Universidad de Sevilla
Facultad de Matemáticas
Departamento de Análisis Matemático

Estudio Asintótico de Polinomios Matriciales Ortogonales

TESIS DOCTORAL

por

Enrique Daneri Vías

Octubre 2002

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SECRETARIA GENERAL

Queda registrada esta Tesis Doctoral al folio 045 número 426 del libro correspondiente 30 ENE. 2003

Sevilla,

El Jefe del Negociado de Tesis

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Depositado en Dpto. de Análisis Matemático de la Facultad de Matemáticas.

de esta Universidad desde el día 3. II. 2003

hasta el día 24. II. 2003.

Sevilla, 24 de Febrero de 2003

EL DIRECTOR DEL DPTO.-

EL DIRECTOR DEL DEPARTAMENTO

Fdo.: Genaro López Acedo

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Estudio Asintótico de
Polinomios Matriciales Ortogonales

Primera versión de la Memoria presentada
para optar al grado de Doctor en
Ciencias Matemáticas

Enrique Daneri Vías
Dpto. Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla

Vº Bº del Director:

Dr. D. Antonio J. Durán Guardeño
Catedrático del Dpto. Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla

En Sevilla, a 1 de Octubre de 2002

Durante los años en los que se ha desarrollado este trabajo son numerosas las muestras de apoyo que he recibido de las personas que me rodean. Aprovecho estas líneas para manifestar mi agradecimiento a todas y cada una de ellas.

Especialmente a Antonio J. Durán Guardeño, director de esta tesis, que desde un principio apostó por mí, a pesar de mi peculiar situación laboral. Su dedicación, su paciencia, sus valiosas ideas y sus sabios consejos han conseguido que uno de mis sueños sea hoy una realidad. Gracias Antonio.

También deseo hacer una mención muy especial para todos mis compañeros de ipReal, por su constante interés y por todas las facilidades que me han ofrecido para que concluyera este proyecto.

Y por supuesto, a mi familia por su incondicionalidad. A mis padres, a Lourdes, Jesús, Javi, Vero, Yeray y Jairo, por convertir su cariño en el empuje que siempre he necesitado. E indudablemente, a Manoli, por su comprensión, su continuo apoyo, su infinita paciencia y por todo su amor.

A Enrique y Victoria, mis padres

Índice General

Introducción

En esta memoria presetamos una serie de investigaciones desarrolladas en la teoría de los polinomios matriciales ortogonales.

Consideremos una matriz de medidas W de dimensión $N \times N$ con todos sus momentos finitos, esto es,

$$\int_{\mathbb{R}} t^n dW(t) < +\infty, \quad \text{para } n \geq 0,$$

y supongamos que dicha matriz de medidas es definida positiva (para cualquier Borel $A \subset \mathbb{R}$, $W(A)$ es una matriz numérica semidefinida positiva) y no degenerada ($\int P(t)dW(t)P^*(t)$ es no singular para cualquier polinomio matricial $P(t)$ con coeficiente líder no singular).

Una sucesión $(P_n)_n$ de polinomios matriciales de orden $N \times N$, con grado de P_n igual a n, es ortogonal con respecto a una matriz de medidas definida positiva W si

$$\int_{\mathbb{R}} P_n(t)\, dW(t) P_m^*(t) = \delta_{n,m}\Gamma_n \quad \text{para} \quad n, m \geq 0$$

siendo Γ_n definida positiva ($n \geq 0$). Diremos que $(P_n)_n$ es ortonormal con respecto a W si $\Gamma_n = I$ para $n \geq 0$. Es bien sabido que una sucesión de polinomios matriciales ortonormales satisface una relación de recurrencia de tres términos de la forma:

$$tP_n(t) = A_{n+1}P_{n+1}(t) + B_nP_n(t) + A_n^*P_{n-1}(t), \qquad n \geq 0 \tag{0.1}$$

con las condiciones iniciales $P_{-1}(t) = \theta$ y $P_0(t) = I$, siendo las matrices A_n invertibles y B_n hermíticas. Además, esta relación de recurrencia caracteriza a la sucesión de polinomios ortonormales (Teorema de Favard matricial).

La ortogonalidad matricial ha sido estudiada de manera esporádica a lo largo de los últimos sesenta años. En los años 40, M. Krein [Kr] consideró el problema de momentos matricial y los correspondientes polinomios matriciales desde el punto de vista de la teoría de operadores. En la década de los 80, J. S. Geronimo [G], A. I. Aptekarev y E. M. Nikishin [AN] los usaron en la teoría de dispersión (scattering theory) y S. Basu y N. K. Bose [BB] en modelos de redes (networks).

Pero faltaba algo más de motivación que la mera extensión de la teoría para realizar un estudio sistemático de la ortogonalidad matricial. Esta motivación apareció a principios de los 90, cuando A. J. Durán mostró cómo interpretar matricialmente la ortogonalidad escalar, convirtiendo la teoría de los polinomios matriciales ortogonales en una herramienta para resolver problemas de la teoría escalar clásica [D3].

El uso de la ortogonalidad matricial para resolver problemas de la ortogonalidad escalar ha generado el interés necesario para llevar a cabo un estudio sistemático de la ortogonalidad matricial. Este estudio se está llevando a cabo en los últimos años, siendo el grupo de investigación liderado por A. J. Durán en la Universidad de Sevilla pionero en el desarrollo de esta nueva teoría. En esta línea de trabajo está el origen de esta tesis.

Para ubicar la investigación desarrollada en esta memoria conviene recordar que ya han sido obtenidos resultados tales como la extensión del Teorema de Favard [D2], resultados relativos a fórmulas de cuadratura y propiedades algebraicas de los ceros ([DL1], [DD], [DP], y [SV]), resultados relacionados con el problema de momentos matricial, en concreto con densidad polinomial, matrices de medida N-extremales, el Teorema de Riesz, la Parametrización de Nevanlinna ([DL2], [DL3], [L1] y [L2]), el Teorema de Markov para medidas determinadas [D6], asintótica del cociente para polinomios de la clase de Nevai, polinomios de Tchebyshev de primera y segunda clase y asintótica de los ceros de polinomios ortogonales ([D1] y [DLS]).

El contenido de esta memoria se divide en tres partes:

- Asintótica del cociente para polinomios matriciales ortonormales con coeficientes de recurrencia no acotados.
- Convergencia débil para familias uniparamétricas de polinomios ortonormales.
- Extensión del Teorema de Markov para el problema de momentos completamente indeterminado.

Pasamos a detallar el contenido de cada uno de los capítulos que componen esta memoria.

En el **primer capítulo** se fijarán las notaciones que se usarán a lo largo de toda la memoria y se incluirán resultados preliminares dentro de la teoría de polinomios matriciales ortogonales: propiedades algebraicas de los ceros, fórmulas de cuadratura, asintótica del cociente, polinomios de Tchebyshev de primera y segunda clase, la Parametrización de Nevanlinna y algunas fórmulas clásicas en su versión matricial. Su inclusión facilitará la lectura de esta memoria al hacerla más autocontenida.

En el **segundo capítulo** se abordará la asintótica del cociente para polinomios matriciales ortonormales cuyos coeficientes de recurrencia son no acotados. La asintótica del cociente consiste en la comparación de dos polinomios consecutivos; más precisamente, estudiaremos el comportamiento asintótico de $P_{n-1}(z)P_n^{-1}(z)$.

El punto de partida será la asintótica del cociente escalar para polinomios ortonormales con coeficientes no acotados establecida por W. Van Assche ([**V3**], [**V4**], véase también [**D1**]) y la establecida por A. J. Durán (véase Capítulo 1.5 o [**D6**]) para polinomios matriciales ortonormales pertenecientes a la clase de Nevai, esto es, polinomios ortonormales cuyos coeficientes de recurrencia son convergentes. Extenderemos estos resultados para polinomios ortonormales con coeficientes de recurrencia divergentes pero con divergencia controlada, es decir, existiendo una sucesión de matrices definidas positivas

$(C_n)_n$ para la cual

$$(0.2)\qquad \begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} C_n C_{n-1}^{-1} = I \\ &\lim_{n\to\infty} C_n^{-1/2} A_n C_n^{-1/2} = A, \quad \lim_{n\to\infty} C_n^{-1/2} B_n C_n^{-1/2} = B, \end{aligned}$$

siendo A no singular y B hermítica, donde $(A_n)_n$ y $(B_n)_n$ son los coeficientes de la fórmula de recurrencia (0.1).

Como en el caso escalar, la asintótica del cociente se obtendrá para un rescalamiento de los polinomios ortonormales matriciales. Aquí se presenta la primera dificultad del problema: para un polinomio matricial $P(t)$ y una matriz C, ¿cómo definir el polinomio escalado $P(Ct)$?

Ninguna de las formas habituales de definir $P(Ct)$ era satisfactoria en nuestro caso. El problema lo resolvemos usando una familia de polinomios matriciales de una variable matricial asociada a la fórmula de recurrencia (0.1) y se justificará adecuadamente que esta definición es la natural en nuestro caso. Probaremos además que la sucesión de polinomios rescalados $(P_n(C_n;t))_n$ es la diagonal de una sucesión uniparamétrica $(P_n(C_k;t))_n$, $k \in \mathbb{N}$, de polinomios matriciales ortogonales.

El resultado buscado se obtendrá a partir de un resultado más general donde establecemos la asintótica del cociente para familias uniparamétricas de polinomios matriciales ortonormales, es decir, consideraremos sucesiones de polinomios ortonormales $(R_{n,k})_n$ dependientes de un parámetro $k \in \mathbb{N}$, definidas mediante la relación de recurrencia

$$tR_{n,k}(t) = A_{n+1,k}R_{n+1,k}(t) + B_{n,k}R_{n,k}(t) + A_{n,k}^{*}R_{n-1,k}(t), \quad n \geq 0,$$

con las condiciones iniciales $R_{0,k}(t) = I$ y $R_{-1,k}(t) = \theta$ y verificando que, para todo $l \geq 0$,

$$\lim_{m\to\infty} A_{n_m-l,k_m} = A, \quad \lim_{m\to\infty} B_{n_m-l,k_m} = B,$$

donde A es no singular y B hermítica (véase [KV] para el correspondiente resultado escalar).

Para estas familias uniparamétricas obtendremos que

$$\lim_{m\to\infty} R_{n_m-1,k_m}(z)R^{-1}_{n_m,k_m}(z)A^{-1}_{n_m,k_m} = \int \frac{dW_{A,B}(t)}{z-t}, \tag{0.3}$$

para $z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$, donde $W_{A,B}$ es la matriz peso para los polinomios matriciales de Chebyshev de segunda clase y además, la convergencia es uniforme para z en compactos de $\mathbb{C}\setminus\Gamma$, siendo Δ_m el conjunto de los ceros del polinomio $R_{n_m,k_m}(z)$ y $\Gamma = \bigcap_{N\geq 0} M_N$ donde $M_N = \overline{\bigcup_{m\geq N} \Delta_m}$.

Como acabamos de explicar, la asintótica del cociente para polinomios ortonormales con coeficientes de recurrencia no acotados será consecuencia de la asintótica del cociente para estas familias uniparamétricas, obteniendo que si $(P_n)_n$ es una sucesión de polinomios matriciales ortonormales satisfaciendo la relación de recurrencia de tres términos (0.1) y suponiendo que exista una sucesión de matrices definidas positivas $(C_n)_n$ tales que verifican las condiciones de convergencia establecidas en (0.2), con A no singular y B hermítica, entonces se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} C_n^{1/2}P_{n-1}(C_n;z)P_n^{-1}(C_n;z)A_n^{-1}C_n^{1/2} = \int \frac{dW_{A,B}(t)}{z-t},$$

para $z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$, donde $W_{A,B}$ es la matriz peso para los polinomios matriciales de Chebyshev de segunda clase. Además, la convergencia es uniforme para z en compactos de $\mathbb{C}\setminus\Gamma$, siendo Δ_n el conjunto de los ceros del polinomio $P_n(C_n;z)$ y $\Gamma = \bigcap_{N\geq 0} M_N$ donde $M_N = \overline{\bigcup_{n\geq N} \Delta_n}$.

Finalizaremos este estudio contemplando el caso en el que la matriz A sea singular (caso degenerado) y mostraremos numerosos ejemplos que ilustrarán los resultados obtenidos.

Resaltar que los resultados desarrollados en esta sección del segundo capítulo han sido recientemente publicados en [**DD1**].

Dedicaremos también una sección dentro de este capítulo al estudio del cociente asintótico para polinomios ortonormales cuyos coeficientes de recurrencia toman asintóticamente un número finito (eventualmente infinito) de valores, es decir, las sucesiones $(A_n)_n$ y $(B_n)_n$ que aparecen en la relación de recurrencia (0.1) satisfacen

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in X_k}} A_n = \alpha_k\,, \qquad \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in X_k}} B_n = \beta_k$$

donde $(X_k)_{k\in I}$ forman una partición de $\mathbb{N}$, siendo $I \subseteq \mathbb{N}$ un conjunto de índices finito (eventualmente infinito).

Como caso particular de este resultado obtendremos el cociente asintótico para polinomios ortonormales con coeficientes de recurrencia asintóticamente periódicos, esto es, verificando que para $p \in \mathbb{N}$ fijo,

$$\lim_{N\to\infty} A_{Np+k} = \alpha_k\,, \qquad \lim_{N\to\infty} B_{Np+k} = \beta_k\,, \qquad k = 0, 1, \cdots, p-1,$$

con α_k no singular para $k = 0, 1, \cdots, p-1$. También obtendremos el cociente asintótico para polinomios ortonormales cuyos coeficientes de recurrencia verifiquen

$$\lim_{N\to\infty} A_{2^N-k} = \alpha_k\,, \qquad \lim_{N\to\infty} B_{2^N-k} = \beta_k\,, \qquad k \in \mathbb{N},$$

con α_k no singular para $k \in \mathbb{N}$ siendo $(\alpha_k)_k$ y $(\beta_k)_k$ dos sucesiones acotadas.

El **tercer capítulo** está dedicado al estudio de la convergencia débil para polinomios matriciales ortonormales. En 1.995, W. Van Assche [V5] estableció resultados de convergencia débil para familias uniparamétricas de polinomios ortonormales escalares, es decir, calculó el límite cuando $n \to \infty$ de integrales de la forma

$$\int f(x) p_{n+k,n}(x) p_{n+l,n}(x)\, d\mu_n(x),$$

siendo $(p_{n,k})_n$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a μ_k y f un polinomio cualquiera, bajo ciertas condiciones sobre el comportamiento asintótico de los coeficientes que aparecen en la relación de recurrencia de los polinomios $(p_{n,k})_n$. Aunque este problema se resolvió usando la teoría espectral del operador de Jacobi doblemente infinito, en el planteamiento de Van Assche aparecen implícitamente polinomios matriciales ortonormales de orden 2×2.

En este capítulo se extenderá este resultado a familias uniparamétricas de polinomios matriciales ortonormales definidas, para cada $k \in \mathbb{N}$, mediante la relación de recurrencia:

$$tP_{n,k}(t) = A_{n+1,k}P_{n+1,k}(t) + B_{n,k}P_{n,k}(t) + A^*_{n,k}P_{n-1,k}(t), \quad n \geq 0,$$

siendo las matrices $A_{n,k}$ no singulares y $B_{n,k}$ hermíticas, con las condiciones iniciales $P_{-1,k}(t) = \theta$ y $P_{0,k}(t) = I$ y asumiendo que el comportamiento asintótico de los coeficientes que aparecen en la relación de recurrencia de los polinomios $(P_{n,k})_n$ es de la forma:

$$\lim_{n\to\infty} A_{n+j,n} = A_j, \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} B_{n+j,n} = B_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{0.4}$$

siendo las matrices A_j invertibles y B_j hermíticas, para $j \in \mathbb{Z}$.

El planteamiento que haremos en esta memoria es completamente diferente al que puede encontrarse en [V5] para el caso escalar; el nuestro está basado en la relación de recurrencia de los polinomios $(P_{n,k})_n$ y nos muestra la estructura matricial del problema incluso para el caso escalar. Obtendremos que

$$\lim_{n\to\infty} \int F(t)P_{n+k,n}(t)\, dW_n(t)\, P^*_{n+l,n}(t)$$
$$= \left(\int \begin{pmatrix} F(t) & \theta \\ \theta & F(t) \end{pmatrix} \mathbb{T}_{\alpha(k)}(t)\, d\mathbb{W}(t)\, \mathbb{T}^*_{\alpha(l)}(t) \right)_{|\beta(k),\beta(l)}$$

donde

$$\alpha(x) = \begin{cases} -x-1 & si \quad x < 0 \\ x & si \quad x \geq 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \beta(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x < 0 \\ 2 & si \quad x \geq 0. \end{cases}$$

siendo $(\mathbb{T}_n)_n$ una sucesión de polinomios ortonormales de orden $2N \times 2N$, verificando una relación de recurrencia como en (0.1) y cuyos coeficientes de recurrencia se definen mediante las expresiones

$$\mathbb{A}_n = \begin{pmatrix} A^*_{-n} & \theta \\ \theta & A_n \end{pmatrix}, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\mathbb{B}_0 = \begin{pmatrix} B_{-1} & A_0 \\ A^*_0 & B_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}_n = \begin{pmatrix} B_{-n-1} & \theta \\ \theta & B_n \end{pmatrix} \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots$$

donde las sucesiones matriciales $(A_n)_n$ y $(B_n)_n$ son las obtenidas en (0.4) y

$\mathbb{W}$ es la matriz peso con respecto a la cual los polinomios matriciales $(\mathbb{T}_n)_n$ son ortonormales.

Concluiremos este capítulo mostrando numerosas aplicaciones del Teorema de convergencia débil para polinomios matriciales ortonormales, de entre las cuales destacamos la siguiente: Si la sucesión de polinomios matriciales $(P_n)_n$ pertenece a la clase matricial de Nevai $M(A, B)$, con A no singular y hermítica y B hermítica, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int F(x)P_n(x)dW(x)P_n^*(x) = \int F(x)dX_{A,B}(x),$$

para cualquier polinomio matricial F de orden $N \times N$, donde $X_{A,B}$ es la matriz peso para los polinomios matriciales de Chebyshev de primera clase. Si además, A es definida positiva entonces, dado un entero $k \geq 1$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int F(x)P_{n+k}(x)dW(x)P_n^*(x) = \int F(x)T_k^{A,B}(x)dX_{A,B}(x),$$

para cualquier polinomio matricial F, donde $T_k^{A,B}$ es el k-ésimo polinomio de Chebyshev de primera clase.

Destacar que los resultados aquí desarrollados han sido publicados recientemente en [**DD2**].

En el **cuarto capítulo** estableceremos la extensión del Teorema de Markov para matrices de medidas completamente indeterminadas. Para el caso escalar, en 1.895 Markov [**M**] estableció que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n(x)}{p_n(x)} = \int \frac{d\mu(x)}{z-x}, \quad para \quad z \in \mathbb{C} \setminus [a, b],$$

donde μ es una medida positiva definida sobre el intervalo $[a, b]$ y $(p_n)_n$ es la sucesión de polinomios ortogonales escalares asociados a μ y $(q_n)_n$ los correspondientes polinomios de segunda clase. La hipótesis sobre μ de soporte compacto es demasiado restrictiva y en realidad basta con que μ sea una medida determinada para que se tenga este resultado. Además, para algunas familias de medidas indeterminadas también se ha extendido el Teorema de Markov (cf. [**B**]). En efecto, para este caso, usando la parametrización de Nevanlinna, es posible obtener también otra extensión del Teorema de

Markov. En esta situación, todas las medidas que tienen una misma sucesión de momentos se pueden describir a través de cuatro funciones enteras A, B, C y D (cf. [A, p. 98]), y en particular, las soluciones extremales de Nevanlinna $(\mu_t)_{t\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}}$ se pueden representar mediante la relación

$$\int \frac{\mu_t(x)}{z-x} = \frac{A(z)-tB(z)}{C(z)-tD(z)}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus sop(\mu_t).$$

Teniendo esto presente, si partimos de la hipótesis que μ es indeterminada y si además se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n(0)}{q_n(0)} = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^*, \tag{0.5}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n(x)}{p_n(x)} = \int \frac{d\mu_\alpha(x)}{z-x}, \quad para \quad z \in \mathbb{C}\setminus sop(\mu_\alpha).$$

Más aún, se demuestra que si la medida es también solución de un problema de momentos de Stieltjes indeterminado entonces obtenemos una nueva extensión del Teorema de Markov, similar a la anterior, donde la hipótesis de convergencia (0.5) siempre se verifica (cf. [B]).

Ahora bien, a diferencia del caso escalar, en el caso matricial nos podemos encontrar con diversos tipos de problemas indeterminados. La indeterminación se produce cuando existen varias soluciones del problema matricial de momentos asociado; esto equivale a que los índices de deficiencia asociados al operador definido por la matriz de Jacobi asociada sean estrictamente positivos. En el caso escalar los índices pueden valer 0 en el caso determinado y 1 en el caso indeterminado, pero en el caso matricial pueden variar de 0 a N. Si ambos índices son iguales a cero estamos ante el caso determinado y si ambos son iguales a N ante el caso completamente indeterminado. En esta memoria consideraremos el problema de momentos matricial completamente indeterminado.

Nuestro punto de partida estará en la Parametrización de Nevanlinna para medidas completamente indeterminadas (establecida recientemente por P.

López-Rodríguez [L1]) y el Teorema de Markov para medidas determinadas (demostrado por A. J. Durán [D4]).

La primera sección de este cuarto capítulo la dedicaremos al caso en que W sea una matriz de medidas definida positiva solución de un problema de momentos de Hamburger completamente indeterminado. Suponiendo que

$$\lim_{n\to\infty} Q_n^{-1}(0)P_n(0) = \Lambda \tag{0.6}$$

probaremos que Λ es una matriz hermítica, a partir de la que se define la matriz unitaria $V = -\big(\Lambda + iI\big)^{-1}\big(\Lambda - iI\big)$ para la cual

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{-1}(z)Q_n(z) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_V(t)}{t-z} \qquad \text{para } \ z \in \mathbb{C} \setminus \ \operatorname{sop}(\mu_V)$$

y la convergencia es uniforme en compactos de $\mathbb{C} \setminus \operatorname{sop}(\mu_V)$ donde la medida μ_V nos la proporciona la Parametrización de Nevanlinna de la matriz V.

La siguiente sección la dedicaremos al estudio del Teorema de Markov para el problema de momentos de Stieltjes (admite una solución con soporte en $[0, +\infty)$) completamente indeterminado.

Como paso previo se obtiene la siguiente caracterización para familias de polinomios ortonormales con respecto a un peso matricial soportado en $[0, +\infty)$: Si $(P_n)_n$ es una sucesión de polinomios matriciales verificando la relación de recurrencia (0.1), entonces $(P_n)_n$ son ortonormales con respecto a un peso matricial W cuyo soporte está contenido en $[0, +\infty)$ si y sólo si existen dos sucesiones de matrices definidas positivas $(M_n)_{n\geq 1}$ y $(L_n)_{n\geq 1}$ para las cuales

$$\begin{aligned} A_n &= M_n^{-1/2} L_n^{-1} M_{n+1}^{-1/2}, \qquad n \geq 1 \\ B_0 &= M_1^{-1/2} L_1^{-1} M_1^{-1/2} \\ B_n &= M_{n+1}^{-1/2} \big(L_n^{-1} + L_{n+1}^{-1}\big) M_{n+1}^{-1/2}, \qquad n \geq 1\,. \end{aligned} \tag{0.7}$$

Aunque la caracterización de los coeficientes de la fórmula de recurrencia para matrices de medidas con soporte en $[0, +\infty)$ ha sido recientemente publicado en [DS], aquí se obtendrán de forma independiente y de manera completamente diferente.

Concluiremos esta sección probando que para un problema de momentos de Stieltjes completamente indeterminado siempre existe una matriz unitaria V para la cual

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{-1}(z)Q_n(z) = -\int_0^\infty \frac{d\mu_V(t)}{t-z} \qquad \text{para } \ z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{sop}(\mu_V)$$

donde $V = -\big(\Lambda + iI\big)^{-1}\big(\Lambda - iI\big)$ y $\Lambda = -M_1^{-1/2}\big(\sum_{i=1}^{\infty} L_i\big)^{-1} M_1^{-1/2}$, estando las matrices $(M_n)_n$ y $(L_n)_n$ definidas por las relaciones (0.7) y la convergencia es uniforme en compactos de $\mathbb{C} \setminus \operatorname{sop}(\mu_V)$; es decir, para este caso la hipótesis de convergencia (0.6) siempre se verifica.

Capítulo 1

Preliminares

El propósito de este capítulo consiste en introducir algunas definiciones previas así como una breve descripción de algunos resultados ya conocidos acerca de la teoría de polinomios matriciales ortogonales al objeto de hacer esta memoria autocontenida y posibilitar también una mejor valoración de la originalidad de sus resultados.

1.1 Definiciones previas

Definición 1.1. *Un polinomio matricial de grado n es una aplicación*

$$P:\ \mathbb{C}\to\ \mathbb{C}^{N\times N}$$

de la forma

$$P(t)=A_nt^n+A_{n-1}t^{n-1}+\cdots+A_1t+A_0$$

donde $A_0,A_1,\ldots,A_n\in\mathbb{C}^{N\times N}$ y $A_n\neq\theta$ (en lo sucesivo θ representará la matriz nula; el tamaño de la misma quedará determinado por el contexto).

Obsérvese que, mientras definimos el polinomio $P^*(t)$ como

$$P^*(t)=\sum_{k=0}^{n}A_k^*t^k\ ,$$

tenemos que

$$P(t)^*=\left(\sum_{k=0}^{n}A_kt^k\right)^*=\sum_{k=0}^{n}A_k^*\bar{t}^k=P^*(\bar{t}).$$

Denotaremos por $\mathbb{C}^{N\times N}[t]$ al espacio de los polinomios en la variable t con coeficientes en $\mathbb{C}^{N\times N}$ y por $\mathbb{C}_n^{N\times N}[t]$ al subespacio de $\mathbb{C}^{N\times N}[t]$ formado por todos los polinomios matriciales de grado menor o igual que n, siendo n un número natural.

Definición 1.2. *Una matriz de medidas W de orden $N \times N$ sobre la recta real es una matriz cuadrada de orden $N \times N$ cuyas entradas son medidas complejas de Borel sobre la recta real, es decir,*

$$W = \begin{pmatrix} \mu_{1,1} & \cdots & \mu_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{N,1} & \cdots & \mu_{N,N} \end{pmatrix}$$

Definición 1.3. *Se dice que una matriz de medidas W es definida positiva si para cualquier conjunto de Borel A la matriz numérica*

$$W(A) = \Big(\mu_{i,j}(A)\Big)_{i,j=1}^{N}$$

es semidefinida positiva.

Si W es definida positiva, entonces las medidas $\mu_{i,i}$ que aparecen en la diagonal son todas medidas positivas, y el resto son medidas complejas verificando $\mu_{i,j} = \overline{\mu_{j,i}}$.

Definición 1.4. *Para una matriz de medidas W definida positiva se define el soporte de W como el soporte de la medida traza de W, es decir*

$$sop(W) = \; sop(\tau W) = \; sop(\mu_{1,1} + \mu_{2,2} + \cdots + \mu_{N,N}).$$

Definición 1.5. *Diremos que una matriz de medidas definida positiva W tiene momento de orden k, $k \geq 0$, si existe una matriz S_k de orden $N \times N$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \, dW(t) = S_k.$$

Definición 1.6. *Diremos que una medida matricial definida positiva W es determinada si no existe ninguna otra medida matricial que tenga los mismos momentos $(S_n)_{n\geq 0}$ que W.*

Observación 1.7. Las medidas determinadas están unívocamente determinadas por su sucesión de momentos:

$$(S_n)_n = \Big(\int t^n dW(t) \Big)_n .$$

Definición 1.8. *Se dice que una matriz de medidas W con momentos de todos los órdenes finitos es no degenerada si para cualquier polinomio P con coeficiente líder no singular se tiene que $\int P(t)dW(t)P^*(t)$ es no singular.*

Nota 1.9. De la definición 1.5 es inmediato que para una matriz de medidas W no degenerada se tiene que el primer momento S_0 es una matriz numérica definida positiva.

Definición 1.10. *Se dice que una sucesión $(P_n)_n$ de polinomios matriciales, con grado de P_n igual a n, es ortogonal con respecto a una matriz de medidas definida positiva W si*

$$\int_{\mathbb{R}} P_n(t)\, dW(t) P_m^*(t) = \delta_{n,m}\Gamma_n, \qquad n,m \geq 0 \quad y \quad \Gamma_n \text{ definida positiva}$$

y diremos que $(P_n)_n$ es ortonormal con respecto a W si

$$\int_{\mathbb{R}} P_n(t)\, dW(t) P_m^*(t) = \delta_{n,m} I, \qquad n,m \geq 0.$$

Observación 1.11. Si $(P_n)_n$ es una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a W y $(U_n)_n$ es una sucesión de matrices unitarias, es decir, $U_n U_n^* = I$ para $n \in \mathbb{N}$, entonces $(U_n P_n)_n$ es también una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a W.

Nota 1.12. Decir que una matriz de medidas definida positiva con momentos de todos los órdenes verifica que $\int P(t)dW(t)P^*(t)$ es no singular para todo polinomio P con coeficiente líder no singular equivale a decir que existe una sucesión $(P_n)_{n\geq 0}$ de polinomios ortonormales con respecto a W, con grado de P_n igual a n, y con coeficiente líder no singular.

En efecto, dada W una matriz de medidas definida positiva con momentos de todos los órdenes y suponiendo que $\int P(t)dW(t)P^*(t)$ es no singular para todo polinomio P con coeficiente líder no singular, podemos definir un producto escalar sobre el espacio de polinomios $\mathbb{C}^{N\times N}[t]$ de la siguiente forma:

$$(P,Q)=\int P(t)\,dW(t)Q^*(t).$$

Por hipótesis se tiene que (P,P) es invertible si P tiene coeficiente líder no singular. Consiguientemente aplicando el proceso de ortonormalización de Grahm-Schmidt a la sucesión $\{I,tI,t^2I,\dots\}$, se obtiene una sucesión $(P_n)_n$ de polinomios matriciales ortonormales con respecto a la medida matricial W con grado de P_n igual a n y coeficiente líder no singular.

Recíprocamente, si existe una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a W, cualquier polinomio P de grado n puede ser expresado de la forma

$$P(t)=Y_nP_n(t)+\sum_{k=0}^{n-1}Y_kP_k(t)\,;$$

está claro que si P tiene coeficiente líder no singular entonces Y_n es no singular, y por tanto

$$\int P(t)dW(t)P(t)=Y_nY_n^*+\sum_{k=0}^{n-1}Y_kY_k^*$$

es también no singular. □

Nota 1.13. Podemos decir que W es no degenerada si y sólo si el único polinomio $P(t)\in\mathbb{C}^{N\times N}[t]$ que verifica $\int_{\mathbb{R}}P(t)dW(t)P^*(t)=\theta$ es $P(t)=\theta$.

En efecto, sea P un polinomio matricial de grado n verificando que

$$\int P(t)dW(t)P^*(t)=\theta\,.$$

Si suponemos que W es no degenerada entonces existe una sucesión de polinomios matriciales $(P_n)_n$ ortonormales con respecto a W. Así pues, $P(t)=\sum_{k=0}^{n}Y_kP_k(t)$ y por hipótesis tenemos que

$$\int P(t)dW(t)P^*(t)=\sum_{k=0}^{n}Y_kY_k^*=\theta\,,$$

de donde se deduce que $Y_k = \theta$ para $k = 0, \cdots, n$ y por consiguiente $P = \theta$.

Recíprocamente, si P es un polinomio matricial de grado n con coeficiente líder no singular, lo podemos expresar como

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} Y_i t^i ,$$

siendo la matriz Y_n no singular. Por hipótesis, esto equivale a decir que para todo $n \geq 0$ la igualdad

$$\sum_{i,j=0}^{n} Y_i S_{i+j} Y_j^* = \theta$$

es sólo posible cuando todas las matrices cuadradas Y_i sean nulas. Este razonamiento es igualmente aplicable sustituyendo las matrices Y_i por vectores $y_i \in \mathbb{C}^N$.

Ahora bien, si suponemos por el contrario que $\int P(t)dW(t)P^*(t)$ es singular, entonces existe un vector no nulo $y_0 \in \mathbb{C}^N$ para el cual se tiene que

$$y_0 \Big(\int P(t)dW(t)P^*(t) \Big) y_0^* = 0$$

y esto equivale a decir que

$$\sum_{i,j=0}^{n} (y_0 Y_i) S_{i+j} (y_0 Y_j)^* = 0 ,$$

pero, por hipótesis, esta igualdad sólo es válida si todos los vectores $(y_0 Y_i)_{0 \leq i \leq n}$ son nulos, lo cual es imposible pues y_0 es un vector no nulo y la matriz Y_n es no singular. Por lo tanto $\int P(t)dW(t)P^*(t)$ es no singular. $\square$

En lo sucesivo, todas las matrices de medida que manejemos se supondrán definidas positivas, con momentos finitos de todos los órdenes y no degeneradas, salvo que se especifique lo contrario.

1.2 La relación de recurrencia de tres términos

Hemos visto que si W es definida positiva, con momentos finitos de todos los órdenes y no degenerada, entonces existe una sucesión de polinomios ortonormales con respecto a W. Esta sucesión de polinomios matriciales ortonormales $(P_n)_n$, siendo P_n de grado n, satisface una relación de recurrencia de tres términos de la forma:

$$(1.1) \qquad tP_n(t) = A_{n+1}P_{n+1}(t) + B_nP_n(t) + A_n^*P_{n-1}(t), \qquad n \geq 0$$

con las condiciones iniciales $P_{-1}(t) = \theta$ y $P_0(t) = I$, siendo

$$A_n = (tP_{n-1}, P_n) \quad \text{y} \quad B_n = (tP_n, P_n)\,,$$

de donde se deduce que $\det(A_n) \neq 0$ y $B_n = B_n^*$, es decir, las matrices $(A_n)_n$ son invertibles y $(B_n)_n$ son hermíticas.

Resaltar que si $(U_n)_n$ es una sucesión de matrices unitarias ($U_nU_n^* = I$ para $n \geq 0$), la sucesión de polinomios $(R_n)_n$ definidos por $R_n(t) = U_nP_n(t)$ también es ortonormal con respecto a la misma matriz de medidas W y satisfacen una relación de recurrencia de tres términos como (1.1) con coeficientes $U_{n-1}A_nU_n^*$ en vez de A_n y $U_nB_nU_n^*$ en vez de B_n.

Esta relación de recurrencia caracteriza completamente a los polinomios ortonormales, es decir, si una familia de polinomios cualesquiera verifica una relación de recurrencia de tres términos como la establecida en (1.1), entonces dicha familia es ortonormal con respecto a una cierta medida definida positiva W. Este resultado se conoce como el **Teorema de Favard** (cf. [**D2, DL1**]).

Definición 1.14. *Dada $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortogonales con respecto a W, se definen los polinomios de segunda clase, que denotaremos por $(Q_n)_n$, de la siguiente forma*

$$Q_n(t) = \int \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x}\, dW(x), \quad n \geq 0.$$

La sucesión de polinomios de segunda clase $(Q_n)_n$ también satisface la relación de recurrencia (1.1), pero con las condiciones iniciales $Q_0(t) = \theta$ y $Q_1(t) = A_1^{-1}$.

1.3 Ceros y fórmulas de cuadratura

Partimos de una sucesión de polinomios matriciales de orden $N \times N$ que satisface una relación de recurrencia de tres términos como la indicada en (1.1), es decir, una relación de la forma:

$$tP_n(t) = A_{n+1}P_{n+1}(t) + B_nP_n(t) + A_n^*P_{n-1}(t), \quad n \geq 0$$

siendo $P_0(t) = I$ y $P_{-1}(t) = \theta$, donde $P_n(t)$ son polinomios matriciales con coeficientes en $\mathbb{C}^{N\times N}$ y los coeficientes de recurrencia A_n, B_n son también matrices $N \times N$ que verifican $\det(A_n) \neq 0$ y $B_n^* = B_n$.

Esta relación de recurrencia induce un operador A del conjunto de los polinomios en sí mismo como sigue:

$$A\left(P_n(t)\right) = tP_n(t).$$

Consideremos la matriz asociada a este operador, que denominaremos N-matriz de Jacobi, con respecto a la base de los polinomios P_n, esto es, la matriz infinita que se obtiene al situar las matrices $(A_k)_k$, $(B_k)_k$ y $(A_k^*)_k$ que aparecen en la relación de recurrencia en las tres diagonales centrales de la matriz J:

$$J = \begin{pmatrix} B_0 & A_1 & & & \\ A_1^* & B_1 & A_2 & & \\ & A_2^* & B_2 & A_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

La N-matriz de Jacobi juega un papel fundamental en el estudio de los ceros y de la fórmula de cuadratura para los polinomios matriciales $(P_n)_n$.

Definición 1.15. *Sea $P(t)$ un polinomio matricial, diremos que un punto t_0 es un cero de $P(t)$ si $\det(P(t_0)) = 0$, es decir, si t_0 es un cero del polinomio escalar $\det(P(t))$.*

Las propiedades de los ceros de los polinomios matriciales ortogonales las vamos a enunciar en el Teorema 1.17. Estas propiedades se demuestran a partir del siguiente Lema que es muy interesante pues nos servirá en el Capítulo 2 para establecer propiedades del soporte de la medida con respecto a la cual son ortogonales la sucesión de polinomios $(P_n)_n$.

Lema 1.16. [DL1] *Para $n \in \mathbb{N}$, los ceros del polinomio matricial $P_n(t)$ son los mismos que los del polinomio $det(tI_{nN} - J_{nN})$ (con la misma multiplicidad), donde I_{nN} es la matriz identidad de orden nN y J_{nN} es la N-matriz de Jacobi truncada al orden nN:*

$$J_{nN} = \begin{pmatrix} B_0 & A_1 & & & \\ A_1^* & B_1 & A_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A_{n-2}^* & B_{n-2} & A_{n-1} \\ & & & A_{n-1}^* & B_{n-1} \end{pmatrix}$$

Teorema 1.17. [DL1, D4] *Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortogonales. Se verifican las siguientes propiedades:*

(i) Los ceros de P_n tienen una multiplicidad no mayor que N. Además P_n tiene nN ceros (contando sus multiplicidades) y todos son reales ($n \in \mathbb{N}$).

(ii) Si a es un cero de multiplicidad p de P_n, entonces

$$\mathrm{Rango}\big(P_n(a)\big) = N - p$$

(iii) Si llamamos $x_{n,k}$ ($k = 1, \ldots, nN$) a los ceros de P_n ordenados de forma creciente (y teniendo en cuenta sus multiplicidades) entonces

$$x_{n+1,k} \leq x_{n,k} \leq x_{n+1,k+1} \quad \textit{para} \quad k = 1, \ldots, nN.$$

(iv) Si a es un cero de P_n y de P_{n+1} entonces $P_n(a)$ y $P_{n+1}(a)$ no tienen ningún autovector común asociado a cero.

(v) Si $x_{n,k}$ es un cero de P_n de multiplicidad N, entonces $P_n(x_{n,k}) = \theta$. En este caso el número real $x_{n,k}$ no puede ser un cero del polinomio matricial P_{n+1}.

(vi) Si a es un cero de $P_n(t)$ de multiplicidad p, entonces

$$\Big(\mathrm{Adj}\big(P_n(t)\big)\Big)^{(p-1)}(a)P_n(a) = P_n(a)\Big(\mathrm{Adj}\big(P_n(t)\big)\Big)^{(p-1)}(a) = \theta$$

y además

$$\text{Rango}\Big(\text{Adj}\big(P_n(t)\big)\Big)^{(p-1)}(a) = p$$

siendo las p filas linealmente independientes de $(\text{Adj}\,(P_n(t)))^{(p-1)}\,(a)$ una base del espacio lineal de los autovectores por la izquierda de $P_n(a)$ asociados a 0.

Una vez vistas las propiedades de los ceros de los polinomios ortogonales pasamos a enunciar el Teorema de la Fórmula de Cuadratura. Para ello necesitaremos la siguiente definición:

Definición 1.18. *Una fórmula de cuadratura con grado de precisión n para una matriz de medidas W se compone de un conjunto de números (reales o complejos) x_k, $k = 1\cdots, m$, denominados nodos y un conjunto de matrices G_k, $k = 1\cdots, m$, denominadas coeficientes de cuadratura, tales que*

$$\int P(t)dW(t) = \sum_{k=1}^{m} P(x_k)G_k\,, \tag{1.3}$$

para cualquier polinomio matricial P de grado menor o igual a n.

Observación 1.19. La expresión (1.3) de la definición anterior equivale a decir que

$$\int P(t)dW(t)Q^*(t) = \sum_{k=1}^{m} P(x_k)G_kQ^*(x_k)\,,$$

para cualesquiera polinomios P y Q verificando que la suma de sus grados sea menor o igual a n.

Teorema 1.20. [D4] ***Fórmula de Cuadratura.***
Dado $n \in \mathbb{N}$, sean $x_{n,k}$ $(k = 1, \ldots, m)$ son los diferentes ceros del polinomio matricial P_n ordenados de forma creciente $(m \leq nN)$ y $\Gamma_{n,k}$ las matrices

$$\Gamma_{n,k} = \frac{l_k}{\big(\det\big(P_n(t)\big)^{(l_k)}(x_{n,k})\big)}\Big(\text{Adj}\big(P_n(t)\big)\Big)^{(l_k-1)}(x_{n,k})Q_n(x_{n,k}),$$

para $k = 1, \ldots, m$, donde l_k es la multiplicidad de $x_{n,k}$. Entonces,

(i) Para cualquier polinomio P de grado menor o igual que $2n-1$ se tiene que

$$\int P(t)dW(t) = \sum_{k=1}^{m} P(x_{n,k})\Gamma_{n,k}.$$

(ii) $\Gamma_{n,k}$ son semidefinidas positivas y de rango l_k, $k = 1, \ldots, m$.

Nota 1.21. En [D4] se demuestra una extensión del Teorema anterior para perturbaciones de la sucesión de polinomios ortonormales $(P_n)_n$. Recientemente el recíproco de este resultado ha sido establecido por A. Durán y E. Defez para $G_k \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $k = 1, \cdots, m$, coeficientes de una fórmula de cuadratura para un matriz de medidas W con grado de precisión igual a $2n-2$ verificando que $\sum_{k=1}^{m} \text{Rango}(G_k) = nN$. Además, A. Durán y B. Polo en [DP] han establecido resultados similares a éste para formulas de cuadratura Gaussianas suponiendo que $\sum_{k=1}^{m} \text{Rango}(G_k) = (n-1)N + h$ con $0 < h \leq N - 1$.

Los tres resultados siguientes se usarán en demostraciones relacionadas con la asintótica del cociente para polinomios matriciales ortonormales.

Teorema 1.22. ***Teorema de Stieltjes - Vitali***
Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones analíticas cada una regular en una región abierta G del plano complejo, y sea E un subconjunto de G con puntos límites en G. Si $(f_n)_n$ es uniformemente acotada sobre G y converge en E, entonces $(f_n)_n$ converge uniformemente sobre G.

Teorema 1.23. [Ko] ***Método de los Momentos***
Sean $(\mu_n)_n$ una sucesión de matrices de medidas definidas positivas donde μ_n tiene momentos de todos los órdenes y μ una matriz de medidas definida positiva con momentos de todos los órdenes y con soporte compacto. Si $(R_n)_n$ es una sucesión de polinomios matriciales, donde R_n es de grado n, para la cual

$$\lim_{n\to\infty} \int R_k(t)d\mu_n(t) = \int R_k(t)d\mu(t) \quad \textit{para} \quad k = 0, 1, 2, \cdots,$$

entonces, μ_n converge débilmente a μ, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \int f(t)d\mu_n(t) = \int f(t)d\mu(t) \quad \textit{para} \quad f \in C_b(\mathbb{R}),$$

siendo $C_b(\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones continuas y acotadas sobre $\mathbb{R}$.

Lema 1.24. *[D4, Tma. 3.1, p. 1186]*
Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios ortogonales y $P(z)$ un polinomio matricial de grado menor o igual que $n-1$. Entonces, la siguiente descomposición

$$P(z)P_n^{-1}(z) = \sum_{k=0}^{m} \frac{C_{n,k}}{z - x_{n,k}}$$

es siempre posible, siendo $x_{n,k}$ $(k = 1, \cdots, m)$ los diferentes ceros de P_n y las matrices $C_{n,k}$ vienen dadas por

$$C_{n,k} = \frac{l_k}{\Big(\det\big(P_n(t)\big)\Big)^{(l_k)}(x_{n,k})} P(x_{k,n})\Big(\mathrm{Adj}\big(P_n(t)\big)\Big)^{(l_k-1)}(x_{n,k})$$

donde l_k es la multiplicidad del cero $x_{n,k}$.

El resultado siguiente se usará en demostraciones relacionadas con la extensión del Teorema de Markov para el problema de momentos matricial completamente indeterminado. Al igual que el Lema 1.24, ha sido extraído de [D4, Tma. 3.1, p. 1188].

Lema 1.25. *Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a la matriz de medidas definida positiva W. Si $(Q_n)_n$ representa la sucesión de polinomios matriciales de segunda clase asociados a $(P_n)_n$, entonces la matriz $P_n^{-1}(t)Q_n(t)$ es hermítica si $t \in \mathbb{R}$ no es un cero de $P_n(z)$.*

1.4 Polinomios de Chebyshev

Esta sección la vamos a dedicar a mostrar la versión matricial de los polinomios de Chebyshev de primera y segunda clase. Haremos especial hincapié sobre su especial estructura, así como sobre la expresión analítica tanto de su medida matricial como de su transformada de Hilbert.

Los polinomios de Chebyshev de primera clase fueron introducidos por A. Durán, P. López-Rodríguez y E. Saff en [DLS] y los de segunda clase por A. Durán en [D6].

1.4.1 Polinomios de Chebyshev de primera clase

Sea A una matriz hermítica y no singular y B una matriz hermítica, podemos definir una sucesión de polinomios ortonormales matriciales $(T_n^{A,B})_n$ a partir de la siguiente relación de recurrencia:

$$(1.4) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} tT_0^{A,B}(t) & = & \sqrt{2}AT_1^{A,B}(t) + BT_0^{A,B}(t)\,, \\ tT_1^{A,B}(t) & = & AT_2^{A,B}(t) + BT_1^{A,B}(t) + \sqrt{2}AT_0^{A,B}(t)\,, \\ tT_n^{A,B}(t) & = & AT_{n+1}^{A,B}(t) + BT_n^{A,B}(t) + AT_{n-1}^{A,B}(t)\,, \qquad n \geq 2, \end{array} \right.$$

con la condición inicial $T_0^{A,B}(t) = I$. Así definidos, los polinomios $(T_n^{A,B})_n$ son los polinomios de Chebyshev de primera clase. Estos polinomios son ortonormales con respecto a la matriz de medidas $X_{A,B}$.

Si suponemos que A es definida positiva y B hermítica, la matriz de medidas $X_{A,B}$ tiene la siguiente forma explícita:

Si consideramos

$$K_{A,B}(z) = \frac{A^{-1/2}\Big(B - zI\Big)A^{-1/2}}{2}\,,$$

para $x \in \mathbb{R}$ esta matriz es hermítica y por tanto la podemos diagonalizar de la forma $K_{A,B}(x) = U(x)D(x)U^*(x)$ siendo D una matriz diagonal con entradas $d_{i,i}(x)$ reales para $i = 1, \cdots, N$ y $U(x)$ una matriz unitaria, es decir, $U^*(x)U(x) = I$. Entonces

$$(1.5) \qquad dX_{A,B}(x) = \frac{1}{\pi}A^{-1/2}U(x)T(x)U^*(x)A^{-1/2}\,dx$$

donde $T(x)$ es la matriz diagonal cuyas entradas son

$$t_{i,i}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{\sqrt{1 - d_{i,i}^2(x)}} & \text{si} \quad d_{i,i}(x) \in (-1,1) \\ 0 & \text{si} \quad d_{i,i}(x) \notin (-1,1) \end{array} \right.$$

El soporte de esta medida esta definido por

$$\text{sop}(X_{A,B}) = \Big\{x \in \mathbb{R} : \; A^{-1/2}\Big(xI - B\Big)A^{-1/2} \quad \text{tiene algún autovalor en } [-2,2]\Big\}$$

Además, para este caso en que A es definida positiva y B hermítica, los propios polinomios los podemos expresar como:

$$(1.6) \qquad T_n^{A,B}(t) = A^{-\frac{1}{2}}\, t_n\left(\frac{A^{-1/2}\big(B - zI\big)A^{-1/2}}{2}\right)A^{\frac{1}{2}}$$

donde $(t_n)_n$ es la sucesión de polinomios escalares de Chebyshev de primera clase correspondientes al caso $a = \frac{1}{2}$ y $b = 0$.

Además, la transformada de Hilbet de esta medida la podemos expresar como

$$\int \frac{X_{A,B}(t)}{z-t} = A^{-1/2}U(z)\Big(D^2(z) - I\Big)^{-1/2}U(z)^*A^{-1/2}. \tag{1.7}$$

1.4.2 Polinomios de Chebyshev de segunda clase

Sea A una matriz no singular y B una matriz hermítica, podemos definir una sucesión de polinomios ortonormales matriciales $(U_n^{A,B})_n$ a partir de la siguiente relación de recurrencia

$$tU_n^{A,B}(t) = A^*U_{n+1}^{A,B}(t) + BU_n^{A,B}(t) + AU_{n-1}^{A,B}(t), \quad n \geq 0 \tag{1.8}$$

con la condiciones iniciales $U_{-1}^{A,B}(t) = \theta$ y $U_0^{A,B}(t) = I$. Así definidos, los polinomios $(U_n^{A,B})_n$ son los polinomios de Chebyshev de segunda clase. Estos polinomios son ortonormales con respecto a la matriz de medidas $W_{A,B}$.

Si suponemos que A es definida positiva y B hermítica, la matriz de medidas $W_{A,B}$ tiene la siguiente forma explícita:

Considerando la matriz

$$K_{A,B}(z) = \frac{A^{-1/2}\Big(B - zI\Big)A^{-1/2}}{2},$$

para $x \in \mathbb{R}$ esta matriz es hermítica y por tanto la podemos diagonalizar de la forma $K_{A,B}(x) = U(x)D(x)U^*(x)$ siendo D una matriz diagonal con entradas $d_{i,i}(x)$ reales para $i = 1, \cdots, N$ y $U(x)$ una matriz unitaria, es decir, $U^*(x)U(x) = I$. Entonces

$$dW_{A,B}(x) = \frac{1}{\pi}A^{-1/2}U(x)S(x)U^*(x)A^{-1/2}\,dx \tag{1.9}$$

donde $S(x)$ es la matriz diagonal cuyas entradas son

$$s_{i,i}(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - d_{i,i}^2(x)} & \text{si} \quad d_{i,i}(x) \in (-1,1) \\ 0 & \text{si} \quad d_{i,i}(x) \notin (-1,1) \end{cases}$$

El soporte de esta medida esta definido por

$$\operatorname{sop}(W_{A,B}) = \left\{x \in \mathbb{R} : \ A^{-1/2}\Big(xI - B\Big)A^{-1/2} \quad \text{tiene algún autovalor en } [-2,2]\right\}$$

Además, para este caso en que A es definida positiva y B hermítica, los propios polinomios los podemos expresar como:

$$U_n^{A,B}(t) = A^{-\frac{1}{2}}\, u_n\left(\frac{A^{-1/2}(B - zI)A^{-1/2}}{2}\right)A^{\frac{1}{2}} \tag{1.10}$$

donde $(u_n)_n$ es la sucesión de polinomios escalares de Chebyshev de segunda clase correspondientes al caso $a = \frac{1}{2}$ y $b = 0$.

Puesto que A es definida positiva, la transformada de Hilbert de esta medida la podemos expresar como

$$\int \frac{W_{A,B}(t)}{z - t} = A^{-1/2}U(z)\Big(D(z) - \big(D^2(z) - I\big)^{1/2}\Big)U(z)^* A^{-1/2}. \tag{1.11}$$

1.5 Asintótica del cociente

Basándonos en la formula de cuadratura podemos obtener un resultado muy importante en la teoría de los polinomios matriciales ortogonales: el cociente asintótico para polinomios ortogonales donde las sucesiones formadas por sus coeficientes de recurrencia son convergentes.

Definición 1.26. *Dadas dos matrices A y B, donde B es hermítica, diremos que una sucesión de polinomios matriciales que satisfacen la relación de recurrencia (1.1) pertenece a la clase matricial de Nevai, $M(A, B)$, si*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \quad y \quad \lim_{n\to\infty} B_n = B.$$

Respectivamente, diremos que una medida matricial definida positiva pertenece a la clase matricial de Nevai si alguna de las sucesiones de polinomios ortogonales que ésta define pertenece a la clase de Nevai.

Obsérvese que una matriz de medidas W puede pertenecer a varias clases de Nevai, ya que la sucesión de polinomios ortogonales con respecto a W

no es única (está definida salvo multiplicación por la izquierda de matrices unitarias).

Dos claros ejemplos de una sucesiones de polinomios que pertenecen a la clase clase matricial de Nevai $M(A, B)$ serían los polinomios de Chebyshev de primera y segunda clase $(T_n^{A,B})_n$ y $(U_n^{A,B})_n$ definidos respectivamente por las fórmulas de recurrencia (1.4) y (1.8).

El siguiente resultado nos muestra que si una medida matricial pertenece a la clase de Nevai $M(A, B)$ entonces tiene soporte compacto.

Lema 1.27. [**D6**] *Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios ortogonales que pertenece a la clase de Nevai $M(A, B)$. Entonces, existe una constante positiva $M > 0$, que no depende de n, satisfaciendo que si $x_{n,k}$ es un cero de P_n entonces $|x_{n,k}| < M$.*

Además, la sucesión $(P_n)_n$ tiene una única matriz peso W, y esta matriz peso tiene soporte compacto contenido en $[-M, M]$. En particular, las matrices peso $X_{A,B}$ y $W_{A,B}$ para los polinomios de Chebyshev de primera y segunda clase respectivamente tienen soporte compacto.

Definición 1.28. *Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortogonales. Definimos los siguientes conjuntos:*

(i) $\Delta_n = \{t \in \mathbb{R} : \ \det(P_n(t)) = 0\}$

es decir, Δ_n es el conjunto de los ceros del polinomio matricial P_n.

(ii) $\Gamma = \bigcap_{N \geq 0} M_N$, *donde* $M_N = \overline{\bigcup_{n \geq N} \Delta_n}$.

Hemos visto que los ceros de P_n son reales y de multiplicidad no mayor que N (Teorema 1.17). Además, en [**DL1**] se prueba que si W es la medida matricial con respecto a la cual los polinomios matriciales $(P_n)_n$ son ortogonales, esta medida se puede hallar como punto de acumulación débil de una sucesión $(\mu_n)_n$ de medidas discretas donde cada μ_n tiene soporte precisamente en Δ_n. Así pues, si la medida matricial W pertenece a la clase de Nevai $M(A, B)$ tenemos que su soporte es compacto y como consecuencia obtenemos que $\mathrm{sop}(W) \subset \Gamma \subset [-M, M]$.

El resultado que establece el cociente asintótico para una sucesión de polinomios matriciales ortonormales de la clase de Nevai es el siguiente:

Teorema 1.29. [D6] *Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales satisfaciendo la relación de recurrencia (1.1). Supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \quad y \quad \lim_{n\to\infty} B_n = B,$$

siendo A una matriz no singular, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} P_{n-1}(z)P_n^{-1}(z)A_n^{-1} = \int \frac{dW_{A,B}(t)}{z-t}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma, \tag{1.12}$$

donde $W_{A,B}$ es la matriz peso para los polinomios de Chebyshev de segunda clase. Además la convergencia es uniforme en compactos de $\mathbb{C}\setminus\Gamma$.

1.6 El Teorema de Markov

El Teorema de Markov para una matriz de medidas W determinada fue establecido por A. J. Duran en [D4] y establece el comportamiento asintótico del cociente entre el n-ésimo polinomio ortogonal con respecto a una medida determinada y su correspondiente n-ésimo polinomio de segunda clase. Este resultado lo podemos enunciar de la siguiente forma:

Teorema 1.30. [D4] ***Teorema de Markov***

Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortogonales con respecto a la matriz de medidas W que es determinada, entonces

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{-1}(z)Q_n(z) = \int \frac{dW(t)}{z-t} \tag{1.13}$$

para $z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$ y la convergencia es uniforme en compactos de $\mathbb{C}\setminus\Gamma$.

Este resultado se puede extender a los polinomios matriciales asociados de orden k. Vamos a definir estos polinomios y posteriormente enunciaremos el resultado que extiende el Teorema 1.30.

Definición 1.31. *Dado $k \geq 1$, sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a una matriz de medidas W. Los polinomios asociados a $(P_n)_n$ de orden k se definen mediante la fórmula:*

$$P_n^{[k]}(x) = \int \frac{P_{n+k}(x) - P_{n+k}(t)}{x-t} dW(t) P_{k-1}^*(t), \quad n \geq 0. \tag{1.14}$$

Estos polinomios son ortogonales con respecto a una matriz de medidas W_k y satisfacen la relación de recurrencia:

$$tP_n^{[k]}(t) = A_{n+k+1} P_{n+1}^{[k]}(t) + B_{n+k} P_n^{[k]}(t) + A_{n+k}^* P_{n-1}^{[k]}(t), \quad n \geq 0 \tag{1.15}$$

con las condiciones iniciales $P_{-1}^{[k]}(t) = \theta$ y $P_0^{[k]}(0) = A_k^{-1}$.

Una vez definidos los polinomios asociados de orden k pasamos a mostrar el resultado que generaliza el Teorema 1.30:

Teorema 1.32. *Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a W. Si suponemos que W es determinada, entonces, para $k \geq 1$ se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{-1}(z) P_{n-k}^{[k]}(z) = \int dW(t) \frac{P_{k-1}^*(t)}{z-t}, \quad \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma, \tag{1.16}$$

y la convergencia es uniforme para z en compactos de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Como aplicación del Teorema de Markov vamos a demostrar unas relaciones entre las transformadas de Hilbert de las matrices peso de Chebyshev de primera y segunda clase. La segunda de ellas es original de esta tesis. Estas relaciones serán usadas posteriormente en el Capítulo 3.

Lema 1.33. *Sean A una matriz hermítica y no singular y B hermítica. Se verifican las siguientes relaciones:*

$$AF_{A,B}(z)A = zI - B - F_{A,B}^{-1}(z), \tag{1.17}$$

$$2AF_{A,B}(z)A = zI - B - T_{A,B}^{-1}(z), \tag{1.18}$$

donde $F_{A,B}(z) = \displaystyle\int \frac{dW_{A,B}(t)}{z-t}$ *y* $T_{A,B}(z) = \displaystyle\int \frac{dX_{A,B}(t)}{z-t}$.

Demostración: La fórmula (1.17) se puede hallar en [D6, p. 317, (2.11)], pero la vamos a incluir para hacer autocontenido este capítulo.

Si $(P_n)_n$ es una sucesión de polinomios que pertenece a la clase de Nevai $M(A,B)$, de la relación de recurrencia de tres términos que estos polinomios verifican obtenemos que

$$tP_n(t) = A_{n+1}P_{n+1}(t) + B_nP_n(t) + A_n^*P_{n-1}(t)\,.$$

Si multiplicamos a la derecha por $P_n^{-1}(t)$ obtenemos que

$$tP_n(t)P_n^{-1}(t) = A_{n+1}P_{n+1}(t)P_n^{-1}(t) + B_n + A_n^*P_{n-1}(t)P_n^{-1}(t).$$

Tomando límite para $n \to \infty$ y aplicando el Teorema 1.29 del cociente asintótico para polinomios matriciales ortogonales, obtenemos que

$$zI = F_{A,B}^{-1}(z) + B + A^*F_{A,B}(z)A\,,$$

teniendo presente que A es hermítica podemos concluir que

$$AF_{A,B}(z)A = zI - B - F_{A,B}^{-1}(z)\,,$$

con lo que se tiene (1.17).

Para probar (1.18) procederemos de la siguiente forma: Consideremos los polinomios matriciales asociados de orden 2 a la sucesión de polinomios $(T_n^{A,B})_n$ (ver Definicion (1.14)). Para simplificar la notación los denotaremos por $(T_n^{[2]})_n$.

Por definición tenemos que

$$T_n^{[2]}(x) = \int \frac{T_{n+2}(x) - T_{n+2}(t)}{x-t}dX_{A,B}(t)T_1^*(t).$$

Sumando y restando $T_1^*(x)$ a la derecha de la integral obtenemos que:

$$T_n^{[2]}(x) = \int \frac{T_{n+2}(x) - T_{n+2}(t)}{x-t}dX_{A,B}(t)\big(T_1^*(t) - T_1^*(x) + T_1^*(x)\big).$$

Esta expresión la podemos descomponer en

$$\begin{aligned} T_n^{[2]}(x) \;=\;& T_{n+2}(x)\int dX_{A,B}(t)\frac{T_1^*(t) - T_1^*(x)}{x-t} \\ & - \int T_{n+2}(t)dX_{A,B}(t)\frac{T_1^*(t) - T_1^*(x)}{x-t} \qquad (1.19) \\ & + \int \frac{T_{n+2}(x) - T_{n+2}(t)}{x-t}dX_{A,B}(t)T_1^*(x)\,. \end{aligned}$$

Atendiendo a cada uno de los tres sumandos obtenidos en (1.19) tenemos que

- Por la definición de los polinomios asociados dada en (1.14) llegamos a
$$T_{n+2}(x)\int dX_{A,B}(t)\frac{T_1^*(t)-T_1^*(x)}{x-t}=-T_{n+2}(x)(T_0^{[1]})^*(x)\,.$$
- Por la ortogonalidad de $(T_n)_n$ se tiene que
$$\int T_{n+2}(t)dX_{A,B}(t)\frac{T_1^*(t)-T_1^*(x)}{x-t}=\theta\,,$$
ya que $\dfrac{T_1^*(t)-T_1^*(x)}{x-t}$ es un polinomio matricial constante
- Por la definición de los polinomios asociados dada en (1.14) obtenemos que
$$\int \frac{T_{n+2}(x)-T_{n+2}(t)}{x-t}dX_{A,B}(t)T_1^*(x)=T_{n+1}^{[1]}(x)T_1^*(x)\,.$$

Por consiguiente, (1.19) lo podemos expresar como
$$T_n^{[2]}(x)=-T_{n+2}(x)\left(T_0^{[1]}\right)^*(x)+T_{n+1}^{[1]}(x)T_1^*(x).$$
Si multiplicamos a la izquierda por $\left(T_{n+1}^{[1]}\right)^{-1}(x)$ llegamos a:
$$\left(T_{n+1}^{[1]}\right)^{-1}(x)T_n^{[2]}(x)=-\left(T_{n+1}^{[1]}\right)^{-1}(x)T_{n+2}(x)\left(T_0^{[1]}\right)^*(x)+T_1^*(x). \tag{1.20}$$
Pero si tenemos presente (1.15) y la definición de $(T_n)_n$ y $(U_n)_n$ dadas en (1.4) y (1.8) respectivamente, obtenemos que
$$\begin{aligned} T_{n+1}^{[1]}(x) &= U_{n+1}(x)(\sqrt{2}A)^{-1}\\ T_n^{[2]}(x) &= U_n(x)A^{-1} = U_n^{[1]}(x)\,; \end{aligned}$$
por consiguiente (1.20) lo podemos expresar como:
$$\sqrt{2}AU_{n+1}^{-1}(x)U_n^{[1]}(x)=-\left(T_{n+2}^{-1}(x)T_{n+1}^{[1]}(x)\right)^{-1}(\sqrt{2}A)^{-1}+x(\sqrt{2}A)^{-1}-B(\sqrt{2}A)^{-1}.$$
Aplicando el Teorema 1.32 llegamos a
$$\sqrt{2}AF_{A,B}(z)=-T_{A,B}^{-1}(z)(\sqrt{2}A)^{-1}+z(\sqrt{2}A)^{-1}-B(\sqrt{2}A)^{-1},$$
de donde se obtiene fácilmente que
$$2AF_{A,B}(z)A=zI-B-T_{A,B}^{-1}(z).$$

□

1.7 Fórmulas clásicas (versión matricial)

En esta sección recogemos una amplia relación de fórmulas clásicas, en su versión matricial, que serán de gran utilidad a lo largo de toda la memoria.

Lema 1.34. *Para $z, w \in \mathbb{C}$ se verifican las siguientes relaciones:*

(1) Fórmula de Christoffel-Darboux y algunos casos especiales:

$$\begin{aligned} P_{n-1}^*(z)A_nP_n(w) &- P_n^*(z)A_n^*P_{n-1}(w) \\ &= (w-z)\sum_{k=0}^{n-1} P_k^*(z)P_k(w) \end{aligned} \tag{1.21}$$

$$P_{n-1}^*(z)A_nP_n(z) - P_n^*(z)A_n^*P_{n-1}(z) = \theta \tag{1.22}$$

$$P_{n-1}^*(z)A_nP_n'(z) - P_n^*(z)A_n^*P_{n-1}'(z) = \sum_{k=0}^{n-1} P_k^*(z)P_k(z) \tag{1.23}$$

(2) Fórmula de Green y algunos casos particulares:

$$\begin{aligned} P_{n-1}^*(z)A_nQ_n(w) &- P_n^*(z)A_n^*Q_{n-1}(w) \\ &= I + (w-z)\sum_{k=0}^{n-1} P_k^*(z)Q_k(w) \end{aligned} \tag{1.24}$$

$$P_{n-1}^*(z)A_nQ_n(z) - P_n^*(z)A_n^*Q_{n-1}(z) = I \tag{1.25}$$

(3) Fórmula de Liouville-Ostrogadski:

$$Q_n(z)P_{n-1}^*(z) - P_n(z)Q_{n-1}^*(z) = A_n^{-1} \tag{1.26}$$

Nota 1.35. Las demostraciones de estas fórmulas se lleva a cabo de forma similar al caso escalar.

1.8 El problema de momentos matricial

Podemos enunciar el problema de momentos de la siguiente forma: *Dada una sucesión de matrices $(S_n)_n$ encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que exista una matriz de medidas W no degenerada con soporte en $I \subseteq \mathbb{R}$ y definida positiva tal que*

$$S_n = \int_I t^n dW(t), \quad para \ n \geq 0\,.$$

Podemos diferenciar tres tipos de problemas: el de Hamburger si $I = \mathbb{R}$, el de Stieltjes si $I = [0, +\infty)$ y el de Hausdorff si $I = [-1, 1]$.

Diremos que $(S_n)_n$ es una sucesión de Hamburger (respectivamente de Stieltjes o de Hausdorff) si es solución del problema de momentos de Hamburger (respectivamente de Stieltjes o de Hausdorff).

Denotaremos por V al conjunto de soluciones del problema de momentos matricial definido por $(S_n)_n$, es decir, el conjunto de medidas matriciales definidas positivas tales que tienen a $(S_n)_n$ como sucesión de momentos.

Diremos que el problema de momentos es determinado si existe una única solución y en caso contrario diremos que es indeterminado.

Una notable diferencia entre el caso escalar y el matricial es que para el primer caso un problema de momentos puede ser sólamente determinado o indeterminado, mientras que para el caso matricial nos podemos encontrar con muchos tipos de indeterminaciones. La unicidad de solución del problema de momentos matricial está estrechamente ligada a los índices de deficiencia del operador J definido por la N-matriz de Jacobi (1.2) sobre el espacio ℓ^2.

Los índices de deficiencia de una matriz de medidas son por definición los índices de deficiencia del operador definido sobre el espacio ℓ^2 por su N-matriz de Jacobi. En [L1] se prueba que el rango de la matriz límite $R(\lambda)$ definida por

$$R(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} P_k^*(\lambda) P_k(\lambda) \right)^{-1}$$

es constante en cada semiplano $\operatorname{Im}\lambda > 0$ y $\operatorname{Im}\lambda < 0$ y coincide con los índices de deficiencia del operador J. Consecuentemente, los índices de deficiencia no dependen de la sucesión de polinomios ortogonales que tomemos, y además, son dos números naturales comprendidos entre 0 y N.

Si ambos índices son iguales a cero estamos ante el caso determinado y si ambos son iguales a N ante el caso completamente indeterminado. Para el caso en el que los índices de deficiencia sean ambos no nulos y alguno de ellos distinto de N nos encontramos con diferentes tipos de indeterminaciones.

El problema de momentos que vamos a tratar en esta tesis es el que tiene el mayor grado posible de indeterminación, es decir, estos índices son ambos iguales a N. Para este tipo de indeterminación denominaremos al problema de momentos *completamente indeterminado*. Por extensión, diremos que una matriz de medidas es completamente indeterminada si es solución de un problema de momentos completamente indeterminado.

En [L1] se prueba que si el problema de momentos es completamente indeterminado entonces las series:

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_k^*(\lambda)P_k(\eta) \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} P_k^*(\lambda)P_k(\eta) \tag{1.27}$$

convergen uniformemente en las variables λ y η en conjuntos acotados del plano complejo, siendo $(Q_n)_n$ la sucesión de polinomios matriciales de segunda clase asociados a $(P_n)_n$. Este hecho nos permitirá definir cuatro funciones holomórficas, a saber, A, B, C y D (ver (1.42) para su definición), que desempeñarán un papel crucial en el desarrollo de las pruebas de las diferentes extensiones del Teorema de Markov.

Para llegar a las expresiones de las cuatro funciones citadas anteriormente, necesitamos incluir las siguientes fórmulas clásicas para polinomios ortogonales matriciales.

Para $u, v \in \mathbb{C}$ se verifica que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n(u,v) &= (v-u)\sum_{k=0}^{n-1} Q_k^*(u)Q_k(v) \\ &= Q_{n-1}^*(u)A_nQ_n(v) - Q_n^*(u)A_n^*Q_{n-1}(v), \end{aligned} \tag{1.28}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_n(u,v) &= -I + (v-u)\sum_{k=0}^{n-1} Q_k^*(u)P_k(v) \\ &= Q_{n-1}^*(u)A_nP_n(v) - Q_n^*(u)A_n^*P_{n-1}(v),\end{aligned} \tag{1.29}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_n(u,v) &= I + (v-u)\sum_{k=0}^{n-1} P_k^*(u)Q_k(v) \\ &= P_{n-1}^*(u)A_nQ_n(v) - P_n^*(u)A_n^*Q_{n-1}(v),\end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_n(u,v) &= (v-u)\sum_{k=0}^{n-1} P_k^*(u)Q_k(v) \\ &= P_{n-1}^*(u)A_nP_n(v) - P_n^*(u)A_n^*P_{n-1}(v),\end{aligned} \tag{1.31}$$

Podemos observar que la expresión (1.31) es justamente la fórmula de Christoffel-Darboux introducida en (1.21).

De la fórmula de Liouville-Ostrogadski introducida en (1.26) obteníamos que

$$Q_n(\lambda)P_{n-1}^*(\lambda) - P_n(\lambda)Q_{n-1}^*(\lambda) = A_n^{-1}, \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.32}$$

y puesto que

$$P_n(\lambda)Q_n^*(\lambda) = Q_n(\lambda)P_n^*(\lambda), \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.33}$$

podemos llegar a las tres fórmulas siguientes de forma directa:

$$\mathcal{A}_n(u,v)\mathcal{D}_n^*(u,v) - \mathcal{B}_n(u,v)\mathcal{C}_n^*(u,v) = I, \quad \text{para } u,v \in \mathbb{C}, \tag{1.34}$$

$$\mathcal{C}_n(u,v)\mathcal{D}_n^*(u,v) = \mathcal{D}_n(u,v)\mathcal{C}_n^*(u,v), \quad \text{para } u,v \in \mathbb{C}, \tag{1.35}$$

$$\mathcal{A}_n(u,v)\mathcal{B}_n^*(u,v) = \mathcal{B}_n(u,v)\mathcal{A}_n^*(u,v), \quad \text{para } u,v \in \mathbb{C} \tag{1.36}$$

Tras estas fórmulas clásicas, definimos las cuatro funciones siguientes:

$$
\begin{aligned}
A_n(\lambda) &= \mathcal{A}_n(0,\lambda), \qquad & B_n(\lambda) &= \mathcal{B}_n(0,\lambda),\\
C_n(\lambda) &= \mathcal{C}_n(0,\lambda), \qquad & D_n(\lambda) &= \mathcal{D}_n(0,\lambda).
\end{aligned} \tag{1.37}
$$

Para $u = 0$ y $v = \lambda$ en (1.34), (1.35) y (1.36) obtenemos las identidades:

$$A_n(\lambda)D_n^*(\lambda) - B_n(\lambda)C_n^*(\lambda) = I, \quad \text{para} \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.38}$$

$$C_n(\lambda)D_n^*(\lambda) = D_n(\lambda)C_n^*(\lambda), \quad \text{para} \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.39}$$

$$A_n(\lambda)B_n^*(\lambda) = B_n(\lambda)A_n^*(\lambda), \quad \text{para} \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.40}$$

Para $\lambda \in \mathbb{C}$, usando (1.32) y (1.33) obtenemos las fórmulas:

$$
\begin{aligned}
P_n(\lambda) &= Q_n(0)D_n(\lambda) - P_n(0)B_n(\lambda)\\
P_{n-1}(\lambda) &= Q_{n-1}(0)D_n(\lambda) - P_{n-1}(0)B_n(\lambda)\\
Q_n(\lambda) &= Q_n(0)C_n(\lambda) - P_n(0)A_n(\lambda)\\
Q_{n-1}(\lambda) &= Q_{n-1}(0)C_n(\lambda) - P_{n-1}(0)A_n(\lambda)
\end{aligned} \tag{1.41}
$$

Si tenemos presente la convergencia de (1.27), podemos definir cuatro funciones matriciales holomórficas $A(\lambda)$, $B(\lambda)$,$C(\lambda)$ y $D(\lambda)$ tomando límite en (1.37) cuando n tiende a infinito:

$$
\begin{aligned}
A(\lambda) &= \lambda\sum_{k=0}^{\infty} Q_k^*(0)Q_k(\lambda), \qquad & B(\lambda) &= -I + \lambda\sum_{k=0}^{\infty} Q_k^*(0)P_k(\lambda)\\
C(\lambda) &= I + \lambda\sum_{k=0}^{\infty} P_k^*(0)Q_k(\lambda), \qquad & D(\lambda) &= \lambda\sum_{k=0}^{\infty} P_k^*(0)P_k(\lambda).
\end{aligned} \tag{1.42}
$$

Igualmente, tomando límite en (1.38), (1.39) y (1.40) obtenemos:

$$A(\lambda)D^*(\lambda) - B(\lambda)C^*(\lambda) = I, \quad \text{para} \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.43}$$

$$C(\lambda)D^*(\lambda) = D(\lambda)C^*(\lambda), \quad \text{para} \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.44}$$

$$A(\lambda)B^*(\lambda) = B(\lambda)A^*(\lambda), \quad \text{para} \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.45}$$

Nota 1.36. En [L1] se demuestra que los ceros de $A_n(\lambda)$, $B_n(\lambda)$, $C_n(\lambda)$, $D_n(\lambda)$, $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ y $D(\lambda)$ son reales.

En el estudio del Teorema de Markov que realizaremos en el Capítulo 4 necesitaremos de un lado la Parametrización de Nevanlinna para el problema de momentos matricial completamente indeterminado [L1] y de otro lado ciertas propiedades de las funciones matriciales de Pick [L1]. Este es el motivo por el que le dedicamos estos epígrafes finales.

1.8.1 La parametrización de Nevanlinna

Denotaremos por V al conjunto de soluciones del problema de momentos matricial definido por $(S_n)_n$ y por $\mathcal{V}$ al conjunto de funciones matriciales holomórficas $V(\lambda)$ en el semiplano superior tal que $V(\lambda)^*V(\lambda) \leq I$.

Definición 1.37. *Diremos que $\nu \in V$ es N-extremal si verifica que $\mathbb{C}^{N\times N}[t]$ es denso en $L^2(\nu)$.*

Tras estos preliminares, estamos en condiciones de enunciar el resultado que nos llevará a la Parametrización de Nevanlinna para el problema de momentos completamente indeterminado.

Teorema 1.38. [L1]***Parametrización de Nevanlinna***
Existe un homeomorfismo entre el conjunto V y el conjunto $\mathcal{V}$ dado por

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{d\nu(t)}{t-\lambda} = & -\Big(C^*(\lambda)\big(I+V(\lambda)\big) - iA^*(\lambda)\big(I-V(\lambda)\big)\Big)\cdot \\ & \cdot\Big(D^*(\lambda)\big(I+V(\lambda)\big) - iB^*(\lambda)\big(I-V(\lambda)\big)\Big)^{-1}\end{aligned} \tag{1.46}$$

Las matrices de medidas N-extremales en V se corresponden con las matrices constantes unitarias en $\mathcal{V}$.

Este resultado ha sido establecido recientemente por el profesor Pedro López Rodríguez (cf. [L1]). Esta representación será clave para establecer las extensiones del Teorema de Markov.

1.8.2 Funciones matriciales de Pick

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, denotaremos por $\mathcal{H}(\Omega)$ al conjunto de funciones matriciales holomorfas $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{C}^{N\times N}$ dotado de la topología de la convergencia uniforme en compactos de Ω.

Representaremos por $\mathbb{H}$ al dominio determinado por el semiplano superior, es decir,

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Definición 1.39. *Diremos que una una función $\Phi \in \mathcal{H}(\mathbb{H})$ es una función de Pick si para cualquier $z \in \mathbb{H}$ la matriz*

$$\operatorname{Im}\Phi(z) = \frac{\Phi(z) - \Phi^*(z)}{2i}$$

es semidefinida positiva (lo representaremos por $\operatorname{Im}\Phi(z) \geq \theta$). Denotaremos por $\mathcal{P}$ al conjunto de las funciones matriciales de Pick.

Ejemplo 1.40. Las siguientes funciones son de Pick:

(a) $\Phi(z) = \alpha z + \beta$, siendo α semidefinida positiva y β hermítica.

(b) Cualquier transformada de Hilbert

$$\Phi(z) = \int \frac{d\sigma(t)}{t-z}$$

donde σ es una medida matricial definida positiva con $\tau\sigma(\mathbb{R}) < \infty$ (τ denota la traza de la matriz), ya que, si $\operatorname{Im} z > 0$,

$$\operatorname{Im}\Phi(z) = \int \frac{t-\overline{z}-t+z}{2i|t-z|^2}d\sigma(t) = \int \frac{\operatorname{Im} z}{|t-z|^2}d\sigma(t) \ \geq \theta\,.$$

Observación 1.41. Cualquier función de Pick se puede extender al semiplano inferior $\mathbb{H}^* = \{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Im} z < 0\}$ tomando $\Phi(z) = \Phi(\overline{z})^*$. Las funciones obtenidas de esta manera, de forma general, no son continuaciones analíticas de las otras. Por lo tanto, podemos suponer que el espacio $\mathcal{P}$ está formado por todas las funciones $\Phi(z)$ holomórficas en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ tales que

$$\Phi(z) = \Phi(\overline{z})^* \quad \text{y} \quad \frac{\Phi(z)-\Phi(z)^*}{2i\operatorname{Im} z} \geq \theta, \quad \text{para} \quad \operatorname{Im} z \neq 0\,.$$

Los resultados del siguiente Lema están esencialmente contenidos en [L1]. De todos modos los incluimos explícitamente y completamos su demostración.

Lema 1.42. *Sea $\Phi(z)$ una función matricial de Pick y consideremos la función matricial*

$$V(z) = -\big(\Phi(z) + iI\big)^{-1}\big(\Phi(z) - iI\big)\,.$$

Se tienen las siguientes propiedades:

(i) La función $\big(\Phi(z) + iI\big)$ es invertible.

(ii) La función $\big(I + V(z)\big)$ es invertible.

(iii) Se verifica que $V(z)^*V(z) \leq I$.

(iv) Si $\Phi(z)$ es una matriz constante y hermítica entonces $V(z)$ es una matriz constante y unitaria.

DEMOSTRACIÓN:

(i) Veamos que $\big(\Phi(z) + iI\big)$ es invertible. Si suponemos que existe $z_0 \in \mathbb{H}$ para el cual $\det\big(\Phi(z_0) + iI\big) = 0$, entonces existe un vector no nulo $v \in \mathbb{C}^N$ tal que

$$\Phi(z_0)v^* = -iv^*\,.$$

Usando esto llegamos a

$$v\left(\frac{\Phi(z_0) - \Phi(z_0)^*}{2i}\right)v^* = -vv^* < 0$$

que es imposible pues $\Phi(z)$ es una función matricial de Pick.

(ii) Veamos que $\big(I + V(z)\big)$ es invertible.

Puesto que $V(z) = -\big(\Phi(z) + iI\big)^{-1}\big(\Phi(z) - iI\big)$, tenemos que

$$I + V(z) = I - \big(\Phi(z) + iI\big)^{-1}\big(\Phi(z) - iI\big) = \big(\Phi(z) + iI\big)^{-1}2iI$$

y puesto que por (i) tenemos que $\big(\Phi(z) + iI\big)$ es invertible entonces también lo es $I + V(z)$.

(iii) Se verifica que $V(z)^*V(z) \leq I$. En efecto, puesto que

$$\Phi(z) = i\big(I - V(z)\big)\big(I + V(z)\big)^{-1}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi(z) - \Phi(z)^*}{2i} &= \frac{1}{2i}\Bigg(i\Big(I - V(z)\Big)\Big(I + V(z)\Big)^{-1} \\
&\quad + i\Big(I + V(z)^*\Big)^{-1}\Big(I - V(z)^*\Big)\Bigg) \\
&= \frac{1}{2}\Big(I + V(z)^*\Big)\Bigg(\Big(I + V(z)^*\Big)\Big(I - V(z)\Big) \\
&\quad + \Big(I - V(z)^*\Big)\Big(I + V(z)\Big)\Bigg)\Big(I + V(z)\Big)^{-1} \\
&= \Big(I + V(z)^*\Big)^{-1}\Big(I - V(z)V(z)^*\Big)\Big(I + V(z)\Big)^{-1} \\
&\geq \theta
\end{aligned}$$

ya que $\Phi(z)$ es una función matricial de Pick. Por lo tanto,

$$V(z)V(z)^* \leq I\,.$$

(iv) Si $\Phi(z)$ es una matriz constante y hermítica entonces $V(z)$ es una matriz constante y unitaria. En efecto, puesto que $\Phi(z)$ es un matriz constante y hermítica, tenemos que

$$\Phi(z) - \Phi(z)^* = \theta$$

y si realizamos el mismo desarrollo que el usado en el apartado *(iii)* llegamos a que

$$\big(I + V(z)^*\big)^{-1}\Big(I - V(z)V(z)^*\Big)\big(I + V(z)\big)^{-1} = \theta$$

y por tanto $V(z)V(z)^* = I$.

□

Capítulo 2

Asintótica del cociente

Son conocidas muchas propiedades asintóticas para polinomios ortogonales escalares a partir del comportamiento de los coeficientes de recurrencia $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$.

Sin ánimo de ser exhaustivos podemos citar los siguientes ejemplos: P. Nevai estudió el caso en el que los coeficientes de recurrencia tenían límites finitos (cf. [N, Tma. 13, p. 33]). Los coeficientes asintóticamente periódicos con finitos puntos de acumulación fueron analizados por Van Assche y Geronimo (cf. [V1, Cap. 2], [V3] y [GV]). W. Van Assche también estudió el caso en el que los coeficientes fueran no acotados (cf. [V1, V2]), y recientemente una nueva técnica para hallar el cociente asintótico entre un polinomio s_n y el polinomio ortonormal p_n de grado n con respecto a una medida positiva ha sido desarrollado por A. J. Durán (cf. [D1]).

En este capítulo vamos a realizar un estudio de la asintótica del cociente para polinomios matriciales ortonormales, esto es, la comparación de dos polinomios ortonormales consecutivos; más precisamente, estudiaremos la asintótica de $P_{n-1}(z)P_n^{-1}(z)$ derivado del comportamiento de los coeficientes de la relación de recurrencia que verifica la sucesión $(P_n)_n$.

El punto de partida para este estudio se basará en la asintótica del cociente establecida por A. J. Durán para polinomios matriciales ortonormales pertenecientes a la clase de Nevai, esto es, polinomios ortonormales cuyos coeficientes de recurrencia son convergentes (cf. Capítulo 1.5, [D6]). En este capítulo extenderemos estos resultados para polinomios matriciales ortonormales con coeficientes de recurrencia divergentes pero con divergencia controlada y para polinomios ortonormales con coeficientes de recurrencia asintóticamente periódicos.

2.1 Asintótica del cociente para polinomios matriciales ortogonales con coeficientes de recurrencia no acotados

El objetivo de este parágrafo es establecer el cociente asintótico para polinomios matriciales ortogonales con coeficientes de recurrencia no acotados.

2.1.1 Introducción

Partimos de $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales verificando la relación de recurrencia de tres términos (1.1) y suponemos que los coeficientes de la relación de recurrencia son no acotados pero divergen de forma controlada:

Existe una sucesión $(C_n)_n$ de matrices definidas positivas tales que:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\lim_{n\to\infty} C_n C_{n-1}^{-1} = I \\
\lim_{n\to\infty} C_n^{-1/2} A_n C_n^{-1/2} = A, \quad \lim_{n\to\infty} C_n^{-1/2} B_n C_n^{-1/2} = B\,.
\end{array}
\right.
\tag{2.1}
$$

En el caso escalar, cuando los coeficientes son no acotados (y suponiendo hipótesis de convergencia análogas a las anteriores), los resultados del cociente asintótico se obtienen para los polinomios escalados $p_n(c_n z)$. Así pues, para el caso matricial, la primera cuestión que se presenta es cómo definir los polinomios $P(Cx)$, siendo P un polinomio matricial y C una matriz dada.

Dado un polinomio matricial

$$
P(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k z^k,
$$

se encuentran en la literatura (cf. [HJ2, p. 384]) dos formas igualmente naturales para definir $P(Cx)$:

$$P_l(Cx) = \sum_{k=0}^{n} A_k C^k, \tag{2.2}$$

y

$$P_r(Cx) = \sum_{k=0}^{n} C^k A_k. \tag{2.3}$$

De todos modos, vamos a mostrar que existe una gran variedad de posibilidades además de las dos citadas. Para evitar cualquier tipo de confusión pondremos $P(C;x)$ en vez de $P(Cx)$ para representar los polinomios matriciales escalados.

En efecto, consideremos polinomios matriciales de una variable matricial, esto es, combinaciones finitas de la forma

$$\mathbb{P}(T) = \sum_{finita} \alpha_{n_1} T^{n_1} \cdots \alpha_{n_k} T^{n_k} \alpha_{n_k+1}$$

donde T es la variable matricial definida por

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1N} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{N1} & t_{N2} & \cdots & t_{NN} \end{pmatrix}$$

y las matrices α_{n_j} son de orden $N \times N$. Dada una matriz C de orden $N \times N$, definimos $\mathbb{P}(C)$ de la forma natural:

$$\mathbb{P}(C) = \sum_{finita} \alpha_{n_1} C^{n_1} \cdots \alpha_{n_k} C^{n_k} \alpha_{n_k+1}.$$

El polinomio matricial $P(t) = \sum_{k=0}^{n} A_k t^k$ se puede obtener de diferentes polinomios matriciales $\mathbb{P}$ de una variable matricial con solo realizar el cambio $T = zI$ en $\mathbb{P}(T)$. Por ejemplo, si consideramos

$$\mathbb{P}_1(T) = \sum_{k=0}^{n} A_k T^k,$$

entonces tenemos fácilmente que $P(z) = \mathbb{P}_1(zI)$. Pero también se tiene que $P(z) = \mathbb{P}_2(zI)$, donde

$$\mathbb{P}_2(T) = \sum_{k=0}^{n} T^k A_k,$$

y esta claro que, debido a la no conmutatividad del producto matricial, en general $\mathbb{P}_1 \neq \mathbb{P}_2$ como polinomios matriciales de una variable matricial. Por supuesto, existen otras muchas posibilidades de obtener P además de $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$; por ejemplo si consideramos una raíz cuadrada B de A_1, es decir, $A_1 = BB$, entonces tenemos que $P(z) = \mathbb{P}_3(zI)$ donde

$$\mathbb{P}_3(T) = A_0 + BTB + \sum_{k=2}^{n} T^k A_k,$$

y claramente, en general, $\mathbb{P}_3$ es diferente de $\mathbb{P}_1$ o $\mathbb{P}_2$ como polinomio matricial de una variable matricial.

Teniendo presente estas consideraciones, podemos definir los polinomios matriciales escalados $P(C; z)$ usando cada polinomio matricial de una variable matricial $\mathbb{P}$, desde el cual P se obtiene de la forma definida anteriormente, con tan solo poner $P(C; z) = \mathbb{P}(Cz)$. $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$ dan respectivamente las definiciones (2.2) y (2.3) usualmente consideradas en la literatura.

Así pues, ¿qué definición de $P(C; z)$ debemos considerar para estudiar el comportamiento asintótico para los polinomios matriciales ortogonales con coeficientes no acotados?

La clave se obtiene de la relación de recurrencia matricial de tres términos (1.1). En efecto, usando los coeficientes de la relación de recurrencia $(A_n)_n$, $(B_n)_n$, podemos definir una sucesión de polinomios matriciales de una variable matricial como sigue:

$$T\mathbb{P}_n(T) = A_{n+1}\mathbb{P}_{n+1}(T) + B_n\mathbb{P}_n(T) + A_n\mathbb{P}_{n-1}(T), \quad n \geq 0, \tag{2.4}$$

con las condiciones iniciales $\mathbb{P}_{-1}(T) = \theta$ y $\mathbb{P}_0(T) = I$.

Definimos entonces

$$P_n(C; z) = \mathbb{P}_n(Cz)\,. \tag{2.5}$$

Esta es la elección que encontramos más natural, en el contexto de polinomios matriciales ortogonales, para definir los polinomios matriciales escalados $P_n(C_n; z)$. Para el caso matricial en el que los coeficientes de recurrencia son no acotados, el resultado del cociente asintótico, al igual que en el caso escalar, lo daremos en términos de $P_n(C_n; z)$.

Como consecuencia de esta definición veremos que los ceros de estos polinomios escalados son reales (Lema 2.4). Esto no se hubiera obtenido si hubiésemos adoptado otra definición para los polinomios matriciales escalados, como se puede comprobar fácilmente de otras posibles elecciones como (2.2) y (2.3), donde pueden aparecer ceros complejos o ceros con multiplicidad no acotada.

Ya estamos en condiciones de enunciar el resultado central de esta sección:

Teorema 2.1. *Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales satisfaciendo la relación de recurrencia de tres términos (1.1). Supongamos que existe una sucesión de matrices definidas positivas $(C_n)_n$ tales que verifican las condiciones de convergencia establecidas en (2.1), con A no singular y B hermítica, y consideremos los polinomios matriciales escalados $P_n(C_n; z)$ definidos en (2.5).*

Si denotamos por Δ_n al conjunto de los ceros de $P_n(C_n; z)$ y

$$\Gamma = \bigcap_{N\geq 0} M_N \qquad \textit{donde} \qquad M_N = \overline{\bigcup_{n\geq N} \Delta_n}$$

Entonces:

(i) $\Delta_n \subset \mathbb{R}$, y si suponemos que la sucesión $(C_n)_n$ es creciente entonces Γ es un compacto de $\mathbb{R}$.

(ii) Se verifica que

$$(2.6) \qquad \lim_{n\to\infty} C_n^{1/2} P_{n-1}(C_n; z) P_n^{-1}(C_n; z) A_n^{-1} C_n^{1/2} = \int \frac{dW_{A,B}(t)}{z-t},$$

para $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, donde $W_{A,B}$ es la matriz peso para los polinomios matriciales de Chebyshev de segunda clase definidos por (1.8). Además, la convergencia es uniforme para z en compactos de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, la sucesión $(P_n(C_k; z))_n$ es ortogonal con respecto a cierto peso variante W_k y, más aún, el Teorema 2.1 es consecuencia de un

Teorema más general (Teorema 2.3) sobre asintótica del cociente para familias uniparamétricas de polinomios $(R_{n,k}(t))_n$ al que dedicaremos la sección siguiente. Para obtener este resultado, veremos entonces que la familia de polinomios $C_k^{1/2}(P_n(C_k;t))_n$ con $k \in \mathbb{N}$, junto con las hipótesis de convergencia establecidas en (2.1), se ajusta a las hipótesis del Teorema 2.3.

Nota 2.2. La versión escalar de la asintótica del cociente para una familia uniparamétrica de polinomios ortogonales la podemos encontrar en [KV].

2.1.2 Asintótica del cociente para polinomios matriciales ortogonales dependientes de un parámetro

Consideremos la sucesión de polinomios ortogonales $(R_{n,k})_n$, dependientes de un parámetro $k \in \mathbb{N}$ y definida mediante la relación de recurrencia

$$(2.7) \qquad tR_{n,k}(t) = A_{n+1,k}R_{n+1,k}(t) + B_{n,k}R_{n,k}(t) + A_{n,k}^*R_{n-1,k}(t), \quad n \geq 0,$$

con las condiciones iniciales $R_{0,k}(t) \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$ y $R_{-1,k}(t) = \theta$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $R_{0,k}(t) = I$.

La sucesión de polinomios matriciales $(R_{n,k})_n$ es ortonormal con respecto a una cierta medida matricial definida positiva que denotaremos por W_k (Teorema de Favard).

Adoptaremos la siguiente notación:

a) Representaremos por $x_{n,k,j}$, $j = 1, \ldots, m$ a los ceros del polinomio matricial $R_{n,k}(t)$.

b) Las matrices de Christoffel (ver Teorema 1.20 para su definición) que aparecen en la fórmula de cuadratura relativa a estos ceros las representaremos por $\Gamma_{n,k,j}$.

El resultado principal es el siguiente:

Teorema 2.3. *Sea $(R_{n,k})_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortogonales que dependen de un parámetro k, $(k = 1, 2, \dots)$, satisfaciendo la relación de recurrencia de tres términos (2.7). Sean $(n_m)_m$ y $(k_m)_m$ dos sucesiones crecientes de números positivos y supongamos que existen dos matrices A y B, A no singular y B hermítica tales que para todo $l \geq 0$*

$$\lim_{m\to\infty} A_{n_m-l,k_m} = A, \quad \lim_{m\to\infty} B_{n_m-l,k_m} = B. \tag{2.8}$$

Si denotamos por Δ_m al conjunto de los ceros del polinomio R_{n_m,k_m} y por

$$\Gamma = \bigcap_{N\geq 0} M_N \quad \text{donde} \quad M_N = \overline{\bigcup_{m\geq N} \Delta_m},$$

entonces

$$\lim_{m\to\infty} R_{n_m-1,k_m}(z) R^{-1}_{n_m,k_m}(z) A^{-1}_{n_m,k_m} = \int \frac{dW_{A,B}(t)}{z-t}, \tag{2.9}$$

para $z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$, donde $W_{A,B}$ es la matriz peso para los polinomios matriciales de Chebyshev de segunda clase definidos por (1.8). Además, la convergencia es uniforme para z en compactos de $\mathbb{C}\setminus\Gamma$.

Demostración: Nuestro objetivo es probar que

$$\lim_{m\to\infty} R_{n_m-1,k_m}(z) R^{-1}_{n_m,k_m}(z) A^{-1}_{n_m,k_m} = \int \frac{dW_{A,B}(t)}{z-t}$$

para $z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$. Para ello, consideremos la siguiente sucesión de medidas matriciales discretas

$$\mu_{n,k} = \sum_{j=1}^{m} \delta_{x_{n,k,j}} R_{n-1,k}(x_{n,k,j}) \Gamma_{n,k,j} R^*_{n-1,k}(x_{n,k,j})$$

donde $x_{n,k,j}$, $j = 1, \dots, m$ son los ceros del polinomio $R_{n,k}$ y la matriz $\Gamma_{n,k,j}$ está definida por:

$$\Gamma_{n,k,j} = \frac{l_j}{\left(\det(R_{n,k}(t))\right)^{(l_j)}(x_{n,k,j})} \Big(\operatorname{Adj}(R_{n,k}(t))\Big)^{(l_j-1)}(x_{n,k,j}) Q_{n,k}(x_{n,k,j}),$$

siendo l_j la multiplicidad de $x_{n,k,j}$ y $(Q_{n,k})_n$ la sucesión de polinomios de segunda clase asociados a $(R_{n,k})_n$. $\Gamma_{n,k,j}$ son los pesos matriciales en la fórmula de cuadratura para los polinomios $(R_{n,k})_n$ asociados a $x_{n,k,j}$ y $l_j \leq N$ (ver Teorema 1.20).

De la fórmula de cuadratura obtenemos que $\int d\mu_{n,k}(t) = I$. En efecto,

$$\begin{aligned}\int d\mu_{n,k}(t) &= \sum_{j=1}^{m} R_{n-1,k}(x_{n,k,j})\Gamma_{n,k,j}R^*_{n-1,k}(x_{n,k,j}) \\ &= \int R_{n-1,k}(t)\, dW_k(t) R^*_{n-1,k}(t) \\ &= I\,.\end{aligned}$$

Para obtener (2.9) procederemos en varios pasos:

PASO 1. *Dados dos números naturales n y k, probaremos que*

$$R_{n-1,k}(z)R^{-1}_{n,k}(z)A^{-1}_{n,k} = \int \frac{d\mu_{n,k}(t)}{z-t}.$$

En efecto, del Lema 1.24 se sigue que la siguiente descomposición

$$R_{n-1,k}(z)R^{-1}_{n,k}(z) = \sum_{j=1}^{n} C_{n,k,j}\frac{1}{z-x_{n,k,j}}$$

es siempre posible, donde las matrices $C_{n,k,j}$ vienen dadas por

$$C_{n,k,j} = \frac{l_j}{\big(\det(R_{n,k}(t))\big)^{l_j}(x_{n,k,j})} R_{n-1,k}(x_{n,k,j})\Big(\mathrm{Adj}(R_{n,k}(t))\Big)^{l_j-1}(x_{n,k,j}).$$

Multiplicando a la derecha por $A^{-1}_{n,k}$ y usando la fórmula de Liouville (1.26) para los polinomios $(R_{n,k})_n$ obtenemos que

$$\begin{aligned}C_{n,k,j}A^{-1}_{n,k} &= \frac{l_j}{\big(\det(R_{n,k}(t))\big)^{l_j}(x_{n,k,j})} R_{n-1,k}(x_{n,k,j})\Big(\mathrm{Adj}(R_{n,k}(t))\Big)^{l_j-1}(x_{n,k,j})\cdot \\ &\quad\cdot \Big(Q_{n,k}(x_{n,k,j})R^*_{n-1,k}(x_{n,k,j}) - R_{n,k}(x_{n,k,j})Q^*_{n-1,k}(x_{n,k,j})\Big)\,.\end{aligned}$$

Aplicando el apartado (vi) del Teorema 1.17 se tiene que

$$\Big(\mathrm{Adj}(R_{n,k}(t))\Big)^{l_j-1}(x_{n,k,j})\cdot R_{n,k}(x_{n,k,j}) = \theta$$

y por tanto

$$\begin{aligned} C_{n,k,j}A_{n,k}^{-1} &= \frac{l_j}{\left(\det(R_{n,k}(t))^{l_j}(x_{n,k,j})\right)} R_{n-1,k}(x_{n,k,j})\left(\operatorname{Adj}(R_{n,k}(x_{n,k,j}))\right)^{l_j-1}(x_{n,k,j})\cdot \\ &\cdot \left(Q_{n,k}(x_{n,k,j})R_{n-1,k}^{*}(x_{n,k,j})\right). \end{aligned}$$

Teniendo presente las expresiones de las matrices de Christoffel, tenemos que

$$C_{n,k,j}A_{n,k}^{-1} = R_{n-1,k}(x_{n,k,j})\Gamma_{n,k,j}R_{n-1,n}^{*}(x_{n,k,j}).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} R_{n-1,k}(z)R_{n,k}^{-1}(z)A_{n,k}^{-1} &= \sum_{j=1}^{n} R_{n-1,k}(x_{n,k,j})\Gamma_{n,k,j}R_{n-1,n}^{*}(x_{n,k,j})\frac{1}{z-x_{n,k,j}} \\ &= \int \frac{d\mu_{n,k}(t)}{z-t} \end{aligned}$$

y de esta forma, el paso 1 queda probado. Obsérvese que, en concordancia con este paso, lo que buscamos probar es

$$\lim_{m\to\infty}\int \frac{d\mu_{n_m,k_m}(t)}{z-t} = \int \frac{dW_{A,B}(t)}{z-t}, \qquad \text{para } z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma.$$

PASO 2. *Consideremos los polinomios matriciales de Chebyshev de segunda clase* $(U_n^{A,B})_n$ *definidos por (1.8). Entonces,*

$$\lim_{m\to\infty}\int U_l^{A,B}(t)\,d\mu_{n_m,k_m}(t) = \begin{cases} I & si \quad l=0 \\ \theta & si \quad l\neq 0. \end{cases}$$

En efecto, podemos expresar

$$U_l^{A,B}(t)R_{n-1,k}(t) = S_{l,n-1,k}(t)R_{n,k}(t) + \sum_{i=1}^{n}\Delta_{i,l,n-1,k}R_{n-i,k}(t). \tag{2.10}$$

De acuerdo con la definición de las medidas discretas $\mu_{n,k}$ y haciendo uso de la expresión (2.10) obtenemos

$$\begin{aligned} \int U_l^{A,B}(t)\,d\mu_{n,k}(t) &= \sum_{j=1}^{m} U_l^{A,B}(x_{n,k,j})R_{n-1,k}(x_{n,k,j})\Gamma_{n,k,j}R_{n-1,k}^{*}(x_{n,k,j}) \\ &= \sum_{j=1}^{m}\Big(S_{l,n-1,k}(x_{n,k,j})R_{n,k}(x_{n,k,j}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\Delta_{i,l,n-1,k}R_{n-i,k}(x_{n,k,j})\Big)\Gamma_{n,k,j}R_{n-1,k}^{*}(x_{n,k,j}). \end{aligned}$$

Por el apartado (vi) del Teorema 1.17, obtenemos que

$$R_{n,k}(x_{n,k,j}) \cdot \left(\operatorname{Adj}\big(R_{n,k}(t)\big)\right)^{l_j-1}(x_{n,k,j}) = \theta$$

y, teniendo en cuenta la definición de las matrices $\Gamma_{n,k,j}$, se tiene que

$$R_{n,k}(x_{n,k,j}) \cdot \Gamma_{n,k,j} = \theta.$$

Por lo tanto, llegamos a que

$$\int U_l^{A,B}(t)\, d\mu_{n,k}(t) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta_{i,l,n-1,k} R_{n-i,k}(x_{n,k,j}) \right) \Gamma_{n,k,j} R^*_{n-1,k}(x_{n,k,j}) .$$

Puesto que $2n-i-1 \leq 2n-1$ para todo $i = 1, \ldots, n$, de la fórmula de cuadratura para los polinomios $(R_{n,k})_n$ obtenemos que

$$\int U_l^{A,B}(t)\, d\mu_{n,k}(t) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{i,l,n-1,n} \int R_{n-i,k}(t)\, dW_k(t) R^*_{n-1,k}(t) = \Delta_{1,l,n-1,k} .$$

Así pues, concluiremos el paso 2 si probamos que

$$\lim_{m\to\infty} \Delta_{j,l,n_m-1,k_m} = \begin{cases} I & \text{si} \quad j = l+1 \\ \theta & \text{si} \quad j \neq l+1. \end{cases}$$

Usaremos inducción sobre l.

Si $l = 0$ el resultado es inmediato puesto que hemos visto que

$$\int d\,\mu_{n_m,k_m}(t) = I .$$

Supongamos que el resultado es válido para l. La relación de recurrencia de tres términos de los polinomios matriciales de Chebyshev de segunda clase $(U_n^{A,B})_n$ definida en (1.8) nos da que

$$U_{l+1}^{A,B}(t) R_{n-1,k}(t) = A^{*^{-1}} \Big(tU_l^{A,B}(t) - BU_l^{A,B}(t) - AU_{l-1}^{A,B}(t) \Big) R_{n-1,k}(t).$$

La expresión (2.10) nos conduce a

$$\begin{aligned} U_{l+1}^{A,B}(t) R_{n-1,k}(t) &= A^{*^{-1}} \Big(S_{l,n-1,k}(t) R_{n,k}(t) + \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j,l,n-1,k} t R_{n-j,k}(t) \\ &- B\big(S_{l,n-1,k}(t) R_{n,k}(t) + \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j,l,n-1,k} t R_{n-j,k}(t)\big) \\ &- A\big(S_{l-1,n-1,k}(t) R_{n,k}(t) + \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j,l-1,n-1,k} t R_{n-j,k}(t)\big) \Big) . \end{aligned}$$

Considerando la relación de recurrencia de tres términos de $(R_{n,k})_n$ podemos poner que

$$\begin{aligned}
U_{l+1}^{A,B}(t)R_{n-1,k}(t) &= A^{*^{-1}}\Big(S_{l,n-1,k}(t)R_{n,k}(t)+ \\
&+ \sum_{j=1}^{n}\Delta_{j,l,n-1,k}A_{n-j+1,k}R_{n-j+1,k}(t) \\
&+ \sum_{j=1}^{n}\Delta_{j,l,n-1,k}B_{n-j,k}R_{n-j,k}(t) \\
&+ \sum_{j=1}^{n}\Delta_{j,l,n-1,k}A_{n-j,k}^{*}R_{n-j-1,k}(t)\Big) \\
&- B\Big(S_{l,n-1,k}(t)R_{n,k}(t)+\sum_{j=1}^{n}\Delta_{j,l,n-1,k}tR_{n-j,k}(t)\Big) \\
&- A\Big(S_{l-1,n-1,k}(t)R_{n,k}(t)+\sum_{j=1}^{n}\Delta_{j,l-1,n-1,k}tR_{n-j,k}(t)\Big)\Big),
\end{aligned}$$

y reordenando los índices obtenemos que

$$\begin{aligned}
U_{l+1}^{A,B}(t)R_{n-1,k}(t) &= A^{*^{-1}}\Big(S_{l,n-1,k}(t)R_{n,k}(t)+ \\
&+ \sum_{j=0}^{n}\Delta_{j+1,l,n-1,k}A_{n-j,k}R_{n-j,k}(t) \\
&+ \sum_{j=1}^{n}\Delta_{j,l,n-1,k}B_{n-j,k}R_{n-j,k}(t) \\
&+ \sum_{j=2}^{n}\Delta_{j-1,l,n-1,k}A_{n-j+1,k}^{*}R_{n-j,k}(t)\Big) \\
&- B\Big(S_{l,n-1,k}(t)R_{n,k}(t)+\sum_{j=1}^{n}\Delta_{j,l,n-1,k}tR_{n-j,k}(t)\Big) \\
&- A\Big(S_{l-1,n-1,k}(t)R_{n,k}(t)+\sum_{j=1}^{n}\Delta_{j,l-1,n-1,k}tR_{n-j,k}(t)\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Ahora bien, puesto que

$$U_{l+1}^{A,B}(t)R_{n-1,k}(t) = S_{l+1,n-1,k}(t)R_{n,k}(t)+\sum_{j=1}^{n}\Delta_{j,l+1,n-1,k}R_{n-j,k}(t)$$

entonces llegamos a que

$$\begin{aligned}\Delta_{j,l+1,n-1,k} &= A^{*^{-1}}(\,\Delta_{j,l,n-1,k}B_{n-j,k} \\ &\quad +\Delta_{j-1,l,n-1,k}A^*_{n-j+1,k}+\Delta_{j+1,l,n,k}A_{n-j,k}\,) \\ &\quad -A^{*^{-1}}B\Delta_{j,l,n-1,k}-A^{*^{-1}}A\Delta_{j,l-1,n-1,k}\,.\end{aligned}$$

La expresión de $\Delta_{j,l+1,n-1,k}$ será la clave para esta parte de la prueba. Para $j \geq l+3$ ó $j \leq l-1$ nuestra hipótesis de inducción nos conducen a

$$\lim_{m\to\infty}\Delta_{j,l+1,n_m-1,k_m}=\theta.$$

Estudiaremos los casos $j=l$, $j=l+1$ y $j=l+2$ de forma separada:

- Caso 1: $j=l$.

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\Delta_{l,l+1,n_m-1,k_m} &= \lim_{m\to\infty}A^{*^{-1}}(\,\Delta_{l,l,n_m-1,k_m}B_{n_m-l,k_m} \\ &\quad +\Delta_{l-1,l,n_m-1,k_m}A^*_{n_m-l+1,k_m} \\ &\quad +\Delta_{l+1,l,n_m-1,k_m}A_{n_m-l,k_m}\,) \\ &\quad -\lim_{m\to\infty}A^{*^{-1}}B\Delta_{l,l,n_m-1,k_m} \\ &\quad -\lim_{m\to\infty}A^{*^{-1}}A\Delta_{l,l-1,n_m-1,k_m} \\ &= A^{*^{-1}}(A-A)=\theta\end{aligned}$$

  ya que, de (2.8), tenemos que $\lim\limits_{m\to\infty}A_{n_m-l,k_m}=A$.

- Caso 2: $j=l+1$.

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\Delta_{l+1,l+1,n_m-1,k_m} &= \lim_{m\to\infty}A^{*^{-1}}(\Delta_{l+1,l,n_m-1,k_m}B_{n_m-l-1,k_m} \\ &\quad +\Delta_{l,l,n_m-1,k_m}A^*_{n_m-l,k_m} \\ &\quad +\Delta_{l+2,l,n_m-1,k_m}A_{n_m-l-1,k_m}\,) \\ &\quad -\lim_{m\to\infty}A^{*^{-1}}B\Delta_{l+1,l,n_m-1,k_m} \\ &\quad -\lim_{m\to\infty}A^{*^{-1}}A\Delta_{l+1,l-1,n_m-1,k_m} \\ &= A^{*^{-1}}(B-B)=\theta\end{aligned}$$

  ya que, de (2.8), tenemos que $\lim\limits_{m\to\infty}B_{n_m-l-1,k_m}=B$.

○ <u>Caso 3: $j = l + 2$.</u>

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \Delta_{l+2,l+1,n_m-1,k_m} &= \lim_{m\to\infty} A^{*^{-1}} \big(\Delta_{l+2,l,n_m-1,k_m} B_{n_m-l-2,k_m} \\
&\quad + \Delta_{l+1,l,n_m-1,k_m} A^*_{n_m-l-1,k_m} \\
&\quad + \Delta_{l+3,l,n_m-1,k_m} A_{n_m-l-2,k_m} \big) \\
&\quad - \lim_{m\to\infty} A^{*^{-1}} B \Delta_{l+2,l,n_m-1,k_m} \\
&\quad - \lim_{m\to\infty} A^{*^{-1}} A \Delta_{l+2,l-1,n_m-1,k_m} \\
&= A^{*^{-1}} A^* = I
\end{aligned}$$

ya que, de (2.8), obtenemos que $\lim\limits_{m\to\infty} A_{n_m-l-1,k_m} = A$.

Por lo tanto, queda probado el paso 2.

Ya estamos en condiciones de concluir la prueba, es decir, de probar que

$$\lim_{m\to\infty} \int \frac{d\mu_{n_m,k_m}(t)}{z-t} = \int \frac{dW_{A,B}(t)}{z-t}, \qquad \text{para} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma.$$

Para ello, vamos a usar el Método de los momentos (Teorema 1.23).

La sucesión de polinomios matriciales $(U_l^{A,B})_l$ es ortonormal con respecto a la matriz de medidas definida positiva $W_{A,B}$ que tiene soporte compacto (Lema 1.27), y por consiguiente

$$\int U_l^{A,B}(t) dW_{A,B}(t) = \begin{cases} I & \text{si} \quad l = 0 \\ \theta & \text{si} \quad l \neq 0. \end{cases}$$

En el Paso 2 vimos que

$$\lim_{m\to\infty} \int U_l^{A,B}(t)\, d\mu_{n_m,k_m}(t) = \begin{cases} I & \text{si} \quad l = 0 \\ \theta & \text{si} \quad l \neq 0, \end{cases}$$

por lo tanto,

$$\lim_{m\to\infty} \int U_l^{A,B}(t)\, d\mu_{n_m,k_m}(t) = \int U_l^{A,B}(t) dW_{A,B}(t)\,.$$

Así pues, aplicando el Método de los Momentos obtenemos que la sucesión $(\mu_{n_m,k_m})_m$ converge débilmente a $W_{A,B}$, y por tanto, puesto que $1/(z-t)$ es acotada si $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, llegamos a

$$\lim_{m\to\infty} \int \frac{d\mu_{n_m,k_m}(t)}{z-t} = \int \frac{dW_{A,B}(t)}{z-t}$$

y como en el Paso 1 vimos que

$$R_{n_m-1,k_m}(z)R^{-1}_{n_m,k_m}(z)A^{-1}_{n_m,k_m} = \int \frac{d\mu_{n_m,k_m}(t)}{z-t},$$

entonces tenemos que

$$\lim_{m\to\infty} R_{n_m-1,k_m}(z)R^{-1}_{n_m,k_m}(z)A^{-1}_{n_m,k_m} = \int \frac{dW_{A,B}(t)}{z-t}.$$

La convergencia uniforme en compactos de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ se sigue del Teorema de Stieltjes - Vitali, pues las entradas de la matriz $\displaystyle\int \frac{d\mu_{n_m,k_m}(t)}{z-t}$ están uniformemente acotadas en compactos de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

En efecto, dado un compacto $K \subset \mathbb{C}\setminus\Gamma$, de la definición de Γ se tiene que para N suficientemente grande $K \bigcap M_N = \emptyset$ y por tanto existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left|\frac{1}{z-t}\right| \leq C \quad \text{para } z \in K \ \text{ y } \ t \in M_N$$

Entonces, para $n \geq N$ y $v \in \mathbb{C}^N$, el carácter definido positivo de μ_{n_m,k_m} nos lleva a

$$\left|v \int \frac{d\mu_{n_m,k_m}(t)}{z-t} v^*\right| = \int \frac{v\, d\mu_{n_m,k_m}(t)v^*}{|z-t|} \leq C \int v\, d\mu_{n_m,k_m}(t)v^* = C\|v\|^2$$

De esta forma se concluye la prueba. □

2.1.3 Asintótica del cociente para polinomios ortogonales matriciales con coeficientes de recurrencia no acotados

En esta sección vamos a aplicar el Teorema 2.3 para probar el Teorema 2.1. Para ello, vamos a demostrar tres lemas que completarán la demostración que buscamos.

Partimos de $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales verificando la relación de recurrencia de tres términos (1.1) y suponemos que que los coeficientes de la relación de recurrencia son no acotados pero existe una sucesión $(C_n)_n$ de matrices definidas positivas tales que

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} C_n C_{n-1}^{-1} = I \\ \lim_{n\to\infty} C_n^{-1/2} A_n C_n^{-1/2} = A, \quad \lim_{n\to\infty} C_n^{-1/2} B_n C_n^{-1/2} = B \end{cases}$$

De acuerdo con la relación (2.4) que hemos establecido para definir los polinomios escalados, tenemos que

$$C_k t P_n(C_k;t) = A_{n+1} P_{n+1}(C_k;t) + B_n P_n(C_k;t) + A_n^* P_{n-1}(C_k;t), \quad n \geq 0,$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} tC_k^{1/2} P_n(C_k;t) &= C_k^{-1/2} A_{n+1} C_k^{-1/2} C_k^{1/2} P_{n+1}(C_k;t) \\ &\quad + C_k^{-1/2} B_n C_k^{-1/2} C_k^{1/2} P_n(C_k;t) \\ &\quad + C_k^{-1/2} A_n^* C_k^{-1/2} C_k^{1/2} P_{n-1}(C_k;t), \quad n \geq 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Si consideramos

$$\begin{cases} R_{n,k}(t) = C_k^{1/2} P_n(C_k;t) \\ A_{n,k} = C_k^{-1/2} A_n C_k^{-1/2}; \quad B_{n,k} = C_k^{-1/2} B_n C_k^{-1/2}, \end{cases} \tag{2.12}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, obtenemos la siguiente relación de recurrencia:

$$tR_{n,k}(t) = A_{n+1,k} R_{n+1,k}(t) + B_{n,k} R_{n,k}(t) + A_{n,k} R_{n-1,k}(t), \quad n \geq 0,$$

con las condiciones iniciales $R_{0,k}(t) = C_k^{1/2}$ y $R_{-1,k}(t) = \theta$. Haciendo uso del Teorema de Favard, la sucesión de polinomios matriciales $(R_{n,k})_n$ es ortogonal con respecto a la medida matricial definida positiva W_k.

Como consecuencia de nuestra definición (2.5) para los polinomios escalados $P_n(C_n; t)$ vamos a mostrar que, aunque la sucesión de polinomios escalados $(P_n(C_n; t))_n$ no sea ortogonal con respecto a una matriz de medidas definida positiva (excepto para casos triviales), cada polinomio $P_n(C_n; t)$ tiene ceros reales con multiplicidad acotada.

Lema 2.4. *Los ceros del polinomio matricial $P_n(C_n; t)$ son reales y de multiplicidad no superior a N.*

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que $R_{n,n}(t) = C_n^{1/2} P_n(C_n; t)$ pertenece a la sucesión $(R_{n,k})_n$ que es ortogonal con respecto a la medida matricial W_k y por consiguiente, los ceros de $R_{n,n}(t)$ son reales y de multiplicidad no superior a N. Puesto que,

$$\det(P_n(C_n; t)) = \det(\, C_n^{-1/2}\,) \det(R_{n,n}(t)),$$

obtenemos de forma inmediata que los ceros de $P_n(C_n; t)$ son también reales y con multiplicidad no superior a N. $\square$

Así pues, aunque la sucesión de polinomios escalados $(P_n(C_n; z))_n$ no sea ortogonal con respecto a una matriz de medidas definida positiva, cada polinomio escalado $P_n(C_n; z)$ es el polinomio ortogonal de grado n (multiplicado a su izquierda por una matriz definida positiva) de una sucesión de polinomios matriciales ortogonales con respecto a una medida matricial definida positiva W_k.

Veamos a continuación que los coeficientes de recurrencia $(A_{n,k})_n$ y $(B_{n,k})_n$ definidos en (2.12) verifican las hipótesis del Teorema 2.3.

Lema 2.5. *Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortogonales cuyos coeficientes de recurrencia verifican las condiciones de convergencia (2.1). Entonces, dado $l \geq 0$ y usando la notación establecida en (2.12), se verifica que*

$$\lim_{n\to\infty} A_{n-l,n} = A, \;\; y \;\; \lim_{n\to\infty} B_{n-l,n} = A,$$

DEMOSTRACIÓN: En efecto, para todo $l \geq 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} A_{n-l,n} &= \lim_{n\to\infty} \quad C_n^{-1/2} A_{n-l} C_n^{-1/2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \quad C_n^{-1/2} C_{n-1}^{1/2} C_{n-1}^{-1/2} \cdots C_{n-l}^{1/2} C_{n-l}^{-1/2} A_{n-l} \\
&\qquad\quad C_{n-l}^{-1/2} C_{n-l}^{1/2} \cdots C_{n-1}^{-1/2} C_{n-1}^{1/2} C_n^{-1/2} \\
&= \quad A
\end{aligned}$$

ya que estamos suponiendo que $\lim_{n\to\infty} C_n C_{n-1}^{-1} = I$.

De la misma forma podemos probar estas mismas condiciones para $(B_{n,k})_n$, es decir

$$\lim_{n\to\infty} B_{n-l,n} = B.$$

□

Ahora podemos probar que los ceros de $(P_n(C_k;t))_n$ son acotados si la sucesión $(C_n)_n$ es creciente.

Lema 2.6. *Supongamos que la sucesión de matrices $(C_n)_n$ es creciente. Entonces, existe una constante positiva $M > 0$, que no depende de n, tal que si $x_{n,n,j}$ es un cero del polinomio $P_n(C_n;t)$ se verifica que $|x_{n,n,j}| < M$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la N-matriz de Jacobi J asociada a la sucesión de polinomios$(P_n)_n$ y $\tilde{J}^{(k)}$ la N-matriz de Jacobi asociada a la sucesión de polinomios $(C_k^{1/2} P_n(C_k;\cdot))_n$ definidas por

$$J = \begin{pmatrix} B_0 & A_1 & \theta & \theta & \dots \\ A_1^* & B_1 & A_2 & \theta & \dots \\ \theta & A_2^* & B_2 & A_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

y

$$\tilde{J}^{(k)} = \begin{pmatrix} C_k^{-1/2} B_0 C_k^{-1/2} & C_k^{-1/2} A_1 C_k^{-1/2} & \theta & \theta & \dots \\ C_k^{-1/2} A_1^* C_k^{-1/2} & C_k^{-1/2} B_1 C_k^{-1/2} & C_k^{-1/2} A_2 C_k^{-1/2} & \theta & \dots \\ \theta & C_k^{-1/2} A_2^* C_k^{-1/2} & C_k^{-1/2} B_2 C_k^{-1/2} & C_k^{-1/2} A_3 C_k^{-1/2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

En el Lema 1.16 se demuestra que los ceros de $P_n(t)$ son los autovalores de la matriz J_{nN} (matriz truncada de la N-matriz de Jacobi al tamaño nN). Análogamente, los ceros de $P_n(C_n;t)$ son los autovalores de la matriz $\tilde{J}_{nN}^{(n)}$. Si hacemos uso del Teorema de localización de autovalores de Gersgorin, es suficiente probar que las entradas de la matriz $\tilde{J}_{nN}^{(n)}$ son acotadas (independientemente de n). Pero las entradas de la matriz $\tilde{J}_{nN}^{(n)}$ son de la forma $C_n^{-1/2}A_mC_n^{-1/2}$ o bien $C_n^{-1/2}B_mC_n^{-1/2}$ para $0 \leq m \leq n-1$. Así pues, si ponemos

$$
\begin{aligned}
C_n^{-1/2}A_mC_n^{-1/2} &= C_n^{-1/2}C_m^{1/2}C_m^{-1/2}A_mC_m^{-1/2}C_m^{1/2}A_mC_n^{-1/2}\\
C_n^{-1/2}B_mC_n^{-1/2} &= C_n^{-1/2}C_m^{1/2}C_m^{-1/2}B_mC_m^{-1/2}C_m^{1/2}A_mC_n^{-1/2}
\end{aligned}
$$

y teniendo presente que las sucesiones $C_m^{-1/2}A_mC_m^{-1/2}$ y $C_m^{-1/2}B_mC_m^{-1/2}$ son convergentes verificando que $C_n^{-1/2}C_m^{1/2} \leq I$ si $m \leq n$, ya que por hipótesis $(C_n)_n$ es una sucesión creciente, podemos concluir que las entradas de la matriz $\tilde{J}_{nN}^{(n)}$ están acotadas, independientemente de n. $\square$

Finalmente, los lemas anteriores junto con el Teorema 2.3 nos permiten obtener la demostración de la asintótica del cociente establecida en el Teorema 2.1.

Demostración del Teorema 2.1

Sea $(C_n)_n$ la sucesión de matrices definidas positivas que verifican las condiciones de convergencia (2.1). Gracias al Lema 2.6, podemos ver que las condiciones de convergencia (2.8) se satisfacen para $n_m = k_m = m$.

Por el Lema 2.4 tenemos que los ceros de $P_n(C_n;t)$ son reales, es decir, $\Delta_n \subset \mathbb{R}$ y por el Lema 2.5 tenemos que si $(C_n)_n$ es una sucesión creciente de matrices definidas positivas entonces Γ es un compacto de $\mathbb{R}$. Por tanto queda probado el apartado (i).

Por el Teorema 2.3, para $n_n = k_m = m$ tenemos que

$$\lim_{m\to\infty} R_{n_m-1,k_m}(z)R^{-1}_{n_m,k_m}(z)A^{-1}_{n_m,k_m} = \int \frac{dW_{A,B}(t)}{z-t},$$

para $z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$, y puesto que $R_{n,k}(t) = C_k^{1/2}P_n(C_k;t)$ obtenemos que

$$\lim_{m\to\infty} C_n^{1/2}P_{n-1}(C_n;z)P_n^{-1}(C_n;t)C_n^{-1/2}C_n^{1/2}A^{-1}C_n^{1/2} = \int \frac{dW_{A,B}(t)}{z-t},$$

para $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, con lo se concluye la prueba. $\square$

Para concluir esta sección, estableceremos la relación existente entre los ceros de $P_n(t)$ y los ceros de $P_n(C_n;t)$. Para ello, utilizaremos el siguiente resultado:

Teorema 2.7. *[HJ1, p. 224] **Teorema de Ostrowski.***
Sea A y S dos matrices de orden $N \times N$, con A hermítica y S no singular. Sean $\lambda_1(A) \le \cdots \le \lambda_N(A)$ los autovalores de A y $\lambda_1(SS^*) \le \cdots \le \lambda_N(SS^*)$ los autovalores de SS^* en orden creciente. Para cada $k = 1, 2, \ldots, N$, existe un número real positivo β_k tal que

$$\lambda_1(SS^*) \le \beta_k \le \lambda_N(SS^*) \quad y \quad \lambda_k(SAS^*) = \beta_k \lambda_k(A).$$

Como consecuencia directa de este resultado obtenemos el siguiente:

Lema 2.8. *Para $j = 1, \ldots, N$, existe una constante positiva $\beta_{n,j}$ tal que*

$$\mu_{n,1} \le \beta_{n,j} \le \mu_{n,N}, \quad y \quad x_{n,n,j} = \frac{x_{n,j}}{\beta_{n,j}}$$

siendo $x_{n,j}$ los ceros de $P_n(t)$, $x_{n,n,j}$ los ceros de $P_n(C_n;t)$, y $\mu_{n,1} \le \cdots \le \mu_{n,N}$ los autovalores de C_n .

Demostración: Como hicimos en la prueba del Lema 2.6, consideremos J la N-matriz de Jacobi asociada a $(P_n)_n$ y $\tilde{J}^{(k)}$ la N-matriz de Jacobi asociada a $(C_k P_n(C_k;\cdot))_n$.

En el Lema 1.16 se prueba que los ceros de $P_n(t)$ son los autovalores de J_{nN} (matriz truncada de la N-matriz de Jacobi al tamaño nN). Análogamente, los ceros de $P_n(C_n;t)$ son los autovalores de la matriz $\tilde{J}^{(n)}_{nN}$.

Si consideramos la matriz de orden $nN \times nN$ diagonal por bloques $\mathbf{C}_n$ definida por

$$\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} C_n & \theta & \ldots & \theta \\ \theta & C_n & \ldots & \theta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta & \theta & \ldots & C_n \end{pmatrix}$$

entonces, tenemos que

$$\tilde{J}^{(n)}_{nN} = \mathbf{C}_n{}^{-1/2} J_{nN} \mathbf{C}_n{}^{-1/2}$$

y usando el Teorema de Ostrowski tenemos que la conclusión de la prueba de este resultado es práctimente inmediata teniendo presente que si λ es un autovalor de C_n entonces $\frac{1}{\lambda}$ es un autovalor de C_n^{-1}. □

2.1.4 El caso degenerado

Bajo las mismas condiciones de convergencia que se establecieron en (2.8), vamos a estudiar en esta sección el caso en el que la matriz límite A es singular. Veremos que el cociente asintótico también existe pero su comportamiento depende fuertemente de la estructura de la matriz A.

El resultado que vamos a probar es el siguiente:

Teorema 2.9. *Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortogonales satisfaciendo la relación de recurrencia de tres términos (1.1). Supongamos que existe una sucesión creciente de matrices definidas positivas $(C_n)_n$ tales que verifican las condiciones de convergencia establecidas en (2.1), con A singular y B hermítica, y consideremos los polinomios matriciales escalados $P_n(C_n; z)$ definidos en (2.4).*

Si denotamos por Δ_n al conjunto de los ceros de $P_n(C_n; z)$ y

$$\Gamma = \bigcap_{N\geq 0} M_N \quad \text{donde} \quad M_N = \overline{\bigcup_{n\geq N} \Delta_n}\,,$$

entonces existe una matriz de medidas definida positiva ν, que es degenerada, para la cual

$$\lim_{n\to\infty} C_n^{1/2} P_{n-1}(C_n; z) P_n^{-1}(C_n; z) A_n^{-1} C_n^{1/2} = \int \frac{d\nu(t)}{z-t},$$

para $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Además, la convergencia es uniforme para z en compactos de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Observación 2.10. Teniendo presente las hipótesis de teorema 2.9 obtenemos:

1. En virtud del Lema 2.6 tenemos que Γ es un compacto de $\mathbb{R}$.

2. La matriz de medidas ν es degenerada pues demostraremos que verifica $\int (tI - B)d\nu(t)(tI - B)^*$ es singular.

El procedimiento a seguir para demostrar este resultado será análogo al establecido para el caso en el que la matriz límite A es no singular, es decir, vamos a reducir este resultado a un caso particular para una familia de polinomios ortogonales dependientes de un parámetro $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.11. *Sea $(R_{n,k})_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortogonales que dependen de un parámetro k, $(k = 1, 2, \ldots)$, satisfaciendo la relación de recurrencia de tres términos (2.7). Sean $(n_m)_m$ y $(k_m)_m$ dos sucesiones crecientes de números positivos y supongamos que existen dos matrices A y B, con A singular y B hermítica tales que para todo $l \geq 0$*

$$\lim_{m\to\infty} A_{n_m-l,k_m} = A, \qquad \lim_{m\to\infty} B_{n_m-l,k_m} = B.$$

Si denotamos por Δ_m al conjunto de los ceros del polinomio R_{n_m,k_m} y por

$$\Gamma = \bigcap_{N\geq 0} M_N \qquad donde \qquad M_N = \overline{\bigcup_{m\geq N} \Delta_m}\,,$$

entonces, existe una matriz de medidas definida positiva ν, que es degenerada par la cual

$$\lim_{m\to\infty} R_{n_m-1,k_m}(z) R^{-1}_{n_m,k_m}(z) A^{-1}_{n_m,k_m} = \int \frac{d\nu(t)}{z-t}\,, \tag{2.13}$$

para $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Además, la convergencia es uniforme para z en compactos de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Demostración: Procederemos como en la prueba del Teorema 2.3. Buscamos probar que

$$\lim_{m\to\infty} R_{n_m-1,k_m}(z) R^{-1}_{n_m,k_m}(z) A^{-1}_{n_m,k_m} = \int \frac{d\nu(t)}{z-t}$$

para $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Para ello, consideremos la siguiente sucesión de medidas matriciales discretas

$$\mu_{n,k} = \sum_{j=1}^{m} \delta_{x_{n,k,j}} R_{n-1,k}(x_{n,k,j}) \Gamma_{n,k,j} R^*_{n-1,k}(x_{n,k,j}) \tag{2.14}$$

De la misma forma que en la prueba del Teorema 2.3, obtenemos que

$$\int d\mu_{n,k}(t) = I\ ,$$

y que, dados dos números naturales n y k, se verifica

$$R_{n-1,k}(z)R_{n,k}^{-1}(z)A_{n,k}^{-1} = \int \frac{d\mu_{n,k}(t)}{z-t}.$$

Gracias a esta expresión, lo que buscamos probar es

$$\lim_{m\to\infty} \int \frac{d\mu_{n_m,k_m}(t)}{z-t} = \int \frac{d\nu(t)}{z-t}, \qquad \text{para } z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma.$$

Consideremos ahora los polinomios matriciales $(t^n I)_n$. Vamos a probar que $\lim_{m\to\infty} \int t^l I\, d\mu_{n_m,k_m}(t)$ existe para $l \geq 0$. En efecto, podemos expresar

$$t^l R_{n-1,k}(t) = S_{l,n-1,k}(t)R_{n,k}(t) + \sum_{i=1}^{n} \Delta_{i,l,n-1,k} R_{n-i,k}(t) \tag{2.15}$$

y razonando como en el Paso 2 de Teorema 2.3 se tiene que

$$\int t^l\, d\mu_{n,k}(t) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{i,l,n-1,n} \int R_{n-i,k}(t)\, dW_k(t) R_{n-1,k}^*(t) = \Delta_{1,l,n-1,k}$$

Así pues, buscamos probar que $\lim_{m\to\infty} \Delta_{j,l,n_m-1,k_m}$ existe.

Usaremos inducción sobre l. Si $l=0$, puesto que $\int d\mu_{n,k}(t) = I$, el resultado es inmediato. Supongamos que el resultado es válido para l. Podemos poner

$$t^{l+1}R_{n-1,k}(t) = tt^l R_{n-1,k}(t).$$

La expresión (2.15) nos conduce a

$$t^{l+1}R_{n-1,k}(t) \;=\; S_{l,n-1,k}(t)R_{n,k}(t) + \sum_{i=1}^{n} \Delta_{i,l,n-1,k} t R_{n-i,k}(t)\,.$$

Considerando la relación de recurrencia de tres términos de $(R_{n,k})$ podemos poner

$$\begin{aligned} t^{l+1}R_{n-1,k}(t) \;=\; & \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j,l,n-1,k} A_{n-j+1,k} R_{n-j+1,k}(t) \\ & + \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j,l,n-1,k} B_{n-j,k} R_{n-j,k}(t) \\ & + \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j,l,n-1,k} A_{n-j,k}^* R_{n-j-1,k}(t)\big)\,. \end{aligned}$$

Reordenando los índices obtenemos que

$$
\begin{aligned}
t^{l+1} R_{n-1,k}(t) &= \sum_{j=0}^{n} \Delta_{j+1,l,n-1,k} A_{n-j,k} R_{n-j,k}(t) \\
&+ \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j,l,n-1,k} B_{n-j,k} R_{n-j,k}(t) \\
&+ \sum_{j=2}^{n} \Delta_{j-1,l,n-1,k} A^{*}_{n-j+1,k} R_{n-j,k}(t)) .
\end{aligned}
$$

Ahora bien, puesto que

$$
t_{l+1} R_{n-1,k}(t) = S_{l+1,n-1,k}(t) R_{n,k}(t) + \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j,l+1,n-1,k} R_{n-j,k}(t)
$$

entonces llegamos a que

$$
\Delta_{j,l+1,n-1,k} = \Delta_{j,l,n-1,k} B_{n-j,k} + \Delta_{j-1,l,n-1,k} A^{*}_{n-j+1,k} + \Delta_{j+1,l,n,k} A_{n-j,k} .
$$

De esta forma,

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \Delta_{j,l+1,n_m-1,k_m} &= \lim_{m\to\infty} \Delta_{j,l,n_m-1,k_m} B_{n_m-j,k_m} \\
&+ \lim_{m\to\infty} \Delta_{j-1,l,n_m-1,k_m} A^{*}_{n_m-j+1,k_m} \\
&+ \lim_{m\to\infty} \Delta_{j+1,l,n_m,k_m} A_{n_m-j,k_m}
\end{aligned}
$$

y por nuestras hipótesis de inducción tenemos que todos los límites que aparecen en la parte derecha de la expresión anterior existen, por consiguiente $\lim_{m\to\infty} \Delta_{j,l+1,n_m-1,k_m}$ también existe. Por lo tanto, hemos probado lo que buscábamos.

Por una parte hemos visto que $\lim_{m\to\infty} \int t^l d\mu_{n_m,k_m}(t)$ existe para $l \geq 0$.

Por otra parte, puesto que $\int d\mu_{n,k}(t) = I$ para $n, k \geq 0$, usando el Teorema de Banach - Alaoglu, obtenemos que la sucesión $(\mu_{n_m,k_m})_m$ tiene un punto límite que denotaremos por ν. Como Γ es un compacto, se tiene que la matriz de medidas ν tiene soporte compacto. Por lo tanto, puesto que

$$
\lim_{m\to\infty} \int t^l d\mu_{n_m,k_m}(t) = \int t^l d\nu(t)
$$

y $1/(z-t)$ está acotada para $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, aplicando el Método de los Momentos (Teorema 1.23) llegamos a

$$\lim_{m\to\infty} \int \frac{d\mu_{n_m,k_m}(t)}{z-t} = \int \frac{d\nu(t)}{z-t} \quad \text{para} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \,.$$

La convergencia uniforme en compactos de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ se obtiene a partir del Teorema de Stieltjes - Vitali razonando como en la prueba del Teorema 2.3.

Para concluir que la matriz de medidas ν es degenerada, vamos a calcular los tres primeros momentos de la matriz de medidas $\mu_{n,k}$ definida en (2.14):

(M0) Momento de orden 0.

Por la fórmula de cuadratura para los polinomios $(R_{n,k})_n$ vimos que

$$\int d\mu_{n,k}(t) = I \,.$$

(M1) Momento de orden 1.

Si usamos de nuevo la misma fórmula de cuadratura, tenemos que

$$\int t d\mu_{n,k}(t) = \int tR_{n-1,k}(t) dW_k(t) R^*_{n-1,k}(t) \,,$$

donde W_k es la matriz peso para los polinomios $(R_{n,k})_n$. Usando la relación de recurrencia de estos polinomios obtenemos que

$$\begin{aligned}\int t d\mu_{n,k}(t) &= \int \Big(A_{n,k}R_{n,k}(t) + B_{n-1,k}R_{n-1,k}(t) \\ &\qquad + A^*_{n-1,k}R_{n-2,k}(t) \Big) dW_k(t) R^*_{n-1,k}(t) \\ &= B_{n-1,k} \,.\end{aligned}$$

(M2) Momento de orden 2.

Si usamos la fórmula de cuadratura y la definición de $\mu_{n,k}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\int t^2 d\mu_{n,k}(t) &= \sum_{j=1}^{m} x_{n,k,j} \left(A_{n,k}R_{n,k}(x_{n,k,j}) + B_{n-1,k}R_{n-1,k}(x_{n,k,j}) \right. \\ &\qquad \left. + A^*_{n-1,k}R_{n-2,k}(x_{n,k,j}) \right) \Gamma_{n,k,j} R^*_{n-1,k}(x_{n,k,j}) \,.\end{aligned}$$

Por la definición de $\Gamma_{n,k,j}$ y puesto que $R_{n,k}(x_{n,k,j})\Gamma_{n,k,j} = \theta$, de la fórmula de cuadratura para $(R_{n,k})_n$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\int t^2 d\mu_{n,k}(t) &= B_{n-1,k}\int tR_{n-1,k}(t)dW_k(t)R^*_{n-1,k}(t)\\ &+A^*_{n-1,k}\int tR_{n-2,k}(t)dW_k(t)R^*_{n-1,k}(t)\end{aligned}$$

y usando la ortogonalidad de los polinomios $(R_{n,k})_n$ llegamos a

$$\int t^2 d\mu_{n,k}(t) = B_{n-1,k}B_{n-1,k} + A^*_{n-1,k}A_{n-1,k}\,.$$

Con todos estos cálculos se tiene que

$$\begin{aligned}\int (tI-B)d\mu_{n,k}(t)(tI-B)^* &= \int t^2 I d\mu_{n,k}(t) - B\int tI d\mu_{n,k}(t)\\ &\quad -\int tI d\mu_{n,k}(t)B + \int d\mu_{n,k}(t)B^2\\ &= B_{n-1,k}B_{n-1,k} + A^*_{n-1,k}A_{n-1,k}\\ &\quad -BB_{n-1,k} - B_{n-1,k}B + BB\,.\end{aligned}$$

Tomando límite cuando n tiende a infinito, obtenemos que

$$\int (tI-B)d\nu(t)(tI-B)^* = A^*A$$

que es singular puesto que A es singular. De esta forma concluimos la prueba.

□

Nota 2.12. Una vez visto este resultado la demostración del Teorema 2.9 se desarrolla de igual forma que la prueba del Teorema 2.1.

Observación 2.13. Aunque no hemos encontrado una expresión explícita para ν, esta matriz de medidas se puede obtener de la expresión de su transformada de Hilbert. Si ponemos

$$F_{A,B}(z)\int \frac{d\nu(t)}{z-t}, \quad z \notin \operatorname{sop}(\nu),$$

entonces esta función matricial analítica satisface la ecuación matricial

$$A^*F_{A,B}(z)AF_{A,B}(z) + (B-zI)F_{A,B}(z) + I = \theta\,.$$

En efecto, si multiplicamos a la derecha la expresión (2.11) por $P_n^{-1}(C_n;z)C_n^{-1/2}$ y poniendo $k=n$ obtenemos que

$$
\begin{aligned}
zI &= C_n^{-1/2}A_{n+1}C_n^{-1/2}C_n^{1/2}P_{n+1}(C_n;z)P_n^{-1}(C_n;z)C_n^{-1/2} \\
&+ C_n^{-1/2}B_nC_n^{-1/2}C_n^{1/2}P_n(C_n;z)P_n^{-1}(C_n;z)C_n^{-1/2} \\
&+ C_n^{-1/2}A_n^*C_n^{-1/2}C_n^{1/2}P_{n-1}(C_n;z)P_n^{-1}(C_n;z)C_n^{-1/2}.
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Si consideramos $D_{n+1}=C_n$ y teniendo presente que la sucesión $(D_n)_n$ satisface las mismas condiciones de convergencia que $(C_n)_n$ tenemos que

$$
C_n^{-1/2}A_{n+1}P_{n+1}(C_n;z)P_n^{-1}(C_n;z)C_n^{-1/2} = \left(D_{n+1}^{1/2}P_n(D_{n+1};z)P_{n+1}^{-1}(D_{n+1};z)A_{n+1}^{-1}D_{n+1}^{1/2}\right)^{-1}
$$

y esta expresión converge a $F_{A,B}^{-1}(z)$ si hacemos tender n a infinito. Entonces, tomando límite en (2.16) obtenemos que

$$zI = F_{A,B}^{-1}(z) + B + A^*F_{A,B}(z)A$$

de donde llegamos a

$$A^*F_{A,B}(z)AF_{A,B}(z) + (B-zI)F_{A,B}(z) + I = \theta\,.$$

Nota 2.14. Para el cálculo explícito de ν en algunos casos particulares de A y B véase [D6].

2.1.5 Ejemplos

Vamos a ilustrar con ejemplos el cociente asintótico para polinomios matriciales ortogonales con coeficientes de recurrencia no acotados.

Ejemplo 2.15. Consideremos el caso en el que las matrices límite A y B son diagonales de orden 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

con $a, b > 0$. Puesto que A es una matriz simétrica definida positiva y B hermítica, atendiendo a (1.11) podemos poner que

$$\begin{aligned} \int \frac{dW_{A,B}(t)}{z-t} &= \frac{1}{2}A^{-1}(zI - B)A^{-1} \\ &\quad -\frac{1}{2}A^{-\frac{1}{2}}\left[\sqrt{A^{-\frac{1}{2}}(B - zI)A^{-1}(B - zI)A^{-\frac{1}{2}} - 4I}\right]A^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

para $z \notin \operatorname{sop}(W_{A,B})$.

Mediante unos simples cálculos, podemos dar la siguiente expresión explícita para el cociente asintótico de $(P_n)_n$:

$$\lim_{n\to\infty} C_n^{1/2} P_{n-1}(C_n; z) P_n^{-1}(C_n; z) A_n^{-1} C_n^{1/2} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (z-c)/a^2 & 0 \\ 0 & (z-d)/b^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{(z-c)^2 - 4a^2}/a^2 & 0 \\ 0 & \sqrt{(z-d)^2 - 4b^2}/b^2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.16. Un importante caso particular del Ejemplo 2.15 lo obtenemos al considerar los coeficientes de la relación de recurrencia como sigue:

$$B_0 = \begin{pmatrix} b_{-1} & a_0 \\ a_0 & b_0 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} b_{-n-1} & 0 \\ 0 & b_n \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{-n} & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, \cdots$$

Estas matrices están estrechamente relacionadas con los procesos bilaterales de nacimiento y muerte (ver [P], [ILMV] ,[V4]) y con la doble e infinita ecuación en diferencias (ver [MR]):

$$t\alpha_n = a_{n+1}\alpha_{n+1}(t) + b_n\alpha_n(t) + a_n\alpha_{n-1}(t), \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

El caso $a_n = dn$, $b_n^2 = an^2 + bn + c$, $(n \in \mathbb{Z})$ donde a, b, c, d son reales con $a, c \neq 0$ y $b_n^2 > 0$ fueron estudiados en [MR], y están relacionados con los polinomios asociados de Meixner ($d^2 > 4a > 0$), con los polinomios de Meixner-Pollaczeck ($d^2 < 4a$) y con los polinomios de Laguerre ($d^2 = 4a \neq 0$).

Para estos casos en particular, podemos tomar

$$C_n = \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & \sqrt{n} \end{pmatrix}$$

Obsérvese que para este ejemplo las matrices C_n son diagonales y podemos definir los polinomios escalados $P_n(C_n; t)$ usando (2.2), (2.3) ó (2.4).

La sucesión $(C_n)_n$ satisface

$$\lim_{n\to\infty} C_n^{-1/2} C_{n-1}^{1/2} = I\,.$$

Los límites (2.1) se pueden hallar fácilmente:

$$\lim_{n\to\infty} C_n^{-1/2} A_n C_n^{-1/2} = A = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} C_n^{-1/2} B_n C_n^{-1/2} = B = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}$$

y usando lo obtenido en el Ejemplo 2.15 tenemos el comportamiento asintótico para este caso particular:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{d} P_{n-1}(C_n; z) P_n^{-1}(C_n; z) = \frac{1}{2d^2}\left(z - \sqrt{a} - \sqrt{(\sqrt{a} - z)^2 - 4d^2}\right) \cdot I$$

2.2 Asintótica del cociente para polinomios ortogonales matriciales con coeficientes de recurrencia asintóticamente periódicos

El método usado para obtener la asintótica del cociente para polinomios matriciales ortonormales con coeficientes de recurrencia no acotados nos permitirá también estudiar el caso de una sucesión de polinomios ortonormales cuyos coeficientes de recurrencia toman asintóticamente un número finito (eventualmente infinito) de valores, es decir, las sucesiones $(A_n)_n$ y $(B_n)_n$ que aparecen en la relación de recurrencia (1.1) satisfacen

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in X_k}} A_n = \alpha_k\,, \qquad \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in X_k}} B_n = \beta_k \tag{2.17}$$

donde $X_k \subseteq \mathbb{N}$ para $k \in I$, son subconjuntos infinitos que forman una partición de $\mathbb{N}$, siendo $I \subseteq \mathbb{N}$ un conjunto de índices finito (eventualmente infinito).

Para determinar esta asintótica necesitaremos considerar la siguiente familia de polinomios ortonormales asociados a una aplicación $\varphi : \mathbb{N} \to I \subseteq \mathbb{N}$.

Dadas $\left(\alpha_k\right)_{k\in I}$ un conjunto de matrices invertibles y $\left(\beta_k\right)_{k\in I}$ un conjunto de matrices hermíticas consideremos la sucesión de polinomios matriciales que verifican la siguiente relación de recurrencia:

$$tU_n^{\varphi}(t) = \Lambda_{n+1}U_{n+1}^{\varphi}(t) + \Phi_n U_n^{\varphi}(t) + \Lambda_n^* U_{n-1}^{\varphi}(t)\,, \quad n \geq 0 \tag{2.18}$$

con las condiciones iniciales $U_{-1}^{\varphi}(t) = \theta$ y $U_0^{\varphi}(t) = I$, donde Λ_n $(n \geq 1)$ y Φ_n $(n \geq 0)$ son las matrices definidas por

$$\Lambda_n = \alpha_{\varphi(n)}^*, \qquad \Phi_{n-1} = \beta_{\varphi(n)}. \tag{2.19}$$

Esta sucesión de polinomios matriciales, en virtud del Teorema de Favard, es ortonormal con respecto a una matriz de medidas definida positiva que denotaremos W_{φ}.

Los ejemplos más sencillos se obtienen considerando I un conjunto finito de índices. En efecto, sea $p \in \mathbb{N}$ un número natural dado y consideremos el conjunto:

$$I_p = \{k \in \mathbb{N}^* \,:\, 0 \leq k \leq p-1\}.$$

Se genera así una partición $(X_k)_{k=0}^{p-1}$ de $\mathbb{N}$ definida por los conjuntos

$$X_k = \{n = Np + k \,:\, N \in \mathbb{N}\} \qquad 0 \leq k \leq p-1.$$

La asintótica del cociente cuando se verifica (2.17) para esta partición vendrá determinada por los pesos matriciales asociados a las siguientes sucesiones de polinomios ortonormales matriciales:

Dados $p > 0$ y $0 \leq k \leq p-1$ definimos la aplicación $\varphi_{p,k} \,:\, \mathbb{N} \to I_p$ como el resto de $(k-n)$ al dividir por p, es decir,

$$\varphi_{p,k}(n) = (k-n)\,\mathrm{Mod}(p).$$

Podemos definir así una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con coeficientes periódicos mediante la relación de recurrencia de tres términos:

$$tU_n^{(p,k)}(t) = \Lambda_{n+1}^{(p,k)} U_{n+1}^{(p,k)}(t) + \Phi_n^{(p,k)} U_n^{(p,k)}(t) + \Lambda_n^{(p,k)*} U_{n-1}^{(p,k)}(t), \quad n \geq 0 \tag{2.20}$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \Lambda_n^{(p,k)} & = & \alpha^*_{\varphi_{p,k}(n)} & = & \alpha^*_{(k-n)\,\mathrm{Mod}(p)} \quad \text{para } n \geq 1 \\ \Phi_n^{(p,k)} & = & \beta_{\varphi_{p,k}(n+1)} & = & \beta_{(k-n-1)\,\mathrm{Mod}(p)} \quad \text{para } n \geq 0 \end{array} \right. \tag{2.21}$$

con las condiciones iniciales $U_{-1}^{(p,k)}(t) = \theta$ y $U_0^{(p,k)}(t) = I$. La medida matricial con respecto a la cual estos polinomios son ortonormales la denotaremos por $W_{(p,k)}$.

Estos pesos matriciales determinarán la asintótica de las familias de polinomios ortonormales verificando que para cada k, $0 \leq k \leq p-1$,

$$\lim_{n\to\infty} A_{np+k} = \alpha_k \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} B_{np+k} = \beta_k\,.$$

Para demostrar esta asintótica necesitamos probar que las matrices de medida W_φ con respecto a la cual son ortonormales los polinomios $(U_n^\varphi)_n$ definidos en (2.18) y (2.19) tienen soporte compacto.

Lema 2.17. *Sea $(U_n^\varphi)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales definida a partir de la relación de recurrencia (2.18) cuyos coeficientes satisfacen (2.19).*

i) Si I es un conjunto finito de índices entonces existe una constante $M > 0$, independiente de n, tal que si $x_{n,k}$ es un cero de U_n^φ entonces $|x_{n,k}| \leq M$.

ii) Si I es un conjunto infinito de índices y las sucesiones de matrices $(\alpha_k)_{k\in I}$ y $(\beta_k)_{k\in I}$ son acotadas entonces existe una constante $M > 0$, independiente de n, tal que si $x_{n,k}$ es un cero de U_n^φ entonces $|x_{n,k}| \leq M$.

Además, si W_φ es la matriz peso para estos polinomios, entonces W_φ tiene soporte compacto contenido en $[-M, M]$.

Demostración: Como es habitual denotaremos por Δ_n al conjunto de los ceros del polinomio matricial U_n^φ y consideremos el conjunto Γ como en la Definición 1.28.

Si partimos de la N-matriz de Jacobi asociada a los polinomios $(U_n^\varphi)_n$, es decir, la matriz hermítica infinita con $(4N-1)$ diagonales definida por

$$J = \begin{pmatrix} \Phi_0 & \Lambda_1 & & & \\ \Lambda_1^* & \Phi_1 & \Lambda_2 & & \\ & \Lambda_2^* & \Phi_2 & \Lambda_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

por el Lema 1.16 sabemos que los ceros de U_n^φ son los autovalores de J_{nN} (la matriz truncada de la N- matriz de Jacobi al tamaño nN). Teniendo presente que, tanto para el caso (i) como para el caso (ii), las sucesiones $(\Lambda_n)_n$ y $(\Phi_n)_n$ son acotadas, usando el Teorema de Localización de Autovalores de Gersgorin, tenemos que existe $M \geq 0$ tal que si $x_{n,k}$ es un cero de U_n^φ entonces $|x_{n,k}| \leq M$. Por lo tanto, se tiene que Γ está contenido en $[-M, M]$, y de esta forma $\text{sop}(W_\varphi) \subset \Gamma \subset [-M, M]$. □

Estamos ya en condiciones de demostrar el resultado que establece el cociente asintótico para polinomios cuyos coeficientes de recurrencia toman asintóticamente un número finito (eventualmente infinito) de valores.

Teorema 2.18. *Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales satisfaciendo la relación de recurrencia de tres términos (1.1) y sea $(X_k)_{k\in I}$ una partición de $\mathbb{N}$, siendo $I \subseteq \mathbb{N}$ un subconjunto de índices (finito o infinito). Supongamos que:*

(1) Dado $k \in I$ y $m \in \mathbb{N}$ existen dos enteros positivos que dependen de k y m, $i(k,m)$ y $N(k,m)$, tales que si $n \in X_k$ entonces $n - m \in X_i$ para $n \geq N$.

(2) Para cualquier $k \in I$, se tiene que

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in X_k}} A_n = \alpha_k\,, \qquad \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in X_k}} B_n = \beta_k$$

siendo las sucesiones $(\alpha_k)_{k\in I}$ y $(\beta_k)_{k\in I}$ acotadas con α_k no singular y β_k hermítica para todo $k \in I$.

Si representamos por Δ_n al conjunto de los ceros del polinomio matricial P_n y por

$$\Gamma_k = \bigcap_{N\geq 0} M_N^k, \quad \text{donde} \quad M_N^k = \overline{\bigcup_{\substack{n\geq N \\ n\in X_k}} \Delta_n}\,,$$

entonces, para cada $k \in I$ se verifica que

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in X_k}} P_{n-1}(z)P_n^{-1}(z)A_n^{-1} = \int \frac{dW_{\varphi_k}(t)}{z-t}, \qquad z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma_k$$

donde W_{φ_k} es la matriz de medida definida positiva con respecto a la cual son ortonormales los polinomios $(U_n^{\varphi_k})_n$ definidos a partir de (2.18) considerando $\varphi_k(m) = i(k,m)$, siendo $i(k,m)$ el entero no negativo obtenido de (1).

Además, la convergencia es uniforme en compactos de $\mathbb{C}\setminus\Gamma_k$.

Demostración: Dado $k \in I$, consideremos la sucesión de matrices de medidas discretas $(\mu_n)_{n\in X_k}$ definidas por

$$\mu_n = \sum_{k=1}^{m} \delta_{x_{n,k}} P_{n-1}(x_{n,k})\Gamma_{n,k}P_{n-1}^*(x_{n,k})\,, \qquad n \in X_k\,, \tag{2.22}$$

donde $x_{n,k}$ $(k = 1, \cdots, m)$ representan los diferentes ceros del polinomio P_n y la matriz $\Gamma_{n,k}$ es la matriz peso de la fórmula de cuadratura para $(P_n)_n$

asociada al cero $x_{n,k}$ (ver Teorema 1.20). De la fórmula de cuadratura se sigue que $\int d\mu_n(t) = I, \quad n \in X_k$. En efecto,

$$\begin{aligned} \int d\mu_n(t) &= \sum_{j=1}^{m} P_{n-1}(x_{n,k})\Gamma_{n,k}P_{n-1}^*(x_{n,k,}) \\ &= \int P_{n-1}(t)\, dW(t) P_{n-1}^*(t) \\ &= I. \end{aligned}$$

Para llevar a cabo esta demostración procederemos en varios pasos.

PASO 1. *Fijado $k \in I$ y dado $n \in X_k$, se tiene que*

$$P_{n-1}(z)P_n^{-1}(z)A_n^{-1} = \int \frac{d\mu_n(t)}{z-t}.$$

En efecto, del Lema 1.24 se sigue que la descomposición

$$P_{n-1}(z)P_n^{-1}(z) = \sum_{k=1}^{n} C_{n,k}\frac{1}{z-x_{n,k}}$$

es siempre posible, donde las matrices $C_{n,k}$ son iguales a

$$C_{n,k} = \frac{l_k}{\big(\det(P_n(t))^{l_k}(x_{n,k})\big)} P_{n-1}(x_{n,k})\Big(\mathrm{Adj}\big(P_n(t)\big)\Big)^{l_k-1}(x_{n,k}).$$

Multiplicando a la derecha por A_n^{-1} y usando la fórmula de Liouville (1.26) para los polinomios $(P_n)_n$, obtenemos

$$\begin{aligned} C_{n,k}A_n^{-1} &= \frac{l_k}{\big(\det\big(P_n(t)\big)^{l_k}(x_{n,k})\big)} P_{n-1}(x_{n,k})\Big(\mathrm{Adj}\big(P_n(t)\big)\Big)^{l_k-1}(x_{n,k}) \cdot \\ &\cdot \Big(Q_n(x_{n,k})P_{n-1}^*(x_{n,k}) - P_n(x_{n,k})Q_{n-1}^*(x_{n,k})\Big) \end{aligned}$$

Aplicando el apartado (*vi*) del Teorema 1.17, tenemos que

$$\Big(\mathrm{Adj}\big(P_n(t)\big)\Big)^{l_k-1}(x_{n,k}) \cdot P_{n,k}(x_{n,k}) = \theta$$

y por tanto

$$\begin{aligned} C_{n,k}A_n^{-1} &= \frac{l_k}{\big(\det(P_{n,k}(t))^{l_k}(x_{n,k})\big)} P_{n-1}(x_{n,k})\left(\mathrm{Adj}(P_n(x_{n,k}))\right)^{l_k-1}(x_{n,k}) \cdot \\ &\cdot \Big(Q_n(x_{n,k})P_{n-1}^*(x_{n,k})\Big) \end{aligned}$$

Teniendo presente las expresiones de las matrices de Christoffel, tenemos que

$$C_{n,k}A_n^{-1} = P_{n-1}(x_{n,k})\Gamma_{n,k}P_{n-1}^*(x_{n,k}).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P_{n-1}(z)P_n^{-1}(z)A_n^{-1} &= \sum_{k=1}^{n} P_{n-1}(x_{n,k})\Gamma_{n,k}P_{n-1}^*(x_{n,k})\frac{1}{z-x_{n,k}} \\ &= \int \frac{d\mu_n(t)}{z-t} \end{aligned}$$

y de esta forma concluímos el paso 1. En concordancia con este primer paso, tenemos que probar que

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in X_k}} \int \frac{d\mu_n(t)}{z-t} = \int \frac{dW_{\varphi_k}(t)}{z-t}, \qquad \text{para} \quad z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma_k.$$

PASO 2. *Fijado $k\in I$ consideremos la aplicación $\varphi_k(n) = i(k,n)$, donde $i(k,n)$ viene dado por la hipótesis (1) y la sucesión de polinomios matriciales $(U_n^{\varphi_k})_n$ definidos por la relación de recurrencia:*

$$U_l^{\varphi_k}(t) = \Lambda_{l+1}U_{l+1}^{\varphi_k}(t) + \Phi_l U_l^{\varphi_k}(t) + \Lambda_l^* U_{l-1}^{\varphi_k}(t), \qquad l\geq 0,$$

con $\Lambda_l = \alpha^*_{\varphi_k(l)}$ y $\Phi_{l-1} = \beta_{\varphi_k(l)}$. Entonces,

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in X_k}} \int U_l^{\varphi_k}(t)\,d\mu_n(t) = \begin{cases} I & si \quad l=0 \\ \theta & si \quad l\neq 0 \end{cases} \tag{2.23}$$

En efecto, si expresamos

$$U_l^{\varphi_k}(t)P_{n-1}(t) = S_{l,n}(t)P_n(t) + \sum_{i=1}^{n}\Delta_{i,l,n}P_{n-i}(t), \quad l\geq 0, \tag{2.24}$$

de acuerdo con la definición de las medidas discretas μ_n y haciendo uso de la expresión (2.24), obtenemos

$$\begin{aligned} \int U_l^{\varphi_k}(t)\,d\mu_n(t) &= \sum_{k=1}^{m} U_l^{\varphi_k}(x_{n,k})P_{n-1}(x_{n,k})\Gamma_{n,k}P_{n-1}^*(x_{n,k}) \\ &= \sum_{k=1}^{m}\Big(S_{l,n}(x_{n,k})P_n(x_{n,k}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\Delta_{i,l,n}P_{n-i}(x_{n,k})\Big)\Gamma_{n,k}P_{n-1}^*(x_{n,k}). \end{aligned}$$

Por el apartado (vi) del Teorema 1.17, obtenemos que

$$P_n(x_{n,k}) \cdot \Big(\operatorname{Adj}\big(P_n(t)\big)\Big)^{l_k-1}(x_{n,k}) = \theta$$

y, teniendo en cuenta la definición de las matrices $\Gamma_{n,k}$, se tiene que

$$P_n(x_{n,k}) \cdot \Gamma_{n,k} = \theta\,,$$

por tanto, llegamos a que

$$\int U_l^{\varphi_k}(t)\, d\mu_n(t) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta_{i,l,n} P_{n-i}(x_{n,k}) \right) \Gamma_{n,k} P_{n-1}^*(x_{n,k}).$$

Puesto que $2n - i - 1 \leq 2n - 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$, de la fórmula de cuadratura para los polinomios $(P_n)_n$ obtenemos que

$$\int U_l^{\varphi_k}(t)\, d\mu_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{i,l,n} \int P_{n-i}(t)\, dW(t) P_{n-1}^*(t) = \Delta_{1,l,n}\,.$$

Así pues, el paso 2 estará demostrado si

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in X_k}} \Delta_{j,l,n} = \begin{cases} I & \text{si} \quad j = l+1 \\ \theta & \text{si} \quad j \neq l+1. \end{cases} \tag{2.25}$$

Para probar (2.25) usaremos inducción sobre l:

Si $l = 0$ el resultado es inmediato pues hemos visto que $\int d\mu_n(t) = I$.

Supongamos que el resultado es válido para l. La relación de recurrencia de tres términos para los polinomios matriciales $(U_n^{\varphi_k})_n$ nos lleva a

$$U_{l+1}^{\varphi_k}(t) P_{n-1}(t) = \Lambda_{l+1}^{-1}\Big(t U_l^{\varphi_k}(t) - \Phi_l U_l^{\varphi_k}(t) - \Lambda_l^* U_{l-1}^{\varphi_k}(t)\Big) P_{n-1}(t).$$

La expresión (2.24) nos conduce a

$$\begin{aligned} U_{l+1}^{\varphi_k}(t) P_{n-1}(t) \;&=\; \Lambda_{l+1}^{-1}\Big(S_{l,n}(t) P_n(t) + \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j,l,n} t P_{n-j}(t) \\ &\quad -\; \Phi_l\big(S_{l,n}(t) P_n(t) + \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j,l,n} P_{n-j}(t)\big) \\ &\quad -\; \Lambda_l^*\big(S_{l-1,n}(t) P_n(t) + \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j,l-1,n} P_{n-j}(t)\big)\Big)\,. \end{aligned}$$

Considerando la relación de recurrencia de tres términos de $(P_n)_n$ podemos poner

$$\begin{aligned}
U_{l+1}^{\varphi_k}(t)P_{n-1}(t) &= \Lambda_{l+1}^{-1}\Big[S_{l,n}(t)P_n(t) + \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j,l,n} A_{n-j+1} P_{n-j+1}(t) \\
&+ \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j,l,n} B_{n-j,k} P_{n-j}(t) + \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j,l,n} A_{n-j}^{*} P_{n-j-1}(t)) \\
&- \Phi_l\Big(S_{l,n}(t)P_n(t) + \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j,l,n} P_{n-j}(t)\Big) \\
&- \Lambda_l^{*}\Big(S_{l-1,n}(t)P_n(t) + \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j,l-1,n} P_{n-j}(t)\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Reordenando los índices obtenemos que

$$\begin{aligned}
U_{l+1}^{\varphi_k}(t)P_{n-1}(t) &= \Lambda_{l+1}^{-1}\Big[S_{l,n}(t)P_n(t) + \sum_{j=0}^{n} \Delta_{j+1,l,n} A_{n-j} P_{n-j}(t) \\
&+ \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j,l,n} B_{n-j} P_{n-j}(t) + \sum_{j=2}^{n} \Delta_{j-1,l,n} A_{n-j+1}^{*} P_{n-j}(t)) \\
&- \Phi_l\Big(S_{l,n}(t)P_n(t) + \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j,l,n} P_{n-j}(t)\Big) \\
&- \Lambda_l^{*}\Big(S_{l-1,n}(t)P_{n,k}(t) + \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j,l-1,n} P_{n-j,k}(t)\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Ahora bien, puesto que

$$U_{l+1}^{\varphi_k}(t)P_{n-1}(t) = S_{l+1,n}(t)P_n(t) + \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j,l+1,n} P_{n-j}(t)$$

llegamos a que

$$\begin{aligned}
\Delta_{j,l+1,n} = &\ \Lambda_{l+1}^{-1}(\Delta_{j,l,n} B_{n-j} + \Delta_{j-1,l,n} A_{n-j+1}^{*} + \Delta_{j+1,l,n} A_{n-j}) \\
&- \Lambda_{l+1}^{-1} \Phi_l \Delta_{j,l,n} - \Lambda_{l+1}^{-1} \Lambda_l^{*} \Delta_{j,l-1,n}.
\end{aligned}$$

La expresión de $\Delta_{j,l+1,n}$ será la clave para esta parte de la prueba.

Para $j \geq l+3$ ó $j \leq l-1$, las hipótesis de inducción nos conducen a

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in X_k}} \Delta_{j,l,n} = \theta\,.$$

Estudiaremos los casos $j = l$, $j = l+1$ y $j = l+2$ de forma separada:

- Caso $j = l$. Dado l, por la condición (1), existen dos números enteros no negativos $i(k,l)$ y $N(k,l)$ tales que $n - l \in X_i$ para $n \in X_k$, $n \geq N$. Gracias a esto, obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in X_k}} \Delta_{l,l+1,n} &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in X_k}} \Lambda_{l+1}^{-1}(A_{n-l} - \Lambda_l^*) &&= \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in X_i}} \Lambda_{l+1}^{-1}(A_n - \alpha_i)\\ &= \Lambda_{l+1}^{-1}(\alpha_i - \alpha_i) &&= \theta.\end{aligned}$$

- Caso $j = l+1$. Dado $l+1$, por la condición (1), existen dos números enteros no negativos $i(k,l+1)$ y $N(k,l+1)$ tales que $n-(l+1) \in X_i$ para $n \in X_k$ y $n \geq N$. Entonces, tenemos

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in X_k}} \Delta_{l+1,l+1,n} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in X_k}} \Lambda_{l+1}^{-1}(B_{n-(l+1)} - \Phi_l) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in X_i}} \Lambda_{l+1}^{-1}(B_n - \beta_i) = \theta.$$

- Caso $j = l+2$. Dado $l+1$, por la condición (1), existen dos números enteros no negativos $i(k,l+1)$ y $N(k,l+1)$ tales que $n-(l+1) \in X_i$ para $n \in X_k$ y $n \geq N$. Tenemos para este caso que

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in X_k}} \Delta_{l+2,l+1,n} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in X_k}} \Lambda_{l+1}^{-1}(A^*_{n-(l+1)}) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in X_i}} \alpha_i^{*^{-1}} A_n^* = \alpha_i^{*^{-1}} \alpha_i^* = I.$$

Ya estamos en condiciones de probar que

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in X_k}} \int \frac{\mu_n(t)}{z-t} = \int \frac{dW_{\varphi_k}(t)}{z-t}, \qquad \text{para} \qquad z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma_k.$$

Si no fuese así, encontraríamos un complejo $z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma_k$, una sucesión creciente de enteros no negativos $(n_m)_m$ y una constante positiva C para los cuales

$$\left\| \int \frac{dW_{\varphi_k}(t)}{z-t} - \int \frac{d\mu_{n_m}(t)}{z-t} \right\|_2 \geq C > 0, \quad m \geq 0, \tag{2.26}$$

donde $\|\cdot\|_2$ representa la norma espectral de una matriz.

Puesto que $(\mu_{n_m})_m$ es una sucesión de matrices de medidas definidas positivas, con soporte compacto contenido en $[-M, M]$ (Lema 2.17) y como $\int d\mu_n = I$, usando el Teorema de Banach-Alaoglu, podemos obtener una subsucesión $(j_m)_m$ de $(n_m)_m$ y una matriz de medidas definida positiva ν_k con soporte compacto contenido en $[-M, M]$ tal que

$$\lim_{\substack{j_m \to \infty \\ j_m \in X_k}} \int f(t) d\,\mu_{j_m}(t) = \int f(t) d\,\nu_k(t),$$

para cualquier función matricial continua f definida en $[-M, M]$. Por lo tanto, tomando $f(t) = U_l^{\varphi_k}(t)$ y por lo probado en el paso 2, tenemos

$$\lim_{\substack{j_m \to \infty \\ j_m \in X_k}} \int U_l^{\varphi_k}(t) d\,\mu_{j_m}(t) = \int U_l^{\varphi_k}(t) d\,\nu_k(t) = \begin{cases} I & \text{si} \quad l = 0 \\ \theta & \text{si} \quad l \neq 0. \end{cases}$$

Pero la sucesión de polinomios matriciales $(U_l^{\varphi_k}(t))_l$ es ortonormal con respecto a la matriz de medidas W_{φ_k} que es determinada en virtud del apartado (ii) del Lema 2.17. De esta forma

$$\int U_l^{\varphi_k}(t) dW_{\varphi_k}(t) = \begin{cases} I & \text{si} \quad l = 0 \\ \theta & \text{si} \quad l \neq 0. \end{cases}$$

Puesto que $(U_l^{\varphi_k}(t))_l$ es una base para el espacio lineal de los polinomios matriciales, y las matrices de medidas ν_k y W_{φ_k} tienen ambas soporte compacto, obtenemos que $\nu_k = W_{\varphi_k}$, y por tanto (2.26) es imposible.

La convergencia uniforme en compactos de $\mathbb{C} \setminus \Gamma_k$ se sigue del Teorema de Stieltjes-Vitali, pues las entradas de la matriz $\displaystyle\int \frac{d\mu_n(t)}{z-t}$ están uniformemente acotadas en compactos de $\mathbb{C} \setminus \Gamma_k$.

En efecto, dado un compacto $F \subset \mathbb{C} \setminus \Gamma_k$, de la definición de Γ_k se tiene que para N suficientemente grande $F \bigcap M_N^k = \emptyset$ y por tanto existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left| \frac{1}{z-t} \right| \leq C \quad \text{para } z \in F \text{ y } t \in M_N^k .$$

Entonces, para $n \geq N$ y $v \in \mathbb{C}^N$, el carácter definido positivo de μ_n nos lleva a

$$\left| v \int \frac{d\mu_n(t)}{z-t} v^* \right| = \int \frac{v\, d\mu_n(t) v^*}{|z-t|} \leq C \int v\, d\mu_n(t) v^* = C\|v\|^2 .$$

De esta forma se concluye la prueba. $\square$

Observación 2.19. Si en el Teorema 2.18 consideramos una partición finita de $\mathbb{N}$, es decir, $I \subseteq \mathbb{N}$ es finito entonces la condición de acotación sobre las sucesiones $(\alpha_k)_{k\in I}$ y $(\beta_k)_{k\in I}$ siempre se verifica.

2.2.1 Ejemplo. El caso finito

Vamos a mostrar que para el caso de una partición finita $(X_k)_{k=0}^{p-1}$ de $\mathbb{N}$ la hipótesis (1) del Teorema 2.18 implica necesariamente que estamos en la partición finita de $\mathbb{N}$ generada por los restos de dividir por p, esto es, los conjuntos X_k que definen la partición son de la forma

$$X_k = \{n = Np + k : \ N \in \mathbb{N}\} \qquad 0 \leq k \leq p-1. \tag{2.27}$$

Es claro que $(X_k)_{k=0}^{p-1}$ definidos en (2.27) forman una partición de $\mathbb{N}$. Veamos que satisfacen la hipótesis (1) del Teorema 2.18.

Si fijamos $m \in \mathbb{N}$, podemos poner que $m = N_1 p + k_1$, con $0 \leq k_1 \leq p-1$. Fijando k_0, con $0 \leq k_0 \leq p-1$, si tomamos $n_0 \in X_{k_0}$, con $n_0 > m$, tendremos que existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 = N_0 p + k_0$. De esta forma

$$n_0 - m = (N_0 - N_1)p + (k_0 - k_1) \in X_{i(k_0,m)}$$

donde

$$i(k_0,m) = \begin{cases} k_0 - k_1 & \text{si} \quad k_0 > k_1 \\ 0 & \text{si} \quad k_0 = k_1 \\ p + (k_0 - k_1) & \text{si} \quad k_0 < k_1 \end{cases}$$

es decir, $i(k_0,m) = (k_0 - k_1)\,\mathrm{Mod}(p) = (k_0 - m)\,\mathrm{Mod}(p)$. Por lo tanto, se verifica la condición (1) del Teorema 2.18.

En este caso, la aplicación a la que se hace referencia en el Teorema 2.18 sería

$$\varphi_{k_0}(m) = i(k_0,m) = (k_0 - m)\,\mathrm{Mod}(p) = \varphi_{p,k_0}(m)$$

que según (2.20) define a la sucesión de polinomios matriciales con coeficientes de recurrencia periódicos $(U_n^{(p,k_0)})_n$ ortonormales con respecto a $W_{(p,k_0)}$.

Veamos que la hipótesis (1) del Teorema 2.18 implica necesariamente que la partición finita de $\mathbb{N}$ está definida mediante los conjuntos (2.27).

Sea $(X_k)_{k=1}^p$ una partición de $\mathbb{N}$ satisfaciendo la hipótesis (1) del Teorema 2.18, donde cada conjunto X_k, $(k = 1, \cdots, p)$ es infinito.

PASO 1. Dado un conjunto $Y_1 \in (X_k)_{k=1}^p$, sea $Y_2 \in (X_k)_{k=1}^p$ tal que si $n \in Y_1$ y $n > N_1$ entonces $n - 1 \in Y_2$.

Entonces se tiene que $Y_1 \neq Y_2$; pues si fueran iguales entonces

$$\{\, n \in \mathbb{N} : \, n > N_1 \,\} \subseteq Y_1$$

y los demás conjuntos X_k $(k = 1 \cdots p)$, $X_k \neq Y_1$ serían finitos pues si $n > N_1$, existe $h \in Y_1$, $h > n > N_1$ tal que

$$h - 1 \in Y_2 = Y_1 \;\Rightarrow\; h - 2 \in Y_2 = Y_1 \;\Rightarrow\; \cdots \;\Rightarrow\; n \in Y_1.$$

PASO 2. Dados $Y_1, Y_2 \in (X_k)_{k=1}^p$ verificando que

$$\left.\begin{array}{l} n \in Y_1 \\ n > N_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \; n - 1 \in Y_2 \,,$$

sea $Y_3 \in (X_k)_{k=1}^p$ tal que si $n \in Y_2$ y $n > N_2$ entonces $n - 1 \in Y_3$. Entonces se tiene que $Y_3 \neq Y_1, Y_2$.

Razonando como en el paso 1 obtenemos que $Y_3 \neq Y_2$.

Ahora bien, si $Y_3 = Y_1$ tendríamos que

$$\{\, n \in \mathbb{N} : \, n > N_1, N_2 \,\} \subseteq Y_1 \cup Y_2$$

y los demás conjuntos X_k $(k = 1 \cdots p)$, $X_k \neq Y_1, Y_2$ serían finitos pues si $n > N_1, N_2$, existe $h \in Y_2$, $h > n > N_1, N_2$ tal que

$$\begin{aligned} h - 1 \in Y_3 = Y_1 \;&\Rightarrow\; h - 2 \in Y_2 \;\Rightarrow\; h - 3 \in Y_3 = Y_1 \\ &\Rightarrow\; \quad \cdots \quad \;\Rightarrow\; n \in Y_1 \text{ ó } Y_2. \end{aligned}$$

PASO 3. Procediendo de forma análoga a los pasos 1 y 2 tendríamos ordenados $Y_1, Y_2, \cdots, Y_p$ (distintos entre sí) tales que

$$\left.\begin{array}{l} n \in Y_1 \\ n > N_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n-1 \in Y_2 \\ n-1 > N_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (n-1)-1 \in Y_3 \\ n-2 > N_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{array}{l} (n-p)-1 \in Y_p \\ n-p+1 > N_p \end{array}$$

Aplicando el proceso a $Y_2, Y_3, \cdots, Y_p$ se tendría que

$$n \in Y_1 \Rightarrow n-1 \in Y_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow n-(p-1) \in Y_p \Rightarrow n-p \in Y_1$$

pues si $n-p \in Y_k$, $k \neq 1$, y considerando $m \in Y_1$ con $n > m$ entonces $m \in Y_j$ $(k \leq j \leq p)$ lo que contradice que $Y_1, \cdots, Y_p$ sean distintos entre sí.

PASO 4. Hemos probado que si n es suficientemente grande y $n \in Y_i$ $(i = 1, \cdots, p)$ entonces $n - p \in Y_i$, de donde se concluye el resultado. $\square$

Tras estas consideraciones realmente hemos probado que el Teorema 2.18 para el caso finito es equivalente al siguiente resultado:

Teorema 2.20. *Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios ortonormales matriciales satisfaciendo la relación de recurrencia de tres términos (1.1). Dado $p \in \mathbb{N}$ supongamos que*

$$\lim_{N\to\infty} A_{Np+k} = \alpha_k, \qquad \lim_{N\to\infty} B_{Np+k} = \beta_k, \qquad k = 0, 1, \cdots, p-1$$

con α_k no singular para $k = 0, 1, \cdots, p-1$. Si representamos por Δ_n al conjunto de los ceros del polinomio matricial P_n y por

$$\Gamma_k = \bigcap_{J\geq 0} M_J^k, \quad \text{donde} \quad M_J^k = \overline{\bigcup_{\substack{n=Np+k \\ n\geq J}} \Delta_n},$$

entonces, para cada $k = 0, 1, \cdots, p-1$, se verifica que

$$\lim_{N\to\infty} P_{Np+k-1}(z) P_{Np+k}^{-1}(z) A_{Np+k}^{-1} = \int \frac{dW_{(p,k)}(t)}{z-t}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_k,$$

donde $W_{(p,k)}$ es la matriz de medida definida positiva con respecto a la cual los polinomios $(U_n^{(p,k)})_n$ definidos en (2.20) son ortonormales.

Además, la convergencia es uniforme en compactos de $\mathbb{C} \setminus \Gamma_k$.

2.2.2 Ejemplo. El caso infinito

Para finalizar este capítulo mostraremos un ejemplo de una partición $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ infinita que verifica la hipótesis (1) del Teorema 2.18.

Consideremos los conjuntos

$$X_k \;=\; \{n\in\mathbb{N} : \; n = 2^p - k \;\; \text{y} \;\; k \leq 2^{p-1}\}\,; \quad k\geq 1.$$

Primeramente veamos que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forma una partición infinita de $\mathbb{N}$.

1. Es obvio que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k \subset \mathbb{N}$.

2. Probemos que $\mathbb{N} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$. En efecto, dado $n\in\mathbb{N}$, si 2^p es la menor potencia de 2 mayor que n tenemos que existe un único $k\in\mathbb{N}$, $k\leq 2^{p-1}$, (pues en caso contrario 2^{p-1} sería la menor potencia de 2 mayor que n) tal que $n = 2^p - k$, luego $n\in X_k$.

3. Veamos que $X_{k_1}\bigcap X_{k_2} = \emptyset$. Si suponemos que existe un número natural n tal que $n\in X_{k_1}\bigcap X_{k_2}$ tenemos que existen p_1, $p_2\in\mathbb{N}$ tales que $n = 2^{p_1} - k_1$ y $n = 2^{p_2} - k_2$. Esto quiere decir $2^{p_1} = 2^{p_2}$ pues ambas serían la menor de las potencias de 2 mayores que n lo que implicaría que $k_1 = k_2$.

Veamos que esta partición verifica la hipótesis (1) del Teorema 2.18.

Dado $m\in\mathbb{N}$, podemos poner que $m = 2^p - q$. Es obvio que $m < 2^p$. Fijando $k\in\mathbb{N}$, si tomamos $n\in X_k$ con $n\geq 2^{p+1}$, tendremos que existe $r\in\mathbb{N}$ tal que $n = 2^r - k$. Teniendo presente estas condiciones obtenemos que $2^r > 2^r - k \geq 2^{p+1}$ de donde podemos deducir que

$$k\leq 2^r - 2^{p+1} \qquad \text{y} \qquad 2^p < 2^{r-1}\,.$$

De esta forma

$$n - m = 2^r - (k+m)\in X_{k+m}\,.$$

En efecto, si atendemos a la estructura del conjunto X_{k+m}, bastaría con probar que $k+m\leq 2^{r-1}$. Usando las desigualdades anteriores tenemos que

$$k+m\leq 2^r - 2^{p+1} + 2^p = 2^r - 2^p < 2^r - 2^{r-1} = 2^{r-1}\,.$$

Por lo tanto, se verifica la condición (1) del Teorema 2.18.

Nota 2.21. En la página 72 se incluye un anexo donde se construyen explícitamente los conjuntos $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tratados anteriormente.

Observación 2.22. La aplicación a la que se hace referencia en el Teorema 2.18 sería

$$\varphi_k(m) = i(k,m) = k+m$$

que según (2.18) define a la sucesión de polinomios matriciales $(U_n^{\varphi_k})_n$ ortonormales con respecto a W_{φ_k}.

Por lo tanto, particularizando el Teorema 2.18 a la partición infinita que acabamos de mostrar obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.23. *Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios ortonormales matriciales satisfaciendo la relación de recurrencia de tres términos (1.1). Supongamos que*

$$\lim_{N\to\infty} A_{2^N-k} = \alpha_k\,, \qquad \lim_{N\to\infty} B_{2^N-k} = \beta_k\,, \qquad k\in\mathbb{N}$$

con α_k no singular para $k\in\mathbb{N}$ siendo $(\alpha_k)_k$ y $(\beta_k)_k$ dos sucesiones acotadas. Si representamos por Δ_n al conjunto de los ceros del polinomio matricial P_n y por

$$\Gamma_k = \bigcap_{J\geq 0} M_J^k, \quad \textit{donde} \quad M_J^k = \overline{\bigcup_{\substack{n=2^N-k\\ n\geq J}} \Delta_n}\,,$$

entonces, para cada $k\in\mathbb{N}$, se verifica que

$$\lim_{N\to\infty} P_{2^N-k-1}(z)P_{2^N-k}^{-1}(z)A_{2^N-k}^{-1} = \int \frac{dW_{\varphi_k}(t)}{z-t}, \qquad z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma_k\,,$$

donde W_{φ_k} es la matriz de medidas definidas positiva con respecto a la cual los polinomios $(U_n^{\varphi_k})_n$ definidos en (2.18) son ortonormales, considerando $\varphi_k(n) = k+n$.

Además, la convergencia es uniforme en compactos de $\mathbb{C}\setminus\Gamma_k$.

Anexo I. Construcción de una partición infinita de $\mathbb{N}$

Las columnas de las tablas siguientes representan a los conjuntos

$$X_k = \{\, n \in \mathbb{N} \ :\ n = 2^p - k \quad \text{y} \quad k \leq 2^{p-1} \,\} \quad k \geq 1.$$

Para determinar a qué conjunto pertenece cada $n \in \mathbb{N}$, basta con considerar 2^p la menor potencia de 2 mayor que n. De esta forma tenemos que existe un único $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 2^{p-1}$, (pues en caso contrario 2^{p-1} sería la menor potencia de 2 mayor que n) tal que $n = 2^p - k$, y así $n \in X_k$.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
2^1	1								
2^2	3	2							
2^3	7	6	5	4					
2^4	15	14	13	12	11	10	9	8	
2^5	31	30	29	28	27	26	25	24	23
2^6	63	62	61	60	59	58	57	56	55
2^7	127	126	125	124	123	122	121	120	119
2^8	255	254	253	252	251	250	249	248	247
2^9	511	510	509	508	507	506	505	504	503
2^{10}	1023	1022	1021	1020	1019	1018	1017	1016	1015
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}
$\vdots$									
2^4									
2^5	22	21	20	19	18	17	16		
2^6	54	53	52	51	50	49	48	47	46
2^7	118	117	116	115	114	113	112	111	110
2^8	246	245	244	243	242	241	240	239	238
2^9	502	501	500	499	498	497	496	495	494
2^{10}	1014	1013	1012	1011	1010	1009	1008	1007	1006
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Vamos a ilustrar cómo verifica esta partición infinita la hipótesis (1) del Terorema 2.18. Si consideramos, por ejemplo, $m = 13$ se verifica que:

Si $n_1 \in X_1$ entonces $n_1 - m \in X_{13+1}$

Si $n_2 \in X_2$ entonces $n_2 - m \in X_{13+2}$

Si $n_3 \in X_3$ entonces $n_3 - m \in X_{13+3}$

Si $n_4 \in X_4$ entonces $n_4 - m \in X_{13+4}$

para todo $n_i \geq 32$ $(i = 1, \cdots, 4)$.

$n_1 - 13$					$n_2 - 13$			
$1 - 13$	=	-12						
$3 - 13$	=	-10			$2 - 13$	=	-11	
$7 - 13$	=	-6			$6 - 13$	=	-7	
$15 - 13$	=	2			$14 - 13$	=	1	
$31 - 13$	=	**18**	$\in X_{14}$		$30 - 13$	=	**17**	$\in X_{15}$
$63 - 13$	=	**50**	$\in X_{14}$		$62 - 13$	=	**49**	$\in X_{15}$
$127 - 13$	=	**114**	$\in X_{14}$		$126 - 13$	=	**113**	$\in X_{15}$
$255 - 13$	=	**242**	$\in X_{14}$		$254 - 13$	=	**241**	$\in X_{15}$
$511 - 13$	=	**498**	$\in X_{14}$		$510 - 13$	=	**497**	$\in X_{15}$
$1023 - 13$	=	**1010**	$\in X_{14}$		$1022 - 13$	=	**1009**	$\in X_{15}$
$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$	

$n_3 - 13$					$n_4 - 13$			
$5 - 13$	=	-8			$4 - 13$	=	-9	
$13 - 13$	=	0			$12 - 13$	=	-1	
$29 - 13$	=	**16**	$\in X_{16}$		$28 - 13$	=	15	
$61 - 13$	=	**48**	$\in X_{16}$		$60 - 13$	=	**47**	$\in X_{17}$
$125 - 13$	=	**112**	$\in X_{16}$		$124 - 13$	=	**111**	$\in X_{17}$
$253 - 13$	=	**240**	$\in X_{16}$		$252 - 13$	=	**239**	$\in X_{17}$
$509 - 13$	=	**496**	$\in X_{16}$		$508 - 13$	=	**495**	$\in X_{17}$
$1021 - 13$	=	**1008**	$\in X_{16}$		$1020 - 13$	=	**1007**	$\in X_{17}$
$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$	

Capítulo 3

Convergencia débil

En 1.995, W. Van Assche [V5] estableció resultados de convergencia débil para familias uniparamétricas de polinomios ortonormales escalares, es decir, calculó el límite cuando $n \to \infty$ de integrales de la forma

$$\int f(x)p_{n+k,n}(x)p_{n+l,n}(x)d\mu_n(x),$$

siendo $(p_{n,k})_n$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a una medida μ_k, $k \in \mathbb{N}$, y f un polinomio cualquiera, bajo ciertas condiciones sobre el comportamiento asintótico de los coeficientes que aparecen en la relación de recurrencia de los polinomios $(p_{n,k})_n$. Aunque W. Van Assche resolvió este problema usando la teoría espectral del operador de Jacobi, implícitamente estaba usando polinomios matriciales ortonormales de orden 2×2.

En este capítulo se extenderá este resultado a familias uniparamétricas de polinomios matriciales ortonormales, obteniendo el límite cuando $n \to \infty$ de integrales de la forma

$$\int F(x)P_{n+k,n}(x)dW_n(x)P^*_{n+l,n}(x), \tag{3.1}$$

donde F es un polinomio matricial cualquiera y asumiendo ciertas condiciones sobre el comportamiento asintótico de los coeficientes que aparecen en la relación de recurrencia de los polinomios $(P_{n,k})_n$. La prueba que se desarrollará, completamente diferente a la proporcionada en [V5], está basada en la relación de recurrencia de los polinomios $(P_{n,k})_n$ y nos muestra la estructura matricial del problema, incluso para el caso escalar.

Concluiremos este capítulo ilustrando con numerosos ejemplos los resultados obtenidos.

3.1 Introducción

Al igual que en la sección 2.1.2, volveremos a considerar una familia uniparamétrica de polinomios matriciales ortonormales. Para cada $k \in \mathbb{N}$, estos polinomios matriciales verifican una relación de recurrencia de la forma:

$$tP_{n,k}(t) = A_{n+1,k}P_{n+1,k}(t) + B_{n,k}P_{n,k}(t) + A^*_{n,k}P_{n-1,k}(t), \quad n \geq 0 \tag{3.2}$$

siendo las matrices $A_{n,k}$ no singulares y $B_{n,k}$ hermíticas de orden $N \times N$, con las condiciones iniciales $P_{-1,k}(t) = \theta$ y $P_{0,k}(t) = I$.

En virtud del Teorema de Favard, existe una familia de medidas dependientes de un parámetro W_k $(k \in \mathbb{N})$ de forma que los polinomios $(\, P_{n,k}(t) \,)_n$ son ortonormales con respecto a W_k.

Supondremos las siguientes condiciones sobre el comportamiento asintótico de los coeficientes de la relación de recurrencia de tres términos establecida en (3.2):

$$\lim_{n\to\infty} A_{n+j,n} = A_j, \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} B_{n+j,n} = B_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{3.3}$$

siendo las matrices A_j invertibles y B_j hermíticas, para $j \in \mathbb{Z}$.

A partir de las matrices límites obtenidas en (3.3), definimos las siguientes matrices de orden $2N \times 2N$:

$$\mathbb{A}_n = \begin{pmatrix} A^*_{-n} & \theta \\ \theta & A_n \end{pmatrix}, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\mathbb{B}_0 = \begin{pmatrix} B_{-1} & A_0 \\ A^*_0 & B_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}_n = \begin{pmatrix} B_{-n-1} & \theta \\ \theta & B_n \end{pmatrix} \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots$$

y usaremos estas matrices para introducir los siguientes polinomios matriciales ortonormales de orden $2N \times 2N$:

$$t\mathbb{T}_n(t) = \mathbb{A}_{n+1}\mathbb{T}_{n+1}(t) + \mathbb{B}_n\mathbb{T}_n(t) + \mathbb{A}_n^*\mathbb{T}_{n-1}(t), \quad n \geq 0, \tag{3.4}$$

donde $\mathbb{T}_{-1}(t) = \theta$ (matriz nula de orden $2N \times 2N$) y $\mathbb{T}_0(t) = \mathbb{I}$ (matriz identidad de orden $2N \times 2N$). Por el Teorema de Favard, estos polinomios son ortonormales con respecto a una medida matricial de orden $2N \times 2N$ que denotaremos $\mathbb{W}$.

Esta sucesión de polinomios matriciales de orden $2N \times 2N$ será la clave para establecer el valor de los límites en (3.1) y, además, se verá que prodrán expresarse como integrales respecto de $\mathbb{W}$ en las que aparecen los polinomios matriciales $(\mathbb{T}_n(t))_n$ definidos en (3.4).

3.2 Convergencia débil para polinomios matriciales ortogonales

El resultado central de este capítulo es el siguiente:

Teorema 3.1. *Sea $(P_{n,k}(t))_n$ una familia de polinomios matriciales ortonormales con respecto a W_k dependientes de un parámetro $k \in \mathbb{N}$, satisfaciendo una relación de recurrencia de tres términos como en (3.2). Si suponemos que*

$$\lim_{n\to\infty} A_{n+j,n} = A_j, \quad y \quad \lim_{n\to\infty} B_{n+j,n} = B_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{3.5}$$

siendo las matrices A_j invertibles y B_j hermíticas, para $j \in \mathbb{Z}$, entonces, para cada polinomio matricial $F(t)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int F(t)P_{n+k,n}(t)\, dW_n(t)\, P^*_{n+l,n}(t)$$
$$= \left(\int \begin{pmatrix} F(t) & \theta \\ \theta & F(t) \end{pmatrix} \mathbb{T}_{\alpha(k)}(t)\, d\mathbb{W}(t)\, \mathbb{T}^*_{\alpha(l)}(t) \right)_{|\beta(k),\beta(l)}$$

donde

$$\alpha(x) = \begin{cases} -x-1 & si \quad x < 0 \\ x & si \quad x \geq 0 \end{cases} \quad y \quad \beta(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x < 0 \\ 2 & si \quad x \geq 0. \end{cases}$$

La línea de la demostración del Terorema 3.1 se basará en la construcción una familia de polinomios matriciales auxiliares de orden $2N \times 2N$, que denotaremos por $(\mathbb{P}_{n,k}(t))_{k=0}^{n-1}$. Veremos que estos polinomios verifican:

(3.6)
$$\lim_{n\to\infty} \int \mathbb{F}(t)\mathbb{P}_{n,k}(t) \begin{pmatrix} dW_n(t) & \theta \\ \theta & dW_n(t) \end{pmatrix} \mathbb{P}^*_{n,l}(t) = 2 \int \mathbb{F}(t)\mathbb{T}_k(t)d\mathbb{W}(t)\mathbb{T}^*_l(t)$$

para cualquier polinomio matricial $\mathbb{F}(t)$ de orden $2N \times 2N$. A partir de esta expresión se verá que los límites buscados se pueden expresar como bloques matriciales de orden $N \times N$ de las integrales que aparecen en la parte izquierda de la expresión (3.6).

Demostración: Consideremos las siguientes matrices de orden $2N \times 2N$ definidas a partir de las sucesiones que aparecen en la relación de recurrencia (3.2):

$$\mathbb{A}_{n,k} = \begin{pmatrix} A^*_{n-k,n} & \theta \\ \theta & A_{n+k,n} \end{pmatrix}, \text{ para } 0 \le k \le n-1$$

$$\mathbb{B}_{n,0} = \begin{pmatrix} B_{n-1,n} & A_{n,n} \\ A^*_{n,n} & B_{n,n} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}_{n,k} = \begin{pmatrix} B_{n-k-1,n} & \theta \\ \theta & B_{n+k,n} \end{pmatrix}$$

para $1 \le k \le n-1$.

Obsérvese que de las condiciones de convergencia (3.5) para las sucesiones que aparecen en la relación de recurrencia (3.2) se obtiene que

(3.7)
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{A}_{n,k} = \mathbb{A}_k, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{B}_{n,k} = \mathbb{B}_k, \quad \text{para } k \in \mathbb{N}.$$

Procederemos en varios pasos:

Paso 1. Dado $n \in \mathbb{N}$, vamos a construir una familia de polinomios matriciales auxiliares de orden $2N \times 2N$, $(\mathbb{P}_{n,k}(t))_{k=0}^{n-1}$, y veremos que esta familia de polinomios verifica dos propiedades de notable importancia:

(a) Los polinomios $(\mathbb{P}_{n,k}(t))_{k=0}^{n-1}$ verifican:

$$t\mathbb{P}_{n,k}(t) = \mathbb{A}_{n,k+1}\mathbb{P}_{n,k+1}(t) + \mathbb{B}_{n,k}\mathbb{P}_{n,k}(t) + \mathbb{A}^*_{n,k}\mathbb{P}_{n,k-1}(t),$$

para $0 \le k \le n-2$.

(b) Los polinomios $(\mathbb{P}_{n,k}(t))_{k=0}^{n-1}$ verifican que

$$\int \mathbb{P}_{n,k}(t) \begin{pmatrix} dW_n(t) & \theta \\ \theta & dW_n(t) \end{pmatrix} \mathbb{P}_{n,l}^*(t) = 2\delta_{k,l}\mathbb{I}.$$

En efecto, consideremos los polinomios

$$\mathbb{P}_{n,k}(t) = \begin{pmatrix} P_{n-k-1,n}(t) & P_{n-k-1,n}(t) \\ P_{n+k,n}(t) & P_{n+k,n}(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{P}_{n,-1}(t) = \theta, \tag{3.8}$$

donde $(P_{n,k}(t))_n$ son los polinomios que verifican la relación de recurrencia (3.2). Procederemos, como hemos expuesto, a probar la dos propiedades indicadas:

(a) Los polinomios $\mathbb{P}_{n,k}(t)$ verifican:

$$t\mathbb{P}_{n,k}(t) = \mathbb{A}_{n,k+1}\mathbb{P}_{n,k+1}(t) + \mathbb{B}_{n,k}\mathbb{P}_{n,k}(t) + \mathbb{A}_{n,k}^*\mathbb{P}_{n,k-1}(t), \tag{3.9}$$

para $0 \leq k \leq n-2$.

En efecto, vamos a probarlo mediante computación directa. Si escribimos la relación de recurrencia (3.2) para el polinomio $P_{n-1,n}(t)$ y $P_{n,n}(t)$ respectivamente, obtenemos que

$$tP_{n-1,n}(t) = A_{n,n}P_{n,n}(t) + B_{n-1,n}P_{n-1,n}(t) + A_{n-1,n}^*P_{n-2,n}(t) \tag{3.10}$$

$$tP_{n,n}(t) = A_{n+1,n}P_{n+1,n}(t) + B_{n,n}P_{n,n}(t) + A_{n,n}^*P_{n-1,n}(t). \tag{3.11}$$

La expresión (3.10) es justamente la igualdad de los bloques (1,1) y (1,2) de la expresión

$$t\mathbb{P}_{n,0}(t) = \mathbb{A}_{n,1}\mathbb{P}_{n,1}(t) + \mathbb{B}_{n,0}\mathbb{P}_{n,0}(t)$$

y la expresión (3.11) es justamente la igualdad de los bloques (2,1) y (2,2) de la misma expresión. Por tanto, para $k = 0$ queda probado (3.9).

Si tomamos ahora $k \in \mathbb{N}$ con $0 < k < n-1$ y consideramos la relación de recurrencia (3.9) para el polinomio $P_{n-k-1,n}(t)$ y $P_{n+k}(t)$ respectivamente, obtenemos

$$tP_{n-k-1,n}(t) = A_{n-k,n}P_{n-k,n}(t) + B_{n-k-1,n}P_{n-k-1,n}(t) + A_{n-k-1,n}^*P_{n-k-2,n}(t) \tag{3.12}$$

y
(3.13)
$$tP_{n+k,n}(t) = A_{n+k+1,n}P_{n+k+1,n}(t) + B_{n+k,n}P_{n+k,n}(t) + A^*_{n+k,n}P_{n+k-1,n}(t).$$

La expresión (3.12) es justamente la igualdad entre los bloques (1,1) y (1,2) de la expresión (3.9) y la expresión (3.13) es justamente la igualdad de los bloques (2,1) y (2,2) de la misma expresión. Por tanto, (3.9) queda demostrado.

(b) Además, los polinomios $(\mathbb{P}_{n,k}(t))_{k=0}^{n-1}$ verifican que

$$\int \mathbb{P}_{n,k}(t)\begin{pmatrix} dW_n(t) & \theta \\ \theta & dW_n(t)\end{pmatrix}\mathbb{P}^*_{n,l}(t) = 2\delta_{k,l}\mathbb{I}. \tag{3.14}$$

En efecto, si desarrollamos la parte izquierda de (3.14) usando la definición de $\mathbb{P}_{n,k}(t)$ dada anteriormente en (3.8) obtenemos que

(3.15)
$$\begin{pmatrix} 2P_{n-k-1,n}(t)dW_n(t)P^*_{n-l-1,n}(t) & 2P_{n-k-1,n}(t)dW_n(t)P^*_{n+l,n}(t) \\ 2P_{n+k,n}(t)dW_n(t)P^*_{n-l-1,n}(t) & 2P_{n+k,n}(t)dW_n(t)P^*_{n+l,n}(t)\end{pmatrix}$$

Por la ortogonalidad de $P_{n,k}(t)$, los bloques (1,1) y (2,2) valen $2\delta_{k,l}I$ (donde I es la matriz identidad de orden $N \times N$) y los bloques (1,2) y (2,1) valen θ (donde θ es la matriz nula de orden $N \times N$) ya que es imposible conseguir que $k + l = -1$ puesto que $0 \leq k, l \leq n-2$. Por consiguiente (3.15) es igual a

$$\begin{pmatrix} 2\delta_{k,l}I & \theta \\ \theta & 2\delta_{k,l}I\end{pmatrix} = 2\delta_{k,l}\mathbb{I}.$$

Paso 2. Demostraremos que, dados $k, l \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\int \mathbb{F}(t)\mathbb{P}_{n,k}(t)\begin{pmatrix} dW_n(t) & \theta \\ \theta & dW_n(t)\end{pmatrix}\mathbb{P}^*_{n,l}(t) = 2\int \mathbb{F}(t)\mathbb{T}_k(t)d\mathbb{W}(t)\mathbb{T}^*_l(t)$$

siendo $\mathbb{F}(t)$ un polinomio matricial de grado $2N \times 2N$.

Si consideramos los polinomios matriciales definidos por (3.4), esto equivale a probar que dados $k,\ l \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int \mathbb{T}_m(t)\mathbb{P}_{n,k}(t) \begin{pmatrix} dW_n(t) & \theta \\ \theta & dW_n(t) \end{pmatrix} \mathbb{P}^*_{n,l}(t) = 2\int \mathbb{T}_m(t)\mathbb{T}_k(t)d\mathbb{W}(t)\mathbb{T}^*_l(t)$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, ya que $(\mathbb{T}_n(t))_n$ forman una base del espacio de los polinomios matriciales de orden $2N \times 2N$.

Usaremos inducción sobre m: Si $m = 0$, por (3.14) y (3.4) el resultado es inmediato.

Supongamos que $m = 1$. Por la relación de recurrencia que verifican los polinomios $(\mathbb{T}_n)_n$ tenemos que

$$\mathbb{T}_1(t) = \mathbb{A}_1^{-1}(t\mathbb{I} - \mathbb{B}_0) \tag{3.16}$$

y si consideremos la relación de recurrencia de tres términos (3.9) para los polinomios $(\mathbb{P}_{n,k}(t))_{k=0}^{n-1}$ entonces, la expresión

$$\int \mathbb{T}_1(t)\mathbb{P}_{n,k}(t) \begin{pmatrix} dW_n(t) & \theta \\ \theta & dW_n(t) \end{pmatrix} \mathbb{P}^*_{n,l}(t)$$

la podemos expresar como

$$\mathbb{A}_1^{-1}\Bigg[\int \Big(\mathbb{A}_{n,k+1}\mathbb{P}_{n,k+1}(t) + \mathbb{B}_{n,k}\mathbb{P}_{n,k}(t) + \mathbb{A}^*_{n,k}\mathbb{P}_{n,k-1}(t) - \mathbb{B}_0\mathbb{P}_{n,k}(t)\Big)\cdot$$
$$\cdot \begin{pmatrix} dW_n(t) & \theta \\ \theta & dW_n(t) \end{pmatrix} \mathbb{P}^*_{n,l}(t)\Bigg]$$

Haciendo uso de (3.14) obtenemos que es igual a

$$2\mathbb{A}_1^{-1}\Big(\mathbb{A}_{n,k+1}\delta_{k+1,l} + \mathbb{B}_{n,k}\delta_{k,l} + \mathbb{A}^*_{n,k}\delta_{k-1,l} - \mathbb{B}_0\delta_{k,l}\Big)\mathbb{I}$$

y tomando límite cuando $n \to \infty$ obtenemos que esta expresión tiende a

$$2\mathbb{A}_1^{-1}\Big(\mathbb{A}_{k+1}\delta_{k+1,l} + \mathbb{B}_k\delta_{k,l} + \mathbb{A}^*_k\delta_{k-1,l} - \mathbb{B}_0\delta_{k,l}\Big)\mathbb{I}. \tag{3.17}$$

Por consiguiente, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int \mathbb{T}_1(t)\mathbb{P}_{n,k}(t) \begin{pmatrix} dW_n(t) & \theta \\ \theta & dW_n(t) \end{pmatrix} \mathbb{P}^*_{n,l}(t) =$$

$$2\mathbb{A}_1^{-1}\Big(\mathbb{A}_{k+1}\delta_{k+1,l}+\mathbb{B}_k\delta_{k,l}+\mathbb{A}_k^*\delta_{k-1,l}-\mathbb{B}_0\delta_{k,l}\Big)\mathbb{I}.$$

De otro lado, operando de forma similar a la utilizada anteriormente, si usamos la relación de recurrencia de tres términos de $(\mathbb{T}_n)_n$ podemos poner

$$2\int \mathbb{T}_1(t)\mathbb{T}_k(t)d\mathbb{W}(t)\mathbb{T}_l^*(t)$$

como

$$2\mathbb{A}_1^{-1}\int\Big(\mathbb{A}_{k+1}\mathbb{T}_{k+1}(t)+\mathbb{B}_k\mathbb{T}_k(t)+A_k^*\mathbb{T}_{k-1}(t)-\mathbb{B}_0\mathbb{T}_k(t)\Big)d\mathbb{W}(t)\mathbb{T}_l^*(t)$$

y puesto que la sucesión $(\mathbb{T}_n)_n$ es ortonormal con respecto a $\mathbb{W}$, tenemos que la expresión anterior es igual a

$$2\mathbb{A}_1^{-1}\Big(\mathbb{A}_{k+1}\delta_{k+1,l}+\mathbb{B}_k\delta_{k,l}+\mathbb{A}_k^*\delta_{k-1,l}-\mathbb{B}_0\delta_{k,l}\Big)\mathbb{I}$$

que es justamente lo que obtuvimos en (3.17). Por tanto el caso en el que $m=1$ queda probado.

Supongamos que el resultado es cierto para m. Si tomamos n lo suficientemente grande para que verifique $k+m<n$, entonces si usamos tanto la relación de recurrencia de $(\mathbb{T}_n(t))_n$ como la de los polinomios $(P_{n,k}(t))_k$, podemos obtener que

$$\mathbb{T}_h(t)\mathbb{P}_{n,k}(t)=\sum_{j=0}^{k+h}\Delta_{j,h,k,n}\mathbb{P}_{n,j}(t) \tag{3.18}$$

$$\mathbb{T}_h(t)\mathbb{T}_k(t)=\sum_{j=0}^{k+h}\Delta_{j,h,k}\mathbb{T}_j(t) \tag{3.19}$$

y usando (3.18) obtenemos que

$$\int \mathbb{T}_h(t)\mathbb{P}_{n,k}(t)\begin{pmatrix} dW_n(t) & \theta \\ \theta & dW_n(t)\end{pmatrix}\mathbb{P}_{n,l}^*(t)=$$

$$\sum_{j=0}^{k+h}\Delta_{j,h,k,n}\int \mathbb{P}_{n,j}(t)\begin{pmatrix} dW_n(t) & \theta \\ \theta & dW_n(t)\end{pmatrix}\mathbb{P}_{n,l}^*(t)=2\Delta_{l,h,k,n}\ ,$$

y de forma similar, usando (3.19), llegamos a

$$\int \mathbb{T}_h(t)\mathbb{T}_k(t)d\,\mathbb{W}(t)\mathbb{T}_l^*(t) = \Delta_{l,h,k}\,.$$

Nuestras hipótesis de inducción nos conducen a

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_{l,h,k,n} = 2\Delta_{l,h,k}$$

para $h = 0, \cdots, m, \quad l, k \in \mathbb{N}$. Concluiremos este paso cuando demostremos el caso $m+1$. Para ello debemos probar que

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_{l,m+1,k,n} = 2\Delta_{l,m+1,k} \tag{3.20}$$

para $k, l \in \mathbb{N}$.

Teniendo presente la relación de recurrencia para los polinomios matriciales $(\mathbb{T}_n)_n$, tenemos:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{T}_{m+1}(t)\mathbb{P}_{n,k}(t) = \\
&\quad= \mathbb{A}_{m+1}^{-1}\Big[t\mathbb{T}_m(t) - \mathbb{B}_m\mathbb{T}_m(t) - \mathbb{A}_m^*\mathbb{T}_{m-1}(t)\Big]\mathbb{P}_{n,k}(t) \\
&\quad= \mathbb{A}_{m+1}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{m+k}\Delta_{i,m,k,n}t\mathbb{P}_{n,i}(t) - \sum_{i=0}^{m+k}\mathbb{B}_m\Delta_{i,m,k,n}\mathbb{P}_{n,i}(t)\right. \\
&\qquad\left. - \sum_{i=0}^{m+k-1}\mathbb{A}_m^*\Delta_{i,m-1,k,n}\mathbb{P}_{n,i}(t)\right] \\
&\quad= \mathbb{A}_{m+1}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{m+k}\Delta_{i,m,k,n}\big(\mathbb{A}_{n,i+1}\mathbb{P}_{n,i+1}(t) + \mathbb{B}_{n,i}\mathbb{P}_{n,i}(t) + \mathbb{A}_{n,i}^*\mathbb{P}_{n,i-1}(t)\big)\right. \\
&\qquad\left. - \sum_{i=0}^{m+k}\mathbb{B}_m\Delta_{i,m,k,n}\mathbb{P}_{n,i}(t) - \sum_{i=0}^{m+k-1}\mathbb{A}_m^*\Delta_{i,m-1,k,n}\mathbb{P}_{n,i}(t)\right]
\end{aligned}$$

Por (3.18) tenemos

$$\begin{aligned}
\Delta_{i,m+1,k,n} &= \mathbb{A}_{m+1}^{-1}\big[\Delta_{i-1,m,k,n}\mathbb{A}_{n,i-1} + \Delta_{i,m,k,n}\mathbb{B}_{n,i} + \Delta_{i+1,m,k,n}\mathbb{A}_{n,i+1}^* \\
&\qquad -\mathbb{B}_m\Delta_{i,m,k,n} - \mathbb{A}_m^*\Delta_{i,m-1,k,n}\big]\,.
\end{aligned}$$

De forma análoga, por (3.19) obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta_{i,m+1,k} &= \mathbb{A}_{m+1}^{-1}\left[\Delta_{i-1,m,k}\mathbb{A}_{i-1} + \Delta_{i,m,k}\mathbb{B}_i + \Delta_{i+1,m,k}\mathbb{A}_{i+1}^*\right.\\ &\quad \left.-\mathbb{B}_m\Delta_{i,m,k} - \mathbb{A}_m^*\Delta_{i,m-1,k}\right].\end{aligned}$$

Por nuestras hipótesis de inducción y (3.5) queda probado (3.20), ya que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\Delta_{i,m+1,k,n} &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{A}_{m+1}^{-1}\Big[\Delta_{i-1,m,k,n}\mathbb{A}_{n,i-1} + \Delta_{i,m,k,n}\mathbb{B}_{n,i}\\ &\quad +\Delta_{i+1,m,k,n}\mathbb{A}_{n,i+1}^* - \mathbb{B}_m\Delta_{i,m,k,n} - \mathbb{A}_m^*\Delta_{i,m-1,k,n}\Big]\\ &= \mathbb{A}_{m+1}^{-1}\Big[2\Delta_{i-1,k,n}\mathbb{A}_{i-1} + 2\Delta_{i,m,k}\mathbb{B}_i\\ &\quad +2\Delta_{i+1,m,k}\mathbb{A}_{i+1}^* - 2\mathbb{B}_m\Delta_{i,m,k} - 2\mathbb{A}_m^*\Delta_{i,m-1,k}\Big]\\ &= 2\Delta_{i,m+1,k}\,.\end{aligned}$$

Paso 3. Dados $k, l \in \mathbb{Z}$, vamos a obtener una expresión más apropiada para

$$\int F(t)P_{n+k,n}(t)dW_n(t)P_{n+l,n}^*(t) \tag{3.21}$$

de forma que nos permita poder aplicar el Paso 2.

Sea i (respectivamente j) un entero cuyo valor es 0 si el signo de k (respectivamente el signo de l) es positivo o 1 en caso contrario. Si consideramos la integral matricial

$$\frac{1}{2}\int\begin{pmatrix}F(t) & \theta\\ \theta & F(t)\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}P_{n-|k|+(i-1),n}(t) & P_{n-|k|+(i-1),n}(t)\\ P_{n+|k|-i,n}(t) & P_{n+|k|-i,n}(t)\end{pmatrix}}_{\mathbb{P}_{n,|k|-i}(t)}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}dW_n(t) & \theta\\ \theta & dW_n(t)\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}P_{n-|l|+(j-1),n}^*(t) & P_{n+|l|-j,n}^*(t)\\ P_{n-|l|+(j-1),n}^*(t) & P_{n+|l|-j,n}^*(t)\end{pmatrix}}_{\mathbb{P}_{n,|l|-j}^*(t)},$$

podemos observar que, dependiendo del signo de k y l, la expresión (3.21) la podemos poner como uno de los bloques matriciales de dicha integral.

En efecto, se nos presentan cuatro casos:

- Si k y l son ambos no negativos en (3.21), obtenemos el bloque (2,2) para $i = j = 0$.

- Si k y l son ambos negativos en (3.21), obtenemos el bloque (1,1) para $i = j = 1$.

- Si k es no negativo y l es negativo en (3.21), obtenemos el bloque (2,1) para $i = 0$ y $j = 1$.

- Si k es negativo y l es no negativo en (3.21), obtenemos el bloque (1,2) para $i = 1$ y $j = 0$.

PASO 4. Vamos a concluir el resultado. De los cuatro posibles casos que se nos presentan vamos a considerar, por ejemplo, aquel en el que k es no negativo y l es negativo. Los otros se resuelven de forma análoga.

Por el Paso 3, y atendiendo a la expresión (3.8), puesto que k es no negativo ($i = 0$) y l es negativo ($j = 1$), tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int F(t) P_{n+k,n}(t) dW_n(t) P^*_{n+l,n}(t) =$$

$$\left[\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \int \begin{pmatrix} F(t) & \theta \\ \theta & F(t) \end{pmatrix} \mathbb{P}_{n,|k|-i}(t) \begin{pmatrix} dW_n(t) & \theta \\ \theta & dW_n(t) \end{pmatrix} \mathbb{P}^*_{n,|l|-j}(t) \right]_{|(2,1)} =$$

$$\left[\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \int \begin{pmatrix} F(t) & \theta \\ \theta & F(t) \end{pmatrix} \mathbb{P}_{n,k}(t) \begin{pmatrix} dW_n(t) & \theta \\ \theta & dW_n(t) \end{pmatrix} \mathbb{P}^*_{n,-l-1}(t) \right]_{|(2,1)}$$

Si usamos el Paso 2, este límite es igual a

$$\left[\int \begin{pmatrix} F(t) & \theta \\ \theta & F(t) \end{pmatrix} \mathbb{T}_k(t) d\mathbb{W}(t) \mathbb{T}^*_{-l-1}(t) \right]_{|(2,1)}$$

con lo que se concluye la prueba de este resultado. □

La siguiente sección la vamos a dedicar a mostrar varios ejemplos donde aplicaremos el teorema de convergencia débil demostrado anteriormente. Antes de empezar con ellos vamos a dar una expresión más apropiada de la sucesión de polinomios ortonormales auxiliares $(\mathbb{T}_n)_n$ y de la matriz con respecto a la cual son ortonormales $\mathbb{W}$.

Denotemos por $(\mathbb{D}_n)_n$ a la sucesión de polinomios matriciales ortonormales de orden $2N \times 2N$ definida por la relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} t\mathbb{D}_n(t) &= \mathbb{A}_{n+1}\mathbb{D}_{n+1}(t) + \mathbb{B}_n\mathbb{D}_n(t) + \mathbb{A}_n^*\mathbb{D}_{n-1}(t), \quad n \geq 1, \\ t\mathbb{D}_0(t) &= \mathbb{A}_1\mathbb{D}_1(t) + \tilde{\mathbb{B}}_0\mathbb{D}_0(t) \end{aligned} \tag{3.22}$$

donde $\mathbb{D}_{-1}(t) = \theta$ (matriz nula de orden $2N \times 2N$), $\mathbb{D}_0(t) = \mathbb{I}$ (la matriz identidad de orden $2N \times 2N$) y

$$\tilde{\mathbb{B}}_0 = \begin{pmatrix} B_{-1} & \theta \\ \theta & B_0 \end{pmatrix},$$

y denotaremos por $\mathbb{D}$ la matriz de medidas respecto a la cual la sucesión $(\mathbb{D}_n)_n$ es ortonormal.

Podemos observar que $\mathbb{D}_n$, $n \in \mathbb{N}$, es un polinomio matricial diagonal por bloques, y que sus coeficientes de recurrencia coinciden, para $n \geq 1$, con los coeficientes de recurrencia de $(\mathbb{T}_n)_n$ (basta comparar las relaciones (3.22) y (3.4)). Por consiguiente, $(\mathbb{T}_n)_n$ y $(\mathbb{D}_n)_n$ tienen asociados la misma sucesión de polinomios matriciales de segunda clase que denotaremos por $(\mathbb{Q}_n)_n$. $\mathbb{Q}_n$ es, por tanto, un polinomio matricial de grado $n-1$, y satisface la relación de recurrencia

$$t\mathbb{Q}_n(t) = \mathbb{A}_{n+1}\mathbb{Q}_{n+1}(t) + \mathbb{B}_n\mathbb{Q}_n(t) + \mathbb{A}_n^*\mathbb{Q}_{n-1}(t), \quad n \geq 1, \tag{3.23}$$

con las condiciones iniciales $\mathbb{Q}_0 = \theta$, $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{I}$, así pues:

$$\mathbb{Q}_n(t) = \int \frac{\mathbb{D}_n(t) - \mathbb{D}_n(x)}{t-x} d\mathbb{D}(x)\mathbb{A}_1 = \int \frac{\mathbb{T}_n(t) - \mathbb{T}_n(x)}{t-x} d\mathbb{W}(x)\mathbb{A}_1, \quad n \geq 0.$$

Las expresiones buscadas para $(\mathbb{T}_n)_n$ y $\mathbb{W}$ las vamos a mostrar en los dos siguientes lemas:

Lema 3.2. *Con la notación establecida anteriormente se tiene que*

$$\mathbb{T}_n(t) = \mathbb{D}_n(t) + \mathbb{Q}_n(t)\mathbb{E}, \quad n \geq 0,$$

donde

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \theta & -(A_1^*)^{-1}A_0 \\ -A_{-1}^{-1}A_0^* & \theta \end{pmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓN: La prueba es bien simple, pues la sucesión $(\mathbb{D}_n(t)+\mathbb{Q}_n(t)\mathbb{E})_n$ satisface la relación de recurrencia (3.4), que define a la sucesión de polinomios matriciales $(\mathbb{T}_n)_n$, con las mismas condiciones iniciales.

□

Este Lema en conjunción con el Teorema 1.30 (versión matricial del Teorema de Markov para una medida determinada) nos conducirán a la siguiente fórmula que relaciona la transformada de Hilbert de $\mathbb{W}$ y la de $\mathbb{D}$:

Lema 3.3. *Con la notación establecida anteriormente se tiene que*

$$\int \frac{d\mathbb{W}(t)}{z-t} = \left(\left(\int \frac{d\mathbb{D}(t)}{z-t}\right)^{-1} + \mathbb{A}_1\mathbb{E}\right)^{-1}.$$

DEMOSTRACIÓN: Si aplicamos el Teorema 1.30 (Teorema de Markov para polinomios ortogonales matriciales) obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\mathbb{T}_n^{-1}(z)\mathbb{Q}_n(z)\right)^{-1} = \left(\int \frac{d\mathbb{W}(t)}{z-t}\mathbb{A}_1\right)^{-1},$$

donde la matriz $\mathbb{A}_1$ que aparece en la expresión anterior es necesaria para normalizar $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{I}$.

Por otra parte se tiene que $\left(\mathbb{T}_n^{-1}(z)\mathbb{Q}_n(z)\right)^{-1} = \mathbb{Q}_n^{-1}(z)\mathbb{T}_n(z)$. Si hacemos uso del Lema 3.2 llegamos a que

$$\left(\mathbb{T}_n^{-1}(z)\mathbb{Q}_n(z)\right)^{-1} = \mathbb{Q}_n^{-1}(z)\mathbb{D}_n(z) + \mathbb{E} = \left(\mathbb{D}_n^{-1}(z)\mathbb{Q}_n(z)\right)^{-1} + \mathbb{E},$$

y puesto que la sucesión $(\mathbb{Q}_n)_n$ es también la sucesión de polinomios de segunda clase asociados a $(\mathbb{D}_n)_n$, podemos aplicar el Teorema de Markov de nuevo, obteniendo

$$\left(\int \frac{d\mathbb{W}(t)}{z-t}\mathbb{A}_1\right)^{-1} = \left(\int \frac{d\mathbb{D}(t)}{z-t}\mathbb{A}_1\right)^{-1} + \mathbb{E},$$

de donde se deduce el resultado.

□

3.3 Ejemplos

Esta sección está dedicada a mostrar varios ejemplos en los que aplicaremos el Teorema de convergencia débil (Teorema 3.1).

En los ejemplos que vamos a detallar consideraremos que los límites A_k y B_k de (3.5) son constantes, es decir, $A_k = A$, $B_k = B$ para $k \in \mathbb{Z}$. Este caso se nos presenta, por ejemplo, si tomamos todas las medidas matriciales $W_k = W$, $k \in \mathbb{Z}$, y W perteneciente a la clase de Nevai (ver Definición 1.26). También se nos presenta en el caso que consideremos los polinomios $(P_n^{[k]})_n$, $k \geq 1$, asociados de orden k a una sucesión de polinomios pertenecientes a la clase de Nevai (ver Definición 1.14).

Tal y como veremos a continuación, el comportamiento asintótico débil de sucesiones de polinomios $(P_{n,k})_n$ teniendo límites constantes A y B en las sucesiones que definen sus coeficientes de recurrencia, viene dado en términos de las medidas matriciales con respecto a las cuales los polinomios matriciales de Chebyshev de primera y segunda clase son ortonormales (véase Sección 1.4).

Para obtener las expresiones de los polinomios auxiliares $\mathbb{T}_n$ que aparecen en el Teorema 3.1 y de $\mathbb{W}$ (la matriz de medidas con respecto a la cual son ortogonales), haremos uso del Lema 1.33. Esto nos permitirá establecer el resultado central de esta sección que nos servirá como base para mostrar diferentes ejemplos.

Teorema 3.4. *Si suponemos que A_k y B_k, $k \in \mathbb{Z}$, en (3.5) son constantes, es decir, $A_k = A$, $B_k = B$, $k \in \mathbb{Z}$, con A definida positiva y B hermítica, entonces los polinomios matriciales $(\mathbb{T}_n)_n$ y la matriz de medidas $\mathbb{W}$ con respecto a la cual son ortonormales vienen dados por*

$$\mathbb{T}_n(t) = \begin{pmatrix} U_n^{A,B}(t) & -U_{n-1}^{A,B}(t) \\ -U_{n-1}^{A,B}(t) & U_n^{A,B}(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{W}(t) = \begin{pmatrix} X_{A,B}(t) & R_{A,B}(t) \\ R_{A,B}(t) & X_{A,B}(t) \end{pmatrix}.$$

siendo $R_{A,B}$ la medida matricial definida de la siguiente forma: Si conside-

ramos la diagonalización para $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{A^{-1/2}\Big(B - xI\Big)A^{-1/2}}{2} = U(x)D(x)U^*(x)$$

siendo D una matriz diagonal con entradas $d_{i,i}(x)$ reales para $i = 1, \cdots, N$ y $U(x)$ una matriz unitaria, entonces

$$dR_{A,B}(x) = \frac{1}{\pi}A^{-1/2}U(x)R(x)U^*(x)A^{-1/2}dx, \tag{3.24}$$

siendo $R(x)$ la matriz diagonal con entradas

$$r_{i,i}(x) = \begin{cases} \dfrac{d_{i,i}(x)}{\sqrt{1 - d^2_{i,i}(x)}} & si \;\; d_{i,i}(x) \in (-1,1), \\ 0 & si \;\; d_{i,i}(x) \notin (-1,1). \end{cases}$$

Nota 3.5. Si en las hipótesis del Teorema anteior suponemos que A es sólamente una matriz hermítica y no singular entonces sólo podemos concluir que $\mathbb{W}_{1,1} = \mathbb{W}_{2,2} = X_{A,B}$.

Demostración: Supongamos sólamente que A es no singular y hermítica. Por nuestras hipótesis tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_n &= \begin{pmatrix} A & \theta \\ \theta & A \end{pmatrix}, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \cdots \\ \mathbb{B}_0 &= \begin{pmatrix} B & A \\ A & B \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}_n = \begin{pmatrix} B & \theta \\ \theta & B \end{pmatrix} \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \cdots, \end{aligned}$$

que, en virtud de (3.22), (3.23) y el Lema 3.2, nos dan para $(\mathbb{D}_n)_n$, $(\mathbb{Q}_n)_n$, $\mathbb{W}$ y $\mathbb{E}$ las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_n(t) &= \begin{pmatrix} U_n^{A,B}(t) & \theta \\ \theta & U_n^{A,B}(t) \end{pmatrix}, & \mathbb{Q}_n(t) &= \begin{pmatrix} U_{n-1}^{A,B}(t) & \theta \\ \theta & U_{n-1}^{A,B}(t) \end{pmatrix}, \\ \mathbb{D} &= \begin{pmatrix} W_{A,B} & \theta \\ \theta & W_{A,B} \end{pmatrix}, & \mathbb{E} &= \begin{pmatrix} \theta & -I \\ -I & \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aplicando el Lema 3.2 obtenemos que

$$\mathbb{T}_n(t) = \begin{pmatrix} U_n^{A,B}(t) & -U_{n-1}^{A,B}(t) \\ -U_{n-1}^{A,B}(t) & U_n^{A,B}(t) \end{pmatrix},$$

y el Lema 3.3 nos lleva a la siguiente expresión de la transformada de Hilbert de $\mathbb{W}$:

$$\int \frac{d\mathbb{W}(t)}{z-t} = \begin{pmatrix} F_{A,B}^{-1}(z) & -A \\ -A & F_{A,B}^{-1}(z) \end{pmatrix}^{-1},$$

donde $F_{A,B}(z) = \displaystyle\int \frac{dW_{A,B}(t)}{z-t}$.

De otro lado sabemos que si una matriz M cuadrada está descompuesta en bloques matriciales cuadrados, de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

podemos calcular su inversa usando la fórmula (cf. [HJ1, p. 18]):

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1} & A_{11}^{-1}A_{12}\left(A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} - A_{22}\right)^{-1} \\ \left(A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} - A_{22}\right)^{-1} A_{21}A_{11}^{-1} & \left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

Así pues, calculando esa matriz inversa por bloques, obtenemos para $\displaystyle\int \frac{d\mathbb{W}(t)}{z-t}$ la expresión:

$$\begin{pmatrix} \left(F_{A,B}^{-1}(z) - AF_{A,B}(z)A\right)^{-1} & -F_{A,B}(z)A\left(AF_{A,B}(z)A - F_{A,B}^{-1}(z)\right)^{-1} \\ -\left(AF_{A,B}(z)A - F_{A,B}^{-1}(z)\right)^{-1} AF_{A,B}(z) & \left(F_{A,B}^{-1}(z) - AF_{A,B}(z)A\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

Para simplificar esta expresión usaremos el Lema 1.33. En efecto, de (1.17) y (1.18), obtenemos que

$$\left(\int \frac{d\mathbb{W}(t)}{z-t}\right)_{1,1} = \left(\int \frac{d\mathbb{W}(t)}{z-t}\right)_{2,2} = \left(F_{A,B}^{-1}(z) - AF_{A,B}(z)A\right)^{-1} = T_{A,B}(z),$$

de donde deducimos que

$$\mathbb{W}_{1,1} = \mathbb{W}_{2,2} = X_{A,B}.$$

Los cálculos de $\mathbb{W}_{1,2}$ y $\mathbb{W}_{2,1}$ son más complejos y necesitaremos suponer además que la matriz A sea definida positiva. Usando de nuevo (1.17) y (1.18) llegamos a que

$$\begin{aligned} \left(\int \frac{d\mathbb{W}(t)}{z-t}\right)_{1,2} &= -F_{A,B}(z)A\left(AF_{A,B}(z)A - F_{A,B}^{-1}(z)\right)^{-1} \\ &= F_{A,B}(z)AT_{A,B}(z), \end{aligned} \tag{3.25}$$

y análogamente

$$\left(\int \frac{d\mathbb{W}(t)}{z-t}\right)_{2,1} = T_{A,B}(z)AF_{A,B}(z).$$

Puesto que A es definida positiva, de las expresiones (1.7) y (1.11) obtenemos que

$$\begin{aligned} F_{A,B}(z) &= A^{-1/2}U(z)\big(D(z)-(D^2(z)-I)^{1/2}\big)U(z)^*A^{-1/2}, \\ T_{A,B}(z) &= A^{-1/2}U(z)\big(D^2(z)-I\big)^{-1/2}U(z)^*A^{-1/2}. \end{aligned}$$

Haciendo uso de (3.25), llegamos a que

$$\begin{aligned} \left(\int \frac{d\mathbb{W}(t)}{z-t}\right)_{1,2} &= F_{A,B}(z)AT_{A,B}(z) \\ &= A^{-1/2}U(z)\Big[D(z)\big(D^2(z)-I\big)^{-1/2}-I\Big]U(z)^*A^{-1/2}. \end{aligned}$$

La fórmula de inversión para las transformadas de Hilbert establece que, para $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{W}(t)_{1,2} = -\frac{1}{2\pi i}\lim_{y\to 0}\left(F_{A,B}(x+iy)AT_{A,B}(x+iy)-F_{A,B}(x-iy)AT_{A,B}(x-iy)\right).$$

Si calculamos este límite de forma análoga a la usada en la prueba del Teorema 3.1 en [**D6**], obtenemos que

$$\mathbb{W}_{1,2} = R_{A,B},$$

donde la matriz de medidas $R_{A,B}$ está definida en (3.24).

□

Vamos a aplicar el Teorema 3.4 para mostrar los diferentes ejemplos que estamos buscando.

Ejemplo 3.6. La clase matricial de Nevai $M(A,B)$.

Recordemos que una sucesión de polinomios matriciales ortonormales $(P_n)_n$, que satisface la relación de recurrencia

$$tP_n(t) = A_{n+1}P_{n+1}(t) + B_nP_n(t) + A_n^*P_{n-1}(t), \quad n \geq 0,$$

pertenece a la clase matricial de Nevai $M(A,B)$ si $\lim_n A_n = A$ y $\lim_n B_n = B$. Si denotamos por W a la medida matricial con respecto a la cual los polinomios $(P_n)_n$ son ortonormales, entonces, tomando $W_k = W$, $k \in \mathbb{N}$, podemos aplicar el Teorema 3.4 y así hallar el comportamiento asintótico débil para $(P_n)_n$.

Corolario 3.7. *Si la sucesión de polinomios matriciales $(P_n)_n$ pertenece a la clase matricial de Nevai $M(A, B)$, con A no singular y hermítica y B hermítica, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int F(x)P_n(x)dW(x)P_n^*(x) = \int F(x)dX_{A,B}(x),$$

para cualquier polinomio matricial F, donde $X_{A,B}$ es la medida matricial de los polinomios matriciales de Chebyshev de primera clase (1.5). Si además, A es definida positiva entonces, dado un entero $k \geq 1$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int F(x)P_{n+k}(x)dW(x)P_n^*(x) = \int F(x)T_k^{A,B}(x)dX_{A,B}(x),$$

para cualquier polinomio matricial F, donde $T_k^{A,B}$ es el k-ésimo polinomio de Chebyshev de primera clase (ver (1.4)).

DEMOSTRACIÓN: Por el Teorema 3.4 tenemos que

$$\mathbb{W}(t) = \begin{pmatrix} X_{A,B}(t) & R_{A,B}(t) \\ R_{A,B}(t) & X_{A,B}(t) \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbb{T}_n(t) = \begin{pmatrix} U_n^{A,B}(t) & -U_{n-1}^{A,B}(t) \\ -U_{n-1}^{A,B}(t) & U_n^{A,B}(t) \end{pmatrix}.$$

Puesto que $\mathbb{T}_0 = \mathbb{I}$, el Teorema 3.1 para $k = l = 0$ nos lleva a que

$$\lim_{n\to\infty} \int F(x)P_n(x)dW(x)P_n^*(x) = \int F(x)dX_{A,B}(x),$$

con lo queda probada la primera parte.

Para probar la segunda parte, volvemos a aplicar el Teorema 3.1, obteniendo que

$$\lim_{n\to\infty} \int F(x)P_{n+k}(x)dW(x)P_n^*(x) = \int F(x)\Big(-U_{k-1}^{A,B}(x)dR_{A,B}(x) + U_k^{A,B}(x)dX_{A,B}(x)\Big). \tag{3.26}$$

Puesto que A es definida positiva, atendiendo a las expresiones (1.6) y (1.10) podemos poner que

$$\begin{aligned} U_k^{A,B}(x) &= A^{-\frac{1}{2}}u_k\left(\frac{A^{-1/2}(B-xI)A^{-1/2}}{2}\right)A^{\frac{1}{2}}, \\ T_k^{A,B}(x) &= A^{-\frac{1}{2}}t_k\left(\frac{A^{-1/2}(B-xI)A^{-1/2}}{2}\right)A^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

donde $(u_n)_n$ y $(t_n)_n$ son las sucesiones de polinomios escalares de Chebyshev de segunda y primera clase respectivamente para $a = 1/2$ y $b = 0$. Para $x \in \mathbb{R}$ consideremos la diagonalización de la matriz

$$\left(\frac{A^{-1/2}(B - xI)A^{-1/2}}{2}\right) = U(x)D(x)U^*(x)$$

siendo $D(x)$ una matriz diagonal con entradas $d_{i,i}(x)$ reales para $i = 1, \ldots, N$ y $U(x)$ una matriz unitaria, entonces:

(3.27)

$$\begin{aligned} U_k^{A,B}(x) &= A^{-\frac{1}{2}}U(x)\begin{pmatrix} u_k(d_{1,1}(x)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & u_k(d_{N,N}(x)) \end{pmatrix} U^*(x)A^{\frac{1}{2}}, \\ T_k^{A,B}(x) &= A^{-\frac{1}{2}}U(x)\begin{pmatrix} t_k(d_{1,1}(x)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & t_k(d_{N,N}(x)) \end{pmatrix} U^*(x)A^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Teniendo presente la definición de $X_{A,B}$ y $R_{A,B}$ dadas en (1.4) y (3.24) respectivamente, obtenemos que

(3.28)

$$-U_{k-1}^{A,B}(x)dR_{A,B}(x) + U_k^{A,B}(x)dX_{A,B}(x) = \frac{1}{\pi}A^{-\frac{1}{2}}U(x)H(x)U^*(x)A^{-\frac{1}{2}},$$

donde $H(x)$ es la matriz diagonal cuyas entradas son

$$h_{i,i}(x) = \frac{-u_{k-1}\Big(d_{i,i}(x)\Big)d_{i,i}(x) + u_k\Big(d_{i,i}(x)\Big)}{\sqrt{1 - d_{i,i}^2(x)}}dx.$$

Haciendo uso de la conocida fórmula para polinomios escalares

$$-u_{k-1}(t)t + u_k(t) = t_k(t),$$

tenemos que

$$h_{i,i}(x) = \frac{t_k\Big(d_{i,i}(x)\Big)}{\sqrt{1 - d_{i,i}^2(x)}}dx,$$

y por tanto, por (3.27) y (3.28), llegamos finalmente a que:

$$-U_{k-1}^{A,B}(x)dR_{A,B}(x) + U_k^{A,B}(x)dX_{A,B}(x) = T_k^{A,B}(x)dX_{A,B}(x).$$

Usando esta expresión junto con (3.26) podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty}\int F(x)P_{n+k}(x)dW(x)P_n^*(x)=\int F(x)T_k^{A,B}(x)dX_{A,B}(x).$$

□

Nota 3.8. El Corolario 3.7 anterior para $k=0$ es, en esencia, la expresión (2.9) que podemos encontrar en [DLS, p. 46], pero para $k\geq 1$ se obtienen resultados nuevos que se corresponden con los obtenidos en [N, p. 45] para polinomios ortonormales escalares.

Ejemplo 3.9. Los polinomios asociados de orden k, $(P_n^{[k]})_n$ $k\geq 1$, a una sucesión de polinomios de la clase matricial de Nevai

Los polinomios asociados de orden k a una sucesión de polinomios matriciales ortonormales $(P_n)_n$ se definen de la siguiente forma

$$P_n^{[k]}(x)=\int\frac{P_{n+k}(x)-P_{n+k}(t)}{x-t}dW(t)P_{k-1}^*(t),\quad n\geq 0. \tag{3.29}$$

Estos polinomios son ortogonales con respecto a una matriz de medidas W_k y satisfacen la relación de recurrencia:

$$tP_n^{[k]}(t)=A_{n+k+1}P_{n+1}^{[k]}(t)+B_{n+k}P_n^{[k]}(t)+A_{n+k}^*P_{n-1}^{[k]}(t),\quad n\geq 0 \tag{3.30}$$

con condiciones iniciales $P_{-1}^{[k]}(t)=\theta$ y $P_0^{[k]}(0)=A_k^{-1}$.

Considerando que la sucesión de polinomios $(P_n)_n$ pertenezca a la clase matricial de Nevai $M(A,B)$, entonces vuelven a aparecer límites constantes para las sucesiones de recurrencia de estos polinomios asociados $P_{n,k}(x)=P_n^{[k]}(x)$, siendo $(P_n^{[k]})_n$, $k\geq 1$, la sucesión de polinomios asociados a $(P_n)_n$ de orden k.

Si procedemos de forma análoga a como lo hicimos en el ejemplo anterior obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.10. *Si $(P_n^{[k]})_n$, $k\geq 1$, es la sucesión de polinomios asociados de orden k a la sucesión de polinomios $(P_n)_n$ que pertenecen a la clase matricial de Nevai $M(A,B)$, con A no singular y hermítica y B hermítica, entonces*

$$\lim_{n\to\infty}\int F(x)P_n^{[n]}(x)dW_n(x)\left(P_n^{[n]}\right)^*(x)=\int F(x)dX_{A,B}(x),$$

para cualquier polinomio matricial F, donde $X_{A,B}$ es la matriz de medidas con respecto a la cual son ortonormales los polinomios matriciales de Chebyshev de primera clase definidos en (1.5). Si además, A es definida positiva entonces, dado un entero $k \geq 1$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int F(x) P_{n+k}^{[n]}(x) dW_n(x) \left(P_n^{[n]}\right)^* (x) = \int F(x) T_k^{A,B}(x) dX_{A,B}(x),$$

para cualquier polinomio matricial F, donde $T_k^{A,B}$ es el polinomio k-ésimo de la sucesión de los polinomios de Chebyshev de primera clase definidos en (1.4).

Ejemplo 3.11. Polinomios matriciales ortogonales con coeficientes de recurrencia no acotados

Consideremos una sucesión de polinomios matriciales ortogonales $(P_n)_n$ tal que las sucesiones de los coeficientes que aparecen en la relación de recurrencia de tres términos (1.1) divergen de una forma muy particular: Supondremos que existe una sucesión $(C_n)_n$ de matrices definidas positivas tales que:

$$\lim_{n\to\infty} C_n^{-1/2} A_n C_n^{-1/2} = A, \quad \lim_{n\to\infty} C_n^{-1/2} B_n C_n^{-1/2} = B,$$

(3.31)

$$\lim_{n\to\infty} C_n^{-1/2} C_{n-1}^{1/2} = I.$$

Este tipo de sucesiones se estudiaron en el Capítulo 2 donde se establecía el comportamiento asintótico de los polinomios escalados $(P_n(C_n; z))_n$ (en (2.5) se define $P(Cx)$, siendo P un polinomio matricial y C una matriz).

Como mostramos en el Capítulo 2, para cada k la sucesión de polinomios $R_{n,k}(t) = C_k^{1/2} P_n(C_k; t)$, $n \geq 0$, satisface la relación de recurrencia

$$t R_{n,k}(t) = A_{n+1,k} R_{n+1,k}(t) + B_{n,k} R_{n,k}(t) + A_{n,k}^* R_{n-1,k}(t),$$

donde

$$A_{n,k} = C_k^{-1/2} A_n C_k^{-1/2}; \quad B_{n,k} = C_k^{-1/2} B_n C_k^{-1/2}.$$

Además, en virtud del Lema 2.5, la condición (3.31) nos lleva a

$$\lim_{n\to\infty} A_{n+k,n} = A, \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} B_{n+k,n} = B \quad k \in \mathbb{Z},$$

y por tanto, la asintótica débil para los polinomios matriciales escalados $(C_k^{1/2} P_n(C_k; t))_n$ cuando la sucesión $(P_n)_n$ satisface (3.31) se puede establecer de la misma forma que en los ejemplos anteriores haciendo uso del Teorema 3.4.

Nota 3.12. Los resultados de convergencia débil para polinomios ortogonales escalares se pueden encontrar en [NS, p. 1188] y [GV, p. 52].

Capítulo 4

Extensión del Teorema de Markov para el problema de momentos completamente indeterminado

El Teorema clásico de Markov establece que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n(z)}{p_n(z)} = \int_a^b \frac{d\mu(t)}{z-t} \quad \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus [a,b],$$

donde μ es una medida de probabilidad sobre el intervalo $[a,b]$, $(p_n)_n$ es la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a μ y $(q_n)_n$ es la correspondiente sucesión de polinomios de segunda clase asociados a $(p_n)_n$. La hipótesis sobre μ de soporte compacto es demasiado restrictiva y, en realidad, basta con que μ sea una medida determinada para que se tenga este resultado. Además, para algunas familias de medidas indeterminadas también se tiene el Teorema de Markov.

El estudio completo del caso escalar puede consultarse en [B] y se puede resumir como sigue: Partiendo de $s = (s_n)_n$ una sucesión de momentos indeterminada, el conjunto de medidas admitiendo a s como sucesión de momentos se describen via cuatro funciones enteras A, B, C y D (cf. [A, p. 98]). Las soluciones extremales de Nevanlinna $(\mu_t)_{t\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}}$ vienen dadas por la fórmula

$$\int \frac{d\mu_t(x)}{x-z} = -\frac{A(z)t - C(z)}{B(z)t - D(z)}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{sop}(\mu_t).$$

A partir de esta representación, el Teorema de Markov para el caso indeterminado establece que si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n(0)}{q_n(0)} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^* \tag{4.1}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n(t)}{p_n(t)} = -\int \frac{d\mu_\alpha(x)}{x-z} \quad \text{para} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{sop}(\mu_\alpha).$$

Más aún, se demuestra que si la medida es solución del problema de momentos de Stieltjes indeterminado entonces la hipótesis de convergencia (4.1) siempre se verifica (ver [B]).

En este capítulo estableceremos la extensión del Teorema de Markov para el problema de momentos matricial completamente indeterminado. El Teorema de Markov para medidas matriciales solución del problema de momentos determinado fue establecido por A. J. Durán en [D4] (ver Teorema 1.30).

Se hará un estudio diferenciado del problema según se trate de un problema de momentos de Hamburger o de Stieltjes, pues la situación es esencialmente distinta: en el segundo caso siempre existe el límite $Q_n^{-1}(0)P_n(0)$ mientras que en el primero este límite no tiene porqué existir (v.g. en [B] se incluyen algunos ejemplos).

Veremos que los resultados que se obtendrán guardan cierta similitud con el caso escalar aunque el carácter matricial introduce importantes modificaciones.

4.1 El problema de momentos de Hamburger

Una medida matricial W es solución del problema de momentos de Hamburger definido por $(S_n)_n$ si verifica que

$$S_k = \int_{\mathbb{R}} t^k \, dW(t), \quad k \geq 0.$$

Es bien conocido que este problema tiene solución si y sólo si la sucesión de momentos $(S_n)_n$ es definida positiva, es decir, si para cada $n \geq 0$ y para cualquier sucesión de vectores $v_0, \cdots, v_n \in \mathbb{C}^N$, no todos nulos, se tiene que

$$\sum_{k,i=0}^{n} v_i S_{i+k} v_k^* > 0. \tag{4.2}$$

En esta sección vamos a probar la extensión del Teorema de Markov para una medida matricial solución del problema de momentos de Hamburger completamente indeterminado. La versión escalar de este resultado la podemos encontrar en [B].

Teorema 4.1. *Sea W una matriz de medidas definida positiva solución de un problema de momentos de Hamburger completamente indeterminado y supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} Q_n^{-1}(0) P_n(0) = \Lambda. \tag{4.3}$$

Entonces, la matriz $V = -\big(\Lambda + iI\big)^{-1}\big(\Lambda - iI\big)$ es unitaria y si μ_V es la matriz de medidas asociada a V por la Parametrización de Nevanlinna, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{-1}(z) Q_n(z) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_V(t)}{t-z} \qquad \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus \; sop(\mu_V)$$

y la convergencia es uniforme en compactos de $\mathbb{C} \setminus sop(\mu_V)$.

En la demostración de este Teorema nos apoyaremos en la parametrización de Nevanlinna y ciertas propiedades de las funciones matriciales de Pick (ver Capítulo 1 sección 1.8), además del Lema 1.25, el Lema 1.42 y del siguiente resultado:

Lema 4.2. *Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a la matriz de medidas definida positiva W. Si $(Q_n)_n$ representa la sucesión de polinomios matriciales de segunda clase asociados a $(P_n)_n$, entonces la matriz $Q_n^{-1}(t)P_n(t)$ es hermítica si $t \in \mathbb{R}$ no es un cero de $Q_n(z)$.*

Nota 4.3. Del Lema 1.25 se deduce de forma inmediata que si t no es un cero común de P_n y Q_n entonces la matriz $Q_n^{-1}(t)P_n(t)$ es hermítica puesto que la inversa de una matriz hermítica es hermítica (ver [D4, p. 1188]); de todos modos aquí daremos una prueba directa en la que no se hará uso del Lema 1.25.

Demostración Lema 4.2 Consideremos la función matricial $\Phi_n(t) = Q_n^{-1}(t)P_n(t)$. Buscamos probar que $\Phi_n(t) = \Phi_n(t)^*$.

De la Fórmula de Green (1.24) se tiene que

$$P_{n-1}^*(t)A_nQ_n(t) - P_n^*(t)A_n^*Q_{n-1}(t) = I$$

y puesto que $Q_n(t)$ es invertible, obtenemos que

$$P_{n-1}^*(t)A_n - P_n^*(t)A_n^*Q_{n-1}(t)Q_n^{-1}(t) = Q_n^{-1}(t)$$

o lo que es igual, si trasponemos y conjugamos

$$A_n^*P_{n-1}(t) - Q_n^{*^{-1}}(t)Q_{n-1}^*(t)A_nP_n(t) = Q_n^{*^{-1}}(t)$$

de donde tenemos que

$$\begin{aligned} Q_n^{-1}(t)P_n(t) &= P_{n-1}^*(t)A_nP_n(t) - P_n^*(t)A_n^*Q_{n-1}(t)Q_n^{-1}(t)P_n(t) \\ P_n^*(t)Q_n^{*^{-1}}(t) &= P_n^*(t)A_n^*P_{n-1}(t) - P_n^*(t)Q_n^{*^{-1}}(t)Q_{n-1}^*(t)A_nP_n(t). \end{aligned}$$

De esta forma, teniendo presente la expresión de $\Phi_n(t)$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \Phi_n(t) - \Phi_n(t)^* &= P_{n-1}^*(t)A_nP_n(t) - P_n^*(t)A_n^*P_{n-1}(t) \\ &\quad + P_n^*(t)Q_n^{*^{-1}}(t)Q_{n-1}^*(t)A_nP_n(t) \\ &\quad - P_n^*(t)A_n^*Q_{n-1}(t)Q_n^{-1}(t)P_n(t). \end{aligned}$$

Ahora bien, de la Fórmula de Chirstoffel - Darboux (1.21) se tiene que

$$P_{n-1}^*(t)A_nP_n(t) - P_n^*(t)A_n^*P_{n-1}(t) = \theta$$

y llevando esto a la expresión anterior llegamos a que

$$\begin{aligned}\Phi_n(t) - \Phi_n(t)^* &= P_n^*(t)\Big(Q_n^{*^{-1}}(t)Q_{n-1}^*(t)A_nQ_n(t) - A_n^*Q_{n-1}(t)\Big)Q_n^{-1}(t)P_n(t)\\ &= P_n^*(t)Q_n^{*^{-1}}(t)\Big(Q_{n-1}^*(t)A_nQ_n(t)\\ &\quad - Q_n^*(t)A_n^*Q_{n-1}(t)\Big)Q_n^{-1}(t)P_n(t)\end{aligned}$$

pero la expresión (1.28) para $u = v = t$ nos conduce a

$$Q_{n-1}^*(t)A_nQ_n(t) - Q_n^*(t)A_n^*Q_{n-1}(t) = \theta.$$

Teniendo presente esto, obtenemos que

$$\Phi_n(t) - \Phi_n(t)^* = \theta$$

por la tanto, concluimos que $\Phi_n(t)$ es hermítica. □

Una vez visto este Lema procederemos con la prueba de la extensión del Teorema de Markov para una medida matricial solución del problema de momentos de Hamburger completamente indeterminado.

Demostración del Teorema 4.1

Consideremos la sucesión $(\Lambda_n)_n$, definida por $\Lambda_n = Q_n^{-1}(0)P_n(0)$. En virtud del Lema 4.2 tenemos que Λ_n es una matriz hermítica, ya que

$$\Lambda_n = Q_n^{-1}(0)P_n(0) = P_n^*(0)Q_n^{*^{-1}}(0) = \Lambda_n^*. \tag{4.4}$$

A partir de $(\Lambda_n)_n$ consideremos la sucesión de matrices $(V_n)_n$ definida por

$$V_n = -\Big(\Lambda_n + iI\Big)^{-1}\cdot\Big(\Lambda_n - iI\Big).$$

Veamos que V_n están bien definidas. Para ello tenemos que ver que la matriz $\big(\Lambda_n + iI\big)$ sea invertible. Teniendo presente (i) del Lema 1.42 bastaría con probar que Λ_n es una función matricial de Pick, pero atendiendo al Ejemplo 1.40 apartado (a), es suficiente con que Λ_n sea hermítica y este hecho se tiene por (4.4). Por consiguiente los elementos de la sucesión $(V_n)_n$ están bien definidos.

Por la hipótesis de convergencia (4.3) se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} V_n = -\Big(\Lambda + iI\Big)^{-1}\cdot\Big(\Lambda - iI\Big) := V.$$

Por el apartado (iv) del Lema 1.42, V es una matriz unitaria, ya que tenemos que Λ es hermítica y por consiguiente es una función matricial de Pick.

Gracias al Lema 1.25 tenemos que

$$P_n^{-1}(t)Q_n(t) = Q_n^*(t)P_n^{*^{-1}}(t) \tag{4.5}$$

y usando la expresión (1.41) obtenemos que

$$\begin{aligned} P_n(t) &= Q_n(0)D_n(t) - P_n(0)B_n(t) \\ Q_n(t) &= Q_n(0)C_n(t) - P_n(0)A_n(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto, llevando estas expresiones a (4.5) tenemos que

$$\begin{aligned} P_n^{-1}(t)Q_n(t) &= Q_n^*(t)P_n^{*^{-1}}(t) \\ &= \Big(C_n^*(t)Q_n^*(0) - A_n^*(t)P_n^*(0)\Big)\Big(D_n^*(t)Q_n^*(0) - B_n^*(t)P_n^*(0)\Big)^{-1}. \end{aligned}$$

Por hipótesis tenemos que la matriz $Q_n(0)$ es invertible. Si usamos esta propiedad podemos transformar la expresión anterior en

$$P_n^{-1}(t)Q_n(t) = \Big(C_n^*(t) - A_n^*(t)P_n^*(0)Q_n^*(0)^{-1}\Big)\Big(D_n^*(t) - B_n^*(t)P_n^*(0)Q_n^*(0)^{-1}\Big)^{-1}$$

o lo que es igual,

$$P_n^{-1}(t)Q_n(t) = \Big(C_n^*(t) - A_n^*(t)\Lambda_n\Big)\Big(D_n^*(t) - B_n^*(t)\Lambda_n\Big)^{-1}.$$

Si tomamos límite cuando n tiende a ∞ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{-1}(t)Q_n(t) = \Big(C^*(t) - A^*(t)\Lambda\Big)\Big(D^*(t) - B^*(t)\Lambda\Big)^{-1}. \tag{4.6}$$

Puesto que

$$V = -\Big(\Lambda + iI\Big)^{-1}\cdot\Big(\Lambda - iI\Big),$$

es posible expresar Λ como

$$\Lambda = i(I - V)(I + V)^{-1}$$

pues la matriz $\big(I + V\big)$ es invertible por el apartado (ii) del Lema 1.42. De esta forma, transformamos la expresión (4.6) en

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P_n^{-1}(t)Q_n(t) &= \Big(C^*(t) - i\,A^*(t)\big(I - V\big)\big(I + V\big)^{-1}\Big)\cdot \\ &\quad\cdot\Big(D^*(t) - i\,B^*(t)\big(I - V\big)\big(I + V\big)^{-1}\Big)^{-1} \end{aligned}$$

y volviendo a aplicar que la matriz $(I+V)$ es invertible, llegamos a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P_n^{-1}(t)Q_n(t) &= \Big(C^*(t)\big(I+V\big) - i\,A^*(t)\big(I-V\big)\Big)\cdot \\ &\quad\cdot\Big(D^*(t)\big(I+V\big) - i\,B^*(t)\big(I-V\big)\Big)^{-1}.\end{aligned}$$

De otro lado, puesto que V es una matriz unitaria, aplicando la versión matricial de la Parametrización de Nevanlinna (1.46) tenemos que existe una medida matricial N-extremal μ_V definida positiva, para la cual

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int\frac{d\mu_V(x)}{x-t} &= -\Big(C^*(t)\big(I+V\big) - i\,A^*(t)\big(I-V\big)\Big)\cdot \\ &\quad\cdot\Big(D^*(t)\big(I+V\big) - i\,B^*(t)\big(I-V\big)\Big)^{-1}\end{aligned}$$

de donde concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{-1}(t)Q_n(t) = -\int\frac{d\mu_V(x)}{x-t}, \qquad \text{para} \quad t\in\mathbb{C}\setminus\,\mathrm{sop}(\mu_V)$$

y la convergencia es uniforme en compactos de $\mathbb{C}\setminus\mathrm{sop}(\mu_V)$. □

Observación 4.4. La matriz Λ es hermítica. Se deduce directamente del hecho que $\lim\limits_{n\to\infty}\Lambda_n=\Lambda$, siendo cada Λ_n hermítica.

Observación 4.5. La matriz de medidas μ_V que se obtiene en el Teorema 4.1 es una medida N-extremal.

4.2 El problema de momentos de Stieltjes

En esta sección nuestro estudio se centrará en particularizar el Teorema de Markov para una medida matricial solución del problema de momentos de Stieltjes; en concreto, probaremos que la hipótesis de convergencia (4.3) siempre se verifica en este caso. La versión escalar de estos resultados puede consultarse en [B].

Por un problema de momentos de Stieltjes entendemos aquel que admite una solución con soporte en $[0,+\infty)$.

Al igual que en el caso escalar, sabemos que este problema tiene solución si y sólo si las sucesiones $(S_n)_n$ y $(S_{n+1})_n$ son definidas positivas, es decir, si para cada $n \geq 0$ y para cualquier sucesión de vectores $v_0, \cdots v_n \in \mathbb{C}^N$, no todos nulos, se tiene que

$$\sum_{i,k=0}^{n} v_i S_{i+k} v_k^* > 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i,k=0}^{n} v_i S_{i+k+1} v_k^* > 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.7}$$

4.2.1 Fórmulas de recurrencia asociadas a polinomios matriciales con peso matricial soportado en $[0, +\infty)$

Como punto de partida vamos a dar una caracterización de los coeficientes de la fórmula de recurrencia de tres términos para polinomios ortonormales con respecto a matrices de medidas con soporte en $[0, +\infty)$. Aunque una caracterización similar para polinomios ortogonales matriciales mónicos con soporte en $[0, +\infty)$ acaba de aparecer en [DS], aquí se demostrará de manera completamente diferente.

Teorema 4.6. *Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales verificando la relación de recurrencia (1.1). Entonces, $(P_n)_n$ son ortonormales con respecto a un peso matricial W de Stieltjes cuyo soporte está contenido en $[0, +\infty)$ si y sólo si existen dos sucesiones $(M_n)_n$ y $(L_n)_n$ de matrices definidas positivas para las que*

$$\begin{aligned} A_n &= M_n^{-1/2} L_n^{-1} M_{n+1}^{-1/2}, \qquad n \geq 1 \\ B_0 &= M_1^{-1/2} L_1^{-1} M_1^{-1/2} \\ B_n &= M_{n+1}^{-1/2} (L_n^{-1} + L_{n+1}^{-1}) M_{n+1}^{-1/2}, \qquad n \geq 1. \end{aligned} \tag{4.8}$$

DEMOSTRACIÓN: Procederemos en cuatro pasos. Probaremos primero el recíproco (pasos 1 y 2). La implicación directa la probaremos seguidamente en los pasos 3 y 4.

Paso 1. *Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios ortonormales con respecto a W y supongamos que las sucesiones (A_n) y (B_n) verifican (4.8) entonces, para cada $n \geq 0$ y para cualquier sucesión de matrices $\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_n \in \mathbb{C}^{N\times N}$, no todas nulas, se tiene que*

$$(4.9)\quad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k B_k \alpha_k^* + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha_k A_{k+1}\alpha_{k+1}^* + (\alpha_k A_{k+1}\alpha_{k+1}^*)^*\right) > \theta \quad n = 0, 1, \cdots$$

En efecto, sean $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Para probar (4.9), usaremos las igualdades (4.8). De esta forma, la expresión

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k B_k \alpha_k^* + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha_k A_{k+1}\alpha_{k+1}^* + (\alpha_k A_{k+1}\alpha_{k+1}^*)^*\right)$$

la podemos escribir como

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 M_1^{-1/2} L_1^{-1} M_1^{-1/2} \alpha_0^* + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k M_{k+1}^{-1/2} L_k^{-1} M_{k+1}^{-1/2} \alpha_k^* \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k M_{k+1}^{-1/2} L_{k+1}^{-1} M_{k+1}^{-1/2} \alpha_k^* \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha_k M_{k+1}^{-1/2} L_{k+1}^{-1} M_{k+2}^{-1/2} \alpha_{k+1}^* + \left(\alpha_k M_{k+1}^{-1/2} L_{k+1}^{-1} M_{k+2}^{-1/2} \alpha_{k+1}^*\right)^*\right).
\end{aligned}$$

Si se reordena el segundo sumando y se agrupan el primer y el tercer sumando extrayendo posteriormente el último término del sumando resultante, obtenemos que la expresión anterior es igual a

$$\begin{aligned}
&\alpha_n M_{n+1}^{-1/2} L_{n+1}^{-1} M_{n+1}^{-1/2} \alpha_n^* + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M_{k+1}^{-1/2} L_{k+1}^{-1} M_{k+1}^{-1/2} \alpha_k^* \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1} M_{k+2}^{-1/2} L_{k+1}^{-1} M_{k+2}^{-1/2} \alpha_{k+1}^* \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha_k M_{k+1}^{-1/2} L_{k+1}^{-1} M_{k+2}^{-1/2} \alpha_{k+1}^* + \alpha_{k+1} M_{k+2}^{-1/2} L_{k+1}^{-1} M_{k+1}^{-1/2} \alpha_k^*\right).
\end{aligned}$$

Si denotamos por $\beta_k = \alpha_k M_{k+1}^{-1/2}$, la expresión anterior nos queda como sigue

$$\begin{aligned} & \beta_n L_{n+1}^{-1}\beta_n^* + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\beta_k L_{k+1}^{-1}\beta_k^* + \beta_{k+1}L_{k+1}^{-1}\beta_{k+1}^*\right) \\ & + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\beta_k L_{k+1}^{-1}\beta_{k+1}^* + \beta_{k+1}L_{k+1}^{-1}\beta_k^*\right) \\ = \ & \beta_n L_{n+1}^{-1}\beta_n^* + \sum_{k=0}^{n-1}\left((\beta_k + \beta_{k+1})L_{k+1}^{-1}\beta_k^* + (\beta_k+\beta_{k+1})L_{k+1}^{-1}\beta_{k+1}^*\right) \\ = \ & \beta_n L_{n+1}^{-1}\beta_n^* + \sum_{k=0}^{n-1}\left((\beta_k+\beta_{k+1})L_{k+1}^{-1}(\beta_k+\beta_{k+1})^*\right) > \theta. \end{aligned}$$

Con lo que se obtiene (4.9), ya que las matrices $(M_i)_{i\geq 1}$ y $(L_i)_{i\geq 1}$ son definidas positivas por hipótesis.

PASO 2. *Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales cuyos coeficientes de recurrencia verifican (4.8). Entonces son ortonormales con respecto a un peso matricial de Stieltjes con soporte en $[0,+\infty)$.*

En efecto, basta probar que la sucesión de momentos $(S_n)_n$ que define W es una sucesión de Stieltjes. Para ello veamos que verifica (4.7).

Sea $P(t)$ un polinomio matricial de grado n. Puesto que $(P_n)_n$ es una sucesión de polinomios ortonormales con respecto a W, tenemos que podemos expresar $P(t)$ en función de las bases $\{I,\ tI,\ t^2I,\ \dots\}$ y $\{P_0,\ P_1,\ P_2,\ \dots\}$, es decir,

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} Y_i t^i \qquad \text{y} \qquad P(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i(t)$$

siendo $(Y_i)_{i=0}^n$ y $(\alpha_i)_{i=0}^n$ ciertas matrices de orden N.

Calculando $\int P(t)\,dW(t)\,P^*(t)$ usando las dos expresiones obtenidas para $P(t)$ y teniendo presente la ortogonalidad de $(P_n)_n$ obtenemos que

$$\sum_{i,k=0}^{n} Y_i S_{i+k} Y_k^* = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\alpha_k^*. \tag{4.10}$$

De otro lado, si calculamos $\int tP(t)\,dW(t)\,P^*(t)$ usando las dos expresiones de $P(t)$, haciendo uso de la ortogonalidad de $(P_n)_n$ y de la relación de recurrencia que estos polinomios verifican llegamos a

$$(4.11)\quad \sum_{i,k=0}^{n} Y_i S_{i+k+1} Y_k^* = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k B_k \alpha_k^* + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha_k A_{k+1} \alpha_{k+1}^* + (\alpha_k A_{k+1} \alpha_{k+1}^*)^*\right).$$

Así pues, en virtud del Paso 1, de (4.10) y de (4.11), se tiene que

$$\sum_{i,k=0}^{n} Y_i S_{i+k} Y_k^* = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \alpha_k^* > \theta \qquad \text{y}$$

$$\sum_{i,k=0}^{n} Y_i S_{i+k+1} Y_k^* = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k B_k \alpha_k^* + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha_k A_{k+1} \alpha_{k+1}^* + (\alpha_k A_{k+1} \alpha_{k+1}^*)^*\right) > \theta$$

Paso 3. *Si W es un peso matricial de Stieltjes con soporte en $[0,+\infty)$ y $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios ortonormales con respecto a W entonces se verifica que*

$$(4.12)\quad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k B_k \alpha_k^* + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha_k A_{k+1} \alpha_{k+1}^* + (\alpha_k A_{k+1} \alpha_{k+1}^*)^*\right) > \theta, \quad n = 0, 1, \cdots$$

$$(4.13)\quad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k B_k \alpha_k^* - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha_k A_{k+1} \alpha_{k+1}^* + (\alpha_k A_{k+1} \alpha_{k+1}^*)^*\right) > \theta, \quad n = 0, 1, \cdots$$

En efecto, de (4.7) y (4.11) se deduce que

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k B_k \alpha_k^* + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha_k A_{k+1} \alpha_{k+1}^* + (\alpha_k A_{k+1} \alpha_{k+1}^*)^*\right) > \theta \quad n = 0, 1, \cdots$$

obteniendo (4.12).

Para demostrar (4.13) basta con tener presente que para cualquier sucesión de matrices unitarias $(U_n)_n$ se tiene que $(U_n P_n)_n$ es también una sucesión de polinomios ortonormales con respecto a W y cuyos coeficientes de recurrencia están definidos por las sucesiones $U_{n-1} A_n U_n^*$ y $U_n B_n U_n^*$. Si ponemos $U_n = (-1)^n I$ y considerando la expresión (4.12) para la sucesión $\left((-1)^n P_n\right)_n$ obtenemos que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{2k} \alpha_k B_k \alpha_k^* + \sum_{k=0}^{n-1} \left((-1)^{2k+1} \alpha_k A_{k+1} \alpha_{k+1}^* + (-1)^{2k+1} (\alpha_k A_{k+1} \alpha_{k+1}^*)^*\right) > \theta$$

o lo que es igual

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k B_k \alpha_k^* - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha_k A_{k+1} \alpha_{k+1}^* + (\alpha_k A_{k+1} \alpha_{k+1}^*)^*\right) > \theta \quad n = 0, 1, \cdots$$

con lo que se concluye el Paso 3.

PASO 4. *Si W es un peso matricial de Stieltjes que verifica (4.13), entonces existen dos sucesiones de matrices, $(M_n)_{n\geq 1}$ y $(L_n)_{n\geq 1}$, definidas positivas tales que verifican (4.8).*

Empezamos apuntando que si W es un peso matricial de Stieltjes entonces las matrices B_n, $n \geq 0$, son definidas positivas. Basta tener en cuenta que

$$B_n = \int t P_n(t) dW(t) P_n^*(t)$$

y aplicar (4.11) y (4.7).

Vamos a construir las sucesiones de matrices $(M_n)_n$ y $(L_n)_n$. Si consideramos M_1 una matriz cualquiera de orden N definida positiva, construimos L_1 de la siguiente forma

$$L_1 = \left(M_1^{1/2} B_0 M_1^{1/2}\right)^{-1}.$$

Con esta construcción es inmediato que $B_0 = M_1^{-1/2} L_1^{-1} M_1^{-1/2}$. Para ver que L_1 es definida positiva, basta con aplicar que B_0 y M_1 son matrices definidas positivas.

Obsérvese que de la definición de L_1 y M_1 se tiene automáticamente que la expresión

$$\beta_n L_{n+1}^{-1} \beta_n^* + \sum_{k=0}^{n-1} \left((\beta_k - \beta_{k+1}) L_{k+1}^{-1} (\beta_k - \beta_{k+1})^*\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k B_k \alpha_k^* - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha_k A_{k+1} \alpha_{k+1}^* + (\alpha_k A_{k+1} \alpha_{k+1}^*)^*\right) \tag{4.14}$$

es cierta para $n = 0$, siendo $\beta_k = \alpha_k M_{k+1}^{-1/2}$ para $k = 0, \cdots, n$.

Conocidas M_1 y L_1, definimos M_2 de la siguiente forma

$$M_2 = \left(L_1 M_1^{1/2} A_1 A_1^* M_1^{1/2} L_1\right)^{-1}$$

Está claro que M_2 está bien definida y es no singular pues se construye a partir de un producto de matrices no singulares. Además, M_1 es definida positiva pues $A_1 A_1^*$ es una matriz definida positiva, $L_1 M_1^{1/2}$ es no singular y verifica que $(L_1 M_1^{1/2})^* = M_1^{1/2} L_1$.

Usando esta construcción podemos observar que

$$A_1 = M_1^{-1/2} L_1^{-1} M_2^{-1/2}$$

ya que $M_2^{-1/2}$ es definida positiva y

$$M_2^{-1/2} M_2^{-1/2} = \left(L_1 M_1^{1/2} A_1\right)\left(L_1 M_1^{1/2} A_1\right)^*.$$

Conociendo L_1 y M_2, construimos L_2 de la siguiente forma

$$L_2 = \left(M_2^{1/2} B_1 M_2^{1/2} - L_1^{-1}\right)^{-1}.$$

Está claro que L_2 verifica que

$$B_1 = M_2^{-1/2}\left(L_1^{-1} + L_2^{-1}\right) M_2^{-1/2}.$$

Por consiguiente, procediendo como en el caso anterior, deducimos que (4.14) es cierta para $n = 1$. Poniendo $\alpha_i = M_{i+1}^{1/2}$ $(i = 0, 1)$ y usando (4.13) llegamos a que

$$M_1^{1/2} M_1^{-1/2} L_2^{-1} M_1^{-1/2} M_1^{1/2} + (I - I) L_1^{-1} (I - I) > \theta$$

o lo que es igual $L_2^{-1} > \theta$, es decir, L_2^{-1} es definida positiva y por tanto también lo es L_2.

Supongamos que hemos realizado la construcción de las matrices definidas positivas $(M_n)_{1 \le n \le m}$ y $(L_n)_{1 \le n \le m}$ satisfaciendo (4.8) para $1 \le n \le m - 1$.

Definimos M_{m+1} de la siguiente forma

$$M_{m+1} = \left(L_m M_m^{1/2} A_m A_m^* M_m^{1/2} L_m\right)^{-1}.$$

Está claro que M_{m+1} está bien definida y es no singular pues se define a partir de un producto de matrices no singulares. Con esta construcción se tiene que M_{m+1} es definida positiva pues $A_m A_m^*$ es una matriz definida positiva, $L_m M_m^{1/2}$ es no singular y verifica que $\left(L_m M_m^{1/2}\right)^* = M_m^{1/2} L_m$.

Usando esta construcción podemos observar que

$$A_m = M_m^{-1/2} L_m^{-1} M_{m+1}^{-1/2}$$

ya que $M_m^{-1/2}$ es definida positiva y

$$M_{m+1}^{-1/2} M_{m+1}^{-1/2} = \left(L_m M_m^{1/2} A_m\right)\left(L_m M_m^{1/2} A_m\right)^*.$$

Conocidas L_m y M_{m+1} vamos a construir L_{m+1} de la siguiente forma

$$L_{m+1} = \left(M_{m+1}^{1/2} B_m M_{m+1}^{1/2} - L_m^{-1}\right)^{-1}.$$

Está claro que L_{m+1} verifica que $B_m = M_{m+1}^{-1/2}\left(L_m^{-1} + L_{m+1}^{-1}\right) M_{m+1}^{-1/2}$. Por tanto, procediendo como en los casos anteriores, se verifica la expresión (4.14) para $n = m$. Tomando $\alpha_k = M_{k+1}^{1/2}$, $(k = 0, 1, \cdots, m)$, y usando (4.13) tenemos que

$$L_{m+1}^{-1} + \sum_{k=0}^{m-1} \Big((I - I) L_{k+1}^{-1} (I - I)^*\Big) > \theta$$

o lo que es igual, $L_{m+1}^{-1} > \theta$, es decir, L_{m+1}^{-1} es definida positiva y por consiguiente también lo es L_{m+1}. □

4.2.2 El Teorema de Markov para el problema de momentos matricial de Stieltjes completamente indeterminado

Consideremos una sucesión de polinomios ortonormales $(P_n)_n$ con respecto a un peso matricial W con soporte en $[0, +\infty)$. Verifica por tanto la relación de recurrencia (1.1), cuyos coeficientes de recurrencia verifican las relaciones (4.8), siendo $(M_n)_{n\geq 1}$ y $(L_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones de matrices definidas positivas. A partir de estas sucesiones definimos dos familias de polinomios matriciales $(R_n)_n$ y $(T_n)_n$ de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rcl} R_{2n+1}(z) & = & z M_{n+1} R_{2n}(z) + R_{2n-1}(z) \\ R_{2n+2}(z) & = & L_{n+1} R_{2n+1}(z) + R_{2n}(z) \end{array}\right. \tag{4.15}$$

con las condiciones iniciales $R_0(z) = \theta$ y $R_{-1}(z) = I$ y

$$\left\{\begin{array}{rcl} T_{2n+1}(z) & = & z M_{n+1} T_{2n}(z) + T_{2n-1}(z) \\ T_{2n+2}(z) & = & L_{n+1} T_{2n+1}(z) + T_{2n}(z) \end{array}\right. \tag{4.16}$$

con las condiciones iniciales $T_0(z) = I$ y $T_{-1}(z) = \theta$.

Estas familias de polinomios serán de gran utilidad para establecer el Teorema de Markov para matrices de medidas solución de un problema de momentos de Stieltjes completamente indeterminado.

El siguiente resultado es clave para llegar a la extensión del Teorema de Markov buscada. En él se recoge qué relación existe entre las sucesiones de polinomios $(P_n)_n$ y $(Q_n)_n$ (polinomios de segunda clase asociados a $(P_n)_n$) con las familias de polinomios $(R_n)_n$ y $(T_n)_n$ definidas en (4.15) y (4.16) respectivamente.

Teorema 4.7. *Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios ortonormales con respecto a un peso matricial W con soporte en $[0, +\infty)$. Por tanto, satisface (1.1) y sus coeficientes de recurrencia verifican las relaciones (4.8), siendo $(M_n)_{n\geq 1}$ y $(L_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones de matrices definidas positivas. Sean $(R_n)_n$ y $(T_n)_n$ las familias de polinomios definidas mediante las relaciones de recurrencia (4.15) y (4.16) respectivamente. Entonces,*

a) Las sucesiones de polinomios $(P_n)_n$ y $(Q_n)_n$ las podemos expresar como:

$$\begin{aligned} P_n(z) &= (-1)^n M_{n+1}^{1/2} T_{2n}(-z) M_1^{-1/2} \\ Q_n(z) &= (-1)^{n-1} M_{n+1}^{1/2} R_{2n}(-z) M_1^{1/2} \end{aligned} \tag{4.17}$$

donde $(Q_n)_n$ es la sucesión de polinomios de segunda clase asociados a $(P_n)_n$.

b) Los valores de $P_n(0)$ y $Q_n(0)$ los podemos expresar como:

$$\begin{aligned} P_n(0) &= (-1)^n M_{n+1}^{1/2} M_1^{-1/2} \\ Q_n(0) &= (-1)^{n-1} M_{n+1}^{1/2} \Big(\sum_{i=1}^{n} L_i \Big) M_1^{1/2} \end{aligned} \tag{4.18}$$

DEMOSTRACIÓN: Para probar a) partiremos de la relación (4.16) y eliminaremos $T_{2n+1}(z)$ de esas ecuaciones. Para ello, si consideramos la segunda ecuación tenemos que

$$T_{2n}(z) = L_n T_{2n-1}(z) + T_{2n-2}(z)$$

o lo que es igual

$$T_{2n-1}(z) = L_n^{-1}\big(T_{2n}(z) - T_{2n-2}(z)\big). \tag{4.19}$$

Por otra parte, sustituyendo la primera ecuación de (4.16) en la segunda ecuación de la misma expresión llegamos a que

$$T_{2n+2}(z) = L_{n+1}\big(zM_{n+1}T_{2n}(z) + T_{2n-1}(z)\big) + T_{2n}(z),$$

y sustituyendo (4.19) en esta expresión obtenemos que

$$\begin{aligned} T_{2n+2}(z) &= L_{n+1}\big(zM_{n+1}T_{2n}(z) + L_n^{-1}\big(T_{2n}(z) - T_{2n-2}(z)\big)\big) + T_{2n}(z) \\ &= zL_{n+1}M_{n+1}T_{2n}(z) + L_{n+1}L_n^{-1}T_{2n}(z) - L_{n+1}L_n^{-1}T_{2n-2}(z) + T_{2n}(z) \end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$-zL_{n+1}M_{n+1}T_{2n}(z) = -T_{2n+2}(z) + L_{n+1}\big(L_n^{-1} + L_{n+1}^{-1}\big)T_{2n}(z) - L_{n+1}L_n^{-1}T_{2n-2}(z)$$

o lo que es igual

$$\begin{aligned} -zM_{n+1}^{1/2}T_{2n}(z) &= - \; M_{n+1}^{-1/2}L_{n+1}^{-1}M_{n+2}^{-1/2}M_{n+2}^{1/2}T_{2n+2}(z) \\ &\quad + \; M_{n+1}^{-1/2}\big(L_n^{-1} + L_{n+1}^{-1}\big)M_{n+1}^{-1/2}M_{n+1}^{1/2}T_{2n}(z) \\ &\quad - \; M_{n+1}^{-1/2}L_n^{-1}M_n^{-1/2}M_n^{1/2}T_{2n-2}(z). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Ahora bien, si realizamos el cambio de z por $-z$, denotamos por

$$Y_n(z) = (-1)^n M_{n+1}^{1/2}T_{2n}(-z)$$

y ponemos que

$$\begin{aligned} A_n &= M_n^{-1/2}L_n^{-1}M_{n+1}^{-1/2}, \qquad n \geq 1 \\ B_0 &= M_1^{-1/2}L_1^{-1}M_1^{-1/2} \\ B_n &= M_{n+1}^{-1/2}\big(L_n^{-1} + L_{n+1}^{-1}\big)M_{n+1}^{-1/2}, \qquad n \geq 1, \end{aligned}$$

entonces, la expresión (4.20) la podemos escribir como

$$zY_n(z) = A_{n+1}Y_{n+1}(z) + B_nY_n(z) + A_n^*Y_{n-1}(z),$$

es decir, los polinomios $(Y_n)_n$ verifican la misma relación de recurrencia de tres términos que $(P_n)_n$ pero con distintas condiciones iniciales. Dado que $P_0(t) = I = Y_0(t)M_1^{-1/2}$ obtenemos entonces que $P_n(t) = Y_n(t)M_1^{-1/2}$, esto es,

$$P_n(z) = (-1)^n M_{n+1}^{1/2} T_{2n}(-z) M_1^{-1/2}.$$

De forma similar al razonamiento expuesto a lo largo de esta prueba podemos demostrar que

$$Q_n(z) = (-1)^{n-1} M_{n+1}^{1/2} R_{2n}(-z) M_1^{1/2},$$

basta con eliminar R_{2n+1} de las ecuaciones (4.15) y observar que los polinomios $Y_n(z) = (-1)^{n-1} M_{n+1}^{1/2} R_{2n}(-z)$ verifican la misma relación de recurrencia que $(P_n)_n$ y $(Q_n)_n$ pero con diferentes condiciones iniciales. Razonando como antes llegamos a la expresión que relaciona $Q_n(z)$ con $R_{2n}(z)$.

Para probar *b*) calcularemos explícitamente el valor $R_n(0)$ y $T_n(0)$ y usaremos las expresiones (4.17) obtenidas en el apartado *a*).

De esta forma, mediante un simple cálculo y haciendo uso de las relaciones (4.15) y (4.16) de forma recursiva, obtenemos que

$$\begin{aligned} T_{2n-1}(0) &= \theta \qquad & T_{2n}(0) &= I \\ R_{2n-1}(0) &= I \qquad & R_{2n}(0) &= \sum_{i=1}^{n} L_i. \end{aligned}$$

Llevando estas expresiones a las obtenidas en (4.17), concluimos que

$$\begin{aligned} P_n(0) &= (-1)^n M_{n+1}^{1/2} M_1^{-1/2} \\ Q_n(0) &= (-1)^{n-1} M_{n+1}^{1/2} \Big(\sum_{i=1}^{n} L_i \Big) M_1^{1/2}. \end{aligned}$$

□

De las expresiones obtenidas para $(P_n(0))_n$ y $(Q_n(0))_n$ del teorema anterior se deduce el siguiente resultado que nos muestra la extensión del Teorema de Markov para soluciones del problema de momentos matricial de Stieltjes que son soluciones del problema de momentos de Hamburger completamente indeterminado.

Teorema 4.8. *Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales asociados a un problema de momentos de Stieltjes completamente indeterminado. Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{-1}(z)Q_n(z) = -\int_0^\infty \frac{d\mu_V(t)}{t-z} \qquad para \;\; z \in \mathbb{C}\setminus sop(\mu_V)$$

siendo $V = -\big(\Lambda+iI\big)^{-1}\big(\Lambda-iI\big)$ *unitaria donde* $\Lambda = -M_1^{-1/2}\big(\sum_{i=1}^{\infty} L_i\big)^{-1}M_1^{-1/2}$ *y μ_V es la matriz de medidas asociada a V por la Parametrización de Nevanlinna. Además, la convergencia es uniforme en compactos de $\mathbb{C}\setminus sop(\mu_V)$.*

Demostración: Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios ortonormales con respecto a W. Puesto que W es una solución de Stieltjes, haciendo uso del Teorema 4.6, existen dos sucesiones de matrices definidas positivas $(M_n)_n$ y $(L_n)_n$ tales que las sucesiones $(A_n)_n$ y $(B_n)_n$ de la relación de recurrencia (1.1) satisfacen (4.8).

Ahora bien, en virtud de (4.18) tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(0)^{-1}P_n(0) = -M_1^{-1/2}\big(\sum_{i=1}^{\infty} L_i\big)^{-1}M_1^{-1/2} := \Lambda.$$

donde $\big(\sum_{i=1}^{\infty} L_i\big)^{-1}$ existe pues al ser $L_i > \theta$ se tiene que

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} L_i\Big)^{-1} \geq \Big(\sum_{i=1}^{n+1} L_i\Big)^{-1} > \theta.$$

Así pues, estamos en las condiciones del Teorema 4.1 y, por consiguiente, tenemos que la matriz $V = -\big(\Lambda+iI\big)^{-1}\big(\Lambda-iI\big)$ es unitaria y que

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{-1}(z)Q_n(z) = -\int \frac{d\,\mu_V(t)}{t-z}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus sop(\mu_V),$$

donde la medida μ_V nos la da la Parametrización de Nevanlinna (1.46) para la matriz unitaria V. $\square$

Para concluir vamos a completar este capítulo con un resultado que nos mostrará propiedades asintóticas de las familias de polinomios matriciales $(R_n)_n$ y $(T_n)_n$ definidas a partir de las relaciones de recurrencia (4.15) y (4.16) respectivamente.

Teorema 4.9. *Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales asociados a un problema de momentos de Stieltjes completamente indeterminado y sean $(R_n)_n$ y $(T_n)_n$ las familias de polinomios definidas por las relaciones de recurrencia (4.15) y (4.16) respectivamente. Entonces,*

a)

$$\lim_{n\to\infty} T_{2n-1}^{-1}(z)R_{2n-1}(z) = M_1^{-1/2}\int \frac{d\nu_I(t)}{t+z}\, M_1^{-1/2}, \qquad z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma$$

donde $\Gamma = -\,sop(\nu_I)$ y ν_I es la medida matricial que nos da la Parametrización de Nevanlinna para I (matriz identidad de orden N).

b)

$$\lim_{n\to\infty} T_{2n}^{-1}(z)R_{2n}(z) = M_1^{-1/2}\int \frac{d\nu_V(t)}{t+z}\, M_1^{-1/2}, \qquad z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma$$

donde $\Gamma = -\,sop(\nu_V)$, ν_V es la medida matricial que nos da la Parametrización de Nevanlinna para V, siendo V la matriz unitaria definida por $V = -\big(\Lambda + iI\big)^{-1}\big(\Lambda - iI\big)$ y Λ es la matriz hermítica definida por

$$\Lambda = -M_1^{-1/2}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} L_i\Big)^{-1} M_1^{-1/2}.$$

DEMOSTRACIÓN: Procederemos en varios pasos.

PASO 1. *Se verifica que*

$$-M_1^{1/2}T_{2n}^{-1}(-z)S_{2n}(-z)M_1^{1/2} = P_n^{-1}(z)Q_n(z) \tag{4.21}$$

$$-M_1^{1/2}T_{2n-1}^{-1}(-z)R_{2n-1}(-z)M_1^{1/2} = D_n^{-1}(z)C_n(z) \tag{4.22}$$

donde $(Q_n)_n$ son los polinomios de segunda clase asociados a $(P_n)_n$ y D_n y C_n son las funciones matriciales definidas en (1.38).

Para llegar a la relación (4.21) partimos de (4.17) de donde obtenemos con un simple cálculo que

$$\begin{aligned} T_{2n}(-z)M_1^{-1/2} &= (-1)^n M_{n+1}^{-1/2}P_n(z) \\ R_{2n}(-z)M_1^{1/2} &= (-1)^{n-1} M_{n+1}^{-1/2}Q_n(z) \end{aligned} \tag{4.23}$$

y de forma inmediata llegamos a

$$-M_1^{1/2}T_{2n}^{-1}(-z)R_{2n}(-z)M_1^{1/2} = P_n^{-1}(z)Q_n(z)$$

con lo que la primera parte estaría probada.

Para demostrar (4.22) usaremos las relaciones de recurrencia de las familias de polinomios $(R_n)_n$ y $(T_n)_n$ de donde obtenemos que

$$\begin{aligned} R_{2n-1}(z) &= L_n^{-1}\big(R_{2n}(z) - R_{2n-2}(z)\big) \\ T_{2n-1}(z) &= L_n^{-1}\big(T_{2n}(z) - T_{2n-2}(z)\big)\ , \end{aligned}$$

llevando lo obtenido en (4.23) a estas expresiones llegamos a

$$\begin{aligned} R_{2n-1}(z)M_1^{1/2} &= L_n^{-1}\Big((-1)^{n-1}M_{n+1}^{-1/2}Q_n(z) - (-1)^n M_n^{-1/2}Q_{n-1}(z)\Big) \\ T_{2n-1}(z)M_1^{-1/2} &= L_n^{-1}\Big((-1)^n M_{n+1}^{-1/2}P_n(z) - (-1)^{n-1}M_n^{-1/2}P_{n-1}(z)\Big)\ . \end{aligned}$$

Así pues,

$$(4.24)\quad M_1^{1/2}T_{2n-1}^{-1}(-z)R_{2n-1}(-z)M_1^{1/2} =$$

$$\Big((-1)^n M_{n+1}^{-1/2}P_n(z) - (-1)^{n-1}M_n^{-1/2}P_{n-1}(z)\Big)^{-1}\cdot$$
$$\cdot\Big((-1)^{n-1}M_{n+1}^{-1/2}Q_n(z) - (-1)^n M_n^{-1/2}Q_{n-1}(z)\Big).$$

Por otro lado, usando (1.30), (4.18) y (4.8) tenemos que

$$\begin{aligned} C_n(z) &= P_{n-1}^*(0)A_nQ_n(z) - P_n^*(0)A_n^*Q_{n-1}(z) \\ &= (-1)^{n-1}M_1^{-1/2}M_n^{1/2}M_n^{-1/2}L_n^{-1}M_{n+1}^{-1/2}Q_n(z) \\ &\quad -(-1)^n M_1^{-1/2}M_{n+1}^{1/2}M_{n+1}^{-1/2}L_n^{-1}M_n^{-1/2}Q_{n-1}(z) \\ &= M_1^{-1/2}L_n^{-1}\Big((-1)^{n-1}M_{n+1}^{-1/2}Q_n(z) - (-1)^n M_n^{-1/2}Q_{n-1}(z)\Big). \end{aligned}$$

De igual forma, usando (1.31), (4.18) y (4.8) se obtiene que

$$\begin{aligned} D_n(z) &= P_{n-1}^*(0)A_nP_n(z) - P_n^*(0)A_n^*P_{n-1}(z) \\ &= M_1^{-1/2}L_n^{-1}\Big((-1)^{n-1}M_{n+1}^{-1/2}P_n(z) - (-1)^n M_n^{-1/2}P_{n-1}(z)\Big). \end{aligned}$$

Así pues, llegamos a que

$$\begin{aligned} D_n^{-1}(z)C_n(z) &= \Big((-1)^{n-1}M_{n+1}^{-1/2}P_n(z) - (-1)^n M_n^{-1/2}P_{n-1}(z)\Big)^{-1}\cdot \\ &\quad\cdot\Big((-1)^{n-1}M_{n+1}^{-1/2}Q_n(z) - (-1)^n M_n^{-1/2}Q_{n-1}(z)\Big) \end{aligned}$$

y comparando esto con lo obtenido en (4.24) podemos concluir que

$$-M_1^{1/2}T_{2n-1}^{-1}(-z)R_{2n-1}(-z)M_1^{1/2} = D_n^{-1}(z)C_n(z).$$

Paso 2. *Prueba de a).*

Si tenemos presente la Parametrización de Nevanlinna (1.46) para la matriz identidad junto con la relación (1.44) obtenemos que

$$\int \frac{d\nu_I(t)}{t-z} = -C^*(z)\big(D^*(z)\big)^{-1} = -D(z)^{-1}C(z), \quad z \in \mathbb{C}\setminus sop(\nu_I).$$

Teniendo en cuenta lo obtenido en (4.22) llegamos a que

$$\lim_{n\to\infty} M_1^{1/2}T_{2n-1}^{-1}(-z)R_{2n-1}(-z)M_1^{1/2} = \int \frac{d\nu_I(t)}{t-z}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus sop(\nu_I).$$

Operando en esta expresión llegamos a

$$\lim_{n\to\infty} T_{2n-1}^{-1}(z)R_{2n-1}(z) = M_1^{-1/2}\int \frac{d\nu_I(t)}{t+z}\, M_1^{-1/2}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$$

donde $\Gamma = -\operatorname{sop}(\nu_I)$.

Paso 3. *Prueba de b).*

Puesto que W es una medida matricial solución de un problema de momentos de Stieltjes completamente indeterminado, en virtud del Teorema 4.8 tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{-1}(z)Q_n(z) = -\int \frac{d\,\nu_V(t)}{t-z}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus \operatorname{sop}(\nu_V) \tag{4.25}$$

siendo $V = -(\Lambda + iI)^{-1}(\Lambda - iI)$ una matriz unitaria y Λ es la matriz hermítica definida por

$$\Lambda = -M_1^{-1/2}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} L_i\Big)^{-1}M_1^{-1/2}.$$

Teniendo en cuenta la relación (4.21) probada en el paso 1, llegamos a que (4.26)

$$-\lim_{n\to\infty} M_1^{1/2} T_{2n}^{-1}(-z) S_{2n}(-z) M_1^{1/2} = -\int \frac{d\,\nu_V(t)}{t-z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus sop(\nu_V)\ .$$

de donde se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} T_{2n}^{-1}(z) S_{2n}(z) = M_1^{-1/2} \int \frac{d\,\nu_V(t)}{t+z} M_1^{-1/2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$$

donde $\Gamma = -\operatorname{sop}(\nu_V)$.

□

Observación 4.10. Si $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} L_i \right)^{-1} = \theta$, entonces los límites

$$\lim_{n\to\infty} M_1^{1/2} T_{2n}^{-1}(z) S_{2n}(z) M_1^{1/2} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} M_1^{1/2} T_{2n-1}^{-1}(z) S_{2n-1}(z) M_1^{1/2}$$

son ambos iguales a

$$\int \frac{d\,\nu_I(t)}{t+z}.$$

Observación 4.11. En el caso escalar, la condición

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} L_i \right)^{-1} = 0$$

equivale a la determinación del problema de momentos de Stieltjes ([A, pp. 237-240]). Estamos investigando si este también es el caso para el problema de momentos matricial.

Bibliografía

[A] N. I Akiezer, *The Classical Moment Problem*, Oliver & Boyd Edinburgh, 1965.

[AN] A.I. Aptekarev and E.M. Nikishin, *The scattering problem for a discrete Sturm-Liouville operator*, Mat. Sb., **121 (163)** (1983), 327-358; Mat. USSR Sb. **49** (1984), 325-355.

[BB] S. Basu and N.K. Bose, *Matrix Stieltjes series and network models SIAM J. Math. Anal.*, **14** (1983), 209-222.

[B] C. Berg, *Markov's Theorem revisited*, J. Approx. Theory. **2** (1993), 260-275.

[D1] A.J. Duran, *Ratio asymptotics and quadrature formulas*, Constr. Approx. **13** (1997), 271-286.

[D2] A. J. Duran, *A generalization of Favard's Theorem for polynomials satisfying a recurrence relation*, J. Approx. Theory **74** (1993), 83-109.

[D3] A. J. Duran, *On orthogonal polynomials with respect to a positive definite matrix of measures*, Can. J. Math. **47** (1995), 88-112.

[D4] A. J. Duran, *Markov theorem for orthogonal matrix polynomials*, Can. J. Math. **48** (1996), 1180-1195.

[D5] A. J. Duran, *Matrix Inner Product having a matrix symmetric second order differential operator*, Rocky Mt. J. Math. **27** (1997), 535-600.

[D6] A. J. Duran, *Ratio asympotics for orthogonal matrix polynomials*, J. Approx. Theory **100** (1999), 304-344.

[DD1] A. J. Duran and E. Daneri, *Ratio Asymptotic for orthogonal matrix polynomials with unbounded recurrence coefficients*, J. Approx. Theory **110** (2001), 1-17.

[DD2] A. J. Duran and E. Daneri, *Weak Convergence for orthogonal matrix polynomials*, Indag. M. **13(1)** (2002) , 47-62.

[DD3] A. J. Duran and E. Daneri, *Markov's Theorem for the matrix indeterminate moment problem*, Preprint.

[DD] A. J. Duran and E. Defez, *Orthogonal matrix polynomials and quadrature formulas*, Linear Algebra Appl. **345** (2002), 71-84.

[DL1] A. J. Duran and P. Lopez-Rodriguez, *Orthogonal matrix polynomials: Zeros and Blumenthal's theorem*, J. Approx. Theory **84** (1996), 96-118.

[DL2] A. J. Duran and P. Lopez-Rodriguez, *Density questions for the truncated matrix moment problem*, Canadian J. of Math. **49** (4) (1997), 708-721.

[DL3] A. J. Duran and P. Lopez-Rodriguez, *The $\mathcal{L}^p$ space of a positive definite matrix of measures and density of matrix polinomials in $\mathcal{L}^1$*, J. Approx. Theory **90** (1997), 299-318.

[DL4] A. J. Duran and P. Lopez-Rodriguez, *N-extremal matrices of measures for an indeterminate matrix moment problem*, J. Func. Analysis **174** (2000), 301-321.

[DLS] A. J. Duran, P. Lopez-Rodriguez and E. B. Saff, *Zero asymptotic behaviour for orthogonal matrix polynomials*, J. D'Analyse Mathèmatique **78** (1999), 37-60.

[DP] A. J. Duran and B. Polo, *Gaussian cuadrature formulae for matrix weights*, Linear Algebra Appl. **355** (2002), 119-146.

[DV] A. J. Duran and W. Van Assche, *Orthogonal matrix polynomials and higher order recurrence relations*, Linear Algebra Appl. **219** (1995), 261-280.

[DS] H. Dette and J. Studden, *Matrix measures, moment spaces and Favard's theorem for the interval* $[0,1]$ *and* $[0,+\infty)$, Linear Algebra Appl. **345** (2002), 169-193.

[G] J.S. Geronimo, *Scattering theory and matrix orthogonal polynomials on the real line*, Circuits Systems Signal Process **1** (1982) , 471-495.

[GV] J.S. Geronimo and W. Van Assche, *Orthogonal polynomials with asymptotically periodic recurrence coefficients*, J. Approx. Theory **46** (1996) , 251-283.

[GLR] I. Gohberg, P. Lancaster and L. Rodman, *Matrix polynomials*, New York, Academic Press (1982).

[HJ1] R. A. Horn and C. A. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge, Cambridge University Press (1985).

[HJ2] R. A. Horn and C. A. Johnson, *Topics in matrix analysis*, Cambridge, Cambridge University Press (1991).

[ILMV] M. E. H. Ismail, J. Letessier, D. R. Masson and G. Valent, *Birth and dead proccesses and orthogonal polynomials*, Orthogonals Polynomials: theory and practice P. Nevai (Ed.) NATO-ASI Series C **294**, Kluwer, Dordrecht (1990) , 229 - 255.

[J] N. Jacobson, *Basic Algebra I*, San Francisco, W.H. Freeman and Company.

[Ko] A. N. Kochubei, *The extreme points of the set of solutions of the truncated matrix moment problem*, (Ucraniano) Dopovidï Akad. Ukraïn. RSR Ser. A (1972), 418-421.

[Kr] M. G. Krein, *Fundamental aspects of the representation theory of Hermitian operators with deficiency index* (m, m), AMer. Math. Soc. Transl. (2) **97**, 75-143; Original en Ukrain. Mat. Z. 1, 3-66.

[KV] A. B. J. Kuijlaars and W. Van Assche, *The asymptotic zero distribution of orthogonal polynomials with varying recurrence coefficients*, J. Approx. Theory **99** (1999), 535-548.

[L1] P. Lopez-Rodriguez, *The Nevanlinna parametrization for a matrix moment problem*, Math. Scand. **89** (2001), 245-267.

[L2] P. Lopez-Rodriguez, *Riesz's Theorem for Orthogonal Matrix Polynomials*, Const. Approx. (1999) **15**, 135-151.

[LCM] L. Jodar, R. Company and E. Navarro, *Laguerre matrix polynomials and systems of second order differential equations*, Appl. Numer. Math **15** (1994), 53-63.

[LDP] L. Jodar, E. Defez and E. Ponsola, *Matrix quadrature integration and orthogonal matrix polynomials*, Congressus Numerantium **106** (1995) 141-153.

[LD] L. Jodar and E. Defez, *Orthogonal polynomials with respect to conjugate bilinear matrix moment funcitional: basic theory*, J. Approx. Th. Appl. **13** (1997) 66-79.

[M] A. Markov, *Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continnues*, Acta Math. **19** (1895) 93-104.

[MNV] A. Mate, P. Nevai and W. Van Assche, *The supports of measures associated with orthogonal polynomials and the spectra of the related self-adjoint operators*, Rocky Mt. J. Math. **21** (1991), 501-527.

[MR] D. R. Masson and J. Repka, *Spectral theoty of Jacobi matrices in $\ell^2(\mathbb{Z})$and the su(1,1) lie algebra*, SIAM J. Math. Anal. **22** (1991), 1131-1146.

[N] P. G. Nevai, *Orthogonal polynomials*, Providence AMS Memoir, 213 (1979).

[NS] P. G. Nevai and J. Sánchez-Dehesa, *On Asymptotic average properties of zeros of orthogonal polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **10** (1979), 1184-1192.

[P] W. Pruitt, *Bilateral birth and death processes*, Transactions Amer. Math. Soc. **107** (1962), 508-525.

[R] F. Rellich, *Perturbation theory of eigenvalue problems*, New York, Gordon and Breach (1969).

[SV] A. Sinap and W. Van Assche, *Polynomials interpolation and Gaussian quadrature for matrix-valued functions*, Linear Algebra Appl. **207** (1994), 71-114.

[V1] W. Van Assche, *Asymptotics for orthogonal polynomials*, Berlin, New York, Lecture Notes in Math., 1265, Springer-Verlag (1987).

[V2] W. Van Assche, *The ratio of q-like orthogonal polynomials*, J. Math. Anal. Appl. **128** (1987), 535-547.

[V3] W. Van Assche, *Asymptotic properties of orthogonal polynomials from their recurrence formula, I*, J. Approx. Theory **44** (1985) , 258-276.

[V4] W. Van Assche, *Asymptotic properties of orthogonal polynomials from their recurrence formula, II*, J. Approx. Theory **52** (1988) , 322-338.

[V5] W. Van Assche, *Weak convergence of orthogonal polynomials*, Indag. M. **6(1)** (1995) , 7-23.

[YMP] H. O. Yakhlef, F. Marcellán and M. A. Pinãr, *Relative asymptotics for orthogonal matrix polynomials with convergent recurrence coefficients*, J. Approx. Theory **111** (2001) , 1-30.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de Enrique Jerónimo Vidal

titulada Estudio Asintótico de Polinomios Matriciales Ortogonales

acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente cum laude por unanimidad

Sevilla, 7 de mayo 2003

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Presidente El Secretario, El Doctorado,