UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

ALGUNOS MÓDULOS PARA LA PROPIEDAD (β) DE ROLEWICZ

Y OTRAS PROPIEDADES GEOMÉTRICAS

DE LOS ESPACIOS DE BANACH

el Dpto. de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
7 de mayo
23 de mayo de 1997.
23 mayo 97

Memoria presentada por
Salvador FRANCISCO CUTILLAS
para optar al grado de Doctor
en Matemáticas.
Sevilla, Abril de 1997.

Fdo. Salvador Francisco Cutillas

V^0 B^0 : Los Directores

Dr. D. Tomás DOMÍNGUEZ BENAVIDES
Catedrático del Departamento
de Análisis Matemático de
la Universidad de Sevilla.

Dr. D. José M. AYERBE TOLEDANO
Profesor Titular del Departamento
de Análisis Matemático de
la Universidad de Sevilla.

A Maruqui, mi mujer

y a mis hijas Ana, Lucía y Susana

Mi agradecimiento:

A los profesores José María Ayerbe Toledano y Tomás Domínguez Benavides, directores de esta memoria, por su inestimable ayuda y porque me han dedicado todo el tiempo que ha sido necesario en estos años. Sin su constante apoyo este trabajo no hubiera sido posible.

A mis compañeros del Grupo de Investigación que han escuchado con interés mis exposiciones sobre este trabajo. En especial a los profesores José Carmona y Genaro López cuyas sugerencias me han sido útiles.

Como mis conocimientos de TEX son escasos, quiero expresar también mi agradecimiento a todos los compañeros que en algún momento han atendido mis preguntas, en particular a los profesores José A. Facenda y Ramón J. Rodríguez.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En la Teoría Geométrica de los espacios de Banach es usual definir funciones o módulos relacionados con determinadas propiedades geométricas. El más conocido es el módulo de convexidad uniforme de Clarkson. El objeto principal de este trabajo es definir y estudiar las propiedades de ciertas clases de módulos para la propiedad (β) de Rolewicz definida en [Ro2].

1. En primer lugar vamos a hacer un breve recorrido por las propiedades geométricas de los espacios de Banach que motivaron la definición de la propiedad β. Comenzamos con la *propiedad de la gota.*

Si X es un espacio de Banach, dado un punto $x \in X$ con $\|x\| > 1$ se llama gota determinada por x a la envolvente convexa del conjunto formado por x y la bola unidad cerrada del espacio B_X:

$$D(x, B_X) = \mathrm{co}(\{x\} \cup B_X).$$

El siguiente resultado, conocido como Teorema de la gota, fué probado por Dânes [D]:

Sea C un subconjunto cerrado de X tal que $\inf\{\|x\| : x \in C\} = R > 1$. *Entonces existe un punto $x_0 \in C$ tal que $D(x_0, B_X) \cap C = \{x_0\}$.*

Rolewicz se plantea en [Ro1] el sustituir la hipótesis del teorema de la gota por la más débil, y también más natural, de que el conjunto C sea disjunto con B_X. Así, se dice que *la norma de X tiene la propiedad de la gota si se cumple el teorema de la gota bajo esta hipótesis más débil* y que *X tiene la propiedad de la gota si tiene una norma equivalente con la propiedad de la gota.* En este artículo obtiene

Rolewicz el siguiente resultado:

$$X \text{ es uniformemente convexo} \Rightarrow \text{la norma de } X \text{ tiene la propiedad de la gota}$$
$$\Rightarrow X \text{ es reflexivo.}$$

Recordemos el concepto de convexidad uniforme introducido por J.A. Clarkson en 1936 [C]:

Un espacio de Banach X es uniformemente convexo cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1,\ \|x-y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta.$$

Como ya sabemos todo espacio uniformemente convexo es reflexivo y, en este sentido, Montesinos [Mo] da un paso más y prueba el siguiente resultado:

Un espacio de Banach es reflexivo si y solo si tiene la propiedad de la gota.

La propiedad (β), que definiremos más adelante, es una propiedad geométrica de los espacios de Banach que se sitúa entre la convexidad uniforme y la casi-convexidad uniforme. Recordemos este concepto definido por Huff en 1980 [Hu]:

Un espacio de Banach X es casi-uniformemente convexo, brevemente NUC, *(nearly uniformly convex) si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta < 1$ tal que si $\{x_n\}$ es una sucesión contenida en la bola unidad cerrada B_X con* $\operatorname{sep}(\{x_n\}) \geq \varepsilon$, *entonces* $\operatorname{co}(\{x_n\}) \cap B(0,\delta) \neq \emptyset$.

En esta definición $\operatorname{sep}(\{x_n\}) = \inf\{\|x_n - x_m\| : n \neq m\}$ y $B(0,\delta)$ es la bola cerrada de centro 0 y radio δ.

El objeto de la introducción de este concepto es el de establecer gradaciones entre la propiedad UC y la reflexividad del espacio pues

$$X \text{es UC} \Rightarrow X \text{ es } NUC \Rightarrow X \text{es reflexivo}$$

existiendo espacios reflexivos que no pueden renormarse para ser NUC y espacios NUC que no pueden renormarse para ser UC.

Un concepto equivalente a la propiedad NUC es la Δ-convexidad uniforme (Δ-UC) definido por K. Goebel y T. Sekowsky [GK]:

Un espacio de Banach X es Δ- uniformemente convexo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo conjunto C convexo contenido en la bola unidad cerrada B_X con $\alpha(C) > \varepsilon$ se tiene que $\inf\{\|x\| : x \in C\} < 1 - \delta$.

En esta definición $\alpha(C)$ es la medida de no compacidad de Kuratowski del conjunto C, es decir, el ínfimo de los números ε positivos tales que C puede ser recubierto por un número finito de conjuntos de diámetro igual o menor que ε.

En [Ro2] Rolewicz se plantea también el problema de discutir las relaciones entre la propiedad de la gota y la Δ-UC y define una propiedad que está entre la UC y la Δ-UC. El punto de partida es una caracterización de la convexidad uniforme en términos de *restos*:

Si B_X es la bola unidad cerrada de un espacio de Banach X y $\|x\| > 1$, llamaremos resto determinado por x al conjunto

$$R(x, B_X) = D(x, B_X) \setminus B_X$$

que representaremos en adelante por R_x. Se tiene entonces el siguiente resultado:

Un espacio de Banach X es uniformemente convexo si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $1 < \|x\| < 1 + \delta$ entonces $diam(R_x) < \varepsilon$.

De manera natural se puede sustituir el diámetro de R_x por la medida de no compacidad $\alpha(R_x)$ y resulta así la propiedad (β):

Un espacio de Banach X tiene la propiedad (β) cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $1 < \|x\| < 1 + \delta$ entonces $\alpha(R_x) < \varepsilon$.

Claramente se tiene que UC $\Rightarrow$ (β). Además Rolewicz demuestra que $(\beta) \Rightarrow \Delta$-UC por lo que en virtud de la equivalencia $\Delta -$ UC $\Leftrightarrow$NUC podemos establecer la implicación $(\beta) \Rightarrow$ NUC.

Rolewicz se plantea el problema de la separación, en el sentido de renormamiento, de estas propiedades. Montesinos y Torregrosa prueban en [MT] que hay espacios con la propiedad (β) que no se pueden renormar para ser UC y Kutzarova en [Ku1] da un ejemplo de espacio NUC que no puede renormarse para ser (β). En fin, para terminar, es posible separar reflexividad y NUC en el mismo sentido, es decir hay espacios reflexivos que no pueden ser renormados para ser NUC. Este último resultado lo da Huff en [Hu].

Observemos que la definición de la propiedad (β) está dada en términos de restos, en otras palabras, "desde fuera "de la bola unidad. Kutzarova da en [Ku3] una caracterización de la propiedad (β) que, como la definición de NUC de Huff, se da en términos de sucesiones contenidas en la bola unidad:

Un espacio de Banach X tiene la propiedad (β) si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe δ, $0 < \delta < 1$ tal que si $\{x_n\}$ es una sucesión contenida en B_X con $sep(\{x_n\}) > \varepsilon$ y $x \in B_X$, entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|\frac{x + x_i}{2}\right\| \leq 1 - \delta.$$

Se comprueba de forma inmediata, a partir de este resultado, que la propiedad (β) del espacio implica la propiedad NUC.

También en [Ku3] se da una caracterización de la propiedad NUC en términos de restos:

El espacio X es NUC si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $1 < \|x\| < 1 + \delta$ entonces

$$\sup\{\alpha(C) : C \subset R_x,\ C\text{convexo}\} < \varepsilon.$$

Terminamos la primera parte de esta Introducción con un resumen cronólogico de lo expuesto hasta ahora:

Definición de convexidad uniforme, 1936.

Definición de casi-convexidad uniforme, 1980.

Caracterización de UC en términos de restos, 1987.

Definición de la propiedad (β), 1987.

Caracterización de NUC en términos de restos, 1991.

Caracterización de la propiedad (β) por sucesiones en la bola unidad, 1991.

2. Como ya hemos dicho al principio de esta Introducción el objeto principal de este trabajo es definir y estudiar módulos de no compacidad para la propiedad (β).

La idea de la definición de módulos de no compacidad para ciertas propiedades geométricas de los espacios de Banach es de K. Goebel y T. Sekowski, quienes en

[GS,1984] definen un *módulo de convexidad no compacta* para la propiedad NUC inspirado en el clásico módulo de convexidad de Clarkson formulado por M.M. Day en[Da,1944]. Recordemos en primer lugar la definición del módulo de Clarkson:

El módulo de convexidad de un espacio de Banach X es la función $\delta_X : [0,2] \to [0,1]$ definida por

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1,\ \|x-y\| \geq \varepsilon\right\}.$$

Claramente se observa que el espacio X es UC si y solo si el módulo de convexidad satisface la condición $\delta_X(\varepsilon) > 0$ para cada $\varepsilon > 0$. De otra forma, si se define la *característica de convexidad* del espacio como el número

$$\varepsilon_0(X) = \sup\{\varepsilon \geq 0 : \delta_X(\varepsilon) = 0\},$$

el espacio X es UC si y sólo si $\varepsilon_0(X) = 0$. Este número, la característica de convexidad, nos indica como un espacio se separa de la la condición de ser UC. Indicaremos este hecho brevemente diciendo que el módulo de convexidad es adecuado para la propiedad UC. Sustituyendo los segmentos de longitud igual o mayor que ε por conjuntos convexos C de la bola unidad con medida de no compacidad $\alpha(C) \geq \varepsilon$ resulta el módulo de convexidad no compacta de Goebel y Sekowski:

$$\Delta_X : [0,2] \to [0,1],$$
$$\Delta_X(\varepsilon) = 1 - \sup\{\inf\{\|x\| : x \in A\} : A = \mathrm{co}(A) \subset B_X,\ \alpha(A) \geq \varepsilon\}.$$

Se puede definir una característica de convexidad asociado a este módulo de forma análoga:

$$\Delta_0(X) = \sup\{\varepsilon > 0 : \Delta_X(\varepsilon) = 0\}.$$

Así, el espacio X es NUC si y solo si $\Delta_0(X) = 0$. Por eso decimos que el módulo es adecuado para la propiedad NUC.

Otros autores han considerado módulos para la propiedad NUC asociados a distintas medidas de no compacidad ([B1] y [DL]). Del estudio de estos módulos se ha derivado un mejor conocimiento de la estructura geométrica de los espacios de Banach y, ya que la propiedad (β) de Rolewicz puede situarse entre la convexidad uniforme y la casi-convexidad uniforme, parece tener interés el estudio de los módulos que definimos en este trabajo para esta propiedad y su relación con los módulos citados de convexidad y convexidad no compacta.

3. Algunas propiedades geométricas de los espacios de Banach se han relacionado con la posibilidad de que el espacio tenga la propiedad del punto fijo para aplicaciones no expansivas. En nuestro trabajo hemos obtenido algunos resultados en este sentido, por lo que hemos considerado necesario dedicar unos párrafos de esta Introducción a la propiedad del punto fijo y al concepto de estructura normal.

Una aplicación T definida en un espacio de Banach X es no expansiva si cumple la condición $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ para todo $x, y \in X$. A estas aplicaciones, puesto que son continuas, se les puede aplicar el Teorema de Schauder [S] para obtener punto fijo si el dominio del operador es compacto y convexo. Es natural intentar sustituir la fuerte condición de compacidad sobre el dominio de definición del operador por la más débil de que sea cerrado y acotado. En este caso ejemplos muy sencillos muestran que no tiene por qué haber punto fijo. Se dice que un conjunto C de X no vacío, cerrado, acotado y convexo tiene la propiedad del punto fijo (f.p.p.) para aplicaciones no expansivas si para toda aplicación no expansiva $T : C \to C$ existe $x \in C$ tal que $Tx = x$. Diremos que un espacio de Banach X tiene la f.p.p. para aplicaciones no expansivas si cada subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo de X la tiene.

F. Browder demostró en 1965 [Br1] que todo espacio de Hilbert tiene la f.p.p. para aplicaciones no expansivas. Poco después D. Göhde [G] y el propio Browder [Br2] independientemente extendieron este resultado a la clase de los espacios de Banach uniformemente convexos.

Al mismo tiempo, también en 1965, W.A. Kirk [Ki] demostró que si un conjunto $C \subset X$ tiene estructura normal, entonces tiene la f.p.p. para aplicaciones no expansivas si el espacio X es reflexivo. Esta propiedad geométrica, la estructura normal, fué introducida por M.S. Brodskii and D.P. Milman en 1948 [BM]:

Un subconjunto convexo K de un espacio de Banach X tiene estructura normal si cada subconjunto convexo y acotado S de K no unitario contiene un punto no diametral, es decir, un punto $x \in S$ tal que $sup\{\|x-y\| : y \in S\} < \mathrm{diam}(S)$. *Un espacio X tiene estructura normal si cada subconjunto acotado y convexo con más de un punto tiene un punto no diametral.*

Los espacios de Banach uniformemente convexos tienen estructura normal. Además puede "medirse " en cierto modo, mediante la característica de convexidad, lo que un espacio no UC se aleja de esta propiedad y si este alejamiento no es excesivo el espacio tiene también estructura normal. En términos más precisos existe esta importante relación entre el módulo de convexidad de un espacio X y la estructura normal:

Si el módulo de convexidad de un espacio de Banach X satisface la condición $\delta_X(1) > 0$ *esto es, si* $\varepsilon_0(X) < 1$, *entonces X tiene estructura normal.*

En el capítulo I veremos que también con los módulos de convexidad no compacta se han probado interesantes resultados concernientes a la relación entre las propiedades geométricas de los espacios de Banach y la Teoría del Punto Fijo.

4. En este apartado, que es el último de esta Introducción, resumimos brevemente el contenido de cada uno de los cuatro capítulos de esta memoria. Una descripción más detallada puede encontrarse en la introducción de cada uno de ellos.

En el Capítulo I se hace un breve resumen de los principales conceptos y resultados conocidos que son necesarios para una buena comprensión del resto de la memoria. Así recordamos algunos resultados generales sobre espacios de Banach, el concepto de estructura normal, medidas de no compacidad, conjuntos minimales para una medida de no compacidad, módulo de convexidad de Clarkson, módulos de convexidad no compacta y propiedad (β). No incluimos demostraciones, salvo alguna excepción, e intentamos dar referencias concretas de todos los resultados, particularmente de aquellos que suponemos menos conocidos y que son más recientes.

En el Capítulo II se define la primera clase de módulos de no compacidad para la propiedad (β), a partir de la caracterización de Kutzarova que hemos citado, utilizando sucesiones contenidas en la bola unidad del espacio y las medidas α y χ de estas sucesiones, respectivamente, en los dos primeros Δ_X y $\Delta_X^{'}$ y la separación de sucesiones para el tercero $\Delta_X^{''}$.

Análogamente a como se hace para el módulo de Clarkson y para los módulos de convexidad no compacta definimos números que llamamos (β)-características del espacio y demostramos que si cualquiera de estos números es menor que 1 (menor que 1/2 en el correspondiente a la medida χ) tanto el espacio X como su dual X^* son reflexivos y tienen estructura normal y, por lo tanto, tienen la propiedad del punto fijo para aplicaciones no expansivas. Se demuestra la continuidad del módulo $\Delta_X^{'}$ en el intervalo $[0,1)$ en la clase de espacios de Banach en los que la medida χ es estrictamente minimalizante y calculamos el valor de los módulos $\Delta_X^{''}$ y $\Delta_X^{'}$ en los espacios ℓ^p.

En el capítulo III definimos, a partir de la definición de Rolewicz, la segunda clase de módulos de no compacidad para la propiedad (β) asociados a una medida de no compacidad μ que tenga las propiedades que más adelante precisamos:

$$P_{X,\mu}(\varepsilon) = \inf\{\|x\| \, : x \in X, \|x\| > 1, \, \mu(R_x) \geq \varepsilon\} - 1.$$

Se dan ciertas propiedades generales de estos módulos y su relación con los módulos definidos en el capítulo anterior, lo que nos permite establecer condiciones suficientes para que el espacio tenga la propiedad del punto fijo par aplicaciones no expansivas. Por último se calcula la medida de no compacidad α, χ y β de los restos R_x en los espacios ℓ^p y calculamos también el valor de los módulos correspondientes en estos espacios.

Para terminar, en el Capítulo IV nos ocupamos de la convexidad uniforme y de la casi-convexidad uniforme "vistas" desde fuera de la bola unidad aprovechando en parte las técnicas desarrolladas en el capítulo anterior. Definimos un nuevo módulo para la convexidad uniforme, estudiamos su relación con el módulo de Clarkson, lo que nos permite de nuevo establecer condiciones para que el espacio tenga la f.p.p.

y calculamos su valor en espacios de Hilbert separables. Se dan también algunos resultados sobre continuidad. Así mismo definimos un nuevo módulo de convexidad para la propiedad NUC y para una medida de no compacidad μ. Estudiamos su relación con los módulos de convexidad no compacta y por último calculamos su valor en espacios de Hilbert separables.

CAPÍTULO I. RESULTADOS BÁSICOS

1.1. Preliminares.

En esta memoria X representa un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Cuando queramos poner de manifiesto la norma de X escribiremos $(X, \|.\|)$. La bola cerrada de centro $x \in X$ y radio $r > 0$ se representa por $B(x,r)$:

$$B(x,r) = \{y \in X \,:\, \|y - x\| \leq r\}$$

y escribiremos B_X para la bola unidad cerrada $B(0,1)$. Representaremos la esfera unidad por S_X, es decir, $S_X = \{x \in X \,:\, \|x\| = 1\}$.

Los resultados contenidos en esta sección se pueden consultar en [Br], [M], [B], [GK], [ADL] y [Z].

Convexidad. Utilizamos la notación $\mathrm{co}(A)$ para la envolvente convexa del conjunto A, esto es, para el menor conjunto convexo que contiene a A:

$$\mathrm{co}(A) = \cap\{B \,:\, B \,\text{convexo}, A \subset B\}.$$

Se tiene que $x \in \mathrm{co}(A)$ si y solo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que x es de la forma $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, en donde $x_i \in A$, $\lambda_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Si A y B son subconjuntos convexos de X, la envolvente convexa de $A \cup B$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales $\lambda x + \mu y$ con $x \in A$, $y \in B$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ y $\lambda + \mu = 1$.

La clausura de la envolvente convexa de A se denota por $\overline{\mathrm{co}}(A)$ y se llama la clausura convexa de A.

Diámetro. Si A es un subconjunto acotado de X, el diámetro de A es el número $\sup\{\|x - y\| \,:\, x \in A, y \in A\}$ denotado por $\mathrm{diam}(A)$. El diámetro de un conjunto es 0 si y solo si éste es vacío o tiene solamente un punto. Otras propiedades del diámetro son las siguientes:

(1) Si $A_1 \subset A_2$ entonces $\text{diam}(A_1) \leq \text{diam}(A_2)$.

(2) $\text{diam}(\bar{A}) = \text{diam}(A)$, en donde $\bar{A}$ es la clausura de A.

(3) $\text{diam}(x + A) = \text{diam}\,(A)$ para todo $x \in X$.

(4) $\text{diam}(tA) = |t|\text{diam}(A)$ para todo número real t.

(5) $\text{diam}(A_1 + A_2) \leq \text{diam}(A_1) + \text{diam}(A_2)$.

(6) $\text{diam}(\text{co}\,(A)) = \text{diam}\,(A)$.

Espacios duales y reflexividad. Se designa por X^* el espacio dual de X, es decir, el espacio de las formas lineales y continuas sobre X. El espacio X^* es un espacio de Banach dotado con la norma dual

$$\|f\|_{X^*} = \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\} = \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| = 1\}.$$

Cuando $f \in X^*$ y $x \in X$ se escribe también $< f, x >$ en lugar de $f(x)$; se dice que $<, >$ es el producto escalar en la dualidad X^*, X.

El espacio X^{**} de las formas lineales y continuas sobre X^* se llama el bidual o segundo espacio dual de X. Se tiene una inyección canónica de X en X^{**} definida de la forma siguiente: dado $x \in X$ fijo, le hacemos corresponder la aplicación $f \to < f, x >$ de X^* en $\mathbb{R}$ que es una forma lineal continua sobre X^*, es decir un elemento de X^{**}. Esta inyección es siempre una isometría lineal. Si además es suprayectiva se dice que el espacio X es reflexivo y se identifica X con X^{**}. Se verifica que X es reflexivo si y solo si X^* es reflexivo.

La aplicación de dualidad. Se tiene el siguiente resultado como consecuencia del Teorema de Hahn-Banach:

Para todo $x \in X$ existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = \|x\|$ y $f(x) = \|x\|^2$. El funcional definido de esta manera no es único en general. La función F definida de X en el conjunto de los subconjuntos de X^* dada por

$$F(x) = \{f \in X^* : f(x) = \|x\|^2 = \|f\|^2\}$$

se llama aplicación de dualidad de X en X^*. Se tiene también, naturalmente, que para todo $x \in X$ existe un funcional continuo f, con $\|f\| = 1$, tal que $f(x) = \|x\|$. Designamos por $G(x)$ al conjunto

$$G(x) = \{f \in X^* : \|f\| = 1,\ f(x) = \|x\|\}$$

y se tiene para todo $x \in X$ que $F(x) = \|x\|G(x)$. Representaremos un elemento de $G(x)$ por G_x y diremos que G_x es un funcional lineal que "norma el punto x" o funcional tangente en x.

El siguiente resultado es de R.C. James: Un espacio de Banach X es reflexivo si y solo si para cada $f \in X^*$ existe $x \in X \setminus \{0\}$ tal que $f(x) = \|f\|\|x\|$.

Este teorema puede formularse también en la forma equivalente siguiente: Un espacio de Banach X es reflexivo si y solo si para cada $f \in S_{X^*}$ existe $x \in S_X$ tal que $f(x) = 1$.

La topología débil. La topología débil $\sigma(X, X^*)$ sobre X es la topología menos fina definida en X para la que todos los funcionales $f \in X^*$ son continuos.

Dada una sucesión $\{x_n\}$ en X se designa por $x_n \rightharpoonup x$ la convergencia de $\{x_n\}$ a x en la topologia débil $\sigma(X, X^*)$.

A continuación resumimos algunos resultados útiles sobre la topología débil en un espacio de Banach X:

(a) La topología débil coincide con la topología de la norma de X (topología fuerte) en los espacios de Banach de dimensión finita. Si X es infinito dimensional es siempre estrictamente menos fina.

(b) Una sucesión $\{x_n\}$ converge débilmente a x si y solo si $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x)$ para todo $f \in X^*$.

(c) Un subconjunto convexo K de X es cerrado si y solo si es débilmente cerrado.

(d) Si K es un subconjunto débilmente compacto de X entonces $\overline{co}(K)$ es tambien débilmente compacto.

(e) Un espacio de Banach X es reflexivo si y solo si la bola unidad cerrada es compacta en la topología débil.

(f) Cada subconjunto acotado, cerrado y convexo de un espacio reflexivo es débilmente compacto.

(g) X es reflexivo si y solamente si toda sucesión acotada de X tiene una subsucesión débilmente convergente.

Finalmente nos interesa señalar también el siguiente resultado sencillo que se refiere a la convergencia débil en los espacios ℓ^p, $1 < p < +\infty$: Sea $\{x_n\}$ una sucesión en ℓ^p débilmente convergente a 0 y $x_n = (x_n^i)$. Entonces para cada i la sucesión de números reales $\{x_n^i\}_n$ es convergente a 0.

Bases de Schauder. Una sucesión $\{e_i\}$ en un espacio de Banach X se llama una base de Schauder si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de números reales $\{x^i\}$ tales que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x^i e_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x^i e_i.$$

Una sucesión básica de X es una sucesión que es base de Schauder de un subespacio lineal cerrado de X.

Por ejemplo los vectores $e_i = (0, 0, ..1, 0, 0, \ldots)$, en donde el número 1 está en el lugar i-ésimo forman una base de Schauder de ℓ^p, $1 \leq p < +\infty$, a la que nos referimos como la base natural de Schauder del espacio.

Asociados a una base de Schauder $\{e_i\}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se definen en X los operadores proyección P_n y resto R_n dados por

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \quad \text{y} \quad R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} x^i e_i.$$

Se verifica que para todo $n \in \mathbb{N}$ los operadores P_n y R_n son lineales y continuos y $P_n + R_n = I$. Además P_n es un operador finito-dimensional y por lo tanto compacto.

Convexidad estricta y suavidad. Se dice que un espacio de Banach X es estrictamente convexo cuando se cumple cualquiera de las condiciones equivalentes siguientes:

(1) Si x e y pertenecen a X y $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, entonces existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $y = tx$.

(2) Si $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$, entonces $\|x+y\| < 2$.

(3) Para cada $f \in S_{X^*}$ existe a lo sumo un único $x \in S_X$ tal que $f(x) = 1$.

(4) Para cada $f \in X^*$, $f \neq 0$, existe a lo sumo un punto x en la esfera unidad S_X en el que f alcanza su norma, esto es, $f(x) = \|f\|$.

Geométricamente un espacio estrictamente convexo es aquel cuya esfera unidad no contiene segmentos. Precisando, si x e y pertenecen a la esfera unidad S_X entonces su punto medio $\frac{x+y}{2}$ no está en S_X. Observemos que si $0 < t < 1$ entonces se tiene también que $\|tx + (1-t)y\| < 1$.

Se dice que un espacio de Banach X es suave cuando para todo $x \neq 0$ existe un único funcional que norma el punto x, es decir un único $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$, tal que $f(x) = \|x\|$.

De forma equivalente se puede decir que X es suave si y solo si su norma es Gateaux-diferenciable, es decir, si para todo $x \neq 0$ y todo $h \in X$ existe el límite

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x+th\| - \|x\|}{t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si representamos este límite por $G(x,h)$, para cada $x \in X$, $x \neq 0$, la aplicación $h \to G(x,h)$ es precisamente el funcional único que norma el punto x que representamos, como hemos dicho, por G_x.

Geométricamente la suavidad del espacio significa que cada punto x de la esfera unidad S_X soporta un único hiperplano tangente. Este hiperplano es $G_x = 1$ y la bola unidad está contenida en el semiespacio $\{y \in X \, : G_x(y) \leq 1\}$.

Los conceptos de convexidad estricta y de suavidad que acabamos de definir son duales en el siguiente sentido:

(a) Si X^* es suave, X es estrictamente convexo.

(b) Si X^* es estrictamente convexo, X es suave.

Veamos un ejemplo. Sea X un espacio de Banach y sea $1 < p < +\infty$. El espacio

$$\ell^p(X) = \left\{x = (x^1, x^2, x^3, ...) : x^i \in X \ \text{ y} \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p < +\infty\right\}$$

con la norma $\|(x^i)\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x^i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ es un espacio de Banach. Además es estrictamente convexo si y solamente si X es estrictamente convexo.

En particular considerando $X = \mathbb{R}$ podemos deducir que los espacios ℓ^p, $1 < p < +\infty$, son estrictamente convexos.

El espacio dual de ℓ^p es ℓ^q si q es el exponente conjugado de p, esto es, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Por lo tanto ℓ^p, $1 < p < +\infty$, es reflexivo y, de la relación entre convexidad estricta y suavidad , se deduce que es suave. Así, dado $x \in \ell^p$ con $\|x\| = 1$ existe un único $G_x \in \ell^q$ con $\|G_x\| = 1$ tal que $G_x(x) = 1$ y la aplicación establecida de esta forma, la aplicación de dualidad entre S_{ℓ^p} y S_{ℓ^q}, es biyectiva.

Para cada $x = (x_i) \in S_{\ell^p}$, G_x está definido de la forma siguiente [M]:

$$G_x = \left(x^1|x^1|^{p-2}, x^2|x^2|^{p-2}, ..., x^n|x^n|^{p-2}, ...\right).$$

La propiedad del punto fijo para aplicaciones no expansivas. Si X es un espacio de Banach se dice que una aplicación $T : X \to X$ es no expansiva si cumple que $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ para todo $x, y \in X$.

Se dice que X tiene la propiedad del punto fijo para aplicaciones no expansivas (f.p.p.) si para cada subconjunto C cerrado, acotado y convexo y cada aplicación no expansiva $T : C \to C$ existe $x \in C$ tal que $Tx = x$. Se dice entonces que x es un punto fijo para T en C.

Existen espacios de Banach sin la propiedad del punto fijo como se muestra en el siguiente ejemplo de Kakutani [K]: Sea c_0 el espacio de las sucesiones convergentes a 0 y B_{c_0} su bola unidad cerrada. Entonces la aplicación $T : B_{c_0} \to B_{c_0}$ dada por $T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (1 - \|x\|, x_1, x_2, \ldots)$ es no expansiva y no tiene punto fijo.

Browder probó en 1965 [Br1] que los espacios de Hilbert tienen la propiedad del punto fijo. En este mismo año Browder [Br2] y Göhde [G] demostraron que los espacios uniformemente convexos tienen la f.p.p y también en 1965 lo demostró Kirk [ki] para los espacios reflexivos con estructura normal. A continuación definimos el concepto de estructura normal (más adelante definimos el de convexidad uniforme). Para un estudio detallado del mismo pueden consultarse, por ejemplo, los libros [GR], [GK] o [ADL].

Sea K un subconjunto de un espacio de Banach X. Un punto $x \in X$ se llama diametral para K si $\operatorname{diam}(K) = \sup\{\|x-y\| : y \in K\}$. Si K es acotado y todos sus puntos son diametrales se dice que K es un conjunto diametral.

Un subconjunto K de X convexo y acotado tiene estructura normal (n.s.) si cualquier subconjunto H de K convexo con $\operatorname{diam}(H) > 0$ tiene un punto no diametral, es decir, un punto $x \in H$ tal que $\sup\{\|x-y\| : y \in H\} < \operatorname{diam}(H)$.

Un espacio de Banach X tiene estructura normal si cada subconjunto convexo y acotado de X tiene estructura normal.

El radio de Chebyshev de un conjunto A con respecto a otro conjunto B es el número real:

$$r(A,B) = \inf\{\sup\{\|x-y\| : x \in A\} : y \in B\}.$$

Si $B = \operatorname{co}(A)$ se pone $r(A) = r(A, \operatorname{co}(A))$.

El coeficiente $N(X)$ de estructura normal de un espacio X se define de la forma siguiente:

$$N(X) = \inf\left\{\frac{\operatorname{diam}(A)}{r(A)} : A \subset X \text{ convexo, cerrado y acotado con } \operatorname{diam}(A) > 0\right\}.$$

Se prueba fácilmente que si $N(X) > 1$ entonces el espacio X tiene estructura normal y es reflexivo. El recíproco no es cierto. Cuando $N(X) > 1$ se dice que el espacio de Banach X tiene estructura normal uniforme.

1.2 Medidas de no compacidad.

Una medida de no compacidad es una función definida en la familia de conjuntos acotados de un espacio de Banach X que trata de medir el "grado de no compacidad" de estos conjuntos. La primera de estas medidas fué definida por Kuratowski [Ku] en 1930 en conexión con algunos problemas de Topología General. Si B es un conjunto acotado de un espacio métrico, la medida de no compacidad de Kuratowski de B se define de la forma siguiente:

$\alpha(B)$=inf $\{\varepsilon > 0 : B$ puede ser recubierto por un número finito de conjuntos de diámetro $\leq \varepsilon\}$.

Otras medidas de no compacidad han sido definidas posteriormente. Las más importantes son la medida χ de no compacidad de Hausdorff:

$\chi(B)$=inf $\{\varepsilon > 0 : B$ puede ser recubierto por un número finito de bolas con radio $\leq \varepsilon\}$

introducida por Gohberg, Goldenshstein y Markus en 1957 [GGM] y la medida β de separación:

$\beta(B)$=sup $\{\varepsilon > 0 : B$ tiene un subconjunto infinito $\varepsilon -$ separado$\}$

en donde un conjunto B se dice ε-separado si la distancia entre cada par de elementos distintos de B es igual o mayor que ε. Esta medida ha sido considerada por Istratescu [I], Sadovski [Sa] y otros autores.

Las medidas de no compacidad tienen importantes aplicaciones en teoría de operadores en espacios de Banach. En los últimos años además se han utilizado para definir propiedades geométricas de los espacios de Banach con aplicaciones en la Teoría del Punto Fijo (ver por ejemplo [Ro1], [Ro2], [Mo], [KMP], [GS], [Ku3], [B1], [Se] y [P] y referencias en estos artículos). El trabajo realizado en esta memoria pretende ir en la misma dirección.

A continuación daremos una definición axiómatica del concepto de medida de no compacidad. Se han propuesto axiómaticas por distintos autores basadas fundamentalmente en propiedades comunes a las medidas ya citadas de Kuratowski y Hausdorff. Aunque la noción de medida de no compacidad fué introducida en espacios métricos, nosotros nos situaremos en el marco de los espacios de Banach como se hace, por ejemplo, en [BG] y [AKPRS]. La definición que damos puede encontrarse en [ADL].

DEFINICIÓN 1.2.1

Sea X un espacio de Banach y $\mathcal{B}$ la familia de subconjuntos acotados de X. Se dice que una aplicación

$$\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty)$$

es una medida de no compacidad (MNC) definida en X si satisface las propiedades siguientes:

(a) Regularidad : $\mu(B) = 0 \iff B$ es precompacto.

(b) Invariancia para la clausura: $\mu(B) = \mu(\bar{B})$, para todo $B \in \mathcal{B}$.

(c) Semi-aditividad: $\mu(B_1 \cup B_2) = \max\{\mu(B_1), \mu(B_2)\}$ para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$.

De estos axiomas se deducen directamente las siguientes propiedades:

(1) Monotonía: $B_1 \subset B \Rightarrow \mu(B_1) \leq \mu(B)$.

(2) $\mu(B_1 \cap B_2) \leq \min\{\mu(B_1), \mu(B_2)\}$ para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$.

(3) No singularidad: Si B es finito, entonces $\mu(B) = 0$.

(4) Teorema de Cantor generalizado: Si $\{B_n\}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos de X no vacíos, cerrados y acotados y $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$, entonces la intersección de todos los B_n es no vacía y compacta.

Además una medida de no compacidad puede tener otras propiedades de las que pasamos a enunciar las que son más interesantes para este trabajo:

(5) Semihomogeneidad: $\mu(tB) = |t|\mu(B)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $B \in \mathcal{B}$.

(6) Semiaditividad algebraica: $\mu(B_1 + B_2) \leq \mu(B_1) + \mu(B_2)$ para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$.

(7) Invariancia por traslaciones: $\mu(x + B) = \mu(B)$ para todo $x \in X$ y $B \in \mathcal{B}$.

(8) Invariancia para la envolvente convexa: $\mu(B) = \mu(\operatorname{co}(B))$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

EJEMPLO 1.2.2. En un espacio de Banach X la función definida en $\mathcal{B}$, $\mu(B) = 0$ si B es precompacto y $\mu(B) = 1$ en otro caso, es una medida de no compacidad que se llama discreta. Esta medida es algebraicamente semiaditiva, invariante al tomar envolvente convexa e invariante por traslaciones. No es semihomogénea si X es de dimensión infinita.

DEFINICIÓN 1.2.3.

Se dice que dos medidas de no compacidad μ y λ definidas en un espacio de Banach X son comparables o equivalentes cuando el conjunto

$$\left\{ \frac{\lambda(B)}{\mu(B)} : B \in \mathcal{B},\, \mu(B) > 0 \right\}$$

es acotado con ínfimo positivo. En ese caso, si designamos por a y b respectivamente al ínfimo y al supremo de dicho conjunto, se tiene para todo B acotado de X:

$$a\,\mu(B) \leq \lambda(B) \leq b\,\mu(B)$$

con $0 < a \leq b$.

1.3. Las medidas de no compacidad α, χ y β.

Sea $\mathcal{B}$ la familia de los acotados de un espacio de Banach X. Si $B \in \mathcal{B}$ no es precompacto, existe un número $\varepsilon > 0$ tal que B no puede ser recubierto por un número finito de conjuntos de diámetro menor que ε, ni por un número finito de bolas de radio menor que $\varepsilon/2$. También, si B no es precompacto, tiene un subconjunto infinito B_1 ε-separado para algún $\varepsilon > 0$, es decir, tal que para todo $x, y \in B_1$, $x \neq y$ es $\|x - y\| \geq \varepsilon$. Por todo esto tienen sentido las definiciones siguientes:

DEFINICIÓN 1.3.1.

Sea X un espacio de Banach y $\mathcal{B}$ la familia de los acotados de X. Para cada $B \in \mathcal{B}$ se definen las medidas de no compacidad de Kuratowski, de Hausdorff y de separación, que representaremos respectivamente por α, χ y β, de la forma siguiente:

$$\alpha(B) = \inf\{\varepsilon > 0 : B \text{ puede ser recubierto por un número finito de conjuntos de diámetro} < \varepsilon\}.$$

$\chi(B) = \inf\{\varepsilon > 0$: *B puede ser recubierto por un número finito de bolas de radio* $< \varepsilon\}$.

$\beta(B) = \sup\{\varepsilon > 0$: *B tiene una* ε *-separación infinita* $\}$.

En las definiciones de α y χ resulta claro que puede sustituirse el signo $<$ por el de menor o igual

Las funciones α, χ y β son medidas de no compacidad en el sentido establecido en la sección anterior y verifican todas las propiedades citadas. Las demostraciones pueden verse, por ejemplo en [AKPRS] o en [ADL].

Señalemos algunas otras propiedades de estas medidas:

(1) Para todo conjunto acotado B de X se verifica que

$$\chi(B) \leq \beta(B) \leq \alpha(B) \leq 2\chi(B).$$

Se deduce que estas medidas de no compacidad son comparables entre si. Se cumple además que estas desigualdades no pueden ser mejoradas en la clase de todos los espacios de Banach.

(2) Si X es de dimensión infinita con bola unidad B_X, entonces

$$\alpha(B_X) = 2, \text{ y } \chi(B_X) = 1.$$

El valor de $\beta(B_X)$ depende del espacio X. Para los espacios ℓ^p, $1 < p < +\infty$ es $\beta(B_{\ell^p}) = 2^{\frac{1}{p}}$ [ADL].

(3) Si X es un espacio de Banach con base de Schauder, μ es cualquiera de las MNC α, β o χ y B es un subconjunto acotado de X se tiene que, para todo n natural, $\mu(B) = \mu(R_n(B))$ en donde R_n es el operador resto definido en la sección **1.1**.

Nos interesa además la siguiente propiedad demostrada por J. Banas en [B1].

(4) Sea A acotado contenido en X, $r > 0$ y $B(A,r) = \bigcup_{x\in A} B(x,r)$. Entonces

$$\chi(B(A,r)) = \chi(A) + r.$$

Por último, puesto que la definición de espacio NUC [Hu] y la caracterización de la propiedad (β) en [Ku3] se dan en términos de separación de sucesiones, conviene recordar que para una sucesión $\{x_n\}$ contenida en X se define la separación de $\{x_n\}$ de la forma siguiente:

$$\text{sep}(\{x_n\}) = \inf\{\|x_n - x_m\| \ : n \neq m\}.$$

Para un acotado $B \in \mathcal{B}$ tenemos las implicaciones siguientes: si B contiene una sucesión $\{x_n\}$ con $\text{sep}(\{x_n\}) > \varepsilon$ entonces $\alpha(B) > \varepsilon$, y si $\chi(B) > \varepsilon$ entonces B contiene una sucesión $\{x_n\}$ con $\text{sep}(\{x_n\}) > \varepsilon$. Se tiene además que la medida β de un conjunto puede definirse en términos de separaciones de sucesiones:

$$\beta(B) = \sup\{\varepsilon > 0 \ : B \ \text{ contiene una sucesión con } \text{sep}(\{x_n\}) \geq \varepsilon\}.$$

1.4. Conjuntos minimales para una medida de no compacidad.

La noción de conjunto minimal respecto de una medida de no compacidad fué introducida en [Do] para estudiar las relaciones entre operadores condensantes para las medidas de Hausdorff o de Kuratowski. En esta memoria se necesitan algunos resultados relacionados con este concepto que pasamos a resumir brevemente. Todos ellos , además de otras referencias que demos, pueden encontrarse en [ADL].

Sea X un espacio de Banach, $\mathcal{B}$ la familia de los subconjuntos acotados de X y μ una medida de no compacidad definida en X.

<u>DEFINICIÓN 1.4.1</u>

Un conjunto infinito $A \in \mathcal{B}$ es minimal para la medida de no compacidad μ, brevemente μ-minimal, si para cualquier subconjunto infinito B de A se verifica que $\mu(B) = \mu(A)$. En particular una sucesión $\{x_n\}$ en X es μ-minimal si su rango es infinito, acotado y μ-minimal.

Por ejemplo, todo conjunto infinito, acotado y precompacto es μ-minimal para cualquier medida de no compacidad, y todo subconjunto infinito de uno μ-minimal es μ-minimal.

El Teorema siguiente asegura la existencia de conjuntos μ-minimales en cualquier espacio de Banach.

TEOREMA 1.4.2.

Sea X un espacio de Banach, μ una medida de no compacidad en X y A un subconjunto acotado de X. Entonces:

(a) Existe un subconjunto B de A que es μ- minimal.

(b) Si A no es precompacto puede elegirse B de modo que sea $\mu(B) > 0$.

La demostración puede verse en [Do] para las medidas α y χ y en [ADL] para una medida cualquiera μ.

El lema siguiente nos da una importante propiedad de los conjuntos α -minimales que utilizaremos más adelante [Do].

LEMA 1.4.3.

Sea A un conjunto α-minimal de X. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto infinito B de A tal que

$$\alpha(A) - \varepsilon < \|x - y\| < \alpha(A) + \varepsilon$$

para todo $x, y \in B$, $x \neq y$.

Distinguimos ahora, atendiendo a la forma en que pueden ser elegidos los conjuntos minimales, dos tipos especiales de medidas de no compacidad.

DEFINICIÓN 1.4.4.

Sea μ una medida de no compacidad definida en X.

(a) La medida μ es minimalizante si para cualquier $A \in \mathcal{B}$ y cualquier $\varepsilon > 0$ existe $B \subset A$, B μ-minimal tal que $\mu(B) \geq \mu(A) - \varepsilon$.

(b) La medida μ es estrictamente minimalizante si para todo $A \in \mathcal{B}$, existe $B \subset A$, B μ-minimal tal que $\mu(B) = \mu(A)$.

Por ejemplo, la medida de no compacidad discreta es estrictamente minimalizante en cualquier espacio de Banach.

La medida α de Kuratowski no es, en general, minimalizante como puede verse en [Do] o [ADL]. Para la medida χ tenemos el siguiente resultado resultado debido a S. Prus y que puede encontrarse en [ADL].

TEOREMA 1.4.5.[S. Prus]

Sea X un espacio de Banach tal que X y su dual X^* sean débilmente compactamente generados. Entonces la medida de no compacidad χ de Hausdorff es estrictamente minimalizante.

Recordemos que un espacio de Banach X es débilmente compactamente generado si contiene un conjunto débilmente compacto que lo genera. Los espacios de Banach separables y los reflexivos satisfacen esta condición. Una prueba del resultado anterior para espacios métricos separables puede encontrarse en [Do]. Por otra parte hay espacios en los que la medida χ no es minimalizante; por ejemplo no lo es en ℓ^∞ [ADL].

Damos ahora dos resultados para la medida β que pueden encontrarse en [Zh], [Ro] y [ADL].

LEMA 1.4.6.

Para cualquier subconjunto acotado A de un espacio de Banach X se tiene

$$\beta(A) = \sup\{\alpha(B) \, : B \subset A, \; B \; \alpha-\text{minimal}\}.$$

LEMA 1.4.7.

Si un subconjunto A de X es α-minimal entonces también es β-minimal y $\alpha(A) = \beta(A)$.

Como consecuencia de estos dos últimos lemas puede demostrarse que la medida β es minimalizante en cualquier espacio de Banach aunque en general no es estrictamente minimalizante (puede verse un ejemplo en [ADL]).

Para concluir esta sección daremos dos resultados que se refieren a los espacios ℓ^p y que pueden encontrarse en [ADL].

PROPOSICIÓN 1.4.8.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en ℓ^p, $1 < p < +\infty$, débilmente convergente a $\omega \in \ell^p$

y tal que existe $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z\|$ *para todo* $z \in \ell^p$. *Entonces*

$$\chi(\{x_n\}) = \lim_{n\to\infty} \|x_n - \omega\|.$$

PROPOSICIÓN 1.4.9.

(a) Sea A *un subconjunto acotado de* ℓ^p, $1 \le p < +\infty$. *Entonces*

$$\chi(A) = 2^{-\frac{1}{p}}\beta(A).$$

(b) Sea A *un subconjunto* α*-minimal de* ℓ^p, $1 \le p < +\infty$. *Entonces* $\chi(A) = 2^{-\frac{1}{p}}\alpha(A)$.

1.5. Convexidad uniforme.

Recordemos el concepto de espacio uniformemente convexo introducido, como ya hemos dicho por Clarkson [C] en 1936. Los resultados de esta sección pueden encontrarse en [GK].

DEFINICIÓN 1.5.1.

Un espacio de Banach X *se dice uniformementen convexo (UC) si para cada* $\varepsilon \in (0,2]$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $x, y \in X$ *entonces*

$$\|x\| \le 1,\ \|y\| \le 1,\ \|x-y\| \ge \varepsilon \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1-\delta.$$

Es fácil demostrar que todo espacio uniformemente convexo es estrictamente convexo y que en dimensión finita ambos conceptos son equivalentes.

Se puede medir el grado de convexidad (o rotundidad) de la bola unidad de un espacio de Banach X, de dimensión finita o infinita, con el módulo de convexidad uniforme definido por M.M. Day [Da]:

DEFINICIÓN 1.5.2.

El módulo de convexidad de un espacio de Banach X es la función $\delta_X : [0,2] \to [0,1]$ dada por

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : \|x\| \leq 1, \ \|y\| \leq 1, \ \|x-y\| \geq \varepsilon \right\}.$$

El módulo de convexidad es una función no decreciente y continua en [0,2). Un espacio X es uniformemente convexo si y solo si $\delta_X(\varepsilon) > 0$ para cada $\varepsilon > 0$. Puede probarse además que es estrictamente convexo si y solo si $\delta_X(2) = 1$.

DEFINICIÓN 1.5.3.

La característica de convexidad de un espacio de Banach X es la constante asociada al espacio dada por

$$\varepsilon_0(X) = \sup\{\varepsilon \geq 0 : \delta_X(\varepsilon) = 0\}.$$

Es evidente que X es uniformemente convexo si y solo si $\varepsilon_0(X) = 0$. La característica de convexidad mide lo que el espacio se " aleja de la convexidad uniforme". Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}^2$ con la norma $\|(a,b)\|_1 = |a|+|b|$ o $\|(a,b)\|_\infty = \max\{|a|, |b|\}$, entonces $\varepsilon_0(X) = 2$.

La proposición siguiente relaciona la característica de convexidad con el coeficiente $N(X)$ de estructura normal.

PROPOSICIÓN 1.5.4.

Si X es un espacio de Banach con módulo de convexidad δ_X, entonces $N(X) \geq (1-\delta(1))^{-1}$.

Esta Proposición prueba que si $\delta_X(1) > 0$ o, lo que es equivalente teniendo en cuenta la continuidad del módulo, si $\varepsilon_0(X) < 1$ entonces X tiene estructura normal y es reflexivo.

Así en virtud del Teorema de Kirk podemos asegurar que de la condición $\varepsilon_0(X) < 1$ se deduce que el espacio X tiene la propiedad del punto fijo para aplicaciones no expansivas.

Terminamos esta sección dando el valor del módulo de convexidad en los espacios ℓ^p, $1 < p < +\infty$:

PROPOSICIÓN 1.5.5 [H].

El módulo de convexidad δ_{ℓ^p} se calcula por las relaciones:

$$\left((1-\delta_{\ell^p}(\varepsilon)+\frac{\varepsilon}{2}\right)^p+\left(1-\delta_{\ell^p}(\varepsilon)-\frac{\varepsilon}{2}\right)^p=2 \text{ si } 1<p\leq 2,$$

$$\delta_{\ell^p}(\varepsilon)=1-\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } p\geq 2.$$

1.6. Casi-convexidad uniforme.

El concepto de espacio casi-uniformemente convexo (NUC) (de esta forma traducimos la expresión en inglés *nearly uniformly convex*) lo dió R. Huff en 1980 [Hu]. Esta definición, que damos a continuación, generaliza el concepto de convexidad uniforme en el sentido de que se sustituyen los segmentos de longitud igual o mayor que ε que aparecen en la definición de Clarkson por sucesiones de la bola unidad con separación igual o mayor que ε.

DEFINICIÓN 1.6.1.

Se dice que un espacio de Banach X es casi-uniformemente convexo cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\{x_n\}$ es una sucesión en la bola unidad B_X, entonces

$$\operatorname{sep}(\{x_n\}) \geq \varepsilon \Rightarrow \operatorname{co}(\{x_n\}) \cap B(0,1-\delta) \neq \emptyset.$$

De la definición, en la que X se supone de dimensión infinita, se deduce claramente que todo espacio UC es también NUC. Además Huff probó que todo espacio X que es NUC es reflexivo. Podemos precisar más esta afirmación: un espacio de Banach es NUC si y solo si es reflexivo y su norma satisface la condición uniforme de Kadec-Klee (UKK) [Hu].

K. Goebel y T. Sekowski definen en 1984 [GS] un módulo de convexidad, asociado a la medida α de no compacidad, inspirado en el módulo de Clarkson, que es adecuado para la propiedad NUC.

También lo hacen J. Banas [B1,1987] utilizando la medida χ y T. Domínguez y G.López [DL,1992] con la medida β de separación.

DEFINICIÓN 1.6.2.

Sea X un espacio de Banach. Definimos los siguientes módulos de convexidad no compacta asociados respectivamente a las medidas de no compacidad α, χ y β.

(a) $\Delta_X : [0,2] \to [0,1]$,

$$\Delta_X(\varepsilon) = 1 - \sup\{\inf\{\|x\| : x \in A\} : A = \mathrm{co}(A) \subset B_X,\ \alpha(A) \geq \varepsilon\}.$$

(b) $\Delta'_X : [0,1] \to [0,1]$,

$$\Delta'_X(\varepsilon) = 1 - \sup\{\inf\{\|x\| : x \in A\} : A = \mathrm{co}(A) \subset B_X,\ \chi(A) \geq \varepsilon\}.$$

(c) $\Delta''_X : [0, \beta(B_X)] \to [0,1]$,

$$\Delta''_X(\varepsilon) = 1 - \sup\{\inf\{\|x\| : x \in A\} : A = \mathrm{co}(A) \subset B_X,\ \beta(A) > \varepsilon\},$$

Definimos también la NUC-característica de X asociada a la medida α:

$$\Delta_0(X) = \sup\{\varepsilon \geq 0 : \Delta_X(\varepsilon) = 0\}$$

y, análogamente, las características $\Delta'_0(X)$ y $\Delta''_0(X)$.

Los módulos definidos son adecuados para la propiedad NUC en el sentido de que se verifica que el espacio X es NUC si y solo si $\Delta_0(X) = 0$ (o bien $\Delta'_0(X) = 0$, o $\Delta''_0(X) = 0$).

Las relaciones siguientes entre los distintos módulos se obtienen fácilmente:

$$\delta_X(\varepsilon) \leq \Delta_X(\varepsilon) \leq \Delta''_X(\varepsilon) \leq \Delta'_X(\varepsilon)$$

y consecuentemente:

$$\Delta_0^{'}(X) \leq \Delta_0^{"}(X) \leq \Delta_0(X) \leq \varepsilon_0(X).$$

Las proposiciones siguientes relacionan las NUC-características con la estructura normal y la reflexividad del espacio.

PROPOSICIÓN 1.6.3.[GS].

Sea X un espacio de Banach. Si la característica de convexidad $\Delta_0(X)$ es menor que 1 *el espacio es reflexivo y tiene estructura normal.*

Consecuencia de esta proposición es que si $\Delta_0(X) < 1$, entonces el espacio tiene la propiedad del punto fijo para aplicaciones no expansivas.

PROPOSICIÓN 1.6.4.[B1].

Si $\Delta_0^{'}(X) \leq 1/2$ el espacio X es reflexivo y tiene estructura normal.

Otro resultado de S. Prus establece que si $\Delta_0^{'}(X) < 1$ el espacio X es reflexivo [ADL].

TEOREMA 1.6.5. [ADL].

Sea X un espacio de Banach. Entonces si la característica $\Delta_0^{"}(X)$ es menor que 1 el espacio es reflexivo y tiene estructura normal y , en consecuencia, tiene la propiedad del punto fijo para aplicaciones no expansivas.

Para terminar este resumen diremos que el módulo $\Delta_X^{'}$ es continuo en el intervalo [0,1) [B1] y damos el valor de los módulos en los espacios ℓ^p.

PROPOSICIÓN 1.6.6.

El valor de cada uno de los módulos de convexidad no compacta en los espacios ℓ^p, $1 < p < +\infty$ viene dado por las expresiones siguientes:

$$\Delta_{\ell^p}(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}},$$
$$\Delta'_{\ell^p}(\varepsilon) = 1-\left(1 - \varepsilon^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\text{y} \quad \Delta''_{\ell^p}(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Resultados que pueden encontrarse en [GS], [ADL] y [DL] respectivamente.

1.7. La propiedad (β) de Rolewicz.

DEFINICIÓN 1.7.1.

Sea X un espacio de Banach, se llama gota definida por un elemento $x \in X$ con $\|x\| > 1$ al conjunto

$$D(x, B_X) = \text{co}(\{x\} \cup B_X).$$

El resto R_x determinado por x es el conjunto

$$R_x = D(x, B_X) \setminus B_X.$$

El estudio de las propiedades de los conjuntos R_x es una parte importante de los Capítulos III y IV de esta memoria. La proposición siguiente nos da una primera información acerca de su estructura.

PROPOSICIÓN 1.7.2

Sea X un espacio de Banach, $x \in X$ con $\|x\| > 1$. Sea Y_x el subconjunto de S_X definido de la forma siguiente:

$$Y_x = \{y \in S_X : \|\lambda y + (1-\lambda)x\| > 1 \text{ si } 0 \leq \lambda < 1\}.$$

Entonces $R_x = \text{co}(Y_x \cup \{x\}) \setminus B_X$.

Demostración.

Puesto que $Y_x \subset B_X$ se tiene que $\text{co}(Y_x \cup \{x\}) \subset \text{co}(B_X) \cup \{x\}$ y, por lo tanto,

$$\text{co}(Y_x \cup \{x\}) \setminus B_X \subset \text{co}(B_X \cup \{x\}) \setminus B_X = R_x.$$

Recíprocamente, sea $z \in R_x$. Entonces existe $y \in B_X$ tal que $z = \mu y + (1-\mu)x$ para algún $\mu \in [0,1]$.

Consideremos la función continua $\phi(\lambda) = \|\lambda y + (1-\lambda)x\|$ definida en el intervalo $[0,1]$. Puesto que $\phi(1) \leq 1 < \phi(0)$, sabemos que el conjunto

$$L = \{\lambda \in [0,1]\, \phi(\lambda) \leq 1\}$$

es no vacío y $\phi(\lambda_0) = 1$ si λ_0 es el ínfimo de este conjunto.

Sea $y_0 = \lambda_0 y + (1-\lambda_0)x$. Tenemos que $y_0 \in Y_x$ porque si $\lambda \in [0,1)$ entonces

$$\|\lambda y_0 + (1-\lambda)x\| = \|\lambda\lambda_0 y + (1-\lambda\lambda_0)x\| = \phi(\lambda\lambda_0) > 1.$$

Puesto que

$$z = \frac{\mu}{\lambda_0} y_0 + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda_0}\right)x$$

con $\frac{\mu}{\lambda_0} \in [0,1)$, resulta que $z \in \mathrm{co}(Y_x \cup \{x\})$. □

Una primera consecuencia de esta proposición es el corolario siguiente.

COROLARIO 1.7.3. *Sea X un espacio de Banach, $x \in X$ con $\|x\| > 1$. Entonces para todo $z \in R_x$ el segmento $[z,x]$ está contenido en R_x. Es decir:*

$$\{\lambda z + (1-\lambda)x \,:\, 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset R_x.$$

Los conceptos de convexidad uniforme y de casi-convexidad uniforme pueden caracterizarse en términos de restos como se muestra en las proposiciones siguientes.

PROPOSICIÓN 1.7.4.[Ro1].

Un espacio de Banach X es uniformemente convexo si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $1 < \|x\| < 1 + \delta$ entonces $diam(R_x) < \varepsilon$.

PROPOSICIÓN 1.7.5.[Ku3].

Un espacio de Banach X es casi-uniformmente convexo si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $1 < \|x\| < 1 + \delta$ entonces

$$\sup\{\alpha(C) \,:\, C \subset R_x,\ C \text{convexo}\} < \varepsilon.$$

La propiedad (β) es una propiedad geométrica de los espacios de Banach dada por S. Rolewicz en [Ro2]. En la definición siguiente α es la medida de no compacidad de Kuratowski.

DEFINICIÓN 1.7.6.

Un espacio de Banach X tiene la propiedad (β) cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $1 < \|x\| < 1+\delta$ entonces $\alpha(R_x) < \varepsilon$.

La propiedad (β) puede caracterizarse también en términos de sucesiones $\{x_n\}$ contenidas en la bola unidad del espacio como muestra el resultado siguiente.

PROPOSICIÓN 1.7.7.[Ku3].

Un espacio de Banach X tiene la propiedad (β) cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $1 < \|x\| < 1+\delta$ entonces $\alpha(R_x) < \varepsilon$.

Como ya dijimos en la Introducción, el objeto fundamental de este trabajo es la definición y estudio de las propiedades de módulos de no compacidad adecuados para la propiedad (β) y su relación con los módulos de Clarkson y de convexidad no compacta. Este objetivo parece más razonable si consideramos que esta propiedad geométrica se sitúa entre la convexidad uniforme y la casi-convexidad uniforme. Esto es, si X es un espacio de Banach, entonces

$$X \text{es UC} \Rightarrow X \text{ tiene la propiedad } (\beta) \Rightarrow X \text{ es NUC.}$$

No son ciertas las implicaciones inversas como se observa en los ejemplos siguientes.

Si X es un espacio NUC, el espacio $X_1 = X \times \mathbb{R}$ con la norma $\|(x,t)\|_1 = \|x\| + |x|$ es NUC y no tiene la propiedad (β) [Ro2]. El espacio X definido de la forma siguiente $X = \mathbb{R}^2 \times \ell^2$ con la norma

$$\|(x,y)\| = \sqrt{\|x\|_\infty^2 + \|y\|_2^2}$$

tiene la propiedad (β) y no es UC.

Además existen espacios NUC que no pueden ser renormados para tener la propiedad (β), como puede verse en [Ku1], y espacios con la propiedad (β) que no pueden ser renormados para ser uniformemente convexos ([Ku2] y [MT].

CAPÍTULO II.

PRIMERA CLASE DE MÓDULOS DE (β)-NO COMPACIDAD

En este capítulo utilizamos la caracterización de la propiedad (β) de Kutzarova [Ku3, 1991] para definir unas funciones o módulos para esta propiedad que llamaremos módulos de (β)-no compacidad o también, brevemente, (β)-módulos. Recordamos ese resultado antes de resumir los contenidos de este capíutulo: *Un espacio de Banach X tiene la propiedad (β) si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe δ, $0 < \delta < 1$ tal que si $\{x_n\}$ es una sucesión contenida en B_X con $sep(\{x_n\}) > \varepsilon$ y $x \in B_X$, entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\left\| \frac{x + x_i}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

En la Sección **2.1** definimos los módulos: $R_X(\varepsilon)$ con sucesiones $\{x_n\}$ cuya medida α de no compacidad es igual o mayor que ε, $R'_X(\varepsilon)$ con sucesiones $\{x_n\}$ para las que $\chi(\{x_n\}) \geq \varepsilon$ y $R''_X(\varepsilon)$ con sucesiones para las que $\text{sep}(\{x_n\}) \geq \varepsilon$. Después damos algunas propiedades generales de los módulos. Se definen también los números que llamamos (β)-características del espacio.

En la Sección **2.2** se establecen ciertas relaciones de los (β)-módulos con el módulo de Clarkson y los módulos de convexidad no compacta. Estas relaciones nos permiten obtener en la Sección **2.3** un primer resultado para la propiedad del punto fijo para aplicaciones no expansivas del espacio X. Otro resultado de esta sección nos da también unas condiciones suficientes para que el espacio X^* tenga esta propiedad.

La sección **2.4** se dedica a la demostración de la continuidad del módulo R'_X en una amplia clase de espacios: aquellos en los que la medida χ es estrictamente minimalizante. El proceso de esta demostración está basado en el que se sigue en

[B1] para demostrar la continuidad del módulo de convexidad no compacta asociado a la medida χ. La continuidad de este módulo nos permite dar en **2.5** un resultado de estabilidad para la propiedad del punto fijo para aplicaciones no expansivas.

En la sección **2.6**, que es la más extensa de este capítulo, se calcula el valor de los módulos R''_X y R'_X en los espacios ℓ^p, $1 < p < +\infty$. En primer lugar se dan unos lemas previos que establecen algunas propiedades de las sucesiones débilmente convergentes de los espacios ℓ^p. Después, por reducciones sucesivas del conjunto de sucesiones de la bola unidad que debemos considerar, se calcula $R''_X(\varepsilon)$ utilizando únicamente sucesiones débilmente convergentes para las cuales existe $\lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\|$. El cálculo de R'_X se hace, por último, teniendo en cuenta la relación existente entre las medidas χ y β de un subconjunto acotado de ℓ^p.

La última sección del capítulo está dedicada al cálculo de los módulos en los espacios ℓ^1, c_0, c y ℓ^∞.

2.1. Definición de los módulos. Propiedades.

DEFINICIÓN 2.1.1.

Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Definimos los siguientes módulos de (β)-no compacidad:

$R_X : [0,2] \longrightarrow [0,1]$,
$$R_X(\varepsilon) = 1 - \sup\left\{\inf\left\{\tfrac{\|x+x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} : \{x_n\} \subset B_X,\, x \in B_X,\, \alpha(\{x_n\}) \geq \varepsilon\right\}.$$
$R'_X : [0,1] \longrightarrow [0,1]$,
$$R'_X(\varepsilon) = 1 - \sup\left\{\inf\left\{\tfrac{\|x+x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} : \{x_n\} \subset B_X,\, x \in B_X,\, \chi(\{x_n\}) \geq \varepsilon\right\}.$$
$R''_X : [0,c) \longrightarrow [0,1]$,
$$R''_X(\varepsilon) = 1 - \sup\left\{\inf\left\{\tfrac{\|x+x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} : \{x_n\} \subset B_X,\, x \in B_X,\, \mathrm{sep}(\{x_n\}) \geq \varepsilon\right\}.$$

Comprobemos que el dominio de la función R_X es efectivamente el intervalo [0,2]. Sea Y un subespacio de Banach infinito-dimensional y separable de X, que existe porque X contiene una sucesión básica [LT], y sea M un conjunto numerable denso en Y. Entonces $M \cap B_Y$ es denso en B_Y y $\alpha(M \cap B_Y) = 2$. Por lo tanto, existe una sucesión en $B_Y \subset B_X$ cuya α medida es igual a 2. Para comprobar que el dominio del módulo $R_X^{'}$ es el intervalo [0,1] basta tener en cuenta que si $\{x_n\}$ es una sucesión en B_X con $\alpha(\{x_n\}) = 2$ entonces $\chi(\{x_n\}) = 1$.

Veamos ahora que podemos decir del número c. El Teorema de Elton-Odell [Di] establece lo siguiente: *Si X es un espacio normado de dimensión infinita, entonces existe un número $\varepsilon > 0$ y una sucesión $\{x_n\} \subset S_X$ tal que $sep(\{x_n\}) \geq 1+\varepsilon$.* Por lo tanto $c > 1$. Por otra parte, como la medida β de no compacidad es minimalizante en todo espacio de Banach X, dado $\eta > 0$ existe un conjunto infinito $A \subset B_X$ tal que A es β-minimal y $\beta(A) \geq \beta(B_X) - \eta$. En consecuencia podemos encontrar en la bola unidad sucesiones $\{x_n\}$ cuya separación sea tan próxima a $\beta(B_X)$ como queramos y, por lo tanto, $c = \beta(B_X)$.

A continuación estudiaremos unas propiedades generales de los módulos para lo que necesitamos el lema siguiente:

<u>LEMA 2.1.2.</u>

Sea X un espacio de Banach, f un funcional no nulo, a un vector de X, δ un número real positivo y $B(a,\delta)$ la bola cerrada de centro a y radio δ. Consideremos los conjuntos siguientes:

$$A_1 = \{x \in B(a,\delta) : f(x) \geq f(a)\},$$

$$A_2 = \{x \in B(a,\delta) : f(x) \leq f(a)\},$$

$$B_1 = \{x \in B(a,\delta) : f(x) > f(a)\},$$

$$B_2 = \{x \in B(a,\delta) : f(x) < f(a)\}.$$

Entonces $\mu(A_1) = \mu(A_2) = \mu(B_1) = \mu(A_2) = \delta\mu(B_X)$, siendo μ cualquiera de las medidas de no compacidad α, χ, o β.

Demostración.

La aplicación $T : X \to X$, definida por $T(x) = 2a - x$, es una simetría de centro a tal que $T(A_1) = A_2$ y $T(A_2) = A_1$. Se deduce que $\mu(A_1) = \mu(A_2)$ y, por lo tanto,

$$\delta\mu(B_X) = \mu(B(a,\delta)) = \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_2).$$

La demostración se termina teniendo en cuenta que A_1 es la clausura de B_1 y A_2 es la clausura de B_2. $\square$

PROPOSICIÓN 2.1.3.

(a) *Las funciones* R_X, R'_X *y* R''_X *son crecientes.*

(b) $R_X(0) = R'_X(0) = R''_X(0) = 0.$

(c) Sean k *y* ε *números reales tales que* $k \in [0, \beta(B_X))$ *y* $\varepsilon \in [0,1]$. *Entonces:*

$$R_X(2\varepsilon) \leq \varepsilon\,, \quad R'_X(\varepsilon) \leq \varepsilon \quad y \quad R''_X(k\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

(d) Las funciones R_X, R'_X *y* R''_X *son continuas en* 0.

Demostración:

(a) Haremos la demostración para el módulo R_X. En los otros dos casos los razonamientos son análogos. Sea $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Si $\{x_n\} \subset B_X$ y $\alpha(\{x_n\}) \geq \varepsilon_2$. Entonces $\alpha(\{x_n\}) \geq \varepsilon_1$ y, por lo tanto,

$$\sup\left\{\inf\left\{\frac{\|x + x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} : (x_n) \subset B_X,\, x \in B_X,\, \alpha(\{x_n\}) \geq \varepsilon_2\right\} \leq$$

$$\sup\left\{\inf\left\{\frac{\|x + x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} : \{x_n\} \subset B_X,\, x \in B_X,\, \alpha(\{x_n\}) \geq \varepsilon_1\right\}.$$

Así $R_X(\varepsilon_1) \leq R_X(\varepsilon_2)$.

(b) Basta tomar un elemento x de norma 1 y la sucesión (x_n) dada por $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma resulta

$$\inf\left\{\frac{\|x + x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} = 1.$$

(c) Sea Y un subespacio infinito-dimensional y separable de X. Supongamos $\varepsilon > 0$ y sea $x \in B_Y$ tal que $\|x\| = 1-\varepsilon$. Sea $f \in Y^*$ de norma 1 tal que $f(x) = 1-\varepsilon$ y B la bola cerrada de centro x y radio ε en Y. Consideremos el conjunto A definido de la forma siguiente:

$$A = \{y \in B \, : f(y) \geq 1-\varepsilon\}.$$

Para todo $y \in A$ se tiene que $\|y\| \geq 1-\varepsilon$. El conjunto A es convexo: en efecto, sean y_1 e y_2 puntos cualesquiera de A, entonces $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in B$ y

$$f(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) = \lambda f(y_1) + (1-\lambda)f(y_2) \geq \lambda(1-\varepsilon) + (1-\lambda)(1-\varepsilon) = 1-\varepsilon.$$

Además A es cerrado. Por otra parte, por el lema anterior, se tiene que

$$\alpha(B) = 2\varepsilon = \alpha(A)$$

lo que nos permite encontrar una sucesión $\{x_n\}$ contenida en A con $\alpha(\{x_n\}) = 2\varepsilon$. En efecto sea $M \subset Y$ numerable y denso en Y, entonces $M \cap A$ es denso en A y, por lo tanto, existe $\{x_n\} \subset A$ con $\alpha(\{x_n\}) = 2\varepsilon$.

Ya que A es convexo se tiene que $\dfrac{x+x_n}{2} \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y así:

$$\inf\left\{\frac{\|x+x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} \geq 1-\varepsilon.$$

Por lo tanto, y puesto que $B_Y \subset B_X$,

$$\sup\left\{\inf\left\{\frac{\|x+x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} : \{x_n\} \subset B_X,\ x \in B_X,\ \alpha(\{x_n\}) \geq 2\varepsilon\right\} \geq 1-\varepsilon$$

y de esto se deduce que $R_X(2\varepsilon) \leq \varepsilon$.

De forma análoga se demuestra la desigualdad correspondiente al módulo R'_X.

Demostremos la última desigualdad. Supongamos $\varepsilon > 0$ y sea $x \in B_X$ tal que $\|x\| = 1-\varepsilon$. Consideremos un funcional $f \in X^*$ de norma 1 y tal que $f(x) = 1-\varepsilon$. Sea B la bola cerrada de centro x y radio $1-\varepsilon$ y A definido como antes pero en el espacio X. El conjunto A es convexo y $\beta(A) = \beta(B_X)\varepsilon$. Por lo tanto podemos encontrar en A una sucesión $\{x_n\}$ con sep $(\{x_n\}) \geq k\varepsilon$ y terminar la demostración como en el caso de la primera desigualdad.

(d) Es consecuencia del apartado anterior. □

A continuación definimos números asociados respectivamente a cada uno de los (β)-módulos de forma análoga a como se define la característica de convexidad $\delta_0(X)$.

DEFINICIÓN 2.1.4.

Sea X un espacio de Banach. Definimos los siguientes números reales que llamaremos (β)-características de X:

$R_0(X) = \sup\{\varepsilon \geq 0 : R_X(\varepsilon) = 0\}$.

$R_0'(X) = \sup\{\varepsilon \geq 0 : R_X'(\varepsilon) = 0\}$.

$R_0''(X) = \sup\{\varepsilon \geq 0 : R_X''(\varepsilon) = 0\}$.

Los módulos que hemos definido son adecuados para la propiedad (β) en el sentido de la Proposición siguiente.

PROPOSICIÓN 2.1.5.

Sea X un espacio de Banach. Entonces:

(a) X tiene la propiedad (β) si y solo si $R_0(X) = 0$.

(b) X tiene la propiedad (β) si y solo si $R_0'(X) = 0$.

(c) X tiene la propiedad (β) si y solo si $R_0''(X) = 0$.

Demostración.

El caso (c) resulta evidente. Veamos los otros dos.

(a) Tendremos en cuenta la equivalencia siguiente:

$$R_0(X) = 0 \iff \varepsilon > 0 \Rightarrow R_X(\varepsilon) > 0.$$

Supongamos $R_0(X) = 0$. Sea $\varepsilon \in (0, c)$ y $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de B_X con sep $(\{x_n\}) \geq \varepsilon$. Entonces $\alpha(\{x_n\}) \geq \varepsilon$.

Tomemos δ tal que $0 < \delta < R_X(\varepsilon)$. De la definición del módulo se deduce que dado cualquier $x \in B_X$ se tiene que

$$\inf\left\{\frac{\|x + x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} < 1 - \delta.$$

Por lo tanto existe $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\|x + x_i\|}{2} \geq 1 - \delta$$

y así X tiene la propiedad (β).

Recíprocamente, sea $\varepsilon \in (0,2)$ y $\{x_n\}$ una sucesión con $\alpha(\{x_n\}) \geq \varepsilon$. Podemos entonces encontrar una subsucesión $\{y_n\}$ de $\{x_n\}$ con $\operatorname{sep}(\{y_n\}) \geq \varepsilon'$, $0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea δ, $0 < \delta < 1$, el número que para ε' determina la caracterización de la propiedad (β) de Kutzarova . Se deduce de forma inmediata que $R_X(\varepsilon') \geq \delta > 0$ y, por lo tanto, $R_X(\varepsilon) > 0$.

(b) Razonemos análogamente: supongamos $R_0'(X) = 0$ y sea $\varepsilon \in (0, c)$ y $\{x_n\}$ una sucesión de B_X con $\operatorname{sep}(\{x_n\}) \geq \varepsilon$; entonces $\chi(\{x_n\}) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ y si δ es tal que $0 < \delta < R_X'(\frac{\varepsilon}{2})$, dado $x \in B_X$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\|x + x_i\|}{2} < 1 - \delta$$

y, por lo tanto, X tiene la propiedad (β).

Recíprocamente, sea $\varepsilon \in (0,1)$ y $\{x_n\} \subset B_X$ con $\chi(\{x_n\}) \geq \varepsilon$. Podemos encontrar una subsucesión $\{y_n\}$ de $\{x_n\}$ con $\operatorname{sep}(\{y_n\}) \geq \varepsilon'$, $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Razonando como en el caso anterior concluimos con que $R_X'(\varepsilon) > 0$. $\square$

2.2. Relaciones con el módulo de Clarkson y con los módulos de convexidad no compacta.

La Proposición siguiente nos permite relacionar los (β)-módulos entre sí y con los módulos de Clarkson y de convexidad no compacta.

PROPOSICIÓN 2.2.1.

(a) $R_X(\varepsilon) \leq R_X''(\varepsilon) \leq \Delta_X''(\varepsilon)$ para todo $\varepsilon \in [0, \beta(B_X))$.

(b) $R_X'(\frac{\varepsilon}{2}) \leq R_X(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0,2)$.

(c) $\delta_X(\varepsilon) \leq R_X'(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0,1)$.

(d) $\lim_{\varepsilon' \to \varepsilon^-} R_X(\varepsilon') \leq \Delta_X(2\varepsilon), \ \ \varepsilon \in (0,1)$.

(e) $\lim_{\varepsilon' \to \varepsilon^-} R'_X(\varepsilon') \leq \Delta'_X(2\varepsilon), \ \ \varepsilon \in (0,1/2)$.

Demostración.

(a) Supongamos $\varepsilon > 0$. Sea $A \subset B_X$ convexo con $\beta(A) > \varepsilon$, $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de A con $\mathrm{sep}(\{x_n\}) \geq \varepsilon$ y sea $y \in A$. Entonces

$$\inf\{\|x\| \, : \, x \in A\} \leq \inf\left\{\frac{\|y + x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Por lo tanto $R''_X(\varepsilon) \geq \Delta''_X(\varepsilon)$.

Sea ahora una sucesión $\{x_n\}$ en la bola unidad B_X con $\mathrm{sep}(\{x_n\}) \geq \varepsilon$. Se tiene entonces que $\alpha(\{x_n\}) \geq \varepsilon$ y de esto se deduce que $R_X(\varepsilon) \leq R''_X(\varepsilon)$.

(b) Basta tener en cuenta que si para una sucesión $\{x_n\}$ de la bola unidad B_X es $\alpha(\{x_n\}) \geq \varepsilon$, entonces $\chi(\{x_n\}) \geq \varepsilon/2$.

(c) Sea $\{x_n\} \subset B_X$ con $\chi(\{x_n\}) \geq \varepsilon$ y $x \in B_X$. Dado η, $0 < \eta < \varepsilon$, existe un término de la sucesión x_m tal que $\|x - x_m\| \geq \eta$. Así, como

$$\inf\left\{\frac{\|x + x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} \leq \frac{\|x + x_m\|}{2},$$

se tiene que

$$\sup\left\{\inf\left\{\frac{\|x + x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} : \{x_n\} \subset B_X, \ x \in B_X, \ \chi(\{x_n\}) \geq \varepsilon\right\} \leq$$
$$\sup\left\{\frac{\|x + y\|}{2} : x, \, y \in B_X, \ \|x - y\| \geq \eta\right\}.$$

Por lo tanto $R'_X(\varepsilon) \geq \delta_X(\eta)$ y, por la continuidad del módulo de Clarkson en $[0,2)$, resulta

$$\delta_X(\varepsilon) \leq R'_X(\varepsilon).$$

(d) Sea $A \subset B_X$ convexo con $\alpha(A) \geq 2\varepsilon$. Entonces $\chi(A) \geq \varepsilon$. Así, dado η, $0 < \eta < \varepsilon$, A contiene una sucesión $\{x_n\}$ con $\mathrm{sep}(\{x_n\}) > \eta$ y $\alpha(\{x_n\}) \geq \eta$. Sea y un elemento cualquiera de A. Entonces:

$$\inf\{\|x\| \, : \, x \in A\} \leq \inf\left\{\frac{\|y + x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

y, por lo tanto, $\Delta_X(2\varepsilon) \geq R_X(\eta)$ para todo $\eta < \varepsilon$. Se deduce el resultado teniendo en cuenta que la función R_X es monótona creciente.

(e) Sea A convexo contenido en B_X con $\chi(A) \geq 2\varepsilon$. Entonces si $\eta < \varepsilon$, A contiene una sucesión $\{x_n\}$ con $\text{sep}(\{x_n\}) > 2\eta$. De esto se deduce que $\chi(\{x_n\}) \geq \eta$. Sea $y \in A$, entonces:

$$\inf\{\|x\| \,:\, x \in A\} \leq \inf\left\{\frac{\|y + x_n\|}{2} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$$

y, por lo tanto, $\Delta'_X(2\varepsilon) \geq R'_X(\eta)$ para todo $\eta < \varepsilon$. $\square$

COROLARIO 2.2.2.

(a) $\Delta''_0(X) \leq R''_0(X) \leq R_0(X) \leq 2R'_0(X) \leq 2\delta_0(X)$.

(b) $\Delta_0(X) \leq 2R_0(X)$.

(c) $\Delta'_0(X) \leq 2R'_0(X)$.

Demostración.

(a) Por la Proposición 2.2.1 sabemos que para todo $\varepsilon \in [0, \beta(B_X))$ se tiene:

$$\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \leq R'_X\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \leq R_X(\varepsilon) \leq R''_X(\varepsilon) \leq \Delta''_X(\varepsilon).$$

Por lo tanto:

$$\{\varepsilon \geq 0 \,:\, \Delta''_X(\varepsilon) = 0\} \subset \{\varepsilon \geq 0 \,:\, R''_X(\varepsilon) = 0\} \subset \{\varepsilon \geq 0 \,:\, R_X(\varepsilon) = 0\}$$

$$\subset 2\{\varepsilon \geq 0 \,:\, R'_X(\varepsilon) = 0\} \subset 2\{\varepsilon \geq 0 \,:\, \delta_X(\varepsilon) = 0\}.$$

(b) Es consecuencia del apartado (d) de la proposición anterior razonando como en el caso (a).

(c) Es consecuencia del apartado (e) de la proposición anterior. $\square$

2.3. Estructura normal y (β)-características.

Las desigualdades del apartados (a) del Corolario 2.2.2 y el resultado del Teorema 1.6.5 nos permiten enunciar el Teorema siguiente:

TEOREMA 2.3.1.

Sea X un espacio de Banach. Si cualquiera de los coeficientes $R_0(X)$, $R_0''(X)$ es menor que 1 o $R_0'(X)$ es menor que $1/2$, entonces X es reflexivo y tiene estructura normal.

Nota: Existen espacios reflexivos X con estructura normal en los que $R_0''(X) \geq 1$ y, por lo tanto, también $R_0(X) \geq 1$ y $R_0'(X) \geq 1/2$. En [ADL], en el Ejemplo **3** del Capítulo III, se considera el espacio ℓ^2 renormado de la forma siguiente: sea $x \in \ell^2$, $x = (x^1, x^2, x^3, \ldots.)$, entonces definimos

$$\|x\| = \max\left\{ |x^1|, \left(\sum_{k=2}^{\infty}(x^k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Esta norma es equivalente a la norma de ℓ^2. Así,si ponemos $X = (\ell^2, \|.\|)$ los espacios X y ℓ^2 son isomorfos y X es reflexivo. Además se demuestra en el citado ejemplo que X tiene estructura normal y que $\Delta_0''(X) \geq 1$. De esta desigualdad se deduce, teniendo en cuenta el Corolario 2.2.2, que $R_0''(X) \geq 1$.

Vamos ahora a obtener el segundo resultado de esta sección.

En [KMP] se define la propiedad (β, γ) de la forma siguiente: *Un espacio de Banach X tiene la propiedad (β, γ) para algún número $\gamma > 0$ si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in B_X$ y toda sucesión $\{x_n\} \subset B_X$ con sep$(\{x_n\}) > \gamma$ existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\frac{\|x + x_i\|}{2} < 1 - \delta.$$

Y se demuestra (Teorema 2) el siguiente resultado: *Si un espacio de Banach X tiene la propiedad (β, γ) para algún γ, $0 < \gamma < 1$, entonces el espacio dual X^* es reflexivo y tiene estructura normal.*

Siguiendo [KMP] y teniendo en cuenta la definición de los módulos para la propiedad (β) proponemos la siguiente modificación de la propiedad (β, γ):

DEFINICIÓN 2.3.2.

Un espacio de Banach X tiene la propiedad $(\beta,\gamma)'$ para algún $\gamma > 0$ si para todo $\gamma' > \gamma$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in B_X$ y toda sucesión $\{x_n\} \subset B_X$ con $sep(\{x_n\}) > \gamma'$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\|x + x_i\|}{2} < 1 - \delta.$$

Resulta evidente que si X tiene la propiedad $(\beta,\gamma)'$ para algún $\gamma > 0$ entonces X tiene la propiedad (β,γ') para todo $\gamma' > \gamma$.

PROPOSICIÓN 2.3.3.

Sea X un espacio de Banach. Entonces X tiene la propiedad $(\beta,\gamma)'$ para algún $\gamma > 0$ si y solo si $R_0''(X) \leq \gamma$.

Demostración.

Supongamos en primer lugar que X tiene la propiedad $(\beta,\gamma)'$. Entonces dado $\gamma' > \gamma$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in B_X$ y toda sucesión $\{x_n\} \subset B_X$ con sep $(\{x_n\}) \geq \gamma'$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\|x + x_i\|}{2} < 1 - \delta.$$

Por lo tanto:

$$\sup\left\{\inf\left\{\frac{\|x + x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} : \{x_n\} \subset B_X,\, x \in B_X,\, \text{sep}(\{x_n\}) \geq \gamma'\right\} \leq 1 - \delta.$$

De esto se deduce que $R_X''(\gamma') \geq \delta$ y en consecuencia $R_0''(X) \leq \gamma$.

Recíprocamente supongamos que $R_0''(X) \leq \gamma$ y sea $\gamma' > \gamma$. Entonces $R_X''(\gamma') > 0$ y existe $\delta > 0$ tal que $R_X''(\gamma) > \delta > 0$. Por lo tanto:

$$\sup\left\{\inf\left\{\frac{\|x + x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} : \{x_n\} \subset B_X,\, x \in B_X,\, \text{sep}(\{x_n\}) \geq \gamma'\right\} < 1 - \delta.$$

Entonces para todo $x \in B_X$ y toda sucesión $\{x_n\} \subset B_X$ con $\text{sep}(x_n) > \gamma'$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\|x + x_n\|}{2} < 1 - \delta$$

y X tiene la propiedad $(\beta, \gamma)'$. $\square$

Como consecuencia de esta Proposición y del Teorema 2 de [KMP] citado anteriormente tenemos el siguiente resultado:

COROLARIO 2.3.4.

Si cualquiera de los coeficientes $R_0(X)$ o $R_0''(X)$ es menor que 1 o el coeficiente $R_0'(X)$ es menor que 1/2 el espacio X^* es reflexivo y tiene estructura normal.

Parece conveniente recordar aquí, en primer lugar, que con los módulos de convexidad no compacta no se obtienen resultados análogos sobre el espacio dual. En segundo lugar, que la estructura normal de un espacio X no se conserva al pasar al espacio dual como se ve en el siguiente ejemplo de Bynum [By]:

EJEMPLO 2.3.5.

Sea $x = (x^n)$ un vector en ℓ^p, $1 < p < \infty$. Sean x^+ y x^-los vectores de ℓ^p cuyas componentes son

$$(x^+)^i = \max(x^i, 0) = \frac{|x^i| + x^i}{2}$$

$$(x^-)^i = \max(-x^i, 0) = \frac{|x^i| - x^i}{2}$$

Para cada $x \in \ell^p$ definimos

$$\|x\|_{p,1} = \|x^+\|_p + \|x^-\|_p$$

$$\|x\|_{p,\infty} = \max\{\|x^+\|_p, \|x^-\|_p\}.$$

Es fácil comprobar que estas normas son equivalentes a la norma usual en ℓ^p. Los espacios correspondientes se designan, respectivamente, por $\ell^{p,1}$ y $\ell^{p,\infty}$ y, si p y q son conjugados, es decir si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, el espacio $\ell^{q,\infty}$ es el dual de $\ell^{p,1}$. Pues bien, en el citado trabajo de Bynum se demuestra que el espacio $\ell^{p,1}$ tiene estructura normal, pero su espacio dual $\ell^{p,\infty}$ no la tiene. Además $\ell^{p,1}$ es NUC [ADL].

2.4 Continuidad del módulo R'_X.

En esta sección demostramos que el módulo R'_X es continuo en el intervalo $(0,1)$ en aquellos espacios de Banach en los que la medida χ es estrictamente minimalizante.

TEOREMA 2.4.1.

Sea X un espacio de Banach en el que la medida χ es estrictamente minimalizante. Entonces la función R'_X es continua en el intervalo $[0,1)$.

Demostración.

Recordemos en primer lugar que la función R'_X es continua en 0 y creciente en el intervalo $[0,1]$.

Fijemos $\varepsilon_1 \in (0,1)$ y tomemos un número arbitrario $\varepsilon_2 \in (\varepsilon_1, 1)$. Dado $\eta > 0$ arbitrariamente pequeño podemos elegir una sucesión $\{x_n\}$ en la bola unidad B_X con $\chi(\{x_n\}) \geq \varepsilon_1$ y un punto $x \in B_X$ de modo que

$$1 - \inf\left\{\frac{\|x + x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} \leq R'_X(\varepsilon_1) + \eta.$$

Tomemos ahora

$$k = \frac{1-\varepsilon_2}{1-\varepsilon_1} \in (0,1), \quad Y = \{kx_n : n \in \mathbb{N}\}$$

y $X_2 = B(Y, 1-k)$ definido como en la Sección **1.3**. Se cumple entonces lo siguiente:

(a) $\chi(X_2) = \chi(Y) + (1-k) \geq k\varepsilon_1 + (1-k) + \varepsilon_2$ por la propiedad (4) dada en la sección **1.3**.

(b) $X_2 \subset B_X$. En efecto, dado un elemento cualquiera z de X_2 existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|z - kx_n\| \leq 1-k$$

y, por lo tanto,

$$\|z\| \leq k\|x_n\| + 1 - k \leq 1.$$

Por otra parte, puesto que la medida χ es estrictamente minimalizante, podemos encontrar una sucesión $\{y_n\}$ contenida en X_2 que sea χ-minimal y tal que $\chi(\{y_n\}) = \chi(X_2) \geq \varepsilon_2$.

Podemos suponer además, tomando una subsucesión y reordenando si es necesario, que

$$y_n \in B(kx_n, 1-k)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, porque de lo contrario la sucesión $\{y_n\}$ estaría contenida en un número finito de bolas de centro kx_n y radio $1-k$ y esto implicaría que

$$\chi(\{y_n\}) \leq 1-k = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} < \varepsilon_2,$$

en contradicción con la hipótesis.

Tenemos entonces para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{\|y_n + kx\|}{2} &= \frac{\|y_n - kx_n + kx_n + kx\|}{2} \\ &\geq k\frac{\|x_n + x\|}{2} - \frac{\|y_n - kx_n\|}{2} \geq k\frac{\|x_n + x\|}{2} - \frac{1-k}{2}. \end{aligned}$$

Resulta entonces:

$$\begin{aligned} &1 - \inf\left\{\frac{\|y_n + kx\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} \leq 1 - k\inf\left\{\frac{\|x_n + x\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} + \frac{1-k}{2} \\ &= k\left(1 - \inf\left\{\frac{\|x_n + x\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\}\right) + 1 - k + \frac{1-k}{2} \\ &\leq k(R'_X(\varepsilon_1) + \eta) + \frac{3}{2}(1-k). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$R'_X(\varepsilon_2) \leq k(R'_X(\varepsilon_1) + \eta) + \frac{3}{2}(1-k).$$

Finalmente, teniendo en cuenta que η ha sido elegido arbitrariamente, resulta

$$R'_X(\varepsilon_2) \leq kR'_X(\varepsilon_1) + \frac{3}{2}(1-k),$$

de donde se deduce

$$R'_X(\varepsilon_2) - R'_X(\varepsilon_1) \leq R'_X(\varepsilon_2) - kR'_X(\varepsilon_1) \leq \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}$$

lo que completa la demostración. □

2.5. Un resultado sobre estabilidad.

La continuidad del módulo R'_X en los espacios de Banach en los que la medida χ es estrictamente minimalizante nos permite establecer algunos resultados sobre estabilidad semejantes a los obtenidos para el módulo de Clarkson en [GR] y para el módulo de convexidad no compacta Δ'_X en [B1].

Sea X un espacio de Banach en el que la característica $R'_0(X)$ es menor que 1/2. Entonces este espacio es reflexivo y, por lo tanto, el módulo R'_X es continuo. Consideremos la ecuación:

$$R'_X\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 - \varepsilon.$$

Puesto que la función R'_X es continua y creciente en $[0,1)$ y $R'_0(X) < 1/2$, esta ecuación tiene una única solución ε_0 que está en el intervalo $(0,1)$. Sea $e_0 = 1/\varepsilon_0 > 1$. Se tiene entonces el teorema siguiente que es un resultado de estabilidad para la propiedad del punto fijo:

TEOREMA 2.5.1.

Sea X un espacio de Banach con norma $\|.\|$. Sea $\|.\|_1$ una norma definida en X equivalente a $\|.\|$. Esto es, existen números positivos m y M tales que, para todo $x \in X$, se verifica que

$$m\|x\| \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|.$$

Sean R'_X y R'_{X_1} los (β)-módulos y $R'_0(X)$ y $R'_{0_1}(X)$ las (β)-características correspondientes, respectivamente, a los espacios $(X, \|.\|)$ y $(X, \|.\|_1)$. Entonces si $R'_0(X) < 1/2$ y $M/m < e_0$ se tiene que $R'_{0_1}(X) < 1/2$.

Demostración.

Representaremos por $\chi_1(A)$ la medida de no compacidad de Hausdorff de un conjunto acotado A del espacio $(X, \|.\|_1)$ y por B_{X_1} la bola unidad cerrada en este espacio. Es inmediato comprobar que para todo conjunto acotado A de X se tiene la siguiente relación:

$$m\chi(A) \leq \chi_1(A) \leq M\chi(A)$$

y, en particular, para cada sucesión $\{x_n\}$ acotada:

$$m\chi(\{x_n\}) \leq \chi_1(\{x_n\}) \leq M\chi(\{x_n\}).$$

El espacio $(X, \|\,.\|_1)$ es también reflexivo y, por lo tanto, la medida χ_1 es estrictamente minimalizante y el módulo R'_{X_1} es continuo, como R'_X, en el intervalo $[0,1)$.

Sea $\varepsilon \in (0,1)$. Dado $\eta > 0$ existe un elemento x y una sucesión $\{x_n\}$ en la bola unidad B_{X_1} tales que

$$1 - R'_{X_1}(\varepsilon) - \eta < \inf\left\{\frac{\|x + x_n\|_1}{2} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

El vector mx y la sucesión $\{mx_n\}$ están en la bola unidad B_X y como

$$\chi(\{mx_n\}) = m\chi(\{x_n\}) \geq \frac{m}{M}\chi_1(\{x_n\}) \geq \frac{m}{M}\varepsilon$$

tenemos entonces

$$\begin{aligned}\inf\left\{\frac{\|x + x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} &= \frac{1}{m}\inf\left\{\frac{\|mx + mx_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\}\\ &\leq \frac{1}{m}\left(1 - R'_X\left(\frac{m\varepsilon}{M}\right)\right).\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\frac{1}{M}\inf\left\{\frac{\|x + x_n\|_1}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} \leq \inf\left\{\frac{\|x + x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

y, por lo tanto,

$$1 - R'_{X_1}(\varepsilon) - \eta < \frac{M}{m}\left(1 - R'_X\left(\frac{m\varepsilon}{M}\right)\right).$$

Y, como η ha sido elegido arbitrariamente, resulta poniendo $\frac{M}{m} = k \geq 1$:

$$R'_{X_1}(\varepsilon) \geq 1 - k\left(1 - R'_X\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)\right)$$

para todo $\varepsilon \in (0,1)$. Tomando ahora $\varepsilon = 1/2$ se tiene

$$R'_{X_1}\left(\frac{1}{2}\right) \geq 1 - k\left(1 - R'_X\left(\frac{1}{2k}\right)\right).$$

Por otra parte como $\varepsilon_0 = \frac{1}{e_0} < \frac{1}{k}$ será

$$R'_X\left(\frac{1}{2k}\right) > 1 - \frac{1}{k},$$

de donde se sigue que

$$1 - k\left(1 - R'_X\left(\frac{1}{2k}\right)\right) > 0.$$

Por lo tanto

$$R'_{X_1}\left(\frac{1}{2}\right) \geq 1 - k\left(1 - R'_X\left(\frac{1}{2k}\right)\right) > 0$$

de donde se deduce que $R'_{0_1}(X) < 1/2$ como queríamos demostrar. □

COROLARIO 2.5.2.

Sea X un espacio de Banach con $R'_0(X) < 1/2$ y sea ε_0, $0 < \varepsilon_0 < 1$, la solución única de la ecuación

$$R'_X\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 - \varepsilon.$$

Sea Y un espacio de Banach isomorfo a X y $d(X,Y)$ la distancia de Banach- Mazur entre X e Y. Si $d(X,Y) < e_0 = 1/\varepsilon_0$ la (β)-característica de Y, $R'_0(Y)$, es también menor que $1/2$.

Demostración.

La distancia de Banach-Mazur entre X e Y se define, como sabemos, de la forma siguiente:

$$d(X,Y) = \inf\{\|T\|\|T^{-1}\| \; : T \in \text{isom}(X,Y)\}.$$

Supongamos $d(X,Y) = d < e_0$ y sea $T : X \longrightarrow Y$ un isomorfismo tal que

$$\|T\|\|T^{-1}\| < e_0.$$

Puesto que para todo $x \in X$ se tiene

$$\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$$

y

$$\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \leq \|T^{-1}\| \, \|Tx\|,$$

podemos escribir

$$\frac{1}{\|T^{-1}\|}\|x\| \leq \|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\|.$$

Consideremos el espacio X con la norma $\|x\|_1 = \|Tx\|$ para todo $x \in X$. Entonces:

$$\frac{1}{\|T^{-1}\|}\|x\| \leq \|x\|_1 \leq \|T\| \, \|x\|.$$

Así, del teorema anterior se deduce que $R'_{0_1}(X) < 1/2$. Para terminar la demostración del corolario basta con tener en cuenta que la aplicación $T : X \longrightarrow Y$ es una isometría entre los espacios X, con la norma $\| . \|_1$, e Y. $\square$

2.6. Cálculo de los módulos en los espacios ℓ^p, $1 < p < +\infty$.

En esta sección calculamos el valor de los módulos R''_X y R'_X en los espacios ℓ^p cuando $1 < p < +\infty$.

Comenzamos dando algunos lemas que establecen propiedades de las sucesiones débilmente convergentes de los espacios ℓ^p que utilizaremos más adelante.

LEMA 2.6.1.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de vectores de ℓ^p débilmente convergente a 0. Dado $y \in \ell^p$, para cada $\eta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que

$$\|x_n\|^p + \|y\|^p - \eta \leq \|x_n + y\|^p \leq \|x_n\|^p + \|y\|^p + \eta.$$

Demostración.

Sea $y = \sum_{i=1}^{\infty} y^i e_i$ y $x_n = \sum_{i=1}^{\infty} x_n^i e_i$. Dado $\delta > 0$, sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i>k} |y^i|^p < \delta^p$.

Pongamos $u = \sum_{i \leq k} y^i e_i$ y $v = \sum_{i>k} y^i e_i$. Entonces $y = u + v$ y $\|v\| < \delta$.

Tomemos n_0 de tal manera que para todo $n > n_0$ sea $\sum_{i \leq k} |x_n^i|^p < \delta^p$. Esto es posible hacerlo puesto que para cada i la sucesión de números reales $\{x_n^i\}$ converge a 0.

Sea $u_n = \sum_{i\leq k} x_n^i e_i$ y $v_n = \sum_{i>k} x_n^i e_i$. Entonces $x_n = u_n + v_n$ y $\|u_n\| < \delta$.
De la continuidad de la función $t \to t^p$ se deduce que

$$\left| |s+t|^p - |s|^p \right| < o(1)$$

si $|t| < \delta$, donde $o(1) \to 0$ cuando $\delta \to 0$. Tenemos entonces para todo $n > n_0$:

$$\begin{aligned}
\|y + x_n\|^p &= \|u + v + u_n + v_n\|^p \leq (\|u + v_n\| + \|v + u_n\|)^p \\
&\leq \|u + v_n\|^p + o(1) = \|u\|^p + \|v_n\|^p + o(1) \\
&= \|y - v\|^p + \|x - u_n\|^p + o(1) \\
&\leq (\|y\| + \|v\|)^p + (\|x_n\| + \|u_n\|)^p + o(1) \\
&\leq \|y\|^p + o(1) + \|x_n\|^p + o(1) + o(1) \\
&= \|y\|^p + \|x_n\|^p + o(1).
\end{aligned}$$

Análogamente tenemos también para todo $n > n_0$:

$$\begin{aligned}
\|y + x_n\|^p &= (\|u + v + u_n + v_n\|)^p \geq \left| \|u + v_n\| - \|u_n + v\| \right|^p \\
&> \|u + v_n\|^p - o(1) = \|u\|^p + \|v_n\|^p - o(1) \\
&= \|y - v\|^p + \|x_n - u_n\|^p - o(1) \\
&\geq \left| \|y\| - \|v\| \right|^p + \left| \|x_n\| - \|u_n\| \right|^p - o(1) \\
&\geq \|y\|^p - o(1) + \|x_n\|^p - o(1) - o(1) \\
&= \|y\|^p + \|x_n\|^p - o(1).
\end{aligned}$$

Basta entonces tomar δ de modo que sea $o(1) \leq \eta$. □

En la demostración del Lema siguiente utilizaremos el siguiente resultado de S. Reich [Re]: *Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en un espacio de Banach X separable. Entonces existe una subsucesión $\{y_n\}$ de $\{x_n\}$ tal que existe $\lim_{n\to\infty} \|y_n - z\|$ para todo $z \in X$.*

LEMA 2.6.2.

Sea $\{x_n\} \subset \ell^p$, débilmente convergente a ω, con sep$(\{x_n\}) \geq \varepsilon$. Entonces existe una subsucesión, que seguiremos designando por $\{x_n\}$, que satisface la desigualdad:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - \omega\| \geq \frac{\varepsilon}{2^{\frac{1}{p}}}.$$

Demostración.

Ya que ℓ^p es separable podemos elegir una subsucesión de $\{x_n\}$, que denotamos de la misma forma, tal que sea α y χ-minimal con la misma χ-medida y exista $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z\|$ para todo $z \in \ell^p$. En particular, en estas condiciones, se tiene por la Proposición 1.4.8 que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - \omega\| = \chi(\{x_n\}).$$

Además por la Proposición 1.4.9 resulta

$$\chi(\{x_n\}) = 2^{-\frac{1}{p}}\alpha(\{x_n\}).$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - \omega\| = \chi(\{x_n\}) = \frac{\alpha(\{x_n\})}{2^{\frac{1}{p}}} \geq \frac{\varepsilon}{2^{\frac{1}{p}}}.$$

□

LEMA 2.6.3.

Sea $\{x_n\} \subset \ell^p$, $x_n \rightharpoonup \omega$ y tal que existe $\lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\| = r$. Entonces existe una subsucesión que seguimos representando con la misma notación $\{x_n\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - \omega\| = \frac{r}{2^{\frac{1}{p}}}.$$

Demostración.

Sea $\{x_n\}$ una subsucesión elegida como en el lema anterior. Veamos que

$$\alpha(\{x_n\}) = \lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\|.$$

En efecto, por el Lema 1.4.3 para todo $\varepsilon > 0$ existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que

$$\alpha(\{x_n\}) - \varepsilon < \|x_{n_j} - x_{n_k}\| < \alpha(\{x_n\}) + \varepsilon, \quad j \neq k.$$

Por lo tanto para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\alpha(\{x_n\}) - \varepsilon \leq r \leq \alpha(\{x_n\}) + \varepsilon$$

y así $\alpha(\{x_n\}) = r$. Como consecuencia resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - \omega\| = 2^{-\frac{1}{p}} \lim_{n,m\to\infty n\neq m} \|x_n - x_m\|$$

de donde se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - \omega\| = \frac{r}{2^{\frac{1}{p}}}$$

como queríamos demostrar. □

LEMA 2.6.4.

Sea $\{x_n\} \subset \ell^p$, $x_n \rightharpoonup \omega$, *con* $\lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\| = r$ *y* $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$. *Entonces*

$$\|\omega\|^p = 1 - \frac{r^p}{2}.$$

Demostración.

Dado $\eta > 0$ existe una subsucesión $\{x_n\}$ tal que por el Lema 2.6.1 aplicado a $x_n - \omega$ y ω se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\|x_n - \omega\|^p + \|\omega\|^p - \eta \leq \|x_n\|^p \leq \|x_n - \omega\|^p + \|\omega\|^p + \eta$$

y como por el Lema 2.6.3 existe una subsucesión $\{x_n\}$ para la que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - \omega\| = \frac{r}{2^{\frac{1}{p}}},$$

dado $\eta > 0$ se tiene para una subsucesión:

$$\frac{r^p}{2} - \eta \leq \|x_n - \omega\|^p \leq \frac{r^p}{2} + \eta.$$

Por lo tanto, para todo n natural resulta:

$$\frac{r^p}{2} + \|\omega\|^p - 2\eta \leq \|x_n\|^p \leq \frac{r^p}{2} + \|\omega\|^p + 2\eta$$

de donde se deduce:

$$\|x_n\|^p - \frac{r^p}{2} - 2\eta \leq \|\omega\|^p \leq \|x_n\|^p - \frac{r^p}{2} + 2\eta$$

y, como $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$ resulta $\|\omega\|^p = 1 - \dfrac{r^p}{2}$. $\square$

COROLARIO 2.6.5.

Sea $\{x_n\} \subset \ell^p$, $x_n \rightharpoonup \omega$, *con* $\lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\| = r$ *y tal que* $\|x_n\| \leq 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$\|\omega\|^p \leq 1 - \frac{r^p}{2}.$$

Después de estos Lemas estamos en condiciones de proceder al cálculo del módulo $R''_{\ell^p}(\varepsilon)$ cuando $0 < \varepsilon < 2^{\frac{1}{p}}$.

En primer lugar, y puesto que el proceso de la demostración es algo complicado, vamos a describir detalladamente el camino a seguir.

Ya que la máxima separación de una sucesión en la bola unidad en los espacios ℓ^p es $2^{\frac{1}{p}}$, consideraremos la función R''_{ℓ^p} definida en el intervalo $[0, 2^{\frac{1}{p}})$. Así:

$R''_{\ell^p} : [0, 2^{\frac{1}{p}}) \longrightarrow [0,1]$,
$R''_{\ell^p}(\varepsilon) = 1 - \sup\left\{\inf\left\{\frac{\|x+x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} : \{x_n\} \subset B_{\ell^p}, x \in B_{\ell^p}, \operatorname{sep}(\{x_n\}) \geq \varepsilon\right\}.$

A lo largo de la demostración tendremos en cuenta que dada una sucesión $\{x_n\}$ en B_{ℓ^p} con $\operatorname{sep}(\{x_n\}) \geq \varepsilon$ y un elemento $x \in B_{\ell^p}$, si $\{y_n\}$ es una subsucesión de $\{x_n\}$, entonces $\operatorname{sep}(\{y_n\}) \geq \varepsilon$ y además:

$$\inf\left\{\frac{\|x+y_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} \geq \inf\left\{\frac{\|x+x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Por lo tanto, en el cálculo del supremo de todos los ínfimos puede prescindirse de la sucesión $\{x_n\}$ si se incluye, naturalmente, la subsucesión $\{y_n\}$.

Este recurso de considerar una subsucesión de una dada se utiliza reiteradamente a lo largo de la demostración y en todos los casos, para simplificar la misma, se mantiene la misma notación para la subsucesión considerada y la sucesión original.

La primera consecuencia que se deduce de esta observación, puesto que los espacios ℓ^p son reflexivos y toda sucesión en la bola unidad tiene una subsucesión débilmente convergente a un punto de la bola unidad, es que el valor del módulo puede calcularse considerando únicamente estas sucesiones:

$$R''_{\ell^p}(\varepsilon) = 1 - \sup\left\{\inf\left\{\frac{\|x + x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} : \{x_n\} \subset B_{\ell^p}, x \in B_{\ell^p},\right.$$
$$\left. x_n \rightharpoonup \omega, \operatorname{sep}(\{x_n\}) \geq \varepsilon\right\}.$$

Vamos a designar por α el supremo que figura en la igualdad anterior, es decir $R''_{\ell^p}(\varepsilon) = 1 - \alpha$.

Observemos ahora que como toda sucesión $\{x_n\} \subset B_{\ell^p}$ con $\operatorname{sep}(\{x_n\}) \geq \varepsilon$ tiene una subsucesión $\{x_n\}$ tal que existe $\lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\| \geq \varepsilon$ (la existencia de este límite es una sencilla consecuencia del Teorema 1.4.2 y del Lema 1.4.3 [ADL]) y $\operatorname{sep}(\{x_n\}) \geq \varepsilon$ podemos escribir

$$\alpha = \sup\left\{\inf\left\{\frac{\|x + x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} : \{x_n\} \subset B_{\ell^p}, x \in B_{\ell^p},\right.$$
$$\left. x_n \rightharpoonup \omega, \operatorname{sep}(\{x_n\}) \geq \varepsilon, \lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\| \geq \varepsilon\right\}.$$

□

Para calcular α haremos sucesivas reducciones en el conjunto de sucesiones de la bola unidad a considerar. En la siguiente proposición damos una cota inferior para α que, finalmente, resultará ser su valor exacto.

PROPOSICIÓN 2.6.6.

Sea

$$s = \frac{1}{2}\left\{\frac{\varepsilon^p}{2} + \left(\left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} + 1\right)^{\frac{1}{p}}\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Entonces $s \leq \alpha$.

Demostración.

Sea $\{e_n\}$ la base natural de Schauder del espacio ℓ^p. Consideremos la sucesión

$$x_n = \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} e_1 + \frac{\varepsilon}{2^{\frac{1}{p}}} e_{n+1}.$$

Esta sucesión esta contenida en la bola unidad ya que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Converge débilmente a $\omega = \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} e_1$. Además $\|x_n - x_m\| = \varepsilon$ si $n \neq m$ y

$$\frac{1}{2}\left\|x_n + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\| = \frac{1}{2}\left\{\frac{\varepsilon^p}{2} + \left(\left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} + 1\right)^{\frac{1}{p}}\right\}^{\frac{1}{p}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\alpha \geq s$. □

Vamos a continuación a detallar el proceso de la demostración de la desigualdad contraria $s \geq \alpha$. Consideraremos los números $\bar{\alpha}$ y α' definidos de la forma siguiente:

$$\bar{\alpha} = \sup\left\{\inf\left\{\frac{\|x + x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} : \{x_n\} \subset B_{\ell^p}, x \in B_{\ell^p},\right.$$

$$\left. x_n \rightharpoonup \omega \neq 0, \operatorname{sep}(\{x_n\}) \geq \varepsilon, \lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\| \geq \varepsilon\right\}.$$

$$\alpha' = \sup\left\{\inf\left\{\frac{\|x + x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} : \{x_n\} \subset B_{\ell^p}, x \in B_{\ell^p},\right.$$

$$\left. x_n \rightharpoonup \omega \neq 0, \lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\| \geq \varepsilon\right\}.$$

Demostraremos que $\alpha' \leq s$ (Teorema 2.6.10). Como, evidentemente, es $\bar{\alpha} \leq \alpha'$, se tiene que $\bar{\alpha} \leq s$. Finalmente demostraremos que $\alpha = \bar{\alpha}$ (Teorema 2.6.15). Resulta así que $s \leq \alpha = \bar{\alpha} \leq s$ y, por lo tanto, $R''_{\ell^p}(\varepsilon) = 1 - s$.

En la Proposición siguiente demostramos que para el cálculo de α' podemos limitarnos a considerar únicamente sucesiones $\{y_n\}$ que convergen a 1 en norma y a tomar como x el límite débil de cada una de estas sucesiones normalizada.

<u>PROPOSICIÓN 2.6.7.</u>

Sea $\{x_n\} \subset B_{\ell^p}$, $x_n \rightharpoonup \omega \neq 0$ *y tal que existe* $\lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\| \geq \varepsilon$. *Sea* $x \in B_{\ell^p}$. *Entonces existe una subsucesión* $\{x_n\}$ *de la sucesión dada y una sucesión* $\{y_n\} \subset B_{\ell^p}$ *con las siguientes propiedades:*

(1) $y_n \rightharpoonup \omega$.

(2) $\lim_{n\to\infty} \|y_n\| = 1.$

(3) $\lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|y_n - y_m\| \geq \varepsilon.$

(4) $\inf\{\|x + x_n\| : n \in \mathbb{N}\} \leq \inf\left\{\left\|y_n + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\| : n \in \mathbb{N}\right\}.$

Demostración.

Consideraremos dos casos:

(a) Existe una subsucesión $\{x_n\}$ de la sucesión dada tal que $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1.$

(b) No existe una subsucesión con esa propiedad.

(a) En este caso pongamos

$$\|x + x_n\|^p = \|x - \omega + \omega + x_n\|^p.$$

Dado $\eta > 0$, puesto que $\{x_n - \omega\}$ converge débilmente a 0, por el Lema 2.6.1 existe una subsucesión $\{x_n\}$ tal que para esta se tiene:

$$\|x + x_n\|^p \leq \|x_n - \omega\|^p + \|\omega + x\|^p + \eta.$$

Por otra parte tenemos:

$$\|\omega + x\| \leq \|\omega\| + \|x\| \leq 1 + \|\omega\|,$$

$$\left\|\omega + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\| = \left\|\omega\left(1 + \frac{1}{\|\omega\|}\right)\right\| = 1 + \|\omega\|$$

y así resulta

$$\|\omega + x\| \leq \left\|\omega + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|.$$

Distingamos ahora dos subcasos (a1) y (a2).

(a1) Supongamos que

$$\|\omega + x\| = \left\|\omega + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\| = 1 + \|\omega\|,$$

entonces:

$$1 + \|\omega\| = \|\omega + x\| \leq \|\omega\| + \|x\| \leq \|\omega\| + 1.$$

Por lo tanto

$$\|x\| = 1 \text{ y } \|\omega + x\| = \|\omega\| + \|x\|.$$

De esta última igualdad se deduce, por ser el espacio estrictamente convexo, que existe $t > 0$ tal que $x = t\omega$, de donde resulta que $t = \frac{1}{\|\omega\|}$ y $x = \frac{\omega}{\|\omega\|}$. En consecuencia, poniendo $y_n = x_n$, nos queda:

$$\inf\{\|x_n + x\| : n \in \mathbb{N}\} = \inf\left\{\left\|y_n + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\| : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

(a2) Supongamos ahora que $\|\omega + x\| < \left\|\omega + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|$. Sea $\delta > 0$ tal que

$$\|\omega + x\|^p + \delta \leq \left\|\omega + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|^p,$$

y, por lo tanto, por el Lema 2.6.1:

$$\|x + x_n\|^p + \delta \leq \|x_n - \omega\|^p + \left\|\omega + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|^p + \eta. \qquad [1]$$

Por último, si ponemos

$$\left\|x_n + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|^p = \left\|x_n - \omega + \omega + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|^p$$

existe, por el Lema 2.6.1, una subsucesión $\{x_n\}$ tal que

$$\|x_n - \omega\|^p + \left\|\omega + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|^p - \eta \leq \left\|x_n + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|^p. \qquad [2]$$

De [1] y [2] resulta:

$$\|x + x_n\|^p + \delta \leq \left\|x_n + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|^p + 2\eta.$$

Tomando $0 < \eta < \frac{\delta}{2}$ y poniendo $y_n = x_n$ concluimos con que

$$\inf\{\|x + x_n\| : n \in \mathbb{N}\} \leq \inf\left\{\left\|y_n + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\| : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Así finaliza la demostración en el caso (a).

(b) Sea $\{x_n\}$ una subsucesión tal que $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = b,\ \ 0 < b < 1$ y

$$\lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\| = a, \quad a \geq \varepsilon.$$

La demostración de este caso la dividimos en tres apartados.

(b1) Demostraremos en primer lugar que se puede encontrar una subsucesión $\{x_n\}$ tal que

$$\lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|} \right\| = \frac{a}{b} = c.$$

En efecto, tenemos para todo $n, m \in \mathbb{N},\ \ n \neq m$:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|} \right\| &= \left\| \frac{\|x_m\|x_n - x_m\|x_n\|}{\|x_n\|\,\|x_m\|} \right\| \\
&= \left\| \frac{\|x_m\|x_n + \|x_m\|x_m - \|x_m\|x_m - \|x_n\|x_m}{\|x_n\|\|x_m\|} \right\| \\
&= \frac{\left\| (x_n - x_m)\|x_m\| + (\|x_m\| - \|x_n\|)x_m \right\|}{\|x_n\|\|x_m\|}.
\end{aligned}$$

Así:

$$\frac{\|x_n - x_m\|}{\|x_n\|} - \frac{\left|\|x_m - x_n\|\right|}{\|x_n\|} \leq \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|} \right\| \leq \frac{\|x_n - x_m\|}{\|x_n\|} + \frac{\left|\|x_m\| - \|x_n\|\right|}{\|x_n\|}.$$

Tomando límites resulta:

$$\lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|} \right\| = \frac{a}{b} = c.$$

Observemos además, por el Lema 2.6.4, que $c < 2^{\frac{1}{p}}$ por ser $\frac{\omega}{b} \neq 0$ el límite débil de la sucesión $\left\{ \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\}$.

Continuamos con la demostración del caso (b). Hemos encontrado una subsucesión $\{x_n\}$ tal que

$$\lim_{m,n\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\| = a \ \text{ y } \lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \left\| \frac{x}{\|x_n\|} - \frac{x}{\|x_m\|} \right\| = c$$

con $0 < \varepsilon \leq a < c < 2^{\frac{1}{p}}$.

(b2) Supongamos que $x \neq \frac{\omega}{\|\omega\|}$. Más adelante veremos en el apartado (b3) que el caso $x = \frac{\omega}{\|\omega\|}$ se reduce fácilmente a éste.

Puesto que $x_n \rightharpoonup \omega$ y $\frac{x_n}{\|x_n\|} \rightharpoonup \frac{\omega}{b}$ existe, por el Lema 2.6.3, una subsucesión $\{x_n\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{\omega}{b} \right\| = \frac{c}{2^{\frac{1}{p}}} \qquad [3]$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - \omega\| = \frac{a}{2^{\frac{1}{p}}}. \qquad [4]$$

Así, dado $\eta > 0$, existe una subsucesión $\{x_n\}$ tal que

$$\|x + x_n\|^p \leq \|x_n - \omega\|^p + \|\omega + x\|^p + \eta \leq \frac{a^p}{2} + \|\omega + x\|^p + 2\eta$$

para todo n natural. Por la demostración de la primera parte del lema sabemos que para $x \neq \dfrac{\omega}{\|\omega\|}$ se tiene que

$$\|\omega + x\| < \left\| \omega + \frac{\omega}{\|\omega\|} \right\|.$$

Sea ahora $\delta > 0$ tal que

$$\|\omega + x\|^p + \delta \leq \left\| \omega + \frac{\omega}{\|\omega\|} \right\|^p.$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
\|x + x_n\|^p + \delta &\leq \frac{a^p}{2} + \left\| \omega + \frac{\omega}{\|\omega\|} \right\|^p + 2\eta \\
&\leq \frac{c^p}{2} + \|\omega\|^p \left(1 + \frac{1}{\|\omega\|}\right)^p + 2\eta
\end{aligned}$$

y, teniendo en cuenta [3], resulta:

$$\begin{aligned}
\|x + x_n\|^p + \delta &\leq \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{\omega}{b} \right\|^p + \|\omega\|^p \left(1 + \frac{1}{\|\omega\|}\right)^p + 3\eta \\
&\leq \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{\omega}{b} \right\|^p + \|\omega\|^p \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\|\omega\|}\right)^p + 3\eta \\
&= \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{\omega}{b} \right\|^p + \left\| \frac{\omega}{b} + \frac{\omega}{\|\omega\|} \right\|^p + 3\eta.
\end{aligned}$$

Ahora, tomando de nuevo una subsucesión si es necesario, tenemos para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{\omega}{b} \right\|^p + \left\| \frac{\omega}{b} + \frac{\omega}{\|\omega\|} \right\|^p - \eta \leq \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{\omega}{\|\omega\|} \right\|^p .$$

Y, por lo tanto,

$$\|x + x_n\|^p + \delta \leq \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{\omega}{\|\omega\|} \right\|^p + 4\eta.$$

Así, si elegimos $0 < \eta < \frac{\delta}{4}$, obtenemos que

$$\|x + x_n\|^p < \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{\omega}{\|\omega\|} \right\|^p + 4\eta$$

para todo n natural y, como queríamos demostrar,

$$\inf \{\|x + x_n\| \,:\, n \in \mathbb{N}\} \leq \inf \left\{ \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{\omega}{\|\omega\|} \right\| : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(b3) En este último apartado y para terminar la demostracion consideramos el caso $x = \dfrac{\omega}{\|\omega\|}$. Veamos que puede reducirse al caso anterior.

Consideremos una subsucesión $\{x_n\}$ tal que $\|x_n\| < b + \frac{\delta}{2} < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, con $\delta > 0$ y $b + \delta < 1$. Sea λ positivo y menor que $\delta/2$. Pongamos

$$\frac{\omega}{\|\omega\|} = (1 - \lambda)\frac{\omega}{\|\omega\|} + \lambda\frac{\omega}{\|\omega\|},$$

$$z = (1 - \lambda)\frac{\omega}{\|\omega\|}, \text{ y } z_n = \lambda\frac{\omega}{\|\omega\|} + x_n, \quad 0 < \lambda < \frac{\delta}{2}.$$

De esta forma $x + x_n = z + z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

La sucesión $\{z_n\}$ está contenida en la bola unidad. En efecto:

$$\|z_n\| = \left\| \lambda\frac{\omega}{\|\omega\|} + x_n \right\| \leq \lambda + \|x_n\| < \frac{\delta}{2} + b + \frac{\delta}{2} < 1.$$

Para una subsucesión $\{z_n\}$ existe $\lim\limits_{n \to \infty} \|z_n\| = r < 1$.

La sucesión $\{z_n\}$ converge débilmente a $\lambda\frac{\omega}{\|\omega\|} + \omega = \omega' \neq 0$.

Existe

$$\lim_{m,n \to \infty, n \neq m} \|z_n - z_m\| = \lim_{n,m \to \infty, n \neq m} \|x_n - x_m\| \geq \varepsilon.$$

Por último comprobemos que $z \neq \frac{\omega'}{\|\omega'\|}$:

$$\frac{\omega'}{\|\omega'\|} = \frac{\frac{\lambda+\|\omega\|}{\|\omega\|}\omega}{\left(\frac{\lambda}{\|\omega\|}+1\right)\|\omega\|} = \frac{\omega}{\|\omega\|} \neq (1-\lambda)\frac{\omega}{\|\omega\|} = z.$$

Ahora se tiene:

$$\begin{aligned}\inf\{\|x+x_n\| : n \in \mathbb{N}\} &= \inf\{\|z+z_n\| : n \in \mathbb{N}\} \\ &\leq \inf\left\{\left\|z_n + \frac{\omega'}{\|\omega'\|}\right\| : n \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \inf\left\{\left\|x_n + \frac{\lambda\omega}{\|\omega\|} + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\| : n \in \mathbb{N}\right\},\end{aligned}$$

y el resultado se obtiene cuando $\lambda \to 0$. $\square$

En la demostración del próximo teorema necesitaremos el lema siguiente que es consecuencia del Teorema del valor medio.

<u>LEMA 2.6.8.</u>

Sean ε, a, y p números reales tales que $1 < p < +\infty$ y $0 < \varepsilon < a < 2^{\frac{1}{p}}$. Entonces existe un número real $r > 0$ que satisface las desigualdades siguientes:

(1) $\frac{\varepsilon^p}{2} + (1+r)^p\left(1-\frac{a^p}{2}\right) < 1.$

(2) $\frac{a^p}{2} + \left(1-\frac{a^p}{2}\right)\left(1+\frac{1}{\left(1-\frac{a^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}}\right)^p$

$$< \frac{\varepsilon^p}{2} + \left(1-\frac{a^p}{2}\right)\left(1+r+\frac{1}{\left(1-\frac{a^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}}\right)^p.$$

<u>Demostración.</u>

Pongamos $1+r=t$. Entonces la desigualdad (1) puede escribirse así:

$$t^p < \frac{1-\frac{\varepsilon^p}{2}}{1-\frac{a^p}{2}} = \frac{2-a^p+a^p-\varepsilon^p}{2-a^p} = 1 + \frac{a^p-\varepsilon^p}{2-a^p}.$$

O bien:

$$t < A = \left(1+\frac{a^p-\varepsilon^p}{2-a^p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Y la desigualdad (2):

$$\left(t+\frac{1}{\left(1-\frac{a^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}}\right)^p > \left(1+\frac{1}{\left(1-\frac{a^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}}\right)^p + \frac{a^p-\varepsilon^p}{2-a^p}.$$

O bien:

$$t > B = \left\{\left[1+\left(\frac{2}{2-a^p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p + \frac{a^p-\varepsilon^p}{2-a^p}\right\}^{\frac{1}{p}} - \left(\frac{2}{2-a^p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

De tal modo que existe $t < A$ y $t > B$ si y solo si $B < A$. O, lo que es equivalente,

$$\left\{\left[1+\left(\frac{2}{2-a^p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p + \frac{a^p-\varepsilon^p}{2-a^p}\right\}^{\frac{1}{p}} < \left(1+\frac{a^p-\varepsilon^p}{2-a^p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{2}{2-a^p}\right)^{\frac{1}{p}}. \quad [5]$$

Pongamos, para simplificar un poco las notaciones, $u = \dfrac{a^p-\varepsilon^p}{2-a^p}$, $u \in (0,+\infty)$; con lo que queda:

$$\frac{2}{2-a^p} = \frac{2(1+u)}{2-\varepsilon^p}.$$

Sustituyendo en [5] obtenemos:

$$\left\{\left[1 + \left(\frac{2(1+u)}{2-\varepsilon^p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p + u\right\}^{\frac{1}{p}} < (1+u)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{2(1+u)}{2-\varepsilon^p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Simplifiquemos todavía un poco más escribiendo $e = \dfrac{2}{2-\varepsilon^p}$, con lo que la expresión anterior, después de elevar a p queda en la forma siguiente:

$$\left\{1+[e(1+u)]^{\frac{1}{p}}\right\}^p + u < (1+u)\left(1+e^{\frac{1}{p}}\right)^p.$$

Consideremos ahora las funciones f y g siguientes definidas en $(0,+\infty)$:

$$f(u) = \left\{1+[e(1+u)]^{\frac{1}{p}}\right\}^p + u, \quad g(u) = (1+u)\left(1+e^{\frac{1}{p}}\right)^p.$$

Tenemos que demostrar que $f(u) < g(u)$ para todo $u \in (0,+\infty)$. Observemos que

$$f(0) = g(0) = \left(1+e^{\frac{1}{p}}\right)^p.$$

Se tiene además para todo $u \in (0,+\infty)$:

$$\begin{aligned} f'(u) &= p\left[1+e^{\frac{1}{p}}(1+u)^{\frac{1}{p}}\right]^{p-1} \frac{e^{\frac{1}{p}}}{p(1+u)^{\frac{p-1}{p}}} + 1 \\ &= e^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{(1+u)^{\frac{1}{p}}} + e^{\frac{1}{p}}\right)^{p-1} + 1 \\ &< e^{\frac{1}{p}}\left(1+e^{\frac{1}{p}}\right)^{p-1} + \left(1+e^{\frac{1}{p}}\right)^{p-1} = g'(u), \end{aligned}$$

lo que completa la demostración. □

En el teorema siguiente probaremos que el número α', que definimos a continuación de la Proposición 2.6.6, se puede calcular considerando únicamente sucesiones $\{x_n\}$ para las que existe $\lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\|$ y este límite es ε.

TEOREMA 2.6.9.

Sea $\{x_n\} \subset B_{\ell^p}$ con las propiedades siguientes:

$$x_n \rightharpoonup \omega \neq 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1 \quad y \quad \lim_{m,n\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\| = a,$$

siendo $0 < \varepsilon < a < 2^{\frac{1}{p}}$. Sea r el número positivo obtenido en el Lema 2.6.8. Entonces la sucesión

$$z_n = \frac{\varepsilon}{a} x_n + \left(1 - \frac{\varepsilon}{a}\right)\omega + r\omega$$

tiene una subsucesión en B_{ℓ^p} tal que $\lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|z_n - z_m\| = \varepsilon$, y que

$$\inf\left\{\left\|x_n + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\| : n \in \mathbb{N}\right\} \leq \inf\left\{\left\|z_n + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\| : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Demostración.

Puesto que $\lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\| = a$ podemos suponer, tomando una subsucesión si es necesario (Lema 2.6.3), que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - \omega\| = \frac{a}{2^{\frac{1}{p}}}.$$

Definamos una sucesión $\{y_n\}$ de la forma siguiente:

$$y_n = \frac{\varepsilon}{a} x_n + \left(1 - \frac{\varepsilon}{a}\right)\omega.$$

Se comprueba de forma inmediata que esta sucesión converge débilmente a ω, que $\|y_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que $\lim_{m,n\to\infty, n\neq m} \|y_n - y_m\| = \varepsilon$.

Veamos ahora que podemos elegir una subsucesión de $\{z_n\}$ con $\|z_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, por el lema anterior podemos tomar $\eta > 0$ tal que

$$\frac{\varepsilon^p}{2} + (1+r)^p \left(1 - \frac{a^p}{2}\right) + 2\eta < 1.$$

Para este número η existe una subsucesión $\{z_n\}$ tal que

$$\begin{aligned}\|z_n\|^p &= \|y_n-\omega\|^p + \|\omega + r\omega\|^p + \eta \\ &= \|y_n-\omega\|^p + \|\omega\|^p(1+r)^p + \eta \\ &= \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^p \|x_n-\omega\|^p + \|\omega\|^p(1+r)^p + \eta.\end{aligned}$$

Tomando $\eta_1 = \frac{\eta}{\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^p}$, como $\lim_{n\to\infty}\|x_n-\omega\|^p = \frac{a^p}{2}$, existe una subsucesión $\{x_n\}$ tal que, para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica:

$$\|x_n-\omega\|^p \le \frac{a^p}{2} + \eta_1.$$

Por lo tanto, para la sucesión $\{z_n\}$ correspondiente se tendrá:

$$\|z_n\|^p \le \frac{\varepsilon^p}{2} + (1+r)^p\|\omega\|^p + 2\eta.$$

Por otra parte, como para la sucesión $\{x_n\}$ es

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = 1, \quad \lim_{n,m\to\infty, n\neq m}\|x_n - x_m\| = a \ \text{ y } \ x_n \rightharpoonup \omega$$

se tiene, por el Lema 2.6.4, $\|\omega\| = \left(1-\frac{a^p}{2}\right)^p$. Por lo tanto resulta:

$$\|z_n\|^p \le \frac{\varepsilon^p}{2} + (1+r)^p\left(1-\frac{a^p}{2}\right) + 2\eta < 1.$$

Siguiendo con la demostración del Teorema consideremos la sucesión $\{x_n\}$ correspondiente a la sucesión $\{z_n\}$ que acabamos de obtener. Dado $\eta>0$, tan pequeño como precisaremos más adelante, existe una subsucesión tal que :

$$\begin{aligned}\left\|x_n + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|^p &\le \|x_n-\omega\|^p + \left\|\omega + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|^p + \eta \\ &= \|x_n-\omega\|^p + \|\omega\|^p\left(1+\frac{1}{\|\omega\|}\right)^p + \eta \\ &= \|x_n-\omega\|^p + \left(1-\frac{a^p}{2}\right)\left(1+\frac{1}{(1-\frac{a^p}{2})^{\frac{1}{p}}}\right)^p + \eta.\end{aligned}$$

Además, teniendo en cuenta que $\lim_{n\to\infty}\|x_n-\omega\| = \frac{a^p}{2}$, podemos elegir una subsucesión tal que, para todo $n\in\mathbb{N}$:

$$\left\|x_n + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|^p \leq \frac{a^p}{2} + \left(1 - \frac{a^p}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{(1-\frac{a^p}{2})^{\frac{1}{p}}}\right)^p + 2\eta.$$

Por otra parte, considerando esta última sucesión $\{x_n\}$, se tiene:

$$\left\|z_n + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|^p = \left\|y_n + r\omega + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|^p = \left\|\frac{\varepsilon}{a}(x_n - \omega) + \omega\left(1 + r + \frac{1}{\|\omega\|}\right)\right\|^p$$

y, como $\{\frac{\varepsilon}{a}(x_n - \omega)\} \rightharpoonup 0$, para una sucesión $\{x_n\}$ resulta:

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\varepsilon}{a}(x_n - \omega) + \omega\left(1 + r + \frac{1}{\|\omega\|}\right)\right\|^p \\
\geq &\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^p \|x_n - \omega\|^p + \left\|\omega(1 + r + \frac{1}{\|\omega\|})\right\|^p - \eta \\
= &\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^p \|x_n - \omega\|^p + \|\omega\|^p\left(1 + r + \frac{1}{\|\omega\|}\right)^p - \eta.
\end{aligned}$$

Tomando, como antes $\eta_1 = \dfrac{\eta}{(\frac{\varepsilon}{a})^p}$ y teniendo en cuenta que $\|\omega\| = \left(1 - \dfrac{a^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$, resulta para una subsucesión $\{z_n\}$:

$$\left\|z_n + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|^p \geq \frac{\varepsilon^p}{2} + \left(1 - \frac{a^p}{2}\right)\left(1 + r + \frac{1}{(1-\frac{a^p}{2})^{\frac{1}{p}}}\right)^p - 2\eta.$$

Se sigue del Lema 2.6.8, si hemos tomado η suficientemente pequeño, que para esta sucesión y para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\left\|x_n + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|^p \leq \left\|z_n + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|^p$$

y, por lo tanto,

$$\inf\left\{\left\|x_n + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\| : n \in \mathbb{N}\right\} \leq \inf\left\{\left\|z_n + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\| : n \in \mathbb{N}\right\}$$

con lo que se termina la demostración del teorema. □

Observemos que la sucesión $\{z_n\}$ resultante en el Teorema que acabamos de demostrar tiene las propiedades siguientes:

(1) $\|z_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(2) $\displaystyle\lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|z_n - z_m\| = \varepsilon$.

(3) $z_n \rightharpoonup (1+r)\omega = \Omega$ y $\frac{\omega}{\|\omega\|} = \frac{\Omega}{\|\Omega\|} \neq 0$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \|z_n - \Omega\| = \frac{\varepsilon}{2^{\frac{1}{p}}}$ para una subsucesión.

Como consecuencia de la Proposición 2.6.7, del Teorema 2.6.9 y de estas observaciones obtenemos el corolario siguiente:

COROLARIO 2.6.10.

Se verifica la siguiente igualdad:

$$\alpha' = \sup\left\{\inf\left\{\frac{\|x+x_n\|}{2} : n\in\mathbb{N}\right\} : \{x_n\}\subset B_{\ell^p},\ x\in B_{\ell^p},\ x_n \rightharpoonup \omega,\ \omega\neq 0,\right.$$

$$\left.\lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\| \geq \varepsilon\right\} =$$

$$\sup\left\{\inf\left\{\frac{\left\|x_n + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|}{2} : n\in\mathbb{N}\right\} : \{x_n\}\subset B_{\ell^p},\ x_n \rightharpoonup \omega,\ \omega\neq 0,\right.$$

$$\left.\lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\| = \varepsilon,\ \lim_{n\to\infty}\|x_n-\omega\| = \frac{\varepsilon}{2^{\frac{1}{p}}}\right\}.$$

En el teorema siguiente demostramos que $\alpha' \leq s$

TEOREMA 2.6.11.

Los números α' del corolario anterior y s definido en la Proposición 2.6.6 verifican la desigualdad $\alpha' \leq s$. Es decir:

$$\alpha' \leq \frac{1}{2}\left\{\frac{\varepsilon^p}{2} + \left(\left(1-\frac{\varepsilon^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} + 1\right)^{\frac{1}{p}}\right\}^{\frac{1}{p}} = s.$$

Demostración.

Sea δ un número positivo tal que $0<\delta<\alpha'$. Se puede encontrar una sucesión $\{x_n\}$ en la bola unidad B_{ℓ^p} tal que $x_n \rightharpoonup \omega \neq 0$, $\lim\limits_{n,m\to\infty,n\neq m}\|x_n-x_m\| = \varepsilon$ con $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-\omega\| = \frac{\varepsilon}{2^{\frac{1}{p}}}$ y tal que

$$\alpha' - \delta < \inf\left\{\frac{\left\|x_n + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|}{2} : n\in\mathbb{N}\right\} \leq \alpha' \qquad [6]$$

y, por lo tanto:

$$2^p(\alpha' - \delta)^p < \inf\left\{\left\|x_n + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|^p n : \mathbb{N}\right\} \leq 2^p \alpha'^p.$$

Por otra parte, dado $\eta > 0$ y, tomando una subsucesión si es necesario se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\varepsilon^p}{2} + \left\|\omega + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|^p - \eta \leq \left\|x_n + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|^p \leq \frac{\varepsilon^p}{2} + \left\|\omega + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|^p + \eta. \qquad [7]$$

Tomando ahora η suficientemente pequeño y teniendo en cuenta las relaciones [6] y [7] obtenemos:

$$2^p(\alpha' - \delta)^p < \frac{\varepsilon^p}{2} + \left\|\omega + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|^p - \eta \leq \inf\left\{\left\|x_n + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|^p : n \in \mathbb{N}\right\} \leq 2^p \alpha'^p,$$

de donde se deduce:

$$\alpha' - \delta \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon^p}{2} + \left\|\omega + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \alpha'.$$

Y, puesto que δ se ha elegido arbitrariamente,

$$\alpha' = \sup\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon^p}{2} + \left\|\omega + \frac{\omega}{\|\omega\|}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} : \{x_n\} \subset B_{\ell^p}, x_n \rightharpoonup \omega, \omega \neq 0,\right.$$

$$\left.\lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\| = \varepsilon, \lim_{n\to\infty} \|x_n - \omega\| = \frac{\varepsilon}{2^{\frac{1}{p}}}\right\}.$$

Finalmente, como en estas condiciones sabemos por el Corolario 2.6.5 que

$$\|\omega\| \leq \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}},$$

se deduce como queríamos demostrar que :

$$\alpha' \leq \frac{1}{2}\left\{\frac{\varepsilon^p}{2} + \left(\left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} + 1\right)^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

$\square$

Puesto que $\bar{\alpha} \leq \alpha'$ se tiene el corolario siguiente.

COROLARIO 2.6.12.

Sea $\bar{\alpha}$ definido anteriormente

$$\bar{\alpha} = \sup\left\{\inf\left\{\frac{\|x+x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} : \{x_n\} \subset B_{\ell^p}, x \in B_{\ell^p},\right.$$

$$\left. x_n \rightharpoonup \omega \neq 0, \mathrm{sep}(\{x_n\}) \geq \varepsilon, \lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\| \geq \varepsilon\right\}.$$

Entonces $\bar{\alpha} \leq s$.

Para terminar este proceso del cálculo de $R''_{\ell^p}(\varepsilon)$ nos queda únicamente demostrar que $\alpha = \bar{\alpha}$. Para eso necesitaremos los dos lemas siguientes.

LEMA 2.6.13.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en B_{ℓ^p} tal que $x_n \rightharpoonup 0$, $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$ y que existe $\lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\|$. Entonces $\lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\| = 2^{\frac{1}{p}}$.

Demostración.

Es consecuencia inmediata del Lema 2.6.4. □

LEMA 2.6.14.

Consideremos la función $\sigma : \left[0, 2^{\frac{1}{p}}\right] \to \mathbb{R}$:

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^p}{2} + \left[1 + \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p.$$

Entonces $\sigma(\varepsilon) > 2$ para todo $\varepsilon \in \left(0, 2^{\frac{1}{p}}\right)$.

Demostración.

Puesto que $\sigma(2^{\frac{1}{p}}) = 2$ basta comprobar que la función σ es estrictamente decreciente en el intervalo $[0, 2^{\frac{1}{p}}]$. Para eso veremos que $\sigma'(\varepsilon) < 0$ si $\varepsilon \in (0, 2^{\frac{1}{p}})$. En efecto:

$$\sigma'(\varepsilon) = \frac{p}{2}\varepsilon^{p-1}\left(1 - \frac{\left[1 + \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{p-1}}{\left[\left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{p-1}}\right) < 0$$

□

TEOREMA 2.6.15.

Se verifica la igualdad $\alpha = \bar{\alpha}$. Es decir:

$$\sup\left\{\inf\left\{\frac{\|x+x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} : \{x_n\} \subset B_{\ell^p},\, x \in B_{\ell^p},\, x_n \rightharpoonup \omega,\, \omega \neq 0,\right.$$

$$\left.\operatorname{sep}(\{x_n\}) \geq \varepsilon, \text{ y } \lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\| \geq \varepsilon\right\} =$$

$$\sup\left\{\inf\left\{\frac{\|x+x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} : \{x_n\} \subset B_{\ell^p},\, x \in B_{\ell^p},\, x_n \rightharpoonup \omega,\right.$$

$$\left.\operatorname{sep}(\{x_n\}) \geq \varepsilon \text{ y } \lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\| \geq \varepsilon\right\}.$$

Demostración.

Sea $\{x_n\} \subset B_{\ell^p}$ una sucesión débilmente convergente a 0, con $\operatorname{sep}(\{x_n\}) \geq \varepsilon$ y tal que existe $\lim_{n.m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\| \geq \varepsilon$. Consideremos una subsucesión $\{x_n\}$ tal que la sucesión de normas $\{\|x_n\|\}$ sea convergente y distingamos los casos siguientes:

(a) $\lim_{n\to\infty} \|(x_n)\| = b < 1$.

Sea x un elemento cualquiera de B_{ℓ^p}.

(a1) Supongamos que $x \neq 0$. Pongamos $x = \lambda_1 x + \lambda_2 x$ siendo λ_1 y λ_2 números positivos tales que

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \ \text{ y } \ \lambda_1 < \frac{(1-b^p)^{\frac{1}{p}}}{\|x\|}.$$

Entonces $b^p + {\lambda_1}^p\|x\|^p$ es menor que 1. Tomando $\eta > 0$ suficientemente pequeño es posible encontrar una subsucesión $\{x_n\}$ tal que

$$\|x_n + \lambda_1 x\|^p \leq \|x_n\|^p + {\lambda_1}^p\|x\|^p + \eta \leq b^p + {\lambda_1}^p\|x\|^p + 2\eta < 1.$$

Tenemos de esta forma una sucesión $\{y_n\}$, $y_n = x_n + \lambda_1 x$ contenida en B_{ℓ^p}, débilmente convergente a $\lambda_1 x \neq 0$, con $\operatorname{sep}(\{y_n\}) = \operatorname{sep}(\{x_n\})$,

$$\lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|y_n - y_m\| = \lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\|$$

y tal que $\|x_n + x\| = \|y_n + \lambda_2 x\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a2) Supongamos $x = 0$. Sea $y \in B_{\ell^p}$, $y \neq 0$ y λ un número positivo y menor que 1 tal que

$$\lambda < \frac{(1-b^p)^{\frac{1}{p}}}{\|y\|^p}.$$

Razonando como en el caso anterior puede obtenerse una subsucesión $\{x_n\}$ tal que $\|x_n + \lambda y\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Poniendo $y_n = x_n + \lambda y$ se tiene que $y_n \rightharpoonup \lambda y \neq 0$, $\operatorname{sep}(\{y_n\}) = \operatorname{sep}(\{x_n\})$,

$$\lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|y_n - y_m\| = \lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\|$$

y $\|x_n\| = \|y_n + (-\lambda)y\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$.

Distinguiremos tres subcasos:

(b1) $0 < \|x\| < 1$.
Sea $\mu > 0$ tal que $0 < \mu \leq \dfrac{1}{\|x\|} - 1$. Así, $\|x + \mu x\| = \|x\|(1+\mu) \leq 1$.
Determinaremos un número λ, $0 < \lambda < 1$, para que se cumpla que

$$\operatorname{sep}(\{x_n - \lambda x_n\}) \geq \varepsilon,$$

$$\lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|(x_n - \lambda x_n) - (x_m - \lambda x_m)\| \geq \varepsilon$$

y que para una subsucesión verifique, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n + x\| \leq \|x_n - \lambda x_n + x + \mu x\|.$$

De esta forma, como $\lim_{n\to\infty} \|x_n - \lambda x_n\| = 1 - \lambda < 1$, se reduce este caso al caso (a).

Por el Lema 2.6.13 se tiene que $\lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\| = 2^{\frac{1}{p}}$. Sea $\delta > 0$ tal que $\varepsilon < 2^{\frac{1}{p}} - \delta$ y λ tal que

$$0 < \lambda < 1 - \frac{\varepsilon}{2^{\frac{1}{p}} - \delta}.$$

Tomemos una subsucesión $\{x_n\}$ que verifique $\|x_n - x_m\| > 2^{\frac{1}{p}} - \delta$ si $n \neq m$. Tenemos entonces:

$$\|(x_n - \lambda x_n) - (x_m - \lambda x_m)\| = (1-\lambda)\|x_n - x_m\| \geq \varepsilon$$

y, por lo tanto, $\text{sep}(\{x_n - \lambda x_n\}) \geq \varepsilon$. Podemos elegir el número λ anterior de forma que cumpla tambien, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(1+\mu)^p - 1}{1-(1-\lambda)^p} > \frac{\|x_n\|^p}{\|x\|^p} + 1.$$

Y, por lo tanto,

$$(1+\mu)^p\|x\|^p + \|x_n\|^p(1-\lambda)^p \geq \|x_n\|^p + \|x\|^p + \gamma,$$

donde $\gamma = \big(1-(1-\lambda)^p\big)\|x\|^p$. Sea η tal que $0 < \eta < \gamma/2$. Se tiene entonces:

$$(1+\mu)^p\|x\|^p + \|x_n\|^p(1-\lambda)^p - \eta \geq \|x_n\|^p + \|x\|^p + \eta$$
$$\Rightarrow \|x_n(1-\lambda)\|^p + \|x(1+\mu)\|^p - \eta \geq \|x_n\|^p + \|x\|^p + \eta$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Para este número η existe una subsucesión $\{x_n\}$ tal que

$$\begin{aligned}\|x_n + x\|^p &\leq \|x_n\|^p + \|x\|^p + \eta \\ &\leq \|x_n(1-\lambda)\|^p + \|x_1 + \mu)\|^p \\ &\leq \|x_n(1-\lambda) + x(1+\mu)\|^p.\end{aligned}$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n + x\| \leq \|x_n - \lambda x_n + x + \mu x\|$$

como queríamos demostrar.

(b2) $x = 0$. Tomemos la sucesión básica $\{e_n\}$ y, por ejemplo, $y = (\frac{1}{2}, 0, 0, \ldots)$. Tenemos que $\|x_n + x\| \leq \|e_n + y\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $0 < \|y\| < 1$ estamos en el caso (a2).

(b3) $\|x\| = 1$.

Dado $\eta > 0$, se tiene para una subsucesión $\{x_n\}$:

$$\|x_n\|^p + \|x\|^p - \eta \leq \|x_n + x\|^p \leq \|x_n\|^p + \|x\|^p + \eta.$$

De aquí se deduce que $\lim_{n\to\infty} \|x_n + x\|^p = 2$, por lo tanto,

$$\inf\{\|x_n + x\| : n \in \mathbb{N}\} \leq 2^{\frac{1}{p}}.$$

Consideremos la sucesión $\{e_n\}$ y el vector $y = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ con $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\|y\| = 1$. Se tiene entonces para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\|e_n + y\|^p = a_1^p + a_2^p + ... + a_{n-1}^p + (1 + a_n)^p + a_{n+1}^p + ...$$
$$> a_1^p + a_2^p + ... + a_{n-1}^p + 1 + a_n^p + a_{n+1}^p + ... = 2.$$

Así

$$\inf\left\{\frac{\|e_n + y\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} = \frac{2^{\frac{1}{p}}}{2}$$

y, por lo tanto:

$$\sup\left\{\inf\left\{\frac{\|x_n + x\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} : \{x_n\} \subset B_{\ell^p},\right.$$
$$\left. x_n \rightharpoonup 0,\ x \in B_{\ell^p},\ \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1,\ \|x\| = 1\right\}$$
$$= \frac{2^{\frac{1}{p}}}{2} < \frac{1}{2}\sigma(\varepsilon) = \sup\left\{\inf\left\{\frac{\|x_n + x\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} : \{x_n\} \subset B_{\ell^p},\ x \in B_{\ell^p},\right.$$
$$\left. x_n \rightharpoonup \omega,\ \omega \neq 0, \mathrm{sep}(\{x_n\}) \geq \varepsilon, \lim_{n,m\to\infty, n\neq m} \|x_n - x_m\| \geq \varepsilon\right\}, \quad 0 < \varepsilon < 2^{\frac{1}{p}}.$$

□

COROLARIO 2.6.16.

Sea $1 < p < +\infty$ y $0 \leq \varepsilon < 2^{\frac{1}{p}}$. Entonces:

$$R''_{\ell^p}(\varepsilon) = 1 - \frac{1}{2}\left\{\frac{\varepsilon^p}{2} + \left((1 - \frac{\varepsilon^p}{2})^{\frac{1}{p}} + 1\right)^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Procedemos ahora al cálculo del valor de $R'_{\ell^p}(\varepsilon)$ que, como veremos en seguida, puede hacerse fácilmente a partir del resultado anterior.

TEOREMA 2.6.17.

Sea $1 < p < +\infty$ y $0 \leq \varepsilon < 2$. Entonces

$$R'_{\ell^p}(\varepsilon) = 1 - \frac{1}{2}\left\{\varepsilon^p + \left((1 - \varepsilon^p)^{\frac{1}{p}} + 1\right)^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Demostración.

Consideremos las funciones f y g siguientes definidas en $(0, 2^{\frac{1}{p}})$:

$$f(\varepsilon) = \sup \left\{ \inf \left\{ \frac{\|x + x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N} \right\} : \{x_n\} \subset B_{\ell^p},\, x \in B_{\ell^p}, \beta(\{x_n\}) \geq \varepsilon \right\},$$

$$g(\varepsilon) = \sup \left\{ \inf \left\{ \frac{\|x + x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N} \right\} : \{x_n\} \subset B_{\ell^p},\, x \in B_{\ell^p},\, \beta(\{x_n\}) > \varepsilon \right\}.$$

Como para todo subconjunto acotado A de ℓ^p se tiene que $\chi(A) = \mu\beta(A)$ con $\mu = 2^{-\frac{1}{p}}$ (Proposición 1.4.9), tenemos que

$$f(\varepsilon) = 1 - R'_{\ell^p}(\varepsilon\mu).$$

Por el Teorema 2.4.1 sabemos que f es una función continua. De este hecho podemos deducir que $f(\varepsilon) = g(\varepsilon)$ para todo $\varepsilon \in (0, 2^{\frac{1}{p}})$. En efecto, de la definición de las funciones resulta evidente que $g(\varepsilon) \leq f(\varepsilon)$. Sea $\delta > 0$, entonces

$$f(\varepsilon - \delta) \leq g(\varepsilon) \leq f(\varepsilon)$$

y, por la continuidad de f, $g(\varepsilon) = f(\varepsilon)$.

Por otra parte

$$g(\varepsilon) \leq 1 - R''_{\ell^p}(\varepsilon) \leq f(\varepsilon) = g(\varepsilon)$$

y, por lo tanto:

$$R''_{\ell^p}(\varepsilon) = R'_{\ell^p}(\varepsilon\mu) \quad \text{y} \quad R'_{\ell^p}(\varepsilon) = R''_{\ell^p}(\frac{\varepsilon}{\mu}).$$

En consecuencia, para todo $\varepsilon \in [0, 1)$, resulta

$$R'_{\ell^p}(\varepsilon) = 1 - \frac{1}{2}\left\{\varepsilon^p + \left((1 - \varepsilon^p)^{\frac{1}{p}} + 1\right)^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

como queríamos demostrar. $\square$

2.7. Cálculo de los módulos en los espacios ℓ^1, c_0, c y ℓ^∞.

El cálculo de los módulos en estos espacios es, como veremos, mucho más sencillo.

TEOREMA 2.7.1.

Sea $\varepsilon \in [0, 2]$. *Entonces:*

(*a*) $R^{"}_{l_1}(\varepsilon) = R^{'}_{l_1}(\frac{\varepsilon}{2}) = R_{l_1}(\varepsilon) = 0.$

(*b*) $R^{"}_{c_0}(\varepsilon) = R^{'}_{c_0}(\frac{\varepsilon}{2}) = R_{c_0}(\varepsilon) = 0.$

(*c*) $R^{"}_{c}(\varepsilon) = R^{'}_{c}(\frac{\varepsilon}{2}) = R_{c}(\varepsilon) = 0.$

(*d*) $R^{"}_{l_\infty}(\varepsilon) = R^{'}_{l_\infty}(\frac{\varepsilon}{2}) = R_{l_\infty}(\varepsilon) = 0.$

Demostración.

Puesto que en todo espacio de Banach X se verifica que

$$R^{'}_X\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \leq R_X(\varepsilon) \leq R^{"}_X(\varepsilon)$$

y la función $R^{"}_X$ es creciente bastará con demostrar en cada caso que $R^{"}_X(2) = 0$, siendo X uno cualquiera de los espacios del enunciado.

(a) Consideremos en ℓ^1 la sucesión $\{x_n\}$ dada por

$$x_1 = (1, 0, 0, \ldots.),$$

$$x_2 = (0, 1, 0, \ldots.),$$

$$x_3 = (0, 0, 1, \ldots.),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

y el vector $x = (1, 0, 0, 0, \ldots.)$. Entonces $\|x\| = 1$, $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - x_m\| = 2$ si $n \neq m$ y $\dfrac{\|x + x_n\|}{2} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto:

$$1 - \inf\left\{\frac{\|x + x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N}\right\} = 0$$

y, en consecuencia $R^{"}_{\ell^1}(2) = 0$.

(b) Tomemos en c_0 la sucesión (x_n) definida de la forma siguiente:

$$x_1 = (1, -1, 0, 0, 0, \ldots),$$

$$x_2 = (1, 1, -1, 0, 0, \dots),$$

$$x_3 = (1, 1, 1, -1, 0, \dots),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

y el vector $x = (1, 0, 0, \dots.)$. Entonces $\|x\| = 1$, $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - x_m\| = 2$ si $n \neq m$ y $\frac{\|x+x_n\|}{2} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, $R''_{c_0}(2) = 0$ como queríamos demostrar.

Los casos (c) y (d) se demuestran como el caso (b). $\square$

CAPÍTULO III.

SEGUNDA CLASE DE MÓDULOS DE (β)-NO COMPACIDAD

En este capítulo definimos nuevos módulos de no compacidad para la propiedad (β) a partir de la definición de Rolewicz. La recordamos a continuación:

Un espacio de Banach X tiene la propiedad (β) cuando para todo número $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $1 < \|x\| < 1 + \delta$ entonces $\alpha(R_x) < \varepsilon$.

Naturalmente en esta definición puede reemplazarse la medida de no compacidad α de Kuratowski por la medida de Haussdorff, por la de separación o por una medida de no compacidad comparable con la medida α. En este Capítulo representamos por μ a una medida de no compacidad comparable con la medida de no compacidad de Kuratowski y que tenga las propiedades establecidas en el Capítulo II (**1.2**). Supondremos además que X es un espacio de Banach de dimensión infinita.

La primera parte de la Sección **3.1** esta dedicada a obtener alguna información acerca de la medida de no compacidad de los conjuntos R_x determinados por puntos $x \in X$ con $\|x\| > 1$ y se demuestra que se cumple la relación

$$\frac{\mu(B_X)(\|x\| - 1)}{\|x\|} \leq \mu(R_x) \leq \mu(B_X).$$

Estas desigualdades nos permiten establecer algunas propiedades del módulo asociado a la medida de no compacidad μ que se define de la forma siguiente:

$$P_{X,\mu}(\varepsilon) = \inf\{\|x\| : x \in X,\ \|x\| > 1,\ \mu(R_x) \geq \varepsilon\} - 1.$$

A continuación definimos la (β)-característica para este módulo que designamos por $P_{0,\mu}(X)$.

La Sección **3.2** se dedica a dar ciertas relaciones entre los módulos $P_{X,\mu}$ para las distintas medidas de no compacidad y, fundamentalmente, entre los módulos

$P_{X,\beta}$ y R''_X, lo que nos permite establecer de nuevo condiciones suficientes para la reflexividad y estructura normal del espacio X y su dual X^*.

En la Sección **3.3**, la más extensa del capítulo, calculamos el valor de los módulos asociados a las medidas α, χ y β en los espacios ℓ^p, $1 < p < +\infty$. Para eso calculamos la medida de no compacidad de los conjuntos R_x en estos espacios que, para cada $x \in \ell^p$ con $\|x\| > 1$, depende únicamente de la norma del punto x. Esta demostración se hace en dos etapas. Primeramente se calcula $\mu(R_x)$ para elementos x finito dimensionales y después se extiende a elementos cualesquiera del espacio.

En la última sección del capítulo, la **3.4**, se calculan los módulos en los espacios ℓ^1, c_0, c, y ℓ^∞.

3.1. Definición de los módulos. Propiedades.

En primer lugar vamos a obtener alguna información acerca de la medida de no compacidad de los conjuntos R_x definidos en el Capítulo I.

LEMA 3.1.1.

Sea X un espacio de Banach y δ y d números reales positivos tales que $\delta >$ 0 y $0 < d < 1$. Para cada $y \in S_X$ definimos el conjunto

$$M(dy, \delta) = B(dy, 1 - d + \delta) \setminus B_X.$$

Entonces $\delta\mu(B_X) \leq \mu(M(dy, \delta))$.

Demostración.

Sea $z \in B(y, \delta)$. Se tiene entonces:

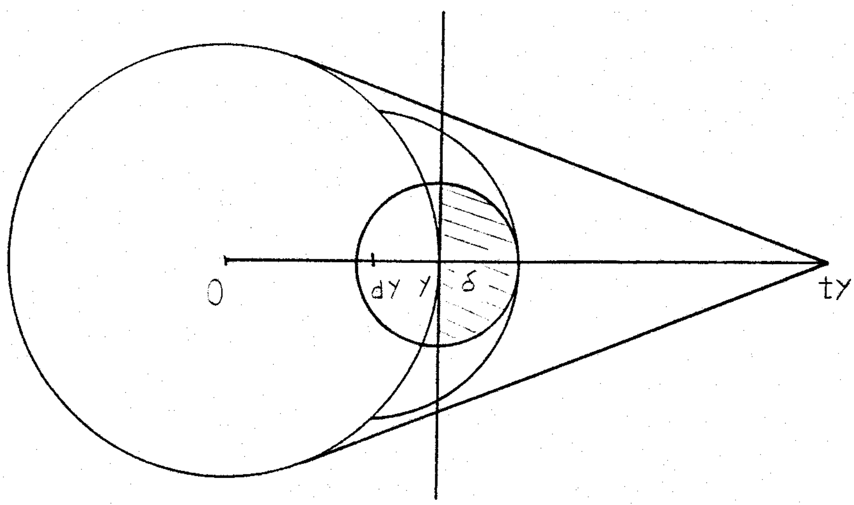
$$\|z - dy\| = \|z - (y - (1 - d)y)\| = \|(1 - d)y + z - y\| \leq 1 - d + \delta$$

y, por lo tanto, $B(y, \delta) \subset B(dy, 1 - d + \delta)$. Sea $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(y) = 1$.

Se tiene entonces la siguiente relación:

$$\{x \in B(y, d) \, : f(x) > 1\} \subset M(dy, \delta).$$

Teniendo en cuenta el Lema 2.1.2, que se cumple evidentemente para una medida de no compacidad μ que tenga las propiedades establecidas al comienzo de este capítulo, se deduce que $\delta\mu(B_X) \leq \mu(M(dy, \delta))$ como queríamos demostrar. $\square$



Los conjuntos $M(x, \delta)$ han sido considerados, entre otros, por S. B. Stečkin en [St]. Nosotros necesitamos el siguiente resultado establecido en la Proposición 1 de [KP]:

Sea X un espacio de Banach y $0 < d < 1$. Si $\|y\| = 1$ entonces $M(dy, \delta) \subset R_{ty}$ en donde $t = \frac{d}{d-\delta}$.

Como consecuencia de esta proposición y del Lema 3.1.1 se puede deducir que la medida μ de no compacidad de todo conjunto R_x es un número estrictamente mayor que 0. Además esta medida se puede acotar inferior y superiormente como se muestra en la proposición siguiente.

PROPOSICIÓN 3.1.2.

Sea X un espacio de Banach y $x \in X$, $\|x\| > 1$. Entonces

$$\frac{\mu(B_X)(\|x\| - 1)}{\|x\|} \leq \mu(R_x) \leq \mu(B_X).$$

Demostración.

La segunda desigualdad, $\mu(R_x) \leq \mu(B_X)$, es consecuencia inmediata de la definición del conjunto R_x y de las propiedades de la medida de no compacidad μ, $R_x \subset \text{co}(B_X \cup \{x\})$ y, por lo tanto,

$$\mu(R_x) \leq \mu(\text{co}(B_X \cup \{x\}) = \mu(B_X).$$

Demostremos ahora la primera desigualdad:

Sea $y \in S_X$. Dado $t > 1$, sea δ tal que $0 < \delta < \frac{t-1}{t}$. Entonces, tomando $d = \frac{t}{t-1}\delta$, resulta que $0 < \delta < d < 1$ y $t = \frac{d}{d-\delta}$ y, por lo tanto, del Lema 3.1.1 y de la Proposición de 1 de [KP] se deduce que

$$\delta\mu(B_X) \leq \mu(R_{ty})$$

y como esta relación vale para todo $\delta < \frac{t-1}{t}$ tenemos que

$$\frac{\mu(B_X)(t-1)}{t} \leq \mu(R_{ty}).$$

Es decir, si $\|x\| > 1$,

$$\mu(R_x) \geq \frac{\mu(B_X)(\|x\|-1)}{\|x\|}$$

lo que completa la demostración. □

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata de la proposición que nos interesa señalar:

COROLARIO 3.1.3.

Para todo $\varepsilon \in [0, \mu(B_X))$ *y todo* $y \in S_X$ *existe* $t > 1$ *tal que*

$$\mu(R_{ty}) \geq \frac{\mu(B_X)(t-1)}{t} > \varepsilon.$$

Después de esta introducción podemos definir los siguientes módulos para la propiedad β.

DEFINICIÓN 3.1.4.

Sea X *un espacio de Banach. Definimos el siguiente módulo de no compacidad para la propiedad* (β) *asociado a la medida de no compacidad* μ*:*

$$P_{X,\mu} : [0, \mu(B_X)) \longrightarrow [0, +\infty)$$
$$P_{X,\mu}(\varepsilon) = \inf\{\|x\| : x \in X,\ \|x\| > 1,\ \mu(R_x) \geq \varepsilon\} - 1.$$

En particular para cada una de las medidas de no compacidad α, χ, y β tenemos:

$$P_{X,\alpha} : [0, 2) \longrightarrow [0, +\infty),$$
$$P_{X,\alpha}(\varepsilon) = \inf\{\|x\| : x \in X,\ \|x\| > 1,\ \alpha(R_x) \geq \varepsilon\} - 1.$$

$$P_{X,\chi} : [0, 1) \longrightarrow [0, +\infty),$$
$$P_{X,\chi}(\varepsilon) = \inf\{\|x\| : x \in X,\ \|x\| > 1,\ \chi(R_x) \geq \varepsilon\} - 1.$$

$$P_{X,\beta} : [0, \beta(B_X)) \longrightarrow [0, +\infty),$$
$$P_{X,\beta}(\varepsilon) = \inf\{\|x\| : x \in X,\ \|x\| > 1,\ \beta(R_x) \geq \varepsilon\} - 1.$$

Del corolario anterior se desprende que, efectivamente, los módulos $P_{X,\alpha}$, $P_{X,\chi}$ y $P_{X,\beta}$ están definidos, respectivamente, en los intervalos $[0, 2)$, $[0, 1)$ y $[0, \beta(B_X))$ y, en general, $P_{X,\mu}$ en el intervalo $[0, \mu(B_X))$.

En la proposición que sigue a continuación damos algunas propiedades generales de los módulos.

PROPOSICIÓN 3.1.5.

La función $P_{X,\mu}$ tiene las propiedades siguientes:

(a) Es creciente en el intervalo $[0, \mu(B_X))$ y $P_{X,\mu}(0) = 0$.

(b) Para todo $\varepsilon \in [0, \mu(B_X))$ se tiene la relación

$$0 \leq P_{X,\mu}(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{\mu(B_X) - \varepsilon}.$$

(c) Es continua en 0.

d) Para todo $\varepsilon \in [0, \frac{\mu(B_X)}{2})$ es $P_{X,\mu}(\varepsilon) < \dfrac{2\varepsilon}{\mu(B_X)}$.

Demostración.

(a) Es consecuencia inmediata de la definición de la función $P_{X,\mu}$.

(b) Dado $\varepsilon \in [0, \mu(B_X))$, sea $x \in X \setminus B_X$ tal que $\|x\| > \dfrac{\mu(B_X)}{\mu(B_X) - \varepsilon}$. Entonces

$$\varepsilon < \frac{\mu(B_X)(\|x\| - 1)}{\|x\|} \leq \mu(R_x).$$

Por lo tanto, $1 + P_{X,\mu}(\varepsilon) \leq \dfrac{\mu(B_X)}{\mu(B_X) - \varepsilon}$ y así

$$P_{X,\mu}(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{\mu(B_X) - \varepsilon}.$$

(c) Es consecuencia del apartado (b).

(d) Si $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{\mu(B_X)}{2}\right)$, entonces $\mu(B_X) - \varepsilon > \dfrac{\mu(B_X)}{2}$ y

$$\frac{1}{\mu(B_X) - \varepsilon} < \frac{2}{\mu(B_X)}$$

y, teniendo en cuenta el apartado (b) resulta:

$$P_{X,\mu}(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{\mu(B_X) - \varepsilon} < \frac{2\varepsilon}{\mu(B_X)}.$$

□

Terminamos esta sección comprobando que los módulos que hemos definido son efectivamente adecuados para la propiedad (β).

PROPOSICIÓN 3.1.6.

Sea $P_{0,\mu}(X) = \sup\{\varepsilon \geq 0 : P_{X,\mu}(\varepsilon) = 0\}$. *Entonces el espacio* X *tiene la propiedad* (β) *si y sólo si* $P_{0,\mu}(X) = 0$.

Demostración.

Supongamos que X tiene la propiedad (β). Dado $\varepsilon > 0$, si $\delta > 0$ es tal que $1 < \|x\| < 1 + \delta$ implica que $\mu(R_x) < \varepsilon$ será $P_{X,\mu}(\varepsilon) > \delta > 0$ y, por lo tanto, $P_{0,\mu}(X) = 0$.

Recíprocamente, sea $P_{0,\mu}(X) = 0$. Entonces $P_{X,\mu}(\varepsilon) > 0$ si $\varepsilon > 0$; así, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = P_{X,\mu}(\varepsilon)$ resulta que si $1 < \|x\| < 1 + \delta$ entonces $\mu(R_x) < \varepsilon$ y, por lo tanto, X tiene la propiedad (β). □

3.2. Relación entre los módulos de no compacidad.

La proposición siguiente nos permite relacionar entre si los módulos definidos hasta ahora.

PROPOSICIÓN 3.2.1.

(a) $P_{X,\alpha}(\varepsilon) \leq P_{X,\beta}(\varepsilon)$ para todo $\varepsilon \in [0, \beta(B_X))$

(b) $P_{X,\beta}(\varepsilon) \leq P_{X,\chi}(\varepsilon) \leq P_{X,\alpha}(2\varepsilon), \quad \varepsilon \in [0,1)$

(c) $\frac{P_{X,\beta}(\varepsilon)}{P_{X,\beta}(\varepsilon)+2} \leq 2R''_X(2\varepsilon), \quad \varepsilon \in \left[0, \frac{\beta(B_X)}{2}\right).$

(d) $R''_X(\varepsilon) \leq 2 \lim_{\varepsilon' \to \varepsilon^+} P_{X,\beta}(2\varepsilon'), \quad \varepsilon \in \left[0, \frac{\beta(B_X)}{2}\right).$

Demostración.

Los apartados (a) y (b) son consecuencia inmediata de las relaciones entre las medidas de no compacidad α, χ y β:

$$\chi(A) \leq \beta(A) \leq \alpha(A) \leq 2\chi(A)$$

para todo subconjunto acotado A de X.

(c) Sea $s = P_{X,\beta}(\varepsilon)$. La desigualdad resulta evidente si $s = 0$. Supongamos entonces que $s \neq 0$. Observemos que dado $x \in X$ con $1 < \|x\| < 1 + s$, si consideramos una sucesión $\{x_n\}$ en R_x, puesto que $\beta(R_x) < \varepsilon$ será $\text{sep}(\{x_n\}) < \varepsilon$.

Sea r un número real, $0 < r < s$, $\{x_n\}$ una sucesión en B_X con $\text{sep}(\{x_n\}) \geq 2\varepsilon$ y x un punto arbitrario de B_X.

Vamos a probar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$[x, x_n] \cap \left(1 - \frac{r}{s+2}\right) B_X \neq \emptyset,$$

en donde $[x, x_n]$ representa el segmento determinado por los puntos x y x_n.

Supongamos por contradicción que

$$[x, x_n] \cap \left(1 - \frac{r}{s+2}\right) B_X = \emptyset$$

y tomemos $y = (1+r)x$. Entonces

$$\|y\| = (1+r)\|x\| \leq 1+r < 1+s$$

y

$$\|y\| > (1+r)\left(1 - \frac{r}{s+2}\right) = 1 + \frac{r}{s+2}(s+1-r) > 1.$$

Por lo tanto $1 < \|y\| < 1+s$. Sea $y_n = \dfrac{y + x_n}{2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Podemos entonces escribir:

$$y_n = \left(1 + \frac{r}{2}\right)\left[\frac{1+r}{2+r}x + \frac{1}{2+r}x_n\right]$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|y_n\| &> \left(1 + \frac{r}{2}\right)\left(1 - \frac{r}{s+2}\right) \\ &= 1 - \frac{r}{s+2} + \frac{r}{2} - \frac{r^2}{2(s+2)} \\ &= 1 + \frac{r}{2(s+2)}(s-r) > 1.\end{aligned}$$

De esta forma hemos demostrado que la sucesión $\{y_n\}$ está contenida en R_y y así, en virtud de la observación con la que iniciamos la prueba, resulta que $\text{sep}(\{y_n\}) < \varepsilon$. En consecuencia $\text{sep}(\{x_n\}) < 2\varepsilon$ en contradicción con la hipótesis.

Por lo tanto existen $i \in \mathbb{N}$, λ_0, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$ tales que

$$\|\lambda_0 x + \lambda_1 x_i\| \leq 1 - \frac{r}{s+2}.$$

Supongamos que $\lambda_0 \geq \lambda_1$ (en el otro caso se razona análogamente). Entonces

$$\frac{x + x_i}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda_0}(\lambda_0 x + \lambda_1 x_i) + \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)x_i\right]$$

y, por lo tanto,

$$\left\|\frac{x + x_i}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda_0}\left(1 - \frac{r}{s+2}\right) + \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\right] \leq 1 - \frac{r}{2(s+2)}.$$

En resumen hemos obtenido que si $x \in B_X$ y $\{x_n\} \subset B_X$ con $\text{sep}(\{x_n\}) \geq 2\varepsilon$, existe un término de la sucesión x_i tal que

$$\left\|\frac{x + x_i}{2}\right\| \leq 1 - \frac{r}{2(s+2)}$$

y, por lo tanto,

$$\sup\left\{\inf\left\{\frac{\|x+x_n\|}{2}:n\in\mathbb{N}\right\}\{x_n\}\subset B_X,\,x\in B_X,\,\operatorname{sep}(\{x_n\})\geq 2\varepsilon\right\}\leq$$

$$1-\frac{r}{2(s+2)}.$$

De esto se sigue que

$$1-\sup\left\{\inf\left\{\frac{\|x+x_n\|}{2}:n\in\mathbb{N}\right\}:\{x_n\}\subset B_X,\,x\in B_X,\,\operatorname{sep}(\{x_n\})\geq 2\varepsilon\right\}\geq$$

$$\frac{r}{2(s+2)}.$$

Por lo tanto

$$r\leq 2(s+2)R''_X(2\varepsilon).$$

Y, puesto que r ha sido elegido arbitrariamente menor que $P_{X,\beta}(\varepsilon)$, concluimos la demostración de este apartado.

d) Supongamos que $R''_X(\varepsilon)>0$. Observemos que dado $x\in B_X$ y $\{x_n\}\subset B_X$ con $\operatorname{sep}(\{x_n\})\geq\varepsilon$, existe $i\in\mathbb{N}$ tal que

$$\left\|\frac{x+x_i}{2}\right\|<1-\frac{R''_X(\varepsilon)}{2}.$$

Tomemos $x\in X\setminus B_X$ con $1<\|x\|<1+\dfrac{R''_X(\varepsilon)}{2}$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión contenida en R_x, entonces, teniendo en cuenta el Corolario 1.7.3, $\dfrac{x+x_n}{2}\in R_x$ y

$$1<\left\|\frac{x+x_n}{2}\right\|<1+\frac{R''_X(\varepsilon)}{2}$$

para todo $n\in\mathbb{N}$.

Sean $y=\left(1-\dfrac{R''_X(\varepsilon)}{2}\right)x$ e $y_n=\left(1-\dfrac{R''_X(\varepsilon)}{2}\right)x_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Entonces:

$$\|y\|=\left(1-\frac{R''_X(\varepsilon)}{2}\right)\|x\|<1-\frac{R''_X(\varepsilon)^2}{4}<1.$$

Y, análogamente, $\|y_n\|<1$. Por lo tanto $y\in B_X$ y, para todo $n\in\mathbb{N}$, $y_n\in B_X$.

Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos :

$$\left\|\frac{y+y_n}{2}\right\| = \left(1 - \frac{R''_X(\varepsilon)}{2}\right)\left\|\frac{x+x_n}{2}\right\| > \left(1 - \frac{R''_X(\varepsilon)}{2}\right).$$

Por lo tanto, debe ser $\text{sep}(\{y_n\}) < \varepsilon$. En consecuencia:

$$\text{sep}(\{x_n\}) = \frac{1}{1 - \frac{R''_X(\varepsilon)}{2}}\,\text{sep}(\{y_n\}) < \frac{2}{2 - R''_X(\varepsilon)}\varepsilon < 2\varepsilon.$$

Así resulta que si $\{x_n\} \subset R_x$ con $1 < \|x\| < 1 + \frac{R''_X(\varepsilon)}{2}$, entonces $\text{sep}(\{x_n\}) < 2\varepsilon$.

Vamos ahora a concluir la demostración. Sea $\varepsilon' > \varepsilon$ y $x \in X$ con $\|x\| > 1$. Si $\beta(R_x) \geq 2\varepsilon'$, entonces $\|x\| \geq 1 + \frac{R''_X(\varepsilon)}{2}$. Así:

$$\inf\{\|x\| \;: x \in X,\, \|x\| > 1,\; \beta(R_x) \geq 2\varepsilon'\} \geq 1 + \frac{R''_X(\varepsilon)}{2}.$$

Por lo tanto

$$2P_{X,\beta}(2\varepsilon') \geq R''_X(\varepsilon)$$

para todo $\varepsilon' > \varepsilon$, lo que termina la demostración. □

El corolario siguiente es consecuencia inmediata de la proposición anterior.

<u>COROLARIO 3.2.2.</u>

(a) $P_{0,\beta}(X) \leq P_{0,\alpha}(X)$.

(b) $P_{0,\alpha}(X) \leq 2P_{0,\chi}(X) \leq 2P_{0,\beta}(X)$.

(c) $\frac{R''_0(X)}{2} \leq P_{0,\beta}(X)$.

(d) $P_{0,\beta}(X) \leq 2R''_0(X)$.

Podemos reunir en una sola cadena las desigualdades anteriores:

$$\frac{R''_0(X)}{2} \leq P_{0,\beta}(X) \leq P_{0,\alpha}(X) \leq 2P_{0,\chi}(X) \leq 2P_{0,\beta}(X) \leq 4R''_0(X).$$

Como consecuencia del Corolorario 3.2.2, del Teorema 2.3.1 y del Corolario 2.3.5, podemos enunciar el siguiente teorema con el que terminamos esta Sección:

TEOREMA 3.2.3.

Si cualquiera de los coeficientes $P_{0,\alpha}(X)$ o $P_{0,\beta}(X)$ *es menor que* $1/2$ *o el coeficiente* $P_{0,\chi}(X)$ *es menor que* $1/4$ *los espacios* X *y* X^* *son reflexivos y tienen estructura normal.*

3.3. Cálculo de los módulos en los espacios ℓ^p.

En esta sección calculamos el valor de los módulos $P_{X,\alpha}$, $P_{X,\chi}$ y $P_{X,\beta}$ en los espacios ℓ^p, $1 < p < +\infty$.

Comenzamos enunciando y, demostrando en su caso, algunos lemas previos.

El lema siguiente fué demostrado por Rolewicz en [Rol] y juega un importante papel en esta sección.

LEMA 3.3.1.

Sea X *un espacio de Banach uniformemente convexo. Entonces existe una función positiva y creciente* $f(r)$ *definida para todo número positivo* r, *tal que* $\lim_{r\to 0^+} f(r) = 0$ *y* $\operatorname{diam}(R_x) \le f(\|x\|-1)$ *para todo* $x \in X \setminus B_X$.

En realidad la existencia de la función f es una condición necesaria y suficiente para que el espacio X sea uniformemente convexo pero no necesitamos nada más que el lema enunciado.

LEMA 3.3.2.

Sea X *un espacio de Banach uniformemente convexo,* $x \in X \setminus B_X$ *y* ε *tal que* $0 < \varepsilon < \|x\| - 1$. *Consideremos el conjunto*

$$R_{x,\varepsilon} = \{z = \lambda y + (1-\lambda)x \,:\, 0 \le \lambda < 1,\ \|y\| \le 1,\ \|z\| \ge 1+\varepsilon\}.$$

Entonces $R_x \subset R_{x,\varepsilon} + f(\varepsilon)B_X$, *en donde* f *es la función cuya existencia asegura el lema anterior.*

Demostración.

Sea $z \in R_x$ tal que $1 < \|z\| < 1+\varepsilon$ y consideremos el segmento $[z,x]$. Entonces por la continuidad de la norma existe $z' \in (z,x)$ tal que $\|z'\| = 1+\varepsilon$. Así $z' \in R_{x,\varepsilon}$. Comprobemos que $z \in R_{z'}$:

$$z' = \mu x + (1-\mu)z, \quad \mu \in (0,1).$$

De esto resulta que

$$\begin{aligned}
& x = \frac{1}{\mu}z' + \frac{\mu-1}{\mu}z \\
\Rightarrow\ & z = \frac{1-\lambda}{\mu}z' + \frac{1-\lambda}{\mu}(\mu-1)z + \lambda y \\
\Rightarrow\ & z\left(1 + \frac{1-\lambda}{\mu}(1-\mu)\right) = \frac{1-\lambda}{\mu}z' + \lambda y \\
\Rightarrow\ & z = \frac{1-\lambda}{\mu\lambda+1-\lambda}z' + \frac{\mu\lambda}{\mu\lambda+1-\lambda}y.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $z \in R_{z'}$ y así tenemos

$$\|z-z'\| \leq \operatorname{diam}(R_{z'}) \leq f(\|z'\|-1) = f(\varepsilon),$$

de donde se sigue que $z \in R_{x,\varepsilon} + f(\varepsilon)B_X$ y concluimos con que $R_x \subset R_{x,\varepsilon} + f(\varepsilon)B_X$ como queríamos demostrar. $\square$

El Teorema siguiente es fundamental en esta sección:

TEOREMA 3.3.4.

Sea $1 < p < +\infty$, $x \in \ell^p$, $\|x\| > 1$. *Entonces*

$$\beta(R_x) = \left[2\left(1 - \frac{1}{\|x\|^q}\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

en donde q es el exponente conjugado de p , es decir, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Demostración.

Haremos la demostración en dos etapas. En la primera supondremos que x es un elemento finito dimensional de ℓ^p, esto es $x = (x^1,\, x^2,\, ...,\, x^n,\, 0,\, 0,\, ...)$ con $\|x\| > 1$.

Sea $y \in Y_x$ (recordemos que el conjunto Y_x se definió en la Proposición 1.7.2) y pongamos $y = a + b$ con

$$a = (a^1, a^2, ..., a^n, 0, 0, ...), \quad b = (0, 0, ...^{n)}....0, b^1, b^2, ...).$$

Entonces $\|y\|^p = \|a\|^p + \|b\|^p = 1$.

Consideremos el funcional que norma y, G_y, dado por

$$G_y = (a^1|a^1|^{p-2}, a^2|a^2|^{p-2}, ..., a^n|a^n|^{p-2}, b^1|b^1|^{p-2}, b^2|b^2|^{p-2}, ...)$$

y el siguiente vector en ℓ^q:

$$J_a = (a^1|a^1|^{p-2}, a^2|a^2|^{p-2}, ..., a^n|a^n|^{p-2}, 0, 0, ...).$$

Puesto que $\|\lambda y + (1-\lambda)x\| > 1$ para todo $0 \leq \lambda < 1$ y G_y es la derivada direccional (Gateaux) de la norma , resulta que $G_y(x-y) \geq 0$ de donde se deduce que $G_y(x) \geq 1$. Por lo tanto:

$$1 \leq G_y(x) = J_a(x) \leq \|x\|\|J_a\|_q.$$

Teniendo en cuenta que $\|J_a\|_q = \|a\|^{\frac{p}{q}}$, podemos concluir que $1 \leq \|a\|^{\frac{p}{q}}\|x\|$, esto es

$$1 \leq \|a\|^p\|x\|^q,$$

de donde se sigue

$$\|b\|^p \leq 1 - \frac{1}{\|x\|^q}.$$

Por lo tanto

$$R_n(Y_x) \subset \left(1 - \frac{1}{\|x\|^q}\right)^{\frac{1}{p}} B_{\ell^p},$$

en donde R_n es el operador resto $R_n : \ell^p \longrightarrow \ell^p$ definido por

$$R_n(\sum_{i=1}^{+\infty} x^i e_i) = \sum_{i=n+1}^{+\infty} x^i e_i$$

y $\{e_i\}$ es la base natural de Schauder de ℓ^p. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned}\beta(R_x) &= \beta(\mathrm{co}(Y_x \cup \{x\}) \setminus B_{\ell^p}) \\ &\leq \beta(\mathrm{co}(Y_x \cup \{x\})) = \beta(Y_x) = \beta(R_n(Y_x)) \\ &\leq \beta\left[\left(1 - \frac{1}{\|x\|^q}\right)^{\frac{1}{p}} B_{\ell^p}\right] \\ &= \left[2\left(1 - \frac{1}{\|x\|^q}\right)\right]^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Veamos que en realidad $\beta(R_x) = \left[2\left(1 - \frac{1}{\|x\|^q}\right)\right]^{\frac{1}{p}}$. Para demostrarlo consideremos el conjunto siguiente:

$$A = \left\{\left(\frac{x^1}{\|x\|^q}, \ldots\ldots, \frac{x^n}{\|x\|^q}, c^1, c^2, \ldots.\right) : \|(c^1, c^2, \ldots..)\| = \left(1 - \frac{1}{\|x\|^q}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}.$$

Este conjunto tiene las propiedades siguientes:

(i) $\beta(A) = \left[2\left(1 - \frac{1}{\|x\|^q}\right)\right]^{\frac{1}{p}}$ porque $\beta(A) = \beta\left(\left(1 - \frac{1}{\|x\|^q}\right)^{\frac{1}{p}} S_{\ell^p}\right)$.

(ii) $A \subset Y_x$.

En efecto, si $y \in A$ entonces

$$\|y\|^p = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x^i|^p}{\|x\|^{pq}} + 1 - \frac{1}{\|x\|^q} = 1.$$

Además, para todo $0 \leq \lambda < 1$ tenemos:

$$\begin{aligned}\|\lambda y + (1-\lambda)x\|^p &= \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\lambda x^i}{\|x\|^q} + (1-\lambda)x^i\right|^p + \left(1 - \frac{1}{\|x\|^q}\right)\lambda^p \\ &= \frac{1}{\|x\|^q}\left(\lambda + \|x\|^q(1-\lambda)\right)^p + \left(1 - \frac{1}{\|x\|^q}\right)\lambda^p > 1.\end{aligned}$$

Esta última desigualdad se comprueba fácilmente. Sea $\phi(\lambda)$ la función del primer miembro, entonces $\phi(1) = \|y\| = 1$ y $\phi'(\lambda) < 0$ en $[0,1]$.

Puesto que $Y_x \subset \bar{R}_x$ obtenemos que $\beta(A) \leq \beta(Y_x) \leq \beta(\bar{R}_x) = \beta(R_x)$ y así

$$\left[2\left(1 - \frac{1}{\|x\|^q}\right)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \beta(R_x).$$

Así terminamos la primera etapa de la demostración.

Probaremos ahora el caso general. Sea $x = (x^1, x^2, x^3, ...)$ con $\|x\| > 1$. Por el caso finito dimensional, que acabamos de ver, sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que sea $\|P_n(x)\| > 1$ tenemos:

$$\beta(R_{P_n x}) = \left[2\left(1 - \frac{1}{\|P_n x\|^q}\right)\right]^{\frac{1}{p}},$$

en donde P_n es la proyección natural asociada a la base $\{e_i\}$ del espacio ℓ^p. Por lo tanto, puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \left[2\left(1 - \frac{1}{\|P_n x\|^q}\right)\right]^{\frac{1}{p}} = \left[2\left(1 - \frac{1}{\|x\|^q}\right)\right]^{\frac{1}{p}},$$

es suficiente con demostrar que $\lim_{n\to\infty} \beta(R_{P_n x}) = \beta(R_x)$ para llegar al resultado deseado.

Sea $0 < \varepsilon < \dfrac{\|x\| - 1}{2}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - P_n x\| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Entonces $\|x\|$ y $\|P_n x\|$ son mayores que $1 + \varepsilon$.

Veamos que $R_{P_n x,\varepsilon} \subset R_x + \varepsilon B_{\ell^p}$ para todo $n \geq n_0$.

Sea $\bar{z} \in R_{P_n x,\varepsilon}$, esto es, $\bar{z} = \lambda y + (1 - \lambda) P_n x$ con $\|z\| \geq 1 + \varepsilon$, y sea $z = \lambda y + (1 - \lambda)x$. Tenemos entonces:

$$\|z - \bar{z}\| = (1 - \lambda)\|x - P_n x\| < (1 - \lambda)\varepsilon < \varepsilon$$

y

$$\|z\| \geq \|\bar{z}\| - \|\bar{z} - z\| > 1 + \varepsilon - \varepsilon = 1.$$

Por lo tanto $z \in R_x$ y así $R_{P_n x,\varepsilon} \subset R_x + \varepsilon B_{\ell^p}$.

Análogamente podemos comprobar que $R_{x,\varepsilon} \subset R_{P_n x} + \varepsilon B_{\ell^p}$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto, teniendo en cuenta el Lema 3.3.2 obtenemos que

$$R_{P_n x} \subset R_{P_n x,\varepsilon} + f(\varepsilon) B_{\ell^p} \subset R_x + (\varepsilon + f(\varepsilon)) B_{\ell^p}$$

para todo $n \geq n_0$. En consecuencia

$$\beta(R_{P_n x}) \leq \beta(R_x) + (\varepsilon + f(\varepsilon)) 2^{\frac{1}{p}}.$$

Análogamente, para todo $n \geq n_0$, tenemos:

$$R_x \subset R_{x,\varepsilon} + f(\varepsilon)B_{\ell^p} \subset R_{P_n x} + (\varepsilon + f(\varepsilon))B_{\ell^p},$$

y así:

$$\beta(R_x) \leq \beta(R_{P_n x}) + (\varepsilon + f(\varepsilon))2^{\frac{1}{p}}.$$

Se sigue de esto que para todo $n \geq n_0$

$$|\beta(R_x) - \beta(R_{P_n x})| \leq (\varepsilon + f(\varepsilon))2^{\frac{1}{p}}.$$

Y, puesto que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} f(\varepsilon) = 0$, obtenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \beta(R_{P_n x}) = \beta(R_x)$ con lo que se concluye la demostración. □

Con argumentos semejantes podemos probar los siguientes resultados.

COROLARIO 3.3.4.

Sea $1 < p < +\infty$, $x \in \ell^p$, y $\|x\| > 1$. *Entonces*

$$\alpha(R_x) = 2\left(1 - \frac{1}{\|x\|^q}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\chi(R_x) = \left(1 - \frac{1}{\|x\|^q}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

TEOREMA 3.3.5.

Si $1 < p < +\infty$ *y* $0 \leq \varepsilon < 2^{\frac{1}{p}}$, *entonces*

$$P_{\ell^p,\beta}(\varepsilon) = \left(\frac{2}{2 - \varepsilon^p}\right)^{\frac{1}{q}} - 1.$$

Demostración.

De acuerdo con el teorema anterior, tenemos:

$$\inf\{\|x\| > 1 : \beta(R_x) \geq \varepsilon\} = \inf\left\{\delta > 1 : \left[2\left(1 - \frac{1}{\delta^q}\right)\right]^{\frac{1}{p}} \geq \varepsilon\right\}.$$

Y, puesto que la función

$$\delta \longrightarrow \left[2\left(1-\frac{1}{\delta^q}\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

es estrictamente creciente, el ínfimo se alcanza cuando

$$\left[2\left(1-\frac{1}{\delta^q}\right)\right]^{\frac{1}{p}} = \varepsilon,$$

esto es, cuando

$$\delta = \left(\frac{2}{2-\varepsilon^p}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Por lo tanto:

$$P_{\ell^p,\beta}(\varepsilon) = \left(\frac{2}{2-\varepsilon^p}\right)^{\frac{1}{q}} - 1.$$

como queríamos demostrar. □

De manera semejante se pueden probar los resultados del corolario siguente:

COROLARIO 3.3.6.

(a) Si $1 < p < +\infty$ y $0 \leq \varepsilon < 2$, *entonces*

$$P_{\ell^p,\alpha}(\varepsilon) = \left(\frac{2^p}{2^p-\varepsilon^p}\right)^{\frac{1}{q}} - 1.$$

(b) Si $1 < p < +\infty$ y $0 \leq \varepsilon < 1$, *entonces*

$$P_{\ell^p,\chi}(\varepsilon) = \left(\frac{1}{1-\varepsilon^p}\right)^{\frac{1}{q}} - 1.$$

3.4. Cálculo de los módulos en los espacios ℓ^1, c_0, c y ℓ^∞.

El cálculo de los módulos en estos espacios es sencillo y podemos resumirlo en el teorema que damos a continuación.

TEOREMA 3.4.1.

Sea X cualquiera de los espacios ℓ^1, c_0, c o ℓ^∞. Entonces para todo $\eta > 0$ existe $x \in X$ con $\|x\| = 1 + \eta$ tal que

$$\beta(R_x) = \alpha(R_x) = 2, \ \chi(R_x) = 1$$

y, por lo tanto,

$$P_{X,\beta}(\varepsilon) = P_{X,\alpha}(\varepsilon) = P_{X,\chi}(\frac{\varepsilon}{2}) = 0$$

para todo $\varepsilon \in [0, 2)$.

Demostración.

Por la relación existente entre las medidas de no compacidad (**1.3**) y entre los módulos (Proposición 3.2.1) bastará comprobar en cada caso que para todo $\eta > 0$ existe $x \in X$ con $\|x\| = 1 + \eta$ tal que $\beta(R_x) = 2$.

(a) Sea $X = \ell^1$ y $x = (1 + \eta, 0, 0, 0, \ldots)$. Consideremos la sucesión $\{y_n\}$ siguiente:

$$y_1 = (1, 0, 0, \ldots.),$$

$$y_2 = (0, 1, 0, \ldots.),$$

$$y_3 = (0, 0, 1, \ldots.),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Se tiene que $\|y_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además $y_n \in Y_x$ para todo $n \in N$. En efecto:

$$\|\lambda y_n + (1 - \lambda)x\| = \lambda + (1 - \lambda)(1 + \eta) = 1 + \eta(1 - \lambda) > 1$$

para todo $\lambda \in [0, 1)$. Por lo tanto, como $\{y_n\} \subset Y_x \subset \bar{R}_x$ y $\text{sep}(\{y_n\}) = 2$, resulta $\beta(R_x) = 2$ y, en consecuencia,

$$P_{X,\beta}(\varepsilon) = \inf\{\|x\| \ : x \in X, \ \|x\|\beta(R_x) \geq \varepsilon\} - 1 = 0$$

para todo $\varepsilon \in [0, 2)$.

(b) Sea $X = c_0$. Tomemos como antes $x = (1+\eta,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots.)$ y consideremos la sucesión $\{y_n\}$ siguiente:

$$y_1 = (1, -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots\ldots..)$$

$$y_2 = (1,\ 1, -1,\ 0,\ 0,\ \ldots\ldots..)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n = (1,\ 1,\ 1,\ ..^{(n)}..1, -1,\ 0,\ 0,\ \ldots).$$

Se tiene que $\|y_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además $y_n \in Y_x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ya que

$$\|\lambda y_n + (1-\lambda)x\| = \lambda + (1-\lambda)(1+\eta) = 1 + \eta(1-\lambda) > 1$$

para todo $\lambda \in [0,1)$. Como en el caso anterior $\operatorname{sep}(\{y_n\}) = 2$. En consecuencia $\beta(R_x) = 2$ como queríamos demostrar.

Los casos de c y ℓ^∞ se demuestran como el caso (b). $\square$

CAPÍTULO IV. CONVEXIDAD UNIFORME. CASI-CONVEXIDAD UNIFORME.

En el capítulo I quedó establecido que la convexidad uniforme (UC) y la casi-convexidad uniforme (NUC) de un espacio de Banach X, pueden ser descritas en términos de restos R_x de elementos x situados fuera de la bola unidad B_X del espacio. En este capítulo definimos módulos adecuados para estas propiedades utilizando puntos que están fuera de la bola unidad. Los designaremos por D_X para el de la convexidad uniforme y $D_{X,\mu}$ para el de la casi-convexidad uniforme asociado a la medida de no compacidad μ. Utilizando las técnicas desarrolladas en el Capítulo III estudiamos sus propiedades y sus relaciones, respectivamente, con el módulo de Clarkson y con los módulos de convexidad no compacta.

En la sección **4.1** se obtienen algunos resultados generales sobre el diámetro de los conjuntos R_x. Definimos el módulo D_X, la característica de convexidad $D_0(X)$ y damos una relación entre ésta y la característica de convexidad de Clarkson $\varepsilon_0(X)$.

En la sección **4.2** calculamos el valor del módulo en los espacios de Hilbert separables.

En la Sección **4.3** damos una "inversión" del módulo D_X definiendo para cada $x \in S_X$ la función $\phi_x(t) = \operatorname{diam}(R_{(1+t)x})$. La función

$$\phi_X(t) = \sup\{\phi_x(t) \, : x \in S_X\}$$

resulta ser también un módulo para la convexidad uniforme. Este módulo es continuo en los espacios uniformemente convexos.

En la sección **4.4** definimos los módulos $D_{X,\mu}$ para la casi-convexidad uniforme. Para esto definimos, asociada a la medida de no compacidad μ, una función $\tilde{\mu}$ en la familia de conjuntos acotados de X:

$$\tilde{\mu}(A) = \sup\{\mu(B) \, : B\text{convexo}, B \subset A\}.$$

Definimos los módulos de forma análoga a como se hace para los módulos $P_{X,\mu}$ pero sustituyendo la medida de no compacidad μ por la función $\tilde{\mu}$ y estudiamos sus propiedades y relaciones con los módulos de convexidad no compacta.

En la Sección **4.5** calculamos el valor de los módulos en los espacios de Hilbert separables.

4.1. Un módulo para la convexidad uniforme.

Recordemos que la convexidad uniforme del espacio X puede caracterizarse en términos de restos [Ro1]:

Un espacio de Banach X es UC si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $1 < \|x\| < 1 + \delta$ entonces $\operatorname{diam}(R_x) < \varepsilon$.

Los dos lemas siguiente nos dan alguna información acerca del diámetro de los conjuntos R_x definidos en el Capítulo I.

LEMA 4.1.1.

Sea X un espacio de Banach y $x \in X \setminus B_X$. Entonces

$$\operatorname{diam}(R_x) = \max\{\operatorname{diam}(Y_x), \sup\{\|x-y\| \, : y \in Y_x\}\}.$$

Demostración.

Sean z_1, $z_2 \in R_x$. Entonces por la Proposición 1.7.2, en la que se definen los conjuntos Y_x, existen números reales λ y μ en el intervalo $[0,1]$ y puntos y_1 e y_2 en Y_x tales que $z_1 = \lambda y_1 + (1-\lambda)x$ y $z_2 = \mu y_2 + (1-\mu)x$. Por lo tanto z_1 y z_2 pertenecen a $\operatorname{co}(\{x, y_1, y_2\})$ y así:

$$\begin{aligned}\|z_1 - z_2\| &\le \operatorname{diam}(\operatorname{co}(\{x, y_1, y_2\})) = \operatorname{diam}(\{x, y_1, y_2\}) \\ &\le \max\{\operatorname{diam}(Y_x), \sup\{\|x-y\| \, : y \in Y_x\}\}.\end{aligned}$$

Se deduce que

$$\operatorname{diam}(R_x) \leq \max\{\operatorname{diam}(Y_x), \sup\{\|x-y\| \,:\, y \in Y_x\}\}.$$

La otra desigualdad es consecuencia inmediata de la Proposición 1.7.2. □

LEMA 4.1.2.

Sea X un espacio de Banach y $x \in X \setminus B_X$. Entonces

$$\max\left\{\|x\|-1, \frac{2(\|x\|-1)}{\|x\|}\right\} \leq \operatorname{diam}(R_x) \leq \|x\|+1.$$

Demostración.

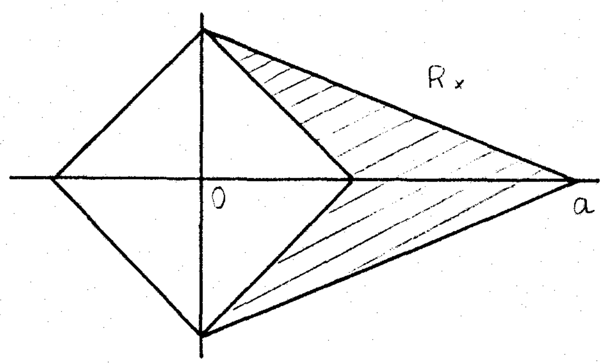
Puesto que $\frac{x}{\|x\|} \in Y_x$ y $\left\|x - \frac{x}{\|x\|}\right\| = \|x\|-1$, se deduce del Lema 4.1.1 que $\operatorname{diam}(R_x) \geq \|x\|-1$.

La desigualdad $\frac{2(\|x\|-1)}{\|x\|} \leq \operatorname{diam}(R_x)$ se demuestra como la Proposición 3.1.2 sustituyendo la medida de no compacidad $\mu(A)$ de un conjunto acotado A por $\operatorname{diam}(A)$.

Para la otra desigualdad, como $\operatorname{diam}(Y_x) \leq 2 \leq \|x\|+1$ y

$$\sup\{\|x-y\| \,:\, y \in Y_x\} \leq \|x\|+1,$$

se deduce que $\operatorname{diam}(R_x) \leq \|x\|+1$. □



Obsérvese que esta última desigualdad es la mejor posible en la clase de todos los espacios de Banach. En efecto, si consideramos el espacio $(\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$ y el elemento $x = (a, 0)$ con $a > 1$, entonces el diámetro del conjunto R_x es $\operatorname{diam}(R_x) = a+1 = \|x\|+1$.

DEFINICIÓN 4.1.3.

Sea X un espacio de Banach. Definimos el siguiente módulo de convexidad:

$$D_X : [0, +\infty) \to [0, +\infty),$$
$$D_X(\varepsilon) = \inf \{\|x\| : x \in X,\ \|x\| > 1, \operatorname{diam}(R_x) \geq \varepsilon\} - 1.$$

La *característica de convexidad* del espacio X correspondiente a este módulo es:

$$D_0(X) = \sup \{\varepsilon \geq 0 : D_X(\varepsilon) = 0\}.$$

Un espacio de Banach X es uniformemente convexo si y solo si $D(\varepsilon) > 0$ para todo $\varepsilon > 0$. En otras palabras X es UC si y solo si $D_0(X) = 0$.

PROPOSICIÓN 4.1.4.

La función D_X tiene las siguientes propiedades:

(a) Es creciente en $[0, +\infty)$ y $D_X(0) = 0$.

(b) Para todo $\varepsilon \in [0, 1]$ se tiene $0 \leq D_X(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}$. *En particular, si $\varepsilon \in (0, 1)$ entonces $D_X(\varepsilon) < \varepsilon$.*

(c) Es continua en 0.

Demostración.

Haremos solamente la del apartado (b) : Dado $\varepsilon \in [0, 1]$ sea $x \in X \setminus B_X$ tal que $\|x\| \geq \frac{2}{2-\varepsilon}$. Entonces

$$\varepsilon \leq \frac{2(\|x\| - 1)}{\|x\|} \leq \operatorname{diam}(R_x).$$

Por lo tanto:

$$\inf \{\|x\| : x \in X \setminus B_X, \operatorname{diam}(R_x) \geq \varepsilon\} = 1 + D_X(\varepsilon) \leq \frac{2}{2-\varepsilon}$$

y así

$$D_X(\varepsilon) \leq \frac{2}{2-\varepsilon} - 1 = \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}.$$

□

La proposición siguiente nos permitirá establecer unas relaciones entre la característica de convexidad $D_0(X)$ y la característica de convexidad $\varepsilon_0(X)$ de Clarkson.

PROPOSICIÓN.4.1.5.

Sea X un espacio de Banach. Entonces:
(a) $\frac{D_X(\varepsilon)}{D_X(\varepsilon)+2} \leq 2\delta_X(\varepsilon)$ *para todo* $\varepsilon \in [0,1]$.
(b) $\delta_X(\varepsilon) \leq 2 \lim\limits_{\varepsilon' \to \varepsilon^+} D_X(4\varepsilon')$ *para todo* $\varepsilon \in [0,2]$.

Demostración.

(a) La desigualdad se cumple evidentemente si $D_X(\varepsilon) = 0$. Sea entonces $D_X(\varepsilon) > 0$ y pongamos $D_X(\varepsilon) = s$. Sean $x_1,\ x_2 \in S_X$ tales que $\|x_1 - x_2\| \geq 2\varepsilon$, $[x_1, x_2]$ el segmento determinado por estos dos puntos y $x = (x_1 + x_2)/2$. Tomemos un número real r, $0 < r < s$.

Demostraremos por reducción al absurdo que

$$[x_1, x_2] \cap \left(1 - \frac{r}{s+2}\right) B_X \neq \emptyset.$$

Supongamos lo contrario. Sea $y = (1+r)x$, $y_i = (y + x_i)/2$, $i = 1, 2$.

Veamos que $1 < \|y\| < 1 + s$ y que $y_i \in R_y$. En efecto, tenemos:

$$\|y\| = (1+r)\|x\| < 1 + s,$$

$$\|y\| > (1+r)\left(1 - \frac{r}{s+2}\right) = 1 + \frac{r(1+s-r)}{2} > 1$$

$$\text{y} \quad \|y_i\| = \left\|\left(1 + \frac{r}{2}\right)\left(\frac{1+r}{2+r}x + \frac{1}{2+r}x_i\right)\right\|$$

$$> \left(1 + \frac{r}{2}\right)\left(1 - \frac{r}{s+2}\right) = 1 + \frac{r(s-r)}{2(s+2)} > 1.$$

Por lo tanto $y_1,\ y_2 \in R_y$. De esto se deduce que $\|y_1 - y_2\| < \varepsilon$ y en consecuencia $\|x_1 - x_2\| < 2\varepsilon$ en contradicción con la hipótesis hecha. Por lo tanto, existen números $\mu_1,\ \mu_2$; $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$, $\mu_1 + \mu_2 = 1$ tales que

$$\|\mu_1 x_1 + \mu_2 x_1\| \leq 1 - \frac{r}{s+2}.$$

Tenemos entonces:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mu_1}(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) x_2\right]$$

y, por lo tanto,

$$\left\|\frac{x_1+x_2}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mu_1}\left(1-\frac{r}{s+2}\right)+\left(1-\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\right] = 1-\frac{r}{2\mu_1(s+2)} \leq 1-\frac{r}{2(s+2)}.$$

Así hemos demostrado que si $x_1,\ x_2 \in S_X$ y $\|x_1-x_2\| \geq 2\varepsilon$, entonces:

$$\left\|\frac{x_1+x_2}{2}\right\| \leq 1-\frac{r}{2(s+2)}$$

de donde se deduce:

$$\sup\left\{\left\|\frac{x_1+x_2}{2}\right\| \ : x_1\,,\ x_2\ \in S_X\,,\ \|x_1-x_2\| \geq 2\varepsilon\right\} \leq 1-\frac{r}{2(s+2)}.$$

En consecuencia:

$$\delta_X(2\varepsilon) \geq \frac{r}{2(s+2)}.$$

Y puesto que esta relación se cumple para todo $r < s = D_X(\varepsilon)$ resulta como queríamos demostrar que:

$$\frac{D_X(\varepsilon)}{D_X(\varepsilon)+2} \leq 2\delta_X(2\varepsilon).$$

(b) Supongamos $\delta_X(\varepsilon) > 0$. Sea $x \in X \setminus B_X$ tal que

$$1 < \|x\| < 1+\frac{\delta_X(\varepsilon)}{2}.$$

Tomemos $x_1 \in R_x$, entonces $(x+x_1)/2 \in R_x$ y

$$1 < \left\|\frac{x+x_1}{2}\right\| < 1+\frac{\delta_X(\varepsilon)}{2}.$$

Sean

$$y = \left(1-\frac{\delta_X(\varepsilon)}{2}\right)x\,;\ y_1 = \left(1-\frac{\delta_X(\varepsilon)}{2}\right)x_1.$$

Entonces $\|y\| < 1$, $\|y_1\| < 1$ y

$$\left\|\frac{y+y_1}{2}\right\| = \left(1-\frac{\delta_X(\varepsilon)}{2}\right)\left\|\frac{x+x_1}{2}\right\| > 1-\frac{\delta_X(\varepsilon)}{2} > 1-\delta_X(\varepsilon).$$

Se deduce que $\|y-y_1\| < \varepsilon$ y así:

$$\|x-x_1\| = \frac{1}{1-\frac{\delta_X(\varepsilon)}{2}}\|y-y_1\| < \frac{\varepsilon}{1-\frac{\delta_X(\varepsilon)}{2}} < 2\varepsilon.$$

Por lo tanto, si x_1, $x_2 \in R_x$ entonces $\|x_1 - x_2\| \leq 4\varepsilon$. Sea $\varepsilon' > \varepsilon$. Si $\operatorname{diam}(R_x) \geq 4\varepsilon'$ entonces

$$\|x\| \geq 1 + \frac{\delta_X(\varepsilon)}{2}$$

y por lo tanto

$$\inf\{\|x\| \, : x \in X, \|x\| > 1, \ \operatorname{diam} R_x \geq 4\varepsilon'\} \geq 1 + \frac{\delta_X(\varepsilon)}{2}$$

y de esta desigualdad se sigue, teniendo en cuenta la monotonía de la función D_X, la desigualdad que queríamos demostrar. □

El corolario siguiente, consecuencia inmediata de la proposición, establece unas relaciones entre la característica de convexidad $D_0(X)$ y la característica de convexidad de Clarkson $\varepsilon_0(X)$.

<u>COROLARIO 4.1.7.</u>

Sea X un espacio de Banach. Entonces $\varepsilon_0(X) \leq 2D_0(X) \leq 8\varepsilon_0(X)$.

Teniendo en cuenta además la Proposición 1.5.4 podemos formular también el corolario siguiente.

<u>COROLARIO 4.1.8.</u>

Si el coeficiente de convexidad $D_0(X)$ es menor que 1/2 el espacio X es reflexivo y tiene estructura normal.

4.2. Cálculo del módulo de convexidad en los espacios de Hilbert.

Los espacios de Hilbert son a la vez suaves y estrictamente convexos. Comenzamos dando una caracterización de los conjuntos Y_x en este tipo de espacios.

Si X es un espacio suave, para todo $y \in X$, $y \neq 0$, existe un único $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ y tal que $f(y) = \|x\|$. En particular si $y \in S_X$ existe un único $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1 = f(y)$. Designamos este funcional por G_y.

LEMA 4.2.1.

Sea X un espacio de Banach suave y estrictamente convexo y $x \in X \setminus B_X$, entonces $Y_x = \{y \in S_X : G_y(x) \geq 1\}$.

Demostración.

Sea $y \in Y_x$. En la prueba del Teorema 3.3.4 demostramos que $G_y(x) \geq 1$

Veamos la desigualdad contraria. Sea $y \in S_X$ tal que $G_y(x) \geq 1$. Entonces para todo punto z del segmento $(y, x]$ resulta $G_y(z) \geq 1$. Si $G_y(x) > 1$, entonces $G_y(z) > 1$, $z \notin B_X$ y por lo tanto $y \in Y_x$. Supongamos pues que $G_y(x) = 1$. Si el segmento $(y, x]$ corta a la bola unidad B_X, existirá $z \in S_X$ tal que $z = \lambda y + (1-\lambda)x$, $0 < \lambda < 1$, y $G_y(z) = 1$, lo que está en contradicción con la hipótesis de ser el espacio X estrictamente convexo. Por lo tanto $y \in Y_x$ como queríamos demostrar. $\square$

EJEMPLO 4.2.2.

Sea $X = \ell^p$, $1 < p < +\infty$. Sea $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ la base natural de Schauder de ℓ^p. Consideremos el elemento $x = \delta e_1$, $\delta > 1$. Entonces

$$Y_x = \left\{ y = \sum_{i=1}^{\infty} y^i e_i = (y^1, y^2, y^3, \ldots) \in \ell^p \ : \ \|y\| = 1;\ y^1 \geq \delta^{\frac{1}{1-p}} \right\}.$$

En efecto: sea $y = (y^1, y^2, y^3, \ldots)$; $\|y\| = 1$, entonces el funcional G_y viene dado por

$$G_y = (y^1|y^1|^{p-2},\ y^2|y^2|^{p-2}, \ldots)$$

y, por lo tanto, $G_y(\delta e_1) \geq 1$ si y solo si $(y^1)^{p-1}\delta \geq 1$.

PROPOSICIÓN 4.2.3.

Sea H un espacio de Hilbert separable y $x \in H$ con $\|x\| > 1$. Entonces:

$$\operatorname{diam}(R_x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{\|x\|^2-1}}{\|x\|} & \text{si } \|x\| \leq 2 \\ \sqrt{\|x\|^2 - 1} & \text{si } \|x\| \geq 2. \end{cases}$$

Demostración.

Supondremos que H es un espacio de Hilbert de dimensión infinita. El caso finito dimensional es análogo.

Puesto que H es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita tiene una base numerable y ortonormal que representaremos por $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$.

Sea $x \in H$ con $\|x\| = \delta > 1$. Consideremos la sucesión $\{x, e_1, e_2, ..\}$. Aplicando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, podemos obtener una base de Schauder $\{u_1, u_2, u_3, \ldots\}$ tal que $u_1 = \frac{x}{\|x\|}$. De esta forma $x = (\delta, 0, 0, \ldots)$ y teniendo en cuenta el ejemplo anterior y que el espacio H es isómetrico a ℓ^2 resulta:

$$Y_x = \Big\{ y \in S_H,\ y = \sum_{i=1}^{\infty} y^i u_i = (y^1, y^2, y^3, \ldots.) : \frac{1}{\delta} \leq y^1 \leq 1 \Big\}.$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}\sup\left\{\|x-y\|^2 \ : \ y \in R_x\right\} =& \sup\left\{(\delta - y^1)^2 + 1 - {y^1}^2 : \frac{1}{\delta} \leq y^1 \leq 1\right\} \\ =& \left(\delta - \frac{1}{\delta}\right)^2 + 1 - \frac{1}{\delta^2} = \delta^2 - 1\end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$\sup\{\|x-y\| : y \in Y_x\} = \sqrt{\delta^2 - 1}.$$

Calculemos ahora el diámetro de Y_x. Consideremos los elementos y y z de Y_x siguientes:

$$y = \left(\frac{1}{\delta}, \frac{\sqrt{\delta^2-1}}{\delta}, 0, 0, \ldots\right); \quad z = \left(\frac{1}{\delta}, -\frac{\sqrt{\delta^2-1}}{\delta}, 0, 0, \ldots\right).$$

Entonces $\|y - z\| = \frac{2\sqrt{\delta^2-1}}{\delta}$ y, por lo tanto,

$$\operatorname{diam}(Y_x) \geq \frac{2\sqrt{\delta^2-1}}{\delta}.$$

Veamos la desigualdad contraria. Sean $y = y^1 u_1 + a$, $z = z^1 u_1 + b$, dos puntos de

Y_x y supongamos $z^1 \leq y^1$. Entonces:

$$\begin{aligned}\|y-z\|^2 =& (y^1-z^1)^2 + \|a-b\|^2 \\ \leq& (y^1-z^1)^2 + (\|a\|+\|b\|)^2 \\ =& (y^1-z^1)^2 + \left(\sqrt{1-y^{1\,2}} + \sqrt{1-z^{1\,2}}\right)^2 \\ \leq& \left(y^1 - \frac{1}{\delta}\right)^2 + \left(\sqrt{1-\frac{1}{\delta^2}} + \sqrt{1-y^{1\,2}}\right)^2 = g(y^1).\end{aligned}$$

Esta función g definida en el intervalo $\left[\frac{1}{\delta}, 1\right]$ alcanza el valor máximo en el punto $\frac{1}{\delta}$:

$$g\left(\frac{1}{\delta}\right) = 4\left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right)$$

y, por lo tanto,

$$\operatorname{diam}(Y_x) = \frac{2\sqrt{\delta^2-1}}{\delta}.$$

El resultado se sigue ahora del Lema 4.1.1. $\square$

COROLARIO 4.2.4.

Sea H un espacio de Hilbert separable. Entonces:

$$D_H(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4-\varepsilon^2}} - 1 & si \;\; \varepsilon \in [0, \sqrt{3}] \\ \sqrt{1+\varepsilon^2} - 1 & si \;\; \varepsilon \in [\sqrt{3}, +\infty]. \end{cases}$$

Demostración.

De acuerdo con la proposición anterior tenemos:

$$\begin{aligned}&\inf\{\|x\| : x \in H,\ \|x\| > 1,\ \operatorname{diam}(R_x) \geq \varepsilon\} - 1 \\ =&\inf\left\{\delta : \max\left\{\frac{2\sqrt{\delta^2-1}}{\delta}, \sqrt{\delta^2-1}\right\} \geq \varepsilon\right\} - 1.\end{aligned}$$

Y, puesto que las funciones

$$\delta \to \frac{2\sqrt{\delta^2-1}}{\delta}, \qquad \delta \to \sqrt{\delta^2-1}$$

son estrictamente crecientes, el ínfimo se alcanzará cuando

$$\frac{2\sqrt{\delta^2-1}}{\delta} = \varepsilon, \quad \text{si} \;\; 1 \leq \delta \leq 2$$

o cuando

$$\sqrt{\delta^2 - 1} = \varepsilon, \text{ si } \delta \geq 2$$

es decir, cuando

$$\delta = \frac{2}{\sqrt{4 - \varepsilon^2}}, \text{ si } 0 \leq \varepsilon \leq \sqrt{3}$$

o cuando

$$\delta = \sqrt{1 + \varepsilon^2} \text{ si } \varepsilon \geq \sqrt{3}.$$

□

4.3. Algunos resultados sobre continuidad.

Comenzamos esta sección con el lema siguiente.

LEMA 4.3.1.

Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo, $x \in X \setminus B_X$ y ε tal que $0 < \varepsilon < \frac{\|x\|-1}{2}$. Entonces para todo $y \in X$ tal que $\|y - x\| < \varepsilon$ se tiene que

$$|\text{diam}(R_x) - \text{diam}(R_y)| \leq 2(\varepsilon + f(\varepsilon))$$

en donde f es la función del Lema 3.3.1.

Demostración.

Consideremos los conjuntos $R_{x,\varepsilon}$ y $R_{y,\varepsilon}$ definidos como en el Lema 3.3.2.

Veamos que $R_{y,\varepsilon} \subset R_x + \varepsilon B_X$. Sea $\bar{z} \in R_{y,\varepsilon}$, $\bar{z} = \lambda u + (1 - \lambda)y$ con $\|u\| \leq 1$, $\|\bar{z}\| \geq 1 + \varepsilon$ y $0 \leq \lambda < 1$. Pongamos $z = \lambda u + (1 - \lambda)x$. Entonces

$$\|z - \bar{z}\| = (1 - \lambda)\|x - y\| < (1 - \lambda)\varepsilon \leq \varepsilon,$$

$$\|z\| \geq \|\bar{z}\| - \|\bar{z} - z\| > 1 + \varepsilon - \varepsilon = 1$$

y, por lo tanto, $z \in R_x$ y así $R_{y,\varepsilon} \subset R_x + \varepsilon B_X$. Análogamente podemos probar que $R_{x,\varepsilon} \subset R_y + \varepsilon B_X$. Ya que de las hipótesis podemos deducir que $\|x\| > \varepsilon + 1$ y $\|y\| > \varepsilon + 1$, el Lema 3.3.2 nos permite concluir que

$$R_y \subset R_{y,\varepsilon} + f(\varepsilon)B_X \subset R_x + (\varepsilon + f(\varepsilon))B_X,$$

$$R_x \subset R_y + (\varepsilon + f(\varepsilon))B_X$$

y, por lo tanto,

$$\operatorname{diam}(R_y) \leq \operatorname{diam}(R_x) + 2(\varepsilon + f(\varepsilon))$$

y

$$\operatorname{diam}(R_x) \leq \operatorname{diam}(R_y) + 2(\varepsilon + f(\varepsilon)).$$

De estas dos desigualdades se deduce el resultado que pretendíamos demostrar. □

DEFINICIÓN 4.3.2.

Sea X un espacio de Banach. Para cada $x \in S_X$ definimos la función:

$$\phi_x : [0, +\infty) \to \mathbb{R},$$

$$\phi_x(t) = \operatorname{diam}\left(R_{(1+t)x}\right) \text{ si } t > 0; \ \phi_x(0) = 0.$$

PROPOSICIÓN 4.3.3.

Las funciones ϕ_x definidas anteriormente tienen las siguientes propiedades para cada $x \in S_X$:

(1) ϕ_x es creciente en $[0, +\infty)$.

(2) Si $t \in [0, 1]$, entonces $\dfrac{2t}{t+1} \leq \phi_x(t) \leq t + 2$.

(3) Si $t \in [1, +\infty)$, entonces $t \leq \phi_x(t) \leq t + 2$.

(4) $\lim_{t \to +\infty} \phi_x(t) = +\infty$.

(5) Sea X un espacio uniformemente convexo. Entonces la familia de funciones $\{\phi_x : x \in S_X\}$ es equicontinua en cada punto $t_0 > 0$, esto es, para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|\phi_x(t) - \phi_x(t_0)| < \varepsilon$ cuando $x \in S_X$ y $t \in (0, +\infty)$ con $|t - t_0| < \delta$.

Demostración.

(1) Sean t_1 y t_2 números reales positivos, $t_1 < t_2$. Entonces:

$$(1 + t_1)x = \frac{t_2 - t_1}{t_2}x + \frac{t_1}{t_2}(1 + t_2)x.$$

De este modo, si $x \in S_X$, se tiene

$$(1+t_1)x \in \mathrm{co}(\{(1+t_2)x\} \cup B_X$$

y, por lo tanto,

$$\mathrm{co}(\{(1+t_1)x\} \cup B_X) \subset \mathrm{co}(\{(1+t_2)x\} \cup B_X).$$

En consecuencia $R_{(1+t_1)x} \subset R_{(1+t_2)x}$ y $\phi_x(t_1) \leq \phi_x(t_2)$.

(2) y (3) Son consecuencia del Lema 4.1.2.

(4) Es consecuencia de (3).

(5) Es consecuencia del Lema 4.3.1. □

Nota: De la Proposición 4.2.3 se desprende que si H es un espacio de Hilbert separable, entonces para cada $x \in S_X$ tenemos que

$$\phi_x(t) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{(1+t)^2-1}}{1+t} & \text{si } t \in [0,1] \\ \sqrt{(1+t)^2-1} & \text{si } t \in [1,+\infty). \end{cases}$$

Utilizaremos la familia de funciones $\{\phi_x : x \in S_X\}$ para definir un nuevo módulo para la convexidad uniforme. Demostraremos que este módulo es continuo en los espacios uniformemente convexos y estudiaremos su relación con la función D_X definida en la sección anterior.

DEFINICIÓN 4.3.4.

Sea X un espacio de Banach y consideremos la familia $\{\phi_x : x \in S_X\}$. Definimos la siguiente función:

$$\phi_X : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\phi_X(t) = \sup\{\phi_x(t) : x \in S_X\}.$$

Esta función ϕ_X tiene las siguientes propiedades:

(1) Es creciente en $[0,+\infty)$.

(2) $\phi_X(t) > 0$ si $t > 0$.

(3) $\lim_{t \longrightarrow +\infty} \phi_X(t) = +\infty$.

(4) En espacios de Hilbert separables el valor de $\phi_X(t)$ viene dado en la nota anterior.

PROPOSICIÓN 4.3.5.

Sea $\phi_0(X) = \lim_{t\to 0^+}\phi_X(t)$. *Entonces* $\phi_0(X) = D_0(X)$.

Demostración.

Supongamos $D_0(X) > 0$ y sea $0 < \varepsilon < D_0(X)$. Entonces $D_X(\varepsilon) = 0$ y así, para cada $\eta > 0$, existe $x \in X$ con $1 < \|x\| < 1 + \eta$ tal que $\mathrm{diam}(R_x) \geq \varepsilon$. Por lo tanto $\sup\{\mathrm{diam}(R_x) : \|x\| \leq 1 + \eta\} \geq \varepsilon$, $\phi_X(\eta) \geq \varepsilon$ y $\phi_0(X) = \lim_{t\to 0^+}\phi_X(t) \geq \varepsilon$, esto es, $\phi_0(X) \geq D_0(X)$.

Para probar la igualdad supongamos que $\phi_0(X) > D_0(X)$ y sea δ tal que $D_0(X) < \delta < \phi_0(X)$. Entonces $\phi_X(t) > \delta$ para todo $t > 0$, esto es,

$$\sup\{\mathrm{diam}(R_x) : 1 < \|x\| \leq 1 + t\} > \delta$$

para todo $t > 0$. Por lo tanto

$$\inf\{\|x\| : x \in X,\ \|x\| > 1,\ \mathrm{diam}(R_x) \geq \delta\} - 1 = 0,$$

esto es, $D_X(\delta) = 0$ en contradicción con que $D_0(X) < \delta$.

Se deduce de esta proposición que X es UC si y solo si $\phi_0(X) = 0$. Así esta función es un módulo adecuado para la convexidad uniforme. □

PROPOSICIÓN 4.3.6.

Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo. Entonces ϕ_X es continua en $[0, +\infty)$.

Demostración.

Como X es UC la función ϕ_X es continua en 0.

Sea $t_0 \in (0, +\infty)$. Supongamos que ϕ_X no es continua en t_0. Entonces existen números reales h y k tales que

$$\phi_X(t_0^-) < h < k < \phi_X(t_0^+)$$

y así, para todo $\delta \in (0, t_0)$ tenemos:

$$\phi_X(t_0 - \delta) < h < k < \phi_X(t_0 + \delta).$$

Puesto que $\phi_X(t_0 - \delta) < h$, entonces $\sup\{\phi_x(t_0 - \delta) : x \in S_X\} < h$, esto es, para todo $x \in S_X$ es $\phi_x(t_0 - \delta) < h$. Análogamente, puesto que $\phi_X(t_0 + \delta) > k$ resulta que existe $x \in S_X$ tal que $\phi_x(t_0+\delta) > k$. Por lo tanto para $\delta \in (0, t_0)$ existe $x \in S_X$ tal que

$$\phi_x(t_0 + \delta) - \phi_x(t_0 - \delta) > k - h$$

en contradicción con la equicontinuidad de la familia $\{\phi_x : x \in S_X\}$ en t_0. □

Los siguientes teoremas permiten relacionar la continuidad y el crecimiento estricto de las funciones ϕ_X y D_X.

<u>TEOREMA 4.3.7.</u>

Sea X un espacio de Banach. Entonces el módulo D_X es continuo en $[0, +\infty)$ si y solo si ϕ_X es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$.

<u>Demostración.</u>

Supongamos que ϕ_X no es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$. Sean t_1, $t_2 \in (0, +\infty)$, $t_1 < t_2$, tales que $\phi_X(t_1) = \phi_X(t_2) = \varepsilon_0$ con $\varepsilon_0 \in (0, +\infty)$. Entonces para cada $\delta \in (0, \varepsilon_0)$ tenemos

$$\begin{aligned} D_X(\varepsilon_0 + \delta) &= \inf\{t \geq 0 : \operatorname{diam}(R_{(1+t)x}) \geq \varepsilon_0 + \delta \quad \text{para algun} \quad x \in S_X\} \\ &\geq \inf\{t \geq 0 : \phi_X(t) \geq \varepsilon_0 + \delta\} \geq t_2. \end{aligned}$$

Por otra parte $D_X(\varepsilon_0 - \delta) \leq t_1$, porque si fuera $D_X(\varepsilon_0 - \delta) > t_1$ entonces tendríamos que $\operatorname{diam}(R_{(1+t_1)x}) < \varepsilon_0 - \delta$ para todo $x \in S_X$ y, por lo tanto, sería $\phi_X(t_1) \leq \varepsilon_0 - \delta$. Se sigue de esto que D_X no es continua en ε_0.

Recíprocamente supongamos que D_X tiene un punto de discontinuidad ε_0 que es necesariamente positivo ya que en la Proposición 4.1.4 probamos que D_X es continua en 0. Entonces existen h y k tales que

$$D_X(\varepsilon_0 - \delta) < h < k < D_X(\varepsilon_0 + \delta)$$

para todo $\delta \in (0, \varepsilon_0)$. Por lo tanto

$$\varepsilon_0 - \delta \leq \phi_X(h) \leq \phi_X(k) \leq \varepsilon_0 + \delta.$$

Haciendo ahora que $\delta \to 0^+$ obtenemos $\phi_X(h) = \phi_X(k)$ y así ϕ_X no es estrictamente creciente. □

De forma similar puede demostrarse el teorema siguiente:

TEOREMA 4.3.8.

Sea X un espacio de Banach. Entonces la función D_X es estrictamente creciente en $[D_0(X), +\infty)$ si y solo si ϕ_X es continua en $(0, +\infty)$.

COROLARIO 4.3.9.

Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo. Entonces el módulo de convexidad D_X es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$.

4.4. Un módulo para la casi-convexidad uniforme.

Recordemos que la casi-convexidad uniforme (NUC) puede caracterizarse en términos de restos [Ku3]:

Un espacio de Banach X es casi-uniformemente convexo si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $1 < \|x\| < 1 + \delta$, entonces

$$\sup\{\alpha(C) : C \subset R_x, \, C \, \text{convexo}\} < \varepsilon.$$

En esta definición puede sustituirse la medida de no compacidad α por la medida de Haussdorff, por la de separación o, en general, por una medida de no compacidad μ comparable con la medida α con las propiedades establecidas en el Primer Capítulo. En lo que sigue, para simplificar la notación, si A es un subconjunto acotado de X definimos $\tilde{\mu}(A)$ de la forma siguiente:

$$\tilde{\mu}(A) = \sup\{\mu(C) : C \subset A, \, C \, \text{convexo}\}.$$

Obsérvese que la función $\tilde{\mu}$ que acabamos de definir no es una medida de no compacidad. Por ejemplo, en ℓ^p si consideramos la base $\{e_n\}$ se tiene $\tilde{\mu}(\{e_n\}) = 0$ y el conjunto $\{e_n\}$ no es precompacto.

En la proposición siguiente se acota superior e inferiormente el número $\tilde{\mu}(R_x)$ razonando de forma análoga a como se hizo en la Proposición 3.1.2.

PROPOSICIÓN 4.4.1.

Sea X un espacio de Banach y $x \in X$, $\|x\| > 1$. Entonces

$$\frac{\mu(B_X)(\|x\|-1)}{\|x\|} \leq \tilde{\mu}(R_x) \leq \mu(B_X).$$

Demostración.

La segunda desigualdad es consecuencia de la desigualdad $\mu(R_x) \leq \mu(B_X)$ demostrada en la Proposición 3.1.2.

Veamos la demostración de la primera desigualdad. Sean δ y d números reales tales que $\delta > 0$ y $0 < d < 1$, $y \in S_X$ y $M(dy,\delta) = B(dy, 1-d+\delta) \setminus B_X$. En estas condiciones se demuestra en el Lema 2.1.2 que $\delta\mu(B_X) \leq \mu(M(dy,\delta))$. En la demostración de este lema se considera el conjunto $F = \{x \in B(y,\delta) : f(x) > 1\}$, en donde $f \in X^*$, $\|f\| = f(y) = 1$ y se demuestra que $F \subset M(dy,\delta)$. Entonces, teniendo en cuenta el Lema 2.1.2 y que el conjunto F es convexo, se deduce que

$$\delta\mu(B_X) = \mu(F) \leq \tilde{\mu}(M(dy,\delta)).$$

Ahora, dado $t > 1$, si se toman d y δ como en la Proposición 3.1.2 resulta $M(dy,\delta) \subset R_{ty}$ y, por lo tanto,

$$\delta\mu(B_X) \leq \tilde{\mu}(M(dy,\delta)) \leq \tilde{\mu}(R_{ty}).$$

A partir de aquí la demostración se termina como la de la Proposición 3.1.2. $\square$

COROLARIO 4.4.2.

Para todo $\varepsilon \in [0, \mu(B_X))$ y todo $y \in S_X$ existe $t > 1$ tal que

$$\tilde{\mu}(R_{ty}) \geq \frac{\mu(B_X)(t-1)}{t} \geq \varepsilon.$$

Definimos ahora un módulo de convexidad para la propiedad NUC.

DEFINICIÓN 4.4.3.

Sea X un espacio de Banach. Definimos el siguiente módulo de convexidad asociado a la medida de no compacidad μ:

$$D_{X,\mu} : [0, \mu(B_X)) \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$D_{X,\mu}(\varepsilon) = \inf \{\|x\| : x \in X, \|x\| > 1, \tilde{\mu}(R_x) \geq \varepsilon\} - 1.$$

Definimos tambien la característica de NUC asociada a la medida μ :

$$D_{0,\mu}(X) = \sup \{\varepsilon \geq 0 : D_{X,\mu}(\varepsilon) = 0\}.$$

Se verifica que el espacio X es NUC si y solamente si $D_{0,\mu}(X) = 0$.

La Proposición siguiente se demuestra como la Proposición 3.1.5.

PROPOSICIÓN 4.4.4.

La función $D_{X,\mu}$ tiene las propiedades siguientes:

(a) Es creciente en el intervalo $[0, \mu(B_X))$ y $D_{X,\mu}(0) = 0$.

(b) Para todo $\varepsilon \in [0, \mu(B_X))$ se tiene la relación

$$0 \leq D_{X,\mu}(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{\mu(B_X) - \varepsilon}.$$

(c) El módulo $D_{X,\mu}$ es continuo en 0.

(d) Para todo $\varepsilon \in \left(0, \frac{\mu(B_X)}{2}\right)$ se tiene que

$$D_{X,\mu}(\varepsilon) < \frac{2\varepsilon}{\mu(B_X)}.$$

OBSERVACIÓN 4.4.5. La relación siguiente entre los módulos $D_{X,\mu}$ y $P_{X,\mu}$ se establece de forma inmediata:

$$P_{X,\mu}(\varepsilon) \leq D_{X,\mu}(\varepsilon) \text{ para todo } \varepsilon \in [0, \mu(B_X))$$

y, en consecuencia, $D_{0,\mu}(X) \le P_{0,\mu}(X)$.

También de forma inmediata se tienen las relaciones siguientes, consecuencia de las relaciones existentes entre las medidas de no compacidad:

$$D_{X,\alpha}(\varepsilon) \le D_{X,\beta}(\varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, \beta(B_X)).$$

$$D_{X,\beta}(\varepsilon) \le D_{X,\chi}(\varepsilon) \le D_{X,\alpha}(2\varepsilon), \quad \varepsilon \in [0,1).$$

Y, por lo tanto,

$$D_{0,\beta}(X) \le D_{0,\alpha}(X) \le 2D_{0,\chi}(X) \le 2D_{0,\beta}(X).$$

Veamos ahora la relación entre los módulos Δ''_X y $D_{X,\beta}$ que formulamos de la forma siguiente:

PROPOSICIÓN 4.4.6.

(a) $\frac{D_{X,\beta}(\varepsilon)}{(D_{X,\beta}(\varepsilon)+2)} \le 2\Delta''_X(\varepsilon)$ para todo $\varepsilon \in \left[0, \frac{\beta(B_X)}{2}\right)$.

(b) $\Delta''_X(\varepsilon) \le 2 \lim_{\varepsilon' \to \varepsilon^+} D_{X,\beta}(2\varepsilon')$ para todo $\varepsilon \in \left[0, \frac{\beta(B_X)}{2}\right)$.

Demostración.

(a) Sea $D_{X,\beta}(\varepsilon) = s$. La desigualdad se verifica trivialmente si $s = 0$. Supongamos entonces que $s > 0$.

Sea A un subconjunto convexo de B_X con $\beta(A) > 2\varepsilon$ y sea r un número real, $0 < r < s$. Consideremos una sucesión $\{x_n\} \subset A$ con $\operatorname{sep}(\{x_n\}) \ge 2\varepsilon$. Demostraremos que

$$\operatorname{co}(\{x_n\}) \cap \left(1 - \frac{r}{s+2}\right) B_X \ne \emptyset.$$

Supongamos lo contrario y sea $y = (1+r)x_1$ e $y_n = \dfrac{y + x_n}{2}$. Entonces:

$$\|y\| = (1+r)\|x_1\| \le 1 + r < 1 + s,$$
$$\|y\| > (1+r)\left(1 - \frac{r}{s+2}\right) > 1.$$

Así tenemos que $1 < \|y\| < 1 + s$.

Por otra parte:

$$y_n = \left(1 + \frac{r}{2}\right)\left(\frac{1+r}{2+r}x_1 + \frac{1}{2+r}x_n\right)$$

y, por lo tanto,

$$\|y_n\| > \left(1 + \frac{r}{2}\right)\left(1 - \frac{r}{s+2}\right) = 1 + \frac{r(s-r)}{2(s+2)} > 1.$$

De esta forma hemos demostrado que la sucesión $\{y_n\}$ está contenida en R_y. Veamos que la envolvente convexa de $\{y_n\}$ está tambien contenida en R_y. En efecto, para cualquier elección y_{n_i}, $i = 1, 2, ..., k$ y coeficientes γ_i, $i = 1, 2, ...k$, $\sum_{i=1}^{k} \gamma_i = 1, \gamma_i \geq 0$, resulta:

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i y_{n_i} = \left(1 + \frac{r}{2}\right)\left(\frac{1+r}{2+r}x_1 + \frac{1}{2+r}\sum_{i=1}^{k} \gamma_i x_{n_i}\right);$$

y como

$$\left(\frac{1+r}{2+r}x_1 + \frac{1}{2+r}\sum_{i=1}^{k} \gamma_i x_{n_i}\right) \in \mathrm{co}(\{x_n\})$$

se tiene

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} \gamma_i y_{n_i}\right\| > 1$$

y, por lo tanto, $\mathrm{co}(\{y_n\}) \subset R_y$. Ya que $\tilde{\beta}(R_y) < \varepsilon$ se deduce que $\mathrm{sep}(\mathrm{co}(\{y_n\}) < \varepsilon$ y así $\mathrm{sep}(\{y_n\}) < \varepsilon$. Por lo tanto sep $(\{x_n\}) < 2\varepsilon$ en contradicción con la hipótesis hecha. En consecuencia existe $z \in \mathrm{co}(\{x_n\})$ tal que

$$\|z\| \leq \left(1 - \frac{r}{s+2}\right).$$

En resumen, hemos demostrado que dado un conjunto A convexo y contenido en B_X con $\beta(A) > 2\varepsilon$ se tiene que

$$\inf\{\|x\| : x \in A\} \leq 1 - \frac{r}{s+2}$$

y, por lo tanto,

$$\sup\{\inf\{\|x\| : x \in A\} : A \subset B_X, A \text{ convexo}, \ \beta(A) > 2\varepsilon\} \leq 1 - \frac{r}{s+2}.$$

Así $r \leq (s+2)\Delta^{"}_X(2\varepsilon)$ y, como queríamos demostrar:

$$D_{X,\beta}(\varepsilon) \leq (D_{X,\beta}(\varepsilon)+2)\Delta^{"}_X(2\varepsilon).$$

(b) Supongamos $\Delta^{"}_X(\varepsilon) > 0$. Sea $x \in X \setminus B_X$ tal que $1 < \|x\| < 1 + \dfrac{\Delta^{"}_X(\varepsilon)}{2}$. Sea $\{x_n\} \subset R_x$ tal que $\mathrm{co}(\{x_n\}) \subset R_x$. Entonces para toda combinación lineal

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i x_{n_i}, \quad \gamma_i \geq 0, \quad i = 1, 2, ...k; \quad \sum_{i=1}^{k} \gamma_i = 1,$$

se tiene

$$1 < \left\|\sum_{i=1}^{k} \gamma_i x_{n_i}\right\| < 1 + \frac{\Delta^{"}_X(\varepsilon)}{2}.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $y_n = \left(1 - \dfrac{\Delta^{"}_X(\varepsilon)}{2}\right) x_n$. Entonces:

$$\|y_n\| \leq \left(1 - \frac{\Delta^{"}_X(\varepsilon)}{2}\right)\left(1 + \frac{\Delta^{"}_X(\varepsilon)}{2}\right) < 1$$

y, por lo tanto, $\mathrm{co}(\{y_n\}) \subset B_X$. Además:

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} \gamma_i y_{n_i}\right\| = \left(1 - \frac{\Delta^{"}_X(\varepsilon)}{2}\right)\left\|\sum_{i=1}^{k} \gamma_i x_{n_i}\right\| > 1 - \frac{\Delta^{"}_X(\varepsilon)}{2}.$$

Así

$$\inf\{\|z\| : z \in \mathrm{co}(\{y_n\})\} \geq 1 - \frac{\Delta^{"}_X(\varepsilon)}{2} > 1 - \Delta^{"}_X(\varepsilon),$$

y, en consecuencia,

$$\beta(\mathrm{co}(\{x_n\})) = \frac{\beta(\mathrm{co}(\{y_n\}))}{1 - \frac{\Delta^{"}_X(\varepsilon)}{2}} \leq \frac{2\varepsilon}{2 - \Delta^{"}_X(\varepsilon)} \leq 2\varepsilon.$$

Así hemos obtenido que si $\{x_n\} \subset R_x$ y co $(\{x_n\}) \subset R_x$ con $1 < \|x\| < 1 + \dfrac{\Delta^{"}_X(\varepsilon)}{2}$, entonces $\beta(\mathrm{co}(\{x_n\})) \leq 2\varepsilon$ y, por lo tanto, $\tilde{\beta}(R_x) \leq 2\varepsilon$. Así , si para un elemento $x \in X \setminus B_X$ y un número $\varepsilon' > \varepsilon$ es $\tilde{\beta}(R_x) \geq 2\varepsilon'$ será necesariamente $\|x\| \geq 1 + \dfrac{\Delta^{"}_X(\varepsilon)}{2}$ y, en consecuencia,

$$D_{X,\beta}(2\varepsilon') \geq \frac{\Delta^{"}_X(\varepsilon)}{2}$$

con lo que se completa la demostración del apartado (b) de la proposición. □

El corolario siguiente, que establece unas relaciones entre la característica de convexidad $P_{0,\beta}(X)$ y la característica de convexidad no compacta $\Delta_0''(X)$, es consecuencia inmediata de la proposición anterior.

COROLARIO 4.4.7.

Sea X un espacio de Banach. Entonces

$$\Delta_0''(X) \leq 2D_{0,\beta}(X) \leq 4\Delta_0''(X).$$

Teniendo en cuenta además la Proposición 1.6.5 podemos formular también el corolario siguiente.

COROLARIO 4.4.8.

Si la característica de convexidad $D_{0,\beta}(X)$ es menor que 1/2 el espacio X es reflexivo y tiene estructura normal.

4.5. Cálculo del módulo en los espacios de Hilbert.

La Proposición siguiente nos permitirá calcular la medida $\tilde{\mu}(R_x)$ del resto determinado por un punto x de un espacio de Hilbert separable.

PROPOSICIÓN 4.5.1.

Sea H un espacio de Hilbert infinito dimensional y separable, $x \in H$ con $\|x\| = 1$ y sea $\delta > 1$. Entonces

$$\tilde{\mu}(R_{\delta x}) = \tilde{\mu}\{z \in R_{\delta x} : G_x(z) \geq 1\}.$$

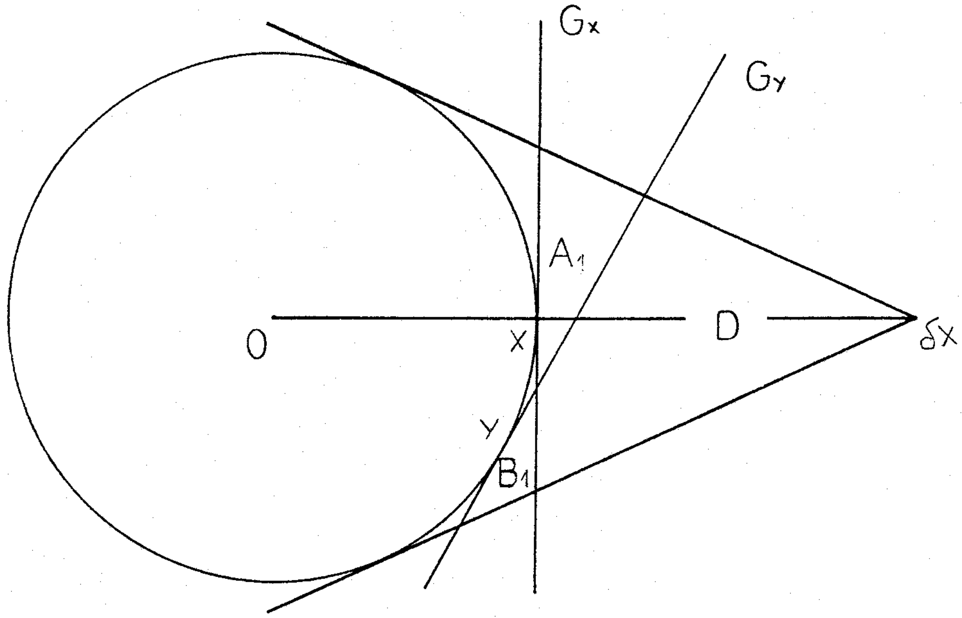
Demostración.

Sea C un conjunto convexo contenido en $R_{\delta x}$. Entonces, por el Teorema de Hahn-Banach existe un funcional f continuo con $\|f\| = 1$ que separa en sentido amplio C y la bola unidad cerrada B_H del espacio, esto es, $f(z) \geq 1$ para todo $z \in C$ y $f(z) \leq 1$ para todo $z \in B_H$. Además por ser H reflexivo y estrictamente convexo existe un único $y \in S_H$ tal que $f(y) = 1$. Pondremos $f = G_y$ como es habitual.

Veamos que $y \in Y_{\delta x}$. Teniendo en cuenta en cuenta el Lema 4.2.1, basta probar que $G_y(\delta x) \geq 1$. En efecto, si fuera $G_y(\delta x) < 1$, tomando $z \in C$, $z = \lambda u + (1-\lambda)\delta x$, para algún elemento $u \in B_H$ y $0 \leq \lambda < 1$ tendríamos

$$G_y(z) = \lambda G_y(u) + (1-\lambda)G_y(\delta x) < 1$$

lo que no es posible.



Consideremos ahora los conjuntos siguientes:

$$A = \{z \in R_{\delta x} : G_x(z) \geq 1\}, \quad B = \{z \in R_{\delta x} : G_y(z) \geq 1\},$$

$$A_1 = \{z \in R_{\delta x} : G_x(z) \geq 1, \; G_y(z) \leq 1\},$$

$$B_1 = \{z \in R_{\delta x} : G_x(z) \leq 1, \; G_y(z) \geq 1\},$$

$$D = \{z \in R_{\delta x} : G_x(z) \geq 1, \; G_y(z) \geq 1\}.$$

Se tiene entonces que $A = A_1 \cup D$ y $B = B_1 \cup D$. Probaremos que $\mu(B_1) \leq \mu(A_1)$ lo que completará la demostración ya que

$$\mu(C) \leq \mu(B) = \max\{\mu(B_1), \mu(D)\} \leq \max\{\mu(A_1), \mu(D)\} = \mu(A)$$

y el conjunto $A \cup \{x\}$ es convexo:

$$A \cup \{x\} = \mathrm{co}(B_x \cup \{\delta x\}) \cap \{z \in H\ : G_x(z) \geq 1\}.$$

Si $x = y$ entonces $A_1 = B_1$ y no hay nada que probar. Supongamos por tanto que $x \neq y$ y consideremos el vector $u = \lambda x + \mu y$ tal que $G_x(u) = 1$ y $G_y(u) = 1$. Es decir, tal que

$$\lambda + \mu G_x(y) = 1,$$

$$\lambda G_y(x) + \mu\ = 1.$$

Como $G_x(y) < 1$ y $0 < G_y(x) < 1$ este sistema de ecuaciones tiene solución única. Sea σ la simetría de centro u. Veremos que $\sigma(B_1) \subset A_1$. Sea $z \in B_1$, entonces $\sigma(z) = z' = 2u - z$ y

$$G_x(z') = 2 - G_x(z) \geq 1,$$

$$G_y(z') = 2 - G_y(z) \leq 1.$$

Para terminar la demostración de la proposición falta únicamente comprobar que $z' \in R_{\delta x}$.

Observemos que si $z \in B_1$ con $G_y(z) > 1$ y $G_x(z) < 1$, entonces la recta determinada por δx y z corta a los hiperplanos tangentes H_x y H_y a la esfera unidad en x e y , respectivamente, en dos puntos z_x y z_y de modo que z está en el segmento de extremos z_x y z_y que denotamos, como es habitual, por $[z_x, z_y]$. Vamos a comprobarlo: sea $z = tv + (1-t)\delta x$, para algún elemento v de S_H y

$$t = \frac{\delta - G_x(z)}{\delta - G_x(v)}, \quad 0 < t < 1.$$

Pongamos $z_x = t_x v + (1 - t_x)\delta x$. Entonces $G_x(z_x) = t_x G_x(v) + (1 - t_x)\delta = 1$, de donde resulta

$$t_x = \frac{\delta - 1}{\delta - G_x(v)}.$$

Se deduce que $0 < t_x < t < 1$.

Determinemos z_y de forma análoga: sea $z_y = t_y v + (1 - t_y)\delta x$ y

$$G_y(z_y) = t_y G_y(v) + (1 - t_y)\delta G_y(x) = 1,$$

de donde resulta

$$t_y = \frac{\delta G_y(x) - 1}{\delta G_y(x) - G_y(v)}.$$

En este caso el valor de t, haciendo actuar G_y sobre z, puede expresarse así:

$$t = \frac{\delta G_y(x) - G_y(z)}{\delta G_y(x) - G_y(v)}.$$

El denominador de esta fracción es mayor que 0 (si fuera igual a 0 se tendría $G_y(\delta x) = G_y(v) = 1$ y $G_y(z) = 1$ en contradicción con la hipótesis). Por lo tanto resulta $0 < t < t_y < 1$, así, como queríamos comprobar, $0 < t_x < t < t_y < 1$ y $z \in [z_x, z_y]$, $z \neq z_x$, $z \neq z_y$.

Ya que el conjunto $A \cup \{x\}$ es convexo, terminaremos la demostración si comprobamos que los simétricos respecto de u de los puntos z de B_1 situados en los hiperplanos H_x o H_y están en A.

Podemos suponer que los vectores x, y y z son linealmente independientes, ya que en otro caso puede servir el razonamiento que sigue adecuadamente simplificado. Sea $\{e_1, e_2, e_3, ...\}$ un sistema numerable ortonormal y completo de H; si consideramos la sucesión $\{x, y, z, e_1, e_2, ...\}$, aplicando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt podemos obtener una base de Hilbert de H, $\{u_1, u_2, u_3, ...\}$, de tal modo que respecto de esta base resulta

$$x = (1, 0, 0, 0, ...), \ y = (y_1, y_2, 0, 0, ...) \text{ y } z = (z_1, z_2, z_3, 0, ...).$$

Además

$$G_x = (1, 0, 0, 0, \dots) \text{ y } G_y = (y_1, y_2, 0, 0, \dots)$$

y se verifican las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
&y_1^2 + y_2^2 = 1,\\
&\frac{1}{\delta} \leq y_1 < 1,\\
&G_x(z) \leq 1 \Rightarrow z_1 \leq 1,\\
&G_y(z) \geq 1 \Rightarrow y_1 z_1 + y_2 z_2 \geq 1,\\
&u = \left(1, \frac{1 - y_1}{y_2}, 0, 0, 0, \dots\right).
\end{aligned}$$

Además el punto simétrico de $z = (z_1, z_2, z_3, 0, 0, \ldots.)$ respecto de u es

$$z' = \left(2 - z_1, \frac{2(1-y_1)}{y_2} - z_2, -z_3, 0, 0, 0, \ldots\right).$$

El punto z situado fuera de la bola unidad estará en $R_{\delta x}$ si y solo si la recta $\lambda z + (1-\lambda)\delta x$ corta en uno o dos puntos a la esfera unidad para valores de λ mayores que 1, es decir si la función

$$\phi(\lambda) = \|\lambda z + (1-\lambda)\delta x\|^2$$

alcanza el mínimo para un valor de λ que debe ser mayor que 1 y el valor de este mínimo es o igual o menor que 1. Estas condiciones, como se comprueba fácilmente, pueden expresarse analíticamente en la forma siguiente:

$$\delta^2(z_2^2 + z_3^2)^2 \leq (\delta - z_1)^2 + z_2^2 + z_3^2 < \delta(\delta - z_1).$$

Supongamos que z está en el hiperplano H_x, $z = (1, z_2, z_3, 0, \ldots)$, entonces el punto simétrico z', que está fuera de la bola unidad, es

$$z' = (z_1', z_2', z_3', 0, \ldots) = \left(1, \frac{2(1-y_1)}{2} - z_2, -z_3, 0, \ldots\right).$$

Un cálculo sencillo, aunque laborioso, permite comprobar que, como consecuencia de la relación $y_1 + y_2 z_2 \geq 1$, se cumplen las condiciones siguientes :

$$\delta^2\left(z_2'^2 + z_3'^2\right)^2 \leq \left(\delta - z_1'\right)^2 + z_2'^2 + z_3'^2 < \delta(\delta - z_1')$$

y, por lo tanto $z' \in A$.

Si $z \in H_y$ se cumplen también las relaciones anteriores como consecuencia ahora de ser $y_1 z_1 + y_2 z_2 = 1$ y $z_1 < 1$ y, por lo tanto, el punto simétrico $z' \in A$. De esta forma hemos completado la demostración de la proposición. $\square$

La proposición siguiente nos va a permitir calcular la medida $\tilde{\mu}$ de los restos deteminados por puntos situados fuera de la bola unidad cerrada en los espacios de Hilbert.

PROPOSICIÓN 4.5.2.

Sea H un espacio de Hilbert infinito dimensional y separable, $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\ldots\}$ un sistema ortonormal y completo de vectores de H y δ un número mayor que 1. Entonces:

(a) Si $x \in H$ con $\|x\| = \delta > 1$, $\tilde{\mu}(R_x) = \tilde{\mu}(R_{\delta e_1})$.

(b) Sea $S = \left\{x \in H : x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i = (x_1, x_2, x_3, \ldots), \|x\| \leq 1, x_1 = \frac{1}{\delta}\right\}$. Entonces $\overline{\text{co}}(R_{\delta e_1}) = \overline{\text{co}}(S \cup \{\delta e_1\})$.

(c) Sea el conjunto $A = \{x \in R_{\delta e_1} : G_{e_1}(x) \geq 1\}$ y h la homotecia de centro δe_1 y razón $\frac{\delta+1}{\delta}$. Entonces $h(A \cup \{e_1\}) = \text{co}(S \cup \{\delta e_1\})$.

Demostración.

(a) Consideremos la sucesión $\{x, e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ que genera H. Aplicando el proceso de Gram-Schmidt obtenemos una base ortonormal de H, $\{u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots\}$, en la que $x = \delta u_1$. La aplicación $f : H \to H$ definida por $f(u_n) = e_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, es una isometría tal que $f(x) = f(\delta u_1) = \delta e_1$. Tenemos entonces:

$$f(\text{co}(\{x\} \cup B_H)) = \text{co}(f(x) \cup f(B_H)) = \text{co}(\{\delta e_1\} \cup B_H).$$

Por lo tanto $f(R_x) = R_{\delta e_1}$ y de esto se deduce de forma inmediata que $\tilde{\mu}(R_x) = \tilde{\mu}(R_{\delta e_1})$.

(b) Sea $C = \{x \in S : \|x\| = 1\}$. Demostraremos sucesivamente:

(i) $S = \text{co}(C)$.

(ii) $C \subset \bar{R}_{\delta e_1}$.

(iii) $R_{\delta e_1} \subset \text{co}(\{\delta e_1\} \cup S)$.

(i) Basta observar que $S - \frac{1}{\delta} e_1$ es una bola cerrada de centro 0 y radio $\sqrt{1 - \frac{1}{\delta^2}}$ y $C - \frac{1}{\delta} e_1$ la superficie esférica correspondiente.

(ii) Dado $x \in C$, puesto que $G_x(\delta e_1) = 1$ se tiene que $x \in Y_{\delta e_1}$. Por lo tanto, el segmento

$$\{(1 - \lambda)x + \lambda e_1 : 0 < \lambda \leq 1\}$$

está contenido en $R_{\delta e_1}$.

(iii) Sea $z \in R_{\delta e_1}$. Entonces podemos escribir $z = \delta e_1 + \lambda(y - \delta e_1)$ con $y \in Y_{\delta e_1}$ y $0 \leq \lambda < 1$. Pongamos $y = (y_1, y_2, y_3, ...) = y_1 e_1 + y'$. Sabemos que si $y \in Y_{\delta e_1}$ entonces $\|y\| = 1$ e $y_1 \geq \frac{1}{\delta}$. Para demostrar que $R_{\delta e_1} \subset \text{co}(\{\delta e_1\} \cup S)$ basta comprobar que la recta $\{\delta e_1 + t(y - \delta e_1) : t \in \mathbb{R}\}$ corta al conjunto S en un punto para algún valor de $t \geq 1$ y esto sucede, como se comprueba fácilmente, para $t = \dfrac{\delta - \frac{1}{\delta}}{\delta - y_1}$.

Terminemos la demostración de (b): de (i) y (ii) se deduce que $S \subset \overline{\text{co}} R_{\delta e_1}$ y, por lo tanto, $\overline{\text{co}}(\{\delta e_1\} \cup S) \subset \overline{\text{co}} R_{\delta e_1}$. Recíprocamente por (iii) se tiene que $\overline{\text{co}}(R_{\delta e_1}) \subset \overline{\text{co}}(\{\delta e_1\} \cup S)$.

(c) La ecuación de la homotecia es la siguiente:

$$h(x) = x' = \frac{\delta + 1}{\delta} x - e_1.$$

Si $x = e_1$ entonces $h(x) = \frac{1}{\delta} e_1$ que pertenece a S. Sea ahora $x \in A$, entonces $x \in R_{\delta e_1}$ y $x_1 \geq 1$. Pongamos $x = tz + (1-t)\delta e_1$ con $z \in S$, $z = (\frac{1}{\delta}, z_2, z_3, ...)$ y $0 < t \leq 1$. Entonces

$$h(x) = \frac{\delta t + t}{\delta} z + \frac{\delta - \delta t - t}{\delta} \delta e_1 = t_0 z + t_1 \delta e_1.$$

Se tiene, evidentemente, que $t_0 \geq 0$ y $t_0 + t_1 = 1$. Veamos que también es $t_1 \geq 0$: puesto que $x = tz + (1-t)\delta e_1$, se deduce que $x_1 = \frac{t}{\delta} + (1-t)\delta$ y teniendo en cuenta que $x_1 \geq 1$ y $\delta > 1$ un sencillo cálculo permite comprobar que $\delta \geq t(1 + \delta)$. Por l tanto $t_1 \geq 0$ y $h(x) \in \text{co}(S \cup \{\delta e_1\})$.

Recíprocamente: sea $x' \in \text{co}(S \cup \{\delta e_1\})$. Si $x' = \frac{1}{\delta}$ entonces $h(e_1) = x'$. En otro caso sea $x' = sz + (1-s)\delta e_1$ con $z \in S$ y $0 \leq s \leq 1$.

Entonces x' es imagen de

$$x = \frac{s\delta}{\delta + 1} z + \frac{\delta}{\delta + 1}(1 - s + \frac{1}{\delta})\delta e_1 = s_0 z + s_1 \delta e_1$$

con $0 \leq s_0 < 1$, $0 < s_1 \leq 1$ y $s_0 + s_1 = 1$. Además

$$\frac{s\delta}{\delta + 1} \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{\delta + 1}(1 - s + \frac{1}{\delta})\delta = (\delta - 1)(1 - s) + 1 \geq 1$$

y, por lo tanto $x \in A$.

Así terminamos la demostración de (c) y de la Proposición. $\square$

COROLARIO 4.5.3.

Sea H un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y $x \in H$ con $\|x\| > 1$. Entonces

$$\tilde{\alpha}(R_x) = 2\left(\frac{\|x\|-1}{\|x\|+1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\tilde{\chi}(R_x) = \left(\frac{\|x\|-1}{\|x\|+1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\tilde{\beta}(R_x) = \left(\frac{2(\|x\|-1)}{\|x\|+1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración.

En efecto, sea $\|x\| = \delta > 1$ y μ una cualquiera de las medidas de no compacidad. Entonces:

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(R_x) =& \tilde{\mu}(R_{\delta e_1}) = \mu(A) = \mu(A \cup \{e_1\}) \\ =& \frac{\delta}{\delta+1}\mu(\overline{\text{co}}(S \cup \{e_1\})) = \frac{\delta}{\delta+1}\mu(\overline{\text{co}}(R_{\delta e_1})) \\ =& \frac{\delta}{\delta+1}\mu(R_{\delta e_1}).\end{aligned}$$

Basta tener en cuenta los valores obtenidos en la Sección 3.3 del Capítulo III para $\mu(R_x)$. $\square$

COROLARIO 4.5.4.

Sea H un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Entonces:

$$D_{H,\alpha}(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon^2}{4-\varepsilon^2}, \quad \varepsilon \in [0,2).$$

$$D_{H,\chi}(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}, \quad \varepsilon \in [0,1).$$

$$D_{H,\beta}(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon^2}{2-\varepsilon^2}, \quad \varepsilon \in [0,\sqrt{2}).$$

Demostración.

Haremos solamente la demostración correspondiente a la medida α. La función

$$\delta \to 2\left(\frac{\delta-1}{\delta+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

es estrictamente creciente y, por lo tanto, el ínfimo se alcanza cuando

$$2\left(\frac{\delta-1}{\delta+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon$$

es decir para $\delta = \dfrac{4+\varepsilon^2}{4-\varepsilon^2}$. Entonces

$$D_{H,\alpha}(\varepsilon) = \frac{4+\varepsilon^2}{4-\varepsilon^2} - 1 = \frac{2\varepsilon^2}{4-\varepsilon^2}.$$

Para las otras medidas de no compacidad el razonamiento es análogo. $\square$.

[ADL] J.M. Ayerbe, T. Domínguez Benavides and G. López Acedo, *Measures of noncompactness in Metric Fixed Point Theory*, Birkhäuser, Basel (en prensa).

[AKPRS] R.R. Akhmerov, M.I. Kamenskii, A. S. Potapov, A.E. Rodkina and B.N. Sadovskii, *Measures of Noncompactness and Condensing Operators,* Birkhauser Verlag, Berlin (1992).

[B] B. Beauzamy, *Introduction to Banach Spaces and Their Geometry*, North-Holland (1986).

[B1] J. Banaś, *On modulus of noncompact convexity and its properties*, Canad. Math. Bull. **30** **(2)** (1987), 186-192.

[B2] J. Banaś, *Compactness conditions in the geometric theory of Banach spaces*, Nonlinear Analysis T.M.A.**16** **(7/8)** (1991), 669-682.

[BG] J. Banaś and K. Goebel, *Measures of Noncompactness in Banach Spaces*, Marcel Dekker, Inc. (1980).

[BM] M.S. Brodskiĭ and D.P.Milman, *On the center of a convex set*, Dokl.Akad. Nau. S.S.S.R.**59** (1948), 837-840 (Russian).

[Br] H. Brézis, *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid (1984).

[Br1] F.E. Browder, *Fixed point theorems for noncompact mappings in Hilbert spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **43**(1965), 1272-1276.

[Br2] F.E. Browder, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **54** (1965),1041-1044.

[By] W.L. Bynum, *A class of spaces lacking normal structure*, Compositio Math.**25**(1972), 233-236.

[C] J.A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 396-414.

[D] J. Daneš, *A Geometric Theorem useful in Nonlinear Functional Analysis*, Boll. Un. Mat. Ital. **6** (1972), 369-375.

[Da] M.M. Day, *Uniform convexity in factor and conjugate spaces*, Ann. of Math. (2) **45** (1944), 375-385.

[Di] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer-Verlag (1984).

[DL] T. Domínguez Benavides and G. López Acedo, *Lower bounds for normal structure coefficients*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **121A**(1992), 245-252.

[Do] T. Domínguez Benavides, *Some properties of the set and ball measures of noncompactness and applications*, J. London Math. Soc. 34 (2) (1986), 120-128.

[G] D. Göhde, *Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung*, Math. Nach.**30** (1965), 251-258.

[GGM] I. Gohberg, L.S. Goldenshtein and A.S. Markus, *Investigation of some properties of bounded linear operators in connection with their q-norms*, Ucen. Zap. Kishinevsk. Un-ta **29**(1957), 29-36.

[GK] K. Goebel and W.A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge University Pres (1990).

[GR] K. Goebel and S. Reich, *Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry and Nonexpansive Mappings* , Marcel Dekker, Inc. (1984).

[GS] K. Goebel and T. Sekowski, *The modulus of noncompact convexity*, Annal. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, **38**(1984), 41-48.

[H] O. Hanner, *On the uniform convexity of L^p and ℓ^p*, Ark. Math.**3**(1956), 239-244.

[Hu] R. Huff, *Banach spaces which are nearly uniformly convex*, Rocky Mountain J. Math. 4(1980), 743-749.

[I] V.I. Istratescu, *On a measure of noncompactness*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie (N.S.)**16 (64) n.2**(1972), 195-97.

[K] S. Kakutani, *Topological properties of the unit sphere of a Hilbert space*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **14**(1943), 242-245.

[Ki] W.A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly **72**(1965), 1004-1006.

[KMP] D.N. Kutzarova, E. Maluta and S. Prus, *Property* (β) *implies normal structure of the dual space*, Rend. Circ. Mat. Palermo **41** (1992), 353-368.

[KP] D.N. Kutzarova and P.L. Papini, *On a characterization of property* (β) *and LUR* , Bollettino U.M.I. (**7**) **6-A**(1992), 209-214.

[Ku] K. Kuratowski, *Sur les espaces completes*, Fund. Math.**15** (1930), 301-309.

[Ku1] D.N. Kutzarova, *A Nearly Uniformly Convex Space which is not a* (β)*-Space*, Acta Univ. Carolin.-Math. Phys.**30** (**2**)(1989), 95-98.

[Ku2] D.N. Kutzarova, *On condition* (β) *and* Δ*-uniform convexity*, C.R. Acad. Bulgar Sci., **42** (1)(1989), 15-18.

[Ku3] D.N. Kutzarova, $k-(\beta)$ *and* k*-nearly uniform convex Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **162** (2)(1991), 322-338.

[LT] J. Lindenstrauss and L. Tzafiri, *Classical Banach Spaces I*, Springer-Verlag (1977).

[M] R.H. Martin, *Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces* , John Wiley and Sons (1976).

[Mo] V. Montesinos, *Drop property equals reflexivity*, Studia. Math. **87**(1987), 93-100.

[MT] V. Montesinos and J.R. Torregrosa, *A uniform geometric property of Banach spaces*, Rocky Mountain J. Math., **22** (**2**)(1992), 683-690.

[P] S. Prus, *Nearly uniformly smooth Banach spaces*, Bolletino U.M.I. (**7**) **3** **B**(1989), 507-521.

[R] S. Reich, *Products formulas, Nonlinear semigroups and accretive operators*, J. Funct. Anal. **36**(1980), 147-168.

[Ro] R.J. Rodríguez Álvarez, *Relaciones entre Operadores Asociados a Distintas Medidas de no Compacidad*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla (1993).

[Ro1] S. Rolewicz, *On drop property*, Studia Math. **85** (1987), 27-35.

[Ro2] S. Rolewicz, *On Δ-uniform convexity and drop property*, Studia Math. **87**(1987), 181-191.

[S] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalraumen*, Studia Math. **2**(1930), 171-180.

[Sa] B.N. Sadovskiĭ, *Measures of noncompactness and condensing operators (Russian)*, Problemy Mat. Anal. Sloz. Sistem. **2**(1968), 89-119.

[Se] T. Sekowski, *Noncompact convexity, smoothness and applications, Functional Analysis and Approximation*, Pitagora Editrice Bologna (Edited by P.L. Papini, 1988).

[St] S. B. Stečkin, *Approximation properties of sets in normed linear spaces*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **8**(1963), 5-18 (Russian).

[Z] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I*, Springer-Verlag (1986).

[Zh] W. Zhao, *Remarks on various measures of noncompactness*, J. Math. Anal. App.**174**(1993), 290-297.

Salvador Francisco Cutillas

"Algunos módulos para la propiedad (β) de Rolewicz y otras propiedades geométricas de los espacios de Banach"

APTO CUM LAUDE

13 junio 97

El Doctorado,