

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Facultad de Matemáticas

SUBVARIEDADES SLANT EN S-VARIEDADES

Memoria presentada
por María Belén Hans
Uber para optar al
grado de Doctora en
Matemáticas.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Departamento de Geometría y Topología
Sevilla, a los 08 de mayo de 2007
Sevilla, a los 25-04-05
El Jefe del Departamento de Teoría de Grupos

Luis M. Fernández Fernández

María Belén Hans Uber

Fdo: M^a Belén Hans
Uber.

V^o B^o
Doctor Director:

Luis M. Fernández Fernández

L. M. Fernández Fernández

043

423

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
BIBLIOTECA

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

*A todos aquellos seres,
visibles o invisibles, que
hicieron posible este
sueño.*

Resumen

Las subvariedades slant constituyen un tipo importante de subvariedades, tanto en la Geometría Compleja como en la Geometría de Contacto. Dichas subvariedades tienen la propiedad de constituir una generalización de las subvariedades invariantes y anti-invariantes, al mismo tiempo que describen las situaciones intermedias entre ambas. Por otra parte, las f -variedades constituyen un tipo de variedades que engloban a las variedades complejas y de contacto.

En esta memoria, se presenta la definición de subvariedad slant en f -variedades, como extensión natural de las definiciones para el caso complejo y de contacto, obteniéndose las primeras propiedades, resultados y caracterizaciones. El estudio se centra, especialmente, en el caso en que la variedad ambiente sea una S -variedad o una f -variedad con ciertas condiciones muy concretas. Se tratan diversos aspectos que pueden caracterizar a estas subvariedades: la dimensión, el carácter de minimalidad y umbilicalidad, la curvatura, etc. Un caso que precisa especial atención, es aquel en que la dimensión de la subvariedad es la menor posible, no trivial, donde se obtienen propiedades características.

Se estudian ciertos tipos de subvariedades slant en S -variedades, cuyas definiciones están íntimamente ligadas con la f -estructura: subvariedades totalmente f -geodésicas, f -umbilicales y pseudo- f -umbilicales.

Finalmente, se obtienen interesantes relaciones entre invariantes extrínsecos e intrínsecos de una subvariedad slant en una S -variedad con curvatura f -seccional constante. Continuamente, se hace referencia a los ejemplos presentados en la presente memoria, que respaldan el interés de la materia tratada.

Introducción

El estudio de las subvariedades de una variedad diferenciable es, desde los inicios de la Geometría Diferencial, uno de los tópicos más tratados y que más resultados ha producido. En particular, cuando la variedad ambiente está dotada de una estructura adicional (casi-compleja, casi-contacto, f -estructura general,...), el comportamiento de sus subvariedades respecto a la citada estructura constituye, hoy en día, una línea de investigación fructífera y de múltiples aplicaciones.

Este estudio comenzó en el siglo XIX con el tratamiento de las curvas y superficies algebraicas, que propició el desarrollo de la teoría de subvariedades de una variedad casi Hermítica. A este respecto, cabe destacar que algunos matemáticos importantes de la época, como Riemann, Picard, Enriques, Castelnuovo, Severi, Segre,..., trabajaron en este área, iniciando el tratamiento de variedades complejas como objetos abstractos. Sin embargo, fueron J.A. Schouten y D. van Dantzing [56, 57], a principios de la década de los años 30 del siglo XX, los primeros que intentaron transferir los resultados de la Geometría Diferencial de espacios con métrica Riemanniana y conexión afín al caso de espacios con estructuras complejas, haciendo aparecer en sus trabajos un espacio Hermítico con una conexión unitaria llamada simétrica. De forma independiente, E. Kaehler encontró un espacio con la misma conexión en 1933 [44], siendo conocido hoy en día dicho espacio como variedad Kaehleriana. Posteriormente, otros matemáticos de renombre, entre los que cabe citar a S. Bochner, H. Guggenheimer y A. Lichnerowicz, han estudiado en profundidad dichos espacios.

En 1947, A. Weil [62] estableció que en una variedad compleja existe un campo de tensores no nulo J de tipo $(1, 1)$ cuyo cuadrado es igual a menos la transformación identidad del fibrado tangente, es decir:

$$J^2 = -I.$$

El mismo año, C. Ehresman definió una variedad casi-compleja como una variedad diferenciable de dimensión par dotada de un campo de tensores J con cuadrado menos la identidad. Por tanto, toda variedad compleja es casi-compleja, siendo el recíproco falso en general. Encontrar condiciones para que una variedad casi-compleja sea compleja ha sido un problema en el que trabajaron matemáticos del calibre de

Ehresman, Libermann, Eckman, Prölicher, Calabi, Spencer, Newlander, Nirenberg y otros y en él juega un papel fundamental un tensor introducido por Nijenhuis en [49].

Una variedad casi-compleja (compleja) recibe el nombre de casi Hermítica (Hermítica) si admite una métrica Riemanniana compatible con el campo de tensores J . La teoría de tales variedades y de sus subvariedades se ha convertido en una de las ramas más importantes de la geometría diferencial moderna y entre las aportaciones a ella se pueden mencionar, además de las ya citadas, la de autores como Boothby, S.S. Chern, Goldberg, Hodge, Ishihara, S. Kobayashi, Matshushima, Nomizu, Sasaki o Yano.

De modo paralelo, se desarrolla la geometría de las variedades de contacto, sus automorfismos y deformaciones. Una variedad diferenciable de dimensión $2k + 1$ se dice variedad de contacto si existe sobre ella una 1-forma diferencial η tal que

$$\eta \wedge (d\eta)^k \neq 0$$

en todos los puntos. El estudio de este tipo de variedades fue iniciado por Boothby y Wang [6] y por S.S. Chern [30], quien prueba que una estructura de contacto admite una reducción del grupo estructural del fibrado tangente a $1 \times U(n)$. Una variedad con esta reducción del grupo estructural es llamada por J.W. Gray una variedad casi-contacto [38]. Bouzon estudia en 1964 esta estructura en \mathbf{R}^{2m+1} y la llama estructura casi-co-compleja [7].

En 1960, Sasaki [53] da un impulso definitivo a la teoría de las variedades casi-contacto al probar que la existencia de una estructura casi-contacto sobre una variedad es equivalente a la existencia de una tripleta (ϕ, ξ, η) , donde ϕ es un campo de tensores de tipo $(1,1)$, ξ es un campo vectorial global y η una 1-forma verificando:

$$\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi; \quad \eta(\xi) = 1.$$

Además, es posible definir en las variedades casi-contacto una métrica Riemanniana compatible con la estructura, apareciendo la noción de variedad casi-contacto métrica.

Los resultados de Sasaki pusieron de manifiesto la relación existente entre las teorías de las variedades casi-complejas y casi-contacto, permitiendo que estas últimas pudieran ser consideradas como la versión en dimensión impar de las primeras. En 1962, Sasaki y Hatakeyama, [54, 55], estudian el tensor de Nijenhuis de ϕ y las propiedades de las variedades casi-contacto cuando el campo ξ es de Killing. Esto permitió la aparición en [41] de las definiciones de estructuras de contacto normales o Sasakianas y K -contacto.

Desde entonces, se han definido y estudiado una gran variedad de estructuras casi-contacto y muchos autores han trabajado en este área. Para una visión de conjunto de la geometría de contacto puede consultarse el libro de Blair [2].

Las nociones de estructura casi-compleja y casi-contacto fueron unificadas, en cierto sentido, por Yano en [63] definiendo el concepto de f -estructura sobre una variedad diferenciable de de dimensión $2m + s$ como un campo de tensores f de tipo (1,1) y rango $2n$ verificando:

$$f^3 + f = 0.$$

Naturalmente, las estructuras casi-complejas y las casi-contacto son f -estructuras con $s = 0$ y $s = 1$, respectivamente.

Posteriormente, varios han sido los autores que han estudiado aspectos relacionados con las f -estructuras, tales como la integrabilidad [43] o el tensor de Nijenhuis de f [42]. El caso $s = 2$ fue tratado de modo especial por Goldberg y Yano [36, 37], surgiendo en [35] la noción de f -estructura con referencias complementadas, donde, además, se prueba que el grupo de automorfismos de una variedad compacta con una f -estructura normal es un grupo de Lie.

Del mismo modo que en los casos anteriores, se puede dotar a toda variedad con una f -estructura (llamada f -variedad) de una métrica Riemanniana compatible con la f -estructura, apareciendo las f -variedades métricas.

En 1970, Blair [3] introdujo para las f -variedades una noción análoga a la de estructura Kaehleriana en el caso casi-complejo o a la estructura Sasakiana en el caso casi-contacto, definiendo las K -variedades y sus casos particulares de S -variedades y C -variedades. En una tal variedad M , existen s (con $s = \dim(M) - \text{rango}(f)$) campos globales, ξ_1, \dots, ξ_s , llamados campos de estructura y sus correspondientes 1-formas duales, η_1, \dots, η_s , tales que:

$$f^2 = -I + \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha} \otimes \xi_{\alpha}; \quad f\xi_{\alpha} = 0, \quad \text{para todo } \alpha = 1, \dots, s.$$

Como ejemplo de S -variedad, Blair consideró las fibraciones principales toroidales [3, 4, 5], generalizando la Fibración de Hopf para obtener un caso concreto de S -variedad que juega el papel del espacio proyectivo complejo de la geometría Kaehleriana o de la esfera unidad de dimensión impar de la geometría Sasakiana y que denotó como H^{2n+s} .

Uno de los aspectos más interesantes del estudio de las subvariedades de f -variedades lo constituye el comportamiento del espacio tangente de la subvariedad con respecto a la f -estructura. Así, en la geometría compleja existen dos clases de subvariedades bien conocidas: las subvariedades complejas (espacios tangentes invariantes por la estructura casi-compleja) y las subvariedades totalmente reales (espacios tangentes anti-invariantes). Más en concreto, si \widetilde{M} es una variedad casi Hermítica con estructura casi-compleja J , se dice que una subvariedad M de \widetilde{M} es compleja si

$$J(T_p(M)) \subseteq T_p(M),$$

para todo punto $p \in M$. Esto quiere decir, además, que M es una subvariedad compleja de \bar{M} si y sólo si para vector no nulo X , tangente a M en un punto cualquiera p , el ángulo entre JX y $T_p(M)$ vale cero.

En cuanto a las subvariedades totalmente reales, éstas vienen caracterizadas por la condición

$$J(T_p(M)) \subseteq T_p^\perp(M),$$

para todo $p \in M$, esto es, para cada vector no nulo $X \in T_p(M)$, el ángulo entre JX y $T_p(M)$ es igual a $\pi/2$, independientemente del punto p .

Ambos tipos de subvariedades tienen su análogo en la geometría de f -variedades y, por tanto, en variedades casi-contacto ($s = 1$). Así, se dice que una subvariedad M de una f -variedad métrica es invariante si

$$f(T_p(M)) \subseteq T_p(M),$$

para todo $p \in M$, mientras que se dice que M es anti-invariante si

$$f(T_p(M)) \subseteq T_p^\perp(M),$$

independientemente del punto $p \in M$. Teniendo en cuenta que los campos de estructura se transforman por f en el cero, se tiene que en una subvariedad invariante (respectivamente, anti-invariante), dado $X \in T_p(M)$ no nulo y ortogonal a los campos de estructura, el ángulo entre fX y $T_p(M)$ es igual a 0 (respectivamente, a $\pi/2$), para todo $p \in M$.

Sin embargo, muy pronto se comprendió que las subvariedades complejas y totalmente reales de una variedad casi hermitica no constituyen una clasificación de todas las subvariedades y lo mismo ocurre para las f -variedades. Por ejemplo, una hipersuperficie no es invariante ni anti-invariante. Por ello, aparecen otros tipos de subvariedades que generalizan a las anteriores, entre las que cabe destacar las CR-subvariedades, definidas por Bejancu y Chen de modo independiente [1, 21, 22], noción que puede extenderse a cualquier f -variedad.

En 1990, Chen [26] presenta un nuevo tipo de subvariedades de una variedad casi Hermítica: las subvariedades slant, que son aquellas tales que el ángulo entre JX y $T_p(M)$ es constante, independientemente del vector no nulo $X \in T_p(M)$ y del punto $p \in M$. Dicho ángulo recibe el nombre de ángulo slant y para los casos en que vale 0 ó $\pi/2$ se obtienen las subvariedades complejas (invariantes) o totalmente reales (anti-invariantes), respectivamente. Por ello, se llama subvariedad slant propia a aquella que no sea ni invariante ni anti-invariante.

Para la geometría de contacto, Lotta [46] en 1998 define las subvariedades slant de modo análogo. Al mismo tiempo, profesores del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Sevilla estudian las subvariedades slant de variedades

de contacto y de variedades Sasakianas [13, 14, 17], obteniendo sendos teoremas de existencia y unicidad para inmersiones slant en variedades Sasakianas de curvatura ϕ -seccional constante [12]. Para conocer el estado actual de la teoría de subvariedades slant, es recomendable el *survey* de A. Carriazo [16].

Continuando con esta línea de trabajo, el objetivo de esta memoria es presentar un concepto análogo de subvariedad slant en el caso de que la variedad ambiente sea una f -variedad cualquiera y estudiar en profundidad el caso de subvariedades slant de S -variedades. Para ello y en primer lugar, en el Capítulo 1 se recapitulan, de forma breve y sin demostración, los resultados necesarios para el desarrollo posterior. Así, las Secciones 1.1 y 1.2 están dedicadas a recordar escuetamente las nociones generales de la teoría de subvariedades Riemannianas y las referentes a las f -variedades, respectivamente. En la Sección 1.3 se muestran los resultados correspondientes a las subvariedades de f -variedades.

La primera cuestión que surge a la hora de intentar definir el concepto de subvariedad slant en una variedad dotada de una f -estructura es saber cuál es el papel de los campos de estructura respecto del fibrado tangente de la variedad. En los distintos trabajos realizados sobre subvariedades de f -variedades (se pueden consultar, por ejemplo, [8, 10, 33, 34, 48]), es usual considerar los casos en que dichos campos son siempre tangentes o siempre normales a la subvariedad. Sin embargo, en la Proposición 1.3.3 se establece un resultado del que se puede deducir que toda subvariedad de una S -variedad tal que existe un campo de estructura normal a la subvariedad es anti-invariante. Por esta razón, se trabajará siempre con subvariedades tangentes a los campos de estructura.

En el Capítulo 2 se presenta la definición de subvariedad slant de una f -variedad métrica, obteniéndose las primeras propiedades referentes a dichas subvariedades. Concretamente, en la Sección 2.1, se define una subvariedad slant como aquella subvariedad M tangente a los campos de estructura tal que para todo vector no nulo $X \in T_p(M)$, fX forma un ángulo constante θ , llamado ángulo slant, con $T_p(M)$, independientemente del punto $p \in M$. Esta definición claramente generaliza la dada por Chen para el caso complejo y por Lotta para el caso de contacto. Por otra parte, también aquí las subvariedades invariantes y anti-invariantes se corresponden con los casos $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$ y, por tanto, tiene sentido hablar de subvariedad slant propia como aquella que no es invariante ni anti-invariante, es decir, aquella en que $\theta \in (0, \pi/2)$.

En esta misma sección se ofrece una definición equivalente de subvariedad slant en términos del concepto de distribución slant, probándose que una subvariedad es slant si y sólo si la distribución en el fibrado tangente que es el complemento ortogonal a la generada por los campos de estructura es, a su vez, slant.

Como resultado fundamental de la sección, aparece el Teorema 2.1.6 que establece una caracterización de las subvariedades slant en función del cuadrado de la proyección

tangente T de la f -estructura sobre la subvariedad. Así, dicho teorema afirma que una subvariedad M de una f -variedad métrica \widetilde{M} , tangente a los campos de estructura, es slant si y sólo si existe una constante $\lambda \in [0, 1]$ tal que

$$T^2 = -\lambda I + \lambda \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha} \otimes \xi_{\alpha},$$

siendo, en tal caso, $\lambda = \cos^2\theta$, para θ el ángulo slant de M .

La Sección 2.2 está dedicada al estudio de la dimensión de una subvariedad slant. La menor dimensión podría ser s (el número de campos de estructura), pero en este caso, al no haber campos tangentes ortogonales a los campos de estructura y transformarse éstos por la f -estructura en cero, no tiene sentido hablar de ángulo slant. Además, se puede comprobar sin dificultad que no pueden existir subvariedades slant no anti-invariantes de dimensión $1+s$. Por ello, en lo sucesivo se trabajará siempre con subvariedades slant de dimensión mayor o igual que $2+s$ que, en virtud de (2.2.9), estarán inmersas en f -variedades de dimensión mayor o igual que $4+s$, siempre que la subvariedad no sea invariante. Finalmente, se prueba en el Teorema 2.2.3 que cualquier subvariedad slant no anti-invariante tiene dimensión par o impar según sea par o impar el número de campos de estructura.

Como se han caracterizado las subvariedades slant en términos del operador $Q = T^2$ y, puesto que, en el caso casi Hermítico las subvariedades slant verifican que $\nabla Q = 0$, siendo ∇ la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica (de hecho, en cierto sentido, esta condición caracteriza a las subvariedades slant, según se puede ver en [23, 26]), parece interesante comprobar si este resultado también se verifica para subvariedades slant de f -variedades. Así, en la Sección 2.3 se estudia ∇Q para las subvariedades slant de una f -variedad métrica cuya 2-forma fundamental coincide con $d\eta_{\alpha}$, para todo $\alpha = 1, \dots, s$ y cuyos campos de estructura son todos campos de Killing, que corresponde a una variedad K -contacto cuando $s = 1$. Sin embargo, el Corolario 2.3.2 asegura que, con estas hipótesis, $\nabla Q = 0$ si y sólo si la subvariedad es anti-invariante. Por ello, en la Proposición 2.3.3 se encuentra una expresión de ∇Q que sirve para caracterizar las subvariedades slant en el Teorema 2.3.4.

Se sabe que si M es una subvariedad invariante, tangente a los campos de estructura, de una S -variedad \widetilde{M} , la estructura de \widetilde{M} induce de manera natural una S -estructura sobre M ([34]). Por ello, en la Sección 2.4 se pretende estudiar bajo qué condiciones cabe esperar una S -estructura inducida sobre M cuando ésta sea una subvariedad slant no necesariamente invariante.

En el caso de subvariedades slant de una variedad Kaehleriana, Chen introduce en ([26]) la noción de *subvariedad slant Kaehleriana* como aquella subvariedad slant propia que verifica $\nabla P = 0$, siendo P la proyección ortogonal sobre la subvariedad de la estructura casi-compleja de la variedad ambiente. En estas condiciones, se prueba

fácilmente que la subvariedad es Kaehleriana con respecto a la métrica inducida y con la estructura casi-compleja dada por $\tilde{J} = (\sec\theta)P$, donde θ denota el ángulo slant de la subvariedad. En nuestro caso, dada una subvariedad slant, no anti-invariante, de una f -variedad métrica, se puede inducir en ella, de manera inmediata una f -estructura métrica dada por $\bar{f} = (\sec\theta)T$ y que tiene los mismos campos de estructura, según se prueba en la Proposición 2.4.1. En particular, si $\theta = 0$, la estructura inducida sobre la subvariedad invariante M es la usual ($\bar{f} = T$).

Por tanto, parece adecuado intentar trasladar los resultados conocidos en los casos complejos y contacto al caso de S -variedades. Se trataría, pues, de buscar una condición adecuada sobre ∇T que permita inducir sobre la subvariedad una S -estructura. Sin embargo, de la Proposición 2.4.3 se deduce que el método que se ha seguido no ofrece resultados satisfactorios. De hecho, es fácil ver que, si M es slant propia, la estructura inducida por \bar{f} ni siquiera es f -estructura métrica con 2-forma fundamental $\bar{F} = d\eta_\alpha$ para todo $\alpha = 1, \dots, s$.

A la vista de lo anterior, se plantea a continuación la posibilidad de inducir una S -estructura sobre la subvariedad slant de forma diferente, encontrando, obviamente, las condiciones necesarias para ello. Sin embargo, el Corolario 2.4.5 prueba que, con cualquier estructura, una subvariedad slant de una S -variedad es una S -variedad si y sólo si es invariante. No obstante, se puede plantear un objetivo menos ambicioso: considerar inmersiones slant entre f -variedades métricas sin más condiciones. En este caso, se obtienen resultados positivos, como el Teorema 2.4.10 y el Corolario 2.4.11, donde esencialmente aparecen nuevas caracterizaciones de las subvariedades slant.

El Capítulo 3 está dedicado a obtener ejemplos de subvariedades slant en f -variedades métricas. En primer lugar, en la Sección 3.1, se prueba en la Proposición 3.1.1 que toda subvariedad slant de una variedad casi Hermítica proporciona un ejemplo de una variedad slant en una f -variedad métrica sin más que efectuar el producto usual por \mathbf{R}^s . Sin embargo, este método no permite obtener subvariedades slant no anti-invariantes de una S -variedad. Por ello, en la Sección 3.2 se dan diferentes ejemplos de subvariedades slant en \mathbf{R}^{2m+s} dotado de su S -estructura estándar [40]. En particular, cabe destacar el Teorema 3.2.3 que proporciona un método para encontrar ejemplos en \mathbf{R}^{4+s} a partir de los que da Chen en [23] para \mathbf{C}^2 . Finalmente, en la Sección 3.3 se presenta un método que produce ejemplos de subvariedades slant en la S -variedad H^{2n+s} , introducida por Blair en [3] como generalización de la Fibración de Hopf.

En nuestra opinión, merece una mención especial la cantidad de ejemplos de subvariedades slant de f -variedades que se incluyen en este capítulo. Por una parte, esto demuestra el interés del trabajo realizado, al quedar patente la existencia de los objetos que se estudian. Por otra, la diversidad de ejemplos permitirá ilustrar la necesidad y la suficiencia de las condiciones de muchos de los teoremas que se probarán en el posterior desarrollo de la memoria. Esto queda claramente de manifiesto en el Capítulo 4

que está dedicado al estudio de ciertos tipos de subvariedades slant en una S -variedad, cuyas definiciones están íntimamente relacionadas con la segunda forma fundamental de la inmersión. Así, la Sección 4.1 empieza mostrando que no existen subvariedades slant no invariantes totalmente geodésicas o totalmente umbilicales. Por ello, se hace necesario trabajar con otras subvariedades donde el comportamiento de la segunda forma fundamental de la inmersión esté más ligado a la f -estructura: las subvariedades slant totalmente f -geodésicas y totalmente f -umbilicales, introducidas por Ornea [50] y las subvariedades slant pseudo- f -umbilicales, que quedan ilustradas por los ejemplos del capítulo anterior. Con todo, el resultado más importante de esta sección es el Teorema 4.1.5, que proporciona condiciones suficientes para que una subvariedad slant propia y minimal de una S -variedad sea austera, es decir, verifique que el conjunto de autovalores de A_V , para cada $V \in T^\perp M$, sea invariante al multiplicar por -1 . Debe hacerse notar aquí que la condición de austeridad, introducida por Harvey y Lawson [39] en el contexto de subvariedades Lagrangianas especiales en espacios Euclideos, es mucho más fuerte que la condición de minimalidad. Por otra parte, estas condiciones suficientes de austeridad son las correspondientes en el caso de S -variedades a las dadas por Chen en el Teorema 3.8 de [23] para subvariedades slant propias y austeras de variedades Kaehlerianas. Además, se tiene que las subvariedades slant del Ejemplo 3.2.4, con ángulo slant $\theta \in (0, \pi/2)$, son austeras.

En la Sección 4.2 se estudian las subvariedades slant propias de S -variedades con menor dimensión, esto es, con dimensión $2 + s$, presentando algunos teoremas de caracterización para estas subvariedades en términos de la derivada covariante del operador T . En la Sección 4.3, este estudio se particulariza a las subvariedades slant minimales de dimensión $2 + s$ de una S -variedad, probando, en el Teorema 4.3.3, una caracterización de tales subvariedades en términos de la derivada covariante del operador proyección de la f -estructura sobre la subvariedad en el conjunto de los campos normales a la subvariedad. Cabe destacar que el teorema anterior es el correspondiente en S -variedades al Teorema 5.5 de [26], probado por Chen para superficies en variedades Kaehlerianas de dimensión 4 y que, además, se verifica también para subvariedades slant no propias.

A continuación, en el Teorema 4.3.5, se prueba que una subvariedad slant propia de dimensión $2 + s$ en una S -variedad de dimensión $4 + s$ es minimal si es anti-invariante respecto a otra f -estructura sobre la misma variedad ambiente que verifica una cierta condición adicional. De hecho, este es el análogo al Teorema 4.2 de [23], probado por Chen en el caso Kaehleriano. Sin embargo, en virtud de la Proposición 3.2.1, el Teorema 4.3.5 es la mejor versión posible del Teorema de Chen para S -variedades, ya que en una misma variedad no es posible disponer de S -estructuras diferentes compatibles. Se termina este capítulo dando un ejemplo que ilustra esta situación.

En [24] Chen afirma que “encontrar relaciones simples entre los principales invariantes extrínsecos e intrínsecos de una subvariedad” es uno de los problemas básicos

en la teoría de subvariedades. En este contexto, estableció ciertas relaciones entre diferentes curvaturas y el vector curvatura media para subvariedades en los llamados espacios reales de curvatura seccional constante [19, 20, 24, 25, 27]. Versiones de estas relaciones han sido probadas, posteriormente, para el caso de inmersiones slant en Geometría Sasakiana [15, 31, 61]. Por ello, en el Capítulo 5 se pretende obtener las versiones de las citadas relaciones para subvariedades slant de S -variedades con curvatura f -seccional constante. Así, en la Sección 5.1, se prueba una desigualdad entre un invariante Riemanniano que es función de la curvatura escalar y de las curvaturas seccionales de una tal subvariedad slant y el módulo al cuadrado del vector curvatura media, el ángulo slant y la curvatura f -seccional constante de la S -variedad ambiente y se caracteriza el caso de la igualdad cuando la dimensión de la subvariedad sea la menor posible, es decir, $2 + s$. Además, en la Sección 5.2, se establece una desigualdad entre la curvatura de Ricci y el módulo al cuadrado del vector curvatura media, que mejora la obtenida en [61] para el caso Sasakiano y se estudia, de nuevo, el caso de la igualdad. Finalmente, en la Sección 5.3, la relación que se presenta es entre la función curvatura seccional de la subvariedad y el endomorfismo de Weingarten (el “operador forma”) asociado al vector curvatura media.

Antes de empezar, quisiera mostrar mi más sincero agradecimiento a todas aquellas personas que han hecho posible que hoy mi sueño se haya hecho realidad. Fundamental en el desarrollo y elaboración, ha sido la colaboración desinteresada y plena del profesor D. Luis Manuel Fernández Fernández. Agradecerle de todo corazón, que más que un tutor haya sido un amigo, que ha hecho que mis gigantes se hayan convertido en simples molinos de viento. Por otra parte, mostrar mi reconocimiento al profesor D. Alfonso Carriazo Rubio, por su entera disponibilidad para ayudarme a solucionar cualquier tipo de duda. En general a todo el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Sevilla, por haberme acogido en el momento en que me planteé realizar trabajos de investigación.

Por supuesto a mis padres y hermano, por su apoyo incondicional, su confianza en mis posibilidades y el aliento constante en mi trabajo. Para terminar, quisiera agradecer a José Manuel Martín Martín, que siempre haya estado ahí como punto de apoyo fundamental.

Gracias a todos por vuestra ayuda. El mérito también es vuestro.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se van a recoger las definiciones y resultados necesarios para el desarrollo de la memoria.

La Sección 1.1 está dedicada a recordar brevemente las nociones de la Teoría de Subvariedades Riemannianas.

La Sección 1.2 se dedica a presentar sin demostración los resultados referentes a la Geometría de variedades dotadas de una f -estructura. La referencia general será el artículo de K. Yano de 1963 ([63]), donde introdujo el concepto de f -estructura. En particular, serán de especial interés, las K -estructuras, introducidas por D.E. Blair en 1970 ([3]), que generalizan las estructuras complejas y de contacto.

Finalmente, en la Sección 1.3, se estudian las subvariedades de f -variedades, atendiendo al comportamiento del fibrado tangente a la subvariedad respecto a la f -estructura.

1.1. Nociones de Teoría de Subvariedades Riemannianas.

Sea M una variedad Riemanniana isométricamente inmersa en otra variedad Riemanniana \widetilde{M} . En lo que sigue se denota por g tanto a la métrica de \widetilde{M} como a la inducida en M por la inmersión. Sean \widetilde{TM} el álgebra de Lie de los campos tangentes a \widetilde{M} , TM el álgebra de Lie de los campos tangentes a M y $T^\perp M$ el conjunto de los campos tangentes a \widetilde{M} y normales a M , es decir, se tiene la descomposición ortogonal $\widetilde{TM} = TM \oplus T^\perp M$.

Si se denota por ∇ y $\widetilde{\nabla}$ a las conexiones de Levi-Civita de M y \widetilde{M} , respectivamente, se verifican las siguientes expresiones

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X, Y) \quad \text{Fórmula de Gauss,} \quad (1.1.1)$$

$$\tilde{\nabla}_X V = -A_V X + D_X V \quad \text{Fórmula de Weingarten,} \quad (1.1.2)$$

para todos $X, Y \in TM$ y todo $V \in T^\perp M$, donde D es la conexión en el fibrado normal (*conexión normal*), σ la *segunda forma fundamental* de M en \tilde{M} y A_V el *endomorfismo de Weingarten* asociado a V . El endomorfismo de Weingarten y la segunda forma fundamental están relacionados mediante

$$g(A_V X, Y) = g(\sigma(X, Y), V), \quad (1.1.3)$$

para todos $X, Y \in TM$ y para todo $V \in T^\perp M$. Se define el *vector curvatura media* de M por

$$H = \frac{1}{m} \text{traza}(\sigma) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma(e_i, e_i), \quad (1.1.4)$$

donde $m = \dim M$ y $\{e_1, \dots, e_m\}$ es una referencia local ortonormal del fibrado tangente TM . Se dice que M es *minimal* si H se anula idénticamente ó, equivalentemente, si $\text{traza}(A_V) = 0$, para todo $V \in T^\perp M$. Se dice que M es *totalmente geodésica* en \tilde{M} si $\sigma(X, Y) = 0$, para todos $X, Y \in TM$ ó, equivalentemente, si $A_V = 0$, para todo $V \in T^\perp M$. Se dice que M es *totalmente umbilical* si $\sigma(X, Y) = g(X, Y)H$, para todos $X, Y \in TM$.

Si \tilde{M} es de dimensión \tilde{m} , se puede elegir una referencia local ortonormal de campos de \tilde{M} ,

$$\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{\tilde{m}}\},$$

tales que, para todo $p \in M$, los vectores $e_1(p), \dots, e_m(p)$ sean tangentes a M y, por tanto, $e_{m+1}(p), \dots, e_{\tilde{m}}(p)$ sean normales a M . Entonces, para cada campo $X \in TM$, se puede escribir:

$$\tilde{\nabla}_X e_i = \sum_{j=1}^m w_i^j(X) e_j + \sum_{k=m+1}^{\tilde{m}} w_i^k(X) e_k, \quad (1.1.5)$$

$$\tilde{\nabla}_X e_r = \sum_{j=1}^m w_r^j(X) e_j + \sum_{k=m+1}^{\tilde{m}} w_r^k(X) e_k, \quad (1.1.6)$$

para $i \in \{1, \dots, m\}$ y $r \in \{m+1, \dots, \tilde{m}\}$. Las 1-formas w_i^j, w_i^k, w_r^k dadas por las ecuaciones (1.1.5) y (1.1.6) reciben el nombre de *formas de conexión* de M en \tilde{M} . De modo inmediato se verifica que

$$w_j^i + w_i^j = 0, \quad (1.1.7)$$

para todos $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

Denotando por R y \tilde{R} a los tensores de curvatura de M y \tilde{M} asociados a las conexiones ∇ y $\tilde{\nabla}$, respectivamente y por R^D al tensor de curvatura de la conexión normal D , se tienen la ecuaciones

$$\tilde{R}(X, Y; Z, W) = R(X, Y; Z, W) + g(\sigma(X, Z), \sigma(Y, W)) - g(\sigma(X, W), \sigma(Y, Z)), \quad (1.1.8)$$

llamada *Ecuación de Gauss* y

$$R^D(X, Y; U, V) = \tilde{R}(X, Y; U, V) + g([A_U, A_V](X), Y), \quad (1.1.9)$$

llamada *Ecuación de Ricci*, donde $X, Y, Z, W \in TM$ y $U, V \in T^\perp M$ son campos cualesquiera.

Con respecto a la segunda forma fundamental, se define la *derivación de Van der Waerden-Bortolotti* de σ con respecto a la conexión $\tilde{\nabla}$ como

$$(\tilde{\nabla}_X \sigma)(Y, Z) = D_X(\sigma(Y, Z)) - \sigma(\nabla_X Y, Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z), \quad (1.1.10)$$

con $X, Y, Z \in TM$. Entonces la *Ecuación de Codazzi* viene dada por

$$(\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp = (\tilde{\nabla}_X \sigma)(Y, Z) - (\tilde{\nabla}_Y \sigma)(X, Z), \quad (1.1.11)$$

para todos $X, Y, Z \in TM$, donde $(\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp$ denota la componente normal de $\tilde{R}(X, Y)Z$.

1.2. f -variedades.

Sea \tilde{M} una variedad diferenciable. Se dice que sobre \tilde{M} hay definida una f -estructura ([63]) si existe un campo de tensores no nulo f de tipo (1,1) tal que

$$f^3 + f = 0.$$

A partir de ahora, se supondrá que $\dim \tilde{M} = 2n + s$ ($s \geq 0$) y que hay definida una f -estructura f de rango $2n$ sobre \tilde{M} . Si en \tilde{M} existen s campos globales ξ_1, \dots, ξ_s , llamados *campos de estructura* y s 1-formas η_1, \dots, η_s tales que

$$\eta_\alpha(\xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, s \quad (1.2.1)$$

$$f^2 = -I + \sum_{\alpha} \xi_\alpha \otimes \eta_\alpha, \quad (1.2.2)$$

se dice que \widetilde{M} es una f -variedad. A partir de (1.2.1) y (1.2.2), es inmediato probar que

$$f\xi_\alpha = 0, \quad (1.2.3)$$

$$\eta_\alpha \circ f = 0, \quad (1.2.4)$$

para todo $\alpha = 1, \dots, s$. En estas condiciones, existe en \widetilde{M} una métrica Riemanniana g tal que:

$$g(X, Y) = g(fX, fY) + \Phi(X, Y), \quad (1.2.5)$$

para todos $X, Y \in T\widetilde{M}$, donde

$$\Phi(X, Y) = \sum_{\alpha} \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y). \quad (1.2.6)$$

A g se la denomina *métrica asociada a la f -estructura* y se dice que \widetilde{M} tiene una *f -estructura métrica*. Al trio (M, f, g) se le denomina *f -variedad métrica*.

Haciendo $Y = \xi_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, s$) en (1.2.5) se obtiene

$$g(X, \xi_\alpha) = \eta_\alpha(X), \quad (1.2.7)$$

para todo $X \in T\widetilde{M}$. Además se deduce de (1.2.5) que los campos de estructura son ortonormales dos a dos para la métrica g . En una f -variedad métrica, se cumple que

$$g(X, fY) + g(fX, Y) = 0, \quad (1.2.8)$$

para todos $X, Y \in T\widetilde{M}$, lo cual implica, en particular, que

$$g(X, fX) = 0, \quad (1.2.9)$$

para todo $X \in T\widetilde{M}$. Un hecho destacable es que la existencia de una f -estructura sobre \widetilde{M}^{2n+s} con rango $2n$, es equivalente a una reducción del grupo estructural del fibrado tangente a $\mathcal{U}(n) \times \mathcal{O}(s)$ ([3]).

En una f -variedad métrica $(\widetilde{M}^{2n+s}, f, g)$, se pueden considerar bases locales y ortonormales de campos tangentes particularmente útiles, cuyo proceso de construcción es el siguiente: se considera U un entorno coordinado y se toma e_1 campo unitario en U ortogonal a todos los campos de estructura. Entonces, en virtud de (1.2.1)-(1.2.9), fe_1 es unitario y ortogonal a todos los campos de estructura y a e_1 . A continuación, se considera e_2 un campo unitario en U ortogonal a e_1, fe_1 y a todos los campos de estructura. Se comprueba fácilmente que fe_2 es unitario y ortogonal a e_1, fe_1, e_2 y a los campos de estructura. Procediendo de esta forma, se obtiene una base local ortonormal de campos tangentes a \widetilde{M}

$$\{e_1, \dots, e_n, fe_1, \dots, fe_n, \xi_1, \dots, \xi_s\},$$

denominada *f-base*.

Se denota por F la 2-forma en \widetilde{M} definida por

$$F(X, Y) = g(X, fY), \quad (1.2.10)$$

para todos $X, Y \in T\widetilde{M}$. La 2-forma F recibe el nombre de *2-forma fundamental* de \widetilde{M} . En virtud de (1.2.8), se tiene que F es antisimétrica. Además, como f tiene rango $2n$, se verifica que

$$\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_s \wedge F^n \neq 0, \quad (1.2.11)$$

de donde, en particular, se deduce que toda *f-variedad* es orientable.

Un tipo especial de *f-variedades*, son aquellas en las que $F = d\eta_\alpha$, para todo $\alpha = 1, \dots, s$. En este caso, según (1.2.11) se tiene que

$$\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_s \wedge (d\eta_\alpha)^n \neq 0, \quad (1.2.12)$$

para todo $\alpha = 1, \dots, s$.

Se dice que la *f-estructura* es *normal* si

$$[f, f] + 2 \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \otimes d\eta_{\alpha} = 0, \quad (1.2.13)$$

donde $[f, f]$ es el *tensor de Nijenhuis* de f , definido por

$$[f, f](X, Y) = [fX, fY] - [X, Y] - f[fX, Y] - f[X, fY], \quad (1.2.14)$$

para todos $X, Y \in T\widetilde{M}$.

Dentro de las variedades con *f-estructura* se puede hablar de diferentes tipos atendiendo a determinadas características comunes. Así, dada \widetilde{M} con *f-estructura métrica*, se dice que \widetilde{M} es una *K-variedad* si es normal y tiene 2-forma fundamental cerrada. Una *K-variedad* se dice que es una *S-variedad* si $F = d\eta_\alpha$ y se dice que es una *C-variedad* si $d\eta_\alpha = 0$, en ambos casos para todo $\alpha = 1, \dots, s$.

En una *f-variedad*, se denota por \mathcal{M} a la distribución generada por los campos de estructura y por \mathcal{L} a su distribución complemento ortogonal. Se tiene, por tanto, la descomposición ortogonal

$$T\widetilde{M} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}. \quad (1.2.15)$$

Obsérvese que si $s = 1$, una *K-variedad* es una variedad *K-contacto normal*, una *S-variedad* es una variedad *Sasakiana* y una *C-variedad* es una variedad *cosimpléctica*, siendo \mathcal{L} la distribución de contacto. En el caso $s = 0$, se verifica que toda *K-variedad* es una variedad *Kaehleriana*.

En una *K-variedad* \widetilde{M} , los campos de estructura son de Killing y, en consecuencia, si $\widetilde{\nabla}$ denota la conexión de Levi-Civita de \widetilde{M} ,

$$(\widetilde{\nabla}_X \eta_\alpha)Y - (\widetilde{\nabla}_Y \eta_\alpha)X = 2(\widetilde{\nabla}_X \eta_\alpha)Y = -2(\widetilde{\nabla}_Y \eta_\alpha)X \quad (1.2.16)$$

y:

$$d\eta_\alpha(X, Y) = (\tilde{\nabla}_X \eta_\alpha)Y \quad X \in T\tilde{M}, \quad \alpha = 1, \dots, s. \quad (1.2.17)$$

Además, $(\tilde{\nabla}_X f)\xi_\alpha = -\tilde{\nabla}_{fX}\xi_\alpha$ y, por tanto:

$$\tilde{\nabla}_X \xi_\alpha = -f\tilde{\nabla}_{fX}\xi_\alpha, \quad X \in T\tilde{M}, \quad \alpha = 1, \dots, s. \quad (1.2.18)$$

En el caso de S -variedades, se verifica que ([34]):

$$\nabla_X \xi_\alpha = -fX, \quad X \in T\tilde{M}, \quad \alpha = 1, \dots, s. \quad (1.2.19)$$

Un ejemplo especialmente interesante de S -variedad es el denominado *Fibrado Principal Toroidal* ([4, 33]), cuya construcción se describe a continuación.

A partir de la fibración de Hopf,

$$\pi : S^{2n+1} \longrightarrow PC^n, \quad (1.2.20)$$

se considera

$$H^{2n+s} = \{(p_1, \dots, p_s) \in S^{2n+1} \times \dots \times S^{2n+1} \mid \pi(p_1) = \dots = \pi(p_s)\}, \quad (1.2.21)$$

al que, usando la aplicación diagonal Δ , se le dota de una estructura de Fibrado Principal Toroidal sobre PC^n mediante el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^{2n+s} & \xrightarrow{\bar{\Delta}} & S^{2n+1} \times \dots \times S^{2n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \times \dots \times \pi \\ PC^n & \xrightarrow{\Delta} & PC^n \times \dots \times PC^n. \end{array}$$

Si ω_α denota la forma de contacto en S^{2n+1} y se define η_α en H^{2n+s} por

$$\eta_\alpha = \bar{\Delta}^*|_{S^{2n+1}}(\omega_\alpha), \quad \alpha = 1, \dots, s, \quad (1.2.22)$$

entonces H^{2n+s} es una S -variedad.

La siguiente caracterización será especialmente útil en el desarrollo de resultados posteriores:

Proposición 1.2.1. ([3]). *Una K -variedad \tilde{M} es una S -variedad si y sólo si*

$$(\tilde{\nabla}_X f)Y = \sum_{\alpha} [g(fX, fY)\xi_\alpha + \eta_\alpha(Y)f^2X], \quad (1.2.23)$$

para todos $X, Y \in T\tilde{M}$.

Con respecto al tensor de curvatura \tilde{R} asociado a $\tilde{\nabla}$, en una S -variedad se verifica que

$$\tilde{R}(X, \xi_\alpha; \xi_\alpha, X) = 1, \quad (1.2.24)$$

para todo $X \in \mathcal{L}$ unitario. Además,

$$\tilde{R}(X, Y)\xi_\alpha = \sum_{\beta} [\eta_\beta(X)f^2Y - \eta_\beta(Y)f^2X], \quad (1.2.25)$$

para todos $X, Y \in T\tilde{M}$ y para todo $\alpha = 1, \dots, s$.

De (1.2.24) se deduce directamente que la curvatura seccional de aquellas secciones que contienen a uno de los campos de estructura en una S -variedad es 1. Por ello, la curvatura seccional no da información especial en este tipo de variedades. Se hace necesario, entonces, considerar un tipo especial de secciones planas del espacio tangente en un punto cualquiera. Así, una sección plana π del espacio tangente en un punto p de una f -variedad \tilde{M} se llama f -sección si está generada por $X_p \in \mathcal{L}_p$ y por fX_p . La curvatura seccional $K(\pi)$ de la f -sección π determinada por un campo X recibe el nombre de *curvatura f -seccional*. Se dice que una S -variedad \tilde{M} es una S -variedad de curvatura f -seccional constante c y se denota por $\tilde{M}(c)$, si tiene curvatura f -seccional constante c .

Teorema 1.2.2. ([45]) *El tensor de curvatura de una S -variedad de curvatura f -seccional constante $\tilde{M}(c)$ viene dado por*

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y; Z, W) = & \sum_{\alpha, \beta} \{g(fX, fW)\eta_\alpha(Y)\eta_\beta(Z) - g(fX, fZ)\eta_\alpha(Y)\eta_\beta(W) + \\ & + g(fY, fZ)\eta_\alpha(X)\eta_\beta(W) - g(fY, fW)\eta_\alpha(X)\eta_\beta(Z)\} + \\ & + \frac{c+3s}{4} \{g(X, W)g(fY, fZ) - g(X, Z)g(fY, fW) + \\ & + g(fY, fW)\Phi(X, Z) - g(fY, fZ)\Phi(X, W)\} + \\ & + \frac{c-s}{4} \{F(X, W)F(Y, Z) - F(X, Z)F(Y, W) - 2F(X, Y)F(Z, W)\}, \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

para todos $X, Y, Z, W \in T\tilde{M}$

1.3. Subvariedades de f -variedades.

Sea M una subvariedad isométricamente inmersa en una f -variedad métrica \widetilde{M} , cuya métrica se denotará también por g . Dado $X \in TM$, se escribe

$$fX = TX + NX, \quad (1.3.1)$$

donde TX y NX son las componentes tangente y normal de fX , respectivamente. Entonces, T es un endomorfismo del fibrado tangente de M y N es una 1-forma de TM con valores en $T^\perp M$.

La subvariedad M se dirá *invariante*, si N se anula idénticamente, esto es, si $fX \in TM$ para todo $X \in TM$. Por otra parte, M se dirá *anti-invariante* si T se anula idénticamente, esto es, si $fX \in T^\perp M$ para todo $X \in TM$.

Para un campo $V \in T^\perp M$, se escribe

$$fV = tV + nV, \quad (1.3.2)$$

donde tV y nV denotan, respectivamente, la parte tangente y normal de fV . Entonces, t es una 1-forma de $T^\perp M$ con valores en TM y n es un endomorfismo de $T^\perp M$. Usando (1.2.8), (1.3.1) y (1.3.2) se obtiene:

Proposición 1.3.1. *Sea M subvariedad de una f -variedad \widetilde{M} . Entonces, dados $X, Y \in TM$, $U, V \in T^\perp M$, se verifican:*

$$g(TX, Y) = -g(X, TY), \quad (1.3.3)$$

$$g(nV, U) = -g(V, nU), \quad (1.3.4)$$

$$g(NX, V) = -g(X, tV). \quad (1.3.5)$$

De (1.3.5), se sigue, que si M es invariante, entonces $t \equiv 0$. Por otra parte, en virtud de (1.2.2), (1.3.1) y (1.3.2) se tiene:

Proposición 1.3.2. *Sea M subvariedad de una f -variedad \widetilde{M} tangente a los campos de estructura. Entonces, si $X \in TM$ y $V \in T^\perp M$, se verifican:*

$$-X + \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha} = T^2 X + tNX, \quad (1.3.6)$$

$$NTX + nNX = 0, \quad (1.3.7)$$

$$TtV + tnV = 0, \quad (1.3.8)$$

$$-V = NtV + n^2V. \quad (1.3.9)$$

La hipótesis relativa a la tangencia de los campos de estructura viene justificada por el resultado de la siguiente proposición.

Proposición 1.3.3. *Sea M una subvariedad de una f -variedad \widetilde{M} con $F = d\eta_\alpha$, para todo $\alpha = 1, \dots, s$. Entonces, si existe algún $\xi_\alpha \in T^\perp M$, M es anti-invariante.*

En el caso en que la variedad ambiente sea una S -variedad se tiene:

Proposición 1.3.4. *Sea M subvariedad de una S -variedad \widetilde{M} tangente a los campos de estructura. Entonces, si $X \in TM$, $V \in T^\perp M$, $\alpha, \beta \in \{1, \dots, s\}$, se verifica*

$$\nabla_X \xi_\alpha = -TX, \quad (1.3.10)$$

$$\sigma(X, \xi_\alpha) = -NX, \quad (1.3.11)$$

$$A_V \xi_\alpha = tV, \quad (1.3.12)$$

$$\sigma(\xi_\alpha, \xi_\beta) = 0, \quad (1.3.13)$$

donde ∇ denota la conexión de Levi-Civita de M .

Sea ahora una subvariedad invariante M de una S -variedad \widetilde{M} tangente a los campos de estructura. Es fácil probar que M es también una S -variedad. Además, aplicando la fórmula de Gauss, se verifica, para todos $X, Y \in TM$, que

$$\widetilde{\nabla}_X fY = \nabla_X fY + \sigma(X, fY) \quad (1.3.14)$$

y que

$$f(\widetilde{\nabla}_X Y) = f(\nabla_X Y) + f(\sigma(X, Y)), \quad (1.3.15)$$

de donde, al restarlas se obtiene:

$$(\widetilde{\nabla}_X f)Y = (\nabla_X f)Y + \sigma(X, fY) - f(\sigma(X, Y)). \quad (1.3.16)$$

Por tanto, usando (1.2.23), se llega a las siguientes expresiones, separando componentes tangente y normal:

$$(\nabla_X f)Y = \sum_{\alpha} [g(fX, fY)\xi_\alpha + \eta_\alpha(Y)f^2X], \quad (1.3.17)$$

$$\sigma(X, fY) = f(\sigma(X, Y)), \quad X, Y \in TM. \quad (1.3.18)$$

En virtud de la ecuación de Gauss (1.1.8) y usando (1.2.2), (1.2.5) y (1.3.18), se deduce que

$$R(X, fX; X, fX) = \widetilde{R}(X, fX; X, fX) + 2g(\sigma(X, X), \sigma(X, X)), \quad (1.3.19)$$

para todo $X \in TM$, donde R denota el tensor de curvatura de M , respecto a la conexión afín ∇ .

Finalmente y como ejemplo, cabe destacar que si M^{m+s} es una subvariedad de H^{2n+s} , tangente a los campos de estructura y N^m una subvariedad de PC^n tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M^{m+s} & \xrightarrow{i} & H^{2n+s} \\ \downarrow & & \downarrow \\ N^m & \xrightarrow{i'} & PC^n \end{array}$$

conmuta y la inmersión i es un difeomorfismo en las fibras, entonces, M^{m+s} es una subvariedad invariante (resp., anti-invariante) de H^{2n+s} si y sólo si N^m es una subvariedad compleja (resp., totalmente real) de PC^n ([33]).

Capítulo 2

Subvariedades Slant de f -variedades

En este capítulo, se presenta la definición de subvariedad slant de una f -variedad métrica y se obtienen las primeras propiedades referentes a dichas subvariedades.

En la Sección 2.1 se define una *subvariedad slant* como aquella subvariedad M , tangente a los campos de estructura de una f -variedad, tal que para todo campo tangente X , que esté en la distribución \mathcal{L} , fX forma un ángulo constante con TM , llamado *ángulo slant*. Además, se ofrece una definición equivalente de subvariedad slant en términos de un nuevo concepto, el de *distribución slant*.

En la Sección 2.2 se hace un estudio sobre la dimensión de una subvariedad slant. A continuación, se examinan algunas propiedades de las subvariedades slant en f -variedades con $F = d\eta_\alpha$, para todo $\alpha = 1, \dots, s$. En concreto, resulta especialmente interesante el estudio de tales subvariedades slant en el caso en que los campos de estructura sean de Killing, pues este hecho permitirá demostrar importantes resultados teóricos. Así, en la Sección 2.3 se examinará el valor de ∇T^2 , obteniendo una caracterización de dichas subvariedades. Seguidamente, se realiza un estudio de ∇T y ∇N , hallándose también teoremas de caracterización.

Otro problema, que será tratado en la Sección 2.4, es la posibilidad de inducir una f -estructura métrica que verifique $F = d\eta_\alpha$ sobre una subvariedad slant. En general, se obtendrán resultados que negarán dicha posibilidad.

2.1. Definición de Subvariedad Slant.

Sea M una subvariedad Riemanniana isométricamente inmersa en una f -variedad métrica $(\widetilde{M}, f, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$.

Definición 2.1.1. Para cada vector no nulo $X \in T_x M$, el ángulo $\theta(X)$ entre fX y $T_x M$ se llama **ángulo de Wirtinger** de X .

Con más precisión, si $\varphi : M \rightarrow \widetilde{M}$ denota la inmersión de M en \widetilde{M} y φ_{*x} la diferencial de φ en $x \in M$, siguiendo una notación análoga a la empleada por Maeda, Ohnita y Udagawa en ([47]) para la geometría compleja, dado $X \in T_x M$, el ángulo de Wirtinger $\theta(X)$ de X es, realmente, el ángulo entre $\varphi_{*x}(X)$ y $\varphi_{*x}(T_x M)$ que se puede describir mediante la expresión

$$\cos\theta(X) = \frac{g(\Pi f\varphi_{*x}(X), f\varphi_{*x}(X))}{|\Pi f\varphi_{*x}(X)||f\varphi_{*x}(X)|}, \quad (2.1.1)$$

donde $\Pi : T_{\varphi(x)}\widetilde{M} \rightarrow \varphi_{*x}(T_x M)$ es la proyección ortogonal.

Por analogía con la definición de subvariedad slant de una variedad casi Hermítica establecida por Chen ([23]), se tiene la siguiente definición de subvariedad slant en una f -variedad métrica.

Definición 2.1.2. Se dice que una subvariedad M de una f -variedad métrica \widetilde{M} , tangente a los campos de estructura, es una **subvariedad slant** si el ángulo de Wirtinger $\theta(X)$ es constante, independientemente de la elección de $x \in M$ y del vector $X \in T_x M - \mathcal{M}_x$. En tal caso al ángulo constante θ se le llama **ángulo slant** de la subvariedad M . Para simplificar, se denominará **subvariedad θ -slant** a aquella subvariedad slant con ángulo θ .

Nótese, que esta definición generaliza a la dada para la Geometría Compleja (caso $s = 0$) ([23]) y para la Geometría de Contacto (caso $s = 1$) ([17, 46]). Además, las subvariedades invariantes y anti-invariantes son subvariedades slant con $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$, respectivamente. Por otra parte, la exigencia relativa a que los campos de estructura sean tangentes a la subvariedad viene motivada por la Proposición 1.3.3, ya que, en sus hipótesis, si alguno de los campos de estructura es normal a la subvariedad, entonces $\theta(X) = \pi/2$, para todo vector $X \in T_x M - \mathcal{M}_x$. Como en las S -variedades, objetivo principal de esta memoria, se dan las condiciones de la citada proposición, toda subvariedad slant que fuera normal a alguno de los campos de estructura sería anti-invariante y este tipo de subvariedades ha sido ya ampliamente estudiado (consultar, por ejemplo, [9]).

También se puede introducir la noción de *distribución slant* de una subvariedad en una f -variedad, de manera similar a como lo hace Papaghiuc en [51], en el ámbito de la Geometría Kaehleriana.

Definición 2.1.3. Se dice que una distribución diferenciable \mathcal{D} en M es una **distribución slant** si para todo vector no nulo $X \in \mathcal{D}_x$, con $x \in M$, el ángulo $\theta'(X)$ entre fX y el subespacio vectorial \mathcal{D}_x es constante, es decir, $\theta'(X)$ es independiente

de la elección del punto $x \in M$ y de $X \in \mathcal{D}_x$. En tal caso, el ángulo constante θ' se llama **ángulo slant de la distribución \mathcal{D}** .

A partir de ahora y salvo confusión, se denotará también por \mathcal{L} a la distribución complemento ortogonal de \mathcal{M} en TM , es decir, se escribirá $TM = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$. Cuando se considera esta distribución \mathcal{L} , la relación entre estos ángulos viene dada en la siguiente proposición.

Proposición 2.1.4. Sean x un punto de M y $X \in T_x M$. Entonces, $\theta(X) = \theta'(X)$, donde $\theta'(X)$ representa el ángulo entre fX y \mathcal{L}_x .

Demostración. En virtud de la notación empleada, $\theta(X)$ es el ángulo entre fX y TX , mientras que $\theta'(X)$ es el ángulo entre fX y $\Pi_{\mathcal{L}}X$, donde $\Pi_{\mathcal{L}}$ denota la proyección ortogonal de f sobre \mathcal{L} .

Se supone que $\dim(M) = m + s$ y que

$$\{e_1, \dots, e_m, (\xi_1)_x, \dots, (\xi_s)_x\} \quad (2.1.2)$$

es una base ortonormal de $T_x M$. Entonces, $\{e_1, \dots, e_m\}$ es una base ortonormal de \mathcal{L}_x . Por tanto, según (1.2.4):

$$TX = \sum_{i=1}^m g(fX, e_i)e_i + \sum_{j=1}^s g(fX, (\xi_j)_x)(\xi_j)_x = \sum_{i=1}^m g(fX, e_i)e_i = \Pi_{\mathcal{L}}X,$$

de donde se sigue el resultado. \square

Como consecuencia de esta proposición, está claro que si M es slant, la distribución \mathcal{L} también lo es. Además, el recíproco también es cierto.

Proposición 2.1.5. Una subvariedad M , tangente a los campos de estructura, es slant si y sólo si la distribución \mathcal{L} lo es.

Demostración. Basta probar que si \mathcal{L} es slant, entonces M también lo es. Para ello, se considera $X \in T_x M$, en cuyo caso el ángulo $\theta(X)$ viene dado por

$$\cos\theta(X) = \frac{g(TX, fX)}{|TX||fX|} = \frac{|TX|}{\sqrt{|X|^2 - \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}^2(X)}},$$

pues \widetilde{M} es una f -variedad y $fX = TX + NX$. Por otra parte, tomando una base de $T_x M$ como en (2.1.2),

$$X = \sum_{i=1}^m g(X, e_i)e_i + \sum_{j=1}^s g(X, (\xi_j)_x)(\xi_j)_x = \sum_{i=1}^m g(X, e_i)e_i + \sum_{j=1}^s (\eta_j)_x(X)(\xi_j)_x.$$

A partir de ahora y para simplificar la notación, se suprime el punto x . Entonces,

$$X - \sum_{j=1}^s \eta_j(X) \xi_j = \sum_{i=1}^m g(X, e_i) e_i \in \mathcal{L}$$

y de aquí que

$$\begin{aligned} \cos\theta'(X) &= \frac{g(\Pi_{\mathcal{L}}(X - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha}), f(X - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha}))}{|\Pi_{\mathcal{L}}(X - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha})| |f(X - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha})|} = \\ &= \frac{|\Pi_{\mathcal{L}}(X - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha})|}{|X - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha}|}, \end{aligned}$$

en virtud de (1.2.5), donde $\Pi_{\mathcal{L}}$ denota la proyección ortogonal de f sobre \mathcal{L} . Ahora bien, es claro que

$$\sqrt{|X|^2 - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}^2(X)} = |X - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha}|$$

y que:

$$TX = T(X - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha}) = \Pi_{\mathcal{L}}(X - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha}).$$

Por tanto,

$$\cos\theta(X) = \frac{|\Pi_{\mathcal{L}}(X - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha})|}{|X - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha}|} = \cos\theta'(X - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha}),$$

que es constante al ser slant la distribución \mathcal{L} . \square

Como ya se ha dicho, las subvariedades invariantes y anti-invariantes, ampliamente estudiadas, son casos particulares, para $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$, respectivamente, de

subvariedades slant. Por ello, se dirá que una subvariedad es *slant propia* si el ángulo slant verifica $0 < \theta < \pi/2$. Una tal subvariedad se llamará *subvariedad slant propia*.

Por otra parte, obsérvese que para subvariedades invariantes, $T = f$ y de (1.2.2):

$$T^2 = f^2 = -I + \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha} \otimes \xi_{\alpha}.$$

Para subvariedades anti-invariantes, $T \equiv 0$, por lo que $T^2 = 0$. Estos resultados son generalizables a cualquier subvariedad slant y se pueden caracterizar tales subvariedades en términos de una expresión para T^2 .

Teorema 2.1.6. *Sea M una subvariedad de una f -variedad métrica \widetilde{M} tangente a los campos de estructura. Entonces, M es slant si y sólo si existe una constante $\lambda \in [0, 1]$ tal que:*

$$T^2 = -\lambda I + \lambda \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha} \otimes \xi_{\alpha}. \quad (2.1.3)$$

Además, en este caso, si θ es el ángulo slant de M , se verifica que $\lambda = \cos^2 \theta$.

Demostración. En primer lugar, sea M θ -slant. Si $\theta = \pi/2$, la subvariedad M es anti-invariante, por lo que el resultado se verifica trivialmente para $\lambda = 0$. Se puede suponer, por tanto, que $\theta \neq \pi/2$.

Sea $X \in \mathcal{L}$. Entonces,

$$\cos \theta = \frac{|TX|}{\sqrt{|X|^2 - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}^2(X)}}, \quad (2.1.4)$$

de donde:

$$|TX|^2 = \cos^2 \theta (|X|^2 - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}^2(X)). \quad (2.1.5)$$

Por otra parte, como $fTX = T^2X + NTX$, resulta que $g(T^2X, X) = g(fTX, X) = -g(TX, fX) = -|TX|^2$. Así, de (2.1.4) y (2.1.5), se tiene que:

$$g(T^2X, X) = -\cos^2 \theta (|X|^2 - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}^2(X)). \quad (2.1.6)$$

Como $g(TX, \xi_{\alpha}) = g(fX, \xi_{\alpha}) = 0$ y la subvariedad M es slant no anti-invariante, se puede afirmar que $TX \in \mathcal{L}$ y, entonces,

$$\cos \theta = \frac{g(fTX, T^2X)}{|T^2X||fTX|} = \frac{|T^2X|^2}{|T^2X||fTX|} = \frac{|T^2X|}{|TX|}, \quad (2.1.7)$$

ya que

$$|fTX|^2 = g(fTX, fTX) = g(TX, TX) - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}^2(TX) = |TX|^2,$$

al ser $\eta_{\alpha}(TX) = \eta_{\alpha}(fX) = 0$. Por tanto, despejando $|TX|$ de (2.1.4) y sustituyendo en (2.1.7), se obtiene

$$\cos\theta = \frac{|T^2X|}{\cos\theta \sqrt{|X|^2 - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}^2(X)}},$$

y, en consecuencia:

$$\cos^2\theta \sqrt{|X|^2 - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}^2(X)} = |T^2X|. \quad (2.1.8)$$

Así, de (1.2.2), (2.1.6) y (2.1.8) resulta que:

$$g(T^2X, X) = -|T^2X| \sqrt{|X|^2 - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}^2(X)} = -|T^2X| |f^2X|, \quad (2.1.9)$$

Pero

$$g(T^2X, X) = g(T^2X, \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X)\xi_{\alpha} - f^2X) = -g(T^2X, f^2X),$$

ya que

$$g(T^2X, \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X)\xi_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X)g(fTX, \xi_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X)g(TX, f\xi_{\alpha}) = 0.$$

Uniendo este resultado con (2.1.9), se llega a

$$\frac{g(T^2X, f^2X)}{|T^2X| |f^2(X)|} = 1,$$

de donde se puede afirmar que existe un λ tal que:

$$T^2X = \lambda f^2X = -\lambda X + \lambda \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X)\xi_{\alpha}.$$

Para probar que λ es constante, basta observar que, a partir de (2.1.6) se deduce que $-\cos^2\theta(|fX|^2) = g(T^2X, X) = g(\lambda f^2X, X) = -\lambda g(fX, fX) = -\lambda|fX|^2$ y, por tanto, $\lambda = \cos^2\theta$.

Se ha probado la igualdad para $X \in \mathcal{L}$. Por otra parte, para $X \in \mathcal{M}$, se verifica trivialmente, pues, en ese caso, $T^2X = 0$, con lo que queda probada la condición necesaria para que M sea slant.

Recíprocamente, si se supone que existe una constante λ tal que

$$T^2 = -\lambda I + \lambda \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha \otimes \xi_\alpha,$$

entonces, para todo $X \in \mathcal{L}$ se verifica que:

$$\begin{aligned} \cos\theta(X) &= \frac{g(fX, TX)}{|fX||TX|} = -\frac{g(X, fTX)}{|fX||TX|} = -\frac{g(X, T^2X)}{|fX||TX|} = \\ &= -\lambda \frac{g(X, f^2X)}{|fX||TX|} = \lambda \frac{g(fX, fX)}{|fX||TX|} = \lambda \frac{|fX|^2}{|fX||TX|} = \lambda \frac{|fX|}{|TX|}. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Por otra parte, como

$$\cos\theta(X) = \frac{|TX|}{|fX|},$$

de (2.1.10) se deduce que $\cos^2\theta(X) = \lambda$, por lo que $\theta(X)$ es constante y M es una subvariedad slant. \square

Como consecuencia del Teorema 2.1.6, se obtienen los siguientes resultados, de gran utilidad en todo el desarrollo posterior.

Corolario 2.1.7. *Sea M una subvariedad θ -slant de una f -variedad \widetilde{M} . Entonces,*

$$tNX = \text{sen}^2\theta(-X + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X)\xi_\alpha) = \text{sen}^2\theta(f^2X), \quad (2.1.11)$$

para todo $X \in TM$.

Demostración. Dado $\widetilde{X} \in TM$, se tiene que $f^2X = T^2X + NTX + tNX + nNX$. Por otro lado, como \widetilde{M} es una f -variedad,

$$-X + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X)\xi_\alpha = T^2X + NTX + tNX + nNX$$

e igualando las componentes tangentes:

$$-X + \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X)\xi_{\alpha} = T^2X + tNX. \quad (2.1.12)$$

Pero, al ser M θ -slant, en virtud del Teorema 2.1.6, se sabe que:

$$T^2X = \cos^2\theta(-X + \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X)\xi_{\alpha}). \quad (2.1.13)$$

Por tanto, a partir de (2.1.12) y (2.1.13) se concluye. \square

Corolario 2.1.8. Sea M una subvariedad θ -slant de una f -variedad métrica \widetilde{M} . Entonces, para todos $X, Y \in TM$, se verifican:

$$g(TX, TY) = \cos^2\theta(g(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X)\eta_{\alpha}(Y)), \quad (2.1.14)$$

$$g(NX, NY) = \sin^2\theta(g(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X)\eta_{\alpha}(Y)). \quad (2.1.15)$$

Demostración. Sean $X, Y \in TM$. Entonces, aplicando (1.2.8), (1.3.1) y el Teorema 2.1.6 se tiene:

$$\begin{aligned} g(TX, TY) &= g(fX, TY) = -g(X, fTY) = -g(X, T^2Y) = \\ &= -g(X, \cos^2\theta(-Y + \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(Y)\xi_{\alpha})) = \cos^2\theta(g(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(Y)g(X, \xi_{\alpha})) = \\ &= \cos^2\theta(g(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(Y)\eta_{\alpha}(X)). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} g(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X)\eta_{\alpha}(Y) &= g(fX, fY) = g(TX + NX, TY + NY) = \\ &= g(TX, TY) + g(NX, NY), \end{aligned}$$

de donde, en virtud de (2.1.14):

$$g(NX, NY) = g(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X)\eta_{\alpha}(Y) - g(TX, TY) =$$

$$= \operatorname{sen}^2\theta(g(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)).$$

□

Corolario 2.1.9. *Sea M una subvariedad slant no invariante con dimensión $m + s$ de una f -variedad métrica \widetilde{M} $(2m + s)$ -dimensional. Si*

$$\{e_1, \dots, e_m, \xi_1, \dots, \xi_s\}$$

es una base local ortonormal de campos de TM , entonces,

$$\{(csc\theta)Ne_1, \dots, (csc\theta)Ne_m\}$$

es una base local ortonormal de $T^\perp M$.

Demostración. Como $\widetilde{TM} = TM \oplus T^\perp M$, se tiene que $\dim T^\perp M = m$. Entonces, si $\{(csc\theta)Ne_1, \dots, (csc\theta)Ne_m\}$ es un conjunto de campos linealmente independientes en $T^\perp M$, necesariamente formarán una referencia local. Si después se comprueba que, además, son ortogonales dos a dos, se tendrá que forman una referencia local ortonormal.

Es fácil comprobar que $\{Ne_1, \dots, Ne_m\}$ es un conjunto de campos en $T^\perp M$. Además, son linealmente independientes, pues si

$$\sum_{i=1}^m a_i Ne_i = 0,$$

siendo a_i funciones diferenciables, denotando por X al campo en \mathcal{L} definido mediante

$$X = \sum_{i=1}^m a_i e_i,$$

se tiene que

$$f^2 X = -X = -\sum_{i=1}^m a_i e_i. \quad (2.1.16)$$

Pero, por otra parte, aplicando el Teorema 2.1.6 y puesto que $X \in \mathcal{L}$ y $NX = 0$

$$f^2(X) = -\cos^2\theta X + NTX. \quad (2.1.17)$$

Entonces, a partir de (2.1.16) y (2.1.17), igualando las componentes tangentes se obtiene que $(1 - \cos^2\theta)X = 0$, de donde se deduce que $X = 0$, al ser M no invariante

y $a_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, m$. Finalmente, en virtud del Corolario 2.1.8, se tiene que

$$\begin{aligned} g((csc\theta)Ne_i, (csc\theta)Ne_j) &= \\ &= csc^2\theta g(Ne_i, Ne_j) = csc^2\theta sen^2\theta(g(e_i, e_j) - \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(e_i)\eta_\alpha(e_j)) = \\ &= csc^2\theta sen^2\theta(g(e_i, e_j)) = \delta_{ij}, \end{aligned}$$

pues $\{e_1, \dots, e_m\}$ es una referencia local ortonormal de \mathcal{L} . \square

Corolario 2.1.10. *Sea M una subvariedad slant no anti-invariante, con dimensi3n $(2 + s)$, de una f -variedad m3trica \widetilde{M} . Sea e_1 un campo local unitario tangente a M y normal a los campos de estructura. Si se define $e_2 = (sec\theta)Te_1$ y $e_{2+\alpha} = \xi_\alpha$ para $\alpha = 1, \dots, s$, se verifica que $e_1 = -(sec\theta)Te_2$ y que $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{2+s}\}$ es una referencia local ortonormal de TM .*

Demostraci3n. La prueba de que los campos del enunciado son linealmente independientes en TM y, por tanto, constituyen una referencia de TM es similar a la del corolario anterior. Para probar que dicha referencia es ortonormal, basta tener en cuenta que, en virtud del Corolario 2.1.8,

$$g(e_1, e_2) = g(e_1, (sec\theta)Te_1) = sec\theta g(e_1, Te_1) = 0,$$

$$g(e_2, e_{2+\alpha}) = sec\theta g(Te_1, \xi_\alpha) = 0,$$

para todo $\alpha = 1, \dots, s$ y que:

$$g(e_2, e_2) = sec^2\theta g(Te_1, Te_1) = 1.$$

Por otra parte, aplicando el Teorema 2.1.6, resulta que $Te_2 = sec\theta T^2e_1 = -sec\theta cos^2\theta e_1$, de donde $e_1 = -(sec\theta)Te_2$. \square

Corolario 2.1.11. *Sea M una subvariedad θ -slant propia, con dimensi3n $2+s$, de una f -variedad m3trica \widetilde{M} con dimensi3n $4 + s$. Sea e_1 un campo local unitario tangente a M y ortogonal a los campos de estructura. Entonces, definiendo*

$$e_2 = (sec\theta)Te_1, \quad e_{2+\alpha} = \xi_\alpha, \quad e_{3+s} = (csc\theta)Ne_1 \quad \text{y} \quad e_{4+s} = (csc\theta)Ne_2, \quad (2.1.18)$$

para $\alpha = 1, \dots, s$, se verifica que $e_1 = -(sec\theta)Te_2$ y que $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{2+s}, e_{3+s}, e_{4+s}\}$ es una referencia local ortonormal de TM tal que $e_1, e_2, e_3, \dots, e_{2+s}$ son tangentes a M y e_{3+s}, e_{4+s} son normales a M . Adem3s, se tiene que:

$$te_{3+s} = -sen\theta e_1, \quad ne_{3+s} = -cos\theta e_{4+s}, \quad te_{4+s} = -sen\theta e_2, \quad ne_{4+s} = cos\theta e_{3+s}. \quad (2.1.19)$$

Demostración. En virtud del Corolario 2.1.10, ya se sabe que

$$\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{2+s}\}$$

es una referencia local ortonormal de TM , mientras que el hecho de ser $\{e_{3+s}, e_{4+s}\}$ una referencia ortonormal local de $T^\perp M$ es consecuencia del Corolario 2.1.9.

En cuanto a las demás expresiones, como

$$\begin{aligned} fe_{3+s} &= te_{3+s} + ne_{3+s} = \text{csc}\theta fNe_1 = \text{csc}\theta f(fe_1 - Te_1) = \\ &= \text{csc}\theta f^2e_1 - \text{csc}\theta fTe_1 = \text{csc}\theta f^2e_1 - \text{csc}\theta(T^2e_1 + NTe_1) = \\ &= -\text{sen}\theta e_1 - \text{csc}\theta NTe_1 \end{aligned}$$

(pues, al ser e_1 ortogonal a ξ_α para todo $\alpha = 1, \dots, s$, $f^2e_1 = -e_1$ y $T^2e_1 = -\cos^2\theta e_1$), igualando las componentes tangenciales y normales, resulta que:

$$te_{3+s} = -\text{sen}\theta e_1,$$

$$ne_{3+s} = -\text{csc}\theta NTe_1 = -\text{csc}\theta \cos\theta Ne_2 = -\cos\theta e_{4+s}.$$

De forma análoga, se calculan te_{4+s} y ne_{4+s} . □

Definición 2.1.12. En las condiciones anteriores, a la base local de campos $\{e_1, e_2, \dots, e_{3+s}, e_{4+s}\}$ se le llama **referencia slant adaptada**.

2.2. Dimensión de una Subvariedad Slant.

Sea M una subvariedad slant de una f -variedad métrica \widetilde{M} . Ya se ha dicho que T es un endomorfismo de TM y, en lo que sigue, se denotará por Q al endomorfismo T^2 . Es fácil comprobar que $Q|_{\mathcal{L}}$ es también un endomorfismo de \mathcal{L} . Además, en virtud del Teorema 2.1.6, existe una cierta constante λ verificando:

$$Q = T^2 = -\lambda I + \lambda \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha \otimes \xi_\alpha.$$

Así, $Q|_{\mathcal{L}} = -\lambda I$. Por tanto, en una subvariedad slant el endomorfismo $Q|_{\mathcal{L}}$ ha de ser diagonalizable en cada punto de M , lo que motiva el estudio de sus autovalores. En primer lugar, se tiene que Q es un endomorfismo autoadjunto (simétrico) de TM . En efecto, sean $X, Y \in TM$. Entonces, de (1.3.3):

$$g(QX, Y) = g(T^2X, Y) = -g(TX, TY) = g(X, T^2Y) = g(X, QY).$$

En consecuencia, para cada $x \in M$, el subespacio vectorial \mathcal{L}_x del espacio tangente $T_x M$ admite una descomposición en suma directa de subespacios propios de $Q|_{\mathcal{L}}$ de la forma

$$\mathcal{L}_x = \mathcal{L}_x^1 \oplus \mathcal{L}_x^2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_x^{k(x)},$$

donde \mathcal{L}_x^i es el subespacio propio de autovectores asociados a un autovalor λ_i de $Q|_{\mathcal{L}}$. En estas condiciones, puede probarse la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1. *Sea M una subvariedad de una f -variedad métrica \widetilde{M} tangente a los campos de estructura. En cada punto de M se verifican las siguientes propiedades:*

- (i) Cada autovalor λ_i de $Q|_{\mathcal{L}}$ está en $[-1, 0]$.
- (ii) Si $X \in \mathcal{L}^i$, entonces $TX \in \mathcal{L}^i$.
- (iii) Si $\lambda_i \neq 0$, entonces \mathcal{L}^i es de dimensión par y $T(\mathcal{L}^i) = \mathcal{L}^i$.
- (iv) Los subespacios $N(\mathcal{L}^i)$ son ortogonales entre sí.
- (v) Si $\lambda_i \neq -1$, entonces $\dim N(\mathcal{L}^i) = \dim \mathcal{L}^i$.
- (vi) $N(\mathcal{L}^{-1}) = \{0\}$, donde \mathcal{L}^{-1} representa al subespacio asociado al autovalor -1 .

Así,

$$\dim \widetilde{M} \geq 2 \dim M - \dim \mathcal{L}^{-1} - s \quad (2.2.1)$$

y se da la igualdad si y sólo si $\nu = 0$, siendo ν el complemento ortogonal de $N(TM)$ en $T^\perp M$.

Demostración. (i) Sea λ_i un autovalor de $Q|_{\mathcal{L}}$ y $X \in \mathcal{L}^i$ un autovector asociado. Se verifica que

$$\cos \theta(X) = \frac{g(fX, TX)}{|fX||TX|} = \frac{g(TX, TX)}{\sqrt{g(fX, fX)}|TX|} = \frac{|TX|^2}{\sqrt{g(X, X)}|TX|} = \frac{|TX|}{|X|},$$

dado que X es ortogonal a los campos de estructura. Por otro lado se tiene:

$$g(T^2 X, X) = -|TX|^2 = -\cos^2 \theta(X) |X|^2. \quad (2.2.2)$$

Pero, en virtud de la elección de λ_i y X , $g(T^2 X, X) = g(QX, X) = f(\lambda_i X, X) = \lambda_i |X|^2$, de donde, junto con (2.2.2), se deduce que $\lambda_i = -\cos^2 \theta(X) \in [-1, 0]$.

(ii) Sea $X \in \mathcal{L}^i$, lo que implica que $QX = \lambda_i X$. Por tanto, $QTX = T^3 X = TQX = \lambda_i TX$, de donde se deduce que $TX \in \mathcal{L}^i$.

(iii) Sea $\{X_1, \dots, X_r\}$ una base de \mathcal{L}^i . En virtud del apartado anterior, $TX_i \in \mathcal{L}^i$, por lo que

$$TX_i = \sum_{k=1}^r a_i^k X_k,$$

de donde:

$$QX_i = \sum_{k=1}^r a_i^k TX_k = \sum_{k,j=1}^r a_i^k a_k^j X_j.$$

Así, si se llama A a la matriz (a_k^j) , se tiene $\lambda_i I = A^2$ y, por tanto, se deduce que $(\lambda_i)^r = \det^2(A)$. Entonces, como $\lambda_i \in [-1, 0)$, r debe ser par.

Nótese que, del apartado anterior, se tiene que $T(\mathcal{L}^i) \subseteq \mathcal{L}^i$. Sea, pues, $X \in \mathcal{L}^i$. Entonces, $QX = T^2X = \lambda_i X$ y, al ser $\lambda_i \neq 0$, se puede escribir:

$$X = T\left(\frac{1}{\lambda_i}(TX)\right) \in T(\mathcal{L}^i).$$

(iv) Sean ahora $X_i \in \mathcal{L}^i$ y $X_j \in \mathcal{L}^j$, con $i \neq j$. En virtud de (ii), se tiene:

$$g(fX_i, fX_j) = g(TX_i, TX_j) + g(NX_i, NX_j) = g(NX_i, NX_j).$$

Pero:

$$g(NX_i, NX_j) = g(fX_i, fX_j) = g(X_i, X_j) - \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X_i) \eta_\alpha(X_j) = 0,$$

pues los subespacios $\mathcal{L}^i, \mathcal{L}^j \subseteq \mathcal{L}$ son ortogonales entre sí. De aquí se deduce (iv).

(v) Sea $\{X_1, \dots, X_r\}$ una base de \mathcal{L}^i . Entonces, $\{NX_1, \dots, NX_r\}$ es una base de $N(\mathcal{L}^i)$. En efecto, es fácil demostrar que forman un sistema de generadores, pues basta tener en cuenta que $\{X_1, \dots, X_r\}$ es una base de \mathcal{L}^i . Además, los campos anteriores son linealmente independientes. Para ello, si

$$\sum_{k=1}^r a^k NX_k = 0,$$

donde a^k son funciones diferenciables, se tiene que:

$$f^2 \left(\sum_{k=1}^r a^k X_k \right) = T^2 \left(\sum_{k=1}^r a^k X_k \right) + NT \left(\sum_{k=1}^r a^k X_k \right). \quad (2.2.3)$$

Ahora bien,

$$f^2 \left(\sum_{k=1}^r a^k X_k \right) = - \left(\sum_{k=1}^r a^k X_k \right) + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha \left(\sum_{k=1}^r a^k X_k \right) \xi_\alpha = - \sum_{k=1}^r a^k X_k, \quad (2.2.4)$$

pues \mathcal{L}^i es ortogonal a ξ_α , para todo $\alpha = 1, \dots, s$, mientras que:

$$T^2 \left(\sum_{k=1}^r a^k X_k \right) = \sum_{k=1}^r a^k Q X_k = \lambda_i \sum_{k=1}^r a^k X_k. \quad (2.2.5)$$

Así, sustituyendo (2.2.4) y (2.2.5) en (2.2.3) e igualando las componentes tangentes, resulta que:

$$(\lambda_i + 1) \sum_{k=1}^r a^k X_k = 0.$$

Pero, como $\lambda_i \neq -1$, ha de ser

$$\sum_{k=1}^r a^k X_k = 0,$$

lo que implica que $a^k = 0$, para todo k . Esto prueba (v).

(vi) Sea $X \in \mathcal{L}^{-1}$. Razonando como en la prueba del apartado (i), se tiene que $-\cos^2 \theta(X) = -1$, por lo que $\theta(X) = 0$. Así, $fX \in TM$, de donde se deduce que $NX = 0$. Finalmente, para las dimensiones, como $\widetilde{TM} = TM \oplus T^\perp M$, se tiene que:

$$\dim \widetilde{M} = \dim M + \dim T^\perp M. \quad (2.2.6)$$

Por otra parte, se puede escribir:

$$T^\perp M = N(TM) \oplus \nu. \quad (2.2.7)$$

Ahora bien, de los apartados (iv), (v) y (vi) se obtiene:

$$\dim N(TM) = \dim \mathcal{L} - \dim \mathcal{L}^{-1} = \dim M - s - \dim \mathcal{L}^{-1}. \quad (2.2.8)$$

Así, en virtud de (2.2.6), (2.2.7) y (2.2.8), resulta que

$$\dim \widetilde{M} = 2\dim M - \dim \mathcal{L}^{-1} - s + \dim \nu \geq 2\dim M - \dim \mathcal{L}^{-1} - s$$

y se da la igualdad si y sólo si $\nu = 0$. □

Observando la demostración del apartado (i), se obtiene de modo inmediato el siguiente corolario.

Corolario 2.2.2. *Sea M una subvariedad θ -slant de una f -variedad \widetilde{M} . Entonces, en cada punto x de M , $Q|_{\mathcal{L}}$ tiene un único autovalor $\lambda_1 = -\cos^2 \theta$.*

En consecuencia, usando (2.2.1), si M es una subvariedad slant no invariante y, por tanto, el único autovalor de $Q|_{\mathcal{L}}$ es distinto de -1 , se deduce que las dimensiones de \widetilde{M} y M están relacionadas por:

$$\dim \widetilde{M} \geq 2\dim M - s. \quad (2.2.9)$$

Se puede comprobar sin dificultad que, en una f -variedad métrica, toda subvariedad de dimensión $1+s$ que sea tangente a los campos de estructura es anti-invariante. Esto quiere decir que no pueden existir subvariedades slant no anti-invariantes de dimensión $1+s$ tangentes a los s campos de estructura.

En cuanto a las subvariedades slant de dimensión s , como los campos de estructura deben ser tangentes, resulta que $TM = \mathcal{M}$ y su estudio carece de interés. De hecho y puesto que la distribución \mathcal{L} se anula, no tiene sentido hablar de ángulo slant.

Debido a lo anterior, en lo sucesivo se trabajará con subvariedades slant de dimensión mayor o igual que $2+s$ que, en virtud de (2.2.9), estarán inmersas en f -variedades de dimensión mayor o igual que $4+s$ si la subvariedad no es invariante.

Se prueba a continuación que una subvariedad slant no anti-invariante, ha de ser de dimensión par o impar según lo sea el número de campos de estructura.

Teorema 2.2.3. *Sea M una subvariedad slant no anti-invariante de una f -variedad \widetilde{M} . Entonces, M tiene dimensión impar si s es impar y par si lo es s .*

Demostración. Dada la descomposición ortogonal $TM = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$, se verifica que $\dim M = \dim \mathcal{L} + s$. Ahora bien, $Q|_{\mathcal{L}}$ tiene un único autovalor $\lambda_1 = -\cos^2 \theta$ en cada punto, en virtud del Corolario 2.2.2, por lo que $\mathcal{L} = \mathcal{L}^1$. Así pues, $\dim M = \dim \mathcal{L}^1 + s$. Pero, si M no es anti-invariante, $\theta \neq \pi/2$ y, por consiguiente, $\lambda_1 \neq 0$, por lo que, del apartado (iii) de la Proposición 2.2.1 se deduce que \mathcal{L}^1 es de dimensión par y por tanto, $\dim M$ es par o impar según lo sea s . \square

Recientemente, I. Mihai y M.M. Tripathi ([48]) han introducido la siguiente definición:

Una subvariedad M de una f -variedad métrica \widetilde{M} tangente a los campos de estructura, se llama *subvariedad casi-semi-invariante* de \widetilde{M} si existen k funciones $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ definidas en M con valores en el intervalo abierto $(0, 1)$ tales que se verifican las siguientes condiciones:

- (i) $-\lambda_1^2(x), \dots, -\lambda_k^2(x)$ son autovalores distintos de $Q|_{\mathcal{L}}$ para $x \in M$ con

$$T_x M = \mathcal{L}_x^1 \oplus \mathcal{L}_x^0 \oplus \mathcal{L}_x^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_x^{\lambda_k} \oplus \mathcal{M}_x,$$

donde $\mathcal{L}_x^1 = \ker(N_x)$, $\mathcal{L}_x^0 = \ker(T_x)$ y $\mathcal{L}_x^{\lambda_i} = \ker(Q + \lambda_i^2(x)I)_x$, $i \in \{1, \dots, k\}$,

- (ii) Las dimensiones de $\mathcal{L}_x^1, \mathcal{L}_x^0, \mathcal{L}_x^{\lambda_1}, \dots, \mathcal{L}_x^{\lambda_k}$ son independientes de $x \in M$.

Si además, cada λ_i es constante, entonces M se llama *subvariedad casi-semi-invariante**.

Obsérvese, que para $k = 1$ y λ_1 constante, se obtienen las subvariedades slant tal y como se han definido en la Sección 2.1.

2.3. Subvariedades Slant en f -variedades Métricas con $F = d\eta_\alpha$ para todo α y Campos de Estructura de Killing.

Sea \widetilde{M} una variedad Riemanniana isométricamente inmersa en una f -variedad métrica \widetilde{M} . Recuérdese, que el hecho de ser M slant, ha sido caracterizado en función del operador $Q = T^2$. Resulta, pues, interesante estudiar la relación existente entre el hecho de que M sea slant y el valor de ∇Q , donde, como es bien sabido

$$(\nabla_X Q)Y = \nabla_X QY - Q\nabla_X Y,$$

para todos $X, Y \in TM$.

En el caso complejo se sabe que las subvariedades slant de una variedad casi Hermítica verifican que $\nabla Q = 0$ (ver [23, 26]). De hecho, esta expresión caracteriza en cierta forma a tales subvariedades. Sin embargo, ahora la situación es distinta. En primer lugar, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.3.1. *Sea M una subvariedad slant de una f -variedad métrica \widetilde{M} . Entonces, $\nabla Q = 0$ si y sólo si $\nabla_X \xi_\alpha = 0$ para todo $\alpha = 1, \dots, s$ y para todo $X \in TM$.*

Demostración. Se supone que M es θ -slant, con $\theta \in [0, \pi/2]$. Entonces, dado $X \in TM$, en virtud del Teorema 2.1.6, se verifica, para todos $X, Y \in TM$:

$$Q\nabla_X Y = -\cos^2\theta \nabla_X Y + \cos^2\theta \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(\nabla_X Y)\xi_{\alpha}. \quad (2.3.1)$$

Por otra parte, de (2.1.3), sustituyendo X por Y y haciendo la derivada covariante respecto a X , se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla_X QY &= -\cos^2\theta \nabla_X Y + \cos^2\theta \sum_{\alpha} (\eta_{\alpha}(\nabla_X Y) + \\ &+ g(Y, \nabla_X \xi_{\alpha})) \xi_{\alpha} + \cos^2\theta \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(Y) \nabla_X \xi_{\alpha}, \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

dado que:

$$X(\eta_{\alpha}(Y)) = Xg(Y, \xi_{\alpha}) = g(\nabla_X Y, \xi_{\alpha}) + g(Y, \nabla_X \xi_{\alpha}) = \eta_{\alpha}(\nabla_X Y) + g(Y, \nabla_X \xi_{\alpha}).$$

Por tanto

$$(\nabla_X Q)Y = \cos^2\theta \sum_{\alpha} (g(Y, \nabla_X \xi_{\alpha})\xi_{\alpha} + \eta_{\alpha}(Y)\nabla_X \xi_{\alpha}),$$

de donde se deduce que $\nabla Q = 0$ si y sólo si $\nabla_X \xi_{\alpha} = 0$, para todo $X \in TM$ y para todo $\alpha = 1, \dots, s$. \square

Corolario 2.3.2. *En las condiciones de la proposición anterior, si $F = d\eta_{\alpha}$ para todo $\alpha = 1, \dots, s$ y los campos de estructura son de Killing, entonces se verifica que $\nabla Q = 0$ si y sólo si M es una subvariedad anti-invariante.*

Demostración. Por ser los campos de estructura campos de Killing se verifica que ([11]):

$$\nabla_X \xi_{\alpha} = -TX + \sum_{\beta} \eta_{\beta}(\nabla_X \xi_{\alpha})\xi_{\beta}. \quad (2.3.3)$$

Ahora, aplicando la proposición anterior, $\nabla Q = 0$ si y sólo si $\nabla_X \xi_{\alpha} = 0$, para todo $X \in TM$ y para todo $\alpha = 1, \dots, s$ y esto se tiene si y sólo si $T \equiv 0$. \square

Así, se observa que, en el caso de una f -variedad con $F = d\eta_{\alpha}$, para todo $\alpha = 1, \dots, s$ y los campos de estructura de Killing, la condición $\nabla Q = 0$ no la cumplen todas las subvariedades slant sino sólo las subvariedades anti-invariantes. En la siguiente proposición, vamos a calcular la expresión de ∇Q para cualquier subvariedad slant de una f -variedad verificando esas condiciones.

Proposición 2.3.3. *Sea M subvariedad θ -slant de una f -variedad \widetilde{M} con $F = d\eta_{\alpha}$ para todo $\alpha = 1, \dots, s$ y los campos de estructura de Killing. Entonces, para todos $X, Y \in TM$, se verifica:*

$$(\nabla_X Q)Y = \cos^2\theta \sum_{\alpha} (g(X, TY)\xi_{\alpha} - \eta_{\alpha}(Y)TX).$$

Demostración. De (2.3.1) y (2.3.2), se deduce que

$$\begin{aligned} (\nabla_X Q)Y &= \nabla_X QY - Q(\nabla_X Y) = \cos^2\theta \sum_{\alpha} (g(Y, \nabla_X \xi_{\alpha})\xi_{\alpha} + \eta_{\alpha}(Y)\nabla_X \xi_{\alpha}) = \\ &= -\cos^2\theta \sum_{\alpha} (g(Y, TX)\xi_{\alpha} + \eta_{\alpha}(Y)TX) = \cos^2\theta \sum_{\alpha} (g(X, TY)\xi_{\alpha} - \eta_{\alpha}(Y)TX), \end{aligned}$$

donde, debido a las características de \widetilde{M} , se ha usado (2.3.3). \square

Se puede observar como el Corolario 2.3.2 es, realmente, un caso particular de la Proposición 2.3.3, ya que las subvariedades anti-invariantes son subvariedades slant con ángulo $\theta = \pi/2$.

Por otra parte, la expresión de la proposición anterior sirve para caracterizar las subvariedades slant en las f -variedades métricas donde $F = d\eta_\alpha$, para todo $\alpha = 1, \dots, s$ y los campos de estructura de Killing.

Teorema 2.3.4. *Sea M una subvariedad de una f -variedad \widetilde{M} con $F = d\eta_\alpha$ para todo $\alpha = 1, \dots, s$, tal que M es tangente a los campos de estructura, siendo éstos campos de Killing. Entonces, M es slant si y sólo si se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *El endomorfismo $Q|_{\mathcal{L}}$ tiene un único autovalor en cada punto de M .*

(ii) *Existe una función $\lambda : M \rightarrow [0, 1]$ tal que*

$$(\nabla_X Q)Y = \lambda \sum_{\alpha} (g(X, TY)\xi_\alpha - \eta_\alpha(Y)TX)$$

para todos $X, Y \in TM$.

Además, en este caso, si θ es el ángulo de Wirtinger de M , se tiene que $\lambda = \cos^2\theta$.

Demostración. Si M es slant, la condición (i) es consecuencia directa del Corolario 2.2.2, mientras la condición (ii) se tiene en virtud de la Proposición 2.3.3.

Recíprocamente, sea $\lambda_1(x)$ el único autovalor de $Q|_{\mathcal{L}}$ en cada punto $x \in M$. Entonces, λ_1 es constante. En efecto, sea $Y \in \mathcal{L}$ un autovector unitario asociado a λ_1 . Así, $QY = \lambda_1 Y$ y, para todo $X \in TM$, usando (ii) se tiene que

$$\begin{aligned} X(\lambda_1)Y + \lambda_1 \nabla_X Y &= \nabla_X(\lambda_1 Y) = \nabla_X(QY) = \\ &= Q(\nabla_X Y) + \lambda \sum_{\alpha} (g(X, TY)\xi_\alpha - \eta_\alpha(Y)TX) = \\ &= Q(\nabla_X Y) + \lambda \sum_{\alpha} g(X, TY)\xi_\alpha, \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

ya que $Y \in \mathcal{L}$. Ahora bien, al ser Y unitario, $g(\nabla_X Y, Y) = -g(Y, \nabla_X Y)$, de donde se deduce que

$$g(\nabla_X Y, Y) = 0 \quad (2.3.5)$$

y, por tanto, al ser Q autoadjunto e Y autovector de $Q|_{\mathcal{L}}$:

$$g(Q(\nabla_X Y), Y) = g(\nabla_X Y, QY) = \lambda_1 g(\nabla_X Y, Y) = 0. \quad (2.3.6)$$

Haciendo el producto de (2.3.4) con Y y aplicando (2.3.5) y (2.3.6), se obtiene:

$$X(\lambda_1) = \lambda \sum_{\alpha} g(X, TY)\eta_\alpha(Y) = 0.$$

Así, $X(\lambda_1) = 0$ para todo $X \in TM$, lo cual implica que λ_1 es constante. Para probar que M es slant, sea $X \in TM$. Entonces,

$$X = \tilde{X} + \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(X)\xi_{\alpha},$$

con

$$\tilde{X} = X - \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(X)\xi_{\alpha}$$

perteneciente a \mathcal{L} . Por tanto, $QX = Q\tilde{X}$, pues $T\xi_{\alpha} = 0$. Como, por hipótesis, $Q|_{\mathcal{L}} = \lambda_1 I$, se tiene que $Q\tilde{X} = \lambda_1 \tilde{X}$ y, en consecuencia:

$$QX = \lambda_1 \tilde{X} = \lambda_1 X - \lambda_1 \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(X)\xi_{\alpha}.$$

Tomando $\mu = -\lambda_1$ y aplicando el Teorema 2.1.6, se obtiene que M es slant. Además, en virtud de la Proposición 2.3.3, ha de ser $\lambda = -\lambda_1 = \mu = \cos^2\theta$, donde θ es el ángulo slant de M . \square

Corolario 2.3.5. *Sea M una subvariedad de dimensión $2 + s$ de una f -variedad \tilde{M} con $F = d\eta_{\alpha}$ para todo $\alpha = 1, \dots, s$, tal que los campos de estructura son tangentes a M y de Killing. Entonces, M es slant si y sólo si existe una función $\lambda : M \rightarrow [0, 1]$ tal que*

$$(\nabla_X Q)Y = \lambda \sum_{\alpha} (g(X, TY)\xi_{\alpha} - \eta_{\alpha}(Y)TX)$$

para todos $X, Y \in TM$. Además, en este caso, si θ es el ángulo de Wirtinger de M , se tiene que $\lambda = \cos^2\theta$.

Demostración. Como $\dim\mathcal{L} = 2$, entonces $Q|_{\mathcal{L}}$ tiene un único autovalor en cada punto de M . En efecto, supóngase que, para un punto $x \in M$, $Q|_{\mathcal{L}}$ tuviera dos autovalores distintos λ_i y λ_j , con, por ejemplo, $\lambda_i \neq 0$. Entonces, en virtud del apartado (iii) de la Proposición 2.2.1, se deduce que \mathcal{L}_x^i es de dimensión par, por lo que

$$\dim\mathcal{L}_x \geq \dim\mathcal{L}_x^i + \dim\mathcal{L}_x^j > \dim\mathcal{L}_x^i \geq 2,$$

lo cual es contradictorio. Basta ahora, aplicar el Teorema 2.3.4. \square

2.4. Estructura en una Subvariedad Slant.

Sea M una subvariedad de una S -variedad \tilde{M} , tangente a los campos de estructura. Se sabe que si M es invariante, la estructura de \tilde{M} induce de manera natural una

S -estructura sobre M ([34]). Lo que se pretende en esta sección, es estudiar bajo qué condiciones cabe esperar una S -estructura inducida sobre M cuando ésta sea una subvariedad slant no necesariamente invariante.

En el caso de subvariedades slant de una variedad Kaehleriana, Chen introduce en ([26]) la noción de *subvariedad slant Kaehleriana* como aquella subvariedad slant propia que verifica $\nabla P = 0$, siendo P la proyección ortogonal sobre la subvariedad de la estructura casi-compleja de la variedad ambiente. En estas condiciones, se prueba fácilmente que la subvariedad es Kaehleriana con respecto a la métrica inducida y con la estructura casi-compleja dada por $\tilde{J} = (\sec\theta)P$, donde θ denota el ángulo slant de la subvariedad.

En nuestro caso, dada una subvariedad slant, no anti-invariante, de una f -variedad métrica, se puede inducir en ella, de manera inmediata una f -estructura métrica, según se prueba en la siguiente proposición.

Proposición 2.4.1. *Sea M subvariedad θ -slant, $\theta \in [0, \pi/2)$, de una f -variedad métrica \tilde{M} . Entonces, $\bar{f} = (\sec\theta)T$ dota a M de estructura de f -variedad métrica con campos de estructura ξ_1, \dots, ξ_s .*

Demostración. Dado $X \in TM$, se tiene:

$$\begin{aligned} (\bar{f})^2 X &= \bar{f}(\sec\theta TX) = \sec\theta(\bar{f}(TX)) = \\ &= \sec^2\theta T^2 X = \sec^2\theta(\cos^2\theta(-X + \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(X)\xi_{\alpha})) = -X + \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(X)\xi_{\alpha}, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado el Teorema 2.1.6, mientras que

$$\begin{aligned} g(\bar{f}X, \bar{f}Y) &= \sec^2\theta g(TX, TY) = -\sec^2\theta g(X, T^2Y) = \\ &= \sec^2\theta g(X, -T^2Y) = \sec^2\theta g(X, \cos^2\theta(Y - \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(Y)\xi_{\alpha})) = \\ &= g(X, Y) - \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(Y)g(X, \xi_{\alpha}) = g(X, Y) - \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(X)\eta_{\alpha}(Y), \end{aligned}$$

para todos $X, Y \in TM$. □

En particular, si $\theta = 0$, la estructura inducida sobre la subvariedad invariante M es la usual ($\bar{f} = T$).

Por tanto, parece adecuado intentar trasladar los resultados conocidos en los casos complejos y contacto al caso de S -variedades. Se trataría, pues, de buscar una condición adecuada sobre ∇T que permita inducir sobre la subvariedad una S -estructura. Para empezar, definir una noción de subvariedad S -slant análoga a la

de subvariedad slant Kaehleriana en la geometría compleja no es de utilidad, pues si una subvariedad θ -slant propia M de una f -variedad \tilde{M} verifica que

$$(\nabla_X T)Y = \cos^2\theta \sum_{\alpha} (g(fX, fY)\xi_{\alpha} + \eta_{\alpha}(Y)f^2X),$$

para todos $X, Y \in TM$, entonces:

$$(\nabla_X \bar{f})Y = (\sec\theta)(\nabla_X T)Y = \cos\theta \sum_{\alpha} (g(fX, fY)\xi_{\alpha} + \eta_{\alpha}(Y)f^2X).$$

Así, M no es S -variedad con la estructura inducida por \bar{f} pues de serlo se cumpliría (1.2.23), es decir:

$$(\nabla_X \bar{f})Y = \sum_{\alpha} (g(fX, fY)\xi_{\alpha} + \eta_{\alpha}(Y)f^2X).$$

Se debe, pues, mejorar esta condición. Para ello, obsérvese que si, en las mismas condiciones anteriores, se verificara

$$(\nabla_X T)Y = \cos\theta \sum_{\alpha} (g(fX, fY)\xi_{\alpha} + \eta_{\alpha}(Y)f^2X), \quad (2.4.1)$$

para todos $X, Y \in TM$, entonces, M sería una S -variedad con la f -estructura \bar{f} , pues se tendría que

$$\begin{aligned} (\nabla_X \bar{f})Y &= (\sec\theta)(\nabla_X T)Y = (\sec\theta)(\cos\theta) \sum_{\alpha} (g(fX, fY)\xi_{\alpha} + \eta_{\alpha}(Y)f^2X) = \\ &= \sum_{\alpha} (g(fX, fY)\xi_{\alpha} + \eta_{\alpha}(Y)f^2X). \end{aligned}$$

Sin embargo, surge la siguiente pregunta natural: ¿existen subvariedades slant propias verificando esta condición (2.4.1) impuesta a ∇T ? La respuesta viene dada en las siguientes proposiciones.

Proposición 2.4.2. *Sea M una subvariedad de una f -variedad métrica \tilde{M} tal que los campos de estructura son tangentes a M . Se supone que existe una función λ tal que*

$$(\nabla_X T)Y = \lambda \sum_{\alpha} (g(fX, fY)\xi_{\alpha} + \eta_{\alpha}(Y)f^2X),$$

para todos $X, Y \in TM$. Entonces,

$$(\nabla_X Q)Y = \lambda \sum_{\alpha} (g(X, TY)\xi_{\alpha} - \eta_{\alpha}(Y)TX),$$

para todos $X, Y \in TM$.

Demostración. Para todos $X, Y \in TM$, se tiene que

$$\begin{aligned}
Q(\nabla_X Y) &= T^2(\nabla_X Y) = T(\nabla_X TY - \lambda \sum_{\alpha} (g(fX, fY)\xi_{\alpha} + \eta_{\alpha}(Y)f^2X) = \\
&= T(\nabla_X TY) - \lambda \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(Y)T(f^2X) = \\
&= \nabla_X QY - \lambda \sum_{\alpha} (g(fX, fTY)\xi_{\alpha} + \eta_{\alpha}(TY)f^2X) + \lambda \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(Y)TX = \\
&= \nabla_X QY - \lambda \sum_{\alpha} (g(fX, fTY)\xi_{\alpha} - \eta_{\alpha}(Y)TX),
\end{aligned}$$

de donde se deduce el resultado. \square

Proposición 2.4.3. *No existen subvariedades θ -slant propias M de una S -variedad verificando (2.4.1).*

Demostración. Suponiendo que existiera una subvariedad M en las condiciones del enunciado, entonces, en virtud del Proposición 2.4.2 y (2.4.1), se tiene, que, para todos $X, Y \in TM$,

$$(\nabla_X Q)Y = \cos\theta \sum_{\alpha} (g(X, TY)\xi_{\alpha} - \eta_{\alpha}(Y)TX), \quad (2.4.2)$$

mientras que, por ser M slant, en virtud de la Proposición 2.3.3:

$$(\nabla_X Q)Y = \cos^2\theta \sum_{\alpha} (g(X, TY)\xi_{\alpha} - \eta_{\alpha}(Y)TX). \quad (2.4.3)$$

Por tanto, de (2.4.2) y (2.4.3) se implica que $\cos\theta = \cos^2\theta$, lo cual es contradictorio con el hecho de que M es propia. \square

De la proposición anterior se deduce que el método que se ha seguido no ofrece resultados satisfactorios. De hecho, es fácil ver que, si M es slant propia, la estructura inducida por \bar{f} ni siquiera es f -estructura métrica con 2-forma fundamental $\bar{F} = d\eta_{\alpha}$ para todo $\alpha = 1, \dots, s$, dado que

$$\bar{F}(X, Y) = g(X, \bar{f}Y) = \sec\theta g(X, TY) = \sec\theta d\eta_{\alpha}(X, Y),$$

para todos $X, Y \in TM$, pues se supone que \widetilde{M} es S -variedad y, por tanto, su 2-forma fundamental es igual a $d\eta_{\alpha}$ para todo $\alpha = 1, \dots, s$.

A la vista de lo anterior, ahora se puede plantear la posibilidad de inducir una S -estructura sobre la subvariedad slant de forma diferente, encontrando, obviamente, las condiciones necesarias para ello. Sin embargo, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.4.4. *Sea M una subvariedad θ - slant de una S -variedad \widetilde{M} . Entonces, para todo $X \in TM$ unitario y normal a los campos de estructura se verifica:*

$$R(X, \xi_\alpha; \xi_\alpha, X) = \cos^2\theta. \quad (2.4.4)$$

Demostración. En virtud de la Ecuación de Gauss, (1.2.24), (1.3.11) y (1.3.13), se tiene que, dado $X \in TM$ unitario y normal a los campos de estructura, entonces:

$$R(X, \xi_\alpha; \xi_\alpha, X) = 1 - g(\sigma(X, \xi_\alpha), \sigma(X, \xi_\alpha)) = 1 - g(NX, NX). \quad (2.4.5)$$

Pero, según el Corolario 2.1.8:

$$g(NX, NX) = \text{sen}^2\theta(g(X, X) - \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(X)\eta_{\alpha}(X)) = \text{sen}^2\theta g(X, X) = \text{sen}^2\theta. \quad (2.4.6)$$

Así, de (2.4.5) y (2.4.6) se sigue (2.4.4). □

Corolario 2.4.5. *Sea M una subvariedad slant de una S -variedad \widetilde{M} . Entonces, M es S -variedad si y sólo si es invariante.*

Demostración. Suponiendo que M es S -variedad, en virtud de (1.2.24), dado $X \in TM$ unitario y normal a los campos de estructura, se tiene que

$$R(X, \xi_\alpha; \xi_\alpha, X) = 1.$$

Pero, por la Proposición 2.4.4, $R(X, \xi_\alpha; \xi_\alpha, X) = \cos^2\theta$, con θ el ángulo slant de M . Por tanto, ha de ser $\theta = 0$ y así M es invariante.

El recíproco es evidente. □

No obstante, se puede plantear un objetivo menos ambicioso. ¿Será posible definir una f -estructura métrica con 2-forma fundamental igual a $d\eta_\alpha$ para todo $\alpha = 1, \dots, s$ sobre una subvariedad slant propia? La respuesta, en el caso de subvariedades slant con la menor dimensión posible (que es $2 + s$, según se hizo notar en la Sección 2.2), es también negativa.

Para probar este hecho, se considera

$$\varphi : (M, \bar{f}, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_s, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_s, \bar{g}) \hookrightarrow (\widetilde{M}, f, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$$

una inmersión entre dos f -variedades y se supone que φ es isometría, es decir, $\bar{g} = \varphi^*g$ y que $\varphi_{*x}(\bar{\xi}_\alpha)_x = (\xi_\alpha)_{\varphi(x)}$ para todo $x \in M$. En particular, esto quiere decir que $\bar{\xi}_\alpha \in TM$ para todo $\alpha = 1, \dots, s$. Sean \bar{F} y F las 2-formas fundamentales de M y \widetilde{M} respectivamente y se considera sobre M la 2-forma φ^*F dada por

$$\varphi^*F(X, Y) = F(\varphi_*X, \varphi_*Y) = g(\varphi_*X, f\varphi_*Y),$$

para todos $X, Y \in TM$. En lo sucesivo, dado cualquier $X \in TM$, se identificará X con φ_*X .

En el caso de ser $\dim M = 2 + s$ y la inmersión slant, la relación entre \bar{F} y φ^*F viene dada en la siguiente proposición.

Proposición 2.4.6. *En las condiciones anteriores, si el ángulo slant es θ , entonces se verifica que $\varphi^*F = \pm(\cos\theta)\bar{F}$.*

Demostración. Se puede suponer que φ es una inmersión slant no anti-invariante, pues si lo fuera, el resultado se obtiene de manera inmediata, ya que $\varphi^*F = 0$.

Sea e_1 un campo local unitario tangente a M y ortogonal a los campos de estructura. Si se define $e_2 = (\sec\theta)Te_1$, en virtud del Corolario 2.1.10 se sabe que $\{e_1, e_2, \xi_1, \dots, \xi_s\}$ es una referencia local ortonormal de TM . Entonces

$$\bar{f}e_1 = g(\bar{f}e_1, e_1)e_1 + g(\bar{f}e_1, e_2)e_2 + \sum_{\alpha} g(\bar{f}e_1, \xi_{\alpha})\xi_{\alpha} = g(\bar{f}e_1, e_2)e_2,$$

por lo que:

$$g(\bar{f}e_1, \bar{f}e_1) = g^2(\bar{f}e_1, e_2). \quad (2.4.7)$$

Ahora bien, al ser e_1 unitario y ortogonal a ξ_1, \dots, ξ_s y \bar{f} una f -estructura métrica, resulta que $g(\bar{f}e_1, \bar{f}e_1) = 1$, de donde, junto con (2.4.7), se obtiene que:

$$\bar{f}e_1 = \pm e_2. \quad (2.4.8)$$

Aplicando ahora \bar{f} en (2.4.8) se llega a:

$$\bar{f}e_2 = \mp e_1. \quad (2.4.9)$$

Sean $X, Y \in TM$. Expresados en función de la base ortonormal local son de la forma:

$$\begin{aligned} X &= X^1e_1 + X^2e_2 + \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(X)\xi_{\alpha}, \\ Y &= Y^1e_1 + Y^2e_2 + \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(Y)\xi_{\alpha}. \end{aligned}$$

Entonces, aplicando (2.4.8) y (2.4.9), se sigue que:

$$\bar{F}(X, Y) = g(X, \bar{f}Y) = \mp X^1Y^2 \pm X^2Y^1. \quad (2.4.10)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \varphi^*F(X, Y) &= F(\varphi_*X, \varphi_*Y) = g(X, fY) = \\ &= g(X, TY) = -\cos\theta X^1Y^2 + \cos\theta X^2Y^1, \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

pues $TY = -\cos\theta Y^2e_1 + \cos\theta Y^1e_2$. Por tanto, de (2.4.10) y (2.4.11), se sigue el resultado. \square

A partir de la Proposición 2.4.6 se puede demostrar el siguiente resultado:

Teorema 2.4.7. *No existen inmersiones slant no invariantes $\varphi : M \hookrightarrow \widetilde{M}$ de una f -variedad*

$$(M, \bar{f}, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_s, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_s, \varphi^*g),$$

con $\bar{F} = d\bar{\eta}_\alpha$ para todo $\alpha = 1, \dots, s$ y dimensión $2 + s$ en otra f -variedad

$$(\widetilde{M}, f, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$$

con $F = d\eta_\alpha$ para todo $\alpha = 1, \dots, s$, tal que $\varphi_*(\bar{\xi}_\alpha) = \xi_\alpha$ para todo $\alpha = 1, \dots, s$.

Demostración. Si existiera la inmersión del enunciado, al ser φ una isometría y verificarse $\varphi_*(\bar{\xi}_\alpha) = \xi_\alpha$, para todo $\alpha = 1, \dots, s$, se tiene que $\varphi^*\eta_\alpha = \bar{\eta}_\alpha$, de donde aplicando la diferencial exterior resulta

$$d(\varphi^*\eta_\alpha) = d\bar{\eta}_\alpha = \bar{F}, \quad (2.4.12)$$

por las hipótesis sobre M . Es un hecho conocido que d conmuta con φ^* , por lo que

$$d(\varphi^*\eta_\alpha) = \varphi^*d\eta_\alpha = \varphi^*F = \pm(\cos\theta)\bar{F}, \quad (2.4.13)$$

ya que, debido a las hipótesis sobre \widetilde{M} , se verifica la Proposición 2.4.6.

Pero de (2.4.12) y (2.4.13) se deduce que el signo de (2.4.13) debe ser el positivo y que $\cos\theta = 1$, de donde se implicaría que la inmersión φ habría de ser invariante, lo que supone una contradicción. \square

El resultado del teorema anterior permite dar una respuesta al problema planteado en el caso de una subvariedad slant de dimensión $2 + s$.

Corolario 2.4.8. *Sea M una subvariedad slant de una S -variedad \widetilde{M} con dimensión $2 + s$. Entonces, la S -estructura de \widetilde{M} induce una f -estructura métrica con 2-forma fundamental igual a $d\bar{\eta}_\alpha$ para todo $\alpha = 1, \dots, s$ sobre M si y sólo si M es invariante.*

Demostración. La condición necesaria es una consecuencia inmediata del teorema anterior, mientras que el recíproco es un resultado ya conocido y comentado. \square

A pesar de lo anterior, lo que sí que tiene sentido es considerar inmersiones slant entre f -variedades métricas sin más condiciones. A continuación se obtiene una condición suficiente para que una f -variedad métrica esté inmersa de manera slant en otra.

Sea

$$\varphi : (M, \bar{g}) \hookrightarrow (\widetilde{M}, f, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$$

una inmersión isométrica de una variedad Riemanniana en una f -variedad métrica tal que M es tangente a los campos de estructura.

Lema 2.4.9. En las condiciones anteriores, si $\dim M = m + s$ y

$$\{e_1, \dots, e_m, \xi_1, \dots, \xi_s\}$$

es una referencia local ortonormal de TM , entonces, la inmersión φ es slant si y sólo si existe una constante $\lambda \in [0, 1]$ tal que

$$\sum_{i=1}^m g(fe_j, e_i)g(fe_k, e_i) = \lambda \delta_{jk} \quad (2.4.14)$$

para todos $j, k = 1, \dots, m$. Además, en tal caso, $\lambda = \cos^2 \theta$, donde θ es el ángulo slant de la inmersión.

Demostración. Se supone que φ es una inmersión slant con ángulo θ . Entonces, dado un campo $X \in \mathcal{L}$ unitario, se tiene que

$$\sum_{i=1}^m g^2(fX, e_i) = \cos^2 \theta, \quad (2.4.15)$$

de donde, al sustituir X por e_j , se deduce que:

$$\sum_{i=1}^m g^2(fe_j, e_i) = \cos^2 \theta. \quad (2.4.16)$$

Por tanto, si $j = k$, se obtiene (2.4.14) con $\lambda = \cos^2 \theta$. Si $j \neq k$, se considera el campo local unitario y ortogonal a los campos de estructura definido por

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_j + e_k),$$

al que se aplica (2.4.15) y resulta

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \sum_{i=1}^m g^2\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_j + e_k)\right), e_i\right) = \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}g(fe_j, e_i) + \frac{1}{\sqrt{2}}g(fe_k, e_i) \right\}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m g^2(fe_j, e_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m g^2(fe_k, e_i) + \sum_{i=1}^m g(fe_j, e_i)g(fe_k, e_i), \end{aligned}$$

lo cual, en virtud de (2.4.16), implica que

$$\sum_{i=1}^m g(fe_j, e_i)g(fe_k, e_i) = 0,$$

es decir, (2.4.14) en el caso $j \neq k$.

Recíprocamente, tomando $j = k$ en (2.4.14) se sigue que:

$$\sum_{i=1}^m g^2(fe_j, e_i) = \lambda. \quad (2.4.17)$$

Ahora, dado $X \in TM$ se sabe que:

$$\cos^2\theta(X) = \frac{\sum_{i=1}^m g^2(fX, e_i)}{|X|^2 - \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}^2(X)}. \quad (2.4.18)$$

Por otra parte, en función de la referencia local ortonormal del enunciado, X se puede escribir como

$$X = \sum_{j=1}^m X^j e_j + \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha},$$

de donde:

$$|X|^2 - \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}^2(X) = \sum_{j=1}^m (X^j)^2. \quad (2.4.19)$$

Además, utilizando (2.4.17) y (2.4.14) con $j \neq k$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m g^2(fX, e_i) &= \sum_{j=1}^m (X^j)^2 \sum_{i=1}^m g^2(fe_j, e_i) + \\ + 2 \sum_{j < k} X^j X^k \sum_{i=1}^m g(fe_j, e_i) g(fe_k, e_i) &= \lambda \sum_{j=1}^m (X^j)^2, \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

por lo que, en virtud de (2.4.18), (2.4.19) y (2.4.20) se deduce que $\cos^2\theta(X) = \lambda$, lo que indica que φ es slant con ángulo $\arccos(\sqrt{\lambda})$. \square

Se supone ahora que sobre M hay definida una estructura de f -variedad métrica,

$$(M, \bar{f}, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_s, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_s, \bar{g}),$$

tal que la isometría φ verifica $\varphi_{*x}(\bar{\xi}_{\alpha})_x = (\xi_{\alpha})_{\varphi(x)}$ para todo $x \in M$. Se denota por \bar{F} y F a las 2-formas fundamentales de M y \bar{M} , respectivamente y, además, se considera sobre M la 2-forma φ^*F .

Teorema 2.4.10. *Si, en las condiciones anteriores, existe una constante $k \in [-1, 1]$ tal que $\varphi^*F = k\bar{F}$, entonces, φ es slant con ángulo $\arccos(|k|)$.*

Demostración. Ya que M es una f -variedad, se puede considerar sobre M una \bar{f} -base dada por $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_m, \bar{f}e_1, \dots, \bar{f}e_m, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_s\}$, donde $\dim M = 2m + s$. Sea $X \in \mathcal{L} \cap \mathcal{B}$. Como $\varphi^*F = k\bar{F}$, se tiene que

$$g(fX, e_i) = F(e_i, X) = k\bar{F}(e_i, X) = -kg(X, \bar{f}e_i), \quad (2.4.21)$$

mientras que

$$g(fX, \bar{f}e_i) = F(\bar{f}e_i, X) = k\bar{F}(\bar{f}e_i, X) = kg(\bar{f}X, \bar{f}e_i) = kg(X, e_i), \quad (2.4.22)$$

pues $\bar{\eta}_\alpha(e_i) = 0$, para todos $\alpha = 1, \dots, s$ e $i = 1, \dots, m$. Así, usando (2.4.21) y (2.4.22), para todos $X, Y \in \mathcal{L} \cap \mathcal{B}$, se deduce que:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m g(fX, e_i)g(fY, e_i) + \sum_{i=1}^m g(fX, \bar{f}e_i)g(fY, \bar{f}e_i) = \\ & = k^2 \left(\sum_{i=1}^m g(X, \bar{f}e_i)g(Y, \bar{f}e_i) + \sum_{i=1}^m g(X, e_i)g(Y, e_i) \right). \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

Ahora, evaluando (2.4.23) según las posibles elecciones de X e Y en $\mathcal{L} \cap \mathcal{B}$, se obtiene, en virtud del Lema 2.4.9, que φ es una inmersión slant con ángulo $\arccos(|k|)$. \square

Corolario 2.4.11. *Si $\dim M = 2 + s$, entonces, φ es slant si y sólo si, existe una constante $k \in [-1, 1]$ tal que $\varphi^*F = k\bar{F}$. Además, en tal caso, $|k| = \cos\theta$, donde θ es el ángulo slant de la inmersión.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.4.6 y del Teorema 2.4.10. \square

Capítulo 3

Ejemplos de subvariedades Slant en f -variedades

En este capítulo se presentan algunos ejemplos de subvariedades slant en f -variedades métricas, que, además de su interés propio, servirán para ilustrar los resultados del Capítulo siguiente.

Es importante observar que uno de los aspectos principales de los trabajos existentes acerca de las subvariedades slant de variedades casi Hermíticas es la caracterización de las superficies slant, de las que se dan numerosos ejemplos y resultados en, por ejemplo, [28, 29, 23, 26, 60]. Sin embargo y según se hizo notar en la Sección 2.2, la mínima dimensión de subvariedades slant propias en f -variedades con s campos de estructura es $2 + s$.

Los primeros ejemplos se obtendrán de forma inmediata a partir de ejemplos de subvariedades slant en variedades casi Hermíticas. Después, se darán ejemplos de subvariedades slant en las S -variedades \mathbf{R}^{2m+s} , con especial detalle cuando $m = 2$ y, finalmente, en H^{2m+s} , definida en la Sección 1.2.

3.1. Ejemplos obtenidos a partir de Subvariedades Slant en Variedades Casi Hermíticas.

Se comienza presentando un método general para obtener subvariedades slant en variedades producto de una variedad casi Hermítica \tilde{V} por \mathbf{R}^s . En primer lugar, se probará que, efectivamente, $\tilde{V} \times \mathbf{R}^s$ es una f -variedad métrica.

Si J denota la estructura casi-compleja de \tilde{V} y g_J la métrica compatible con J , entonces, definiendo

$$f\left(X_0, h_1 \frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, h_s \frac{\partial}{\partial t_s}\right) = (JX_0, 0, \dots, 0), \quad (3.1.1)$$

para todo campo $X_0 \in \tilde{V}$ y toda función $h_\alpha \in \mathcal{F}(\tilde{V} \times \mathbf{R}^s)$, siendo (t_1, \dots, t_s) las coordenadas de \mathbf{R}^s , se tiene que f es una f -estructura en $\tilde{V} \times \mathbf{R}^s$. Además, considerando los campos globales

$$\xi_\alpha = (0, \dots, 0, \frac{\partial}{\partial t_\alpha}, 0, \dots, 0)$$

y sus 1-formas duales $\eta_\alpha = dt_\alpha$, para $\alpha = 1, \dots, s$, se comprueba fácilmente que con los elementos definidos anteriormente, $\tilde{V} \times \mathbf{R}^s$ tiene estructura de f -variedad métrica, con campos de estructura $\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$. Para ello, basta tener en cuenta que, si X es un campo tangente a $\tilde{V} \times \mathbf{R}^s$, no perteneciente a \mathcal{M} , entonces se puede expresar como

$$X = X_0 + \sum_{\alpha=1}^s g(X, \xi_\alpha) \xi_\alpha = X_0 + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) \xi_\alpha, \quad (3.1.2)$$

con $X_0 \in T\tilde{V}$, $X_0 \neq 0$. De aquí que

$$f^2 X = f(fX) = f(JX_0, 0, \dots, 0) = (J^2 X_0, 0, \dots, 0) = -X_0$$

y

$$-X = -(X_0, \eta_1(X) \frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \eta_s(X) \frac{\partial}{\partial t_s}) = -X_0 - \sum_{\alpha} \eta_\alpha(X) \xi_\alpha,$$

con lo que:

$$f^2 = -I + \sum_{\alpha} \eta_\alpha \otimes \xi_\alpha.$$

Las demás condiciones de la definición de f -variedad se verifican trivialmente. Finalmente, la métrica producto, que se denotará por g , es compatible con la f -estructura, pues, dados $X, Y \in T(\tilde{V} \times \mathbf{R}^s)$,

$$g(fX, fY) = g((JX_0, 0, \dots, 0), (JY_0, 0, \dots, 0)) = g_J(JX_0, JY_0) = g_J(X_0, Y_0)$$

y

$$g(X, Y) = g(X_0 + \sum_{\alpha} \eta_\alpha(X) \xi_\alpha, Y_0 + \sum_{\beta} \eta_\beta(Y) \xi_\beta) = g_J(X_0, Y_0) + \sum_{\alpha} \eta_\alpha(X) \eta_\alpha(Y),$$

de donde se sigue que

$$g(fX, fY) = g(X, Y) - \sum_{\alpha} \eta_\alpha(X) \eta_\alpha(Y),$$

lo cual implica que $\eta_\alpha(X) = g(X, \xi_\alpha)$, para todo $\alpha = 1, \dots, s$.

Proposición 3.1.1. *Sea V una subvariedad slant de una variedad casi Hermítica \tilde{V} . Entonces $V \times \mathbf{R}^s$ es subvariedad slant en la f -variedad métrica $\tilde{V} \times \mathbf{R}^s$.*

Demostración. En virtud de (3.1.1), si $X \in T(V \times \mathbf{R}^s)$, entonces $X_0 \in TV$ y:

$$fX = (JX_0, 0, \dots, 0). \quad (3.1.3)$$

Ahora, a partir de (3.1.3) se tiene que $TX = (PX_0, 0, \dots, 0)$, donde se ha denotado por PX_0 a la componente tangente de JX_0 . Así:

$$\begin{aligned} |TX|^2 &= g(TX, TX) = g((PX_0, 0, \dots, 0), (PX_0, 0, \dots, 0)) = \\ &= g_J(PX_0, PX_0) = |PX_0|^2. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Pero, de (3.1.2) se deduce de manera inmediata que

$$|X|^2 - \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha^2(X) = |X_0|^2,$$

lo cual, junto con (3.1.4), implica que

$$\frac{|TX|}{\sqrt{|X|^2 - \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha^2(X)}} = \frac{|PX_0|}{|X_0|},$$

que es una constante por ser V una subvariedad slant de \tilde{V} . □

Así, cada uno de los ejemplos de [28, 29, 23, 26, 47, 58, 59, 60], proporciona un ejemplo de subvariedad slant en una f -variedad métrica. Con todo, debe tenerse en cuenta que $\tilde{V} \times \mathbf{R}^s$ no es una S -variedad. De hecho, puede probarse sin ninguna dificultad que

$$\tilde{\nabla}_X \xi_\alpha = 0,$$

para todo $X \in T(\tilde{V} \times \mathbf{R}^s)$ y para todo $\alpha = 1, \dots, s$, donde se ha denotado por $\tilde{\nabla}$ la conexión de Levi-Civita de $\tilde{V} \times \mathbf{R}^s$.

Además, se tiene que

$$(\tilde{\nabla}_{(X_0, h_1 \frac{d}{dt_1}, \dots, h_s \frac{d}{dt_s})} f)(Y_0, j_1 \frac{d}{dt_1}, \dots, j_s \frac{d}{dt_s}) = (\nabla_{X_0}^{\tilde{V}} J)Y_0,$$

para cualesquiera X_0, Y_0 tangentes a \tilde{V} y funciones $h_1, \dots, h_s, j_1, \dots, j_s \in \mathcal{F}(\tilde{V} \times \mathbf{R}^s)$, donde $\nabla^{\tilde{V}}$ denota la conexión de Levi-Civita de \tilde{V} . Así, se verifica que f es paralelo si y sólo si \tilde{V} es una variedad Kaehleriana.

Sin embargo, se podría pensar que si V fuera una subvariedad slant de una variedad Kaehleriana V , $V \times \mathbf{R}^s$ sería una subvariedad slant en una cierta S -variedad, pero se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.1.2. *Sea M una subvariedad de una f -variedad métrica \widetilde{M} con 2-forma fundamental $F = d\eta_\alpha$, para todo $\alpha = 1, \dots, s$, tangente a los campos de estructura. Entonces, M es anti-invariante si y sólo si la distribución \mathcal{L} es integrable.*

Demostración. Se tiene que

$$2g(X, TY) = 2F(X, Y) = 2d\eta_\alpha(X, Y) = X(\eta_\alpha(Y)) - Y(\eta_\alpha(X)) - \eta_\alpha([X, Y]),$$

para todos $X, Y \in TM$. En particular, si $X, Y \in \mathcal{L}$,

$$2g(X, TY) = -\eta_\alpha([X, Y]),$$

de donde se sigue el resultado. \square

Así, si V es una subvariedad slant de una variedad Kaehleriana, $V \times \mathbf{R}^s$ no puede ser subvariedad slant no anti-invariante en una S -variedad.

3.2. Subvariedades slant en \mathbf{R}^{2m+s} .

A partir de ahora, se denotará por $(\mathbf{R}^{2m+s}, f_0, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$ a la variedad \mathbf{R}^{2m+s} con su S -estructura usual, dada por ([40])

$$\begin{aligned} \eta_\alpha &= \frac{1}{2} \left(dz^\alpha - \sum_{i=1}^m y^i dx^i \right), \quad \xi_\alpha = 2 \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \\ g &= \sum_\alpha \eta_\alpha \otimes \eta_\alpha + \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^m (dx^i \otimes dx^i + dy^i \otimes dy^i) \right), \\ f_0 \left(\sum_{i=1}^m (X_i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y_i \frac{\partial}{\partial y^i}) + \sum_{\alpha=1}^s Z_\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right) &= \sum_{i=1}^m (Y_i \frac{\partial}{\partial x^i} - X_i \frac{\partial}{\partial y^i}) + \sum_{\alpha=1}^s \sum_{i=1}^m Y_i y^i \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \end{aligned}$$

donde (x^i, y^i, z^α) , $i = 1, \dots, m$ y $\alpha = 1, \dots, s$, son las coordenadas cartesianas. Se sabe que

$$\left\{ 2 \frac{\partial}{\partial y^i}, 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_\alpha y^i \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right), \xi_1, \dots, \xi_s \right\} \quad (3.2.1)$$

es una base ortonormal de $T\mathbf{R}^{2m+s}$ tal que

$$f_0 \left(2 \frac{\partial}{\partial y^i} \right) = 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_\alpha y^i \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right)$$

y, por tanto, es una f_0 -base.

Cuando m es par, se puede definir el siguiente endomorfismo f_1 en TR^{2m+s} , dado por:

$$\begin{aligned} f_1(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_m, Z_1, \dots, Z_s) = \\ = (-X_2, X_1, \dots, -X_m, X_{m-1}, Y_2, -Y_1, \dots, Y_m, -Y_{m-1}, \\ y^2 X_1 - y^1 X_2 + \dots + y^m X_{m-1} - y^{m-1} X_m, \dots, \\ \dots, y^2 X_1 - y^1 X_2 + \dots + y^m X_{m-1} - y^{m-1} X_m). \end{aligned}$$

Es fácil probar que $(\mathbf{R}^{2m+s}, f_1, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$ es una f -variedad métrica. Además, si $m = 2k$, se verifica que

$$f_1\left(2\frac{\partial}{\partial y^{2j-1}}\right) = -2\frac{\partial}{\partial y^{2j}}$$

y

$$f_1\left(2\left(\frac{\partial}{\partial x^{2j-1}} + \sum_{\alpha} y^{2j-1} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}\right)\right) = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^{2j}} + \sum_{\alpha} y^{2j} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}\right),$$

para todos $j = 1, \dots, k$ y $\alpha = 1, \dots, s$, de donde se deduce que

$$\left\{2\frac{\partial}{\partial y^{2j-1}}, 2\left(\frac{\partial}{\partial x^{2j-1}} + \sum_{\alpha} y^{2j-1} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}\right), -2\frac{\partial}{\partial y^{2j}}, 2\left(\frac{\partial}{\partial x^{2j}} + \sum_{\alpha} y^{2j} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}\right), \xi_1, \dots, \xi_s\right\}, \quad (3.2.2)$$

donde $j = 1, \dots, k$, es una f_1 -base.

Por otra parte, cualquier $X \in TR^{2m+s}$ se puede expresar en función de la base (3.2.1) como

$$\begin{aligned} X = \sum_{j=1}^k \left(\lambda_{2j-1} 2\frac{\partial}{\partial y^{2j-1}} + \lambda_{2j} 2\frac{\partial}{\partial y^{2j}} \right) + \\ + \sum_{j=1}^k \left(\mu_{2j-1} 2\left(\frac{\partial}{\partial x^{2j-1}} + \sum_{\alpha} y^{2j-1} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}\right) + \mu_{2j} 2\left(\frac{\partial}{\partial x^{2j}} + \sum_{\alpha} y^{2j} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}\right) \right) + \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha}, \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
f_0 X &= \sum_{j=1}^k \left(\lambda_{2j-1} 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^{2j-1}} + \sum_{\alpha} y^{2j-1} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right) + \lambda_{2j} 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^{2j}} + \sum_{\alpha} y^{2j} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right) \right) - \\
&\quad - \sum_{j=1}^k \left(\mu_{2j-1} 2 \frac{\partial}{\partial y^{2j-1}} + \mu_{2j} 2 \frac{\partial}{\partial y^{2j}} \right); \\
f_1 X &= \sum_{j=1}^k \left(-\lambda_{2j-1} 2 \frac{\partial}{\partial y^{2j}} + \lambda_{2j} 2 \frac{\partial}{\partial y^{2j-1}} \right) + \\
&\quad + \sum_{j=1}^k \left(\mu_{2j-1} 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^{2j}} + \sum_{\alpha} y^{2j} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right) - \mu_{2j} 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^{2j-1}} + \sum_{\alpha} y^{2j-1} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right) \right), \\
f_1 f_0 X &= \sum_{j=1}^k \left(\lambda_{2j-1} 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^{2j}} + \sum_{\alpha} y^{2j} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right) - \lambda_{2j} 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^{2j-1}} + \sum_{\alpha} y^{2j-1} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right) \right) + \\
&\quad + \sum_{j=1}^k \left(\mu_{2j-1} 2 \frac{\partial}{\partial y^{2j}} - \mu_{2j} 2 \frac{\partial}{\partial y^{2j-1}} \right)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
f_0 f_1 X &= \sum_{j=1}^k \left(-\lambda_{2j-1} 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^{2j}} + \sum_{\alpha} y^{2j} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right) + \lambda_{2j} 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^{2j-1}} + \sum_{\alpha} y^{2j-1} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right) \right) + \\
&\quad + \sum_{j=1}^k \left(-\mu_{2j-1} 2 \frac{\partial}{\partial y^{2j}} + \mu_{2j} 2 \frac{\partial}{\partial y^{2j-1}} \right),
\end{aligned}$$

de donde se deduce que:

$$f_1 f_0 X = -f_0 f_1 X. \quad (3.2.3)$$

Así, para todo $X \in TR^{2m+s}$, en virtud de (1.2.8) y (3.2.3),

$$g(f_0 X, f_1 X) = -g(X, f_0 f_1 X) = g(X, f_1 f_0 X) = -g(f_1 X, f_0 X),$$

lo cual implica que:

$$g(f_0 X, f_1 X) = 0. \quad (3.2.4)$$

Sin embargo, $(\mathbf{R}^{2m+s}, f_1, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$ no cumple que su 2-forma fundamental F_1 verifique $F_1 = d\eta_{\alpha}$, para todo $\alpha = 1, \dots, s$. Realmente, este hecho es un caso particular de la siguiente proposición.

Proposición 3.2.1. Sea $(\widetilde{M}, f, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$ una f -variedad con 2-forma fundamental $F_f = d\eta_\alpha$ para todo $\alpha = 1, \dots, s$. Si existe otra f -estructura h sobre \widetilde{M} tal que

$$(\widetilde{M}, h, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$$

sea también una f -variedad métrica con 2-forma fundamental $F_h = d\eta_\alpha$ para todo $\alpha = 1, \dots, s$, entonces $h = f$.

Demostración. Si f y h definieran sobre \widetilde{M} dos estructuras de f -variedad con los mismos elementos, entonces, por hipótesis, se tendría que $F_f = F_h$. Aplicando la definición de 2-forma fundamental (1.2.10), se deduce que

$$g(X, fY) = F_f(X, Y) = d\eta_\alpha(X, Y) = F_h(X, Y) = g(X, hY),$$

para todos $X, Y \in T\widetilde{M}$, lo cual implica que $fY = hY$ para todo campo Y tangente a \widetilde{M} . \square

Cuando $m = 2$, es decir, en $(\mathbf{R}^{4+s}, f_1, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$, se puede probar también que la f -estructura no es normal, pues

$$[f_1, f_1](X, Y) = 2 \sum_{\alpha} d\eta_\alpha \otimes \xi_\alpha(X, Y),$$

para todos $X, Y \in T\mathbf{R}^{4+s}$: Además, $dF_{f_1} = 0$, es decir, F_{f_1} es cerrada. Por otra parte, con un simple cálculo es fácil probar que

$$(\widetilde{\nabla}_X f_1)Y = \sum_{\alpha} (2\eta_\alpha(X) f_1 f_0 Y + \eta_\alpha(Y) f_1 f_0 X + g(X, f_1 f_0 Y) \xi_\alpha), \quad (3.2.5)$$

para todos $X, Y \in T\mathbf{R}^{4+s}$.

Las f -estructuras f_0 y f_1 permiten dar un método para obtener subvariedades slant, con ángulo slant dado, en \mathbf{R}^{2m+s} , con m par, como se observa en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.2. Para cada constante θ , se definen $f_{0,\theta}$ y $f_{1,\theta}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f_{0,\theta} &= (\cos\theta) f_0 + (\sen\theta) f_1, \\ f_{1,\theta} &= (\cos\theta) f_1 + (\sen\theta) f_0. \end{aligned}$$

Entonces, $(f_{0,\theta}, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$ y $(f_{1,\theta}, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$ definen dos estructuras de f -variedad métrica sobre \mathbf{R}^{2m+s} , para cualquier número par m .

En particular, si $m = 2$, entonces cualquier subvariedad invariante M de dimensión $2 + s$ en

$$(\mathbf{R}^{4+s}, f_0, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$$

(resp., en $(\mathbf{R}^{4+s}, f_1, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$), tangente a los campos de estructura, es una subvariedad slant, con ángulo θ , en

$$(\mathbf{R}^{4+s}, f_{0,\theta}, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$$

(resp., en $(\mathbf{R}^{4+s}, f_{1,\theta}, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$).

En primer lugar, se prueba que $(\mathbf{R}^{2m+s}, f_{0,\theta}, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$ es una f -variedad métrica. En efecto, dado $X \in T\mathbf{R}^{2m+s}$, en virtud de (3.2.3):

$$\begin{aligned} f_{0,\theta}^2 X &= \cos^2 \theta (-X + \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha}) + \operatorname{sen} \theta \cos \theta (f_1 f_0 X + f_0 f_1 X) + \\ &+ \operatorname{sen}^2 \theta (-X + \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha}) = -X + \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha}. \end{aligned}$$

Por otra parte, dados $X, Y \in T\mathbf{R}^{2m+s}$, se verifica que

$$\begin{aligned} g(f_{0,\theta} X, f_{0,\theta} Y) &= g(\cos \theta f_0 X + \operatorname{sen} \theta f_1 X, \cos \theta f_0 Y + \operatorname{sen} \theta f_1 Y) = \\ &= \cos^2 \theta g(f_0 X, f_0 Y) + \operatorname{sen} \theta \cos \theta (g(f_0 X, f_1 Y) + g(f_1 X, f_0 Y)) + \\ &+ \operatorname{sen}^2 \theta g(f_1 X, f_1 Y) = \cos^2 \theta (g(X, Y) - \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(X) \eta_{\alpha}(Y)) - \\ &- \operatorname{sen} \theta \cos \theta (g(X, f_0 f_1 Y) + g(X, f_1 f_0 Y)) + \operatorname{sen}^2 \theta (g(X, Y) - \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(X) \eta_{\alpha}(Y)) = \\ &= g(X, Y) - \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(X) \eta_{\alpha}(Y), \end{aligned}$$

donde se han usado (1.2.5) y (3.2.3).

De forma totalmente análoga se prueba que $(\mathbf{R}^{2m+s}, f_{1,\theta}, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$ es una f -variedad métrica.

Ahora, se considera una subvariedad invariante M de dimensión $2 + s$ en

$$(\mathbf{R}^{4+s}, f_0, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g),$$

con ξ_{α} tangente, para todo $\alpha = 1, \dots, s$. Obsérvese que M es minimal, pues toda subvariedad invariante en una S -variedad lo es ([10]). Al ser M invariante, en virtud de (1.2.4) y (1.2.9) se puede elegir una base local ortonormal de TM de la forma

$$\{e_1, f_0 e_1, \xi_1, \dots, \xi_s\}, \quad (3.2.6)$$

donde $e_1 \in TM$ es unitario y ortogonal a ξ_{α} , para todo $\alpha = 1, \dots, s$.

Así, dado $X \in TM$, expresándolo en función de la base (3.2.6) quedaría en la forma,

$$X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 f_0 e_1 + \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha},$$

de donde se obtiene

$$|X|^2 - \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}^2(X) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \quad (3.2.7)$$

y, además:

$$f_{0,\theta}X = \lambda_1 \cos\theta f_0 e_1 + \lambda_1 \operatorname{sen}\theta f_1 e_1 - \lambda_2 \cos\theta e_1 + \lambda_2 \operatorname{sen}\theta f_1 f_0 e_1. \quad (3.2.8)$$

Si se denota por $T_{0,\theta}$ la proyección tangente de $f_{0,\theta}$, se verifica que

$$T_{0,\theta}X = g(f_{0,\theta}X, e_1)e_1 + g(f_{0,\theta}X, f_0 e_1)f_0 e_1,$$

de donde:

$$|T_{0,\theta}X|^2 = g(T_{0,\theta}X, T_{0,\theta}X) = g^2(f_{0,\theta}X, e_1) + g^2(f_{0,\theta}X, f_0 e_1). \quad (3.2.9)$$

Ahora bien, en virtud de (1.2.5), (1.2.8), (1.2.9), (3.2.4) y (3.2.8),

$$g(f_{0,\theta}X, e_1) = -\lambda_2 \cos\theta, \quad (3.2.10)$$

mientras que:

$$g(f_{0,\theta}X, f_0 e_1) = \lambda_1 \cos\theta. \quad (3.2.11)$$

Por tanto, (3.2.10) y (3.2.11) en (3.2.9) y teniendo en cuenta (3.2.7), quedaría

$$|T_{0,\theta}X|^2 = \lambda_2^2 \cos^2\theta + \lambda_1^2 \cos^2\theta = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \cos^2\theta,$$

y, en consecuencia,

$$\frac{|T_{0,\theta}X|}{\sqrt{|X|^2 - \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}^2(X)}} = \cos\theta,$$

de donde se deduce el resultado. De forma análoga puede probarse para $f_{1,\theta}$.

Sin embargo, usando este método no se consiguen ejemplos propios en S -variedades, pues, en virtud de la Proposición 3.2.1, ninguna de las 2-formas fundamentales correspondientes a las f -variedades

$$(\mathbf{R}^{4+s}, f_{0,\theta}, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$$

y

$$(\mathbf{R}^{4+s}, f_{1,\theta}, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$$

pueden verificar que son iguales a $d\eta_{\alpha}$ para todo $\alpha = 1, \dots, s$, cuando $\theta \in (0, \pi/2)$.

Para obtener ejemplos en una S -variedad, es necesario el siguiente resultado:

Teorema 3.2.3. Sea

$$x(u', v') = (f_1(u', v'), f_2(u', v'), f_3(u', v'), f_4(u', v'))$$

una superficie slant S en \mathbf{C}^2 con su estructura Kaehleriana usual, tal que $\partial/\partial u'$ y $\partial/\partial v'$ son no nulos y ortogonales. Entonces,

$$y(u, v, t_1, \dots, t_s) = 2(f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v), f_4(u, v), t_1, \dots, t_s) \quad (3.2.12)$$

define una subvariedad slant de dimensión $2 + s$ en

$$(\mathbf{R}^{4+s}, f_0, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g),$$

con el mismo ángulo slant que S y tal que, si se escribe

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^s (2f_3 \frac{\partial f_1}{\partial u} + 2f_4 \frac{\partial f_2}{\partial u}) \frac{\partial}{\partial t_\alpha},$$

$$e_2 = \frac{\partial}{\partial v} + \sum_{\alpha=1}^s (2f_3 \frac{\partial f_1}{\partial v} + 2f_4 \frac{\partial f_2}{\partial v}) \frac{\partial}{\partial t_\alpha},$$

entonces $\{e_1, e_2, \xi_1, \dots, \xi_s\}$ es una base ortogonal del fibrado tangente de la subvariedad.

Demostración. Antes que nada, obsérvese que, en virtud de las hipótesis, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial u'} = \frac{\partial f_1}{\partial u'} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial u'} \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial f_3}{\partial u'} \left(\frac{\partial}{\partial y^1} \right) + \frac{\partial f_4}{\partial u'} \left(\frac{\partial}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial v'} = \frac{\partial f_1}{\partial v'} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial v'} \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial f_3}{\partial v'} \left(\frac{\partial}{\partial y^1} \right) + \frac{\partial f_4}{\partial v'} \left(\frac{\partial}{\partial y^2} \right)$$

constituyen una base ortogonal de TS .

Como $x(u', v')$ define una superficie en \mathbf{C}^2 , es evidente que

$$y(u, v, t_1, \dots, t_s)$$

define una subvariedad M de dimensión $2 + s$ en \mathbf{R}^{4+s} . Ahora, se comprueba que $\{e_1, e_2, \xi_1, \dots, \xi_s\}$ es una base ortonormal de TM . Para ello, derivando en (3.2.12), se obtienen

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial f_1}{\partial u} \left(2 \frac{\partial}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial u} \left(2 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial f_3}{\partial u} \left(2 \frac{\partial}{\partial y^1} \right) + \frac{\partial f_4}{\partial u} \left(2 \frac{\partial}{\partial y^2} \right), \quad (3.2.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial f_1}{\partial v} \left(2 \frac{\partial}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial v} \left(2 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial f_3}{\partial v} \left(2 \frac{\partial}{\partial y^1} \right) + \frac{\partial f_4}{\partial v} \left(2 \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \quad (3.2.14)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t_\alpha} = 2 \frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \xi_\alpha, \quad (3.2.15)$$

para todo $\alpha = 1, \dots, s$. Pero, como en los puntos de la variedad, $y^1 = 2f_3(u, v)$ e $y^2 = 2f_4(u, v)$, en virtud de (3.2.13), (3.2.14) y (3.2.15) tenemos que

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{\alpha} (2f_3 \frac{\partial f_1}{\partial u} + 2f_4 \frac{\partial f_2}{\partial u}) \frac{\partial}{\partial t_\alpha} = \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{\alpha} (y^1 \frac{\partial f_1}{\partial u} + y^2 \frac{\partial f_2}{\partial u}) 2 \frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial u} (2(\frac{\partial}{\partial x^1} + \sum_{\alpha} y^1 \frac{\partial}{\partial z^\alpha})) + \frac{\partial f_2}{\partial u} (2(\frac{\partial}{\partial x^2} + \sum_{\alpha} y^2 \frac{\partial}{\partial z^\alpha})) + \frac{\partial f_3}{\partial u} (2 \frac{\partial}{\partial y^1}) + \frac{\partial f_4}{\partial u} (2 \frac{\partial}{\partial y^2}), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{\partial}{\partial v} + \sum_{\alpha} (2f_3 \frac{\partial f_1}{\partial v} + 2f_4 \frac{\partial f_2}{\partial v}) \frac{\partial}{\partial t_\alpha} = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial v} (2(\frac{\partial}{\partial x^1} + \sum_{\alpha} y^1 \frac{\partial}{\partial z^\alpha})) + \frac{\partial f_2}{\partial v} (2(\frac{\partial}{\partial x^2} + \sum_{\alpha} y^2 \frac{\partial}{\partial z^\alpha})) + \frac{\partial f_3}{\partial v} (2 \frac{\partial}{\partial y^1}) + \frac{\partial f_4}{\partial v} (2 \frac{\partial}{\partial y^2}), \end{aligned}$$

donde se han identificado los vectores tangentes a M con sus imágenes por la aplicación inducida por la inmersión. Así, como (3.2.1) es una base ortonormal de $T\mathbf{R}^{4+s}$, es claro que

$$g(e_1, e_2) = 4 \sum_{i=1}^4 \frac{\partial f_i}{\partial u} \frac{\partial f_i}{\partial v} = 0,$$

ya que, por hipótesis, $\partial/\partial u'$ y $\partial/\partial v'$ son ortogonales. Además, es evidente que $\eta_\alpha(e_1) = \eta_\alpha(e_2) = 0$ y que:

$$g(e_1, e_1) = \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial f_i}{\partial u} \right)^2; \quad g(e_2, e_2) = \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial f_i}{\partial v} \right)^2.$$

En estas condiciones, cualquier $X \in TM$ puede expresarse en función de la base anterior como

$$X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) \xi_\alpha,$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} X &= (\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_1}{\partial v}) 2(\frac{\partial}{\partial x^1} + \sum_{\alpha} y^1 \frac{\partial}{\partial z^\alpha}) + (\lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial v}) 2(\frac{\partial}{\partial x^2} + \sum_{\alpha} y^2 \frac{\partial}{\partial z^\alpha}) + \\ &+ (\lambda_1 \frac{\partial f_3}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_3}{\partial v}) 2 \frac{\partial}{\partial y^1} + (\lambda_1 \frac{\partial f_4}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_4}{\partial v}) 2 \frac{\partial}{\partial y^2} + \sum_{\alpha} \eta_\alpha(X) \xi_\alpha \end{aligned}$$

y, por tanto:

$$|X|^2 - \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}^2(X) = \sum_{i=1}^4 \left(\lambda_1 \frac{\partial f_i}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_i}{\partial v} \right)^2. \quad (3.2.16)$$

Así, como (3.2.1) es una f_0 -base, resulta:

$$\begin{aligned} f_0 X &= (\lambda_1 \frac{\partial f_3}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_3}{\partial v}) 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + \sum_{\alpha} y^1 \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right) + \\ &+ (\lambda_1 \frac{\partial f_4}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_4}{\partial v}) 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \sum_{\alpha} y^2 \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right) - \\ &- (\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_1}{\partial v}) 2 \frac{\partial}{\partial y^1} - (\lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial v}) 2 \frac{\partial}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Ahora bien, como $\{e_1, e_2, \xi_1, \dots, \xi_s\}$ es una base ortogonal de TM , se tiene que

$$T_0 X = \frac{g(f_0 X, e_1)}{g(e_1, e_1)} e_1 + \frac{g(f_0 X, e_2)}{g(e_2, e_2)} e_2,$$

donde T_0 denota la proyección tangente de f_0 , lo cual implica que:

$$|T_0 X|^2 = \frac{g^2(f_0 X, e_1)}{g(e_1, e_1)} + \frac{g^2(f_0 X, e_2)}{g(e_2, e_2)}. \quad (3.2.18)$$

Pero, en virtud de (3.2.17), puede comprobarse que

$$\begin{aligned} g(f_0 X, e_1) &= (\lambda_1 \frac{\partial f_3}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_3}{\partial v}) \frac{\partial f_1}{\partial u} + (\lambda_1 \frac{\partial f_4}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_4}{\partial v}) \frac{\partial f_2}{\partial u} - \\ &- (\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_1}{\partial v}) \frac{\partial f_3}{\partial u} - (\lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial v}) \frac{\partial f_4}{\partial u} = -g(J_0 X_0, \frac{\partial}{\partial u'}), \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

donde J_0 denota la estructura casi-compleja usual de \mathbb{C}^2 y X_0 el campo vectorial de TS dado por:

$$X_0 = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial u'} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial v'}.$$

Análogamente se tiene:

$$g(f_0 X, e_2) = -g(J_0 X_0, \frac{\partial}{\partial v'}). \quad (3.2.20)$$

Entonces, en virtud de (3.2.16), (3.2.18), (3.2.19) y (3.2.20) y mediante un simple cálculo, se deduce que

$$\frac{|T_0 X|}{\sqrt{|X|^2 - \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}^2(X)}} = \frac{|PX_0|}{|X_0|} = \cos \theta,$$

siendo PX_0 la proyección tangente de $J_0 X_0$ y θ el ángulo slant de S . \square

Obsérvese que si S no es totalmente real (anti-invariante), entonces la distribución generada por e_1 y e_2 no es integrable y, por tanto, M no puede ser el producto de S por \mathbf{R}^s . Este hecho es coherente con la Proposición 3.1.2.

Ahora, usando el Teorema 3.7 y los ejemplos 2.1, 2.3, 2.4 y 2.5 de [23], se obtienen los siguientes ejemplos en \mathbf{R}^{4+s} con su S -estructura usual.

Ejemplo 3.2.4. Para cada $\theta \in [0, \pi/2]$,

$$x(u, v, t_1, \dots, t_s) = 2(u \cos \theta, v \sin \theta, v, 0, t_1, \dots, t_s)$$

define una subvariedad slant minimal de dimensión $2+s$ con ángulo slant θ y curvatura escalar:

$$\tau = -\frac{s}{2+s} \cos^2 \theta.$$

Tal y como se hizo en el Teorema 3.2.3, se elige como referencia de TM la formada por los campos tangentes

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^s 2 \cos \theta v \frac{\partial}{\partial t_\alpha} = \\ &= \cos \theta \left(2 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + \sum_{\alpha} y^1 \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right) \right) + \sin \theta \left(2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \sum_{\alpha} y^2 \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right) \right), \\ e_2 &= \frac{\partial}{\partial v} = 2 \frac{\partial}{\partial y^1}, \\ e_{2+\alpha} &= \frac{\partial}{\partial t_\alpha} = 2 \frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \xi_\alpha, \end{aligned}$$

para todo $\alpha = 1, \dots, s$.

En cuanto a $T^\perp M$, se puede elegir como base de campos normales la formada por:

$$\begin{aligned} e_{3+s} &= -\sin \theta \left(2 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + \sum_{\alpha} y^1 \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right) \right) + \cos \theta \left(2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \sum_{\alpha} y^2 \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right) \right), \\ e_{4+s} &= 2 \frac{\partial}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Se puede comprobar que ambas referencias $\{e_1, e_2, \dots, e_{2+s}\}$ y $\{e_{3+s}, e_{4+s}\}$ son ortonormales. En estas condiciones, se verifica que los corchetes no nulos de los campos básicos elegidos son

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= -2 \cos \theta \sum_{\alpha=1}^s e_{2+\alpha}, \quad [e_1, e_{4+s}] = -2 \sin \theta \sum_{\alpha=1}^s e_{2+\alpha}, \\ [e_2, e_{3+s}] &= -2 \sin \theta \sum_{\alpha=1}^s e_{2+\alpha}, \quad [e_{3+s}, e_{4+s}] = -2 \cos \theta \sum_{\alpha=1}^s e_{2+\alpha}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$\tilde{\nabla}_{e_i} e_i = 0,$$

para $i = 1, \dots, 2 + s$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} \sigma(e_1, e_1) = 0, \quad \sigma(e_1, e_2) = 0, \quad \sigma(e_1, \xi_\alpha) = \text{sen}\theta e_{4+s}, \\ \sigma(e_2, e_2) = 0, \quad \sigma(e_2, \xi_\alpha) = \text{sen}\theta e_{3+s}, \quad \sigma(\xi_\alpha, \xi_\beta) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

y, en consecuencia, M es minimal. Además, se tiene que:

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 = 0, \quad \nabla_{e_1} e_2 = -\cos\theta \sum_{\alpha} e_{2+\alpha}, \quad \nabla_{e_1} e_{2+\alpha} = \cos\theta e_2, \\ \nabla_{e_2} e_1 = \cos\theta \sum_{\alpha} e_{2+\alpha}, \quad \nabla_{e_2} e_2 = 0, \quad \nabla_{e_2} e_{2+\alpha} = -\cos\theta e_1, \\ \nabla_{e_{2+\alpha}} e_1 = \cos\theta e_2, \quad \nabla_{e_{2+\alpha}} e_2 = -\cos\theta e_1, \quad \nabla_{e_{2+\alpha}} e_{2+\beta} = 0, \end{aligned}$$

para todos $\alpha, \beta \in \{1, \dots, s\}$. Así, es fácil calcular que

$$R(e_1, e_2)e_2 = -3s\cos^2\theta e_1, \quad R(e_1, e_{2+\alpha})e_{2+\alpha} = \cos^2\theta e_1, \quad R(e_2, e_{2+\alpha})e_{2+\alpha} = \cos^2\theta e_2,$$

de donde se concluye que:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{2+s} (R(e_1, e_2; e_2, e_1) + \sum_{\alpha} (R(e_1, e_{2+\alpha}; e_{2+\alpha}, e_1) + R(e_2, e_{2+\alpha}; e_{2+\alpha}, e_2))) = \\ &= -\frac{s\cos^2\theta}{2+s}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.5. Para cada constante k ,

$$x(u, v, t_1, \dots, t_s) = 2(e^{ku} \cos u \cos v, e^{ku} \text{sen} u \cos v, e^{ku} \cos u \text{sen} v, e^{ku} \text{sen} u \text{sen} v, t_1, \dots, t_s)$$

define una subvariedad slant de dimensión $2 + s$ con ángulo slant

$$\theta = \arccos(|k|/\sqrt{1+k^2}),$$

y curvatura escalar y curvatura media dadas por

$$\tau = -\frac{sk^2}{(2+s)(1+k^2)} \quad |H| = \frac{2e^{-ku}}{(2+s)\sqrt{1+k^2}},$$

respectivamente. Así la subvariedad no es minimal.

En este caso, se puede elegir la referencia ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_{2+s}\}$ de TM dada por:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \frac{e^{-ku}}{\sqrt{1+k^2}} \left(\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^s k e^{2ku} \operatorname{sen}(2v) \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) = \\
 &= \frac{e^{-ku}}{2\sqrt{1+k^2}} \left\{ (kx^1 - x^2) 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + \sum_{\alpha=1}^s y^1 \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right) + (kx^2 + x^1) 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \sum_{\alpha=1}^s y^2 \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + (ky^1 - y^2) 2 \frac{\partial}{\partial y^1} + (ky^2 + y^1) 2 \frac{\partial}{\partial y^2} \right\}, \\
 e_2 &= e^{-ku} \left(\frac{\partial}{\partial v} - 2 \sum_{\alpha=1}^s k e^{2ku} \operatorname{sen}^2(v) \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) = \\
 &= \frac{e^{-ku}}{2} \left\{ -y^1 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + \sum_{\alpha=1}^s y^1 \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right) - y^2 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \sum_{\alpha=1}^s y^2 \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right) + x^1 2 \frac{\partial}{\partial y^1} + x^2 2 \frac{\partial}{\partial y^2} \right\}, \\
 e_{2+\alpha} &= \frac{\partial}{\partial t_\alpha} = 2 \frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \xi_\alpha.
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que, en los puntos de la subvariedad se verifica

$$4e^{2ku} = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (y^1)^2 + (y^2)^2$$

y que, por tanto,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{e^{-ku}}{2} \right) &= -\frac{e^{-3ku}}{8} x^i, \\
 \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\frac{e^{-ku}}{2} \right) &= -\frac{e^{-3ku}}{8} y^i,
 \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, se puede comprobar que:

$$\begin{aligned}
 \sigma(e_1, e_1) = \sigma(e_2, e_2) &= \frac{e^{-2ku}}{2(1+k^2)} \left(-(kx^2 + x^1) 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + \sum_{\alpha=1}^s y^1 \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + (kx^1 - x^2) 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \sum_{\alpha=1}^s y^2 \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right) - (ky^2 + y^1) 2 \frac{\partial}{\partial y^1} + (ky^1 - y^2) 2 \frac{\partial}{\partial y^2} \right).
 \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2+s} \sum_{i=1}^{2+s} \sigma(e_i, e_i) = \frac{e^{-2ku}}{(2+s)(1+k^2)} \left(-(kx^2 + x^1) 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + \sum_{\alpha=1}^s y^1 \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + (kx^1 - x^2) 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \sum_{\alpha=1}^s y^2 \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right) - (ky^2 + y^1) 2 \frac{\partial}{\partial y^1} + (ky^1 - y^2) 2 \frac{\partial}{\partial y^2} \right),
 \end{aligned}$$

de donde se deduce la expresión buscada

Por otra parte, se tiene que

$$[e_1, e_2] = -\frac{ke^{-ku}}{\sqrt{1+k^2}}e_2 - \sum_{\alpha} \frac{2k}{\sqrt{1+k^2}}e_{2+\alpha},$$

$$[e_1, e_{2+\alpha}] = [e_2, e_{2+\alpha}] = 0,$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1}e_1 &= 0, & \nabla_{e_1}e_2 &= -C(k)\sum_{\alpha}e_{2+\alpha}, \\ \nabla_{e_1}e_{2+\alpha} &= C(k)e_2, & \nabla_{e_2}e_1 &= -C(k)\{e^{-ku}e_2 + \sum_{\alpha}e_{2+\alpha}\}, \\ \nabla_{e_2}e_2 &= -C(k)e^{-ku}e_1, & \nabla_{e_2}e_{2+\alpha} &= -C(k)e_1, \\ \nabla_{e_{2+\alpha}}e_1 &= C(k)e_2, & \nabla_{e_{2+\alpha}}e_2 &= -C(k)e_1, \\ \nabla_{e_{2+\alpha}}e_{2+\beta} &= 0, \end{aligned}$$

siendo:

$$C(k) = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

En virtud de todo lo anterior, se obtiene

$$R(e_1, e_2; e_2, e_1) = -\frac{3sk^2}{1+k^2}, \quad R(e_1, e_{2+\alpha}; e_{2+\alpha}, e_1) = R(e_1, e_{2+\alpha}; e_{2+\alpha}, e_1) = \frac{k^2}{1+k^2},$$

de donde resulta el cálculo de la curvatura escalar.

Ejemplo 3.2.6. Para cualquier constante k ,

$$x(u, v, t_1, \dots, t_s) = 2(u, k\cos v, v, k\operatorname{sen}v, t_1, \dots, t_s)$$

define una subvariedad slant M de dimensión $2 + s$, ángulo slant

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)$$

y curvatura media constante dada por:

$$|H| = \frac{|k|}{(2+s)(1+k^2)}.$$

Además, las condiciones siguientes son equivalentes: (i) $k = 0$; (ii) M es invariante; (iii) M es minimal.

En este caso, la base ortonormal $\{e_1, e_2, \xi_1, \dots, \xi_s\}$ of TM viene dada por:

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^s 2v \frac{\partial}{\partial t_\alpha} = 2 \frac{\partial}{\partial x^1} 2y^1 \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial}{\partial z^\alpha},$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \left(\frac{\partial}{\partial v} + \sum_{\alpha=1}^s (-2k^2 \operatorname{sen}^2 v) \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \left(-y^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial}{\partial y^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial y^2} - (y^2)^2 \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right),$$

$$e_{2+\alpha} = \frac{\partial}{\partial t_\alpha} = 2 \frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \xi_\alpha.$$

Teniendo en cuenta que, en los puntos de la subvariedad, $x^2 = 2k \cos v$ e $y^2 = 2k \operatorname{sen} v$, entonces, se obtiene que

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_1 = 0$$

y que:

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_2 = \frac{1}{1+k^2} \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial}{\partial y^2} - x^2 y^2 \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right).$$

Además, $\sigma(e_1, e_1) = 0$, $\sigma(e_2, e_2) = \tilde{\nabla}_{e_2} e_2$ y así:

$$H = -\frac{1}{(2+s)(1+k^2)} \left(x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial}{\partial y^2} + x^2 y^2 \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right).$$

Ejemplo 3.2.7. Sea k un número positivo cualquiera y $(g(r), h(r))$ una curva parametrizada por su longitud de arco. Entonces,

$$x(u, r, t_1, \dots, t_s) = 2(-krs \operatorname{sen} u, g(r), krcos u, h(r), t_1, \dots, t_s)$$

define una subvariedad slant propia con ángulo slant $k/\sqrt{1+k^2}$.

Las comprobaciones relativas a este ejemplo se realizan de manera análoga a las de los ejemplos anteriores.

También se pueden obtener ejemplos de subvariedades slant de dimensión mayor que $2+s$.

Ejemplo 3.2.8. Para $k > 0$,

$$x(u, v, w, r, t_1, \dots, t_s) = 2(u, v, k \operatorname{sen} w, k \operatorname{sen} r, kw, kr, k \cos w, k \cos r, t_1, \dots, t_s)$$

define una subvariedad slant M con ángulo $\pi/4$ en

$$(\mathbf{R}^{8+s}, f_0, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g).$$

En efecto, se considera la base ortonormal en TM , $\{e_1, \dots, e_{4+s}\}$ dada por

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \frac{\partial}{\partial u} + 2kw \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial}{\partial t_\alpha} = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial}{\partial z^\alpha}\right), \\
 e_2 &= \frac{\partial}{\partial v} + 2kr \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial}{\partial t_\alpha} = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial}{\partial z^\alpha}\right), \\
 e_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}k} \left(\frac{\partial}{\partial w} + 2k^2 \cos^2 w \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}k} \left(y^3 2\left(\frac{\partial}{\partial x^3} + y^3 \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial}{\partial z^\alpha}\right) + 2k 2 \frac{\partial}{\partial y^1} - x^3 2 \frac{\partial}{\partial y^3} \right), \\
 e_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}k} \left(\frac{\partial}{\partial r} + 2k^2 \cos^2 r \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \right) = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}k} \left(y^4 2\left(\frac{\partial}{\partial x^4} + y^4 \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial}{\partial z^\alpha}\right) + 2k 2 \frac{\partial}{\partial y^2} - x^4 2 \frac{\partial}{\partial y^4} \right), \\
 e_{4+\alpha} &= \frac{\partial}{\partial t_\alpha} = 2 \frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \xi_\alpha,
 \end{aligned}$$

para $\alpha = 1, \dots, s$. Sea ahora,

$$X = \sum_{i=1}^4 \lambda_i e_i + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) e_{4+\alpha} = \sum_{i=1}^4 \lambda_i e_i + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) \xi_\alpha \in TM.$$

Entonces,

$$|X|^2 - \sum_{\alpha} \eta_\alpha^2(X) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i^2 \quad (3.2.22)$$

y

$$T_0 X = \sum_{i=1}^4 g(f_0 X, e_i) e_i.$$

Pero puede comprobarse fácilmente que

$$\begin{aligned}
 g(f_0 X, e_1) &= \lambda_3 / \sqrt{2}, & g(f_0 X, e_2) &= \lambda_4 / \sqrt{2}, \\
 g(f_0 X, e_3) &= -\lambda_1 / \sqrt{2}, & g(f_0 X, e_4) &= -\lambda_2 / \sqrt{2},
 \end{aligned}$$

de donde:

$$|T_0 X|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i^2. \quad (3.2.23)$$

Así, de (3.2.22) y (3.2.23) se deduce que

$$\frac{|T_0X|}{\sqrt{|X|^2 - \sum \eta_\alpha^2(X)}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

lo cual implica que esta subvariedad es slant con ángulo $\pi/4$.

Ejemplo 3.2.9. Para cada $\theta \in [0, \pi/2]$,

$$x(u, v, w, r, t_1, \dots, t_s) = 2(u, 0, w, 0, v\cos\theta, v\sen\theta, r\cos\theta, r\sen\theta, t_1, \dots, t_s)$$

define una subvariedad slant minimal de dimensión $4 + s$, de ángulo slant θ , en \mathbf{R}^{8+s} con su S -estructura usual.

De modo similar, se obtiene el siguiente ejemplo de una subvariedad slant de dimensión $2 + s$ en $(\mathbf{R}^{6+s}, f_0, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$.

Ejemplo 3.2.10. Para cada $\theta \in [0, \pi/2]$,

$$x(u, v, t_1, \dots, t_s) = 2(u, 0, 0, v\cos\theta, v\sen\theta, 0, t_1, \dots, t_s)$$

define una subvariedad slant de dimensión $2 + s$, con ángulo slant θ , en \mathbf{R}^{6+s} dotado de su S -estructura usual.

Para la comprobación de estos dos últimos ejemplos, se pueden elegir referencias ortonormales de forma totalmente análoga a como se hizo en el Ejemplo 3.2.4.

Usando un procedimiento parecido, se encuentran ejemplos de subvariedades slant en la f -variedad métrica $(\mathbf{R}^{4+s}, f_1, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$.

Ejemplo 3.2.11. Dados dos números reales no nulos γ y μ , se considera la siguiente inmersión de $\mathbf{R} \times (0, \infty) \times \mathbf{R}^s$ en \mathbf{R}^{4+s} , definida por :

$$x(u, v, t_1, \dots, t_s) = 2(\gamma v \sen u, \gamma v \cos u, v \sen(\mu u), v \cos(\mu u), t_1, \dots, t_s).$$

Entonces, la inmersión x proporciona una subvariedad slant M de dimensión $2 + s$ en la f -variedad métrica $(\mathbf{R}^{4+s}, f_1, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$.

Sean:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + \mu^2}} \left\{ \gamma \cos u \, 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right) - \gamma \operatorname{sen} u \, 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right) + \right. \\ \left. + \mu \cos(\mu u) \, 2 \frac{\partial}{\partial y^1} - \mu \operatorname{sen}(\mu u) \, 2 \frac{\partial}{\partial y^2} \right\},$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} \left\{ \gamma \operatorname{sen} u \, 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right) + \gamma \cos u \, 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{sen}(\mu u) \, 2 \frac{\partial}{\partial y^1} + \cos(\mu u) \, 2 \frac{\partial}{\partial y^2} \right\},$$

$$e_{2+\alpha} = 2 \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} = \xi_{\alpha}.$$

Puede comprobarse sin dificultad que $\{e_1, \dots, e_{2+s}\}$ es referencia ortonormal de TM . Como (3.2.2) es una f_1 -base, se tiene que:

$$f_1 e_1 = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + \mu^2}} \left\{ \gamma \operatorname{sen} u \, 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right) + \gamma \cos u \, 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right) - \right. \\ \left. - \mu \operatorname{sen}(\mu u) \, 2 \frac{\partial}{\partial y^1} - \mu \cos(\mu u) \, 2 \frac{\partial}{\partial y^2} \right\}, \quad (3.2.24)$$

$$f_1 e_2 = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} \left\{ -\gamma \cos u \, 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right) + \gamma \operatorname{sen} u \, 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right) + \right. \\ \left. + \cos(\mu u) \, 2 \frac{\partial}{\partial y^1} - \operatorname{sen}(\mu u) \, 2 \frac{\partial}{\partial y^2} \right\}. \quad (3.2.25)$$

Sea, ahora:

$$X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha} \in TM.$$

Entonces,

$$T_1 X = g(f_1 X, e_1) e_1 + g(f_1 X, e_2) e_2,$$

donde T_1 denota la proyección tangente de f_1 . En virtud de (3.2.24) y (3.2.25), se obtiene que

$$g(f_1 X, e_1) = -\lambda_2 \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + \mu^2}} (\gamma^2 - \mu),$$

$$g(f_1 X, e_2) = \lambda_1 \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + \mu^2}} (\gamma^2 - \mu),$$

de donde se deduce que M es una subvariedad slant con ángulo slant:

$$\arccos \left(\frac{|\gamma^2 - \mu|}{\sqrt{\gamma^2 + 1} \sqrt{\gamma^2 + \mu^2}} \right).$$

Ejemplo 3.2.12. Para cada $\theta \in [0, \pi/2]$,

$$x(u, v, t_1, \dots, t_s) = 2(u \cos \theta, v, u \sin \theta, 0, t_1, \dots, t_s)$$

define una subvariedad slant minimal con ángulo slant θ en

$$(\mathbf{R}^{4+s}, f_1, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g).$$

La comprobación de estos ejemplos son análogas a las realizadas anteriormente.

Ejemplo 3.2.13. Para cada $\theta \in [0, \pi/2]$,

$$x(u, v, t_1, \dots, t_s) = 2(u \cos \theta, v, 0, u \sin \theta, t_1, \dots, t_s)$$

define una subvariedad slant minimal con ángulo slant θ en

$$(\mathbf{R}^{4+s}, f_1, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g).$$

Se elige la referencia ortonormal de TM dada por

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial u} = \cos \theta \left(2 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right) + \sin \theta \right) 2 \frac{\partial}{\partial y^2}, \quad (3.2.26)$$

$$e_2 = \frac{\partial}{\partial v} + 2u \sin \theta \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t^{\alpha}} = 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right), \quad (3.2.27)$$

$$e_{2+\alpha} = \frac{\partial}{\partial t^{\alpha}} = 2 \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} = \xi_{\alpha},$$

para $\alpha = 1, \dots, s$.

Se tiene que

$$f_1 e_1 = \cos \theta \left(2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right) + \sin \theta \right) 2 \frac{\partial}{\partial y^1}, \quad (3.2.28)$$

$$f_1 e_2 = -2 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right), \quad (3.2.29)$$

lo cual implica:

$$T_1(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{2+\alpha} e_{2+\alpha}) = -\cos \theta \lambda_2 e_1 + \cos \theta \lambda_1 e_2.$$

De aquí se deduce directamente que la subvariedad M es slant, con ángulo slant θ , en $(\mathbf{R}^{4+s}, f_1, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$. Ahora bien, obsérvese que

$$f_0 e_1 = -\cos\theta \ 2 \frac{\partial}{\partial y^1} + \operatorname{sen}\theta \ 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + y^2 \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right) \quad (3.2.30)$$

y que

$$f_0 e_2 = -2 \frac{\partial}{\partial y^2}. \quad (3.2.31)$$

Entonces, dado

$$X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(X) \xi_{\alpha} \in TM,$$

se escribe, como es usual:

$$T_0 X = g(f_0 X, e_1) e_1 + g(f_0 X, e_2) e_2.$$

Pero, en virtud de (3.2.30) y (3.2.31), resulta

$$g(f_0 X, e_1) = -\lambda_2 \operatorname{sen}\theta$$

y:

$$g(f_0 X, e_2) = \lambda_1 \operatorname{sen}\theta.$$

Así, se verifica:

$$\frac{|T_0 X|}{\sqrt{|X|^2 - \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}^2(X)}} = \operatorname{sen}\theta.$$

Se puede concluir entonces que M es una subvariedad slant en la S -variedad

$$(\mathbf{R}^{4+s}, f_0, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g),$$

con ángulo slant:

$$\arccos(\operatorname{sen}\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Por tanto, se ha descrito un ejemplo de subvariedad slant en dos f -variedades métricas distintas, siendo una de ellas una S -variedad. Además, si $\theta = \pi/4$, la subvariedad tiene el mismo ángulo slant en ambas estructuras.

Para terminar esta sección, se presenta un ejemplo de subvariedad en \mathbf{R}^{4+s} con su S -estructura usual, que no viene dado por el método presentado en el Teorema 3.2.3, lo que implica que no todas las subvariedades de una S -variedad se obtienen de la misma forma.

Ejemplo 3.2.14. Para cada $\theta \in [0, \pi/2]$,

$$x(u, v, t_1, \dots, t_s) = 2(u, 0, v \cos \theta, v \sin \theta, 2uv \cos \theta + t_1, \dots, 2uv \cos \theta + t_s)$$

define una subvariedad slant en \mathbf{R}^{4+s} con ángulo slant θ .

En efecto, basta considerar la referencia ortonormal de TM dada por:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial}{\partial u} = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}\right), \\ e_2 &= \frac{\partial}{\partial v} - 2u \cos \theta \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t^{\alpha}} = \cos \theta 2 \frac{\partial}{\partial y^1} + \sin \theta 2 \frac{\partial}{\partial y^2}, \\ e_{2+\alpha} &= \frac{\partial}{\partial t^{\alpha}} = 2 \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} = \xi_{\alpha}, \end{aligned}$$

para $\alpha = 1, \dots, s$. Expresando cualquier campo tangente a M en función de esta referencia, se demuestra, de manera análoga a como se ha hecho antes, que la subvariedad M es slant con ángulo slant θ .

3.3. Subvariedades Slant en H^{2n+s} .

En esta sección se va a presentar un método para obtener ejemplos de la S -variedad \mathcal{H}^{2n+s} , definida en la Sección 1.2.

En primer lugar, sea \widetilde{M} una S -variedad de dimensión $2n + s$ con tensores de estructura

$$(f, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g),$$

tal que es el espacio fibrado de una fibrición principal toroidal

$$\bar{\pi} : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{N}$$

sobre una variedad Kaehleriana \widetilde{N} de dimensión $2n$, con tensores de estructura (J, G) . Entonces, se satisfacen las siguientes condiciones [3, 4]:

- (i) El subespacio vertical de $\bar{\pi}$ en $p \in \widetilde{M}$ es \mathcal{M}_p .
- (ii) $fX^* = (JX)^*$, para todo $X \in T\widetilde{N}$, donde $*$ denota la elevación horizontal con respecto a $\bar{\pi}$.
- (iii) $g(X^*, Y^*) = G(X, Y)$, para todos $X, Y \in T\widetilde{N}$.

Ahora, sean M una subvariedad $(n + s)$ -dimensional, tangente a los campos de estructura de \widetilde{M} y N una subvariedad n -dimensional de \widetilde{N} . Se supone que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \widetilde{M} \\ \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\ N & \longrightarrow & \widetilde{N}, \end{array}$$

donde M es el conjunto de fibras sobre N . Entonces, como consecuencia directa de (i)-(iii), se puede establecer el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1. *En las condiciones anteriores, M es una subvariedad slant de \widetilde{M} con ángulo slant θ si y sólo si N es una subvariedad slant de \widetilde{N} con ángulo slant θ .*

Usando el teorema anterior, se puede dar un método para construir ejemplos de subvariedades slant propias en H^{2n+s} , con la estructura de S -variedad como espacio fibrado de la fibración principal toroidal $\bar{\pi} : H^{2n+s} \rightarrow \mathbf{PC}^n$ definida en la Sección 1.2. En efecto, si se considera cualquier inmersión isométrica $\phi : N \rightarrow \mathbf{PC}^n$, entonces $M = \bar{\pi}^{-1}(N)$ es un fibrado principal toroidal sobre N (ver [33] para obtener más detalles) y la elevación $\tilde{\phi} : M \rightarrow H^{2n+s}$ de ϕ es otra inmersión isométrica tal que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & H^{2n+s} \\ \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\ N & \xrightarrow{\phi} & \mathbf{PC}^n. \end{array}$$

En virtud del Teorema 3.3.1 se tiene que, para conseguir una subvariedad slant de H^{2n+s} con ángulo slant θ , basta considerar una subvariedad slant de \mathbf{PC}^n con ángulo slant θ . Por ejemplo, cualquiera de las dadas en [47].

Capítulo 4

Estudio de la Segunda Forma Fundamental para Inmersiones Slant en S -variedades

En este capítulo se van a estudiar ciertos tipos especiales de subvariedades slant en S -variedades cuyas definiciones están relacionadas con la segunda forma fundamental de la inmersión. Así, en la Sección 4.1 se van a considerar subvariedades totalmente f -geodésicas, totalmente f -umbilicales (definidas por L. Ornea en [50]), pseudo-umbilicales y austeras, dando ejemplos de tales subvariedades.

Además, en la Sección 4.2 se tratarán las subvariedades slant de S -variedades con menor dimensión, esto es, con dimensión $2 + s$, presentando algunos teoremas de caracterización para estas subvariedades en términos de las derivadas covariantes de los operadores de proyección en la subvariedad de la f -estructura. Finalmente, en la Sección 4.3 se estudian las subvariedades slant minimales de menor dimensión. En particular, se establecen algunas relaciones entre las subvariedades slant minimales de dimensión $(2 + s)$ y las subvariedades anti-invariantes en S -variedades, que corresponderán a las probadas por B.-Y. Chen en [23, 26].

4.1. Subvariedades Slant Minimales y Totalmente Umbilicales.

Sea $(\widetilde{M}, f, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$ una S -variedad de dimensión $(2m + s)$. En esta sección se consideran subvariedades de \widetilde{M} isométricamente inmersas y tangentes a los campos de estructura. En primer lugar, se tiene el siguiente resultado, cuya prueba es inmediata en virtud de (1.3.11):

Proposición 4.1.1. *Cualquier subvariedad slant M de \widetilde{M} totalmente geodésica es una subvariedad invariante.*

De aquí que no existen subvariedades slant no invariantes y totalmente geodésicas en una S -variedad. Por otra parte, usando (1.3.13), se deduce que toda subvariedad totalmente umbilical y tangente a los campos de estructura en una S -variedad debe ser minimal y, por tanto, totalmente geodésica. En consecuencia:

Corolario 4.1.2. *No existen subvariedades slant no invariantes y totalmente umbilicales de una S -variedad.*

Los resultados anteriores indican que el estudio de las subvariedades slant totalmente geodésicas o totalmente umbilicales de S -variedades se reduce al estudio de subvariedades invariantes. Es necesario, entonces, trabajar con otro tipo de subvariedades donde el comportamiento de la segunda forma fundamental esté más relacionado con la f -estructura, denominadas subvariedades *totalmente f -geodésicas* y *totalmente f -umbilicales*, que fueron introducidas por Ornea [50]. Así, una subvariedad con dimensión $(n + s)$ de una S -variedad, tangente a los campos de estructura, se dice que es una subvariedad *totalmente f -geodésica* (resp., *totalmente f -umbilical*) si la distribución \mathcal{L} es totalmente geodésica (resp., totalmente umbilical), esto es, si $\sigma(X, Y) = 0$ (resp., $\sigma(X, Y) = g(X, Y)V$), siendo

$$V = \frac{n + s}{n}H),$$

para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{L}$. En otras palabras, puesto que $\sigma(\xi_\alpha, \xi_\beta) = 0$, para cualesquiera $\alpha, \beta = 1, \dots, s$, la subvariedad es totalmente f -geodésica si y sólo si

$$\sigma(X, Y) = \sum_{\alpha=1}^s (\eta_\alpha(X)\sigma(Y, \xi_\alpha) + \eta_\alpha(Y)\sigma(X, \xi_\alpha))$$

y es totalmente f -umbilical si y sólo si

$$\sigma(X, Y) = \sum_{\alpha=1}^s (\eta_\alpha(X)\sigma(Y, \xi_\alpha) + \eta_\alpha(Y)\sigma(X, \xi_\alpha)) + g(fX, fY)V,$$

para cualesquiera $X, Y \in TM$. Entonces, una subvariedad totalmente f -umbilical es totalmente f -geodésica si y sólo si es minimal. Por otro lado, es fácil demostrar que cualquier subvariedad totalmente f -geodésica es minimal y totalmente f -umbilical. Así, el Ejemplo 3.2.5 presenta subvariedades slant de una S -variedad que no son totalmente f -geodésicas y, teniendo en cuenta (3.2.21), el Ejemplo 3.2.4 presenta subvariedades slant totalmente f -geodésicas.

Por lo que respecta a las subvariedades totalmente f -umbilicales, se sabe que cualquier subvariedad totalmente f -umbilical tangente a los campos de estructura de un espacio de curvatura f -seccional constante $c \neq -3s$, ha de ser invariante o anti-invariante, esto es, no existen subvariedades slant propias en dicho espacio de curvatura f -seccional constante [8]. En el caso $c = -3s$, las subvariedades slant que aparecen en el Ejemplo 3.2.4 son totalmente f -umbilicales, mientras que las subvariedades slant del Ejemplo 3.2.5 no pueden ser totalmente f -umbilicales porque se obtiene que $\sigma(e_1, e_2) = 0$ y las subvariedades no son minimales.

A continuación, se estudiará la pseudo-umbilicalidad en las subvariedades slant. Recuérdense que se dice que una subvariedad es *seudo-umbilical* si existe una función diferenciable h tal que

$$g(\sigma(X, Y), H) = hg(X, Y), \quad (4.1.1)$$

para todos $X, Y \in TM$. Entonces, se puede demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4.1.3. *Sea M una subvariedad slant no invariante de una S -variedad \widetilde{M} , tales que $\dim M = m + s$ y $\dim \widetilde{M} = 2m + s$. Entonces, M es pseudo-umbilical si y sólo si es minimal.*

Demostración. Si M es una subvariedad pseudo-umbilical, entonces, aplicando (4.1.1) para $X = Y = \xi_\alpha$, se obtiene que $h = 0$, esto es,

$$g(\sigma(X, Y), H) = 0, \quad (4.1.2)$$

para cualesquiera $X, Y \in TM$. En particular, poniendo $Y = \xi_\alpha$ en (4.1.2),

$$g(NX, H) = 0, \quad (4.1.3)$$

para cualquier $X \in TM$. Ahora, a partir del Corolario 2.1.9, si se tiene una base ortonormal local $\{e_1, \dots, e_m, \xi_1, \dots, \xi_s\}$ de TM , entonces, $\{\csc \theta Ne_1, \dots, \csc \theta Ne_m\}$ es una base ortonormal local de $T^\perp M$, con lo que, en virtud de (4.1.3), M es minimal.

Recíprocamente, si M es minimal, entonces $H = 0$ y basta considerar $h = 0$ para probar que M es pseudo-umbilical. \square

Así, las subvariedades slant del Ejemplo 3.2.4 son pseudo-umbilicales mientras que las subvariedades slant del Ejemplo 3.2.5 no lo son.

De manera análoga a como se hizo anteriormente, es posible definir una noción de pseudo-umbilicalidad más ligada a la estructura. Una subvariedad M tangente a los campos de estructura se dice que es *pseudo- f -umbilical* si existe una función diferen-

ciable h tal que

$$\begin{aligned} g(\sigma(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^s (\eta_{\alpha}(X)\sigma(Y, \xi_{\alpha}) - \eta_{\alpha}(Y)\sigma(X, \xi_{\alpha})), H) = \\ = h(g(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X)\eta_{\alpha}(Y)), \end{aligned}$$

para cualesquiera $X, Y \in TM$. Entonces, se puede demostrar, mediante un cálculo directo, que las subvariedades del Ejemplo 3.2.5 son pseudo- f -umbilicales. Sin embargo, las subvariedades slant no-invariantes del Ejemplo 3.2.6, esto es, si $k \neq 0$, no son pseudo- f -umbilicales, porque $\sigma(e_1, e_1) = 0$ y $\sigma(e_2, e_2) \neq 0$.

Finalmente, se va a considerar otro tipo de subvariedades minimales, denominadas *subvariedades austeras*, que son aquellas tales que el conjunto de autovalores de A_V , para cada $V \in T^{\perp}M$, es invariante al multiplicar por -1 . La condición de austeridad, introducida por Harvey y Lawson [39] en el contexto de subvariedades Lagrangianas especiales en espacios Euclideos, es mucho más fuerte que la condición de minimalidad (para tener más detalles sobre estas subvariedades, puede consultarse [32]). A continuación se prueban una serie de condiciones suficientes que aseguran la austeridad de una subvariedad slant propia de una S -variedad. En primer lugar, se tiene el siguiente lema general, cuya demostración es inmediata usando (1.2.23), (1.3.1), (1.3.2) y las fórmulas de Gauss-Weingarten.

Lema 4.1.4. *Sea M una subvariedad de una S -variedad \widetilde{M} , tangente a los campos de estructura. Entonces, para cualesquiera $X, Y \in TM$:*

$$(\nabla_X N)Y = n\sigma(X, Y) - \sigma(X, TY). \quad (4.1.4)$$

Ahora, se puede demostrar las condiciones anunciadas.

Teorema 4.1.5. *Sea M una subvariedad slant propia minimal de una S -variedad \widetilde{M} tal que se satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) *Para cualesquiera $X, Y \in TM$:*

$$(\nabla_X N)Y = \sum_{\alpha} (2\eta_{\alpha}(X)NTY + \eta_{\alpha}(Y)NTX). \quad (4.1.5)$$

(ii) *Para cualquier $V \in T^{\perp}M$, todo autovector X asociado a un autovalor no nulo de A_V , con $X \in \mathcal{L}$, verifica que*

$$g(TX, tV) = 0. \quad (4.1.6)$$

Entonces, M es una subvariedad austera.

Demostración. En primer lugar, a partir de (4.1.4) y (4.1.5) se deduce que

$$\sigma(X, TY) = n\sigma(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^s (2\eta_{\alpha}(X)NTY + \eta_{\alpha}(Y)NTX), \quad (4.1.7)$$

para cualesquiera $X, Y \in TM$. Ahora, como en virtud de la Proposición 2.4.1 se puede demostrar que $(M, \sec \theta T, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$ es una f -variedad métrica, siendo θ el ángulo slant de M , se puede elegir una base ortonormal local de campos en M ,

$$\{e_1, \sec \theta Te_1, \dots, e_k, \sec \theta Te_k, \xi_1, \dots, \xi_s\}, \quad (4.1.8)$$

donde $\dim M = 2k + s$. Entonces, a partir de (4.1.7) se tiene que

$$\sigma(\sec \theta Te_i, \sec \theta Te_j) = \sec^2 \theta n\sigma(e_j, Te_i) = \sec^2 \theta \sigma(e_j, T^2 e_i)$$

y, por tanto, en virtud del Teorema 2.1.6,

$$\sigma(\sec \theta Te_i, \sec \theta Te_j) = -\sigma(e_i, e_j), \quad (4.1.9)$$

para cualesquiera $i, j = 1, \dots, k$.

En lo que resta de demostración, dado un campo cualquiera $X \in TM$, se va a denotar por \tilde{X} al campo

$$\tilde{X} = X - \sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X)\xi_{\alpha}$$

y por X_* al campo $X_* = \sec \theta TX$. En estas condiciones, sean $V \in T^{\perp}M$ cualquiera, μ un autovalor no nulo de A_V y se considera un autovector no nulo $X \in TM$ asociado a μ . Se va a probar que

$$A_V(\sec \theta TX) = -\mu \sec \theta TX, \quad (4.1.10)$$

lo que implicará que $-\mu$ también es autovalor de A_V , con lo que concluiría la demostración.

En efecto, como, en función de la base (4.1.8),

$$\tilde{X} = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^k \mu_i e_{i*}, \quad (4.1.11)$$

entonces:

$$A_V \tilde{X} = \sum_{i=1}^k \lambda_i A_V e_i + \sum_{i=1}^k \mu_i A_V e_{i*}. \quad (4.1.12)$$

Pero, para cualquier $i = 1, \dots, k$, a partir de (1.1.3) y (1.3.12) se obtiene:

$$A_V e_i = \sum_{j=1}^k g(\sigma(e_i, e_j), V) e_j + \sum_{j=1}^k g(\sigma(e_i, e_{j*}), V) e_{j*} + \sum_{\alpha=1}^s g(tV, e_i) \xi_\alpha. \quad (4.1.13)$$

Además, de (4.1.9):

$$A_V e_{i*} = \sum_{j=1}^k g(\sigma(e_{i*}, e_j), V) e_j - \sum_{j=1}^k g(\sigma(e_i, e_j), V) e_{j*} + \sum_{\alpha=1}^s g(tV, e_{i*}) \xi_\alpha. \quad (4.1.14)$$

Así, sustituyendo (4.1.13) y (4.1.14) en (4.1.12), se tiene:

$$\begin{aligned} A_V \tilde{X} &= \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^k (\lambda_i g(\sigma(e_i, e_j), V) + \mu_i g(\sigma(e_{i*}, e_j), V)) \right) e_j + \\ &+ \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^k (\lambda_i g(\sigma(e_i, e_{j*}), V) - \mu_i g(\sigma(e_i, e_j), V)) \right) e_{j*} + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^s \left(\sum_{i=1}^k (\lambda_i g(tV, e_i) + \mu_i g(tV, e_{i*})) \right) \xi_\alpha. \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Por otra parte,

$$A_V X = A_V \tilde{X} + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) A_V \xi_\alpha = A_V \tilde{X} + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) tV, \quad (4.1.16)$$

donde:

$$tV = \sum_{j=1}^k g(tV, e_j) e_j + \sum_{j=1}^k g(tV, e_{j*}) e_{j*}. \quad (4.1.17)$$

Ahora bien, como X es un autovector de A_V , asociado al autovalor μ ,

$$A_V X = \mu X \quad (4.1.18)$$

e igualando las componentes con respecto a la base (4.1.8), de (4.1.11) y (4.1.15)-(4.1.18) se tiene que

$$\sum_{i=1}^k (\lambda_i g(\sigma(e_i, e_j), V) + \mu_i g(\sigma(e_{i*}, e_j), V)) + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) g(tV, e_j) = \mu \lambda_j, \quad (4.1.19)$$

$$\sum_{i=1}^k (\lambda_i g(\sigma(e_i, e_{j*}), V) - \mu_i g(\sigma(e_i, e_j), V)) + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) g(tV, e_{j*}) = \mu \mu_j \quad (4.1.20)$$

y:

$$\sum_{i=1}^k (\lambda_i g(tV, e_i) + \mu_i g(tV, e_{i*})) = g(tV, \tilde{X}) = \mu \eta_\alpha(X). \quad (4.1.21)$$

Aplicando T en (4.1.11) y multiplicando por $\sec \theta$, se deduce que

$$X_* = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_{i*} - \sum_{i=1}^k \mu_i e_i,$$

donde se ha aplicado el Teorema 2.1.6.

Procediendo de forma similar a (4.1.9) se puede probar que $\sigma(e_{i*}, e_j) = \sigma(e_i, e_{j*})$, para todos i, j . Entonces, empleando las ecuaciones (4.1.19)-(4.1.21), se llega a:

$$A_V X_* = -\mu X_* + \sec \theta \sum_{\alpha=1}^s g(tV, TX) \xi_\alpha. \quad (4.1.22)$$

Por tanto, para concluir la demostración, basta probar que $g(tV, TX) = 0$, lo cual es inmediato si $X \in \mathcal{L}$, en virtud de (4.1.6). Se puede suponer, en consecuencia, que $X \notin \mathcal{L}$. Ahora bien, de (1.3.3) y (4.1.18) se tiene que:

$$g(A_V X, TX) = g(\mu X, TX) = \mu g(X, TX) = -\mu g(X, TX) = 0.$$

Pero, por otra parte, usando (4.1.16),

$$g(A_V X, TX) = g(A_V \tilde{X}, TX) + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) g(tV, TX).$$

Así,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) g(tV, TX) &= -g(A_V \tilde{X}, TX) = -g(\tilde{X}, A_V TX) = \\ &= -\cos \theta g(\tilde{X}, A_V X_*), \end{aligned}$$

de donde, aplicando (4.1.22) resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X) g(tV, TX) &= -\cos \theta g(\tilde{X}, A_V X_*) = \\ &= \cos \theta \mu g(\tilde{X}, X_*) - \sum_{\alpha=1}^s g(tV, TX) g(\tilde{X}, \xi_\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Entonces, como $X \notin \mathcal{L}$,

$$\sum_{\alpha=1}^s \eta_{\alpha}(X) \neq 0$$

y de aquí que $g(tV, TX) = 0$. □

Obsérvese que este teorema es el correspondiente al Teorema 3.8 de [23], probado por B.-Y. Chen para subvariedades slant propias y austeras de variedades Kaehlerianas. Por otro lado, las subvariedades slant del Ejemplo 3.2.4, con ángulo slant $\theta \in (0, \pi/2)$, son austeras porque, para cualquier $V \in T^{\perp}M$, la ecuación característica de A_V viene dada por

$$\mu^s(\mu^2 - s|V|^2 \text{sen}^2\theta) = \mu^s(\mu - \sqrt{s}|V|\text{sen}\theta)(\mu + \sqrt{s}|V|\text{sen}\theta) = 0$$

y, como consecuencia, el conjunto de autovalores de A_V es:

$$\{0, -\sqrt{s}|V|\text{sen}\theta, +\sqrt{s}|V|\text{sen}\theta\}.$$

4.2. Subvariedades Slant de menor Dimensión

En esta sección se van a estudiar las subvariedades slant propias con la menor dimensión posible, que se sabe es $2 + s$, en S -variedades.

En la sección anterior se obtuvo una expresión para ∇N en una subvariedad de una S -variedad tangente a los campos de estructura (Lema 4.1.4). De manera análoga se tiene:

Lema 4.2.1. *Sea M una subvariedad de una S -variedad \widetilde{M} , tangente a los campos de estructura. Entonces, para cualesquiera $X, Y \in TM$:*

$$(\nabla_X T)Y = t\sigma(X, Y) + A_{NY}X + \sum_{\alpha=1}^s (g(fX, fY)\xi_{\alpha} + \eta_{\alpha}(Y)f^2X), \quad (4.2.1)$$

En primer lugar se van a probar dos lemas generales para subvariedades de S -variedades:

Lema 4.2.2. *Sea M una subvariedad de una S -variedad, tangente a los campos de estructura. Entonces, existe una función diferenciable λ tal que*

$$(\nabla_X T)Y = \lambda \sum_{\alpha=1}^s (g(fX, fY)\xi_{\alpha} + \eta_{\alpha}(Y)f^2X), \quad (4.2.2)$$

para cualesquiera $X, Y \in TM$, si y sólo si:

$$A_{NY}X - A_{NX}Y = (\lambda - 1) \sum_{\alpha=1}^s (\eta_{\alpha}(Y)f^2X - \eta_{\alpha}(X)f^2Y).$$

Demostración. En primer lugar, de (4.2.1) y (4.2.2), se deduce que

$$t\sigma(X, Y) + A_{NY}X = (\lambda - 1) \sum_{\alpha} (g(fX, fY)\xi_{\alpha} + \eta_{\alpha}(Y)f^2X), \quad (4.2.3)$$

para todos $X, Y \in TM$. Intercambiando los papeles de X e Y en (4.2.3), resulta:

$$t\sigma(Y, X) + A_{NX}Y = (\lambda - 1) \sum_{\alpha} (g(fY, fX)\xi_{\alpha} + \eta_{\alpha}(X)f^2Y). \quad (4.2.4)$$

Así, debido a que tanto σ como g son campos de tensores simétricos, de (4.2.3) y (4.2.4) se obtiene:

$$A_{NY}X - A_{NX}Y = (\lambda - 1) \sum_{\alpha} (\eta_{\alpha}(Y)f^2X - \eta_{\alpha}(X)f^2Y). \quad (4.2.5)$$

Recíprocamente, si se verifica (4.2.5) para todos $X, Y \in TM$, con λ una cierta función diferenciable, entonces:

$$g(A_{NY}X, Z) = g(A_{NX}Y, Z) + (\lambda - 1) \sum_{\alpha} g(\eta_{\alpha}(Y)f^2X - \eta_{\alpha}(X)f^2Y, Z), \quad (4.2.6)$$

para todos $X, Y, Z \in TM$. Pero, por otro lado se tiene que:

$$\begin{aligned} g(\eta_{\alpha}(Y)f^2X - \eta_{\alpha}(X)f^2Y, Z) &= g(g(Y, \xi_{\alpha})f^2X - g(X, \xi_{\alpha})f^2Y, Z) = \\ &= g(Y, \xi_{\alpha})g(f^2X, Z) - g(X, \xi_{\alpha})g(f^2Y, Z) = \\ &= g(Y, \xi_{\alpha})g(X, f^2Z) - g(X, \xi_{\alpha})g(f^2Y, Z) = \\ &= g(g(Y, \xi_{\alpha})f^2Z - g(f^2Y, Z)\xi_{\alpha}, X) = g(\eta_{\alpha}(Y)f^2Z - g(f^2Y, Z)\xi_{\alpha}, X). \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Además, dado que el operador de Weingarten A es autoadjunto y usando (1.1.3), se cumplen:

$$g(A_{NY}X, Z) = g(X, A_{NY}Z), \quad (4.2.8)$$

$$g(A_{NX}Y, Z) = g(\sigma(Y, Z), NX) = -g(t\sigma(Y, Z), X). \quad (4.2.9)$$

Por tanto, sustituyendo (4.2.7)-(4.2.9) en (4.2.6), se verifica que

$$g(A_{NY}Z, X) = -g(t\sigma(Y, Z), X) + (\lambda - 1) \sum_{\alpha} g(\eta_{\alpha}(Y)f^2Z - g(f^2Y, Z)\xi_{\alpha}, X),$$

para todos $X, Y, Z \in TM$, de donde:

$$A_{NY}Z + t\sigma(Y, Z) = (\lambda - 1) \sum_{\alpha} (\eta_{\alpha}(Y)f^2Z + g(fY, fZ)\xi_{\alpha}), \quad (4.2.10)$$

para todos $Y, Z \in TM$. Ahora, de (4.2.1) y (4.2.10),

$$(\nabla_Z T)Y = \lambda \sum_{\alpha} (g(fY, fZ)\xi_{\alpha} + \eta_{\alpha}(Y)f^2Z),$$

para todos $Y, Z \in TM$. □

Lema 4.2.3. *Sea M una subvariedad de una S -variedad, tangente a los campos de estructura. Entonces,*

$$(\nabla_X N)Y = \sum_{\alpha=1}^s (2\eta_{\alpha}(X)NTY + \eta_{\alpha}(Y)NTX), \quad (4.2.11)$$

para cualesquiera $X, Y \in TM$, si y sólo si:

$$A_V TY + A_{nV} Y = \sum_{\alpha=1}^s (2g(Y, tnV)\xi_{\alpha} + \eta_{\alpha}(Y)tnV), \quad (4.2.12)$$

para cualquier $Y \in TM$ y cualquier $V \in T^{\perp}M$.

Demostración. En primer lugar, obsérvese que la condición (4.2.11) es equivalente a

$$n\sigma(X, Y) = \sigma(X, TY) + \sum_{\alpha} (2\eta_{\alpha}(X)NTY + \eta_{\alpha}(Y)NTX),$$

para todos $X, Y \in TM$, lo cual es equivalente, a su vez, a decir que

$$g(n\sigma(X, Y), V) = g(\sigma(X, TY) + \sum_{\alpha} (2\eta_{\alpha}(X)NTY + \eta_{\alpha}(Y)NTX), V), \quad (4.2.13)$$

para todos $X, Y \in TM$ y todo $V \in T^{\perp}M$. Pero, en virtud de (1.3.4) y (1.1.3):

$$g(n\sigma(X, Y), V) = -g(\sigma(X, Y), nV) = -g(A_{nV}Y, X), \quad (4.2.14)$$

$$g(\sigma(X, TY), V) = g(A_V TY, X). \quad (4.2.15)$$

Por otra parte,

$$2g(\eta_{\alpha}(X)NTY, V) = 2g(g(X, \xi_{\alpha})NTY, V) = g(2g(NTY, V)\xi_{\alpha}, X), \quad (4.2.16)$$

mientras que, de (1.3.3), (1.3.5) y (1.3.8), resulta

$$g(NTX, V) = -g(TX, tV) = g(TtV, X) = -g(tnV, X), \quad (4.2.17)$$

de donde se obtiene que:

$$\eta_\alpha(Y)g(NTX, V) = -\eta_\alpha(Y)g(tnV, X). \quad (4.2.18)$$

Uniendo todo lo anterior, es decir, sustituyendo (4.2.14)-(4.2.16) y (4.2.18) en (4.2.13), se tiene que (4.2.11) equivale a

$$-A_{nV}Y = A_VTY + \sum_{\alpha} (2g(NTY, V)\xi_\alpha - \eta_\alpha(Y)tnV), \quad (4.2.19)$$

para todo $Y \in TM$ y todo $V \in T^\perp M$. Pero, razonando como en (4.2.17),

$$g(NTY, V) = -g(TY, tV) = g(Y, TtV) = -g(Y, tnV),$$

luego, si se sustituye en (4.2.19), resulta que

$$A_VTY = -A_{nV}Y + \sum_{\alpha} (2g(Y, tnV)\xi_\alpha + \eta_\alpha(Y)tnV)$$

para todo $Y \in TM$ y para todo $V \in T^\perp M$. \square

Obsérvese que $2 + s$ es la menor dimensión de una subvariedad slant propia en una f -variedad métrica, de acuerdo con el comentario hecho como consecuencia de (2.2.1). Ahora, se van a estudiar las subvariedades de dicha dimensión cuando la variedad ambiente es una S -variedad.

Teorema 4.2.4. *Sea M una subvariedad de dimensión $(2 + s)$ de una S -variedad, tangente a los campos de estructura. Entonces, M es una subvariedad slant si y sólo si existe una función $\lambda : M \rightarrow [0, 1]$ tal que*

$$(\nabla_X T)Y = \lambda \sum_{\alpha=1}^s (g(fX, fY)\xi_\alpha + \eta_\alpha(Y)f^2X), \quad (4.2.20)$$

para cualesquiera $X, Y \in TM$. Además, en este caso, si θ es el ángulo slant de M , entonces $\lambda = \cos^2\theta$.

Demostración. En primer lugar, es fácil demostrar que (4.2.20) implica

$$(\nabla_X Q)Y = \lambda \sum_{\alpha=1}^s (g(X, TY)\xi_\alpha - \eta_\alpha(Y)TX).$$

Entonces, sólo hay que aplicar el Corolario 2.3.5 para obtener que M es una subvariedad slant.

Recíprocamente, se puede suponer que M es una subvariedad slant propia porque si M es una subvariedad invariante o anti-invariante, se obtiene (4.2.20) directamente. Ahora, puesto que $\dim(M) = 2 + s$, según el Corolario 2.1.10, se puede elegir una base local ortonormal de TM , $\{e_1, e_2, \xi_1, \dots, \xi_s\}$, tal que $e_2 = (\sec \theta)Te_1$ y $e_1 = -(\sec \theta)Te_2$. Así, para cualquier $X \in TM$, se tiene, en virtud de (1.1.5) y (1.1.6)

$$\begin{aligned} (\nabla_X T)e_1 &= \nabla_X Te_1 - T(\nabla_X e_1) = \\ &= \cos \theta \nabla_X e_2 - w_1^2(X)Te_2 = \cos \theta \sum_{\alpha=1}^s w_2^\alpha(X)\xi_\alpha, \end{aligned}$$

ya que $w_i^i(X) = 0$ y $w_i^j(X) = -w_j^i(X)$. Ahora bien, usando (1.2.19) y (1.2.23), $w_2^\alpha(X) = g(e_2, TX)$, para cualquier $\alpha = 1, \dots, s$ y también:

$$(\nabla_X T)e_1 = \cos \theta \sum_{\alpha=1}^s g(e_2, TX)\xi_\alpha = \cos^2 \theta \sum_{\alpha=1}^s g(X, e_1)\xi_\alpha. \quad (4.2.21)$$

De forma similar:

$$(\nabla_X T)e_2 = \cos^2 \theta \sum_{\alpha=1}^s g(X, e_2)\xi_\alpha. \quad (4.2.22)$$

Por otro lado, para cualquier $\alpha = 1, \dots, s$:

$$(\nabla_X T)\xi_\alpha = \cos^2 \theta f^2 X. \quad (4.2.23)$$

Entonces, dado cualquier $Y \in TM$, puesto que localmente

$$Y = Y_1 e_1 + Y_2 e_2 + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(Y)\xi_\alpha,$$

se obtiene que:

$$(\nabla_X T)Y = Y_1(\nabla_X T)e_1 + Y_2(\nabla_X T)e_2 + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(Y)(\nabla_X T)\xi_\alpha. \quad (4.2.24)$$

Sustituyendo (4.2.21)-(4.2.23) en (4.2.24) se concluye la prueba. \square

A partir del Lema 4.2.2 se obtiene:

Corolario 4.2.5. *Sea M una subvariedad de dimensión $2 + s$ en una S -variedad, tangente a los campos de estructura. Entonces, M es una subvariedad slant si y sólo si existe una función diferenciable $\mu : M \rightarrow [0, 1]$ tal que*

$$A_{NY}X - A_{NX}Y = \mu \sum_{\alpha=1}^s (\eta_\alpha(X)f^2 Y - \eta_\alpha(Y)f^2 X),$$

para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Además, en este caso, si θ es el ángulo slant de M , entonces $\mu = \sec^2 \theta$.

4.3. Subvariedades Slant Minimales de menor Dimensión.

En esta sección se van a estudiar las subvariedades slant en S -variedades que tienen la menor dimensión posible y que sean minimales. Además, se establecerán relaciones entre ellas y las subvariedades anti-invariantes en S -variedades, similares a las probadas por B.-Y. Chen para superficies slant y superficies totalmente reales en variedades Kaehlerianas.

Para usarlos más adelante, se prueban los siguientes lemas.

Lema 4.3.1. *Sea M una subvariedad θ -slant propia de dimensión $(2 + s)$ de una S -variedad \widetilde{M} con $\dim(\widetilde{M}) = 4 + s$ y se considera una referencia slant adaptada*

$$\{e_1, \dots, e_{4+s}\}.$$

Denotando por $\sigma_{ij}^r = g(\sigma(e_i, e_j), e_r)$, para cualesquiera $i, j = 1, 2, 3, \dots, 4 + s$ y $r = 3, 4$, se verifican:

$$\sigma_{12}^3 = \sigma_{11}^4, \quad (4.3.1)$$

$$\sigma_{22}^3 = \sigma_{12}^4, \quad (4.3.2)$$

$$\sigma_{1(4+\alpha)}^3 = \sigma_{2(4+\alpha)}^4 = -\text{sen}\theta, \quad \alpha = 1, \dots, s \quad (4.3.3)$$

$$\sigma_{2(4+\alpha)}^3 = \sigma_{1(4+\alpha)}^4 = \sigma_{(4+\alpha)(4+\beta)}^3 = \sigma_{(4+\alpha)(4+\beta)}^4 = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, s. \quad (4.3.4)$$

Demostración. En virtud del Corolario 4.2.5 se obtienen (4.3.1) y (4.3.2), mientras que (4.3.3) y (4.3.4) se tienen por ser \widetilde{M} una S -variedad. \square

Lema 4.3.2. *Sea M una subvariedad slant de dimensión $(2 + s)$ de una S -variedad \widetilde{M} con $\dim(\widetilde{M}) = 4 + s$. Entonces, $\nabla N = 0$ si y sólo si M es una subvariedad invariante o anti-invariante.*

Demostración. Si $\nabla N = 0$, entonces, aplicando (4.1.4), para cualesquiera $X, Y \in TM$ y $V \in T^\perp M$ tenemos que:

$$-g(\sigma(X, TY), V) = g(\sigma(X, Y), nV). \quad (4.3.5)$$

Si se supone que M es una subvariedad slant propia con ángulo slant θ y se elige una referencia slant adaptada de la forma

$$\{e_1, \dots, e_4, e_5 = \xi_1, \dots, e_{4+s} = \xi_s\},$$

entonces, a partir de (4.3.5), puesto que $Te_{4+\alpha} = T\xi_\alpha = 0$, para cualquier $\alpha = 1, \dots, s$ y $ne_4 = \cos\theta e_3$, se deduce que

$$0 = g(\sigma(e_1, e_{4+\alpha}), ne_4) = \cos\theta g(\sigma(e_1, e_{4+\alpha}), e_3) = \\ = \cos\theta \sigma_{1(4+\alpha)}^3 = -\cos\theta \operatorname{sen}\theta,$$

donde se ha usado (4.3.3). Pero esto contradice el hecho de que M sea una subvariedad slant propia.

Recíprocamente, si M es una subvariedad invariante, entonces $N = 0$ y también $\nabla N = 0$. Finalmente, si M es una subvariedad anti-invariante, entonces $n = 0$ y sólo es necesario aplicar (4.1.4). \square

Ahora, se puede probar el siguiente teorema.

Teorema 4.3.3. *Sea M una subvariedad de dimensión $(2 + s)$ de una S -variedad \widetilde{M} de dimensión $(4 + s)$, tangente a los campos de estructura.*

(i) *Si M es una subvariedad slant propia minimal de \widetilde{M} , entonces, para cualesquiera $X, Y \in TM$:*

$$(\nabla_X N)Y = \sum_{\alpha=1}^s (2\eta_\alpha(X)NTY + \eta_\alpha(Y)NTX). \quad (4.3.6)$$

(ii) *Recíprocamente, si (4.3.6) se verifica, y si, además, se supone que existe un autovalor λ de $Q|_{\mathcal{L}}$ en cada punto de M tal que $\lambda \in (-1, 0)$, entonces M es una subvariedad slant propia minimal de \widetilde{M} .*

Demostración. Para probar la afirmación (i), se elige una referencia slant adaptada

$$\{e_1, \dots, e_4, e_5 = \xi_1, \dots, e_{4+s} = \xi_s\}$$

y, entonces, se tiene que

$$n\sigma(e_i, e_j) = \cos\theta \sigma_{ij}^4 e_3 - \cos\theta \sigma_{ij}^3 e_4, \quad (4.3.7)$$

para cualesquiera $i, j = 1, 2, 5, \dots, 4 + s$. Además, puesto que M es minimal, usando que $\sigma(\xi_\alpha, \xi_\alpha) = 0$ para cualquier $\alpha = 1, \dots, s$, se deduce:

$$\sigma_{11}^3 = -\sigma_{22}^3, \quad \sigma_{11}^4 = -\sigma_{22}^4. \quad (4.3.8)$$

En lo que sigue, se van a escribir los campos $X, Y \in TM$ en función de la referencia slant adaptada y se van a tener en cuenta (4.3.1)-(4.3.4), (4.3.7) y (4.3.8). De aquí se obtiene (4.3.6) a partir de (4.1.4) y (1.3.7).

Para probar la afirmación (ii) se elige un campo local unitario e_1 en \mathcal{L} , tal que $T^2e_1 = -\cos^2\theta_1e_1$, donde $\theta_1 = \theta(e_1) \in (0, \pi/2)$ denota el ángulo de Wirtinger de e_1 . Ahora, se definen e_2, e_3, e_4 por

$$e_2 = (\sec\theta_1)Te_1, \quad e_3 = (\csc\theta_1)Ne_1, \quad e_4 = (\csc\theta_1)Ne_2 \quad (4.3.9)$$

y $e_{4+\alpha} = \xi_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, s$. Es fácil demostrar que $\{e_1, \dots, e_{4+s}\}$ es una base local ortonormal de \widetilde{M} tal que:

$$te_3 = -\text{sen}\theta_1e_1, \quad te_4 = -\text{sen}\theta_1e_2, \quad ne_3 = -\text{cos}\theta_1e_4, \quad ne_4 = \text{cos}\theta_1e_3.$$

A continuación, a partir de (4.3.9) y usando el Lema 4.2.3, se obtiene:

$$A_{Ne_1}e_2 = \sec\theta_1\text{sen}\theta_1A_{e_3}Te_1 = \text{sen}\theta_1A_{e_4}e_1 = A_{Ne_2}e_1.$$

Además, a partir de (1.2.19) y las fórmulas de Gauss-Weingarten, se deduce, para cualquier $\alpha = 1, \dots, s$, que

$$A_{Ne_1}e_{4+\alpha} = \text{sen}\theta_1A_{e_3}e_{4+\alpha} = \text{sen}\theta_1te_3 = -\text{sen}^2\theta_1e_1$$

y que:

$$A_{Ne_2}e_{4+\alpha} = \text{sen}\theta_1A_{e_4}e_{4+\alpha} = \text{sen}\theta_1te_4 = -\text{sen}^2\theta_1e_2.$$

Por tanto, mediante un simple cálculo, se tiene que

$$A_{NY}X = A_{NX}Y - \text{sen}^2\theta_1 \sum_{\alpha=1}^s (\eta_\alpha(Y)f^2X - \eta_\alpha(X)f^2Y),$$

para cualesquiera $X, Y \in TM$ y así, aplicando el Corolario 4.2.5, se sabe que M es una subvariedad slant propia, con ángulo slant θ_1 . Finalmente, para probar que M es también una subvariedad minimal, sólo se necesita demostrar que:

$$\sigma_{11}^3 = -\sigma_{22}^3, \quad \sigma_{11}^4 = -\sigma_{22}^4.$$

Pero, $\sigma_{11}^3 = g(\sigma(e_1, e_1), e_3) = -\sec\theta_1g(\sigma(e_1, Te_2), e_3)$ y, a partir de (4.1.4) y (4.3.6), $\sigma(e_1, Te_2) = n\sigma(e_1, e_2)$, que, junto con (1.3.4), implica:

$$\sigma_{11}^3 = -\sigma_{12}^4.$$

Ahora, una vez probado que M es una subvariedad slant propia y que la base elegida es una referencia slant adaptada, usando el Lema 4.3.1 se concluye la prueba. \square

Nótese que (4.3.6) se verifica trivialmente en los casos invariante y anti-invariante, ya que $\nabla N = 0$. Por otro lado, el teorema anterior es el correspondiente al Teorema 5.5 en [26], probado por B.-Y. Chen para superficies en variedades Kaehlerianas de dimensión 4.

A continuación, se van a establecer algunas relaciones entre las subvariedades slant minimales de dimensión $(2 + s)$ y las subvariedades anti-invariantes en S -variedades. En primer lugar, se tiene el siguiente lema.

Lema 4.3.4. *Sea M una subvariedad slant propia de dimensión $(2 + s)$ en una S -variedad \widetilde{M} de dimensión $(4 + s)$, con ángulo slant θ . Entonces, con respecto a una referencia slant adaptada $\{e_1, \dots, e_{4+s}\}$, se tiene*

$$w_3^4 - w_1^2 = -ctg\theta((\text{traza } \sigma^3)w^1 + (\text{traza } \sigma^4)w^2 - \sum_{\alpha=1}^s (2\text{sen}\theta)\eta_\alpha), \quad (4.3.10)$$

donde w^1, w^2 son las formas duales de e_1, e_2 .

Demostración. Al ser la base local una referencia slant adaptada, usando (4.1.4) se tiene que:

$$D_{e_1}e_3 = (\text{csc } \theta)D_{e_1}Ne_1 = (\text{csc } \theta)(N(\nabla_{e_1}e_1) + n\sigma(e_1, e_1) - \sigma(e_1, Te_1)). \quad (4.3.11)$$

Pero, a partir de (1.1.5), (1.1.7) y aplicando N , se obtiene:

$$N(\nabla_{e_1}e_1) = w_1^2(e_1)Ne_2 = \text{sen}\theta w_1^2(e_1)e_4. \quad (4.3.12)$$

Por otra parte:

$$n\sigma(e_1, e_1) = \sigma_{11}^3 ne_3 + \sigma_{11}^4 ne_4 = \text{cos}\theta(-\sigma_{11}^3 e_4 + \sigma_{11}^4 e_3), \quad (4.3.13)$$

$$\sigma(e_1, Te_1) = \text{cos}\theta\sigma(e_1, e_2) = \text{cos}\theta(\sigma_{12}^3 e_3 + \sigma_{12}^4 e_4). \quad (4.3.14)$$

Así, sustituyendo (4.3.12)-(4.3.14) en (4.3.11), resulta

$$D_{e_1}e_3 = w_1^2(e_1)e_4 + ctg\theta(-\sigma_{11}^3 e_4 + \sigma_{11}^4 e_3 - \sigma_{12}^3 e_3 - \sigma_{12}^4 e_4),$$

en virtud del Lema 4.3.1 y ya que

$$\text{traza } \sigma^3 = \sum_{i=1}^2 g(\sigma(e_i, e_i), e_3),$$

se deduce que

$$D_{e_1}e_3 = w_1^2(e_1)e_4 - ctg\theta(\text{traza } \sigma^3)e_4$$

y, a partir de (1.1.6):

$$w_3^4(e_1) - w_1^2(e_1) = -ctg\theta(\text{traza } \sigma^3). \quad (4.3.15)$$

De forma similar:

$$w_3^4(e_2) - w_1^2(e_2) = -ctg\theta(\text{traza } \sigma^4). \quad (4.3.16)$$

Además, para cualquier $\alpha = 1, \dots, s$,

$$D_{e_{4+\alpha}}e_3 = csc\theta(N(\nabla_{\xi_\alpha}e_1) + n\sigma(e_1, \xi_\alpha) - \sigma(Te_1, \xi_\alpha)), \quad (4.3.17)$$

pero, aplicando (1.3.7) y (1.3.11),

$$n\sigma(e_1, \xi_\alpha) - \sigma(Te_1, \xi_\alpha) = -nNe_1 + NTe_1 = 2NTe_1,$$

y, como consecuencia, a partir del Corolario 2.1.11, se obtiene:

$$n\sigma(e_1, \xi_\alpha) - \sigma(Te_1, \xi_\alpha) = 2sen\theta cos\theta e_4. \quad (4.3.18)$$

Más aún:

$$N(\nabla_{e_{4+\alpha}}e_1) = w_1^2(e_{4+\alpha})Ne_2 = sen\theta w_1^2(\xi_\alpha)e_4. \quad (4.3.19)$$

Por tanto, sustituyendo (4.3.18) y (4.3.19) en (4.3.17) y teniendo en cuenta que

$$D_{e_{4+\alpha}}e_3 = w_3^4(e_{4+\alpha})e_4,$$

se sigue que:

$$w_3^4(e_{4+\alpha}) - w_1^2(e_{4+\alpha}) = 2cos\theta = -ctg\theta(-2sen\theta). \quad (4.3.20)$$

Entonces, dado que $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{4+s}\}$ es una base local ortonormal de TM , con referencia dual $\{w^1, w^2, \eta_1, \dots, \eta_s\}$, la ecuación (4.3.10) se sigue de (4.3.15), (4.3.16) y (4.3.20). \square

Ahora, se puede probar el siguiente teorema.

Teorema 4.3.5. *Sea M una subvariedad slant propia de una S -variedad*

$$(\widetilde{M}, f, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g),$$

con $dim M = 2 + s$, $dim \widetilde{M} = 4 + s$ y ángulo slant θ . Si existe en \widetilde{M} una f -estructura \bar{f} tal que

$$(\widetilde{M}, \bar{f}, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$$

es una f -variedad métrica verificando

$$g((\widetilde{\nabla}_X \bar{f})Y, Z) = 0, \quad (4.3.21)$$

para cualesquiera X, Y, Z normales a los campos de estructura y si M es una subvariedad anti-invariante con respecto a esta estructura, entonces M es una subvariedad minimal de \widetilde{M} .

Demostración. Sea $\{e_1, \dots, e_{4+s}\}$ una referencia slant adaptada en la S -variedad

$$(\widetilde{M}, f, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g),$$

siendo $\{e_3, e_4\}$ una base local ortonormal de $T^\perp M$. Por tanto, puesto que M es una subvariedad anti-invariante en

$$(\widetilde{M}, \bar{f}, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g),$$

se tiene que $\{\bar{f}e_1, \bar{f}e_2\}$ es otra base local ortonormal de $T^\perp M$, en virtud de (1.2.5). En consecuencia, existe una función φ en M tal que:

$$\begin{aligned} e_3 &= (\cos\varphi)\bar{f}e_1 + (\sin\varphi)\bar{f}e_2 \\ e_4 &= -(\sin\varphi)\bar{f}e_1 + (\cos\varphi)\bar{f}e_2. \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

Considerando $X \in \mathcal{L}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} w_3^4(X) &= g(\widetilde{\nabla}_X e_3, e_4) = X(\cos\varphi)g(\bar{f}e_1, e_4) + X(\sin\varphi)g(\bar{f}e_2, e_4) + \\ &+ (\cos\varphi)g(\widetilde{\nabla}_X \bar{f}e_1, e_4) + (\sin\varphi)g(\widetilde{\nabla}_X \bar{f}e_2, e_4). \end{aligned}$$

Ahora, ya que $w_1^1(X) = 0$, $\bar{f}\xi_\alpha = 0$ para cualquier $\alpha = 1, \dots, s$ y $g(\bar{f}e_4, e_4) = 0$, usando (4.3.21) y (4.3.22), se obtiene:

$$w_3^4(X) - w_1^2(X) = X\varphi = d\varphi(X). \quad (4.3.23)$$

Por otra parte, considerando cualquier campo

$$X = \widetilde{X} + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X)\xi_\alpha \in TM, \quad (4.3.24)$$

con $\widetilde{X} \in \mathcal{L}$, se tiene, usando (4.3.20) y (4.3.21), que:

$$\begin{aligned} w_3^4(X) - w_1^2(X) &= w_3^4(\widetilde{X}) - w_1^2(\widetilde{X}) + \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X)(w_3^4(\xi_\alpha) - w_1^2(\xi_\alpha)) = \\ &= d\varphi(\widetilde{X}) + 2\cos\theta \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X). \end{aligned}$$

Pero,

$$d\varphi(\widetilde{X}) = d\varphi(X - \sum_{\alpha=1}^s \eta_\alpha(X)\xi_\alpha) = d\varphi(X) - \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha(\varphi)\eta_\alpha(X)$$

y, así:

$$w_3^4 - w_1^2 = d\varphi + \sum_{\alpha=1}^s (2\cos\theta - \xi_\alpha(\varphi))\eta_\alpha.$$

Por tanto, teniendo en cuenta (4.3.10) se deduce que:

$$-ctg\theta\{(\text{traza } \sigma^3)w^1 + (\text{traza } \sigma^4)w^2\} = d\varphi - \sum_{\alpha=1}^s \xi_\alpha(\varphi)\eta_\alpha. \quad (4.3.25)$$

Por otro lado,

$$\sigma_{11}^3 = g(\sigma(e_1, e_1), e_3) = g(A_{e_3}e_1, e_1) = -g(\tilde{\nabla}_{e_1}e_3, e_1)$$

y a partir de (4.3.21), (4.3.22) y ya que $\bar{f}e_1, \bar{f}e_2 \in T^\perp M$, se obtiene:

$$\sigma_{11}^3 = \cos\varphi g(\sigma(e_1, e_1), \bar{f}e_1) + \text{sen}\varphi g(\sigma(e_1, e_2), \bar{f}e_1).$$

Sin embargo, usando de nuevo (4.3.22):

$$\bar{f}e_1 = \cos\varphi e_3 - \text{sen}\varphi e_4.$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^3 &= \cos^2\varphi\sigma_{11}^3 - \cos\varphi\text{sen}\varphi\sigma_{11}^4 + \cos\varphi\text{sen}\varphi\sigma_{12}^3 - \text{sen}^2\varphi\sigma_{12}^4 = \\ &= \cos^2\varphi\sigma_{11}^3 - \text{sen}^2\varphi\sigma_{22}^3, \end{aligned}$$

donde se ha usado el Lema 4.3.1. De aquí, puesto que $\sigma_{\alpha\alpha}^3 = 0$ para cualquier $\alpha = 1, \dots, s$:

$$\text{sen}^2\varphi(\text{traza } \sigma^3) = 0. \quad (4.3.26)$$

De forma análoga:

$$\text{sen}^2\varphi(\text{traza } \sigma^4) = 0. \quad (4.3.27)$$

Ahora, se considera el siguiente subconjunto abierto de M :

$$U = \{x \in M / H(x) \neq 0\}.$$

Para concluir la prueba, sólo se necesita demostrar que $U = \emptyset$. Si no lo fuera, en U se verificaría que

$$0 \neq H = \frac{1}{2+s}\text{traza } \sigma = \frac{1}{2+s}((\text{traza } \sigma^3)e_3 + (\text{traza } \sigma^4)e_4),$$

de donde:

$$\text{traza } \sigma^3 \neq 0 \text{ o traza } \sigma^4 \neq 0. \quad (4.3.28)$$

Esto implica, según (4.3.26) y (4.3.27), que $\varphi \equiv 0 \pmod{\pi}$ en U . Pero φ ha de ser una función continua, lo cual supone que $\varphi \equiv 0$ en U . Así, $d\varphi = 0$ y $\xi_\alpha(\varphi) = 0$ en U para cualquier $\alpha = 1, \dots, s$. Por tanto, se deduce de (4.3.25) que

$$ctg\theta((\text{traza } \sigma^3)w^1 + (\text{traza } \sigma^4)w^2) = 0,$$

y, en virtud de (4.3.28), se sigue que $ctg\theta = 0$, lo cual es contradicción con el hecho de que M sea slant propia. Así, $U = \emptyset$ y, por tanto, M es minimal. \square

Nótese que (4.3.21) se verifica, en particular, si

$$(\widetilde{M}, \bar{f}, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$$

es una S -estructura en \widetilde{M} , pues, en tal caso, para cualesquiera $X, Y, Z \in TM$, a partir de (1.2.23) se obtiene

$$g((\widetilde{\nabla}_X \bar{f})Y, Z) = \sum_{\alpha=1}^s (g(fX, fY)\eta_\alpha(Z) + \eta_\alpha(Y)g(f^2X, Z)),$$

siendo nula esta expresión en el caso en que Y, Z sean normales a los campos de estructura. De hecho, este sería el análogo al Teorema 4.2 de [23], probado por B.-Y. Chen en el caso Kaehleriano. Sin embargo, en virtud de la Proposición 3.2.1, el Teorema 4.3.5 es la mejor versión posible del Teorema de Chen para S -variedades, ya que en una misma variedad no es posible disponer de S -estructuras diferentes compatibles.

Para terminar, se va a presentar un ejemplo ilustrativo. Sea

$$(\mathbf{R}^{4+s}, f, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$$

la S -estructura usual de \mathbf{R}^{4+s} (ver [40] para más detalles), con coordenadas cartesianas $(x^1, x^2, y^1, y^2, z^1, \dots, z^s)$. Se define en \mathbf{R}^{4+s} el tensor de tipo (1,1) \bar{f} de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \bar{f} \left(\sum_{i=1}^2 (X_i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y_i \frac{\partial}{\partial y^i}) + \sum_{\alpha=1}^s Z_\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right) = \\ = -X_2 \frac{\partial}{\partial x^1} + X_1 \frac{\partial}{\partial x^2} + Y_2 \frac{\partial}{\partial y^1} - Y_1 \frac{\partial}{\partial y^2} + (y^2 X_1 - y^1 X_2) \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial}{\partial z^\alpha}. \end{aligned}$$

Es fácil probar que

$$(\mathbf{R}^{4+s}, \bar{f}, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$$

es una f -variedad métrica. Además,

$$(\tilde{\nabla}_X \bar{f})Y = \sum_{\alpha=1}^s (2\eta_\alpha(X)\bar{f}fY + \eta_\alpha(Y)\bar{f}fX + g(X, \bar{f}fY)\xi_\alpha,$$

para cualesquiera $X, Y \in T\mathbf{R}^{4+s}$. Entonces, se tiene (4.3.21). Ahora, se considera la subvariedad M con dimensión $(2 + s)$ de \mathbf{R}^{4+s} definida por

$$x(u, v, t_1, \dots, t_s) = 2(u\cos\theta, u\sin\theta, v, 0, t_1, \dots, t_s),$$

para cualquier $\theta \in (0, \pi/2)$. Entonces, M es una subvariedad slant propia minimal en

$$(\mathbf{R}^{4+s}, f, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$$

(ver [16]) y una subvariedad anti-invariante en:

$$(\mathbf{R}^{4+s}, \bar{f}, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g).$$

Capítulo 5

La Curvatura Media en una S -variedad de Curvatura f -seccional Constante

“Encontrar relaciones simples entre los principales invariantes extrínsecos e intrínsecos de una subvariedad” es, según Bang-Yen Chen [24], uno de los problemas básicos en la teoría de subvariedades. En este contexto, Chen ha establecido relaciones entre diferentes curvaturas y el vector curvatura media para subvariedades en espacios reales de curvatura seccional constante [19, 20, 24, 25, 27]. Versiones de estas relaciones han sido probadas, posteriormente, en el caso de inmersiones slant en Geometría Sasakiana [15, 31, 61].

En este capítulo se pretende obtener versiones de las citadas relaciones para subvariedades slant de S -variedades con curvatura f -seccional constante. Así, en la Sección 5.1, se va a probar una desigualdad entre un invariante Riemanniano que es función de la curvatura escalar y de las curvaturas seccionales de una tal subvariedad slant y el módulo al cuadrado del vector curvatura media, el ángulo slant y la curvatura f -seccional constante de la S -variedad ambiente y caracterizándose el caso de igualdad cuando la dimensión de la subvariedad sea la menor posible, es decir, $2 + s$.

En la Sección 5.2, se establece una desigualdad entre la curvatura de Ricci y el módulo al cuadrado del vector curvatura media, que mejora la obtenida en [61] para el caso Sasakiano y se estudia el caso de igualdad. Finalmente, en la Sección 5.3, la relación será entre la función curvatura seccional de la subvariedad y el endomorfismo de Weingarten asociado al vector curvatura media.

5.1. Desigualdades de B.-Y. Chen en una S -variedad de Curvatura f -seccional constante.

En la segunda mitad de la década de los 90, B.-Y. Chen [19, 20, 27] introdujo, para una variedad Riemanniana \widetilde{M} , un invariante Riemanniano $\delta_{\widetilde{M}}$, bien definido, dado por

$$\delta_{\widetilde{M}}(p) = \tau(p) - (\inf K)(p),$$

para cualquier $p \in \widetilde{M}$, donde τ denota la curvatura escalar y

$$(\inf K)(p) = \inf\{K(\pi) : \text{secciones planas } \pi \subset T_p(\widetilde{M})\},$$

siendo $K(\pi)$ la curvatura seccional de la sección plana π . Además, para subvariedades M en un espacio real de curvatura seccional constante c , Chen probó la siguiente desigualdad básica en la que aparecen el invariante intrínseco δ_M y el cuadrado del módulo del vector curvatura media H de la inmersión:

$$\delta_M \leq \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)}|H|^2 + \frac{(n+1)(n-2)}{2}c,$$

siendo n la dimensión de M . En [15], A. Carriazo establece una versión de la desigualdad de B.-Y. Chen en la geometría de contacto, para una subvariedad tangente al campo de estructura de una variedad Sasakiana de curvatura ϕ -seccional constante c . De hecho, demuestra que si se considera una inmersión θ -slant de una variedad Riemanniana M de dimensión $(n+1)$ en una tal variedad Sasakiana con dimensión $2m+1$, métrica g y f -estructura ϕ , entonces, para cualquier punto $p \in M$ y cualquier sección plana π de la distribución de contacto \mathcal{D} en p ,

$$\begin{aligned} \tau - K(\pi) \leq & \frac{(n+1)^2(n-1)}{2n}|H|^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2)\frac{c+3}{4} + \\ & + n\cos^2\theta + \frac{3(c-1)}{4}\left(\frac{n}{2}\cos^2\theta - \Phi^2(\pi)\right), \end{aligned}$$

donde $\Phi^2(\pi) = g^2(e_1, \phi e_2)$ es un número real en $[0, 1]$ que es independiente de la elección de la base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de π . En particular, si se define

$$(\inf_{\mathcal{D}} K)(p) = \inf\{K(\pi) : \text{secciones planas } \pi \subset \mathcal{D}_p\}$$

para cada punto $p \in M$ y

$$\delta_M^{\mathcal{D}}(p) = \tau(p) - (\inf_{\mathcal{D}} K)(p),$$

entonces, para toda subvariedad θ -slant M de dimensión 3, la desigualdad

$$\delta_M^D \leq \frac{9}{4}|H|^2 2\cos^2\theta$$

se verifica, obteniéndose la igualdad si y sólo si M es minimal.

En esta sección se va a presentar la correspondiente desigualdad para el caso en que la variedad ambiente sea una S -variedad y se van a obtener algunas aplicaciones.

A partir de ahora y en lo que resta de sección, $\widetilde{M}(c)$ denotará una S -variedad de dimensión $2m + s$ y curvatura f -seccional constante igual a c y M una subvariedad de dimensión $n + s$, con $n \geq 2$, tangente a los campos de estructura. Entonces, dada una referencia local ortonormal de TM ,

$$\{e_1, \dots, e_n, \xi_1, \dots, \xi_s\},$$

se pueden definir los cuadrados de las normas de T y N como

$$|T|^2 = \sum_{i,j=1}^n g^2(e_i, Te_j), \quad |N|^2 = \sum_{i=1}^n |Ne_i|^2, \quad (5.1.1)$$

respectivamente, aunque dichas cantidades son independientes de la referencia ortonormal elegida. Además, si se denota por τ a la curvatura escalar en cualquier punto de M , se tiene que

$$2\tau = \sum_{i \neq j} K(e_i \wedge e_j) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^s K(e_i \wedge \xi_\alpha), \quad (5.1.2)$$

donde $K(X \wedge Y)$ denota la curvatura seccional de M asociada a la sección plana generada por X e Y . Ahora, usando (1.2.26), (5.1.1) y (5.1.2), se obtiene la siguiente relación entre la curvatura escalar y la curvatura media de M ,

$$2\tau = (n + s)^2|H|^2 - |\sigma|^2 + n(n - 1)\frac{c + 3s}{4} + 2ns + \frac{3(c - s)}{4}|T|^2, \quad (5.1.3)$$

donde $|\sigma|$ denota la norma de la segunda forma fundamental σ , dada por:

$$|\sigma|^2 = \sum_{i=1}^n |\sigma(e_i, e_i)|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |\sigma(e_i, e_j)|^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^s |\sigma(e_i, \xi_\alpha)|^2. \quad (5.1.4)$$

En primer lugar, se recuerda un lema algebraico que puede encontrarse en [27]:

Lema 5.1.1. Sean a_1, \dots, a_k, c $k + 1$ números reales ($k \geq 2$) tales que:

$$\left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^2 = (k-1) \left(\sum_{i=1}^k a_i^2 + c \right).$$

Entonces, $2a_1a_2 \geq c$, obteniéndose la igualdad si y sólo si $a_1a_2 = a_3 = \dots = a_k$.

En estas condiciones, se puede probar la siguiente versión, para la geometría de f -variedades, del Teorema 3 de [19]:

Teorema 5.1.2. Sea $\varphi : M \rightarrow \widetilde{M}(c)$ una inmersión isométrica de una variedad Riemanniana con dimensión $(n+s)$ en una S -variedad de curvatura f -seccional constante $\widetilde{M}(c)$ de dimensión $2m+s$, tal que los campos de estructura son tangentes a M . Entonces, para cualquier punto $p \in M$ y cualquier sección plana $\pi \subset \mathcal{L}_p$, se tiene:

$$\begin{aligned} \tau - K(\pi) \leq & \frac{(n+s)^2(n+s-2)}{2(n+s-1)} |H|^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2) \frac{c+3s}{4} + ns + \\ & + \frac{3}{2} |T|^2 \frac{c-s}{4} - 3F^2(\pi) \frac{c-s}{4}, \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

donde, si π está generada por X e Y ,

$$F^2(\pi) = g^2(X, fY) \quad (5.1.6)$$

es un número real en $[0, 1]$ que es independiente de la elección de la base ortonormal $\{X, Y\}$ de π .

La igualdad en (5.1.5) se tiene en $p \in M$ si y sólo si existe una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_{n+s}\}$ de $T_p M$ y una base ortonormal $\{e_{n+s+1}, \dots, e_{2m+s}\}$ de $T_p^\perp M$ tales que

(i) $e_{n+j} = (\xi_j)_p$, para $j = 1, \dots, s$;

(ii) π está generada por e_1, e_2 ;

(iii) los endomorfismos de Weingarten $A_r = A_{e_r}$, $r = n+s+1, \dots, 2m+s$, tienen la siguiente forma:

$$A_{n+s+1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{n+s-2} \end{pmatrix}, \quad (5.1.7)$$

$$A_r = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^r & \sigma_{12}^r & 0 \\ \sigma_{12}^r & -\sigma_{11}^r & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{n+s-2} \end{pmatrix}, \quad r = n+s+2, \dots, 2m+s. \quad (5.1.8)$$

Demostración. Sea:

$$\varepsilon = 2\tau - \frac{(n+s)^2(n+s-2)}{n+s-1}|H|^2 - (n+1)(n-2)\frac{c+3s}{4} - 2ns - \frac{3(c-s)}{4}|T|^2. \quad (5.1.9)$$

Entonces, (5.1.3) y (5.1.9) implican:

$$(n+s)^2|H|^2 = (n+s-1)|\sigma|^2 + (n+s-1)\left(\varepsilon - \frac{c+3s}{2}\right). \quad (5.1.10)$$

Sea $\pi \subset \mathcal{L}_p$ una sección plana y $\{e_1, \dots, e_{n+s}\}$, $\{e_{n+s+1}, \dots, e_{2m+s}\}$ referencias ortonormales de $T_p M$ y $T_p^\perp M$, respectivamente, tales que $e_{n+j} = \xi_j$, para $j = 1, \dots, s$, π está generada por e_1, e_2 y, además, e_{n+s+1} está en la dirección del vector curvatura media H . En estas condiciones, de (5.1.10) se obtiene que

$$\left(\sum_{i=1}^{n+s} \sigma_{ii}^{n+s+1}\right)^2 = (n+s-1)\left\{\sum_{i=1}^{n+s} (\sigma_{ii}^{n+s+1})^2 + \sum_{i \neq j} (\sigma_{ij}^{n+s+1})^2 + \sum_{r=n+s+2}^{2m+s} \sum_{i,j} (\sigma_{ij}^r)^2 + \varepsilon - \frac{c+3s}{2}\right\},$$

(donde se recuerda que σ_{ij}^r denota a $g(\sigma(e_i, e_j), e_r)$) y así, aplicando el Lema 5.1.1, se deduce que:

$$2\sigma_{11}^{n+s+1}\sigma_{22}^{n+s+1} \geq \sum_{i \neq j} (\sigma_{ij}^{n+s+1})^2 + \sum_{r=n+s+2}^{2m+s} \sum_{i,j} (\sigma_{ij}^r)^2 + \varepsilon - \frac{c+3s}{2}. \quad (5.1.11)$$

Ahora, a partir de (1.2.26) se sigue que:

$$K(\pi) = \sigma_{11}^{n+s+1}\sigma_{22}^{n+s+1} - (\sigma_{12}^{n+s+1})^2 + \sum_{r=n+2+s}^{2m+s} (\sigma_{11}^r\sigma_{22}^r - (\sigma_{12}^r)^2) + \frac{c+3s}{4} + \frac{3(c-s)}{4}g^2(e_1, fe_2). \quad (5.1.12)$$

En consecuencia, usando (5.1.11) y (5.1.12), se obtiene:

$$\begin{aligned} K(\pi) &\geq \sum_{r=n+s+1}^{2m+s} \sum_{j>2} \{(\sigma_{1j}^r)^2 + (\sigma_{2j}^r)^2\} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j > 2} (\sigma_{ij}^{n+s+1})^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{r=n+s+2}^{2m+s} \sum_{i,j > 2} (\sigma_{ij}^r)^2 + \frac{1}{2} \sum_{r=n+s+2}^{2m+s} (\sigma_{11}^r + \sigma_{22}^r)^2 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3(c-s)}{4}g^2(e_1, fe_2) \geq \\ &\geq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3(c-s)}{4}F^2(\pi). \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

Combinando a continuación (5.1.6), (5.1.9) y (5.1.13) se prueba (5.1.5).

Para probar la segunda parte del enunciado, se supone que en (5.1.5) se tiene la igualdad. Entonces, también las desigualdades (5.1.11) y (5.1.13) se convierten en igualdades. Así:

$$\begin{aligned}\sigma_{1j}^{n+s+1} &= \sigma_{2j}^{n+s+1} = \sigma_{ij}^{n+s+1} = 0, \quad i \neq j > 2; \\ \sigma_{1j}^r &= \sigma_{2j}^r = \sigma_{ij}^r = 0, \quad r = n+s+2, \dots, 2m+s; \quad i, j = 3, \dots, n+s; \\ \sigma_{11}^{n+s+2} + \sigma_{22}^{n+s+2} &= \dots = \sigma_{11}^m + \sigma_{22}^m = 0.\end{aligned}$$

Además, se pueden elegir e_1, e_2 tales que $\sigma_{12}^{n+s+1} = 0$ y, aplicando el Lema 5.1.1 y (1.3.11), se obtiene también:

$$\sigma_{11}^{n+s+1} + \sigma_{22}^{n+s+1} = \sigma_{33}^{n+s+1} = \dots = \sigma_{n+s, n+s}^{n+s+1} = 0.$$

En consecuencia, con respecto a la base ortonormal elegida $\{e_1, \dots, e_{2m+s}\}$, los endomorfismos de Weingarten de M toman las formas (5.1.7) y (5.1.8).

El recíproco se prueba mediante un cálculo directo. \square

Ahora, se define:

$$(\inf_{\mathcal{L}} K)(p) = \inf\{K(\pi) : \text{secciones planas } \pi \subset \mathcal{L}_p\}.$$

Entonces, $\inf_{\mathcal{L}} K$ es una función bien definida en M . Se denota por $\delta_M^{\mathcal{L}}$ a la diferencia entre la curvatura escalar e $\inf_{\mathcal{L}} K$, esto es:

$$\delta_M^{\mathcal{L}}(p) = \tau(p) - \inf_{\mathcal{L}} K(p).$$

Está claro que $\delta_M^{\mathcal{L}} \leq \delta_M$. Entonces, si $c = s$, a partir de (5.1.5) se consigue directamente el siguiente resultado:

Corolario 5.1.3. *Sea $\varphi : M \rightarrow \widetilde{M}(s)$ una inmersión isométrica de una variedad Riemanniana con dimensión $(n+s)$ en una S -variedad de dimensión $2m+s$ y curvatura f -seccional constante s , $\widetilde{M}(s)$, tales que los campos de estructura son tangentes a la subvariedad. Entonces, se verifica que:*

$$\delta_M^{\mathcal{L}} \leq \frac{(n+s)^2(n+s-2)}{2(n+s-1)} |H|^2 + \frac{(n-1)(n+2)}{2} s. \quad (5.1.14)$$

Obsérvese que, si $s = 1$, (5.1.14) se convierte en la desigualdad obtenida por Carriazo en [15] para una variedad Sasakiana de curvatura ϕ -seccional constante 1. Esto parece indicar que (5.1.5) podría ser la versión natural de la desigualdad de Chen (que puede encontrarse al principio de esta sección) para la geometría de f -variedades (es necesario recordar aquí que no existen S -variedades de curvatura seccional constante con $s > 1$ [3]).

Corolario 5.1.4. Si se tiene la igualdad en (5.1.5) para cualquier punto $p \in M$, entonces φ es una inmersión invariante.

Demostración. Se supone la igualdad en (5.1.5). Como, a partir de (5.1.7),

$$A_{n+s+1}e_{n+j} = 0,$$

para cualquier $j = 1, \dots, s$, entonces

$$g(A_{n+s+1}e_{n+j}, e_i) = g(-Ne_i, e_{n+s+1}) = 0,$$

para cualquier $i = 1, \dots, n$, donde se ha usado (1.3.11). Además, en virtud de (5.1.8),

$$g(A_r e_{n+j}, e_i) = g(-Ne_i, e_r) = 0,$$

para cualesquiera $r = n + s + 2, \dots, m$ e $i = 1, \dots, n$. En consecuencia, $Ne_i = 0$, si $i = 1, \dots, n$, esto es, $N \equiv 0$ y φ es una inmersión invariante. \square

Ahora, se va a modificar (5.1.5) con el fin de considerar subvariedades no invariantes (por ejemplo, subvariedades slant propias) que satisfagan una igualdad similar. De hecho, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 5.1.5. Sea $\varphi : M \rightarrow \widetilde{M}(c)$ una inmersión isométrica de una variedad Riemanniana, con dimensión $(n + s)$, en una S -variedad de curvatura f -seccional constante c y dimensión $2m + s$, tangente a los campos de estructura. Entonces, para cualquier punto $p \in M$ y cualquier sección plana $\pi \subset \mathcal{L}_p$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \tau - K(\pi) \leq & \frac{(n+s)^2(n+s-2)}{2(n+s-1)} |H|^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2) \frac{c+3s}{4} + \\ & + ns + \frac{3}{2} |T|^2 \frac{c-s}{4} - 3F^2(\pi) \frac{c-s}{4} - s|N|^2. \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

La igualdad en (5.1.15) se verifica en $p \in M$ si y sólo si existen bases ortonormales $\{e_1, \dots, e_{n+s}\}$, $\{e_{n+s+1}, \dots, e_{2m+s}\}$ de $T_p M$ y de $T_p^\perp M$, respectivamente, tales que

(i) $e_{n+j} = (\xi_j)_p$, para cualquier $j = 1, \dots, s$;

(ii) π está generada por e_1, e_2 ;

(iii) los endomorfismos de Weingarten $A_r = A_{e_r}$, $r = n + s + 1, \dots, m$, tienen la forma

$$A_{n+s+1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & \mu_{1,n+1}^{n+s+1} & \cdots & \mu_{1,n+s}^{n+s+1} \\ 0 & -a & 0 & \cdots & \mu_{2,n+1}^{n+s+1} & \cdots & \mu_{2,n+s}^{n+s+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_{n,n+1}^{n+s+1} & \cdots & \mu_{n,n+s}^{n+s+1} \\ \mu_{1,n+1}^{n+s+1} & \cdots & \mu_{n,n+1}^{n+s+1} & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mu_{1,n+s}^{n+s+1} & \cdots & \mu_{n,n+s}^{n+s+1} & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1.16)$$

y, para cualquier $r = n + s + 2, \dots, 2m + s$,

$$A_r = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^r & \sigma_{12}^r & 0 & \cdots & \mu_{1,n+1}^{n+s+1} & \cdots & \mu_{1,n+s}^{n+s+1} \\ \sigma_{12}^r & -\sigma_{11}^r & 0 & \cdots & \mu_{2,n+1}^{n+s+1} & \cdots & \mu_{2,n+s}^{n+s+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_{n,n+1}^{n+s+1} & \cdots & \mu_{n,n+s}^{n+s+1} \\ \mu_{1,n+1}^{n+s+1} & \cdots & \mu_{n,n+1}^{n+s+1} & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mu_{1,n+s}^{n+s+1} & \cdots & \mu_{n,n+s}^{n+s+1} & & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.1.17)$$

donde $\mu_i^r = g(fe_i, e_r)$, $i = 1, \dots, n$, $r = n + s + 1, \dots, m$.

Demostración. Siguiendo los primeros pasos de la prueba del Teorema 5.1.2, se obtienen las ecuaciones (5.1.9)-(5.1.13). Entonces, se puede escribir la desigualdad (5.1.13) como:

$$\begin{aligned} K(\pi) &\geq \sum_{r=n+s+1}^{2m+s} \sum_{j>2} \{(\sigma_{1j}^r)^2 + (\sigma_{2j}^r)^2\} \frac{1}{2} \sum_{i \neq j > 2}^n (\sigma_{ij}^{n+s+1})^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{r=n+s+2}^{2m+s} \sum_{i,j=3}^n (\sigma_{ij}^r)^2 + \frac{1}{2} \sum_{r=n+s+2}^{2m+s} (\sigma_{11}^r + \sigma_{22}^r)^2 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3(c-s)}{4} g^2(e_1, fe_2) + \\ &+ \sum_{r=n+s+1}^{2m+s} \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{n+s} (\sigma_{ij}^r)^2 \geq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3(c-s)}{4} g^2(e_1, fe_2) + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{r=n+s+1}^{2m+s} \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{n+s} (\sigma_{ij}^r)^2. \quad (5.1.18)$$

Pero, a partir de (1.3.11) y (5.1.1), se deduce que:

$$\sum_{r=n+s+1}^{2m+s} \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{n+s} (\sigma_{ij}^r)^2 = s|N|^2. \quad (5.1.19)$$

Por tanto, combinando (5.1.6), (5.1.9), (5.1.18) y (5.1.19), se tiene (5.1.15). Si, además, se verifica la igualdad, entonces las desigualdades (5.1.11) y (5.1.18) se convierten, a su vez, en igualdades. Como consecuencia de este hecho, de (1.3.11) y del Lema 5.1.1, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \sigma_{1j}^{n+s+1} &= \sigma_{2j}^{n+s+1} = \sigma_{ij}^{n+s+1} = 0, \quad 2 < i \neq j \leq n; \\ \sigma_{1j}^r &= \sigma_{2j}^r = \sigma_{ij}^r = 0, \quad r = n+s+2, \dots, 2m+s; \quad i, j = 3, \dots, n+s; \\ \sigma_{11}^{n+s+2} + \sigma_{22}^{n+s+2} &= \dots = \sigma_{11}^{2m+s} + \sigma_{22}^{2m+s} = 0; \\ \sigma_{11}^{n+s+1} + \sigma_{22}^{n+s+1} &= \sigma_{33}^{n+s+1} = \dots = \sigma_{n+s, n+s}^{n+s+1} = 0. \end{aligned}$$

Así, si también se elige e_1, e_2 tales que $\sigma_{12}^{n+s+1} = 0$, entonces se tiene (5.1.16) y (5.1.17). Como en la prueba del Teorema 5.1.2, el recíproco es un cálculo directo. \square

Está claro que (5.1.5) se sigue de (5.1.15), ya que $|N|^2 \geq 0$. Por otro lado, también es obvio que, si φ es una inmersión anti-invariante, entonces $|T|^2 = 0$, $|N|^2 = n$ y $F^2(\pi) = 0$, para cualquier sección plana en \mathcal{L} . En consecuencia, a partir de (5.1.15) se prueba:

Corolario 5.1.6. *Sea M una subvariedad anti-invariante, con dimensión $n+s$, en una S -variedad de curvatura f -seccional constante $\widetilde{M}(c)$, tangente a los campos de estructura. Entonces, se verifica que:*

$$\delta_M^{\mathcal{L}} \leq \frac{(n+s)^2(n+s-2)}{2(n+s-1)} |H|^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2) \frac{c+3s}{4}.$$

Usando el Teorema 5.1.5 y siguiendo los mismos pasos que en las pruebas de los Teoremas 3 y 4 de [19], respectivamente, se pueden conseguir algunas acotaciones para $\delta_M^{\mathcal{L}}$ si $c > s$ o $c < s$. En efecto, se tienen los siguientes teoremas.

Teorema 5.1.7. *Sea $\varphi : M \rightarrow \widetilde{M}(c)$ una inmersión isométrica de una variedad Riemannian con dimensión $(n+s)$ ($n > 2$) en una S -variedad de curvatura f -seccional constante $c > s$, tangente a los campos de estructura. Entonces:*

$$\delta_M^{\mathcal{L}} \leq \frac{(n+s)^2(n+s-2)}{2(n+s-1)} |H|^2 + \frac{1}{2}(n^2 + 2n - 2) \frac{c+3s}{4} - \frac{ns}{2}.$$

Además, la igualdad se verifica si y sólo si n es par y M es una subvariedad invariante y totalmente geodésica.

Teorema 5.1.8. Sea $\varphi : M \rightarrow \widetilde{M}(c)$ una inmersión isométrica de una variedad Riemanniana con dimensión $(n+s)$ ($n > 2$) en una S -variedad con dimensión $(2m+s)$ y curvatura f -seccional constante $c < s$, tangente a los campos de estructura. Entonces:

$$\delta_M^{\mathcal{L}} \leq \frac{(n+s)^2(n+s-2)}{2(n+s-1)} |H|^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2) \frac{c+3s}{4} + ns - |N|^2.$$

Además, la igualdad se verifica en un punto $p \in M$ si y sólo si existen bases ortonormales $\{e_1, \dots, e_{n+s}\}$ y $\{e_{n+s+1}, \dots, e_{2m+s}\}$ de $T_p(M)$ y $T_p^\perp(M)$, respectivamente, tales que:

- (i) $e_{n+j} = (\xi_j)_p$, para cualquier $j = 1, \dots, s$;
- (ii) el subespacio generado por e_3, \dots, e_{n+s} es anti-invariante;
- (iii) $K(e_1 \wedge e_2) = \inf_{\mathcal{L}} K$ en p ;
- (iv) los endomorfismos de Weingarten $A_r = A_{e_r}$, $r = n+s+1, \dots, 2m+s$, tienen la forma (5.1.16) y (5.1.17), respectivamente.

A continuación, se va a estudiar la desigualdad (5.1.15) cuando M es una subvariedad slant. En primer lugar, cuando la variedad ambiente es una f -variedad métrica, se observa que si la dimensión de M es $n+s$ y θ es su ángulo slant, entonces, dada una referencia local ortonormal $\{e_1, \dots, e_n, \xi_1, \dots, \xi_s\}$ de TM , en virtud del Corolario 2.1.8 se tiene que

$$\sum_{j=1}^n g^2(e_i, f e_j) = \cos^2 \theta,$$

para cualquier $i = 1, \dots, n$. De aquí, junto con (5.1.1), se deduce que:

$$|T|^2 = n \cos^2 \theta. \quad (5.1.20)$$

Ahora, usando (5.1.15) y (5.1.20), se puede probar de modo directo el siguiente teorema.

Teorema 5.1.9. Sea $\varphi : M \rightarrow \widetilde{M}(c)$ una inmersión θ -slant de una variedad Riemanniana con dimensión $(n+s)$ en una S -variedad de curvatura f -seccional constante $\widetilde{M}(c)$. Entonces, para cualquier punto $p \in M$ y cualquier sección plana $\pi \subset \mathcal{L}_p$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \tau - K(\pi) &\leq \frac{(n+s)^2(n+s-2)}{2(n+s-1)} |H|^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2) \frac{c+3s}{4} + \\ &+ ns \cos^2 \theta + \frac{3}{4}(c-s) \left(\frac{n}{2} \cos^2 \theta - F^2(\pi) \right). \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

Si la dimensión de la subvariedad slant es la menor posible para ser propia, es decir, si es $2 + s$:

Corolario 5.1.10. *Sea M una subvariedad θ -slant $(2 + s)$ -dimensional de una S -variedad con curvatura f -seccional constante $\widetilde{M}(c)$. Entonces, en las condiciones del teorema anterior:*

$$\delta_M^{\mathcal{L}} \leq \frac{(2 + s)^2 s}{2(s + 1)} |H|^2 + 2s \cos^2 \theta. \quad (5.1.22)$$

Además, la igualdad se verifica si y sólo si M es minimal.

Demostración. Como $n = 2$, entonces está claro que

$$\delta_M^{\mathcal{L}} = \tau - K(\mathcal{L}) \quad (5.1.23)$$

y $F^2(\mathcal{L}) = \cos^2 \theta$. Así, (5.1.22) se sigue directamente de (5.1.21). Por otro lado, es fácil demostrar que

$$\tau - K(\mathcal{L}) = 2s \cos^2 \theta, \quad (5.1.24)$$

debido a que M es una subvariedad con dimensión $2 + s$ de una S -variedad. Por lo tanto, (5.1.23) y (5.1.24) implican la condición para el caso de igualdad en (5.1.22). \square

Nótese que, si se hubiera tomado la desigualdad (5.1.5) como punto de partida, entonces, siguiendo los mismos pasos que en el Teorema 5.1.2 y en el Corolario 5.1.10, se obtendría, para subvariedades slant con dimensión $(2 + s)$, la desigualdad

$$\delta_M^{\mathcal{L}} \leq \frac{(2 + s)^2 s}{2(s + 1)} |H|^2 + 2s,$$

dándose la igualdad si y sólo si la subvariedad es invariante. Así, el recíproco del Corolario 5.1.4 es cierto para subvariedades slant con dimensión $(2 + s)$. Estos resultados se pueden comparar con los obtenidos por Carriazo [15] en el caso $s = 1$ de variedades Sasakianas.

Finalmente, se van a estudiar algunas secciones planas especiales, ortogonales a los campos de estructura. Sea M una subvariedad $(n + s)$ -dimensional de una S -variedad con curvatura f -seccional constante $\widetilde{M}(c)$, tangente a los campos de estructura. Dado un punto $p \in M$, se dice que una sección plana $\pi \subset T_p(M)$ es una T -sección si existe un campo tangente $X \in \mathcal{L}_p$, tal que π está generada por X y TX . Ahora, para cada punto $p \in M$, se puede definir

$$(\inf_T K)(p) = \inf\{K(\pi) : \pi \text{ } T\text{-sección}\}$$

y

$$\delta_M^T(p) = \tau(p) - (\inf_T K)(p).$$

Puesto que toda T -sección es ortogonal a los campos de estructura, está claro que $\delta_M^T \leq \delta_M^{\mathcal{L}}$. En el caso de subvariedades slant, se puede conseguir la siguiente desigualdad para δ_M^T :

Teorema 5.1.11. *Sea $\varphi : M \rightarrow \widetilde{M}(c)$ una inmersión θ -slant no anti-invariante de una variedad Riemanniana con dimensión $(n + s)$ en una S -variedad con curvatura f -seccional constante c , $\widetilde{M}(c)$. Entonces:*

$$\delta_M^T \leq \frac{(n + s)^2(n + s - 2)}{2(n + s - 1)} |H|^2 + \frac{1}{2}(n + 1)(n - 2) \frac{c + 3s}{4} + nscos^2\theta + \frac{1}{2}(n - 2) \frac{3(c - s)}{4} cos^2\theta.$$

Demostración. Dada una T -sección π , se pueden elegir dos campos tangentes e_1, e_2 tales que π está generada por e_1 y e_2 , siendo $e_2 = sec\theta Te_1$. Entonces, (2.1.14) implica $F^2(\pi) = cos^2\theta$. La prueba se termina aplicando (5.1.21). \square

Obsérvese que, si $n = 2$, entonces $\delta_M^T = \delta_M^{\mathcal{L}}$ y así, el Corolario 5.1.10 también se sigue del Teorema 5.1.10.

5.2. La Curvatura Media y el Endomorfismo de Weingarten en Inmersiones Slant en S -variedades de curvatura f -seccional constante.

En esta sección se pretende obtener relaciones similares a las obtenidas por Chen entre la función curvatura seccional y el operador de Weingarten [24] y entre la curvatura de Ricci y el cuadrado de la curvatura media [25] para subvariedades de un espacio real de curvatura constante (generalizando y mejorando en algún sentido las probadas en [61] en el caso $s = 1$ de la variedades Sasakianas) cuando se trabaja con subvariedades slant de una S -variedad de curvatura f -seccional constante.

Al igual que en la sección anterior, M denotará una subvariedad de dimensión $n + s$ de una S -variedad con dimensión $(2m + s)$ y curvatura f -seccional constante igual a c , $\widetilde{M}(c)$, tangente a los campos de estructura. Sea

$$\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2m}, \xi_1, \dots, \xi_s\} \quad (5.2.1)$$

una base ortonormal de $T\widetilde{M}(c)$, tal que $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base local ortonormal de \mathcal{L} en TM . Se define el *espacio nulo relativo* de M como:

$$\mathcal{N} = \{X \in TM / \sigma(X, Y) = 0, \text{ para todo } Y \in TM\}.$$

En primer lugar, se tiene el siguiente resultado general:

Teorema 5.2.1. *Sea M una subvariedad con dimensión $(n + s)$ de $\widetilde{M}(c)$, tangente a los campos de estructura. Entonces,*

$$4\text{Ric}(U) \leq (n + s)^2|H|^2 + (n - 1)(c + 3s) + |TU|^2(3c + s), \quad (5.2.2)$$

para cualquier campo unitario $U \in \mathcal{L}$.

Demostración. Se elige una base local ortonormal de $T\widetilde{M}(c)$ como en (5.2.1) y tal que $e_1 = U$. Entonces, a partir de (5.1.4):

$$\begin{aligned} |\sigma|^2 &= \frac{1}{2}(n + s)^2|H|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |\sigma(e_i, e_j)|^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^s |\sigma(e_i, \xi_\alpha)|^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\sigma(e_i, e_i)|^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} g(\sigma(e_i, e_i), \sigma(e_j, e_j)). \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Así, de (5.1.3) y (5.2.3), se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(n + s)^2|H|^2 &= \tau - \frac{1}{8}n(n - 1)(c + 3s) - \frac{3}{8}|T|^2(c - s) - ns + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} |\sigma(e_i, e_j)|^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^s |\sigma(e_i, \xi_\alpha)|^2 + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n |\sigma(e_i, e_i)|^2 - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} g(\sigma(e_i, e_i), \sigma(e_j, e_j)). \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Por otra parte, como en virtud (5.1.2),

$$\tau = \text{Ric}(U) + \sum_{2 \leq i < j \leq n} K(e_i \wedge e_j) + \sum_{i=2}^n \sum_{\alpha=1}^s K(e_i \wedge \xi_\alpha)$$

y usando (1.2.26), se obtienen

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leq i < j \leq n} K(e_i \wedge e_j) &= \frac{1}{8}n(n - 1)(c + 3s) + \frac{3}{4} \left(\frac{|T|^2}{2} - |TU|^2 \right) (c - s) + \\ &+ \sum_{2 \leq i < j \leq n} (g(\sigma(e_i, e_i), \sigma(e_j, e_j)) - |\sigma(e_i, e_j)|^2) \end{aligned}$$

y

$$\sum_{i=2}^n \sum_{\alpha=1}^s K(e_i \wedge \xi_\alpha) = (n - 1)s - \sum_{i=2}^n \sum_{\alpha=1}^s |\sigma(e_i, \xi_\alpha)|^2,$$

entonces, sustituyendo en (5.2.4) y teniendo en cuenta (1.3.11), se deduce que:

$$\begin{aligned} \text{Ric}(U) = & \frac{1}{4}(n+s)^2|H|^2 + \frac{1}{4}(n-1)(c+3s) + \frac{1}{4}|TU|^2(3c+s) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{2 \leq i < j \leq n} g(\sigma(e_i, e_i), \sigma(e_j, e_j)) + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n g(\sigma(U, U), \sigma(e_i, e_i)) - \\ & - \sum_{i=2}^n |\sigma(U, e_i)|^2 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n |\sigma(e_i, e_i)|^2. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Ahora, (5.2.5) se puede escribir, en función de las coordenadas locales de la segunda forma fundamental, como

$$\begin{aligned} \text{Ric}(U) = & \frac{1}{4}(n+s)^2|H|^2 + \frac{1}{4}(n-1)(c+3s) + \frac{1}{4}|TU|^2(3c+s) - \\ & - \sum_{r=n+1}^{2m} \left[\frac{1}{4} \left(\sigma_{11}^r - \sum_{i=2}^n \sigma_{ii}^r \right)^2 + \sum_{i=2}^n (\sigma_{1i}^r)^2 \right], \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

con lo que completa la demostración. \square

Obsérvese que, si se escribe $\sigma_{1(2m+\alpha)}^r = g(\sigma(U, \xi_\alpha), e_r) = -g(NU, e_r)$, para cualesquiera $\alpha = 1, \dots, s$ y $r = n+1, \dots, 2m$, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Ric}(U) = & \frac{1}{4}(n+s)^2|H|^2 + \frac{1}{4}n(c+3s) + \frac{1}{4}(3|TU|^2 - 1)(c-s) - \\ & - \sum_{r=n+1}^{2m} \left[\frac{1}{4} \left(\sigma_{11}^r - \sum_{i=2}^n \sigma_{ii}^r \right)^2 + \sum_{i=2}^n (\sigma_{1i}^r)^2 + \sum_{\alpha=1}^s (\sigma_{1(2m+\alpha)}^r)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

y, en consecuencia:

$$4\text{Ric}(U) \leq (n+s)^2|H|^2 + n(c+3s) + (3|TU|^2 - 1)(c-s). \quad (5.2.8)$$

Para $s = 1$, el resultado anterior coincide con el obtenido en [61] para subvariedades de una variedad Sasakiana tangentes a los campos de estructura. Sin embargo, es fácil demostrar que esta cota es peor (en el sentido de que es mayor) que la dada en (5.2.2). Además, se tiene que ambas cotas son iguales si y sólo si $|NU|^2 = 0$, esto es, si y sólo si, en virtud de (1.3.11), $\sigma(U, \xi_\alpha) = 0$, para cualquier $\alpha = 1, \dots, s$. En ese caso, su valor común es:

$$(n+s)^2|H|^2 + n(c+3s) + 2(c-s).$$

En estas condiciones, se puede probar el siguiente teorema.

Teorema 5.2.2. *Sea M una subvariedad minimal con dimensión $(n + s)$ de $\widetilde{M}(c)$, tangente a los campos de estructura. Entonces, un campo unitario U en \mathcal{L} satisface la igualdad en (5.2.8) si y sólo si U se encuentra en el espacio nulo relativo de M . Además, en este caso:*

$$4\text{Ric}(U) = n(c + 3s) + 2(c - s).$$

Demostración. Si $U \in \mathcal{L}$ es un campo unitario que satisface la igualdad en (5.2.8), entonces satisface también la igualdad en (5.2.2) y así, $\sigma(U, \xi_\alpha) = 0$, para cualquier $\alpha = 1, \dots, s$. Además, eligiendo una base local ortonormal de $T\widetilde{M}(c)$ como en (5.2.1) tal que $e_1 = U$, a partir de (5.2.7) se obtiene que $\sigma_{1i}^r = 0$, para cualesquiera $i = 2, \dots, n$ y $r = n + 1, \dots, 2m$ y que

$$\sigma_{11}^r = \sum_{i=2}^n \sigma_{ii}^r,$$

para cualquier $r = n + 1, \dots, 2m$. Pero, como $H = 0$, se sabe que

$$\sigma_{11}^r = - \sum_{i=2}^n \sigma_{ii}^r,$$

para todo $r = n + 1, \dots, 2m$ y, por tanto, $\sigma_{11}^r = 0$. En consecuencia, $U \in \mathcal{N}$.

Recíprocamente, si $U \in \mathcal{N}$, eligiendo una base local ortonormal de $T\widetilde{M}(c)$ como en (5.2.1) con $e_1 = U$, se tiene que $\sigma_{1i}^r = 0$ y $\sigma_{1(2m+\alpha)}^r = 0$, para cualesquiera $i = 1, \dots, n$, $\alpha = 1, \dots, s$ y $r = n + 1, \dots, 2m$.

De nuevo, como $H = 0$, se obtiene que $\sigma_{22}^r + \dots + \sigma_{nn}^r = 0$, para cualquier $r = n + 1, \dots, 2m$. Entonces, a partir de (5.2.7) se obtiene la igualdad en (5.2.8). Finalmente, usando (1.3.11) se completa la demostración. \square

Ahora, obsérvese que si se tiene la igualdad en (5.2.8) para todo campo unitario $U \in \mathcal{L}$, la igualdad en (5.2.2) es también cierta para estos campos. Así, a partir de (1.3.11), $NU = 0$ para cualquier $U \in \mathcal{L}$, es decir, M es una subvariedad invariante y, entonces, es fácil demostrar que es minimal. Como consecuencia, usando el Teorema 5.2.2, $U \in \mathcal{N}$, para cualquier $U \in \mathcal{L}$ y M es totalmente geodésica. El recíproco se obtiene mediante un cálculo directo. En resumen, se ha probado el siguiente corolario del Teorema 5.2.2.

Corolario 5.2.3. *Sea M una subvariedad minimal con dimensión $(n + s)$ de $\widetilde{M}(c)$, tangente a los campos de estructura. Entonces, la igualdad en (5.2.8) se cumple para todo campo unitario en \mathcal{L} si y sólo si M es una subvariedad totalmente geodésica.*

A continuación, se va a estudiar el caso de igualdad en (5.2.2). En primer lugar, se puede probar el siguiente teorema.

Teorema 5.2.4. *Sea M una subvariedad con dimensión $(n + s)$ ($n \geq 2$) de $\widetilde{M}(c)$, tangente a los campos de estructura. Entonces, la igualdad en (5.2.2) se satisface para todo campo unitario en \mathcal{L} si y sólo si, o bien M es una subvariedad totalmente f -geodésica ó $n = 2$ y M es una subvariedad totalmente f -umbilical.*

Demostración. Si la igualdad en (5.2.2) es cierta para cualquier campo unitario $U \in \mathcal{L}$, entonces, eligiendo una base local ortonormal de $T\widetilde{M}(c)$ como en (5.2.1) y ya que e_1 es un campo unitario arbitrario de \mathcal{L} , a partir de (5.2.6) se obtiene que

$$\begin{aligned} 2\sigma_{ii}^r &= \sigma_{11}^r + \cdots + \sigma_{nn}^r, \quad i = 1, \dots, n, \\ \sigma_{ij}^r &= 0, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

para cualquier $r = n + 1, \dots, 2m$. Así, se tienen dos casos: ó $n = 2$ ó $n > 2$. En el primero de ellos, $\sigma_{11}^r = \sigma_{22}^r$, para cualquier r y M es una subvariedad totalmente f -umbilical, mientras que en el segundo caso $\sigma_{ii}^r = 0$, $i = 1, \dots, n$ y M es una subvariedad totalmente f -geodésica. El recíproco es una simple comprobación. \square

Los resultados anteriores se corresponden, en la geometría de S -variedades, con los probados por B.-Y. Chen en [25] para subvariedades en un espacio real de curvatura constante. Además, implican el siguiente teorema para una subvariedad slant isométricamente inmersa en una S -variedad de curvatura f -seccional constante.

Teorema 5.2.5. *Sea M una subvariedad θ -slant con dimensión $(n + s)$ ($n \geq 2$) de una S -variedad de curvatura f -seccional constante $\widetilde{M}(c)$. Entonces:*

(i) *Para cada campo unitario $U \in \mathcal{L}$, se tiene:*

$$4\text{Ric}(U) \leq (n + s)^2|H|^2 + (n - 1)(c + 3s) + \cos^2\theta(3c + s). \quad (5.2.9)$$

(ii) *La igualdad en (5.2.9) se verifica para todo campo unitario de \mathcal{L} si y sólo si, o bien M es una subvariedad totalmente f -geodésica ó $n = 2$ y M es una subvariedad totalmente f -umbilical.*

Demostración. Para cualquier campo unitario $U \in \mathcal{L}$, usando una base local ortonormal de $T\widetilde{M}(c)$ como en (5.2.1) tal que $e_1 = U$, a partir de (5.1.4) se obtiene que

$$|TU|^2 = \cos^2\theta$$

y así, en virtud de (5.2.2) se deduce (5.2.9). El resto de la prueba es similar a la del Teorema 5.2.4. \square

En particular, si M es una subvariedad invariante (entonces, es también una variedad minimal), se tiene:

Teorema 5.2.6. *Sea M una subvariedad invariante con dimensión $(n + s)$ ($n \geq 2$) de una S -variedad de curvatura f -seccional constante $\widetilde{M}(c)$ tangente a los campos de estructura. Entonces:*

(i) *Para cada campo unitario $U \in \mathcal{L}$, se tiene:*

$$4\text{Ric}(U) \leq n(c + 3s) + 2(c - s). \quad (5.2.10)$$

(ii) *La igualdad en (5.2.10) se verifica para todo campo unitario de \mathcal{L} si y sólo si, o bien M es una subvariedad totalmente f -geodésica ó $n = 2$ y M es una subvariedad totalmente f -umbilical.*

Finalmente, si M es una subvariedad anti-invariante, se obtiene:

Teorema 5.2.7. *Sea M una subvariedad anti-invariante con dimensión $(n + s)$ ($n \geq 2$) de una S -variedad de curvatura f -seccional constante $\widetilde{M}(c)$ tangente a los campos de estructura. Entonces:*

(i) *Para cada campo unitario $U \in \mathcal{L}$, se tiene:*

$$4\text{Ric}(U) \leq (n + s)^2|H|^2 + (n - 1)(c + 3s). \quad (5.2.11)$$

(ii) *La igualdad en (5.2.11) se verifica para todo campo unitario de \mathcal{L} si y sólo si, o bien M es una subvariedad totalmente f -geodésica ó $n = 2$ y M es una subvariedad totalmente f -umbilical.*

Nótese que estos resultados mejoran a los obtenidos en [61] para subvariedades slant en una variedad sasakiana de curvatura φ -seccional constante (caso $s = 1$).

5.3. El Endomorfismo de Weingarten asociado a la Curvatura Media.

En esta sección, se pretende establecer una desigualdad entre el endomorfismo de Weingarten asociado al vector curvatura media y la función curvatura seccional para subvariedades slant en una S -variedad de curvatura f -seccional constante. Para ello, M denotará una subvariedad θ -slant con dimensión $(n + s)$ en una S -variedad de curvatura f -seccional constante $\widetilde{M}(c)$ con dimensión $(2m + s)$. Sea $p \in M$ y se considera un número

$$b > \frac{c + 3s}{4} + \frac{3(c - s)}{4} \cos^2 \theta$$

tal que la curvatura seccional de M verifique $K \geq b$ en p . Se elige una base ortonormal del espacio tangente $T_p(\widehat{M})$,

$$\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+s}, e_{n+s+1}, \dots, e_{2m+s}\}$$

tal que $\{e_1, \dots, e_{n+s}\}$ será una base ortonormal de $T_p(M)$, e_{n+s+1} será paralelo al vector curvatura media en p y e_1, \dots, e_{n+s} diagonalizarán al endomorfismo de Weingarten asociado a e_{n+s+1} . Como antes, se escribe $\sigma_{ij}^r = g(\sigma(e_i, e_j), e_r)$, para cualesquiera $i, j = 1, \dots, n+s$ y $r = n+s+1, \dots, 2m+s$. Entonces, se tiene que

$$A_{n+s+1} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n+s} \end{pmatrix}, \quad (5.3.1)$$

donde $a_i = \sigma_{ii}^{n+s+1}$, $i = 1, \dots, n+s$. Además, si $r = n+s+2, \dots, 2m+s$, $A_r = (\sigma_{ij}^r)$, para $i, j = 1, \dots, n+s$ y así,

$$\text{traza } A_r = \sum_{i=1}^{n+s} \sigma_{ii}^r = 0, \quad (5.3.2)$$

ya que

$$\sum_{i=1}^{n+s} \sigma_{ii}^r = g((n+s)H, e_r) = 0,$$

para cualquier $r = n+s+2, \dots, 2m+s$ porque H es paralelo a e_{n+s+1} .

Ahora, para $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n+s$, se define

$$u_{ij} = a_i a_j = \sigma_{ii}^{n+s+1} \sigma_{jj}^{n+s+1} = u_{ji}$$

y a partir de (1.2.26), (2.1.14) y usando (5.3.1), se obtiene que, para $X = Z = e_i$ e $Y = W = e_j$:

$$u_{ij} \geq b - \frac{c+3s}{4} - \frac{3(c-s)}{4} \cos^2 \theta - \sum_{r=n+s+2}^{2m+s} (\sigma_{ii}^r \sigma_{jj}^r - (\sigma_{ij}^r)^2). \quad (5.3.3)$$

Teniendo en cuenta estas fórmulas, se puede probar el siguiente lema técnico para u_{ij} , $i, j = 1, \dots, n+s$, $i \neq j$.

Lema 5.3.1. (i) Para cualquier valor $i \in \{1, \dots, n+s\}$ fijado:

$$\sum_{i \neq j} u_{ij} \geq (n+s-1) \left(b - \frac{c+3s}{4} - \frac{3(c-s)}{4} \cos^2 \theta \right) > 0.$$

(ii) $u_{ij} \neq 0$.

(iii) Para valores $i, j, k \in \{1, \dots, n+s\}$ distintos:

$$a_i^2 = \frac{u_{ij}u_{ik}}{u_{jk}}.$$

(iv) Para un valor k fijado, $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n+s}{2} \right\rfloor$:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^{n+s} u_{ij} \geq k(n-k+s) \left(b - \frac{c+3s}{4} - \frac{3(c-s)}{4} \cos^2 \theta \right).$$

(v) $u_{ij} > 0$.

Demostración. En primer lugar, a partir de (5.3.2) y (5.3.3), se obtiene (i) mediante un cálculo directo. Ahora, si $u_{ij} = 0$, entonces $a_i = 0$ ó $a_j = 0$. Si $a_i = 0$, se tiene $u_{ik} = 0$, para todo $k \in \{1, \dots, n+s\}$, $k \neq i$. Así,

$$\sum_{j \neq i} u_{ij} = 0,$$

lo cual contradice a (i). (iii) es consecuencia directa de la definición de u_{ij} , u_{ik} y u_{jk} . Por otra parte, otro cálculo directo, usando (5.3.2) y (5.3.3), da (iv). Finalmente, si se supone que $u_{1(n+s)} < 0$, a partir de (iii) se obtiene $u_{1i}u_{i(n+s)} < 0$, para $1 < i < n+s$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que

$$\begin{aligned} u_{12}, \dots, u_{1k}, u_{(k+1)(n+s)}, \dots, u_{(n+s-1)(n+s)} &> 0, \\ u_{1(k+1)}, \dots, u_{1(n+s-1)}, u_{2(n+s)}, \dots, u_{k(n+s)} &< 0, \end{aligned}$$

para algún k tal que:

$$\left\lfloor \frac{n+s-1}{2} + 1 \right\rfloor \leq k \leq n+s-1.$$

Si $k = n+s-1$, entonces $u_{1(n+s)}u_{2(n+s)} \cdots u_{(n+s-1)(n+s)} < 0$, lo que contradice a (i). En consecuencia, $k < n+s-1$. A partir de (iii), se obtiene

$$a_{n+s}^2 = \frac{u_{i(n+s)}u_{t(n+s)}}{u_{it}} > 0,$$

donde $2 \leq i \leq k$, $k+1 \leq t \leq n+s-1$ y así, $u_{it} < 0$. Esto implica que

$$\sum_{i=1}^k \sum_{t=k+1}^{n+s} u_{it} = \sum_{i=2}^k \sum_{t=k+1}^{n+s-1} u_{it} + \sum_{i=1}^k u_{i(n+s)} + \sum_{t=k+1}^{n+s} u_{1t} < 0,$$

lo que contradice a (iv) y completa la prueba. \square

En el siguiente teorema, se establece la relación buscada.

Teorema 5.3.2. *Sea M una subvariedad θ -slant con dimensión $(n + s)$ isométricamente inmersa en una S -variedad de curvatura f -seccional constante $\widetilde{M}(c)$ con dimensión $(2m + s)$. Si en un punto $p \in M$ existe un número*

$$b > \frac{c + 3s}{4} + \frac{3(c - s)}{4} \cos^2 \theta$$

tal que la curvatura seccional de M verifica que $K \geq b$ en p , entonces el endomorfismo de Weingarten asociado con el vector curvatura media satisface

$$A_H > \frac{n + s - 1}{n + s} \left(b - \frac{c + 3s}{4} - \frac{3(c - s)}{4} \cos^2 \theta \right) I_{n+s},$$

en p , donde I_{n+s} es la aplicación identidad.

Demostración. Sea $p \in M$ y sea un número

$$b > \frac{c + 3s}{4} + \frac{3(c - s)}{4} \cos^2 \theta$$

tal que la curvatura seccional $K \geq b$ en p . Se elige una base ortonormal de $T_p(\widetilde{M})$ como se indicó al principio de la sección. Entonces, a partir del lema anterior, se observa que a_1, \dots, a_{n+s} tienen el mismo signo. Se supone que $a_j > 0$, para cualquier $j \in \{1, \dots, n + s\}$. Así:

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} u_{ij} &= a_i(a_1 + \dots + a_{n+s}) - a_i^2 \geq \\ &\geq (n + s - 1) \left(b - \frac{c + 3s}{4} - \frac{3(c - s)}{4} \cos^2 \theta \right). \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

A partir de (5.3.1) y (5.3.4), se tiene que, para cualquier $i = 1, \dots, n + s$:

$$\begin{aligned} a_i(n + s)|H| &\geq (n + s - 1) \left(b - \frac{c + 3s}{4} - \frac{3(c - s)}{4} \cos^2 \theta \right) + a_i^2 > \\ &> (n + s - 1) \left(b - \frac{c + 3s}{4} - \frac{3(c - s)}{4} \cos^2 \theta \right). \end{aligned}$$

Esto completa la prueba. □

Para los casos particulares de subvariedades invariantes y anti-invariantes (casos $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$, respectivamente), se tienen los dos siguientes teoremas.

Teorema 5.3.3. *Sea M una subvariedad invariante con dimensión $(n + s)$ isométricamente inmersa en una S -variedad de curvatura f -seccional constante $\widetilde{M}(c)$ con dimensión $(2m + s)$ y tangente a los campos de estructura. Si en un punto $p \in M$ existe un número $b > c$ tal que la curvatura seccional de M verifica que $K \geq b$ at p , entonces el endomorfismo de Weingarten asociado al vector curvatura media satisface en p :*

$$A_H > \frac{n + s - 1}{n + s} (b - c) I_{n+s}.$$

Teorema 5.3.4. *Sea M una subvariedad anti-invariante con dimensión $(n + s)$ isométricamente inmersa en una S -variedad de curvatura f -seccional constante $\widetilde{M}(c)$ con dimensión $(2m + s)$ y tangente a los campos de estructura. Si en un punto $p \in M$ existe un número*

$$b > \frac{c + 3s}{4}$$

tal que la curvatura seccional de M verifica que $K \geq b$ en p , entonces el endomorfismo de Weingarten asociado al vector curvatura media satisface en p :

$$A_H > \frac{n + s - 1}{n + s} \left(b - \frac{c + 3s}{4} \right) I_{n+s}.$$

Estos resultados se pueden comparar con los obtenidos en [61] para variedades Sasakianas de curvatura φ -seccional constante (caso $s = 1$).

Bibliografía

- [1] A. Bejancu. CR-submanifolds of a Kaehler manifold. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **69** (1978), 135-142.
- [2] D. Blair. *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*. Progress in Mathematics, 203. Birkhäuser. Boston-Basel-Berlin, (2002).
- [3] D. Blair. Geometry of Manifolds with Structural Group $U(n) \times O(s)$. *J. Diff. Geom.*, **4** (1970), 155-167.
- [4] D. Blair. On a generalization of the Hopf fibration. *An. Stiin. Univ. Al. I. Cuza*, **17** (1971), 171-177.
- [5] D. Blair, B. Ludden, K. Yano. Differential Geometric Structures on Principal Toroidal Bundles. *Trans. Am. Math. Soc.*, **181** (1973), 175-184.
- [6] W.M. Boothby, H.C. Wang. On contact manifolds. *Ann. of Math.*, **68** (1958), 721-734.
- [7] J. Bouzon. Structures presque co-complexes. *Univ. et Politec. Torino, Rend. Sem. Mat.*, **24** (1964/1965), 53-123.
- [8] J.L. Cabrerizo, L.M. Fernández, M. Fernández. A classification of totally f -umbilical submanifolds of an S -manifold. *Soochow J. Math.*, **18**(2) (1992), 211-221.
- [9] J.L. Cabrerizo, L.M. Fernández, M. Fernández. On certain anti-invariant submanifolds of an S -manifold. *Portugaliae Mathematica*, **50**(1) (1993), 103-113.
- [10] J.L. Cabrerizo, L.M. Fernández, M. Fernández. The curvature of submanifolds of an S -space form. *Acta Math. Hung.*, **62**(3-4) (1993), 373-383.
- [11] J.L. Cabrerizo, L.M. Fernández, M. Fernández. The curvature tensor fields of f -manifolds with complemented frames. *Ann. St. Univ. Al. I. Cuza*, **36** (1990), 151-161.

- [12] J.L. Cabrerizo, A. Carriazo, L.M. Fernández, M. Fernández. Existence and Uniqueness Theorem for Slant Immersions in Sasakian Space Forms. *Publ. Math. Debrecen*, **58**(4) (2001), 559-574.
- [13] J.L. Cabrerizo, A. Carriazo, L.M. Fernández, M. Fernández. Slant submanifolds in Sasakian manifolds, *Glasgow Math. J.*, **42** (2000), 125-138.
- [14] J.L. Cabrerizo, A. Carriazo, L.M. Fernández, M. Fernández. Structure on a Slant Submanifold of a Contact Manifold. *Ind. J. Pure Appl. Math.*, **31**(7) (2000), 857-864.
- [15] A. Carriazo. A contact Version of B.-Y. Chen's inequality and its applications to Slant Immersions. *Kyungpook Math. J.* **39** (1999), 451-462.
- [16] A. Carriazo. New developments in slant submanifolds theory, *Applicable Mathematics in the Golden Age (Edited by J.C. Misra)*, Narosa Publishing House, New Delhi (2002), 339-356.
- [17] A. Carriazo. *Subvariedades Slant en Variedades de Contacto*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla (1998).
- [18] A. Carriazo, L.M. Fernández, M.B. Hans-Uber. B.-Y. Chen's inequality for S -space-forms: Applications to slant immersions, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **34**(9) (2003), 1287-1298.
- [19] B.-Y. Chen. A general inequality for submanifolds in complex-space-forms and its applications. *Arch. Math.* **67** (1996), 519-528.
- [20] B.-Y. Chen. A Riemannian invariant and its applications to submanifold theory. *Results in Mathematics* **27** (1995), 17-26.
- [21] B. Y. Chen. CR-Submanifolds of a Kaehler Manifold I. *J. Diff. Geom.*, **16** (1981), 305-322.
- [22] B. Y. Chen. CR-Submanifolds of a Kaehler Manifold II. *J. Diff. Geom.*, **16** (1981), 493-509.
- [23] B. Y. Chen. *Geometry of Slant Submanifolds*. Katholieke Universiteit Leuven. Leuven, 1990.
- [24] B.-Y. Chen. Mean curvature and shape operator for isometric immersions in real space form. *Glasgow Math. J.* **38** (1996), 87-97.

- [25] B.-Y. Chen. Relations between Ricci curvature and shape operator for submanifolds with arbitrary codimensions. *Glasgow Math. J.* **41** (1999), 33-41.
- [26] B. Y. Chen. Slant immersions. *Bull. Austral. Math. Soc.*, **41** (1990), 135-147.
- [27] B.-Y. Chen. Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds. *Arch. Math.*, **60** (1993), 568-578.
- [28] B. Y. Chen, Y. Tazawa. Slant submanifolds in complex euclidean spaces. *Tokyo J. Math.*, **14**(1) (1991), 101-120.
- [29] B. Y. Chen, Y. Tazawa. Slant surfaces with codimension 2. *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **11**(3) (1990), 29-43.
- [30] S. S. Chern. Pseudo-groupes continus infinis. *Colloques Internationaux du C.N.R.S.*, Strasbourg (1953), 119-136.
- [31] D. Cioroboiu. Some inequalities for Ricci curvature of certain submanifolds in Sasakian space forms. *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.)* **19** (2003), 233-243.
- [32] M. Dajczer, L.A. Florit. A class of austere submanifolds *Illinois J. Math.*, **45**(3) (2001), 735-755.
- [33] L. M. Fernández. Submanifolds in Toroidal Bundles. *Proceedings Vith. Int. Coll. On Differential Geometry Santiago (Spain), 1988.* Cursos y Congresos, **61**, Univ. de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela (1989), 85-98.
- [34] L. M. Fernández. *Variedades con una K-estructura. Subvariedades.* Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, 1987.
- [35] S. I. Goldberg, K. Yano. Globally Framed f -manifolds. *Illinois J. Math.*, **15** (1971), 456-474.
- [36] S. I. Goldberg, K. Yano. Non-invariant Hypersurfaces of Almost Contact Manifolds. *J. Math. Soc. Japan*, **22**(1) (1970), 25-34.
- [37] S. I. Goldberg, K. Yano. On Normal Globally Framed f -manifolds. *Tôhoku Math. J.*, **22** (1970), 362-370.
- [38] J. W. Gray. Some global Properties of Contact Structures. *Ann. Of Math.*, **69** (1959), 421-450.
- [39] R. Harvey, B. Lawson. Calibrated geometries, *Act. Math.*, **148** (1982), 47-157.

- [40] I. Hasegawa, Y. Okuyama, T. Abe. On p -th Sasakian Manifolds. *J. Hokkaido Univ. of Education (Section II A)*, **37**(1) (1986), 1-16.
- [41] Y. Hatakeyama, Y. Ogawa, S. Tanno. Some properties of manifolds with contact metric structures. *Tôhoku Math. J.*, **15** (1963), 176-181.
- [42] S. Ishihara. Normal Structure f satisfying $f^3 + f = 0$. *Kodai Math. Sem. Rep.*, **18** (1966), 36-47.
- [43] S. Ishihara, K. Yano. On integrability conditions of a structure f satisfying $f^3 + f = 0$. *Quart. J. Math. Oxford, Ser. 2*, **15** (1964), 217-222.
- [44] E. Käehler. Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **9** (1933), 173-186.
- [45] M. Kobayasi, S. Tsukhiya. Invariant submanifolds of an f -manifold with complemented frames. *Kodai. Math. Sem. Rep.*, **254** (1972), 430-450.
- [46] A. Lotta. Slant submanifolds in contact geometry. *Bull. Math. Soc. Roumanie*, **39** (1996), 183-198.
- [47] S. Maeda, Y. Ohnita, S. Udagawa. On slant immersions into Käehler manifolds. *Kodai Math. J.*, **16** (1993), 205-219.
- [48] I. Mihai, M. M. Tripathi. Submanifolds of framed metric manifolds and S -manifolds. *Note Mat.*, **20**(2) (2000/2001), 135-164.
- [49] A. Nijenhuis. X_{n-1} -forming sets of eigenvectors. *Ind. Math.*, **13** (1951), 200-212.
- [50] L. Ornea. Suvarietati Cauchy-Riemann generice in S -varietati. *Stud. Cerc. Mat.*, **36**(5) (1984), 435-443.
- [51] N. Papaghiuc. Semi-slant submanifolds of a Kaehlerian manifold. *An. St. Univ. Al. I. Cuza*, **40**(1) (1994), 55-61.
- [52] A. Nijenhuis. X_{n-1} -forming sets of eigenvectors. *Indagations Math.*, **13** (1951), 200-212.
- [53] S. Sasaki. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure I. *Tôhoku Math. J.*, **12** (1960), 459-476.
- [54] S. Sasaki, Y. Hatakeyama. On differential manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure II. *Tôhoku Math. J.*, **13** (1961), 281-294.

- [55] S. Sasaki, Y. Hatakeyama. On differential manifolds with contact metric structures. *J. Math. Soc. Japan*, **14** (1962), 249-271.
- [56] J. A. Schouten, D. Van Dantzig. Über unitäre Geometrie Konstanter Krümmung. *Proc. Kon. Nederl. Akad. Amsterdam*, **34** (1931), 1293-1314.
- [57] J. A. Schouten, D. Van Dantzig. Über unitäre Geometrie. *Math. Ann.*, **103** (1930), 319-346.
- [58] Y. Tazawa. Construction of Slant immersions. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, **22**(2) (1994), 153-166.
- [59] Y. Tazawa. Construction of Slant immersions II. *Bull. Belg. Math. Soc. (New Series)*, **1** (1994), 569-576.
- [60] Y. Tazawa. *Differential Geometry of Slant Surfaces*. PhD Thesis. Michigan State University.
- [61] M.M. Tripathi, J.-S. Kim, S.-B. Kim. Mean curvature and shape operator of slant submanifolds in a Sasakian space form. *Balkan J. Geom. Appl.* **7**(1) (2002), 101-111.
- [62] A. Weil. Sur le théorie des formes différentielles attaché analytique complexe. *Comm. Math. Helv.*, **20** (1947), 110-116.
- [63] K. Yano. On a structure defined by a Tensor Field f of type (1,1) satisfying $f^3 + f = 0$. *Tensor*, **14** (1963), 99-109.

Índice general

Resumen

Introducción	1
1. Preliminares	10
1.1. Nociones de Teoría de Subvariedades Riemannianas.	10
1.2. f -variedades.	12
1.3. Subvariedades de f -variedades.	17
2. Subvariedades Slant de f-variedades	20
2.1. Definición de Subvariedad Slant.	20
2.2. Dimensión de una Subvariedad Slant.	30
2.3. Subvariedades Slant en f -variedades Métricas con $F = d\eta_\alpha$ para todo α y Campos de Estructura de Killing.	35
2.4. Estructura en una Subvariedad Slant.	38
3. Ejemplos de subvariedades Slant en f-variedades	48
3.1. Ejemplos obtenidos a partir de Subvariedades Slant en Variedades Casi Hermíticas.	48
3.2. Subvariedades slant en \mathbf{R}^{2m+s}	51
3.3. Subvariedades Slant en H^{2n+s}	70
4. Estudio de la Segunda Forma Fundamental para Inmersiones Slant en S-variedades	72
4.1. Subvariedades Slant Minimales y Totalmente Umbilicales.	72
4.2. Subvariedades Slant de menor Dimensión	79
4.3. Subvariedades Slant Minimales de menor Dimensión.	84
5. La Curvatura Media en una S-variedad de Curvatura f-seccional Constante	93

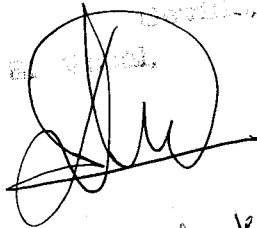
5.1. Desigualdades de B.-Y. Chen en una S -variedad de Curvatura f -seccional constante.	94
5.2. La Curvatura Media y el Endomorfismo de Weingarten en Inmersiones Slant en S -variedades de curvatura f -seccional constante.	104
5.3. El Endomorfismo de Weingarten asociado a la Curvatura Media.	109

Bibliografía	114
---------------------	------------

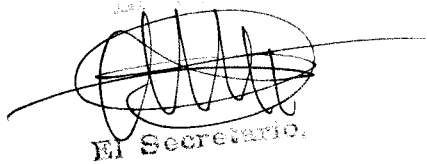
en
Lña. MA BELEN HANS UBER
SUBVARIETADES SLANT EN S-VARIEDADES

LAUDE POR UNANIMIDAD
15 de JULIO de 2005

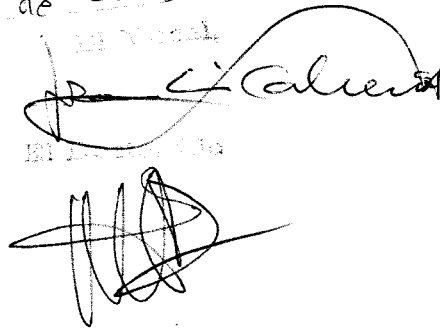
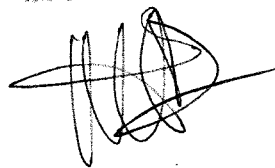
SOBRESALIENTE CUM


El Presidente,

El Secretario,


El Secretario.





600320764

UNIVERSIDAD DE SEVILLA