso particular en el estudio de las álgebras casifiliformes 1-graduadas, lo podemos aplicar a cualquier tipo de p-graduación.

Sea $\mathfrak{g}$ es un álgebra p-graduada de dimensión n, con $p > 1$. Entonces, en una base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$, según la Proposición 2.19, se tiene

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_i] = a_i X_{i+p} & 1 \leq i \leq n-2-p \quad (p \leq n-3), \\ [X_i, X_j] = a_{ij} X_{i+j} & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor, \ i < j \leq n-2-i, j \neq p-i; \\ [X_i, X_{p-i}] = a_{ip-i} X_p + b_i Y_0 & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor \quad (p \geq 3). \end{cases}$$

Y podemos asegurar el siguiente resultado:

Lema 2.30 *Cualquiera que sea el índice p de la graduación, $2 \leq p \leq n-3$, se verifica que*

$$a_i = a_1, \qquad 1 \leq i \leq n-2-p.$$

Demostración. En efecto; si $p = n-3$, sólo existe a_1 y no hay nada que demostrar. Sea p tal que $2 \leq p \leq n-3$. De la relación de Jacobi $J(X_0, Y_0, X_i) = 0$, cuando $1 \leq i \leq n-3-p$, se obtiene

$$(a_i - a_{i+1}) X_{i+p+1} = 0;$$

haciendo variar i entre 1 y $n-3-p$ la conclusión es inmediata. □

Veamos ahora que también hay una relación entre las constantes b_i y podemos, en el peor de los casos, reducirlas a solo una. En adelante usaremos la notación $a_{i,j}$ para referirnos a la constante a_{ij}, cuando la complejidad en la expresión de los enteros i, j pueda inducirnos a error.

Lema 2.31 *Cualquiera que sea el índice p de la graduación, $3 \leq p \leq n-2$, se verifica que*

$$b_i = (-1)^{i-1}\, b_1, \qquad 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor .$$

Demostración. De nuevo podemos observar que si $\lfloor (p-1)/2 \rfloor = 1$, sólo existe b_1. Sea p tal que $\lfloor (p-1)/2 \rfloor \geq 2$. Tomando i de modo que $1 \leq i \leq \lfloor (p-1)/2 \rfloor - 1$, se verifican las desigualdades

$$i < i+1 < p-1-i \leq n-4$$

y puede considerarse la relación de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{p-1-i}) = 0$, de la que se obtiene directamente

$$[X_0, a_{i,p-1-i}\, X_{p-1}] + [X_i, -X_{p-i}] + [X_{p-1-i}, X_{i+1}] = 0.$$

Desarrollando, según la ley del álgebra, queda la igualdad

$$a_{i,p-1-i}\, X_p - a_{i,p-i}\, X_p - b_i\, Y_0 - a_{i+1,p-1-i}\, X_p - b_{i+1}\, Y_0 = 0$$

y de ella se deduce que si

$$1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor - 1,$$

entonces

$$\begin{cases} a_{i,p-1-i} - a_{i,p-i} - a_{i+1,p-1-i} = 0, \\ b_i + b_{i+1} = 0. \end{cases}$$

El lema se obtiene, de forma inmediata, cuando en la segunda relación se hace variar i entre 1 y $\lfloor (p-1)/2 \rfloor - 1$. $\square$

Si el índice p de la graduación es par, entonces podemos asegurar más todavía determinando, incluso, el valor de b_1.

Lema 2.32 *Si $p = \dot{2}$, entonces $b_1 = 0$.*

Demostración. Si p es par, entonces

$$\left\lfloor \frac{p-2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor$$

y el producto $[X_i, X_{p-i}]$ está definido, para $i = \lfloor (p-2)/2 \rfloor$, como

$$\left[X_{\frac{p}{2}-1}, X_{\frac{p}{2}+1}\right] = a_{\frac{p}{2}-1,\frac{p}{2}+1}\, X_p + (-1)^{\frac{p}{2}-1} b_1\, Y_0.$$

Considerando la relación de Jacobi $J(X_0, X_{\frac{p}{2}-1}, X_{\frac{p}{2}}) = 0$ y desarrollando, según la ley del álgebra, se obtiene la expresión

$$a_{\frac{p}{2}-1,\frac{p}{2}}\, X_p - a_{\frac{p}{2}-1,\frac{p}{2}+1}\, X_p - (-1)^{\frac{p}{2}-1} b_1\, Y_0 = 0$$

y por tanto

$$\begin{cases} a_{\frac{p}{2}-1,\frac{p}{2}} - a_{\frac{p}{2}-1,\frac{p}{2}+1} = 0, \\ b_1 = 0. \end{cases} \qquad \square$$

Se tiene, a la luz de de los resultados precedentes, que podemos mejorar la estructura de las álgebras p-graduadas que obtuvimos en la Proposición 2.19, respecto de una base adaptada, y expresarla como queda reflejada en el teorema siguiente:

Teorema 2.33 (Estructura de las álgebras p-graduadas) *Toda álgebra de Lie casifiliforme p-graduada de dimensión n, con $2 \leq p \leq n-2$, es isomorfa a un álgebra $\mathfrak{g}$ de alguna de las familias siguientes:*

1. CASO $\quad p = \dot{2}$

Si $p = n-2$:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{ij}\, X_{i+j} & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor,\ i < j \leq n-2-i. \end{cases}$$

Si $2 \leq p \leq n-3$*:*

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_i] = a\, X_{i+p} & 1 \leq i \leq n-2-p, \\ [X_i, X_j] = a_{ij}\, X_{i+j} & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor,\ i < j \leq n-2-i. \end{cases}$$

2. CASO $p \neq \dot{2}$

Si $p = n-2$*:*

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{ij}\, X_{i+j} & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, i < j < n-2-i, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = a_{i\,n-2-i}\, X_{n-2} + (-1)^{i-1}\, b Y_0 & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

Si $3 \leq p \leq n-3$*:*

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_i] = a\, X_{i+p} & 1 \leq i \leq n-2-p, \\ [X_i, X_j] = a_{ij}\, X_{i+j} \quad (i+j \neq p) & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor,\ i < j \leq n-2-i, \\ [X_i, X_{p-i}] = a_{i\,p-i}\, X_p + (-1)^{i-1}\, b Y_0 & 1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}. \end{cases}$$

donde, según el caso, a, b *y las* a_{ij} *son constantes que verifican las condiciones algebraicas obtenidas de las relaciones de Jacobi entre los vectores de la base* $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$.

El Teorema de Estructura (2.33) de las álgebras p-graduadas, junto con el Teorema 2.21, permite expresar de forma más precisa que en la Proposición 2.29, la relación de las álgebras casifiliformes p-graduadas con las graduadas naturalmente.

Proposición 2.34 *Una condición necesaria y suficiente para que* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$ *sea* *un álgebra graduada naturalmente es*

$$\left(p \neq \dot{2} \;\; y \quad \dim(C^1\mathfrak{g}) = n-2\right) \quad \text{ó} \quad \mathfrak{g} = \mathcal{L}Q.$$

Demostración. Supongamos que se verifica la condición dada. Si $\mathfrak{g} = \mathcal{L}Q$, entonces es graduada naturalmente. Por otra parte, si $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$ es una base adaptada del álgebra $\mathfrak{g}$ del Teorema de Estructura (2.33), se tiene que si $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n-2$ y $p \neq 1$ es impar, entonces tiene que ser $Y_0 \in C^{p-1}\mathfrak{g}$ y por tanto la p-filtración coincide con la filtración natural, luego $\mathfrak{g}_{(n,p)} = \mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g}$. Esto completa la prueba de que la condición es suficiente.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$ cuando p es par o cuando p es impar y $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n-3$, de nuevo el Teorema de Estructura garantiza que $Y_0 \notin C^1\mathfrak{g}$; luego si $\mathfrak{g}$ es graduada naturalmente tiene que ser 1-graduada y según el Teorema 2.21 es $\mathfrak{g} = \mathcal{L}Q$, de donde se concluye la necesidad de la condición. □

Obsérvese que cuando p es impar y el álgebra es p-graduada, si se tiene $Y_0 \in C^1\mathfrak{g}$, entonces el Teorema de Estructura (2.33) nos asegura que se tiene $Y_0 \in C^{p-1}\mathfrak{g}$. Tenemos, por tanto, el recíproco de la Proposición 2.28, pudiéndose ahora excluir la hipótesis $\mathfrak{g} = \mathcal{L}Q$ al quedar eliminadas las álgebras graduadas escindidas por la condición de dimensión de la subálgebra derivada.

Proposición 2.35 *Si el álgebra* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$ *tiene* $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n-2$, *entonces* $\mathfrak{g}$ *está graduada naturalmente.*

Demostración. Sea el álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$ con $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n-2$. Entonces tomando una base adaptada de $\mathfrak{g}$ tiene que ser $Y_0 \in C^1\mathfrak{g}$ y no se puede tener $\mathfrak{g} = \mathcal{L}Q$. El Teorema de Estructura (2.33) nos garantiza que p es impar. Entonces como $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$, $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n-2$ y $p \neq \dot{2}$, la Proposición 2.34 nos asegura que el álgebra está graduada naturalmente. □

Los resultados que relacionan las álgebras casifiliformes graduadas naturalmente con las p-graduadas se pueden reunir en uno global que constituye el siguiente teorema de caracterización:

Teorema 2.36 (Caracterización de las álgebras p-graduadas) *Si se tiene un álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$, entonces o bien $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g}$ o bien es un álgebra de tipo $\{3, 1, \ldots, 1\}$ en la que $1 < p < n-2$; y la disyunción es exclusiva.*

Demostración. Sea el álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$. Es claro que las dos condiciones no pueden darse simultáneamente ya que si $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g}$ y $1 < p < n-2$, el tipo del álgebra no puede ser $\{3, 1, \ldots, 1\}$, ya que se tienen $\dim(C^{p-1}\mathfrak{g}/C^p\mathfrak{g}) = 2$ y $\dim(C^0\mathfrak{g}/C^1\mathfrak{g}) = 2$. Probaremos, entonces, que las negaciones de cada una de las afirmaciones de la disyunción conducen a que se verifique la otra.

- $\mathfrak{g} \neq \mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g}$.

Entonces por la Proposición 2.35 se tiene que $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n-3$ y, por tanto, tiene tipo $\{3, 1, 1, \ldots, 1\}$. No puede ser $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1)}$ ni tampoco $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,n-2)}$ porque el Teorema 2.21 y la Proposición 2.27, respectivamente, nos dicen que, en ambos casos, p-graduada equivale a graduada naturalmente y estamos suponiendo $\mathfrak{g} \neq \mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g}$. Entonces, $\mathfrak{g}$ es un álgebra de tipo $\{3, 1, \ldots, 1\}$ y se tiene $1 < p < n-2$.

- $\mathfrak{g}$ no tiene tipo $\{3, 1, \ldots, 1\}$ o no es $1 < p < n-2$.

Si $\mathfrak{g}$ no el tiene tipo exigido, entonces es que $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n-2$, y como es p-graduada, la Proposición 2.35 implica que $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g}$.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de tipo $\{3, 1, \ldots, 1\}$ y no se tiene $1 < p < n-2$, como es p-graduada, de nuevo el Teorema 2.21 y la Proposición 2.27 nos precisan que tiene que ser $\mathfrak{g} = \mathcal{L}\mathcal{Q}$ y, por tanto, $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_1\,\mathfrak{g}$. □

2.4.2 Las álgebras $\mathcal{A}_{(n,p)}, \mathcal{B}_{(n,p)}, \mathcal{C}_{(n,p)}$ y $\mathcal{D}_{(n,p)}$

Estamos en condiciones, ahora, de presentar ejemplos de álgebras p-graduadas no escindidas y que aparecerán en las siguientes secciones.

Definición 2.37 Sean $n \geq 5$ y $2 \leq p < n-2$. Llamaremos $\mathcal{A}_{(n,p)}$ al álgebra

$$\mathcal{A}_{(n,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_i] = X_{i+p} & 1 \leq i \leq n-2-p. \end{cases}$$

Si $n \neq \dot{2}$, designaremos por $\mathcal{B}_{(n,p)}$ al álgebra definida por

$$\mathcal{B}_{(n,p)} \overset{n\neq\dot{2}}{=} \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_i] = X_{i+p} & 1 \leq i \leq n-2-p, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-2} & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

Sean $n \geq 5$ y $3 \leq p \leq n-2$, siendo $p \neq \dot{2}$. Llamaremos $\mathcal{C}_{(n,p)}$ al álgebra

$$\mathcal{C}_{(n,p)} \overset{p\neq\dot{2}}{=} \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{p-i}] = (-1)^{i-1} Y_0 & 1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}. \end{cases}$$

Si $n \neq \dot{2}$ y $3 \leq p \leq n-4$, designaremos por $\mathcal{D}_{(n,p)}$ al álgebra definida por

$$\mathcal{D}_{(n,p)} \overset{p\neq\dot{2},\, n\neq\dot{2}}{=} \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{p-i}] = (-1)^{i-1} Y_0 & 1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-2} & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

Nota 2.38 Es claro, que las álgebras consideradas son casifiliformes y también p-graduadas. Sólo hace falta considerar la base $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$, que es adaptada, y particularizar, en cada caso, las constantes de estructura en el Teorema 2.33; se comprueba, entonces, directamente que se verifican las relaciones de Jacobi en cada una de las álgebras definidas.

Además, se tiene que las álgebras $\mathcal{A}_{(n,p)}$ y $\mathcal{B}_{(n,p)}$ son del tipo $\{3, 1, \ldots, 1\}$, luego según el Teorema 2.36 no son graduadas naturalmente ya que, en ambos casos, $Y_0 \notin$ cen $\mathfrak{g}$ y no pueden ser isomorfas a $L_{n-1} \oplus \mathbf{C}$ ni a $Q_{n-1} \oplus \mathbf{C}$. Por otra parte, $\mathcal{C}_{(n,p)}$ y $\mathcal{D}_{(n,p)}$ sí son álgebras graduadas naturalmente.

Las álgebras $L_4 \oplus \mathbf{C}$, $\mathcal{A}_{(5,2)}$ y $\mathcal{C}_{(5,3)}$ son álgebras casifiliformes, de dimensión 5, p-graduadas de índices 1, 2 y 3, respectivamente. Veamos cómo éstas son las únicas álgebras p-graduadas de tal dimensión.

Ejemplo 2.39 Álgebras p-graduadas de dimensión 5.

Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(5,p)}$ y $\{X_0, X_1, X_2, X_3, Y_0\}$ una base adaptada. Pueden ser consideradas las graduaciones de índices $p = 1$, $p = 2$ y $p = 3$.

- Si $p = 1$, entonces el Teorema 2.21 nos dice que

$$\mathfrak{g} = L_4 \oplus \mathbf{C} \quad \text{ó} \quad \mathfrak{g} = Q_4 \oplus \mathbf{C}.$$

- Si $p = 2$, se tiene

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_1] = X_2 \\ [X_0, X_2] = X_3 \\ [Y_0, X_1] = a\, X_3 \\ [X_1, X_2] = a_{12}\, X_3 \end{cases}$$

ya que se verifican trivialmente las relaciones de Jacobi. Si se realiza el cambio de bases dado por

$$\begin{cases} Y_0' = Y_0, \\ X_1' = X_1 - a_{12}\,X_0, \\ X_i' = X_i, \quad i \neq 1, \end{cases}$$

se puede suponer $a_{12} = 0$ y, por tanto, tenemos

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_1] = X_2 \\ [X_0, X_2] = X_3 \\ [Y_0, X_1] = a\,X_3 \end{cases}.$$

Puede ser $a = 0$, en cuyo caso se tendría

$$\mathfrak{g} = L_4 \oplus \mathbf{C}.$$

Si $a \neq 0$, el cambio de bases

$$\begin{cases} Y_0' = \frac{1}{a}\,Y_0, \\ X_i' = X_i, \end{cases}$$

nos permite suponer $a = 1$ y tenemos

$$\mathfrak{g} = \mathcal{A}_{(5,2)} = \begin{cases} [X_0, X_1] = X_2 \\ [X_0, X_2] = X_3 \\ [Y_0, X_1] = X_3 \end{cases}.$$

– Si $p = 3$ se tiene que

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_1] = X_2 \\ [X_0, X_2] = X_3 \\ [X_1, X_2] = a_{12}\,X_3 + b\,Y_0 \end{cases}$$

al verificarse trivialmente las relaciones de Jacobi. El primer cambio de bases del caso $p = 2$ permite, también en este caso, suponer $a_{12} = 0$ y, por tanto, tenemos

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_1] = X_2 \\ [X_0, X_2] = X_3 \\ [X_1, X_2] = b\,Y_0 \end{cases}.$$

Si se verifica $b = 0$, se tendría

$$\mathfrak{g} = L_4 \oplus \mathbf{C}.$$

En el caso de ser $b \neq 0$, el cambio de bases

$$\begin{cases} Y_0' = bY_0, \\ X_i' = X_i, \end{cases}$$

nos permite suponer $b = 1$ y tenemos

$$\mathfrak{g} = \mathcal{C}_{(5,3)} = \begin{cases} [X_0, X_1] = X_2 \\ [X_0, X_2] = X_3 \\ [X_1, X_2] = Y_0 \end{cases}.$$

Como quiera L_4 y Q_4 son isomorfas (L_n y Q_n no son isomorfas para dimensiones mayores), se tiene así que un álgebra de Lie casifiliforme p-graduada de dimensión 5 es $L_4 \oplus \mathbf{C}$, $\mathcal{A}_{(5,2)}$ ó $\mathcal{C}_{(5,3)}$ que son no isomorfas al tener índices de p-graduación distintos.

Podemos considerar simultáneamente los distintos tipos de entre las álgebras p-graduadas $\mathcal{A}_{(n,p)}$, $\mathcal{B}_{(n,p)}$, $\mathcal{C}_{(n,p)}$ y $\mathcal{D}_{(n,p)}$ que la dimensión n del álgebra y el índice p de la graduación permita; si $n \geq 6$, podemos asegurar que no son isomorfas.

Teorema 2.40 *Si $n \geq 6$ y $1 \leq p \leq n-2$, las álgebras p-graduadas $\mathcal{A}_{(n,p)}$, $\mathcal{B}_{(n,p)}$, $\mathcal{C}_{(n,p)}$ y $\mathcal{D}_{(n,p)}$, así como $L_{n-1} \oplus \mathbf{C}$ y $Q_{n-1} \oplus \mathbf{C}$, que puedan ser consideradas, según los distintos valores y paridades de n y p, son no isomorfas entre sí.*

Demostración. Puede verse en la siguiente tabla que siempre se pueden encontrar dos invariantes distintos, de entre los que figuran, para cada cualesquiera dos álgebras que puedan ser consideradas simultáneamente.

$\mathfrak{g}$	$\dim(C^1\mathfrak{g})$	$\dim(\operatorname{cen}\mathfrak{g})$	$\dim(D^2\mathfrak{g})$
$L_{n-1}\oplus \mathbb{C}$	$n-3$	2	0
$Q_{n-1}\oplus \mathbb{C}$	$n-3$	2	1
$\mathcal{A}_{(n,p)}$	$n-3$	1	0
$\mathcal{B}_{(n,p)}$ $(n\neq 2)$	$n-3$	1	1
$\mathcal{C}_{(n,p)}$ $(p\neq 2)$	$n-2$	2	0 $(p=3)$ ó 1 $(p\geq 5)$
$\mathcal{D}_{(n,p)}$ $(n\neq 2,\, p\neq 2)$	$n-2$	2	1 $(p=3)$ ó 2 $(p\geq 5)$

□

2.5 Álgebras p-graduadas de tipo $\{3,1,1,\ldots,1\}$

En el Teorema de Caracterización (2.36) hemos obtenido que, si se exceptúan $L_{n-1}\oplus\mathbb{C}$ y $Q_{n-1}\oplus\mathbb{C}$, las únicas álgebras p-graduadas y no graduadas naturalmente tienen el tipo $\{3,1,\ldots,1\}$ y el índice de la graduación verifica $1<p<n-2$. El objeto de esta sección es estudiarlas.

Es decir, vamos a estudiar y determinar cuáles son las álgebras casifiliformes que admiten una descomposición

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_{n-2}$$

en la que se tiene

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{(n,p)}\neq \operatorname{gr}_p\mathfrak{g}.$$

Éstas serán las únicas algebras p-graduadas que se consideren en toda la sección y a ellas nos estaremos refiriendo al decir que $\mathfrak{g}$ es o puede ser p-graduada.

La sucesión característica nos ha permitido encontrar una forma fácil de caracterizarlas: la dimensión del subespacio $\mathfrak{g}_1$ es 3 y sólo pueden ser obtenidas desplazando un vector, que no está en la subálgebra derivada de $\mathfrak{g}$ y elegido de forma conveniente, a alguno de los subespacios $\mathfrak{g}_i$, con $2 \leq i < n-2$. El desplazamiento se produce a través de lo que hemos llamado una p-filtración.

Si para algún $2 \leq p \leq n-2$ se tiene la descomposición de $\mathfrak{g}$, hemos obtenido en la Proposición 2.26 que ésta es única en el sentido de que no existe otro posible $p' \neq p$ que produzca una descomposición similar.

En la sección anterior hemos presentado una familia finita de álgebras casifiliformes p-graduadas, para cada dimensión; a saber:
si $n = \dot{2}$,

$$\left\{\mathcal{A}_{(n,p)} :\ 2 \leq p < n-2\right\};$$

si $n \neq \dot{2}$,

$$\left\{\mathcal{A}_{(n,p)} :\ 2 \leq p < n-2\right\} \bigcup \left\{\mathcal{B}_{(n,p)} :\ 2 \leq p < n-2\right\}.$$

Resulta, entonces, que el conjunto de álgebras casifiliformes p-graduadas es, al menos, una familia localmente finita para la dimensión.

Probaremos que un álgebra casifiliforme p-graduada es isomorfa a una $\mathcal{A}_{(n,p)}$ ó $\mathcal{B}_{(n,p)}$, de la familia correspondiente a su dimensión.

Teorema 2.41 *Si $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$ es una base adaptada de un álgebra p-graduada $\mathfrak{g}$, con $\mathfrak{g} \neq \mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g}$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que*

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_i] = X_{i+p} & 1 \leq i \leq n-2-p, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\,\alpha X_{n-2} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-3}{2}, \quad \text{con } \alpha = 0 \text{ si } n = \dot{2}. \end{cases}$$

Demostración. Si el álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$ es $\mathfrak{g} \neq \mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g}$, según el Teorema 2.36, tiene que ser con $2 \le p \le n-3$ y $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n-3$. Luego se debe tener $Y_0 \notin C^1\mathfrak{g}$; por otra parte, no puede ser $Y_0 \in \operatorname{cen}\mathfrak{g}$ ya que se tendría $\mathfrak{g} = \mathcal{L}\mathcal{Q}$ y sería $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1)}$ y $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_1\,\mathfrak{g}$. El Teorema 2.33 nos dice, entonces, que el álgebra $\mathfrak{g}$ tiene que ser de la familia

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le n-3, \\ [Y_0, X_i] = a\, X_{i+p} & 1 \le i \le n-2-p, \\ [X_i, X_j] = a_{ij}\, X_{i+j} & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor,\ i < j \le n-2-i, \end{cases}$$

con $a \neq 0$. El cambio de bases

$$\begin{cases} Y_0' = a^{-1}\, Y_0, \\ X_i' = X_i, \quad 0 \le i \le n-2, \end{cases}$$

nos permite suponer $a = 1$. Tenemos, entonces, que

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le n-3, \\ [Y_0, X_i] = X_{i+p} & 1 \le i \le n-2-p, \\ [X_i, X_j] = a_{ij}\, X_{i+j} & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor,\ i < j \le n-2-i. \end{cases}$$

Nos queda probar que los productos

$$[X_i, X_j] = a_{ij}\, X_{i+j} \qquad 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor,\ i < j \le n-2-i,$$

se pueden reducir a

$$[X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\, \alpha\, X_{n-2} \qquad 1 \le i \le \frac{n-3}{2}, \quad \text{con } \alpha = 0 \text{ si } n = \dot{2}.$$

Se hará por inducción sobre la dimensión del álgebra $\mathfrak{g}$. Los primeros casos para considerar son:

- $\dim \mathfrak{g} = 5$.

El ejemplo 2.39 muestra que el único índice a considerar es $p = 2$, en cuyo caso $\mathfrak{g} = \mathcal{A}_{(5,2)}$ y verifica la hipótesis de inducción con $\alpha = 0$.

– $\dim \mathfrak{g} = 6$.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(6,p)}$ y $\mathfrak{g} \neq \mathrm{gr}_p\, \mathfrak{g}$, tiene que ser $p = 2$ ó $p = 3$ y tenemos

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3, \\ [Y_0, X_i] = X_{i+p} & 1 \leq i \leq 4 - p, \\ [X_1, X_j] = a_{1j}\, X_{1+j} & 1 < j \leq 3. \end{cases}$$

De la relación de Jacobi $J(X_0, X_1, X_2) = 0$ se obtiene

$$a_{12} = a_{13} = \alpha$$

y el cambio de bases

$$\begin{cases} Y_0' = Y_0, \\ X_1' = X_1 - \alpha\, X_0, \\ X_i' = X_i, \quad i \neq 1, \end{cases}$$

nos permite suponer $\alpha = 0$, lo que significa que

$$\mathfrak{g} = \mathcal{A}_{(6,2)} \text{ ó } \mathfrak{g} = \mathcal{A}_{(6,3)}$$

y se verifica la hipótesis de inducción.

Supongamos cierto que para toda álgebra de Lie p-graduada, no graduada naturalmente $(2 \leq p \leq n-3)$ y de dimensión n, se tiene

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_i] = X_{i+p} & 1 \leq i \leq n-2-p, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\, \alpha\, X_{n-2} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-3}{2}, \quad \text{con } \alpha = 0 \text{ si } n = \dot{2}. \end{cases}$$

Sea el álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n+1,p)}$, no graduada naturalmente. El Teorema 2.36 nos asegura que tiene que ser $2 \leq p \leq n-2$.

Tenemos que considerar dos casos, dependiendo de la paridad de la dimensión, $n+1$, del álgebra; en cada uno de ellos distinguiremos el caso particular $p=n-2$ debido a que al efectuar un cociente sobre el último subespacio de la graduación no podremos aplicar directamente la hipótesis de inducción.

CASO $n+1 \neq \dot{2}$.

- Sea $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{(n+1,n-2)}$, es decir

$$\mathfrak{g} =< X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-3} > \oplus < X_{n-2}, Y_0 > \oplus < X_{n-1} >,$$

con $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n-2$ y $C^{n-2}\mathfrak{g} =< X_{n-1} >$. Entonces, $\{X_0, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$ es una base adaptada del cociente

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^{n-2}\mathfrak{g}} =< X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-3} > \oplus < X_{n-2}, Y_0 > .$$

Pero, como $\mathfrak{g}/ < X_{n-1} >$ es un álgebra $(n-2)$-graduada de dimensión n, par, con $\dim(C^1(\mathfrak{g}/ < X_{n-1} >)) = n-3$, la Proposición 2.27 nos dice que

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^{n-2}\mathfrak{g}} = L_{n-1} \oplus \mathbf{C}.$$

Y, entonces, tenemos

$$\mathfrak{g}_{(n+1,n-2)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le n-2, \\ [Y_0, X_1] = X_{n-1} & \\ [X_i, X_{n-1-i}] = a_{i,n-1-i} X_{n-1} & 1 \le i \le \dfrac{n-2}{2}. \end{cases}$$

La relación de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-2-i}) = 0$, cuando $1 \le i \le (n-4)/2$, implica

$$a_{i+1,n-1-(i+1)} = -a_{i,n-1-i}$$

y poniendo $a_{1,n-2} = \alpha$ y haciendo variar i entre 1 y $(n-4)/2$, se tiene

$$a_{i,n-1-i} = (-1)^{i-1}\alpha, \quad 1 \le i \le \frac{n-2}{2},$$

por lo que queda probado

$$\mathfrak{g}_{(n+1,n-2)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2, \\ [Y_0, X_1] = X_{n-1} & \\ [X_i, X_{n-1-i}] = (-1)^{i-1}\,\alpha\, X_{n-1} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-2}{2}, \end{cases}$$

cuando $n+1$ es impar.

- Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n+1,p)}$, con $2 \leq p \leq n-3$, es decir

$$\mathfrak{g} =< X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_p, Y_0 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} > \oplus < X_{n-1} >,$$

con $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n-2$ y $C^{n-2}\mathfrak{g} =< X_{n-1} >$. Entonces, de nuevo se tiene que $\{X_0, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$ es una base adaptada del cociente

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^{n-2}\mathfrak{g}} =< X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_p, Y_0 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} > .$$

Pero, como $\mathfrak{g}/ < X_{n-1} >$ es un álgebra p-graduada, no graduada naturalmente, de dimensión n, par, la hipótesis de inducción nos dice que

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^{n-2}\mathfrak{g}} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_i] = X_{i+p} & 1 \leq i \leq n-2-p. \end{cases}$$

Y, entonces, tenemos

$$\mathfrak{g}_{(n+1,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2, \\ [Y_0, X_i] = X_{i+p} & 1 \leq i \leq n-1-p, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = a_{i,n-1-i}\, X_{n-1} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-2}{2}. \end{cases}$$

De nuevo, poniendo $a_{1,n-2} = \alpha$, de las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-2-i}) = 0$, cuando $1 \leq i \leq (n-4)/2$, se obtiene

$$a_{i,n-1-i} = (-1)^{i-1}\,\alpha, \quad 1 \leq i \leq \frac{n-2}{2},$$

y queda probado

$$\mathfrak{g}_{(n+1,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2, \\ [Y_0, X_i] = X_{i+p} & 1 \leq i \leq n-1-p, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = (-1)^{i-1}\,\alpha\, X_{n-1} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-2}{2}, \end{cases}$$

para $2 \leq p \leq n-3$, cuando $n+1$ es impar.

CASO $n+1=\dot{2}$.

- Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n+1,n-2)}$, es decir

$$\mathfrak{g} =< X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-3} > \oplus < X_{n-2}, Y_0 > \oplus < X_{n-1} >,$$

con $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n-2$ y $C^{n-2}\mathfrak{g} =< X_{n-1} >$. Entonces, $\{X_0, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$ es una base adaptada del cociente

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^{n-2}\mathfrak{g}} =< X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-3} > \oplus < X_{n-2}, Y_0 > .$$

Pero, como $\mathfrak{g}/< X_{n-1} >$ es un álgebra $(n-2)$-graduada de dimensión n, impar, y $\dim(C^1(\mathfrak{g}/< X_{n-1} >)) = n-3$, la Proposición 2.27 nos dice que

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^{n-2}\mathfrak{g}} = L_{n-1} \oplus \mathbf{C} \quad \text{ó} \quad \frac{\mathfrak{g}}{C^{n-2}\mathfrak{g}} = Q_{n-1} \oplus \mathbf{C},$$

que podemos poner en la forma

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^{n-2}\mathfrak{g}} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\,\alpha\, X_{n-2} & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \quad \alpha = 0 \text{ ó } \alpha = 1. \end{cases}$$

Y, entonces, tenemos

$$\mathfrak{g}_{(n+1,n-2)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2, \\ [Y_0, X_1] = X_{n-1} & \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\,\alpha\, X_{n-2} & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \quad \alpha = 0 \text{ ó } \alpha = 1, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = a_{i,n-1-i}\, X_{n-1} & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor = \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

La relación de Jacobi $J(X_0, X_{\frac{n-3}{2}}, X_{\frac{n-1}{2}}) = 0$, nos produce la igualdad

$$a_{\frac{n-3}{2},\frac{n+1}{2}} = (-1)^{\frac{n-5}{2}}\,\alpha$$

y la relación de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-2-i}) = 0$, cuando $1 \leq i \leq (n-5)/2$, implica

$$a_{i,n-1-i} = (-1)^{i-1}\,\alpha - a_{i+1,n-1-(i+1)}.$$

Haciendo variar i desde $(n-5)/2$ hasta 1, se tiene

$$\begin{array}{lcccl}
a_{\frac{n-5}{2},\frac{n+3}{2}} & = & (-1)^{\frac{n-7}{2}}\,\alpha - a_{\frac{n-3}{2},\frac{n+1}{2}} & = & (-1)^{\frac{n-7}{2}}\,2\,\alpha, \\
a_{\frac{n-7}{2},\frac{n+5}{2}} & = & (-1)^{\frac{n-9}{2}}\,\alpha - a_{\frac{n-5}{2},\frac{n+3}{2}} & = & (-1)^{\frac{n-9}{2}}\,3\,\alpha, \\
 & & \vdots & & \\
a_{i,n-1-i} & = & (-1)^{i-1}\,\alpha - a_{i+1,n-1-(i+1)} & = & (-1)^{i-1}\,\dfrac{n-1-2i}{2}\,\alpha, \\
 & & \vdots & & \\
a_{3,n-4} & = & (-1)^{2}\,\alpha - a_{4,n-5} & = & (-1)^{2}\,\dfrac{n-7}{2}\,\alpha, \\
a_{2,n-3} & = & (-1)^{1}\,\alpha - a_{3,n-4} & = & (-1)^{1}\,\dfrac{n-5}{2}\,\alpha, \\
a_{1,n-2} & = & (-1)^{0}\,\alpha - a_{2,n-3} & = & (-1)^{0}\,\dfrac{n-3}{2}\,\alpha.
\end{array}$$

De la relación de Jacobi $J(X_1, X_{\frac{n-3}{2}}, X_{\frac{n-1}{2}}) = 0$, se obtiene la igualdad

$$(-1)^{\frac{n-5}{2}}\,\frac{n-3}{2}\,\alpha^2 = 0$$

y por tanto $\alpha = 0$, por lo que se prueba

$$\mathfrak{g}_{(n+1,n-2)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2, \\ [Y_0, X_1] = X_{n-1} & \end{cases}$$

cuando $n+1$ es par.

- Sea $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{(n+1,p)}$, con $2\le p\le n-3$, es decir

$$\mathfrak{g}=<X_0,X_1>\oplus<X_2>\oplus\cdots\oplus<X_p,Y_0>\oplus\cdots\oplus<X_{n-2}>\oplus<X_{n-1}>,$$

con $\dim(C^1\mathfrak{g})=n-2$ y $C^{n-2}\mathfrak{g}=<X_{n-1}>$. Entonces $\{X_0,\ldots,X_{n-2},Y_0\}$ es, de nuevo, una base adaptada del cociente

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^{n-2}\mathfrak{g}}=<X_0,X_1>\oplus<X_2>\oplus\cdots\oplus<X_p,Y_0>\oplus\cdots\oplus<X_{n-2}>.$$

Pero, como $\mathfrak{g}/<X_{n-1}>$ es un álgebra p-graduada de dimensión n, impar, podemos aplicar la hipótesis de inducción y será

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^{n-2}\mathfrak{g}}=\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le n-3,\\ [Y_0,X_i]=X_{i+p} & 1\le i\le n-2-p,\\ [X_i,X_{n-2-i}]=(-1)^{i-1}\,\alpha\,X_{n-2} & 1\le i\le \dfrac{n-3}{2}.\end{cases}$$

Y, entonces, tenemos

$$\mathfrak{g}_{(n+1,p)}=\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le n-2,\\ [Y_0,X_i]=X_{i+p} & 1\le i\le n-1-p,\\ [X_i,X_{n-2-i}]=(-1)^{i-1}\,\alpha\,X_{n-2} & 1\le i\le \dfrac{n-3}{2},\\ [X_i,X_{n-1-i}]=a_{i,n-1-i}\,X_{n-1} & 1\le i\le \dfrac{n-2}{2}.\end{cases}$$

Y otra vez las relaciones de Jacobi $J(X_0,X_i,X_{n-2-i})=0$, cuando consideramos $1\le i\le(n-3)/2$, nos permiten expresar

$$a_{i,n-1-i}=(-1)^{i-1}\,\frac{n-1-2i}{2}\,\alpha,\quad 1\le i\le\frac{n-3}{2},$$

y la relación de Jacobi $J(X_1,X_{\frac{n-3}{2}},X_{\frac{n-1}{2}})=0$, obliga a que $\alpha=0$, con lo que queda probado

$$\mathfrak{g}_{(n+1,p)}=\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le n-2,\\ [Y_0,X_i]=X_{i+p} & 1\le i\le n-1-p,\end{cases}$$

para $2 \leq p \leq n-3$, cuando $n+1$ es par.

Así, supuesta cierta la hipótesis de inducción para las álgebras p-graduadas de dimensión n, hemos probado que si un ágebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n+1,p)}$ no está graduada naturalmente, entonces $2 \leq p \leq n-2$ y se tiene

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2, \\ [Y_0, X_i] = X_{i+p} & 1 \leq i \leq n-1-p, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = (-1)^{i-1}\,\alpha\, X_{n-1} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-2}{2}, \quad \text{con } \alpha = 0 \text{ si } n+1 = \dot{2}. \end{cases}$$

lo que concluye la demostración del teorema. □

Corolario 2.42 *Si el álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$ no está graduada naturalmente, se verifica:*

1. *Si $n = \dot{2}$, entonces $\mathfrak{g} = \mathcal{A}_{(n,p)}$.*
2. *Si $n \neq \dot{2}$, entonces $\mathfrak{g} = \mathcal{A}_{(n,p)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathcal{B}_{(n,p)}$.*

Demostración. Se obtiene de forma inmediata del teorema anterior si, cuando $\alpha \neq 0$, se efectúa el cambio de bases

$$\begin{cases} X_0' = X_0, \\ X_i' = \alpha^{-1} X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2, \\ Y_0' = Y_0. \end{cases}$$

□

La notación para las álgebras casifiliformes 1-graduadas nos ha permitido expresar cómodamente el comportamiento distinto que se tiene cuando la dimensión del álgebra es par o impar. El resultado obtenido en el corolario anterior lo podemos expresar de forma análoga.

Nota 2.43 En lo sucesivo, usaremos la notación

$$\mathfrak{g} = \mathcal{AB}_p$$

para indicar que

$$\begin{cases} \mathfrak{g} = \mathcal{A}_{(n,p)} & \text{si } n = \dot{2}, \\ \mathfrak{g} = \mathcal{A}_{(n,p)} \text{ ó } \mathfrak{g} = \mathcal{B}_{(n,p)}. & \text{si } n \neq \dot{2}. \end{cases}$$

Así, hemos obtenido el siguiente resultado:

Teorema 2.44 *Si un álgebra casifiliforme graduada es*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-2}$$

y $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n-3$, *entonces o se tiene* $\mathfrak{g} = \mathcal{LQ}$ *o, en otro caso, existe un entero* p, *con* $2 \leq p \leq n-3$, *para el que*

$$\mathfrak{g} = \mathcal{AB}_p.$$

Demostración. Se toma una base adaptada del álgebra $\mathfrak{g}$ y si es un álgebra graduada naturalmente el Teorema 2.21 o la Proposición 2.27, según sea el índice 1 ó $n-2$, nos implica que es $\mathfrak{g} = \mathcal{LQ}$. En otro caso, será $\dim \mathfrak{g}_p = 2$ para algún $2 \leq p \leq n-3$ y, por tanto, el álgebra es graduada de índice p; es decir, se tiene $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$, con $\mathfrak{g} \neq \operatorname{gr}_p \mathfrak{g}$ y, entonces, el Corolario 2.42 nos dice que tiene que ser el álgebra $\mathfrak{g} = \mathcal{AB}_p$, □

2.6 Álgebras p-graduadas naturalmente

En el Teorema de Caracterización (2.36) hemos obtenido que, si se exceptúan las álgebras $\mathfrak{g} = \mathcal{LQ}$, entonces las álgebras p-graduadas que son graduadas naturalmente tienen el tipo $\{2, 1, \ldots, 1, 2, \ldots\}$, donde la posición del segundo 2 viene determinada por el índice de la graduación; índice que verifica $3 \leq p \leq n-2$ y $p \neq \dot{2}$. El objeto de esta sección es estudiarlas.

Vamos a estudiar y determinar, por tanto, cuáles son las álgebras casifiliformes que admiten una descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-2}$$

en la que se tiene ahora

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)} = \mathrm{gr}_p\, \mathfrak{g}.$$

Éstas serán las únicas algebras graduadas que se consideren en toda la sección y a ellas nos estaremos refiriendo al decir que $\mathfrak{g}$ es o puede ser p-graduada, aunque a veces para enfatizar recordaremos que son álgebras graduadas naturalmente.

La sucesión característica nos ha permitido caracterizarlas: cuando la dimensión del subespacio $\mathfrak{g}_1 = C^0\mathfrak{g}/C^1\mathfrak{g}$ es 3, el Teorema 2.21 nos proporcionó la solución $\mathfrak{g} = \mathcal{LQ}$. Cuando la dimensión del subespacio $\mathfrak{g}_1$ es 2, según el Teorema 2.36 tiene que ser $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,p)}$, cumpliéndose además la condición $p \neq \dot{2}$. Como se tiene $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_p\, \mathfrak{g}$, la p-filtración coincide con la filtración natural y por tanto se debe tener

$$\dim\left(\frac{C^{p-1}\mathfrak{g}}{C^p\mathfrak{g}}\right) = 2.$$

Entre las álgebras casifiliformes p-graduadas que presentamos en la Subsección 2.4.2 para cada dimensión, estaban las álgebras graduadas naturalmente siguientes:
si $n = \dot{2}$,

$$\left\{\mathcal{C}_{(n,p)} :\ 3 \leq p \leq n-3,\ p \neq \dot{2}\right\};$$

si $n \neq \dot{2}$,

$$\left\{\mathcal{C}_{(n,p)} :\ 3 \leq p \leq n-2,\ p \neq \dot{2}\right\} \bigcup \left\{\mathcal{D}_{(n,p)} :\ 3 \leq p \leq n-4,\ p \neq \dot{2}\right\}.$$

De nuevo el conjunto de álgebras casifiliformes p-graduadas naturalmente es también, como en las estudiadas en la sección anterior, al menos, una familia localmente finita para la dimensión.

Los resultados serán un poco más complicados que en la sección anterior. Probaremos que cuando $3 \leq p \leq n-2$, un álgebra casifiliforme p-graduada naturalmente es isomorfa a $\mathcal{C}_{(n,p)}$ ó $\mathcal{D}_{(n,p)}$, según las condiciones que vienen siendo habituales obtenidas de la paridad de la dimensión del álgebra. Pero en los casos en que el índice sea $p = n-2$, $p = n-3$ ó $p = n-4$, siempre que proceda su consideración por la paridad de la dimensión del álgebra, el comportamiento es anómalo, en el sentido siguiente:

- Si $p = n-2$, sólo existe el álgebra $\mathcal{C}_{(n,n-2)}$, lo que era de esperar, dada la imposiblidad de definir $\mathcal{D}_{(n,n-2)}$ aunque n sea impar.

- Si $p = n-3$, la exclusión de $\mathcal{D}_{(n,n-3)}$, está motivada por el hecho de que n es necesariamente par; aparece, además de $\mathcal{C}_{(n,n-3)}$, un álgebra que se ha denominado terminal y denotado por $\mathcal{T}_{(n,n-3)}$.

- Si $p = n-4$, además de las álgebras $\mathcal{C}_{(n,n-4)}$ y $\mathcal{D}_{(n,n-4)}$ (tiene que ser n impar), también aparece un álgebra terminal $\mathcal{T}_{(n,n-4)}$.

El álgebra $\mathcal{T}_{(n,p)}$, con $p = n-3$ ó $p = n-4$, según la paridad de su dimensión, la hemos llamado terminal porque es consecuencia de que no es posible conseguir una relación de Jacobi que conduzca a $\mathcal{C}_{(n,p)}$ ó $\mathcal{D}_{(n,p)}$, debido a las posiciones finales de los subespacios de la graduación, en los que se encuentra el vector involucrado (por supuesto, el vector Y_0).

Estudiaremos previamente estos casos, $n-4 \leq p \leq n-2$, y probaremos los resultados descritos anteriormente, determinando las álgebras no isomorfas que se obtienen, siempre que las dimensiones sean suficientemente grandes para que puedan ser consideradas.

2.6.1 Álgebras de índice $p = n - 2$

El hecho de que el elemento Y_0, de una base adaptada al álgebra, sea del centro del álgebra provoca que sea especialmente fácil de estudiar este caso. Lógicamente la dimensión n del álgebra que se considera debe ser mayor o igual que 5.

Teorema 2.45 *Si el álgebra* $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_{(n-2)}\,\mathfrak{g}$*, entonces* $\mathfrak{g} = \mathcal{C}_{(n,n-2)}$.

Demostración. Si $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$ es una base adaptada del álgebra $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_{(n-2)}\,\mathfrak{g}$, como se tiene que $\dim(C^{n-3}\mathfrak{g}/C^{n-2}\mathfrak{g}) = 2$, se verifica $Y_0 \in C^1\mathfrak{g}$ y tenemos del Teorema de Estructura (2.33) que el índice $p = n - 2$ es impar y álgebra $\mathfrak{g}$ tiene que ser de la familia

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{ij}\, X_{i+j} & 1 \le i \le \frac{n-3}{2},\ i < j < n-2-i, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = a_{i,n-2-i}\, X_{n-2} + (-1)^{i-1}\, b\, Y_0 & 1 \le i \le \frac{n-3}{2}, \end{cases}$$

con $b \neq 0$. El cambio de bases

$$\begin{cases} Y_0' = b\, Y_0, \\ X_i' = X_i, \quad 0 \le i \le n-2, \end{cases}$$

nos permite suponer $b = 1$. Tenemos, entonces, que $\mathfrak{g}$ viene expresada como

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{ij}\, X_{i+j} & 1 \le i \le \frac{n-3}{2},\ i < j < n-2-i, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = a_{i,n-2-i}\, X_{n-2} + (-1)^{i-1}\, Y_0 & 1 \le i \le \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

Podemos poner

$$\mathfrak{g} = < X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-3} > \oplus < X_{n-2}, Y_0 >$$

con $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n - 2$ y $C^{n-3}\mathfrak{g} = < X_{n-2}, Y_0 >$. Entonces, $\{X_0, \ldots, X_{n-3}\}$ es una base adaptada del cociente

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^{n-3}\mathfrak{g}} = < X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-3} > .$$

Pero, como $\mathfrak{g}/ < X_{n-2} >$ es un álgebra filiforme graduada de dimensión $n-2$, impar, el Teorema 2.5 nos dice que

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^{n-2}\mathfrak{g}} = L_{n-2},$$

y tenemos

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = a_{i,n-2-i}\, X_{n-2} + (-1)^{i-1}\, Y_0 & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

La relación de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-3-i}) = 0$, cuando $1 \leq i \leq (n-5)/2$, implica

$$a_{i+1,n-2-(i+1)} = -a_{i,n-2-i}$$

y poniendo $a_{1,n-3} = \alpha$ y haciendo variar i entre 1 y $(n-5)/2$, se tiene

$$a_{i,n-2-i} = (-1)^{i-1}\,\alpha, \quad 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2},$$

por lo que queda probado

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\,(\alpha\, X_{n-2} + Y_0) & 1 \leq i \leq \dfrac{n-3}{2}. \end{cases}$$

El cambio de bases

$$\begin{cases} Y_0' = \alpha\, X_{n-2} + Y_0, \\ X_i' = X_i, \quad 0 \leq i \leq n-2, \end{cases}$$

nos proporciona finalmente, al ser Y_0 central, que $\mathfrak{g} = \mathcal{C}_{(n,n-2)}$. □

2.6.2 Álgebras de índice $p = n - 3$

Como el índice de la graduación tiene que ser impar y es $p = n-3$, se obliga a que la consideración de este caso suponga que la dimensión del álgebra sea par. El teorema siguiente, donde se define el álgebra terminal $\mathfrak{g} = \mathcal{T}_{(n,n-3)}$, determina las álgebras casifiliformes graduadas de este índice.

Teorema 2.46 *Si el álgebra* $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_{(n-3)}\,\mathfrak{g}$*, con* $n \geq 8$*, entonces* $\mathfrak{g}$ *es una de las dos álgebras no isomorfas* $\mathcal{C}_{(n,n-3)}$ *ó* $\mathcal{T}_{(n,n-3)}$*, siendo el álgebra*

$$\mathcal{T}_{(n,n-3)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_1] = \dfrac{n-4}{2} X_{n-2} & \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1}(X_{n-3} + Y_0) & 1 \leq i \leq \dfrac{n-4}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\dfrac{n-2-2i}{2} X_{n-2} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-4}{2}. \end{cases}$$

Demostración. Si $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$ es una base adaptada del álgebra $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_{(n-3)}\,\mathfrak{g}$, como se tiene que $\dim(C^{n-4}\mathfrak{g}/C^{n-3}\mathfrak{g}) = 2$ y el índice $p = n-3$ es impar, tenemos del Teorema de Estructura (2.33) que el álgebra $\mathfrak{g}$ tiene que ser de la familia

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_1] = a\, X_{n-2} & \\ [X_i, X_j] = a_{ij}\, X_{i+j} \quad (i+j \neq n-3) & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor,\ i < j \leq n-2-i, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = a_{i,n-3-i}\, X_{n-3} + (-1)^{i-1}\, b\, Y_0 & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \end{cases}$$

con $b \neq 0$ y $\lfloor (n-3)/2 \rfloor = (n-4)/2$. El cambio de bases

$$\begin{cases} Y_0' = b\, Y_0, \\ X_i' = X_i, \quad 0 \leq i \leq n-2, \end{cases}$$

nos permite suponer $b = 1$, donde la constante a está denotando ahora el anterior producto ab. Tenemos, entonces, que el álgebra $\mathfrak{g}$ será

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_1] = a\, X_{n-2} & \\ [X_i, X_j] = a_{ij}\, X_{i+j} \quad (i+j \neq n-3) & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2},\ i < j \leq n-2-i, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = a_{i,n-3-i}\, X_{n-3} + (-1)^{i-1}\, Y_0 & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}. \end{cases}$$

La descomposición que produce la graduación será

$$\mathfrak{g} = < X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-3}, Y_0 > \oplus < X_{n-2} >$$

con $\dim(C^{n-4}\mathfrak{g}) = 3$ y $C^{n-3}\mathfrak{g} = < X_{n-2} >$. Entonces, $\{X_0, \ldots, X_{n-3}\}$ es una base adaptada del cociente

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^{n-3}\mathfrak{g}} = < X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-3}, Y_0 >$$

que es un álgebra $(n-3)$-graduada naturalmente de dimensión $n-1$, impar, y con $\dim(C^1(\mathfrak{g}/ < X_{n-3} >)) = n-3$; luego el Teorema 2.45 nos dice que existe un $\alpha \in \mathbf{C}$ tal que

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^{n-3}\mathfrak{g}} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1}(\alpha X_{n-3} + Y_0) & 1 \leq i \leq \dfrac{n-4}{2}. \end{cases}$$

Y tenemos, entonces, el álgebra

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_1] = a\, X_{n-2} & \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1}(\alpha X_{n-3} + Y_0) & 1 \leq i \leq \dfrac{n-4}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = a_{i,n-2-i}\, X_{n-2} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-4}{2}. \end{cases}$$

De las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-3-i}) = 0$, cuando $1 \leq i \leq (n-4)/2$ se obtiene

$$a_{i,n-2-i} = (-1)^{i-1}\frac{n-2-2i}{2}\alpha, \quad 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}.$$

Como la dimensión de $\mathfrak{g}$ es mayor o igual que 8, se tiene, al menos, una relación de Jacobi, no trivial, de la forma $J(X_1, X_i, X_{n-3-i}) = 0$, con $2 \leq i \leq (n-4)/2$. Éstas relaciones de Jacobi producen las igualdades

$$(-1)^{i-1}(\alpha\, a_{1,n-3} - a) = 0,$$

de las que se obtiene sustituyendo el valor de $a_{1,n-3}$, hallado anteriormente, en cualquiera de ellas

$$a = \frac{n-4}{2}\alpha^2$$

Las restantes relaciones de Jacobi se verifican trivialmente, por lo que hemos probado que el álgebra

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_1] = \dfrac{n-4}{2}\alpha^2 X_{n-2} & \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1}(\alpha X_{n-3} + Y_0) & 1 \leq i \leq \dfrac{n-4}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\dfrac{n-2-2i}{2}\alpha X_{n-2} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-4}{2}. \end{cases}$$

Si $\alpha = 0$, entonces se tiene

$$\mathfrak{g} = \mathcal{C}_{(n,n-3)}.$$

En caso de tener $\alpha \neq 0$, el cambio de bases

$$\begin{cases} X'_0 = X_0, \\ Y'_0 = \alpha^{-2} Y_0, \\ X'_i = \alpha^{-1} X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2, \end{cases}$$

nos demuestra que

$$\mathfrak{g} = \mathcal{T}_{(n,n-3)}.$$

La demostración concluye sin más que observar que las dimensiones de los centros de $\mathcal{C}_{(n,n-3)}$ y $\mathcal{T}_{(n,n-3)}$ son dintintas, luego no son isomorfas. □

La demostración del teorema anterior ha exigido que el álgebra $\mathfrak{g}$ que se consideraba fuese, al menos, de dimensión 8. En una nota dejamos constancia de las álgebras graduadas que se obtienen cuando la dimensión es 6 y el índice es 3, que es el único caso excluido en el Teorema 2.46 de entre los que tiene sentido la consideración del índice $p = n - 3$.

Nota 2.47 Si el álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(6,3)}$ está graduada naturalmente y es $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_3\,\mathfrak{g}$, entonces

$$\mathfrak{g} = \mathcal{C}_{(6,3)} \qquad \text{ó} \qquad \mathfrak{g} = \mathcal{T}_{(6,3)}.$$

El resultado puede obtenerse directamente de aplicar al álgebra $\mathfrak{g}$ el Teorema 2.33 y clasificar la familia resultante, con los cambios de bases adecuados.

2.6.3 Álgebras de índice $p = n - 4$

Como el índice de la graduación tiene que ser impar y es $p = n - 4$, la dimensión del álgebra es también impar. El teorema siguiente, donde se define el álgebra terminal $\mathfrak{g} = \mathcal{T}_{(n,n-4)}$, determina las álgebras casifiliformes graduadas de este índice.

Teorema 2.48 *Si el álgebra $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_{(n-4)}\,\mathfrak{g}$, con $n \geq 11$, entonces $\mathfrak{g}$ es una de las tres álgebras no isomorfas siguientes: $\mathcal{C}_{(n,n-4)}$, $\mathcal{D}_{(n,n-4)}$ ó $\mathcal{T}_{(n,n-4)}$, donde el álgebra*

$$\mathcal{T}_{(n,n-4)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_i] = \dfrac{n-5}{2} X_{n-4+i} & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{n-4-i}] = (-1)^{i-1} (X_{n-4} + Y_0) & 1 \leq i \leq \dfrac{n-5}{2}, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1} \dfrac{n-3-2i}{2} X_{n-3} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-5}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i} (i-1) \dfrac{n-3-i}{2} X_{n-2} & 2 \leq i \leq \dfrac{n-3}{2}. \end{cases}$$

Demostración. Si $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$ es una base adaptada del álgebra $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_{(n-4)}\,\mathfrak{g}$, de consideraciones análogas al caso $p = n-3$, podemos empezar suponiendo que el álgebra $\mathfrak{g}$ tiene que ser de la familia

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le n-3, \\ [Y_0, X_i] = a\,X_{n-4+i} & 1 \le i \le 2, \\ [X_i, X_j] = a_{ij}\,X_{i+j} \quad (i+j \neq n-4) & 1 \le i \le \frac{n-3}{2},\ i < j \le n-2-i, \\ [X_i, X_{n-4-i}] = a_{i,n-4-i}\,X_{n-4} + (-1)^{i-1}\,Y_0 & 1 \le i \le \frac{n-5}{2}. \end{cases}$$

La descomposición que produce la graduación será

$$\mathfrak{g} =< X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-4}, Y_0 > \oplus < X_{n-3} > \oplus < X_{n-2} >$$

con $\dim(C^{n-5}\mathfrak{g}) = 4$ y $C^{n-3}\mathfrak{g} =< X_{n-2} >$. Entonces, $\{X_0, \ldots, X_{n-3}\}$ es una base adaptada del cociente

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^{n-3}\mathfrak{g}} =< X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-4}, Y_0 > \oplus < X_{n-3} >$$

que es un álgebra $(n-4)$-graduada naturalmente de dimensión $n-1$, par, y con $\dim(\mathfrak{g}/ < X_{n-3} >) \ge 10$, luego el Teorema 2.46 nos dice que

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^{n-3}\mathfrak{g}} = \mathcal{C}_{(n-1,n-4)} \qquad \text{ó} \qquad \frac{\mathfrak{g}}{C^{n-3}\mathfrak{g}} = \mathcal{T}_{(n-1,n-4)}.$$

- Si el álgebra $\mathfrak{g}/ < X_{n-2} >= \mathcal{C}_{(n-1,n-4)}$, entonces se tiene

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le n-3, \\ [X_i, X_{n-4-i}] = (-1)^{i-1}\,Y_0 & 1 \le i \le \dfrac{n-5}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = a_{i,n-2-i}\,X_{n-2} & 1 \le i \le \dfrac{n-3}{2}. \end{cases}$$

De las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-3-i}) = 0$, cuando $1 \leq i \leq (n-5)/2$, se obtiene

$$a_{i+1,n-2-(i+1)} = -a_{i,n-2-i}.$$

Las restantes relaciones de Jacobi se verifican trivialmente, por lo que poniendo $a_{1,n-3} = \alpha$ hemos probado que el álgebra

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{n-4-i}] = (-1)^{i-1}\, Y_0 & 1 \leq i \leq \dfrac{n-5}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\, \alpha\, X_{n-2} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-3}{2}. \end{cases}$$

Si $\alpha = 0$, entonces se tiene

$$\mathfrak{g} = \mathcal{C}_{(n,n-4)}.$$

Cuando $\alpha \neq 0$, el cambio de base

$$\begin{cases} X_0' = X_0, \\ Y_0' = \alpha^{-2}\, Y_0, \\ X_i' = \alpha^{-1}\, X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2, \end{cases}$$

nos prueba que

$$\mathfrak{g} = \mathcal{D}_{(n,n-4)}.$$

- Si el álgebra $\mathfrak{g}/<X_{n-2}>=\mathcal{T}_{(n-1,n-4)}$, entonces se tiene

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_i] = \dfrac{n-5}{2} X_{n-4+i} & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{n-4-i}] = (-1)^{i-1} (X_{n-4} + Y_0) & 1 \leq i \leq \dfrac{n-5}{2}, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1} \dfrac{n-3-2i}{2} X_{n-3} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-5}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = a_{i,n-2-i} X_{n-2} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-3}{2}. \end{cases}$$

Como la dimensión de $\mathfrak{g}$ es mayor o igual que 11, se tiene, al menos, una relación de Jacobi, no trivial, de la forma $J(X_2, X_i, X_{n-4-i}) = 0$, con $3 \leq i \leq (n-5)/2$. Éstas relaciones de Jacobi producen las igualdades

$$(-1)^{i-1} \left(a_{2,n-4} - \frac{n-5}{2} \right) = 0,$$

de las que, en cualquiera de ellas, se obtiene

$$a_{2,n-4} = \frac{n-5}{2}.$$

La relación de Jacobi $J(X_0, X_1, X_{n-4}) = 0$ nos proporciona, entonces, el valor

$$a_{1,n-3} = 0.$$

De las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-3-i}) = 0$, cuando $2 \leq i \leq (n-5)/2$ se obtiene

$$a_{i+1,n-2-(i+1)} = (-1)^{i-1} \frac{n-3-2i}{2} - a_{i,n-2-i}$$

y haciendo variar i desde 2 hasta $(n-5)/2$ se tiene finalmente

$$a_{i,n-2-i} = (-1)^i (i-1) \frac{n-3-i}{2}, \quad 2 \leq i \leq \frac{n-3}{2}.$$

Las restantes relaciones de Jacobi se verifican trivialmente, por lo que hemos probado que

$$\mathfrak{g} = \mathcal{T}_{(n,n-4)}$$

lo que concluye la demostración del teorema ya que $\mathcal{T}_{(n,n-4)}$ no es isomorfa a $\mathcal{C}_{(n,n-4)}$ ni a $\mathcal{D}_{(n,n-4)}$, como se deduce de las dimensiones de sus centros. □

Como en la demostración del teorema anterior se ha necesitado que el álgebra $\mathfrak{g}$ que se consideraba fuese, al menos, de dimensión 11, de nuevo en una nota dejamos constancia de las álgebras graduadas que se obtienen para los casos excluidos en el Teorema 2.48 de entre los que tiene sentido la consideración del índice $p = n - 4$.

Nota 2.49 Álgebras casifiliformes $(n-4)$-graduadas naturalmente de dimensiones $n = 7$ y $n = 9$.

- Si el álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(7,3)}$ está graduada naturalmente, entonces es $\mathfrak{g} = \mathcal{C}_{(7,3)}$, $\mathfrak{g} = \mathcal{D}_{(7,3)}$, $\mathfrak{g} = \mathcal{T}_{(7,3)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathcal{E}_{(7,3)}$, siendo

$$\mathcal{E}_{(7,3)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3, \\ [Y_0, X_i] = X_{3+i} & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_1, X_2] = X_3 + Y_0 & \\ [X_1, X_i] = X_{i+1} \quad) & 3 \leq i \leq 4. \end{cases}$$

- Si el álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(9,5)}$ está graduada naturalmente, entonces es $\mathcal{C}_{(9,5)}$, $\mathcal{D}_{(9,5)}$, $\mathfrak{g} = \mathcal{T}_{(9,5)}$, $\mathfrak{g} = \mathcal{E}^1_{(9,5)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathcal{E}^2_{(9,5)}$, siendo

$$\mathcal{E}^1_{(9,5)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5, \\ [Y_0, X_i] = 2X_{5+i} & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_1, X_4] = X_5 + Y_0 & \\ [X_1, X_5] = 2X_6 & \\ [X_1, X_6] = 3X_7 & \\ [X_2, X_3] = -X_5 - Y_0 & \\ [X_2, X_4] = -X_6 & \\ [X_2, X_5] = -X_7 & \end{cases}$$

y

$$\mathcal{E}^2_{(9,5)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5, \\ [Y_0, X_i] = 2X_{5+i} & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_1, X_4] = X_5 + Y_0 & \\ [X_1, X_5] = 2X_6 & \\ [X_1, X_6] = X_7 & \\ [X_2, X_3] = -X_5 - Y_0 & \\ [X_2, X_4] = -X_6 & \\ [X_2, X_5] = X_7 & \\ [X_3, X_4] = -2X_7 & \end{cases}$$

Los resultados expresados en la nota anterior pueden obtenerse como el de la Nota 2.47 aplicando, en cada caso, al álgebra $\mathfrak{g}$ el Teorema 2.33 y clasificando la familia resultante, con los cambios de bases adecuados.

2.6.4 Álgebras con índice $3 \leq p \leq n-5$

Estamos ahora en condiciones de abordar el último de los resultados que anticipábamos al comienzo de la sección: un álgebra p-graduada naturalmente, con indice $3 \leq p \leq n-5$ podrá ser únicamente $\mathcal{C}_{(n,p)}$ ó $\mathcal{D}_{(n,p)}$.

La demostración tendrá una estructura parecida a la del Teorema 2.41, lógicamente con las variaciones oportunas, debidas a las peculiaridades derivadas del hecho de que al hacer el cociente habitual en un álgebra de índice $p = n-5$, nos encontramos con un álgebra cociente, que puede ser terminal. Ésta será la parte técnica más engorrosa y, por otro lado, es digno de destacar cómo es necesario el conocimiento del comportamiento terminal de las graduaciones estudiadas en ésta sección para la obtención del resultado.

Sin duda el teorema que sigue, donde se enuncia la estructura de las álgebras que se consideran y que lleva implícito el resultado final de clasificación, merece el comentario de que su prueba ha sido durante un tiempo "prudencial" (¡subjetivamente eterno, a veces!) el objetivo final para la conclusión de esta memoria. Paradójicamente le estoy agradecido y aquí le muestro mi reconocimiento, porque la búsqueda de pautas que permitieran abordar su demostración me condujo a descubrir la belleza que subyace en la estructura de las álgebras p-graduadas.

Teorema 2.50 *Si $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$ es una base adaptada de un álgebra p-graduada $\mathfrak{g}$, con $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g}$ y $3 \leq p \leq n-5$, entonces existe $\alpha \in \mathbf{C}$ tal que*

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{p-i}] = (-1)^{i-1} Y_0 & 1 \leq i \leq \dfrac{p-1}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\,\alpha\, X_{n-2} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-3}{2}, \quad \text{con } \alpha = 0 \text{ si } n = \dot{2}. \end{cases}$$

Demostración. Si el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g}$, con $3 \leq p \leq n-5$, se tiene que $\dim(C^{p-1}\mathfrak{g}/C^p\mathfrak{g}) = 2$, luego $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n-2$ y por tanto no puede ser $\mathfrak{g} = \mathcal{LQ}$, así que la Proposición 2.34 nos dice que tiene que ser $p \neq \dot{2}$. Si $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$ es una base adaptada del álgebra, de consideraciones análogas al caso $p = n-3$, podemos empezar suponiendo que $\mathfrak{g}$ tiene que ser de la familia

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_i] = a\, X_{p+i} & 1 \leq i \leq n-2-p, \\ [X_i, X_j] = a_{ij}\, X_{i+j} \quad (i+j \neq p) & 1 \leq i \leq \left\lfloor \dfrac{n-3}{2} \right\rfloor,\ i < j \leq n-2-i, \\ [X_i, X_{p-i}] = a_{i,p-i}\, X_p + (-1)^{i-1}\, Y_0 & 1 \leq i \leq \dfrac{p-1}{2}. \end{cases}$$

Tenemos que probar que $a = 0$ y que los productos

$$[X_i, X_j] = a_{ij}\, X_{i+j} \qquad 1 \leq i \leq \left\lfloor \tfrac{n-3}{2} \right\rfloor,\ i < j \leq n-2-i,$$

se pueden reducir a

$$[X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\, \alpha\, X_{n-2} \qquad 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \quad \text{con } \alpha = 0 \text{ si } n = \dot{2}.$$

La prueba se hará por inducción sobre la dimensión del álgebra $\mathfrak{g}$. Los primeros casos que tiene sentido considerar son:

- $\dim \mathfrak{g} = 8$.

Si $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_p\, \mathfrak{g}$, con $3 \leq p \leq n-5$, sólo podemos obtener $p = 3$. Tenemos, entonces, el álgebra $\mathfrak{g}_{(8,3)} = \mathrm{gr}_3\, \mathfrak{g}$, que será de la familia

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5, \\ [Y_0, X_i] = a\, X_{3+i} & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_i, X_j] = a_{ij}\, X_{i+j} \quad (i+j \neq 3) & 1 \leq i \leq 2,\ i < j \leq 6-i, \\ [X_1, X_2] = a_{12}\, X_3 + Y_0 \end{cases}$$

con las restricciones obtenidas de las relaciones de Jacobi siguientes:

$$RJ \equiv \begin{cases} a_{12} - a_{13} = 0 \\ a_{13} - a_{14} - a_{23} = 0 \\ a_{14} - a_{15} - a_{24} = 0 \\ a_{23} - a_{24} = 0 \\ a\,(a_{12} - a_{15} - a_{24}) = 0 \\ a_{13}\,a_{24} - a_{15}\,a_{23} + a = 0 \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones RJ, es equivalente a

$$RJ \equiv \begin{cases} a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{15} \\ a_{23} = a_{24} = a = 0 \end{cases}$$

por lo que tenemos

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5, \\ [X_1, X_2] = a_{12}\,X_3 + Y_0 & \\ [X_1, X_i] = a_{12}\,X_{i+1} & 3 \leq i \leq 5. \end{cases}$$

El cambio de bases

$$\begin{cases} X_1' = X_1 - a_{12}\,X_0, \\ Y_0' = Y_0, \\ X_i' = X_i, \quad i \neq 1, \end{cases}$$

nos prueba que

$$\mathfrak{g} = \mathcal{C}_{(8,3)}$$

y se verifica la hipótesis de inducción con $\alpha = 0$.

?

– $\dim \mathfrak{g} = 9$.

Si $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g}$ con $3 \leq p \leq n-5$, sólo podemos obtener de nuevo el índice impar $p = 3$. Tenemos, entonces, el álgebra $\mathfrak{g}_{(9,3)} = \mathrm{gr}_3\,\mathfrak{g}$, y la descomposición que produce la graduación será

$$\mathfrak{g} =< X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus < X_3, Y_0 > \oplus < X_4 > \oplus \cdots \oplus < X_7 >$$

con $\dim(C^2\mathfrak{g}) = 6$ y $C^6\mathfrak{g} =< X_7 >$. Entonces, $\{X_0, \ldots, X_6\}$ es una base adaptada del cociente

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^6\mathfrak{g}} =< X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus < X_3, Y_0 > \oplus < X_4 > \oplus < X_5 > \oplus < X_6 >$$

que es un álgebra 3-graduada naturalmente de dimensión 8, luego

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^6\mathfrak{g}} = \mathcal{C}_{(8,3)}$$

y, por tanto, será

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 6, \\ [X_1, X_2] = Y_0 & \\ [X_i, X_{7-i}] = a_{i,7-i} X_7 & 1 \leq i \leq 3, \end{cases}$$

con las restricciones obtenidas de las relaciones de Jacobi siguientes:

$$\begin{cases} a_{16} + a_{25} = 0 \\ a_{25} + a_{34} = 0 \end{cases}$$

por lo que poniendo $a_{16} = \alpha$ se tiene

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 6, \\ [X_1, X_2] = Y_0 & \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^{i-1} \alpha X_7 & 1 \leq i \leq 3, \end{cases}$$

y se verifica la hipótesis de inducción.

Supongamos, entonces, cierto que para toda álgebra de Lie p-graduada de dimensión n, graduada naturalmente, con $3 \leq p \leq n-5$ se tiene

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{p-i}] = (-1)^{i-1} Y_0 & 1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\alpha X_{n-2} & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \quad \text{con } \alpha = 0 \text{ si } n = \dot{2}. \end{cases}$$

Sea el álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n+1,p)}$, siendo $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g}$ con $3 \leq p \leq n-4$. Entonces se tiene que $\dim(C^{p-1}\mathfrak{g}/C^p\mathfrak{g}) = 2$, luego $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n-1$ y, por tanto, no puede ser $\mathfrak{g} = \mathcal{LQ}$, así que la Proposición 2.34 nos dice que tiene que ser p impar.

Tendremos que considerar los dos casos que pueden presentarse, dependiendo de la paridad de la dimensión, $n+1$, del álgebra $\mathfrak{g}$. Cuando $n+1$ sea impar, se podrá aplicar directamente la hipótesis de inducción en el álgebra obtenida del cociente sobre el último subespacio de la graduación. Cuando $n+1$ sea par tendremos además que distinguir el caso particular $p = n-4$, en que el cociente obtenido puede, en principio, ser un álgebra terminal.

CASO $n+1 \neq \dot{2}$.

Sea $\mathfrak{g}_{(n+1,p)} = \mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g}$, es decir tenemos para el álgebra $\mathfrak{g}$ la descomposición

$$< X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-4} > \oplus < X_{n-3} > \oplus < X_{n-2} > \oplus < X_{n-1} >$$

y no puede ser $p = n-4$, ya que p tiene que ser impar y la dimensión, por hipótesis impar, del algebra implica que $n-4$ es par; luego $\{X_0, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$ es una base adaptada del cociente

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^{n-2}\mathfrak{g}} = < X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-4} > \oplus < X_{n-3} > \oplus < X_{n-2} > .$$

Pero $C^{n-2}\mathfrak{g} =< X_{n-1} >$ y tenemos que $\mathfrak{g}/< X_{n-1} >$ es un álgebra p-graduada naturalmente de dimensión n, par, con $3 \leq p \leq n-5$, a la que se le puede aplicar la hipótesis de inducción, luego

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^{n-2}\mathfrak{g}} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le n-3, \\ [X_i, X_{p-i}] = (-1)^{i-1} Y_0 & 1 \le i \le \dfrac{p-1}{2}. \end{cases}$$

Y, entonces, tenemos

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le n-2, \\ [X_i, X_{p-i}] = (-1)^{i-1} Y_0 & 1 \le i \le \dfrac{p-1}{2}, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = a_{i,n-1-i}\, X_{n-1} & 1 \le i \le \dfrac{n-2}{2}. \end{cases}$$

Poniendo $a_{1,n-2} = \alpha$, de las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-2-i}) = 0$, cuando $1 \le i \le (n-4)/2$, se obtiene

$$a_{i,n-1-i} = (-1)^{i-1}\,\alpha, \quad 1 \le i \le \frac{n-2}{2},$$

y queda probado

$$\mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le n-2, \\ [X_i, X_{p-i}] = (-1)^{i-1} Y_0 & 1 \le i \le \dfrac{p-1}{2}, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = (-1)^{i-1}\,\alpha\, X_{n-1} & 1 \le i \le \dfrac{n-2}{2}, \end{cases}$$

para $3 \le p \le n-4$, cuando $n+1$ es impar.

CASO $n+1 = \dot{2}$.

Sea el álgebra $\mathfrak{g}_{(n+1,p)} = \mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g}$. Obsérvese que ahora hay que considerar aparte $p = n-4$, ya que la dimensión, por hipótesis par, del álgebra implica que $n-4$ es impar y al efectuar el cociente $\mathfrak{g}/ < X_{n-1} >$, tenemos un álgebra p-graduada naturalmente de dimensión n a la que no podemos aplicar directamente la hipótesis de inducción al no tenerse $3 \le p \le n-5$.

• Sea, entonces, $\mathfrak{g}_{(n+1,p)} = \mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g}$, con $3 \leq p \leq n-6$. Tenemos para el álgebra $\mathfrak{g}$ la descomposición

$$< X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-4} > \oplus < X_{n-3} > \oplus < X_{n-2} > \oplus < X_{n-1} > .$$

Entonces, $\{X_0, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$ es una base adaptada del cociente

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^{n-2}\mathfrak{g}} =< X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-4} > \oplus < X_{n-3} > \oplus < X_{n-2} > .$$

Pero $C^{n-2}\mathfrak{g} =< X_{n-1} >$ y tenemos que $\mathfrak{g}/< X_{n-1} >$ es un álgebra p-graduada naturalmente de dimensión n, impar, con $3 \leq p \leq n-6$, a la que se le puede aplicar la hipótesis de inducción, luego

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^{n-2}\mathfrak{g}} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{p-i}] = (-1)^{i-1} Y_0 & 1 \leq i \leq \dfrac{p-1}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\,\alpha\, X_{n-2} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-3}{2}. \end{cases}$$

Y, entonces, tenemos

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_i, X_{p-i}] = (-1)^{i-1} Y_0 & 1 \leq i \leq \dfrac{p-1}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\,\alpha\, X_{n-2} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-3}{2}, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = a_{i,n-1-i}\, X_{n-1} & 1 \leq i \leq \left\lfloor \dfrac{n-2}{2} \right\rfloor = \dfrac{n-3}{2}. \end{cases}$$

Una vez más, las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-2-i}) = 0$, cuando se considera $1 \leq i \leq (n-3)/2$, nos permiten expresar

$$a_{i,n-1-i} = (-1)^{i-1}\,\frac{n-1-2i}{2}\,\alpha, \quad 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2},$$

y la relación de Jacobi $J(X_1, X_{\frac{n-3}{2}}, X_{\frac{n-1}{2}}) = 0$, obliga a que $\alpha = 0$, con lo que queda probado que

$$\mathrm{gr}_p\,\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_i, X_{p-i}] = (-1)^{i-1} Y_0 & 1 \leq i \leq \dfrac{p-1}{2}, \end{cases}$$

para $3 \leq p \leq n-6$, cuando $n+1$ es par.

- Sea $\mathfrak{g}_{(n+1,n-4)} = \mathrm{gr}_{(n-4)}\,\mathfrak{g}$, es decir tenemos para el álgebra $\mathfrak{g}$ la descomposición

$$< X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-4}, Y_0 > \oplus < X_{n-3} > \oplus < X_{n-2} > \oplus < X_{n-1} > .$$

Entonces, $\{X_0, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$ es una base adaptada del cociente

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^{n-2}\mathfrak{g}} =< X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-4}, Y_0 > \oplus < X_{n-3} > \oplus < X_{n-2} > .$$

El álgebra $\mathfrak{g}/ < X_{n-1} >$ es $(n-4)$-graduada naturalmente de dimensión n y, por tanto, el Teorema 2.48 nos dice que es $\mathcal{C}_{(n,n-4)}$, $\mathcal{D}_{(n,n-4)}$ ó $\mathcal{T}_{(n,n-4)}$.

Veamos primeramente que el álgebra $\mathfrak{g}/ < X_{n-1} >$ no puede ser $\mathcal{T}_{(n,n-4)}$. En efecto, si lo fuera, se tendría

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^{n-2}\mathfrak{g}} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_i] = \dfrac{n-5}{2} X_{n-4+i} & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{n-4-i}] = (-1)^{i-1} (X_{n-4} + Y_0) & 1 \leq i \leq \dfrac{n-5}{2}, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1} \dfrac{n-3-2i}{2} X_{n-3} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-5}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i} (i-1) \dfrac{n-3-i}{2} X_{n-2} & 2 \leq i \leq \dfrac{n-3}{2}. \end{cases}$$

Y, entonces, debería ser

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le n-2, \\ [Y_0, X_i] = \frac{n-5}{2} X_{n-4+i} & 1 \le i \le 2, \\ [X_i, X_{n-4-i}] = (-1)^{i-1} (X_{n-4} + Y_0) & 1 \le i \le \frac{n-5}{2}, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1} \frac{n-3-2i}{2} X_{n-3} & 1 \le i \le \frac{n-5}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i} (i-1) \frac{n-3-i}{2} X_{n-2} & 2 \le i \le \frac{n-3}{2}, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = a_{i,n-1-i} X_{n-1} & 1 \le i \le \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

Las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-2-i}) = 0$, cuando $2 \le i \le (n-3)/2$, nos permiten expresar

$$a_{i,n-1-i} = (-1)^i \left((2i-1) \frac{n-3}{2} - i^2 \right), \qquad 2 \le i \le \frac{n-3}{2},$$

y la relación de Jacobi $J(X_0, X_1, X_{n-3}) = 0$ nos proporciona

$$a_{1,n-2} = a_{2,n-3} = \frac{3n-17}{2}$$

y es imposible que $\mathfrak{g}$ sea un álgebra de Lie, porque no se verifica la relación de Jacobi $J(X_1, X_{\frac{n-3}{2}}, X_{\frac{n-1}{2}}) = 0$, al producirse la igualdad

$$(-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{2} \frac{n-5}{2} \frac{n-3}{2} \frac{3n-17}{2} = 0$$

que, evidentemente, es falsa cuando la dimensión del álgebra es mayor que 5.

Por tanto el álgebra $\mathfrak{g}/ < X_{n-1} >$ tiene que ser $\mathcal{C}_{(n,n-4)}$ ó $\mathcal{D}_{(n,n-4)}$, y podemos poner

$$\frac{\mathfrak{g}}{C^{n-2}\mathfrak{g}} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le n-3, \\ [X_i, X_{n-4-i}] = (-1)^{i-1} Y_0 & 1 \le i \le \frac{n-5}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} \alpha X_{n-2} & 1 \le i \le \frac{n-3}{2}, \quad \alpha = 0 \text{ ó } \alpha = 1. \end{cases}$$

Y, entonces, será

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le n-2, \\ [X_i, X_{n-4-i}] = (-1)^{i-1} Y_0 & 1 \le i \le \frac{n-5}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\, \alpha\, X_{n-2} & 1 \le i \le \frac{n-3}{2}, \quad \alpha = 0, \ \text{ó} \ \alpha = 1 \\ [X_i, X_{n-1-i}] = a_{i,n-1-i}\, X_{n-1} & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor = \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

Con los mismos argumentos empleados en el caso anterior, cuando era $n+1$ par, se deducen $\alpha = 0$ y $a_{i,n-1-i} = 0$ para todo $1 \le i \le (n-3)/2$, por lo que tenemos probado

$$\mathrm{gr}_{(n-4)}\, \mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le n-2, \\ [X_i, X_{p-i}] = (-1)^{i-1} Y_0 & 1 \le i \le \dfrac{p-1}{2}, \end{cases}$$

cuando $n+1$ es impar.

Así, supuesta cierta la hipótesis de inducción para las álgebras p-graduadas naturalmente de dimensión n, con $3 \le p \le n-5$, hemos probado que si un ágebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n+1,p)}$, está graduada naturalmente y $3 \le p \le n-4$, entonces existe $\alpha \in \mathbf{C}$ tal que

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le n-2, \\ [X_i, X_{p-i}] = (-1)^{i-1} Y_0 & 1 \le i \le \dfrac{p-1}{2}, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = (-1)^{i-1}\, \alpha\, X_{n-1} & 1 \le i \le \dfrac{n-2}{2}, \quad \text{con } \alpha = 0 \ \text{ si } \ n+1 = \dot{2}. \end{cases}$$

lo que concluye la demostración del teorema. $\square$

Corolario 2.51 *Si el álgebra* $\mathfrak{g} = \mathrm{gr}_p\, \mathfrak{g}$ *tiene dimensión* n *y* $3 \le p \le n-5$, *se verifica:*

1. Si $n = \dot{2}$*, entonces* $\mathfrak{g} = \mathcal{C}_{(n,p)}$.

2. Si $n \neq \dot{2}$*, entonces* $\mathfrak{g} = \mathcal{C}_{(n,p)}$ *ó* $\mathfrak{g} = \mathcal{D}_{(n,p)}$.

Demostración. Se obtiene de forma inmediata del teorema anterior si, cuando $\alpha \neq 0$, se efectúa el cambio de bases

$$\begin{cases} X_0' = X_0, \\ X_i' = \alpha^{-1} X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2, \\ Y_0' = \alpha^{-2} Y_0. \end{cases} \qquad \square$$

Nota 2.52 Usaremos la notación habitual

$$\mathfrak{g} = \mathcal{CD}_p$$

para indicar que

$$\begin{cases} \mathfrak{g} = \mathcal{C}_{(n,p)} & \text{si } n = \dot{2}, \\ \mathfrak{g} = \mathcal{C}_{(n,p)} \ \text{ ó } \ \mathfrak{g} = \mathcal{D}_{(n,p)}. & \text{si } n \neq \dot{2}. \end{cases}$$

Así, hemos obtenido el siguiente resultado:

Teorema 2.53 *Si un álgebra casifiliforme graduada es*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-2}$$

de forma que $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n-2$ *y* $\dim(C^{n-5}\mathfrak{g}) = 3$*, entonces existe un entero* $p \neq \dot{2}$*, con* $3 \leq p \leq n-5$*, para el que*

$$\mathfrak{g} = \mathcal{CD}_p.$$

Demostración. Como la dimensión de $C^1\mathfrak{g}$ no es $n-3$, no puede ser $\mathfrak{g} = \mathcal{LQ}$ ni tampoco puede ser $\mathfrak{g} = \mathcal{AB}_p$, para ningún p, luego $\mathfrak{g}$ tiene que ser un álgebra p-graduada naturalmente. La Proposición 2.34 nos garantiza que p es impar y como $\dim(C^{n-5}\mathfrak{g}) = 3$, tiene que ser $3 \leq p \leq n-5$. Entonces, el Corolario 2.42 nos dice que tiene que ser el álgebra $\mathfrak{g} = \mathcal{CD}_p$. □

Los resultados obtenidos en esta sección junto con los obtenido en la sección anterior nos permiten enunciar el teorema final de clasificación de las álgebras casifiliformes graduadas que admiten una descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-2}$$

con $\mathfrak{g}_i \neq \{0\}$ y cuyo enunciado resume los resultados obtenidos en este capítulo de la tesis.

Teorema 2.54 (Clasificación de las álgebras casifiliformes p-graduadas) *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme graduada de dimensión n tal que*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-2},$$

con $\mathfrak{g}_i \neq \{0\}$, para $1 \leq i \leq n-2$, entonces se verifica una y sólo una de las igualdades siguientes:

$$\mathfrak{g} = \mathcal{C}_{(n,n-2)}$$

$$\mathfrak{g} = \mathcal{T}_{(n,n-3)}$$

$$\mathfrak{g} = \mathcal{T}_{(n,n-4)}$$

$$\mathfrak{g} = \mathcal{CD}_p \qquad (3 \leq p \leq n-3,\ p \neq \dot{2})$$

$$\mathfrak{g} = \mathcal{LQ}$$

$$\mathfrak{g} = \mathcal{AB}_p \qquad (2 \leq p \leq n-3)$$

Nota 2.55 Evidentemente, si la dimensión del algebra es 7 ó 9, se tienen que considerar además las álgebras $\mathfrak{g} = \mathcal{E}_{(7,3)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathcal{E}^1_{(9,5)}$ y $\mathfrak{g} = \mathcal{E}^2_{(9,5)}$, respectivamente de la Nota 2.49.

Corolario 2.56 *El número de álgebras casifiliformes p-graduadas no isomorfas de dimensión $n \geq 10$ es:*

$$\begin{cases} \dfrac{3n-8}{2}, & \text{si } n = \dot{2}, \\ 3n-9, & \text{si } n \neq \dot{2}. \end{cases}$$

2.7 Conclusiones y problemas abiertos

Podemos interpretar el Teorema 2.54 en el sentido de una ampliación del conjunto de álgebras nilpotentes graduadas conocidas (las filiformes), a las que admiten una descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m$$

donde m viene determinado por la longitud de la sucesión

$$(p_1, p_2, \ldots, p_m)$$

que se obtiene del tipo del álgebra ($p_m \neq 0$) cuando $\dim \mathfrak{g} - 2 \leq m \leq \dim \mathfrak{g} - 1$.

Obsérvese que $O(\mathfrak{g}) = p_1 - 2$ ha resultado ser una obstrucción a que el álgebra sea graduada naturalmente, cuando no es escindida. En efecto, para $m = \dim \mathfrak{g} - 1$, el álgebra graduada $\mathfrak{g}$ es filiforme y se tiene $O(\mathfrak{g}) = 0$: las álgebras obtenidas por Vergne [30] son graduadas naturalmente.

Para $m = \dim \mathfrak{g} - 2$, el álgebra $\mathfrak{g}$ es casifiliforme y cuando es un álgebra graduada no escindida se tiene:

1. Si $O(\mathfrak{g}) = 0$, entonces cualquiera que sea $\mathfrak{g}$ la p-filtración coincide con la filtración natural, luego está graduada naturalmente.

2. Si $O(\mathfrak{g}) = 1$, entonces para algún $1 < p < n-2$ es $\mathfrak{g} = \mathcal{AB}_p$ y el álgebra no está graduada naturalmente.

Cuando se piensa en una posible clasificación de las álgebras graduadas de una sucesión característica distinta surge entonces, de modo natural, la pregunta *¿qué tipo de graduaciones será preciso considerar?* Parece que debe ser una cuestión básica a resolver si se pretenden abordar estos u otros problemas más generales como pueden ser:

- La determinación de la estructura de las álgebras graduadas de una sucesión característica arbitraria o, en particular, estudiar:
  - Si en alguna sucesión característica aparecen familias de álgebras graduadas dependientes de parámetros para cada dimensión.
  - Si es posible, mediante éste invariante, la determinación y clasificación de las álgebras nilpotentes graduadas.

Las álgebras graduadas obtenidas aclaran cómo aumenta la dificultad, en los problemas de clasificación, cuando se consideran álgebras casifiliformes en vez de filiformes: se proporciona de forma precisa la complicación desde la estructura básica sobre la que éstas álgebras se sustentan. Así, las familias obtenidas pueden ser un punto de partida y se está ya, pues, en disposición de abordar e iniciar nuevos problemas abiertos como:

- Estudiar la posible aplicación geométrica que las álgebras graduadas obtenidas pueden tener en la determinación explícita o cotas de la dimensión de las componentes irreducibles de la variedad de leyes de álgebras de Lie nilpotentes.
- El estudio de las álgebras de Lie característicamente nilpotentes que se "apoyen" en los tipos álgebras casifiliformes p-graduadas obtenidas.
- La determinación de las álgebras de derivaciones de las álgebras graduadas obtenidas, que permitirán, como corolario, la clasificación de las álgebras resolubles de nilradical casifiliforme graduado.

Apéndice A

Álgebras casifiliformes p-graduadas

El Teorema 2.54 nos proporciona la clasificación de las álgebras casifiliformes graduadas de dimensión n tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-2}$, con $\mathfrak{g}_i \neq \{0\}$, para $1 \leq i \leq n-2$. Una tal álgebra es p-graduada y sólo puede ser una de las que se relacionan a continuación, expresadas en función de los productos, salvo antisimetría, en una base $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y_0\}$ para cada dimensión.

- $\mathfrak{g} = \mathcal{T}_{(n,n-3)}$.

Si $n \geq 6$ y n es par, el álgebra

$$\mathcal{T}_{(n,n-3)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_1] = \dfrac{n-4}{2} X_{n-2} & \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1} (X_{n-3} + Y_0) & 1 \leq i \leq \dfrac{n-4}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} \dfrac{n-2-2i}{2} X_{n-2} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-4}{2}. \end{cases}$$

- $\mathfrak{g} = \mathcal{T}_{(n,n-4)}$.

Si $n \geq 7$ y n es impar, el álgebra

$$\mathcal{T}_{(n,n-4)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_i] = \dfrac{n-5}{2} X_{n-4+i} & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{n-4-i}] = (-1)^{i-1} (X_{n-4} + Y_0) & 1 \leq i \leq \dfrac{n-5}{2}, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1} \dfrac{n-3-2i}{2} X_{n-3} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-5}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i} (i-1) \dfrac{n-3-i}{2} X_{n-2} & 2 \leq i \leq \dfrac{n-3}{2}. \end{cases}$$

- $\mathfrak{g} = \mathcal{C}_{(n,n-2)}$.
- $\mathfrak{g} = \mathcal{CD}_p \qquad (3 \leq p \leq n-3,\ p \neq \dot{2})$.

La expresión $\mathfrak{g} = \mathcal{CD}_p$ denota que

$$\begin{cases} \mathfrak{g} = \mathcal{C}_{(n,p)} & \text{si } n = \dot{2}, \\ \mathfrak{g} = \mathcal{C}_{(n,p)} \text{ ó } \mathfrak{g} = \mathcal{D}_{(n,p)}. & \text{si } n \neq \dot{2}. \end{cases}$$

Si $n \geq 5$, para $3 \leq p \leq n-2$ y p impar, el álgebra

$$\mathcal{C}_{(n,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{p-i}] = (-1)^{i-1} Y_0 & 1 \leq i \leq \dfrac{p-1}{2}. \end{cases}$$

Si $n \geq 7$ y n es impar, para $3 \leq p \leq n-4$ y p impar, el álgebra

$$\mathcal{D}_{(n,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{p-i}] = (-1)^{i-1} Y_0 & 1 \leq i \leq \dfrac{p-1}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-2} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-3}{2}. \end{cases}$$

- $\mathfrak{g} = \mathcal{LQ}$.

La expresión $\mathfrak{g} = \mathcal{LQ}$ denota que

$$\begin{cases} \mathfrak{g} = L_{n-1} \oplus \mathbf{C} & \text{si } n = \dot{2}, \\ \mathfrak{g} = L_{n-1} \oplus \mathbf{C} \ \text{ ó } \ \mathfrak{g} = Q_{n-1} \oplus \mathbf{C} & \text{si } n \neq \dot{2}. \end{cases}$$

donde L_{n-1} y Q_{n-1} las álgebras filiformes graduadas obtenidas por Verne [30] de dimensión $n-1$, expresadas en este trabajo como:
Si $n \geq 4$, el álgebra

$$L_{n-1} = \left\{ \ [X_0, X_i] = X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-3. \right.$$

Si $n \geq 7$ y n es impar, el álgebra

$$Q_{n-1} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-2} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-3}{2}. \end{cases}$$

- $\mathfrak{g} = \mathcal{AB}_p \qquad (2 \leq p \leq n-3)$.

La expresión $\mathfrak{g} = \mathcal{AB}_p$ denota que

$$\begin{cases} \mathfrak{g} = \mathcal{A}_{(n,p)} & \text{si } n = \dot{2}, \\ \mathfrak{g} = \mathcal{A}_{(n,p)} \ \text{ ó } \ \mathfrak{g} = \mathcal{B}_{(n,p)}. & \text{si } n \neq \dot{2}. \end{cases}$$

Si $n \geq 5$, para $2 \leq p \leq n-3$, el álgebra

$$\mathcal{A}_{(n,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_i] = X_{i+p} & 1 \leq i \leq n-2-p. \end{cases}$$

Si $n \geq 5$ y n es impar, para $2 \leq p \leq n-3$, el álgebra

$$\mathcal{B}_{(n,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_0, X_i] = X_{i+p} & 1 \leq i \leq n-2-p, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-2} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-3}{2}. \end{cases}$$

- $\mathcal{E}_{(7,3)}$.

Siendo $n = 7$ y el álgebra

$$\mathcal{E}_{(7,3)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 3, \\ [Y_0, X_i] = X_{3+i} & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_1, X_2] = X_3 + Y_0 & \\ [X_1, X_i] = X_{i+1} \quad) & 3 \leq i \leq 4. \end{cases}$$

- $\mathcal{E}^i_{(9,5)}$ $(i = 1$ ó $i = 2)$.

Siendo $n = 9$, el álgebra

$$\mathcal{E}^1_{(9,5)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5, \\ [Y_0, X_i] = 2X_{5+i} & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_1, X_4] = X_5 + Y_0 & \\ [X_1, X_5] = 2X_6 & \\ [X_1, X_6] = 3X_7 & \\ [X_2, X_3] = -X_5 - Y_0 & \\ [X_2, X_4] = -X_6 & \\ [X_2, X_5] = -X_7 & \end{cases}$$

y el álgebra

$$\mathcal{E}^2_{(9,5)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 5, \\ [Y_0, X_i] = 2X_{5+i} & 1 \le i \le 2, \\ [X_1, X_4] = X_5 + Y_0 & \\ [X_1, X_5] = 2X_6 & \\ [X_1, X_6] = X_7 & \\ [X_2, X_3] = -X_5 - Y_0 & \\ [X_2, X_4] = -X_6 & \\ [X_2, X_5] = X_7 & \\ [X_3, X_4] = -2X_7 & \end{cases}$$

Bibliografía

[1] W. W. Adams and P. Loustaunau, An Introduction to Gröbner Bases, AMS, 1994.

[2] J. M. Ancochea and M. Goze, *Classificatiòn des algèbres de Lie filiformes de dimension 8*, Archiv. Math., 50, p. 511–525, 1988.

[3] J. M. Ancochea and M. Goze, *Classificatiòn des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7*, Archiv. Math., 52, p. 175–185, 1989.

[4] J. M. Ancochea, J.R. Gómez, M. Goze and G. Valeiras, *Sur les composantes irreductibles de la variété des lois nilpotentes*, Journal. of Pure and Applied Algebra. Por aparecer.

[5] G.G.A. Bäuerle and E. A. de Kerf, *Lie algebras. Part 1. Finite and Infinite Dimensional Lie Algebras and Applications in Physics*, North-Holland, 1990.

[6] J. G. F. Belifante and B. Kolman, *A Survey of Lie Groups and Lie Algebras with Applications and Computacional Methods*, SIAM, Philadelphia, 1989.

[7] L. Boza, F. J. Echarte and J. Núñez, *Clasification of Complex Filiform Lie Algebras of Dimension 10*, Algebra, Groups and Geometry. Por aparecer.

[8] B. Buchberger, *Gröbner Bases: An Algorithmic Method in Polynomial Ideal Theory*, N. K. Bose (ed.), Multidimensional Systems Theory, 184–232, Reidel Publ. Co. 1985.

[9] A. Cerezo, *Les algèbres de Lie nilpotentes réelles et complexes de dimension 6*, Université de Nice, prépublication 27, 1.984.

[10] J. Dixmier, *Sur les representation unitaries des groupes de Lie nilpotentes III*, Canadian J. Math. 10, p. 321–348, 1958.

[11] J. Dixmier and M. G. Lister, *Derivations of nilpotent Lie algebras*, Proc. A.M.S. 8, p.155-158. 1.957.

[12] J. L. Dyer, *A nilpotent Lie algebra with nilpotent automorphism group*, Bull. Amer. Math. Soc. 76, p. 52-56, 1970.

[13] F. J. Echarte and J. R. Gómez, *Classification of complex filiform nilpotent Lie algebras of dimension 9*, Rendiconti Cagliari, vol. 61, fasc. 1, 1991.

[14] F. J. Echarte, J. R. Gómez, and J. Núñez, *A necessary and sufficient condition for a complex filiform Lie algebra to be a characteristiccally nilpotent Lie algebra*, Jor. Bull. Math. S. S. M. Romania. Pendiente de publicación, 1993.

[15] G. Favre, *Une algébre caractéristiquement nilpotente de dimension 7*, C.R.A.Sc. Paris, Série A, 274, 13338-1339, 1972.

[16] J. R. Gómez, *Clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes complejas de dimensión 9*, Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, 1990.

[17] M. Goze and Y. Hakimjanov, *Sur les algèbres de Lie nilpotentes admettant un tore de dérivation*, Preprint, 1993.

[18] M. Goze and Y. Hakimjanov, *Algèbres de Lie nilpotentes complexes*, I.R.M.A., Strasbourg, 1994.

[19] Y. Hakimjanov, *Variétés des loys d'algèbres de Lie nilpotentes*, Geom. Dedicata 40, 269-295, 1.991.

[20] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.

[21] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Spriger-Verlag, New York, 1972.

[22] N. Jacobson, *Lie algebras*, Dover Publications, Inc. New York, 1.979.

[23] D. Knuth, *The TEXbook*, Addison-Wesley.

[24] L. Lamport, *LATEX: A document preparation system*, Addison-Wesley.

[25] M. Luks, *What is the typical nilpotent Lie algebra?*, in Computers in non associative rings and algebras. Acad. Press., New-York p. 189-207, 1977.

[26] V. V. Morosov, *Clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 6 (en ruso en el original)*, Isvestia Vys. Ucheb. Zav. 4, p. 161-171, 1.958.

[27] M. Romdhani, *Classification of real and complex nilpotent Lie algebras of dimension 7*, Linear and Multilinear Alg., 24, p. 167–189, 1989.

[28] G. Valeiras, *Tesis*, Universidad de Sevilla, 1992.

[29] M. Vergne, *Variété des algèbres de Lie nilpotentes*, Thèses, París, 1966.

[30] M. Vergne, *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'etude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes*, Bull. Soc. Math. France 98, 81–116, 1970.

[31] S. Wolfram, *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley, 1991.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. ANTONIO JIMÉNEZ MERCHÁN

titulada FAMILIAS DE LEYES DE ALGEBRAS DE LIE NILPOTENTES

acordó otorgarle la calificación de APTO CUM LAUDE

Sevilla, 28 de MARZO 1.995

El Vocal,	El Vocal,	El Vocal,
M. GOZE	F. MATEOS	F. TORRES
El Presidente	El Secretario,	El Doctorado,
F.J. ECHARTE	G. VALEIRAS	A. JIMENEZ