



TESIS DOCTORAL



UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
CENTRO DE INVESTIGACIONES

Queda depositada esta Tesis Doctoral  
al tomo 60 número 191 del libro  
correspondiente.

Sevilla, 22 de mayo de 2002

El Jefe del Negociado de Teles.

*Rosario Horta*

CONTROL PREDICTIVO MULTIVARIABLE  
PARA SISTEMAS CON CEROS DE TRANSMISIÓN  
EN EL SEMIPLANO DERECHO

~~W. M. G. G.~~

**Autor:** Winston Manuel García Gabín

*E. F. Camacho*

**Director:** Eduardo Fernández Camacho



TESIS DOCTORAL



CONTROL PREDICTIVO MULTIVARIABLE  
PARA SISTEMAS CON CEROS DE TRANSMISIÓN  
EN EL SEMIPLANO DERECHO

por

**Winston Manuel García Gabín**

Ingeniero Electricista por la Facultad de Ingeniería  
de la Universidad de Los Andes, Venezuela

Presentada en la

**Escuela Superior de Ingenieros**

de la

**Universidad de Sevilla**

para la obtención del

**Grado de Doctor Ingeniero Industrial**

Sevilla, Mayo de 2002

A mi familia, y, en especial a la memoria de Wuiston y Manuel.

# Agradecimiento

Deseo expresar mi gratitud a todas aquellas personas que, de una u otra manera, han contribuido a la realización de este trabajo, especialmente a:

El Profesor Eduardo Fernández Camacho, mi director de tesis, por sus numerosos comentarios constructivos, su amistad y su dedicación a mi formación, siempre lo tendré como referencia por su por su incentivo e ímpetu de trabajo.

Darine Zambrano, por su apoyo crucial en la realización de este objetivo.

Fernando Dorado y Ascensión Zafra, por la minuciosa revisión de este documento.

Los camaradas del grupo de investigación, por las interesantes discusiones en control y otros temas, en particular a Daniel Limón.

Mis amigos del Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, quienes con su trato afable hicieron agradable mi estancia en la Universidad de Sevilla.

La Universidad de Los Andes y al Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación por el soporte económico.

# Resumen

Esta tesis se centra en el estudio de los controladores predictivos multivariables y su aplicación a los sistemas con ceros de transmisión en el semiplano derecho. Este tipo de controladores presentan en lazo cerrado un comportamiento inestable bajo ciertas condiciones de los parámetros de ajuste cuando es utilizado para controlar procesos con ceros de transmisión en el semiplano derecho. Es bien conocido en la literatura las dificultades que se presentan al diseñar controladores para este tipo de procesos. Sin embargo en el ámbito del control predictivo, a pesar de que existen algunos antecedentes en esta área que muestran como para el caso de sistemas monovariables, se presentan problemas de inestabilidad al controlar sistemas de fase no mínima, en la literatura de control predictivo concretamente en el caso multivariable no se ha estudiado este problema con detalle, por lo cual no existe un conocimiento claro de como los sistemas con ceros de transmisión en el semiplano derecho afectan a los controladores predictivos multivariables, y menos aún sobre que hacer para lograr un buen comportamiento en lazo cerrado.

Con esta tesis se realizan contribuciones en esta dirección. Se comienza por identificar el problema en los controladores predictivos multivariables. Estableciendo bajo que condiciones de los parámetros de ajuste surge el problema de inestabilidad en los controladores al ser aplicado en procesos con ceros de transmisión en el semiplano derecho. Una de las principales dificultades que se presentan con estos procesos es que el problema pasa desapercibido por completo al momento de realizar una aplicación práctica. En los sistemas multivariables el cero de transmisión es una dinámica oculta, que no puede ser detectada a primera vista en un modelo con funciones de transferencia, y mucho menos con un modelo del tipo respuesta escalón troncada que es el utilizado por buena parte los controladores predictivos industriales.

Una vez determinadas las razones que provocan la inestabilidad, se analizan como los elementos que componen un controlador predictivo pueden ser utilizados para solventar el problema de inestabilidad y lograr un comportamiento estable del sistema en lazo

cerrado.

Se estudia entonces como la conveniente selección de los parámetros de ajuste, que constituye la alternativa más asequible por parte del ingeniero de control para realizar cambios en el controlador predictivo, permite obtener un comportamiento estable en el sistema en lazo cerrado.

El modelo de predicción es una de las opciones que puede ser cambiada como parte del proceso de diseño del controlador predictivo, en este sentido se estudian como realizando aproximaciones lineales del modelo no lineal que no presenten ceros de transmisión en el semiplano derecho pueden ser utilizadas como modelo de predicción en el controlador predictivo.

Como última modificación planteada se presenta una modificación de la función objetivo del controlador predictivo, realizada bajo el enfoque de la combinación de las técnicas de control predictivo y control por modos deslizantes. Esto da lugar a un controlador predictivo por modos deslizantes, que presenta un comportamiento estable al aplicarlo a sistemas con ceros de transmisión en el semiplano derecho en las mismas condiciones en las que un controlador predictivo convencional presentaría un comportamiento inestable.

Finalmente se concluye presentando las conclusiones de los resultados obtenidos y planteando las futuras líneas de investigación que surgen en base a ellos.

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Motivación . . . . .	1
1.2	Estado del arte . . . . .	3
1.2.1	Los ceros en el semiplano derecho . . . . .	3
1.2.2	Influencia de los ceros SD en los controladores . . . . .	4
1.2.3	Control por modos deslizantes . . . . .	5
1.2.4	Influencia de los ceros SD en controladores que utilizan el modelo del proceso . . . . .	6
1.2.5	Control predictivo . . . . .	7
1.3	Planteamiento de la Tesis . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Control predictivo basado en modelo</b>	<b>11</b>
2.1	Fundamentos del control predictivo basado en modelo . . . . .	11
2.2	Descripción general del algoritmo de control . . . . .	16
2.3	Tendencias de los controladores predictivos basados en modelo . . . . .	18

<b>3</b>	<b>Planteamiento del problema</b>	<b>21</b>
3.1	Los ceros en los sistemas . . . . .	21
3.2	MPC en sistemas con ceros en el semiplano derecho . . . . .	26
3.2.1	MPC con modelo de predicción del tipo CARIMA . . . . .	26
3.2.2	MPC con modelo de predicción del tipo respuesta impulsional .	31
3.3	Resumen . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Parámetros de ajuste</b>	<b>37</b>
4.1	Influencia de los ceros de Transmisión SD en el MPC . . . . .	37
4.1.1	Análisis de la ubicación de los polos en lazo cerrado . . . . .	41
4.1.2	Análisis del índice de comportamiento en lazo cerrado . . . . .	46
4.2	Ejemplos de aplicación . . . . .	48
4.3	Resumen . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Cambios en el modelo de predicción</b>	<b>55</b>
5.1	Sistema monovariable . . . . .	58
5.1.1	Factorización de $G(s)$ minimizando el índice IAE ( $F_1$ ) . . . . .	59
5.1.2	Factorización de $G(s)$ minimizando el índice ISE ( $F_2$ ) . . . . .	59
5.1.3	Aproximación de Primer Orden con Retardo . . . . .	60
5.1.4	Comportamiento en lazo cerrado . . . . .	62
5.2	Sistemas multivariables . . . . .	70

5.2.1	Factorización no diagonal . . . . .	70
5.2.2	Factorización diagonal . . . . .	77
5.2.3	Aproximación de Primer Orden con Retardo . . . . .	80
5.2.4	Comportamiento en lazo cerrado . . . . .	83
5.3	Resumen . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Control predictivo por modos deslizantes</b>	<b>91</b>
6.1	Control por modos deslizantes . . . . .	91
6.2	Control predictivo por modos deslizantes monovariable . . . . .	93
6.2.1	Parámetros de ajuste . . . . .	99
6.2.2	Relaciones en lazo cerrado . . . . .	108
6.2.3	Ejemplo de aplicación: Reactor isotérmico Van de Vusse . . . . .	109
6.3	Control predictivo por modos deslizantes multivariable . . . . .	116
6.3.1	Ejemplo de aplicación sistema de cuatro tanques . . . . .	122
6.4	Control predictivo por modos deslizantes con restricciones . . . . .	130
6.5	Resumen . . . . .	133
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>137</b>
<b>A</b>	<b>Modelos no lineales</b>	<b>143</b>
A.1	Reactor isotérmico Van de vusse . . . . .	143
A.2	Sistema de cuatro tanques interconectados . . . . .	148

A.2.1 Localización del cero . . . . . 151

A.2.2 Dirección del cero . . . . . 152

A.2.3 Matriz de Ganancia Relativa . . . . . 152

**Bibliografía** . . . . . **155**

# Índice de Figuras

2.1	Diagrama de bloques de un controlador predictivo basado en modelo . . . . .	16
2.2	Evolución temporal de las variables del proceso . . . . .	17
3.1	Respuesta escalón sistemas de fase no mínima con numero pares e im- pares de ceros SD . . . . .	23
3.2	Diagrama de bloques en lazo cerrado . . . . .	32
4.1	Salidas para entradas escalón del proceso en lazo abierto para los puntos $P_1$ y $P_2$ . . . . .	39
4.2	Salidas para entradas escalón del proceso en lazo abierto para los puntos $P_1$ y $P_2$ . . . . .	39
4.3	Salida del proceso con ceros estables $G_-$ . . . . .	41
4.4	Salida del proceso con ceros SD $G_+$ . . . . .	42
4.5	Módulo del Polo Mayor( $N_2 = N_3, \lambda$ ) . . . . .	43
4.6	Módulo del polo mayor( $N_2, N_3, \lambda = 0$ ) . . . . .	44
4.7	Módulo del polo mayor( $N_2, N_3 = 1, \lambda$ ) . . . . .	45
4.8	Módulo del polo mayor( $N_2, N_3 = 1, \lambda$ ) . . . . .	46

4.9 SVAE en función de  $N_u$  y  $\lambda$  . . . . . 48

4.10 Salida del proceso con ceros SD  $G_+$  . . . . . 49

4.11 Salida del proceso con tres ceros de transmisión SD . . . . . 50

4.12 Salida del proceso con cero SD monovariable . . . . . 52

5.1 Diagrama de bloques del IMC . . . . . 56

5.2 Comparación de las salidas para un cambio del 10% en  $F_{ent}$  . . . . . 62

5.3 Superficies de la SVAE en función de  $\lambda$  y  $N_u$  con  $N_2 = 40$  . . . . . 64

5.4 Superficies del SvAE con  $N$  y  $N_u$  variables, y  $\lambda = 1$  . . . . . 65

5.5 Concentración de salida para los distintos modelos con un cambio de referencia . . . . . 66

5.6 Salida para los distintos modelos con cambio de referencia con los parámetros que minimizan el IAE en cada caso . . . . . 67

5.7 Variables de proceso para cambios en el modelo . . . . . 68

5.8 Variables de proceso para perturbaciones en la concentración del flujo de alimentación del reactor . . . . . 69

5.9 Comparación de las salidas para un cambio del 10% en  $u_1$  . . . . . 75

5.10 Comparación de las salidas para un cambio del 10% en  $u_2$  . . . . . 76

5.11 Comparación de las salidas del modelo no lineal con las obtenidas con la factorización diagonal, para un cambio del 10% en  $u_1$  . . . . . 79

5.12 Comparación de las salidas del modelo no lineal con las obtenidas con la factorización diagonal, para un cambio del 10% en  $u_2$  . . . . . 80

5.13 Comparación de las salidas del modelo POR para un cambio del 10% en  $u_1$  . . . . . 81

5.14 Comparación de las salidas del modelo POR para un cambio del 10% en $u_2$ . . . . .	82
5.15 SVAE para la salida $y_1$ con $N_u$ y $\lambda$ variable, para los distintos modelos de predicción . . . . .	84
5.16 SVAE para la salida $y_2$ con $N_u$ y $\lambda$ variable, para los distintos modelos de predicción . . . . .	85
5.17 SVAE para la salida $y_1$ variando los horizontes $N_2$ y $N_u$ con los distintos modelos de predicción . . . . .	86
5.18 SVAE para la salida $y_2$ variando los horizontes $N_2$ y $N_u$ con los distintos modelos de predicción . . . . .	87
5.19 Cambio de referencia del MPC con los distintos modelos de predicción .	88
6.1 Efecto del parámetro de ajuste $\rho$ . . . . .	96
6.2 SVAE en función de los cambios en los horizontes de predicción y control	100
6.3 Cambios en los horizontes de predicción y control . . . . .	101
6.4 SVAE en función de los cambios en los horizontes control y la penalización del esfuerzo de control . . . . .	102
6.5 Cambios en la penalización del esfuerzo de control . . . . .	103
6.6 SVAE en función de $K_D$ y $\rho$ . . . . .	104
6.7 Cambios en $K_D$ . . . . .	105
6.8 Cambios en $\rho$ . . . . .	106
6.9 Cambios en la dinámica de la superficie . . . . .	107
6.10 Concentración $C_b$ a la salida para el cambio de referencia de ajuste . .	111
6.11 Concentración $C_b$ a la salida para cambios de referencia . . . . .	112

6.12 Concentración  $C_b$  a la salida ante cambios en el modelo . . . . . 114

6.13 Concentración  $C_b$  a la salida ante perturbaciones en  $C_{ae}$  . . . . . 115

6.14 SVAE en función de  $N_2$  y  $N_u$  para el SMPC y el MPC . . . . . 123

6.15 SVAE en función de  $N_u$  y  $\lambda$  para el SMPC y el MPC . . . . . 124

6.16 SVAE en función de  $K_D$  y  $\rho$  para el SMPC . . . . . 125

6.17 Variables del sistemas un cambio de referencia a 7,5 [V] . . . . . 126

6.18 Variables del sistemas un cambio de referencia a 9 [V] . . . . . 128

6.19 Variables del sistemas un cambio de referencia a 4 [V] . . . . . 129

6.20 Variables del sistemas ante una perturbación en un orificio de descarga 130

6.21 Variables del sistemas ante una perturbación en una de las válvulas de  
3 vías . . . . . 131

6.22 Restricciones . . . . . 134

A.1 Diagrama esquemático del reactor . . . . . 145

A.2 Aproximación del proceso a un modelo de primer orden con retardo . . 147

A.3 Diagrama esquemático del proceso de cuatro tanques . . . . . 149

# Índice de Tablas

4.1	Polos y Ceros del sistema de tanques interconectados . . . . .	40
5.1	IAE de los modelos aproximados respecto al modelo no lineal . . . . .	62
5.2	Parámetros del MPC para cada uno de los modelos . . . . .	64
5.3	SVAE de los diferentes modelos en lazo cerrado para un cambio de referencia escalón . . . . .	66
5.4	SVAE de los modelos aproximados en lazo cerrado con cambio de referencia	67
5.5	IAE de los modelos aproximados respecto al modelo no lineal . . . . .	77
5.6	IAE del modelo POR respecto al modelo no lineal . . . . .	82
5.7	Parámetros del MPC con los distintos modelos de predicción, con el modelo de los cuatro tanques . . . . .	86
5.8	SVAE de los distintos modelos de predicción en lazo cerrado con los parámetros de ajuste seleccionados . . . . .	87
6.1	Valores de los índices de desempeño para diferentes horizontes de predicción y control . . . . .	101
6.2	Valores de los índices de desempeño para diferentes de la penalización del esfuerzo de control . . . . .	103
6.3	Valores de los índices de desempeño para diferentes de valores de $K_D$ .	105

6.4	Valores de los índices de desempeño para diferentes de valores de $\rho$ . . .	106
6.5	Valores de los índices de desempeño para diferentes de valores de $\rho$ . . .	107
6.6	Valores de los índices de desempeño para el cambio de referencia de ajuste	112
6.7	Valores de los índices de desempeño para el cambio de referencia . . . . .	113
6.8	Valores de los índices de desempeño para cambios en el modelo . . . . .	114
6.9	Valores de los índices de desempeño para perturbaciones en $C_{ae}$ . . . . .	115
6.10	Valores de los índices de desempeño del SMPC y el MPC para cambios de referencia a 7,5 V . . . . .	127
6.11	Valores de los índices de desempeño para el SMPC con el cambio de referencia a 9 V . . . . .	133
A.1	Valores de los parámetros del reactor . . . . .	145
A.2	Valores de las condiciones iniciales en el punto de operación del reactor	146
A.3	Polos y ceros del reactor . . . . .	147
A.4	Valores de los parámetros del sistema de cuatro tanques interconectados	150
A.5	Condiciones iniciales de los puntos de operación del sistema de cuatro tanques interconectados . . . . .	150
A.6	Ceros de transmisión . . . . .	151

# Capítulo 1

## Introducción

---

En este capítulo se presenta la motivación para el desarrollo de este trabajo. Se realiza una revisión del estado del arte del problema en estudio, dando finalmente un panorama de los objetivos y alcances cubiertos en esta tesis.

### 1.1 Motivación

La mayoría de las plantas industriales poseen gran cantidad de variables que tienen que ser controladas y diversas variables manipuladas utilizadas para el control del proceso. Debido a las características internas de ciertos sistemas, una variable manipulada puede afectar a una sola variable controlada, por lo que es posible analizar la planta por medio de varios lazos independientes monovariables, sin embargo en muchos casos cuando una variable manipulada cambia, no solamente afecta a una variable controlada, si no que puede provocar perturbaciones en otras variables controladas. Esta interacción entre las variables del proceso produce el deterioro del comportamiento del sistema controlado. Cuando la interacción entre las variables del proceso no es despreciable, se habla de un sistema multivariable propiamente dicho y la planta debe considerarse como un sistema único con múltiples entradas y múltiples salidas. El control de procesos multivariables es uno de los campos más complejos y difíciles del control automático debido a la dificultad que las interacciones producen.

Los procesos de naturaleza multivariable, son sistemas con sensores que miden variables controladas de diversos tipos, cuantitativas (nivel, flujo, peso, etc.), ambientales (temperatura de líquidos devueltos al medio ambiente, análisis de gases, etc.), cualitativas (características físicas y químicas del producto, etc.), económicas (energía eléctrica, combustible, etc.). Disponen de varios elementos finales de control para llevar a la planta a través de los diferentes puntos de operación deseados (Shinskey, 1983). Mantener cada una de las variables controladas en sus respectivos valores de referencia ante diferentes perturbaciones en los sistemas multivariables, se convierte en una tarea difícil debido a las no linealidades (Shinskey, 1996), la presencia de elevados retardos, restricciones en las variables (Deshpande, 1983) y la interacción entre las variables de la planta. Adicionalmente, en los sistemas existen incertidumbres tales como errores de modelado, dinámicas del proceso no tomadas en cuenta en el modelo y perturbaciones y los ceros de transmisión en el Semiplano Derecho del plano complejo, que representan uno de los obstáculos más difíciles para lograr un buen comportamiento de los sistemas multivariables en lazo cerrado (Sain y Schrader, 1990).

La utilización de  $n$  controladores monovariables para controlar un proceso multivariable es una solución poco eficiente debido a que su comportamiento es sustancialmente degradado por la interacción entre las variables del proceso. Esta forma de abordar el problema de control de este tipo de procesos no es lo suficientemente versátiles como para compensar todas las complejidades de este tipo de sistemas (Ogunnaike y Ray, 1994).

Una de las técnicas de control avanzadas de amplia utilización y con un gran auge, son los controladores predictivos basados en modelos « Model based Predictive Control » (MPC) (Frank, 1999). En un estudio sobre las necesidades de las técnicas de control en la industria japonesa, se puede observar los controladores predictivos no solamente presentan una alta tasa de utilización en comparación con otras estrategias de control avanzado, sino que además se tienen grandes expectativas en el futuro sobre el efecto de la utilización de estos algoritmos de control debido a sus posibilidades técnicas de implementación y el grado de satisfacción en los resultados de sus aplicaciones industriales (Takatsu *et al.*, 1998). Los controladores predictivos han tenido un notable crecimiento en el número de aplicaciones industriales y proveedores de sistemas de control que lo comercializan (Richalet, 1993; Qin y Badgwell, 1997; Allgöwer y (Ed), 2000). Adicionalmente, también se puede observar en cualquier congreso especializado en el área del control automático, la tendencia al aumento en el número grupos de investigación a nivel mundial dedicados a su estudio. A pesar de que los sistemas con ceros en el Semiplano Derecho (SD) o ceros "inestables" como también se les suele llamar, son bastantes comunes, encontrándose este tipo de dinámica en muchos sistemas (reactores, hornos, calderas, columnas de destilación, sistemas de tanques interconectados,

sistemas aeronáuticos, etc.) y que han sido bastante estudiados en la literatura, en el ámbito específico del control predictivo y en particular en el caso multivariable, escasamente se trata el problema de control de sistemas con ceros SD. Es muy frecuente encontrar que en la sección introductoria de textos de control predictivo, se hable de las virtudes de estos algoritmos de control para sistemas con dinámicas difíciles, citando las ventajas de su aplicación a los sistemas de fase no mínima ((ed) Clarke, 1994; Soeterboek, 1991; Ogunnaike y Ray, 1994; Maciejowski, 2001). Sin embargo se analiza muy ligeramente los problemas de inestabilidad que surgen en los controladores predictivos para los sistemas con ceros SD.

En el caso de sistemas multivariables el problema de inestabilidad que surge cuando se aplica el controlador predictivo basado en modelo a sistemas con ceros de transmisión SD es mucho más grave aún, ya que no aparecen explícitamente como ceros en ninguno de los elementos que componen la matriz de transferencia. Sin embargo se hace caso omiso de su estudio y la mayoría de las veces ni siquiera se hace mención del mismo, y menos aún como hacerle frente con los parámetros de diseño del controlador predictivo. En esta tesis se realizan contribuciones originales en este sentido, presentando un análisis sobre las situaciones en las que se presenta el problema de inestabilidad en los algoritmos de control predictivo al ser aplicado en procesos con ceros SD, así como dar soluciones para su utilización satisfactoria en este tipo de procesos.

## 1.2 Estado del arte

### 1.2.1 Los ceros en el semiplano derecho

El interés del estudio de los sistemas con ceros SD y sus implicaciones en los sistemas de control se pone de manifiesto desde los primeros momentos en la evolución del control automático (Athanaszades *et al.*, 1962; Brockett, 1965). Incluso en el contexto multivariable se encuentran definiciones de ceros de transmisión SD y análisis sobre las implicaciones en los sistemas de control (Simon y Mitter, 1969; Davison, 1969; Davison, 1970). A pesar de que diversos autores antes del año 1970 reseñan el concepto de ceros SD para sistemas multivariables, los trabajos de Rosenbrock constituyen el primer estudio en detalle de este tipo de sistemas, en relación a las definiciones de los ceros en los sistemas multivariables y su clasificación (Rosenbrock, 1973; Rosenbrock, 1974*b*; Rosenbrock, 1974*a*). Con los trabajos de Rosenbrock se inicia un gran auge en el estudio de los ceros en los sistemas, el cual se mantuvo durante las décadas de los años 70 y 80. Se llevaron a cabo análisis de las propiedades de los ceros en los

sistemas estableciendo las condiciones de controlabilidad (Glover y Silverman, 1976), alcanzabilidad y observabilidad (Suda y Mutsuyoshi, 1978) bajo el enfoque de variables de estado. El problema del bloqueo de la dinámica interna del sistema manteniendo la salida en cero se presenta en (Karkanias y Kouvaritakis, 1979) y en el caso multivariable (Al-Nasr *et al.*, 1981; Al-Nasr, 1982).

### 1.2.2 Influencia de los ceros SD en los controladores

La dificultad de controlar sistemas con ceros SD, ha sido reconocida en la literatura desde hace bastante tiempo, puesto que ha medido de que se fue desarrollado el estudio de los ceros de transmisión en los sistema se comenzó a analizar su influencia en los sistemas de control por realimentación. El desarrollo de cómo la ley de control por realimentación de estados en ciertas condiciones produce una cancelación completa de los ceros del sistema es presentado en (Wolovich, 1974). Con la metodología de variables de estado se demuestra como en los compensadores diseñados para regular sistemas multivariables, el mecanismo de actuación es realizar una cancelación de polos y ceros, por lo que si el sistema tiene ceros SD presentará un comportamiento inestable (Francis y Wonham, 1975). Para la aplicación de una alta ganancia en el regulador lineal óptimo es necesario que los ceros del sistema multivariable se encuentre en el semiplano Izquierdo (Shaked y Kouvaritakis, 1977). Los ceros en los sistemas multivariables son cruciales en el diseño de servomecanismos de seguimiento, puesto que imponen limitaciones para lograr una función de transferencia estable con el sistema realimentado (Cheng y Desoer, 1980). Un estudio de las limitaciones en el comportamiento de la respuesta del proceso realimentado impuestas por los ceros SD se presenta en (Bristol, 1981). Un método de diseño para la utilización de un controlador por realimentación de estados de alta ganancia (regulador perfecto «Perfect regulator») para sistemas multivariables con cero SD es desarrollado en (Kimura, 1982), el controlador es llamado regulador subperfecto, y se basa en la factorización del modelo de la planta en dos partes una invertible y otra no invertible. Es bien conocido que los sistemas con ceros SD no son fáciles de controlar y que presentan severas limitaciones en el rendimiento del sistema en lazo cerrado. En el caso de los controladores adaptativos por modelo de referencia se presentan problemas debido a la cancelación de los ceros con polos, con lo cual en el caso de que la planta posea cero SD se produce inestabilidad en el sistema en lazo cerrado, el caso del controlador adaptativo de mínima varianza se soluciona este inconveniente incorporando en la función de costo la penalización del esfuerzo de control, lo cual evita la cancelación de los ceros SD (Clarke, 1984). A través de los estudios de numerosos investigadores durante los últimos años se ha demostrado que los sistemas con ceros SD limitan la posibilidad de alcanzar un buen comportamiento en lazo cer-

rado, independientemente de la estrategia de control utilizada (Morari y Holt, 1987). La dificultad de controlar sistemas con ceros SD, ha sido reconocida en la literatura desde hace bastante tiempo. Los ceros SD en los sistemas constituyen una dinámica difícil desde el punto de vista de control (Marlin, 1995). En el caso de sistemas monovariantes es conocido que los sistemas de fase no mínima presentan dificultades en el momento de diseñar estrategias de control. Estas vienen dadas por la dinámica en el sentido inverso que en los momentos iniciales tiende a alejarse del valor final de estado estacionario, lo que confunde al controlador (Ogunnaike y Ray, 1994). El aporte extra de fase introducido por el cero SD contribuye a desestabilizar el sistema en lazo cerrado al reducir el margen de fase (Ogata, 1998). Por otro lado surgen también comportamientos inestables debido a la cancelación de los ceros SD por polos SD en el controlador, en estrategias de control con un ajuste muy agresivo que tienden a buscar el control perfecto, es decir, una relación unitaria entre la entrada y la salida, utilizando en el controlador el modelo inverso de la planta (Morari y Zafriou, 1989). La presencia de ceros SD en las funciones de transferencia de los sistemas es identificada como responsable de dinámicas de difícil comportamiento, que son fuente de considerables dificultades en el diseño del controlador (Shinskey, 1996). La investigación de las limitaciones en el comportamiento de la respuesta del proceso en lazo cerrado impuestas por los ceros SD constituye una línea de investigación dentro de este contexto que se mantiene todavía con interés (Havre y Skogestad, 1997; Weller, 1999; Latawiec *et al.*, 1999; Ishitobi, 2000; Zaris *et al.*, 2001) a pesar de la diversidad de resultados en esta área que se han presentado en las últimas décadas.

### 1.2.3 Control por modos deslizantes

El Control por Modos Deslizantes «Sliding Mode Control» (SMC) es un tipo de control por estructura variable, que está siendo utilizado con muy buenos resultados en diversos sistemas en el campo de la electrónica de potencia, robótica, industria aeronáutica y aeroespacial (J, 1993). Debido a su robustez en el manejo de sistemas con perturbaciones, errores de modelado producidos por cambios en el proceso o dinámicas no tomadas en cuenta. En el desarrollo del SMC en su formulación convencional, al ser utilizado en sistemas con ceros SD cuando se aplica control equivalente para obtener la parte continua del controlador, el cero SD origina un polo SD en la ecuación del controlador con lo que éste presenta un comportamiento inestable. Esto trae como consecuencia que en el desarrollo de controladores de estructura variable se establece entonces la limitación de que el proceso tenga los ceros en el semiplano izquierdo. En general los desarrollos con la metodología habitual de controladores por estructura variable no pueden ser aplicados a sistemas con ceros SD, tanto monovariantes como

multivariables, empleando formulaciones en sistemas discretos o con sistemas continuos. Esta limitación en la aplicación de la técnica de control solamente a sistemas con cero en el semiplano izquierdo, se pone de manifiesto en controladores por estructura variable del tipo discretos (Chen y Furuta, 1999b), en controladores adaptativos discretos (Fukuda, 1993), en controladores multivariables continuos (Elmali y Olgac, 1992; Hsu *et al.*, 2001), controlador de estructura variable adaptativo multivariable (Chien *et al.*, 1996) y controladores discretos multivariables (Chen y Furuta, 1999a).

#### 1.2.4 Influencia de los ceros SD en controladores que utilizan el modelo del proceso

Algunas técnicas de control que utilizan expresamente el modelo del proceso presentan serias limitaciones en el momento de ser utilizadas en sistemas con ceros SD, puesto que en su formulación convencional requieren que la planta sea invertible y tenga una inversa estable. En estos casos se hace necesario recurrir a modificaciones alternativas para poder ser utilizadas en este tipos de sistemas, lo que conlleva a degradar considerablemente el comportamiento del controlador. Esto trae como consecuencia que se limite la aplicación de la técnica de control solamente en sistemas con ceros en el Semiplano Izquierdo (SI).

La técnica de control por síntesis directa «Direct Synthesis Control» (DSC) contiene el inverso de la planta como un factor común de la función de transferencia del controlador con lo que cancela la dinámica de los polos y los ceros de la planta, siendo necesario prestar atención en la aplicación a sistemas con ceros SD (Seborg *et al.*, 1989). Al aplicar las modificaciones en el DSC para ser utilizado en sistemas con ceros SD, el comportamiento del controlador es sustancialmente más bajo (Ogunnaike y Ray, 1994). En el caso de aplicar el Control por Modelo Interno «Internal Model Control» (IMC) a sistemas monovariables con ceros SD, el controlador resultante es inestable. Sin embargo es posible realizar para el diseño del IMC una factorización del modelo de la planta de forma tal de dividirlo en el producto de dos factores, uno no invertible y otro invertible, éste último puede ser utilizado para el diseño del controlador. Sin embargo, el comportamiento obtenido por el controlador está asociado a invertibilidad de la planta, por lo que para este tipo de sistemas el comportamiento en lazo cerrado se ve considerablemente deteriorado (Morari y Zafiriou, 1989).

El hecho de que el controlador contenga un término con la inversa del modelo de la planta es una característica común en las técnicas de diseño de controladores basados en modelo, que emplean una cancelación polos y ceros para lograr la función de

transferencia deseada en lazo cerrado (Seborg *et al.*, 1989). En general, las técnicas de control basadas en modelo comparten de una manera o de otra el concepto de la utilización del modelo inverso de la planta como parte del controlador, por lo que deben tomarse en cuenta consideraciones especiales para su utilización en sistemas con ceros SD (Ogunnaike y Ray, 1994).

### 1.2.5 Control predictivo

#### Sistemas monovariantes

En el contexto específico del control predictivo, los problemas de inestabilidad al aplicar un MPC a sistemas de fase no mínima han sido tratados por varios autores. La técnica de Control Algorítmico Basado en Modelo «Model Algoritmik Control» (MAC) que utiliza un modelo impulsional y en su función de costo no incluye la ponderación del esfuerzo de control, presenta problemas de inestabilidad al ser aplicado a sistemas con ceros SD y se demuestra que cuando el horizonte de predicción es un solo paso se produce una cancelación perfecta de los ceros SD con polos SD (Mehra y Rouhani, 1980), pero no se indica la manera para lograr un comportamiento estable. Para sistemas de fase no mínima el control predictivo generalizado tiende a eliminar la dinámica del proceso cuando la penalización del esfuerzo de control es cero y presenta problemas de inestabilidad cuando el horizonte de control y el horizonte de predicción son iguales a la unidad (Clarke *et al.*, 1987a). Para lograr estabilizar sistemas de fase no mínima se requiere que el valor del esfuerzo de control sea mayor que cero (Clarke *et al.*, 1987b). Con la inclusión de la penalización del esfuerzo de control, el problema de inestabilidad del control predictivo generalizado en sistemas de fase no mínima puede ser resuelto (Bitmead *et al.*, 1990). Al aplicar el DMC a un ejemplo de sistema con cero SD se muestra la tendencia al comportamiento oscilatorio (Seborg *et al.*, 1989). El controlador predictivo unificado «Unified Predictive Control», (UPC) puede resultar inestable en lazo cerrado cuando es aplicado a sistemas con ceros SD y la situación de inestabilidad puede ser evitada con el factor de ponderación del esfuerzo de control (Soeterboek, 1991). Cuando en el control predictivo generalizado la función de costo es ajustada como un horizonte de un solo paso, éste se reduce a un controlador generalizado de mínima varianza, teniendo ambos en común el problema de inestabilidad al ser aplicados a sistemas de fase no mínima. En general va a ser inestable si se emplea un solo paso de predicción en la función de costo cuando el esfuerzo de control sea diferente de cero, siempre y cuando, se utilice un valor bajo de la penalización del esfuerzo de control (Grimble, 1992). El Control por matriz dinámica «Dynamic Matrix Control» (DMC) presenta limitaciones en el comportamiento cuando el sistema contiene ceros SD

(Marlin, 1995). Cuando los horizontes de predicción y control son iguales a la unidad y la penalización del esfuerzo de control es cero, el controlador predictivo generalizado es inestable (Levine, 1996). En el caso de que el número de pasos de predicción sea unitario, el controlador predictivo adaptativo propuesto por (Martín y Rodellar, 1996) presenta un comportamiento inestable al aplicarse a un sistema de fase no mínima, debido a la presencia en el controlador de polos SD como resultado de la inversión del modelo del sistema. Para el MPC se demuestra que cuando los horizontes de control y predicción son iguales a la unidad y la penalización del esfuerzo de control es cero, el controlador es esencialmente la inversa de la planta, con lo cual si el sistema es de fase no mínima el controlador será internamente inestable (Maciejowski, 2001).

En la literatura de control predictivo monovariable se señala la detección del problema de inestabilidad al aplicarlo a sistemas de fase no mínima, en base a resultados obtenidos por simulaciones o aplicación práctica. Solo algunos autores demuestran como para el caso de horizontes iguales y penalización del esfuerzo de control cero se produce la cancelación perfecta del cero del modelo del sistema con un polo en el controlador. La solución propuesta en determinados artículos es la utilización de la penalización del esfuerzo de control, para lograr un salida estable.

### **Sistemas multivariabiles**

Las implicaciones en cuanto al comportamiento del controlador y la estabilidad del sistema en lazo cerrado que tienen los ceros SD en los sistemas monovariabiles, son más fuertes aún en el caso multivariable, ya que viene a complicar otras dificultades propias de estos sistemas como la interacción entre las variables del proceso. Para el IMC, además de las restricciones y deterioro del comportamiento mencionadas para el caso monovariable, en el caso multivariable se asume para el desarrollo del controlador que los ceros SD son de grado uno, es decir, no hay ceros SD múltiples, y además no existen cancelaciones de polos con ceros SD (Morari y Zafiriou, 1989). En (Zafiriou, 1990) se presenta como al aplicar un DMC a un sistema multivariable con ceros SD, se produce un comportamiento inestable cuando la penalización del esfuerzo de control es cero. También se muestra como aumentándolo lo suficiente puede ser estabilizada la salida del proceso. Al emplear un MPC multivariable con restricciones, existe un cierto grupo de restricciones con las cuales el MPC no depende de los parámetros de ajuste, es decir, los valores de las penalizaciones y de los horizontes en la función objetivo no producen efecto alguno en el comportamiento del controlador en lazo cerrado. En esta región de operación las acciones de control son determinadas únicamente por los requerimientos para satisfacer la combinación específica de las restricciones. Bajo esas condiciones si el

sistema presenta ceros SD, se producirá una cancelación en el controlador con polos SD y como consecuencia el controlador será inestable. Adicionalmente, a pesar de que los ceros del sistema multivariable sean estables, si alguna de las funciones que relacionan cada una de las entradas con las salidas presenta ceros SD, estos serán cancelados con polo SD en el controlador (Zafriou y Chiou, 1996). Un DMC es aplicado a un sistema multivariable con ceros SD en (Dai y Astrom, 1999) sin que se mencionen las dificultades de su aplicación a este tipo de sistemas, ni se alerte de los problemas de inestabilidad que pueden surgir en este tipo de sistemas al aplicar un controlador predictivo basado en modelo debidos a la cancelación de los ceros SD. (Gatzke *et al.*, 2000) indican que un ajuste agresivo en el DMC u otro MPC tiene el efecto de producir un controlador que es la inversa del proceso, con lo cual puede producir que el controlador tenga polos SD y sea por consiguiente inestable cuando es aplicado a sistemas con ceros SD. Sin embargo, no se establece en que condiciones se produce la cancelación, ni como debe ser ajustado el controlador predictivo basado en modelo para evitar el problema. Un análisis de la estabilidad para controladores predictivos multivariables empleando el enfoque polinomial se presenta en (Nunes *et al.*, 2001). En el ejemplo de aplicación utilizado se muestra como con los parámetros de sintonización propuestos inicialmente, producen un comportamiento inestable, sin percatarse que el problema de inestabilidad es producido por la presencia de un cero SD en el modelo de la planta estudiado. Un nuevo grupo de parámetros es propuesto para lograr la estabilización del sistema, sin indicar el procedimiento utilizado para obtenerlos, ni señalar cual es el realmente el problema que se ha solucionado con los nuevos parámetros de ajuste. Un mejor comportamiento en lazo cerrado para el controlador predictivo basado en modelo al ser aplicado a un sistemas multivariable con ceros SD, se logra con la adecuada utilización de una ponderación variante en el tiempo, penalizando los términos asociados con los estados y las restricciones de salida (Hovd y Braatz, 2001).

Para el caso multivariable no se ha encontrado en la literatura una demostración bajo que condiciones se produce inestabilidad al aplicar un controlador predictivo multivariable a sistemas con ceros de transmisión en el SD. Diversos artículos tanto prácticos como basados en hacen simulaciones hacen referencia a la aplicaciones a este tipos de sistemas, sin destacar la presencia del problema ni establecer la pautas bajo las cuales ajustaron el controlador predictivo para solucionar el problema.

Se encuentra a pesar de que los ceros de transmisión en sistemas multivariables no son un descubrimiento reciente, las implicaciones en los algoritmos de control multivariables contemporáneos, en cuanto a estabilidad, máximo desempeño que se puede obtener del controlador, robustez, etc, continúan siendo una línea de investigación abierta donde las contribuciones son bien recibidas, en vista del incremento de aplicaciones en donde se están empleando controladores multivariables.

## 1.3 Planteamiento de la Tesis

La tesis se centra en el estudio de los problemas de la utilización de controlador predictivo basado en modelo en sistemas con ceros SD haciendo especial énfasis en los sistemas multivariables, aunque también se contemplan los sistemas monovariables. La tesis se estructura en seis capítulos. En el primero se ha hecho introducción, señalando la motivación al estudio del tema de investigación y se ha dado un panorama al estado del arte. Una breve introducción a los controladores predictivos basados en modelo es expuesta en el Capítulo 2. En el capítulo 3 se realiza una introducción concisa de la teoría de los ceros en los sistemas, y se demuestra en qué condiciones se presentan problemas de inestabilidad al aplicar control predictivo en procesos con ceros SD. Los capítulos siguientes estudian como solventar el problema con cada uno de los bloques principales que componen a un controlador predictivo. De esta manera, el capítulo 4 muestra como lograr una salida estable con una adecuada sintonización de los parámetros de ajuste del controlador predictivo. En el capítulo 5 se analiza como cambiando el modelo de predicción por medio de otros modelos se logra evitar el problema de inestabilidad. El capítulo 6 presenta la modificación de la función objetivo del controlador predictivo bajo un enfoque que combina las técnicas de control predictivo y control por modos deslizantes, dando lugar al desarrollo de un control predictivo por modos deslizantes, que resulta adecuado para ser aplicado a sistemas con ceros SD. Los resultados obtenidos en el desarrollo de la tesis se ilustran por medio de dos ejemplos no lineales con ceros SD, que constituyen ejemplos de referencia en el ámbito del control de procesos. Para el caso monovisible se utilizó el reactor Van de vusse y para el caso multivariable el sistema de cuatro tanques interconectados. Finalmente se presentan las conclusiones y futuras líneas de investigación.

## Capítulo 2

# Control predictivo basado en modelo

---

El objetivo de este capítulo es presentar una descripción concisa de los controladores predictivos basados en modelo. Se señalan los elementos primordiales que comparten este tipo de controladores, se realiza una breve reseña de su evolución, se presenta una descripción general del algoritmo, y finalmente se señalan las tendencias actuales en los controladores predictivos.

### 2.1 Fundamentos del control predictivo basado en modelo

El control predictivo basado en modelo «Model Predictive Control» (MPC), más que un controlador específico identifica a una familia de algoritmos de control que presentan una serie de características comunes. Los principios fundamentales que comparten los controladores predictivos basados en modelo son:

- La utilización explícita de un modelo del sistema, para realizar una predicción del comportamiento futuro de las variables que describen la dinámica del proceso.
- La obtención de una secuencia óptima de actuaciones de las variables manipuladas, basadas en la minimización de una o más funciones objetivo, que son

requeridas para conducir las variables controladas del sistema al valor deseado de referencia. En el proceso de minimización de la función de objetivo el MPC puede estar sujeta a restricciones en las variables del proceso, siendo esta una de sus características más valoradas en el ámbito industrial, y que lo diferencia de la gran mayoría de las otras técnicas de control.

- La utilización de una estrategia de horizonte deslizante, es decir, de la secuencia de actuaciones de las variables manipuladas obtenidas solo es aplicada al sistema el primer elemento de dicha secuencia, y en el siguiente instante de tiempo es calculada una nueva secuencia de actuaciones de las variables manipuladas.

Estos principios generales, en los que se fundamentan los algoritmos de control predictivo basados en modelo, lo convierten en una estrategia de control de naturaleza abierta, debido a la flexibilidad que permiten para la incorporación de innovaciones, virtud que le ha permitido ir evolucionando con el paso del tiempo. Los controladores predictivos basados en modelo se diferencian entre si básicamente en dos aspectos, el tipo de modelo utilizado para realizar la representación de la dinámica del sistema con sus perturbaciones, y la forma de la función objetivo a optimizar utilizada para obtener la secuencia óptima de actuaciones que se aplicará al sistema empleando una estrategia de horizonte deslizante.

Es difícil establecer con claridad el origen de la utilización de estos principios generales, sin embargo, en la teoría de control óptimo se encuentran las ideas incipientes de los controladores predictivos. La relación entre el problema de control óptimo en tiempo mínimo y programación lineal es presentado en (Zadeh y Whalen, 1962). Un controlador que utiliza un horizonte deslizante es descrito en (Propoi, 1963). El desarrollo de un controlador óptimo por realimentación es obtenido resolviendo un problema de control en lazo abierto, utilizando las mediciones de los valores actuales de los estados del proceso, y calculando una función de control en lazo abierto. Seguidamente la primera parte de esta función de control es utilizada durante un período corto de tiempo, después del cual unas nuevas mediciones de las variables del proceso son realizadas y una nueva función de control en lazo abierto es calculada con los nuevos valores medidos (Lee y Markus, 1967). Este controlador es realizado empleando programación lineal, para sistemas lineales con restricciones en las acciones de control. El concepto de horizonte deslizante es también empleado en un controlador con estimación óptima lineal cuadrática en (Thomas, 1975). A pesar de que estos principios generales habían venido siendo utilizados, una contribución determinante que estimuló en gran medida el desarrollo de los controladores predictivos basados en modelo fue el hecho de poner estas ideas en práctica en la industria, aspecto que despertó un gran interés tanto en el ámbito industrial, como era de esperar, como en el académico. En este sentido hay que

destacar los trabajos publicados por (Richalet *et al.*, 1976; Richalet *et al.*, 1978), donde se describe la técnica de Control heurístico Predictivo Basado en Modelo «Model Predictive Heuristic Control» (MPHC). Este algoritmo de control que se comercializa bajo el nombre «Identification and Command» con el acrónimo IDCOM<sup>©</sup>, que emplea como modelo de predicción una respuesta impulsiva truncada, con una función objetivo cuadrática sobre un horizonte finito. En el principio de los años setenta los ingenieros de la Shell<sup>©</sup> desarrollaron un algoritmo de control predictivo basado en modelo, que emplea un modelo de respuesta escalón, obtenido por medio de una prueba experimental en la planta, con una función objetivo cuadrática sobre un horizonte finito, llamado Control por Matriz Dinámica «Dynamic Matrix Control» (DMC) comercializado por DMC Corporation<sup>©</sup>, señalando su aplicación industrial (Cutler y Ramaker, 1979; Cutler y Ramaker, 1980). El DMC ha tenido un tremendo impacto en la industria, probablemente no hay una sola de las grandes compañías petroleras en el mundo, donde el DMC o algún otro producto funcionalmente similar, no sea utilizado en la mayoría de sus nuevas instalaciones o proyectos de remodelación y actualización (Morari y Lee, 1999). A pesar de que los primeros algoritmos de controladores predictivos basados en modelo fueron desarrollados y puestos en práctica en la industria, la indagación en los aspectos teóricos fundamentales, detalles de implementación, estudio de las limitaciones de los controladores predictivos, han sido resultados principalmente de contribuciones de la academia. Todo esto ha permitido la que han permitido extender la frontera del conocimiento y ampliar el ámbito de influencia y aplicación de esta estrategia de control.

Con los desarrollos del MPHC y el DMC casi simultáneamente y de forma independiente, algunos grupos de investigación en el contexto del problema de control adaptativo desarrollaron controladores predictivos con múltiples pasos para reemplazar el predictor de un solo paso que es la base del controlador adaptativo de mínima varianza (Keyser, 1991). El Control Predictivo Generalizado «Generalized Predictive Control» (GPC), fue propuesto por (Clarke *et al.*, 1985; Clarke *et al.*, 1987a; Clarke *et al.*, 1987b). Se llama generalizado puesto que permite ser utilizado en una amplia clase de procesos, incluyendo aquellos que son de fase no mínima, y también en procesos inestables en lazo abierto (Levine, 1996). Comparte las características comunes con el resto de controladores predictivos puesto que está basado en las mismas ideas generales. Ya desde sus inicios se pueden encontrar en la literatura referencias de aplicaciones de su utilización en el ámbito industrial debido a su ajuste intuitivo y prestaciones satisfactorias (Clarke, 1988). En el ámbito académico ha sido utilizado ampliamente debido a que su enfoque polinomial hace más flexible su análisis, lo que lo convierte en uno de los controladores predictivos más utilizados (Camacho y Bordons, 1999). El GPC es un controlador predictivo basado en modelo que es desarrollado en el mundo de la academia. El interés de sus creadores estaba centrado en el problema de proponer

una nueva alternativa de control adaptativo, por lo que continuando con la tradición de muchas de las técnicas de control adaptativo, utiliza un modelo de función de transferencia como modelo de predicción y una función objetivo cuadrática. Este origen es muy diferente al del DMC que fue desarrollado en el ámbito industrial con miras a afrontar problemas multivariables con restricciones, típicos de la industria petrolera y química.

Adicionalmente al GPC aparecen, el Control Adaptativo de Horizonte Extendido «Extended Horizon Adaptive Control» (EHAC), que emplea un modelo tipo función de transferencia sin tomar en cuenta el efecto de las perturbaciones (Ydstie, 1984). Aplicado al caso multivariable se encuentra el Regulador Adaptativo Multivariable Multipaso «MULTiStep Multivariable Adaptive Regulator» (MUSMAR) presentado por (Menga y Mosca, 1980), y se encuentra estudiado con más detalle en (Mosca, 1995), donde se destaca que es un controlador adaptativo de complejidad reducida que requiere poca información de antemano de la planta, y emplea un modelo basado en funciones de transferencia tipo Autorregresivo de media móvil controlado «Controller Auto-Regressive Integrated Moving-Average» (CARMA). El Controlador Adaptativo de Predicción Extendida «Extended Prediction Self Adaptive Control» (EPSAC), emplea también un modelo de función de transferencia para realizar la predicción (Keyser y Cuawenberghe, 1985). Este algoritmo realiza la predicción de las salidas como la contribución de dos componentes de acciones de control, una debido a la acción de control base que se establece de antemano, y, la otra obtenida mediante el proceso de optimización de una función objetivo, este esquema abre las perspectivas de la utilización del controlador predictivo basado en modelo aplicado al campo de sistemas no lineales, en donde las acciones de control son repetitivas por ejemplo en el campo de la robótica de brazos manipuladores (Keyser, 1998).

Los controladores predictivos basados en modelo constituyen una de las técnicas de control avanzado más utilizadas, encontrándose en la literatura muchas referencias de su utilización industrial tal es el caso de (Richalet, 1993; Qin y Badgwell, 1997) y en el contexto no lineal (Allgöwer y (Ed), 2000). Este incremento en la utilización se debe a que presentan una serie de ventajas que han incentivado su utilización y desarrollo, entre ellas se pueden destacar:

- Los conceptos que manejan son muy intuitivos, lo que permite que sean rápidamente dominados por personal técnico a pesar de que no posean un nivel elevado de conocimientos en teoría de control, el ajuste del algoritmo de control es sencillo y los parámetros de ajuste tienen un significado claro.
- La incorporación de las restricciones en el algoritmo de control es incluida in-

trínsecamente en su formulación. Esta capacidad de manejo de restricciones constituye una característica bastante apreciada en la práctica industrial.

- La extensión de la técnica a su aplicación al caso de sistemas multivariables se realiza de forma natural, sin requerir una mayor cantidad de parámetros de ajuste, además resolviendo de forma satisfactoria el problema de la interacción entre de las variables, y evitando además el problema de la selección de parejas entre variables de entrada y salida, como en el caso de las técnicas que utilizan  $n$ -controladores monovariantes.
- Incluye de manera inherente la compensación del retardo del sistema.
- Permite la compensación de perturbaciones medibles, corrigiéndolas con una acción de control precalculada «feedforward».
- La capacidad de emplear para el cálculo de la señal de control las referencias futuras de las variables controladas cuando estas son conocidas, tal es el caso de control de sistemas de procesamiento por lotes «batch», robótica, y en general los procesos donde se conozca de antemano la evolución de los cambios en la trayectoria de referencia.
- Aunque no es una característica generalizada en todos los controladores predictivos estos permiten ser utilizados en el control de sistemas con dinámicas difíciles, tal es el caso de sistemas, con no linealidades, inestables en lazo abierto, altamente oscilatorios, con polos SD, etc, tomando en cuenta ciertas consideraciones.
- Permite ser implementado no solo como un algoritmo de control regulatorio, sino también como una estrategia de control supervisorio, o incluso en un nivel superior abordando los problemas de optimización empleando diferentes funciones objetivo, que incluyen criterios económicos, todo ello enmarcado en una estructura de control jerárquico con las ideas de integración de sistemas basadas en la pirámide de automatización de la Organización Internacional de Estándares «International Organization for Standardization» (ISO), formando parte de un esquema que integre la automatización global de todos los lazos de control de la planta de producción.
- La constante evolución de los ordenadores, siendo estos cada vez más rápidos, con una mayor capacidad de cálculo y disponibilidad de almacenamiento de datos, ha permitido ir poniendo en práctica algoritmos complejos como los requeridos para el manejo de restricciones, controladores predictivos no lineales, y en general nuevos algoritmos de optimización, modelado, e identificación, hecho que ha motivado la investigación en esta área.

- Es una metodología abierta que basada en un grupo de ideas claves, que permite fácilmente extensiones, contribuciones e incorporación de nuevos desarrollos en el futuro, especialmente en cuanto al modelo de predicción, los criterios y el mecanismo de optimización, entre otros aspectos.

## 2.2 Descripción general del algoritmo de control

Los controladores predictivos basados en modelo se pueden representar en forma general por medio de un diagrama de bloques como el mostrado en la Figura 2.1, donde se puede observar la representación de los elementos mas importantes.

- El modelo del proceso utilizado para realizar la predicción de las salidas futuras.
- El optimizador que produce una secuencia óptima de actuaciones futuras de las variables manipuladas, basadas en la minimización de una o más funciones objetivo sujetas a restricciones.
- El horizonte deslizante aplicando solamente  $u(t|t)$  de la secuencia de futuras acciones de control  $u(t + j|t)$  a la entrada de la planta.
- La trayectoria futura de referencia  $w(t + j)$ , que con los valores de las salidas futuras predichas permite obtener los errores futuros.

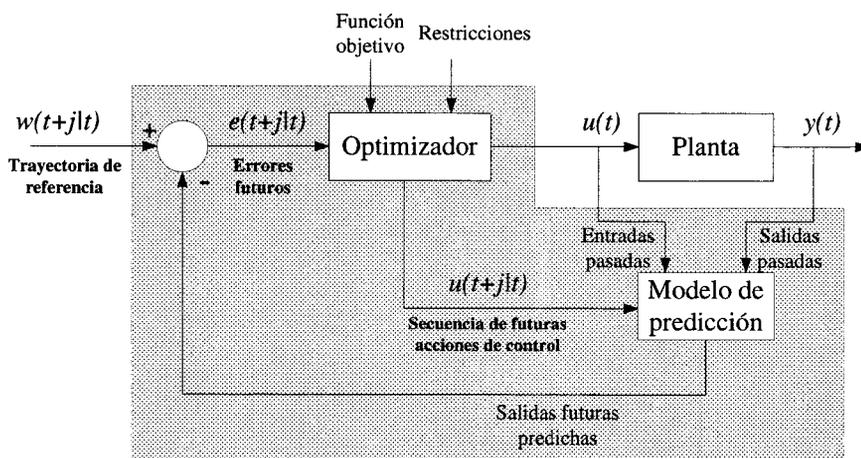


Figura 2.1: Diagrama de bloques de un controlador predictivo basado en modelo

En la Figura 2.2 se puede observar el gráfico de la evolución temporal de la variable manipulada  $u(t)$  y la variable controlada  $y(t)$ , empleadas para ilustrar la descripción del funcionamiento del algoritmo de un controlador predictivo basado en modelo que en términos generales es la siguiente:

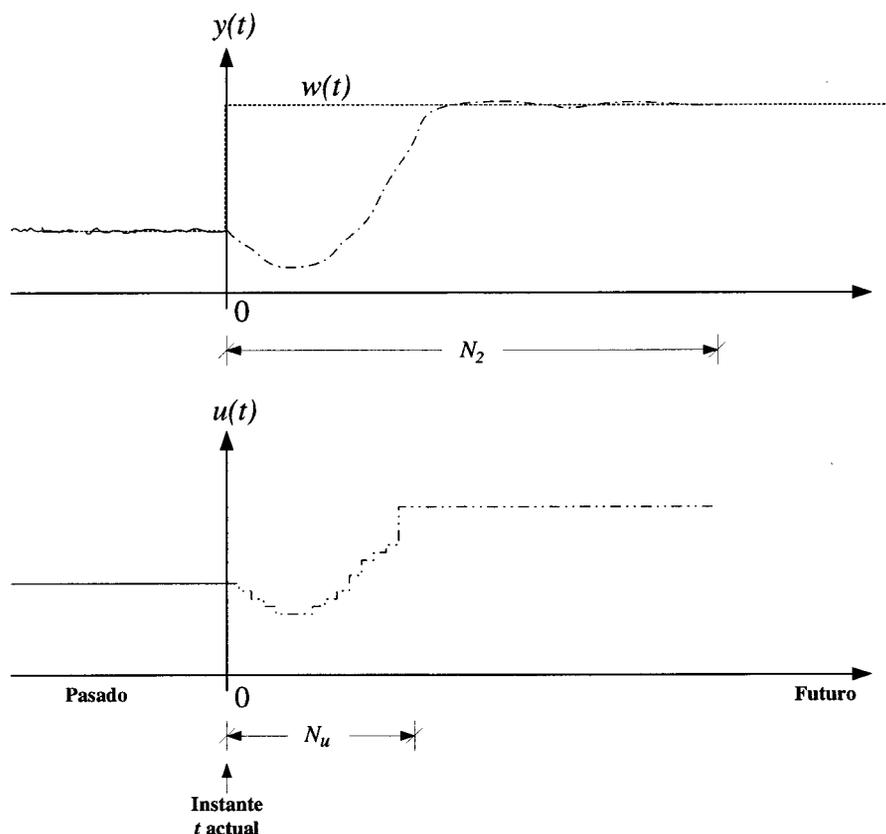


Figura 2.2: Evolución temporal de las variables del proceso

1. Estimar para cada instante  $t$  ( $t$  denota el índice de tiempo discreto  $t = 0, 1, 2, \dots$ ) una predicción de la salida del proceso  $y(t+j|t)$   $j = 1, 2, \dots, N_2$   $[- \cdot -]$  sobre un horizonte llamado horizonte de predicción ( $N_2$ ). Esta predicción se realiza utilizando un modelo que emplea la información de las entradas y salidas anteriores al instante  $t$   $[-]$  y la secuencia de futuras entradas de control  $u(t+j|t)$   $[- \cdot \cdot -]$ ,  $j = 0, 1, \dots, N_2 - 1$  que van a ser calculadas. Esta estimación de la predicción de la salida se realiza en muchos algoritmos de controladores predictivos basados en modelo asumiendo que la acción de control permanece constante en el valor que tiene en el instante  $t$ .
2. Establecer una trayectoria de referencia  $w(t+j)$   $[\cdot \cdot \cdot]$  sobre el horizonte de predicción, o realizar una aproximación de esta que partiendo del valor actual del

proceso en el instante  $t$ , alcance suavemente el valor e referencia  $w(t + j)$ .

3. Calcular las futuras acciones de control  $u(t + j|t)$ ,  $j = 0, 1, \dots, N_u - 1$ , optimizando una determinada función objetivo que puede estar sujeta a restricciones en las variables del proceso. Por lo general se suele tomar como función objetivo una función cuadrática de los errores entre la salida predicha y la trayectoria de referencia, e incluyendo el esfuerzo de control, pero también se incluyen en algunos algoritmos penalizaciones adicionales como por ejemplo los estados terminales, o variables implicando criterios económicos. El cálculo de las futuras acciones de control se puede realizar sobre un horizonte de control ( $N_u$ ) menor al horizonte de predicción, asumiendo que la variable controlada a partir de ese instante permanecen constante hasta alcanzar el horizonte de predicción.
4. Aplicar a la planta el primer elemento  $u(t)$  de la secuencia de futuras acciones de control  $u(t + j|t)$ , descartando el resto de valores de la secuencia calculada, de esta manera utilizando el concepto de horizonte deslizante, en el instante siguiente  $t + 1$  se repite de nuevo el algoritmo desde el punto 1 con los valores actualizados de las variables del proceso, con lo cual una nueva secuencia acciones de control  $u(t + j|t + 1)$  es obtenida, que es generalmente diferente a las calculadas previamente  $u(t + j|t)$  y fueron que descartadas.

## **2.3 Tendencias de los controladores predictivos basados en modelo**

Después de más de dos décadas de evolución de los controladores predictivos basados en modelo desde que aparecieron en la industria, sus progresos, cambios, e incorporación de nuevas técnicas han sido significativos. El área de controladores predictivos basados en modelo aplicados a sistemas lineales se encuentra con un alto grado de madurez. Ya desde la década de los ochenta se viene trabajando en la incorporación de restricciones en la función objetivo a optimizar, encontrándose bastantes contribuciones en este sentido. En la década de los noventa los análisis de estabilidad y robustez para los controladores predictivos, han sido un tema bastante estudiado y con la incorporación de modelos de predicción no lineales abre nuevas perspectivas en esta área en el futuro (Mayne *et al.*, 2000). Los controladores predictivos no lineales basados en modelo constituyen, una de las líneas más fuertes de investigación en los actuales momentos, por todas las implicaciones que esto conlleva desde todos los aspectos involucrados en un controlador predictivo, (modelado, optimización, manejo de restricciones, garantías de estabilidad, cotas de robustez, etc), aunque si bien es cierto que en este sentido hay

muchas contribuciones (Allgöwer y (Ed), 2000), muchos son los aspectos que faltan por revelar aún (Camacho y Bordons, 1999). El uso de modelos no lineales esta siendo motivado por la necesidad impuesta por la utilización de procesos cada vez mas complejos que deben trabajar en grandes regiones de operación, sujetos a grandes perturbaciones, con no linealidades severas, procesos de procesamiento por lotes «batch», donde no se alcanza un estado estacionario en ningún momento, lo que hace difícil trabajar con un modelo lineal entorno a un punto de operación, por lo que existen grandes expectativas por las mejoras que se pueden lograr en el comportamiento en lazo cerrado de este tipo de sistemas con la incorporación de los controladores predictivos basados en modelo no lineales (Rawlings, 2000). La detección y autodiagnóstico de fallas que permita a los controladores predictivos basados en modelo el manejo de situaciones anormales de forma autónoma es una área donde se esta incentivando la investigación (Morari y Lee, 1999). Gran parte de los procesos industriales posee elementos discretos (válvulas, interruptores, selectores de velocidad, encendido y apagado de bombas, cambios de estructura de la planta, etc), el modelo básico de representar estas dinámicas discretas es la máquina de estado finito o autómeta, donde transiciones entre estados discretos son identificadas como eventos instantáneos, los sistemas híbridos son aquellos donde estos sistemas discretos interactúan con sistemas continuos. Un ejemplo de las particularidades de estos sistemas puede verse en (Alvarez *et al.*, 1999). La aplicación de controladores predictivos basados en modelo con incorporación de variables lógicas en la función objetivo y restricciones a este tipo de sistemas constituye una línea de investigación con bastantes posibilidades (Bemporad y Morari, 1999; Bemporad *et al.*, 1999). En la implementación de un controlador predictivo basado en modelo, la fase de desarrollo del modelo es la más crítica y la que más tiempo consume, adicionalmente a pesar de que gran parte de los sistemas de interés práctico son del tipo multivariable, la mayoría de los métodos de identificación están enfocados para el caso monovariable, el desarrollo de técnicas de ensayo, identificación, validación del modelo para el caso multivariable, más aún en el contexto no lineal, es una de las líneas de investigación donde existen necesidades, debido a las limitaciones en el desempeño que produce el modelo de predicción en los controladores predictivos basados en modelo (Morari y Lee, 1999). El creciente aumento en aplicaciones industriales de controladores predictivos basados en modelo plantea a pesar del nivel de desarrollo alcanzado en nuestros días, un nueva serie de requerimientos y necesidades. En vista de que los MPC constituyen un metodología abierta y muy flexible a la incorporación de nuevas técnicas, se abre todo un campo de posibilidades, que hace lucir a el área del control predictivo con un futuro prometedor.

# Capítulo 3

## Planteamiento del problema

---

En este capítulo se presenta una breve introducción de los ceros en los sistemas, con la finalidad de que sirva de base para analizar el problema de inestabilidad que exhiben los controladores predictivos basados en modelos al ser aplicados a procesos multivariables con ceros de transmisión SD. Se demuestra en qué condiciones se produce la cancelación de los ceros de transmisión SD del modelo de predicción del sistema por medio de polos SD en el controlador.

### 3.1 Los ceros en los sistemas

Desde un punto de vista intuitivo al representar la dinámica de un sistema por medio del concepto de polos y ceros. Los polos describen el comportamiento del sistema, es decir, caracterizan como responde el sistema ante cambios en sus entradas. Los ceros determinan la manera como ese comportamiento del sistema se presentan en la salida. Los ceros están asociados con valores específicos de frecuencia en los cuales la transmisión de la dinámica a través del sistema es bloqueada.

Al caracterizar un proceso en variables de estado, el concepto de cero de un sistema está relacionado con la situación física en la cual el sistema tiene una salida igual a cero, mientras que los estados y las entradas no son cero (MacFarlane y Karcnias, 1976).

En un sistema monovisible de la forma,

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \quad (3.1)$$

Los ceros del sistema son las raíces de  $n(s)$ . Un sistema es de fase no mínima si alguna de éstas raíces tiene en su parte real mayor que cero, es decir, tiene algún cero en el semiplano derecho. El término fase no mínima hace referencia al aporte extra de fase producido por el cero SD, ésta contribución adicional de fase produce dificultades al momento de aplicar estrategias de control en lazo cerrado, ya que contribuye a hacer que el sistema tienda con mayor facilidad a la inestabilidad.

Un comportamiento característico de los sistemas de fase no mínima es la respuesta inversa que presentan ante una entrada del tipo escalón. Esta respuesta inversa puede presentarse en los instantes iniciales o no de acuerdo al número de ceros SD (Rosenbrock, 1970). Si el número de ceros SD es impar la respuesta es inicialmente inversa, si el número de ceros es par, la respuesta es inicialmente en la dirección del valor de estabilización en estado estacionario y luego se produce la respuesta inversa.

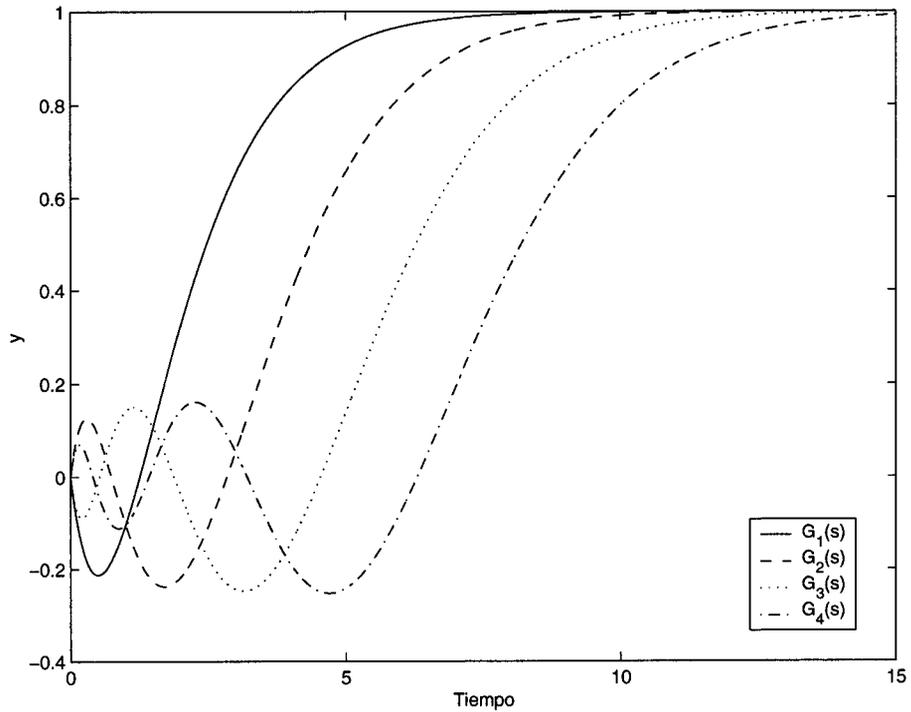
El comportamiento para una entrada escalón de los sistemas con ceros SD (3.2) se puede observar en la Figura 3.1.

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{-s+1}{(s+1)^2}, & G_2(s) &= \frac{(-s+1)^2}{(s+1)^3}, \\ G_3(s) &= \frac{(-s+1)^3}{(s+1)^4}, & G_4(s) &= \frac{(-s+1)^4}{(s+1)^5} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Esta particular respuesta inversa en los sistemas con ceros SD monovisibles no es un indicativo de la existencia de ceros SD en un sistema multivariable, esto hace que la presencia de ceros SD sea frecuentemente desapercibida. Un sistema multivariable puede contener en cada una de las funciones de transferencia  $G_{i,j}(s)$  ceros SD y el sistema  $G(s)$  presentar todos los ceros SI, como por ejemplo el modelo (3.3) que al aplicar una entrada del tipo escalón en cualquiera de sus entradas se observa en todas sus salidas una respuesta inversa, sin embargo tiene un cero de transmisión en  $s = -1$ .

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{-s+2}{s+2} & \frac{-s+5}{s+4} \\ \frac{-s+1}{s+2} & \frac{-s+3}{s+4} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Extender el concepto del cero de un sistema monovisible al caso multivariable no es



**Figura 3.1:** Respuesta escalón sistemas de fase no mínima con numero pares e impares de ceros SD

un problema trivial, de hecho por mucho tiempo ha habido una considerable confusión sobre la definición de los ceros en el caso multivariable (Holt y M.Morari, 1985).

En un sistema lineal representado por sus ecuaciones en variables de estado,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

asumiendo que las condiciones iniciales del vector de estados son cero y obteniendo la transformada de Laplace. La relación entrada salida es obtenida por medio de,

$$y(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}(s)]u(s) \quad (3.5)$$

que es llamada matriz de función de transferencia del sistema

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}(s) \quad (3.6)$$

La matriz del sistema «system matrix» (Rosenbrock, 1970) es definida como,

$$P(s) = \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D}(s) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

con,

$$P(s) \begin{bmatrix} x(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(s) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

La matriz  $G(s)$  da una descripción del externa del sistema, mientras que  $P(s)$  permite una descripción interna exhibiendo la estructura interior asociada con un modelo en espacios de estado. Las diferencias entre las dos matrices induce a diferentes grupos de definiciones de ceros en un sistema multivariable, acuerdo a que representación sistema es realizada, sin embargo, si el sistema es completamente controlable y completamente observable, ambos grupos de definiciones coinciden (MacFarlane y Karcnias, 1976).

Los ceros invariantes «invariant zeros» son definidos a través del máximo rango de los menores la matriz del sistema  $P(s)$ . Los ceros desacoplados «decoupling zeros» están asociados a la existencia de modos desacoplados los cuales no son completamente controlables o completamente observables. Los ceros de transmisión son definidos en términos de la matriz de transferencia  $\mathbf{G}(s)$  y están asociados con el bloqueo de la dinámica del sistema.

MacFarlane y Karcnias señalan que algunos autores se refieren a los ceros un sistema multivariable  $\mathbf{G}(s)$  como los ceros de cada una de las funciones de transferencia  $G_{i,j}(s)$  que la componen (MacFarlane y Karcnias, 1976). Los ceros de transmisión en un sistema multivariable pueden definirse como los polos de la inversa de la matriz de funciones de transferencia  $\mathbf{G}(s)$  (Wolovich, 1973b; Patel, 1975; Patel, 1976). Otras definiciones de los ceros están basadas en la frecuencia en la cual se produce una pérdida del rango de las matrices  $P(s)$  y  $G(s)$  (Wolovich, 1973a; Davison y Wang, 1974; Desoer y Schulman, 1974). Estas definiciones no toman en consideración la posible presencia de multiplicidad en los ceros.

En forma general los ceros de transmisión de la matriz de funciones de transferencia  $\mathbf{G}(s)$ , pueden ser obtenidos expresándola en la forma Smith-McMillan:

Dado un sistema multivariable  $\mathbf{G}(s)$  con  $m$  salidas y  $n$  entradas y rango  $r$ , éste puede se escrito de la forma,

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{d(s)} \mathbf{S}(s) \quad (3.9)$$

Donde  $N(s)$  es una matriz polinomial y  $d(s)$  es el mínimo común denominador de todos los  $G_{i,j}(s)$  elementos de  $\mathbf{G}(s)$ . Si  $\mathbf{N}(s)$  es expresado de la forma Smith,

$$\mathbf{N}(s) = \mathbf{L}(s)^{-1} \mathbf{M}(s) \mathbf{R}(s)^{-1} \quad (3.10)$$

La forma Smith-McMillan es definida como,

$$\mathbf{M}(s) = \frac{1}{d(s)} \mathbf{S}(s) \quad (3.11)$$

así,

$$\mathbf{M}(s) = \mathbf{L}(s) \mathbf{G}(s) \mathbf{R}(s) \quad (3.12)$$

donde  $\mathbf{M}(s)$  tiene la forma

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} M_{r,r}^*(s) & 0_{r,l-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,l-r} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

donde  $\mathbf{M}^*(s)$  es una matriz diagonal,

$$\mathbf{M}(s) = \text{diag} \left[ \frac{\epsilon_1}{\psi_1}, \frac{\epsilon_2}{\psi_2}, \dots, \frac{\epsilon_r}{\psi_r} \right] \quad (3.14)$$

Finalmente los ceros de la matriz de funciones de transferencia  $\mathbf{G}(s)$  son las raíces de los polinomios  $\epsilon_i$   $i = 1, 2, \dots, r$ . Ésta forma de calcular los ceros permite conocer también la multiplicidad del cero (Schaarder y Sain, 1989). Sin embargo a pesar de la utilidad de este método, en la práctica no es fácil de obtener la forma Smith-McMillan de  $\mathbf{G}(s)$  para obtener los ceros del sistema (MacFarlane y Karcianas, 1976).

En el caso particular de un sistema cuadrado con  $n$  entradas y  $n$  salidas, si el sistema es estable en lazo abierto los ceros de transmisión SD pueden ser calculados como las raíces del numerador del determinante  $n_d(s)$  de la matriz de funciones de transferencia  $\mathbf{G}(s)$ ,

$$\det \mathbf{G}(s) = \frac{n_d(s)}{d_d(s)} \quad (3.15)$$

Esto se debe a que para sistemas estables en lazo abierto, no pueden producirse cancelación entre las raíces en el semiplano derecho de  $n_d(s)$  y  $d_d(s)$  (Holt y M.Morari, 1985).

Presentar de manera más exhaustiva detalles sobre las definiciones de los ceros en los sistema va más allá de los objetivos de esta sección, que solo pretende establecer las bases necesarias para estudiar como la dinámica de los ceros de transmisión SD afectan a los controladores predictivos basados en modelo. En la literatura se pueden encontrar numerosos estudios donde se analizan los ceros en los sistemas. Rosenbrock realiza un de los primeros estudios en detalle de los ceros en los sistemas, en particular establece definiciones para los ceros en los sistemas multivariables (Rosenbrock, 1970; Rosenbrock, 1973; Rosenbrock, 1974b; Rosenbrock, 1974a). El enfoque geométrico de

los ceros en los sistemas es estudiado tanto en el caso monovariante como multivariante (Kouvaritakis y MacFarlane, 1976a; Kouvaritakis y MacFarlane, 1976b; Kouvaritakis, 1976; MacFarlane y Karcanias, 1976). Una compendio de los ceros en los sistemas multivariantes con especial atención en las relaciones entre las diferentes definiciones sus desarrollos teóricos se presenta en (Schaarder y Sain, 1989; Sain y Schrader, 1990).

## 3.2 MPC en sistemas con ceros en el semiplano derecho

El problema de inestabilidad que surge al aplicar un controlador predictivo basado en modelo a un sistema con ceros SD se puede resumir así:

Al controlarlo un sistema monovariante o multivariante en lazo cerrado utilizando un controlador predictivo basado en modelo que emplea para la predicción un modelo del tipo respuesta impulsiva truncada o un modelo por medio de funciones de transferencia, se producirá una cancelación perfecta de la dinámica de los ceros del sistema siempre que los horizontes de control y predicción sean iguales ( $N_2 = N_u$ ) y la penalización del esfuerzo de control sea cero ( $\lambda = 0$ ).

A continuación se presentan la demostración para el MPC multivariante utilizando dos de los modelos de predicción más utilizados, el modelo CARIMA y posteriormente con un modelo del tipo respuesta escalón truncada.

### 3.2.1 MPC con modelo de predicción del tipo CARIMA

El algoritmo del GPC es un controlador predictivo basado en modelo que emplea como modelo para realizar las predicciones un modelo basado en funciones de transferencia, puesto que una gran mayoría de las plantas multivariantes en procesos industriales, estables en lazo abierto o no, cuando trabajan en torno a un punto de operación pueden ser linealizadas y representadas por,

$$\mathbf{A}(z^{-1})y(t) = \mathbf{B}(z^{-1})u(t-1) + \mathbf{C}(z^{-1})\frac{\xi(t)}{\Delta} \quad (3.16)$$

Donde:

- $y(t)$  : Vector de la señal de salida del proceso ( $n \times 1$ )
- $u(t)$  : Vector de la señal de entrada al proceso ( $m \times 1$ )
- $\Delta$  :  $1 - z^{-1}$
- $\xi(t)$  : Vector de ruido blanco de media cero ( $n \times 1$ )

$\mathbf{A}(z^{-1})$  y  $\mathbf{C}(z^{-1})$  son  $n \times n$  matrices mónicas polinomiales y  $\mathbf{B}(z^{-1})$  es una  $n \times m$  matriz polinomial que contiene los ceros de trasmisión del modelo del sistema y son definidas por medio del operador retardo  $z^{-1}$  como:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(z^{-1}) &= I + \mathbf{A}_1 z^{-1} + \mathbf{A}_2 z^{-2} + \dots + \mathbf{A}_{na} z^{-na} \\ \mathbf{B}(z^{-1}) &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 z^{-1} + \mathbf{B}_2 z^{-2} + \dots + \mathbf{B}_{nb} z^{-nb} \\ \mathbf{C}(z^{-1}) &= I + \mathbf{C}_1 z^{-1} + \mathbf{C}_2 z^{-2} + \dots + \mathbf{C}_{na} z^{-na}\end{aligned}$$

Este modelo es conocido con el nombre de Autorregresivo integrado de media móvil controlado «Controller Auto-Regressive Integrated Moving-Average» (CARIMA). Resulta bastante apropiado para representar muchos procesos industriales en los cuales las perturbaciones son no estacionarias, (Clarke *et al.*, 1987a). Una ventaja particular de la utilización del modelo CARIMA es que trae como consecuencia que en el desarrollo del controlador resulte una acción de control integral, (la cual elimina los errores de estado estacionario) con un controlador expresado de manera incremental.

El algoritmo del GPC consiste en calcular una secuencia de futuras señales de control de tal manera que minimicen una función de objetivo de la forma (3.17), la cual penaliza por una parte el error entre la salida predicha y la referencia a seguir por la variables controladas, y por otra el esfuerzo de control necesario para obtener la salida predicha. Esta minimización produce como resultado la secuencia de incrementos en las acciones de control  $\Delta u(t), \Delta u(t+1), \dots, \Delta u(t+N_u)$ , pero solamente es utilizada  $\Delta u(t)$ , con este valor la acciones de control son calculadas como  $u(t) = u(t-1) + \Delta u(t)$ . En el siguiente paso  $t+1$  un nuevo problema de minimización es resuelto para obtener la nueva acción de control. Esta implementación es conocida como controlador de horizonte deslizante y constituye una característica común a la gran mayoría de los controladores predictivos basados en modelo.

$$\begin{aligned}J &= \sum_{j=N_1}^{N_2} [\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^T \mathbf{R}(j) [\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)] + \\ &\quad \sum_{j=1}^{N_u} [\Delta u(t+j-1)]^T \mathbf{Q}(j) [\Delta u(t+j-1)]\end{aligned}\quad (3.17)$$

Sujeto a  $\Delta u_{t+j} = 0, j = N_u, \dots, N_2$

Donde:

$N_1$ : Inicio del horizonte de predicción

$N_2$ : Final del horizonte de predicción

$N_u$ : Horizonte de control

$\mathbf{R}(j)$ : Matriz de ponderación del error

$\mathbf{Q}(j)$ : Matriz de ponderación del esfuerzo de control

$w(t)$ : Trayectoria de referencia

$\mathbf{R}(j) = \delta \mathbf{I}$  y  $\mathbf{Q}(j) = \lambda \mathbf{I}$  son matrices definidas positivas. En (Clarke *et al.*, 1987a) se considera  $\delta = 1$  y  $\lambda = \text{constante}$ . Con el objetivo de lograr la minimización de la función de objetivo (3.17), se realiza la predicción de las salidas  $j$ -pasos adelante  $\hat{y}(t+j|t)$  para  $j = N_1, \dots, N_2$ , esta es calculada basándose en la información conocida en el instante  $t$  y los valores futuros de las acciones de control.

Considérese la siguiente ecuación diofántica,

$$\mathbf{C}(z^{-1}) = \mathbf{E}_j(z^{-1})\tilde{\mathbf{A}}(z^{-1}) + z^{-j}\mathbf{F}_j(z^{-1}) \quad (3.18)$$

Las matrices polinomiales  $\mathbf{E}_j(z^{-1})$  y  $\mathbf{F}_j(z^{-1})$  son matrices diagonales definidas de forma única, con un grados  $j-1$  y  $na$  respectivamente,  $\tilde{\mathbf{A}}(z^{-1}) = \Delta\mathbf{A}(z^{-1})$  es también una matriz diagonal.

Si 3.16 es multiplicado por la izquierda por  $\Delta\mathbf{E}_j(z^{-1})z^j$  se obtiene,

$$\mathbf{E}_j(z^{-1})\tilde{\mathbf{A}}(z^{-1})y(t+j) = \mathbf{E}_j(z^{-1})\mathbf{B}(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + \mathbf{E}_j(z^{-1})\mathbf{C}(z^{-1})\xi(t+j) \quad (3.19)$$

Utilizando la ecuación diofántica (3.18), y sustituyendo en (3.19), se obtiene la siguiente ecuación para la salida predicha,

$$\hat{y}(t+j) = \mathbf{C}(z^{-1})^{-1}\mathbf{E}_j(z^{-1})\mathbf{B}(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + \mathbf{C}(z^{-1})^{-1}\mathbf{F}_j(z^{-1})y(t) \quad (3.20)$$

En esta expresión  $\hat{y}(t+j)$  es función de las señales conocidas en el tiempo  $t$  y las señales futuras de control las cuales no han sido calculadas todavía. Utilizando una segunda ecuación (3.21) para distinguir el pasado y el futuro de los valores de la señal de control se tiene,

$$\mathbf{E}_j(z^{-1})\mathbf{B}(z^{-1}) = \mathbf{G}_j(z^{-1})\mathbf{C}(z^{-1}) + z^{-j}\Gamma_j(z^{-1}) \quad (3.21)$$

Donde la matriz polinomial  $\mathbf{G}_j$  ( $n \times m$ ) contiene los primeros  $j$  parámetros del modelo de la planta. La expresión para la salida predicha es obtenida como,

$$\hat{y}(t+j) = \mathbf{C}(z^{-1})^{-1}\mathbf{G}_j(z^{-1})\mathbf{C}(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + \mathbf{C}(z^{-1})^{-1}\Gamma_j(z^{-1})\Delta u(t-1) + \mathbf{C}(z^{-1})^{-1}\mathbf{F}_j(z^{-1})y(t) \quad (3.22)$$

Finalmente, (3.22) puede ser reescrita como,

$$\hat{y}(t+j) = \mathbf{C}(z^{-1})^{-1} \mathbf{G}_j(z^{-1}) \mathbf{C}(z^{-1}) \Delta u(t+j-1) + \hat{y}(t+j|t) \quad (3.23)$$

Donde  $\hat{y}(t+j|t)$  es la respuesta libre de predicción de  $\hat{y}(t+j)$  asumiendo que los futuros incrementos de la señal de control después del tiempo  $t-1$  serán cero,

$$\hat{y}(t+j|t) = \mathbf{C}(z^{-1})^{-1} \Gamma_j(z^{-1}) \Delta u(t-1) + \mathbf{C}(z^{-1})^{-1} \mathbf{F}_j(z^{-1}) y(t) \quad (3.24)$$

Substituyendo  $\mathbf{E}_j(z^{-1})$  de (3.18) dentro (3.21), se obtiene,

$$\mathbf{C}(z^{-1}) \mathbf{B}(z^{-1}) = \tilde{\mathbf{A}}(z^{-1}) \mathbf{G}_j(z^{-1}) \mathbf{C}(z^{-1}) + z^{-j} \tilde{\mathbf{A}}(z^{-1}) \Gamma_j + z^{-j} \mathbf{F}_j(z^{-1}) \mathbf{B}(z^{-1}) \quad (3.25)$$

Definiendo el vector  $\mathbf{f}$ , compuesto por las respuestas libres de predicción,

$$\mathbf{f} = [\hat{y}(t+1|t), \hat{y}(t+1|t), \dots, \hat{y}(t+N_2|t)]^T \quad (3.26)$$

El vector de los futuros incrementos de control,

$$\Delta \mathbf{u} = [\Delta u(t+1), \Delta u(t+1), \dots, \Delta u(t+N_u-1)]^T \quad (3.27)$$

y el vector de salidas de la planta predichas,

$$\hat{\mathbf{y}} = [\hat{y}(t+1), \hat{y}(t+1), \dots, \hat{y}(t+N_2)]^T \quad (3.28)$$

de la predicción (3.24) la relación entre la entrada salida predicha de la planta puede ser escrita de la forma,

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{G} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (3.29)$$

Donde la matriz  $\mathbf{G}$  está compuesta por las matrices  $\mathbf{G}_k$ . Estas matrices contienen los parámetros de la respuesta escalón del modelo multivariable de la planta.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{N_2-1} & \mathbf{G}_{N_2-1} & \dots & \mathbf{G}_{N_2-N_u} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Asumiendo que o hay restricciones en la señal de control, la minimización de la función cuadrática (3.17) se convierte en un problema directo de álgebra lineal obteniéndose:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda I)^{-1} \mathbf{G}^T (\mathbf{w} - \mathbf{f}) \\ \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{K} (\mathbf{w} - \mathbf{f}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

### Relaciones en lazo cerrado

Una vez obtenidas las ecuaciones de desarrollo del GPC, las relaciones en lazo cerrado han sido deducidas con el objetivo de demostrar en qué condiciones los parámetros de ajuste del controlador predictivo  $N_1, N_2$ , y  $\lambda$  producen el problema de inestabilidad debido a la cancelación del cero SD con un polo SD en una planta multivariable ( $n$ -entradas  $\times$   $n$ -salidas).

El GPC es un controlador de horizonte deslizante, por consiguiente son solamente las matrices  $\alpha_i$  ( $n \times n$ ) de las primeras  $n$ -filas de la matriz  $K$  en (3.31) consideradas para el desarrollo del controlador. Utilizando  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ , (3.31) puede ser reescrita como,

$$\Delta u(t) = \sum_{i=1}^{N_2} \alpha_i z^{-N_2+i} w(t + N_2) - \sum_{i=1}^{N_2} \alpha_i \Gamma_i \Delta u(t - 1) - \sum_{i=1}^{N_2} \alpha_i \mathbf{F}_i y(t) \quad (3.32)$$

Sustituyendo (3.32) en la ecuación del modelo CARIMA (3.16), la relación a lazo cerrado es obtenida,

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{B} \sum_{i=1}^{N_2} \alpha_i \Gamma_i z^{-1} \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{B} \sum_{i=1}^{N_2} \alpha_i \mathbf{F}_i z^{-1}) y(t) = \\ \mathbf{B} \sum_{i=1}^{N_2} \alpha_i z^{-N_2+i} w(t + N_2 - 1) + (\mathbf{I} + \mathbf{B} \sum_{i=1}^{N_2} \alpha_i \Gamma_i z^{-1} \mathbf{B}^{-1}) \xi(t) \end{aligned} \quad (3.33)$$

La ecuación 3.33 puede ser reescrita como,

$$\mathbf{A}_{LC} y(t) = \mathbf{B}_{LC} w(t + N_2 - 1) + \mathbf{C}_{LC} \xi(t) \quad (3.34)$$

Donde, la matriz  $\mathbf{A}_{LC}$  es definida como,

$$\mathbf{A}_{CP} = \tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{B} \sum_{i=1}^{N_2} \alpha_i \Gamma_i z^{-1} \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{B} \sum_{i=1}^{N_2} \alpha_i \mathbf{F}_i z^{-1} \quad (3.35)$$

Con algunas manipulaciones algebraicas (3.25) puede ser escrita como,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{G}_i \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}) z^i = \Gamma \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{F}_i \quad (3.36)$$

Sustituyendo (3.36) en (3.35), la matriz  $\mathbf{A}_{LC}$  queda de la forma,

$$\mathbf{A}_{LC} = \tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{B} \sum_{i=1}^{N_2} \alpha_i (\mathbf{I} - \mathbf{G}_i \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}) z^{i-1} \quad (3.37)$$

Cuando la ponderación del esfuerzo de control es cero ( $\lambda = 0$ ), (3.31) puede ser escrita como,

$$\Delta u = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T (w - f) \quad (3.38)$$

Además, si el horizonte de predicción y el horizonte de control tienen el mismo valor  $N_u = N_2 - N_1 + 1$ , las primeras  $n$ -filas de  $(G^T G)^{-1} G^T$  están dadas por,

$$[\mathbf{G}_0^{-1}, 0, 0, \dots, 0] \quad (3.39)$$

Consecuentemente, utilizando (3.37) y (3.39) se obtiene,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{LC} &= \tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{B}\mathbf{G}_0^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{G}_0\mathbf{B}^{-1}\tilde{\mathbf{A}})z^{i-1} \\ \mathbf{A}_{LC} &= \mathbf{B}\mathbf{G}_0^{-1} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Por consiguiente la dinámica del sistema en lazo cerrado viene dada por la matriz  $\mathbf{B}(z^{-1})\mathbf{G}_0^{-1}$ , debido a lo cual el sistema en lazo cerrado tiene polos SD. Al obtener la relación entre la salida y la referencia es de la forma,

$$\mathbf{B}(z^{-1})\mathbf{G}_0^{-1}y(t) = \mathbf{B}(z^{-1})\mathbf{G}_0^{-1}w(t) \quad (3.41)$$

Lo cual muestra que la relación entre la salida y la referencia es la matriz identidad, por consiguiente el controlador es internamente inestable debido a la cancelación de los ceros de transmisión SD del proceso con polos SD en el controlador.

Utilizando las matrices polinomiales  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{T}$ , (3.32) puede ser reescrita como,

$$\mathbf{R}(z^{-1})\Delta u(t) = -\mathbf{S}(z^{-1})y(t) + \mathbf{T}(z^{-1})w(t) \quad (3.42)$$

El diagrama de bloques en lazo cerrado es mostrado en la Figura. 3.2, por consiguiente la relación entre  $u(t)$  y  $e(t)$  es dada por,

$$\mathbf{R}(z^{-1})\Delta u(t) = \mathbf{T}(z^{-1})e(t) \quad (3.43)$$

La matriz polinomial  $\mathbf{R}(z^{-1})$  representa la dinámica de los polos de la salida del controlador, cuando  $\lambda = 0$  y  $N_u = N_2 - N_1 + 1$  puede ser reescrita como,

$$\mathbf{R}(z^{-1}) = (\mathbf{I} + \sum_{i=1}^{N_2} \alpha_i \Gamma_i z^{-1}) = \mathbf{G}_0^{-1}\mathbf{B}(z^{-1}) \quad (3.44)$$

Consecuentemente, la matriz  $\mathbf{R}(z^{-1})$  contiene los ceros de transmisión SD del modelo de la planta (3.16) y constituyen la dinámica de los polos de la salida del controlador  $\Delta u(t)$ . Con lo cual puede ser visto como el controlador es internamente inestable.

### 3.2.2 MPC con modelo de predicción del tipo respuesta impulsional

Una de las formulaciones del control predictivo utilizada frecuentemente en el ámbito industrial son las que emplean modelos de predicción del tipo respuesta impulsional

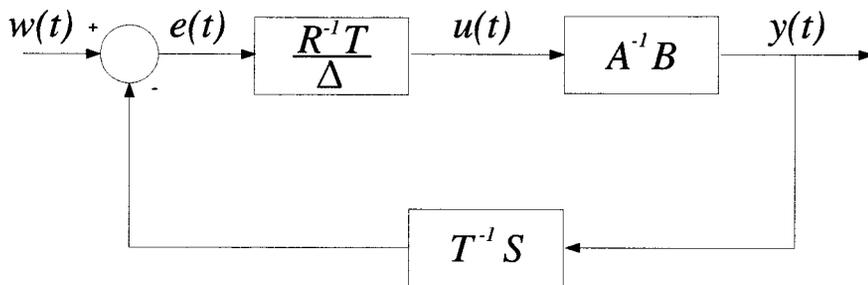


Figura 3.2: Diagrama de bloques en lazo cerrado

o escalón truncada, que pueden ser utilizadas cuando las plantas son asintóticamente estables. La representación por medio de un modelo discreto de respuesta escalón truncado cuando se considera el funcionamiento del proceso en torno a un punto de operación, es representado por medio un modelo de la forma,

$$y^l(t) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^N g_i^{kl} \Delta u^k(t-i) + d^l(t) \quad (3.45)$$

Donde:

$y(t)$ : Vector de señales de salida del proceso ( $n \times 1$ )

$u(t)$ : Vector de señales de entrada al proceso ( $m \times 1$ )

$\Delta$ :  $1 - z^{-1}$

$d(t)$ : Vector de perturbaciones ( $n \times 1$ )

$N$ : Orden del truncado del modelo

$g_i^{kl}$ :  $kl$ -Coeficiente de la respuesta escalón ( $i$  muestra)

Este modelo es ampliamente utilizado en la práctica industrial debido a que es muy intuitivo y claramente refleja la influencia de un determinado fenómeno en una determinada salida, otra ventaja es que no es necesaria información previa adicional del proceso para realizar la identificación de la planta.

El cálculo de la secuencia de control se realiza de manera que minimice la siguiente función objetivo,

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} [\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^T [\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)] + \sum_{j=1}^{N_u} [\Delta u(t+j-1)]^T \mathbf{Q}(j) [\Delta u(t+j-1)] \quad (3.46)$$

Sujeto a  $\Delta u_{t+j} = 0, j = N_u, \dots, N_2$

Donde:

$N_1$ : Inicio del horizonte de predicción

$N_2$ : Final del horizonte de predicción

$N_u$ : Horizonte de control

$\mathbf{Q}(j)$ : Matriz de ponderación del esfuerzo de control ( $\mathbf{Q}(j) = \lambda \mathbf{I}$ )

$w(t)$ : Trayectoria de referencia

El algoritmo de control predictivo basado en modelo consiste en calcular una secuencia de control que minimice la función objetivo (3.46). Esta minimización produce  $\Delta u(t), \Delta u(t+1), \dots, \Delta u(t+N_u)$ , pero al igual que en otros controladores predictivos basados en modelo, solo  $\Delta u(t)$  es aplicada según el concepto de horizonte deslizante para el instante  $t+1$  un nuevo problema de minimización es resuelto.

Para minimizar la función de objetivo (3.46), la predicción  $j$ -instantes adelante de la salida predicha  $\hat{y}^l(t+j|t)$  para  $j = N_1, \dots, N_2$  ha sido calculada empleando la información conocida en el instante de tiempo  $t$  y los valores futuros de los incrementos de control.

$$\hat{y}^l(t+j|t) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^N g_i^{kl} \Delta u^k(t+j-i) + \hat{d}^l(t+j|t) \quad (3.47)$$

Donde la sumatoria puede ser dividida en dos términos,

$$f_r^l(t+j) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=j+1}^N g_i^{kl} \Delta u^k(t+j-i) \quad (3.48)$$

y,

$$f_o^l(t+j) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^j g_i^{kl} \Delta u^k(t+j-i) \quad (3.49)$$

Tal que:

$f_r^l$  representa la respuesta libre predicha, siendo el valor esperado de  $\hat{y}^l(t+j)$  asumiendo que las futuras acciones de control son cero.

$f_o^l$  es la respuesta forzada, que es el componente adicional de la respuesta de salida debido los incrementos futuros de las acciones de control calculadas.

Se asume que las perturbaciones permanecen constantes en el futuro con el mismo valor que tenían en el instante  $t$ ,  $\hat{d}^l(t+j|t) = \hat{d}^l(t|t)$  es la salida medida real menos la salida predicha por el modelo nominal,

$$\hat{d}^l(t+j|t) = \hat{d}^l(t|t) = y^l(t) - \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^N g_i^{kl} \Delta u^k(t-i) \quad (3.50)$$

Entonces la predicción viene dada por,

$$\hat{y}^l(t+j|t) = f_r^l(t+j|t) + f_o^l(t+j|t) + \hat{d}^l(t|t) \quad (3.51)$$

Se define el vector  $f_r^l$ , compuesto por la respuesta libre predicha,

$$\mathbf{f}_r = [f_r(t+1|t), f_r(t+2|t), \dots, f_r(t+N_2|t)]^T \quad (3.52)$$

El vector de incrementos de control futuros,

$$\Delta \mathbf{u} = [\Delta u(t), \Delta u(t+1), \dots, \Delta u(t+N_u-1)]^T \quad (3.53)$$

y el vector de las salidas predichas de la planta,

$$\hat{\mathbf{y}} = [\hat{y}(t+1), \hat{y}(t+2), \dots, \hat{y}(t+N_2)]^T \quad (3.54)$$

De la predicción (3.51) la relación entrada salida predicha de la planta puede ser escrita de la forma,

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{G}\Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}_r \quad (3.55)$$

Donde la matriz  $\mathbf{G}$  esta compuesta por las matrices  $\mathbf{G}_k$ . Estas matrices tienen la respuesta escalón de los parámetros de la planta multivariable.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{N_2-1} & \mathbf{G}_{N_2-1} & \dots & \mathbf{G}_{N_2-N_u} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

La minimización de (3.46) asumiendo que no hay restricciones en la señal de control es de la forma,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda I)^{-1} \mathbf{G}^T (\mathbf{w} - \mathbf{f}_r) \\ \Delta \mathbf{u} &= K(\mathbf{w} - \mathbf{f}_r) \end{aligned} \quad (3.57)$$

### Relaciones en lazo cerrado

Las relaciones en lazo cerrado han sido obtenidas para demostrar como para el MPC con respuesta escalón truncada, al igual que el MPC con el modelo de función de transferencia en las mismas condiciones de los parámetros de ajuste  $N_1$ ,  $N_2$ , y  $\lambda$  produce una cancelación de la dinámica del cero SD de la planta controlada ( $n$ -entradas  $\times$   $n$ -salidas) produciendo un controlador con una salida inestable.

Cuando el esfuerzo de control es cero ( $\lambda = 0$ ), (3.57) puede ser escrito como,

$$\Delta \mathbf{u} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T (w(t) - f_r(t)) \quad (3.58)$$

además, si el horizonte de predicción y el horizonte de control tienen el mismo valor  $N_u = N_2 - N_1 + 1$ , la matriz  $(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T$  es dada por,

$$\Delta u = \mathbf{G}^{-1}(w(t) - f_r(t)) \quad (3.59)$$

Asumiendo que no hay perturbaciones en el sistema (3.51) puede ser escrita como,

$$f_r(t) = \hat{y}(t) - f_o(t) \quad (3.60)$$

Luego substituyendo la respuesta libre (3.60) dentro de (3.59) se obtiene,

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{G}^{-1}(w(t) - \left( y(t) - \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^j g_i^{kl} \Delta u^k(t+j-i) \right)) \quad (3.61)$$

Si la respuesta libre es truncada en  $N = N_2$  puede ser reescrita como,

$$\Delta u = \mathbf{G}^{-1}(w(t) - y(t) + \mathbf{G} \Delta u(t)) \quad (3.62)$$

Finalmente, la relación entre la salida y la referencia viene dada por,

$$\mathbf{G}^{-1}y(t) = \mathbf{G}^{-1}w(t) \quad (3.63)$$

Lo cual demuestra como la relación entre la salida y la referencia es la matriz identidad, consecuentemente el controlador será internamente inestable debido a que cancela la dinámica del cero de transmisión SD del modelo del proceso, por lo tanto la salida del controlador será inestable.

### 3.3 Resumen

El principal aporte de este capítulo es demostrar bajo que condiciones en los parámetros de ajuste del MPC se produce el problema de inestabilidad, se demostró que el problema se presenta no solamente para sistemas monovariantes con ceros SD, cuando el horizonte de predicción y el horizonte de control valen uno y la ponderación del esfuerzo de control es cero (Mehra y Rouhani, 1980; Clarke *et al.*, 1987b; Grimble, 1992; Levine, 1996; Martín y Rodellar, 1996; Maciejowski, 2001). El desarrollo muestra que se produce una cancelación perfecta de la dinámica de los ceros SD en sistemas multivariantes siempre que los horizontes de predicción y control sean iguales y la ponderación del esfuerzo de control sea cero (García-Gabín *et al.*, 2002; García-Gabín y Camacho, 2002). Estos resultados es posible particularizarlos para el caso en el que el sistema sea monovariante (García-Gabín *et al.*, 2000). La demostración para el caso monovariante no se presenta en el desarrollo de esta tesis puesto que puede ser realizada fácilmente tomando como referencia la presentada para el caso multivariante, incluso se facilita debido a que la manipulación de las ecuaciones no presenta las limitaciones impuestas por el álgebra matricial que se debe considerar en el caso multivariante.

# Capítulo 4

## Parámetros de ajuste

---

En este capítulo se presenta como el ajuste de los parámetros de sintonización de los controladores predictivos, tal es el caso del horizonte de predicción, el horizonte de control y la penalización del esfuerzo de control, siendo convenientemente seleccionados evitan el problema de inestabilidad producido por la cancelación de los ceros SD mostrado en el capítulo 3. Se establece el procedimiento de ajuste que se deben seguir para sintonizar un MPC de manera de lograr un comportamiento estable al controlar sistemas con ceros SD y se muestra como los resultados pueden ser aplicado también para los sistemas monovariantes con ceros SD. Los resultados se ilustran por medio ejemplos no lineales con ceros SD, tanto para el caso multivariable como para el caso monovariante.

### 4.1 Influencia de los ceros de Transmisión SD en el MPC

Para ilustrar el problema en los MPC al ser aplicados a sistemas multivariantes con ceros de transmisión SD se emplea el sistema de cuatro tanques interconectados (Johansson, 2000) que se encuentra descrito con detalle en el Apéndice A, es un proceso no lineal de control de nivel, cuyo objetivo es controlar los niveles en los tanques 1 y 2, los elementos finales de control son dos bombas que impulsan el fluido. El proceso es estudiado en

dos puntos de operación :  $P_-$  en el cual es sistema presenta los ceros de trasmisión en el semiplano izquierdo y en el punto de operación  $P_+$  en el cual el sistema presenta los ceros de trasmisión en el semiplano derecho.

Luego de una linealización del modelo (A.12) entorno a los puntos de operación  $P_-$  y  $P_+$ , las siguientes matrices de transferencia son obtenidas para cada uno de los puntos de operación,

$$G_-(s) = \begin{bmatrix} \frac{2,6}{62s+1} & \frac{1,5}{(23s+1)(62s+1)} \\ \frac{1,4}{(30s+1)(90s+1)} & \frac{2,8}{90s+1} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

y

$$G_+(s) = \begin{bmatrix} \frac{1,5}{63s+1} & \frac{2,5}{(39s+1)(63s+1)} \\ \frac{2,5}{(56s+1)(91s+1)} & \frac{1,6}{91s+1} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Realizando la discretización del modelo con un tiempo de muestreo  $T_s = 5$ , (4.3) y (4.4) se obtiene.

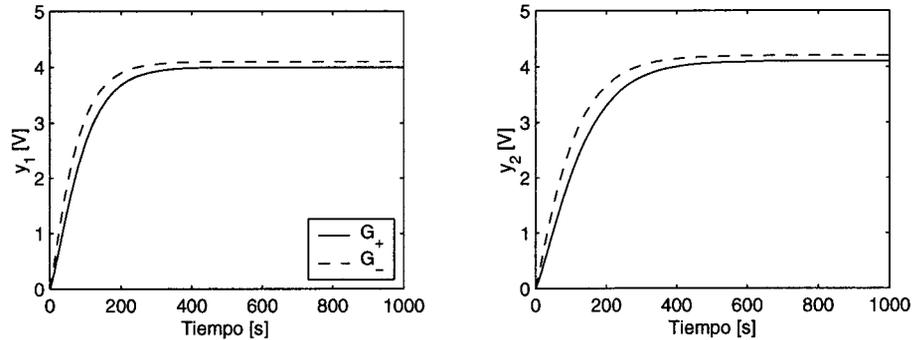
$$G_-(z) = \begin{bmatrix} \frac{0,08253z^{-1}}{1-0,9683z^{-1}} & \frac{0,002022z^{-1}+0,001943z^{-2}}{1-1,885z^{-1}+0,8876z^{-2}} \\ \frac{0,001007z^{-1}+0,0009775z^{-2}}{1-1,914z^{-1}+0,9149z^{-2}} & \frac{0,06154z^{-1}}{1-0,9780z^{-1}} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

y

$$G_+(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{0,04687z^{-1}}{1-0,9688z^{-1}} & \frac{1,98e^{-3}z^{-1}+1,926e^{-3}z^{-2}}{1-1,9190z^{-1}+0,9203z^{-2}} \\ \frac{0,9625e^{-3}z^{-1}+0,9442e^{-3}z^{-2}}{1-1,943z^{-1}+0,9439z^{-2}} & \frac{0,03478z^{-1}}{1-0,9783z^{-1}} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

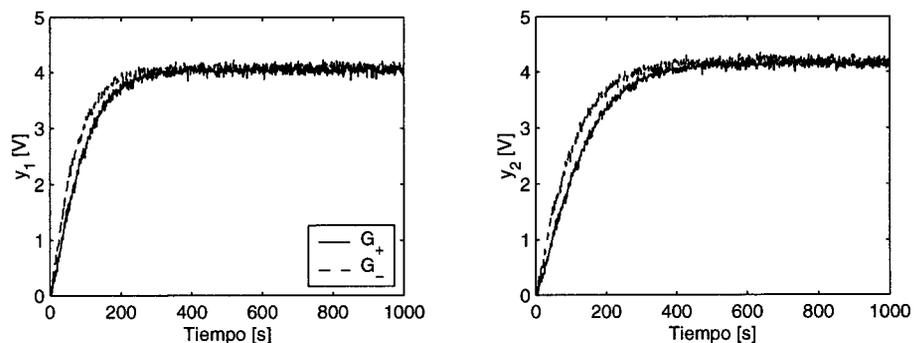
En la Figura 4.1 se observan las salidas  $y_1$  y  $y_2$  al aplicar escalones unitarios en ambas entradas simultáneamente en el instante  $t = 0$ . Se observa como las dinámicas de ambas salidas son similares en lazo abierto para el proceso en ambos puntos de operación  $P_-$  y

$P_+$ . Se observa como las salidas para el proceso con el punto de operación  $P_+$  [-] (ceros de transmisión SD) no presentan la típica respuesta en sentido inverso del punto de estabilización que se produce en los sistemas monovariantes con ceros SD al aplicar una entrada escalón. La respuesta inversa no es un indicativo en los sistemas multivariantes de la presencia de cero de transmisión SD, es más, esta respuesta puede presentarse aún cuando el sistema tenga los ceros SI debido a la interacción entre las variables del proceso.



**Figura 4.1:** Salidas para entradas escalón del proceso en lazo abierto para los puntos  $P_1$  y  $P_2$

Por lo general en la práctica industrial la medida de los sensores de las variables controladas presentan una señal de ruido. En la Figura 4.2 se muestra los resultados de la respuesta en lazo abierto mostrados en la Figura 4.1 con una componente de ruido. Se observa como ambas respuestas se solapan, lo que hace difícil identificar las señales correspondientes a los punto de operación  $P_-$  y  $P_+$ .



**Figura 4.2:** Salidas para entradas escalón del proceso en lazo abierto para los puntos  $P_1$  y  $P_2$

Una característica importante de los ceros de transmisión SD en los sistemas multivari-

ables, es que son una dinámica oculta. A diferencia de los sistemas con una entrada y una salida, en los sistemas multivariable no es posible detectar con una simple mirada a la matriz de funciones de transferencia si el sistema posee o no ceros de transmisión SD, esto hace que en muchas ocasiones al ingeniero de control se le pueda pasar desapercibida esta dinámica. Tanto en la práctica al emplear modelos del tipo respuesta troncada, que es el utilizado por la mayoría de los controladores predictivos industriales es más difícil aún detectar la presencia de los ceros SD, al observar unas respuestas escalón como los mostradas en al Figura 4.1. Como en al academia, tal es el caso de (Nunes *et al.*, 2001) donde en el ejemplo de aplicación se muestra como con los parámetros de sintonización propuestos inicialmente producen un comportamiento inestable, sin señalar que el problema de inestabilidad es producido por la presencia de un cero SD en el modelo de la planta.

Dando un vistazo a los modelo (4.1) y (4.2) se encuentra que son bastante parecidos y se puede esperar que los ceros de transmisión de ambos modelo lineales sea similares, sin embargo los dos puntos de operación  $P_-$  y  $P_+$  tiene los polos y ceros de transmisión mostrados en la Tabla 4.1. Como se puede observar en la Tabla 4.1 los polos de

**Tabla 4.1: Polos y Ceros del sistema de tanques interconectados**

	$P_-$	$P_+$
<i>Ceros(s)</i>	$-0,0595(-17); -0,0173(-58)$	$-0,0565(-18); 0,0130(77)$
<i>Ceros(z)</i>	$(0,8878; 0,9660)$	$(0,8932; 1,0263)$
<i>Polos(s)</i>	$-0,0332(-30); -0,0439(-23)$ $-0,0160(-62); -0,0110(-90)$	$-0,0177(-56); -0,0109(-91)$ $-0,0258(-39); -0,0159(-63)$
<i>Polos(z)</i>	$-0,0332; -0,0439$ $-0,0160; -0,0110$	$-0,0177; -0,0109$ $-0,0258; -0,0159$

un sistema multivariable tienen una clara relación con los polos de cada una de las funciones de transferencia de las relaciones entre cada una de las  $i$ -entradas y las  $j$ -salidas, pero los ceros constituyen una dinámica muy sutil que no es fácil de discernir a simple vista.

La Figura 4.3 muestra la respuesta temporal de las variables controladas y manipuladas para el MPC con los siguientes parámetros de ajuste horizonte de predicción  $N_1 = 1$  y  $N_2 = 40$ , horizonte de control  $N_u = 10$  y el esfuerzo de control  $\lambda = 0.1$ , en el punto de operación  $P_-$ . Se observa como el nivel de los tanques controlados  $y_1$  y  $y_2$  presentan un buen tiempo de estabilización con respecto a las constantes de tiempo del sistema en lazo abierto, sin oscilaciones en las variables controladas al aplicar los cambios las

referencias de nivel.

Observando las respuestas del sistema en lazo abierto para los puntos de operación  $P_-$  y  $P_+$ , sin haberse percatado de la presencia de los ceros de transmisión SD, se podría pensar que es posible utilizar los mismos parámetros de ajuste para el MPC. En la Figura 4.4 se dibuja el comportamiento de los niveles controlados en el punto de operación  $P_+$ . El controlador es ajustado utilizando los parámetros empleados en el punto de operación  $P_-$ , horizonte de predicción  $N_1 = 1$  y  $N_2 = 40$ , horizonte de control  $N_u = 10$  y el esfuerzo de control  $\lambda = 0.1$ . Se puede observar como la presencia del cero de transmisión SD deteriora el comportamiento del sistema en lazo cerrado hasta tal punto que lo hace inestable. Un reajuste con los parámetros del controlador predictivo en torno los valores usuales tal y como los utilizados en el punto el punto de operación  $P_-$  no es posible lograr un comportamiento estable para sistemas multivariables con ceros SD.

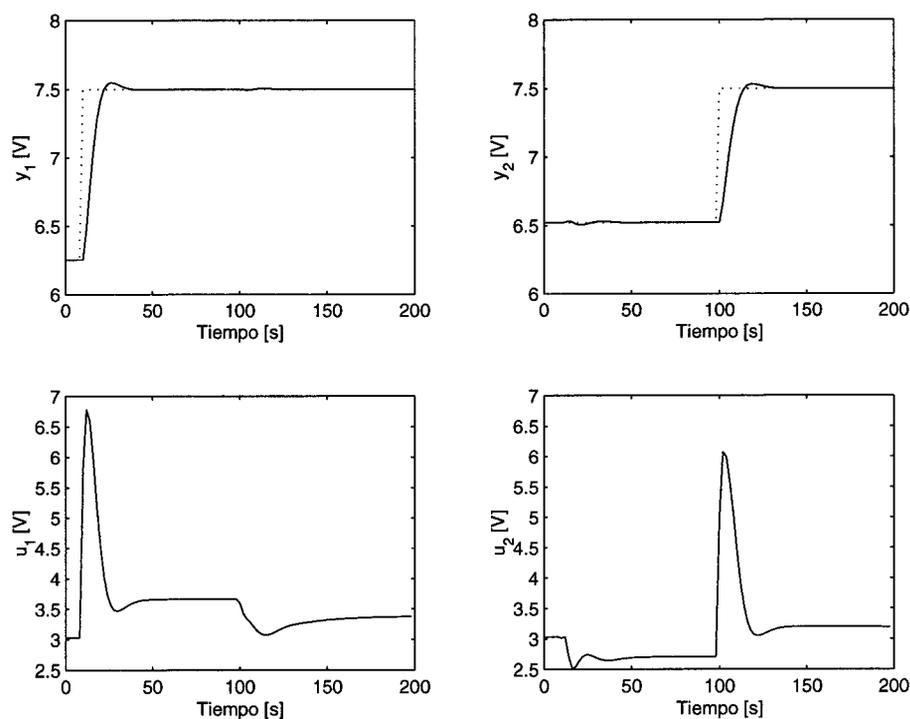
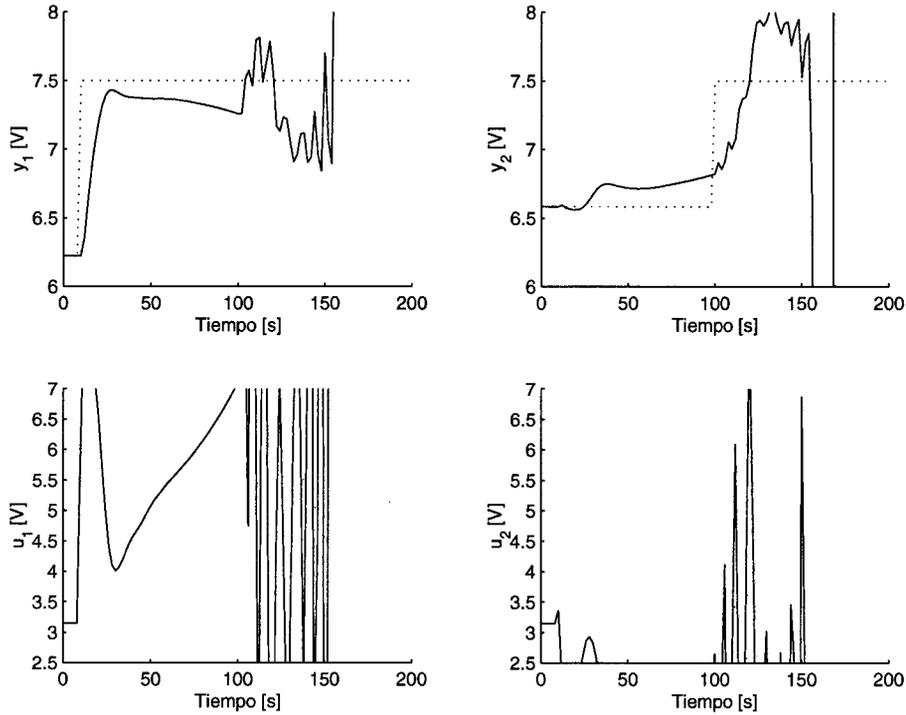


Figura 4.3: Salida del proceso con ceros estables  $G_-$

#### 4.1.1 Análisis de la ubicación de los polos en lazo cerrado

Para realizar el análisis de como los parámetros de ajuste  $N_2$ ,  $N_3$ , y  $\lambda$  pueden afectar la estabilidad del sistema en lazo cerrado controlando procesos con ceros de transmisión

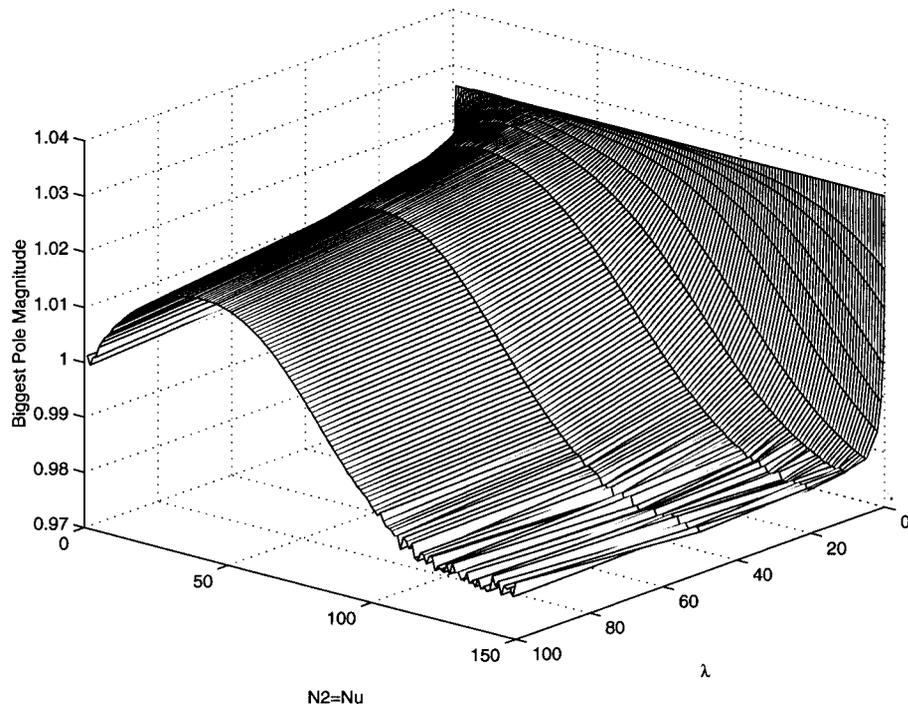


**Figura 4.4:** Salida del proceso con ceros SD  $G_+$

SD, se construyeron gráficas donde se presenta el Módulo del Polo Mayor (MPM) del sistema en lazo cerrado para el MPC, utilizando un modelo lineal como modelo de predicción y las relaciones en lazo cerrado 3.33 obtenidas en el capítulo 3, el controlador predictivo seleccionado para realizar este análisis es el controlador predictivo generalizado, que utiliza como modelo de predicción con un modelo entrada salida.

La Figura 4.5 muestra el MPM en función de los parámetros de ajuste del controlador. El horizonte de control se ha hecho igual al horizonte de predicción  $N_2 = N_u$  y se cambió en un rango entre  $[0 \ 150]$ , y la penalización del esfuerzo de control  $\lambda$  entre  $[0 \ 100]$ . Se puede observar como para el valor de  $\lambda = 0$ , el MPM será es línea recta con el valor de 1,0263, por lo tanto el mayor de los polos se corresponde con la magnitud del cero SD de la tabla 4.1, que pone de manifiesto los resultados obtenidos en (3.40); que se corresponde con la perfecta cancelación del cero SD con un polo SD en el controlador. Tal y como se demostró la cancelación del cero SD se encuentra presente no solamente en el punto  $N_2 = N_3 = 1$  y  $\lambda = 0$  tal y como ha sido mostrado por (Clarke *et al.*, 1987a) y (Maciejowski, 2001), si no que la cancelación perfecta ocurre siempre que los valores de los horizontes de predicción sean iguales y el esfuerzo de control sea cero. Cuando  $\lambda$  es incrementado el MPM disminuye hasta tomar un valor dentro del círculo unitario, haciendo estable el comportamiento del sistema. Se observa también como si los horizontes son pequeños la tendencia del mayor de los polos hacia la estabilidad es

mucho menor que cuando los horizontes son grandes donde el gradiente hacia la zona estable es mayor.



**Figura 4.5:** Módulo del Polo Mayor( $N_2 = N_3, \lambda$ )

Con el objetivo de estudiar como el MPM es influenciado por los cambios en los horizontes de predicción y control, estos han sido cambiados en los siguientes rangos de valores  $N_2 = [1, 150]$ ,  $N_u = [1, N_2]$  y  $\lambda = 0$ . En la Figura 4.6 se puede ver como en la situación en la que los horizontes de predicción y control son ajustados al mismo valor  $N_2 = N_3$  el MPM será el cero SD (1.0263), adicionalmente valores de ajuste cerca de esta línea también producirán polos SD en el controlador. Cuando el horizonte de predicción ( $N_2$ ) es mucho mayor que el horizonte de control ( $N_u$ ), el MPM se encuentra en la región estable dentro del círculo unitario, consecuentemente los polos del sistema en lazo cerrado serán estables. Por lo que debe evitarse incrementar el valor del horizonte de control para hacer mas estable el sistema como se sugiere en (Levine, 1996). En (Clarke *et al.*, 1987b), (Bitmead *et al.*, 1990), (Grimble, 1992), (Soeterboek, 1991) se indica que para lograr estabilizar los sistemas de fase no mínima es necesario que la penalización del esfuerzo de control sea diferente de cero, sin embargo en la Figura 4.6, se observa como el sistema es posible estabilizarlo en lazo cerrado a pesar de que la penalización del esfuerzo de control sea cero, utilizando una adecuada diferencia entre el horizonte de predicción y el de control.

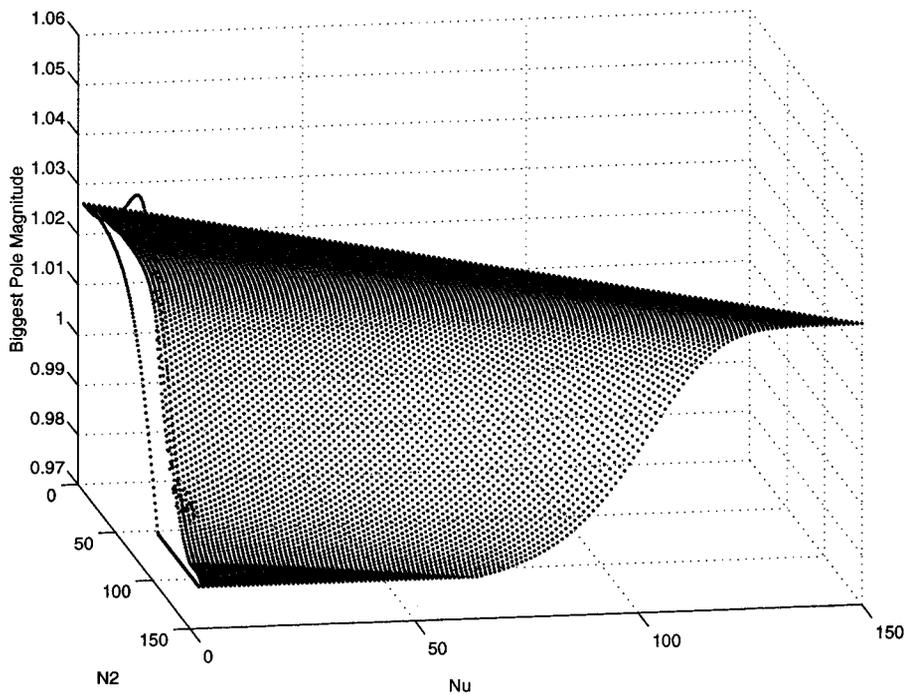


Figura 4.6: Módulo del polo mayor( $N_2, N_3, \lambda = 0$ )

En la Figura 4.7 se muestra el MPM para cambios en el esfuerzo de control entre  $\lambda = [0, 100]$ , el horizonte de predicción entre  $N_2 = [1, 150]$ , y el horizonte de control constante  $N_u = 1$ . Puede observarse como los valores de horizonte de predicción cercanos al valor del horizonte de control  $N_u = 1$  producen valores mayores a la unidad para el mayor de los polos en lazo cerrado y como una diferencia considerable entre el horizonte de predicción y el de control produce una ubicación para los el mayor de los polos dentro del círculo unitario. Adicionalmente se puede observar como el efecto de una adecuada diferencia entre los horizontes produce una mayor influencia en la ubicación del polo dentro del círculo unitario, que el efecto producido por el aumento de la penalización del esfuerzo de control.

En base al estudio de las superficies, el procedimiento encontrado para ajustar los controladores predictivos para sistemas con ceros SD es el siguiente, colocar un horizonte de predicción lo suficientemente grande como para observar la dinámica del sistema incluyendo la del cero SD, el horizonte de control debe de ser corto puesto que una buena diferencia entre los horizontes de predicción y control ayuda a evitar la situación de cancelación del cero SD, la ponderación del esfuerzo de control debe ser solo lo suficientemente como para evitar los movimientos bruscos en la señal de control, pero sin utilizar un valor excesivamente grande que degrade el comportamiento del sistema

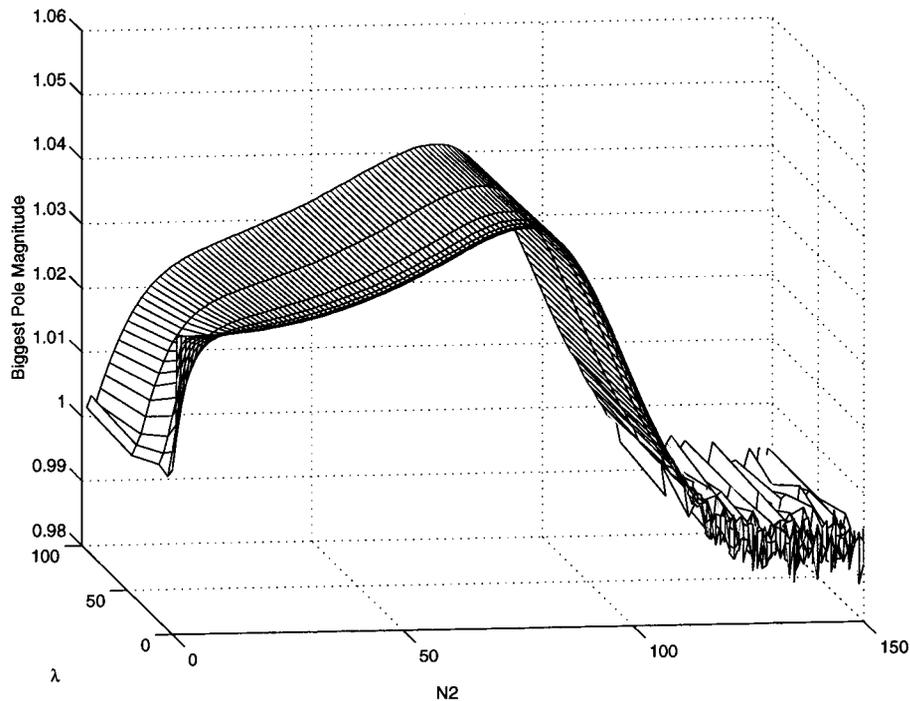


Figura 4.7: Módulo del polo mayor( $N_2, N_3 = 1, \lambda$ )

con una respuesta muy lenta.

En la Figura 4.8 se muestra el comportamiento de los niveles en el tanque 1 y 2, y el flujo en las bombas para el sistema de cuatro tanques interconectados, se utilizan dos grupos de parámetros de ajuste el primero con los siguientes valores  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 32$ ,  $N_u = 32$  y  $\lambda = 35$  [-], se observa en la figura que efectivamente como se sugiere en la literatura aumentando la penalización del esfuerzo de control se logra estabilizar el sistema, pero con un comportamiento bastante lento. Utilizando el segundo grupo de parámetros de sintonización  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 32$ ,  $N_u = 2$  y  $\lambda = 3$ , al ajustar el horizonte de control con un valor menor al horizonte de predicción evita el problema de cancelación del cero de transmisión SD, con un polo SD en el controlador, lo que permite ajustar la penalización del esfuerzo de control con un valor menor. El segundo grupo de parámetros de ajuste permite disminuir en un 70% el tiempo de establecimiento respecto al tiempo de estabilización logrado con los primeros parámetros que se logran el comportamiento estable del sistema a base de aumentar la penalización del esfuerzo de control. En general la idea es evitar la situación de los parámetros de ajuste planteados en el Capítulo 3 donde se demostró bajo que condiciones se produce la cancelación de los ceros SD.

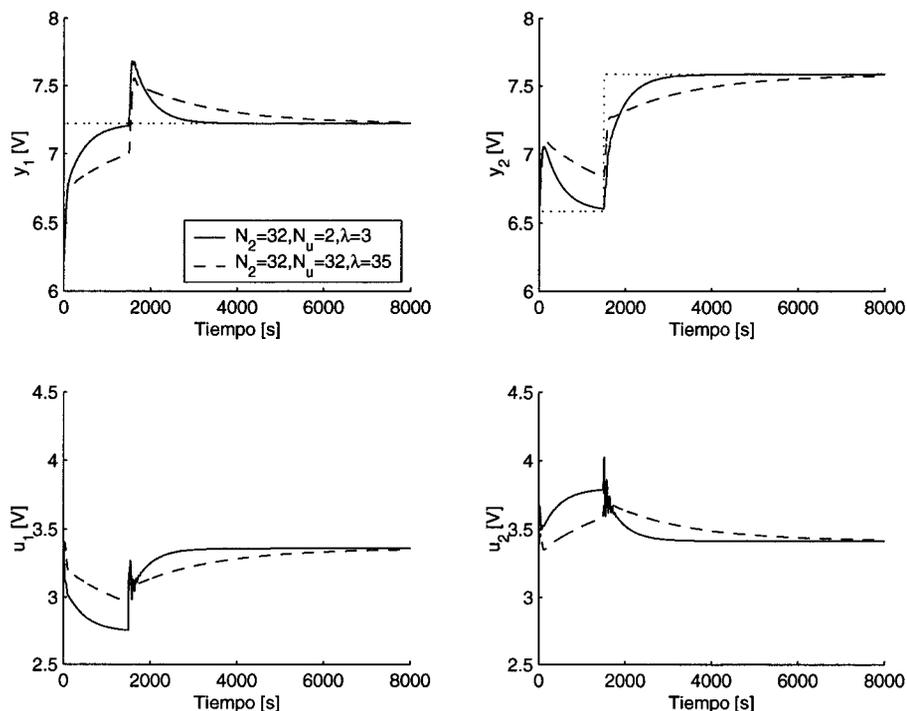


Figura 4.8: Módulo del polo mayor( $N_2, N_3 = 1, \lambda$ )

### 4.1.2 Análisis del índice de comportamiento en lazo cerrado

Una herramienta frecuentemente utilizada para cuantificar el comportamiento de un controlador, o realizar comparaciones entre controladores, son los índices de comportamiento. El funcionamiento del MPC en lazo cerrado controlado el sistema de cuatro tanques interconectados es evaluado utilizando los siguientes índices:

Para las variables controladas se empleó la Sumatoria del Valor Absoluto del Error (SVAE)

$$SVAE = \sum_{t_i}^{t_f} |e(t)| t_m \tag{4.5}$$

Donde,

$t_i$ : Es el tiempo inicial del ensayo ( $t = 0$ ).

$t_f$ : Es el tiempo final en el que la variable controlada ha alcanzado el valor de referencia y no produce contribución al valor del índice.

$e(t)$ : Error entre la referencia y la variable controlada ( $e(t) = w(t) - y(t)$ ).

$t_m$ : Tiempo de muestreo

Para las variables manipuladas se utilizó el Sumatoria del Esfuerzo de Control (SEC)

$$SEC = \sum_{t_i}^{t_f} \left| \frac{\Delta u(t)}{u_i - u_f} \right| t_m \quad (4.6)$$

Donde,

$t_i$ : Es el tiempo inicial del ensayo ( $t = 0$ ).

$t_f$ : Es el tiempo final en el que la variable manipulada ha alcanzado el valor un estacionario y no produce contribución al valor del índice.

$t_m$ : Tiempo de muestreo

$\Delta u(t)$ : Incremento en la señal de control para cada instante de muestreo ( $\Delta u(t) = u(t) - u(t - 1)$ ).

$u_i$ : Valor de la variable manipulada para el instante  $t_i$ .

$u_f$ : Valor de la variable manipulada para el instante  $t_f$ .

Para ilustra la influencia de los parámetros de ajuste en los valores de SVAE se realizaron cambios de referencia en los niveles de los tanques 1 y 2 para diferentes valores del horizonte de control ( $N_u$ ) y la penalización del esfuerzo de control ( $\lambda$ ), estas superficies permiten observar cuales son los parámetros de ajuste que minimizan el índice de comportamiento.

En la Figura 4.9 se muestran las superficies de la SVAE para cambios del horizonte de control entre [1 80] y la penalización del esfuerzo de control entre [0 40], manteniendo el horizonte de predicción constante en un valor de ( $N_2 = 80$ ). Se observa como el parámetro de ajuste  $\lambda$  degrada el comportamiento del sistema en lazo cerrado en ambas salidas, aumentando el índice SVAE a medida que aumenta el valor de  $\lambda$ , esto es debido a que el sistema presenta un comportamiento mas lento debido a una penalización excesiva de esfuerzo de control. Los Valores mínimos de SVAE se logran para valores bajos de el horizonte de control y de la penalización del esfuerzo de control, se observa también como llegado cierto punto no es conveniente aumentar el valor del horizonte de control, puesto que no cambia el valor de la SVAE pero aumenta el tamaño de las matrices, lo que implica un mayor costo de computación en el sistema donde se esta implementando el controlador.

Este resultado obtenido con los valores del índice de comportamiento reafirma, los resultados obtenido estudiando la ubicación de los polos en lazo cerrado. El MPC debe de ser ajustado teniendo presente evitar la situación mostrada en el capítulo 3. Esto se logra con un valor de el horizonte de control lo suficientemente largo como para observar la dinámica del sistema, un horizonte de control corto, con una penalización del esfuerzo de control solo lo suficiente para evitar movimientos bruscos en la señal de control.

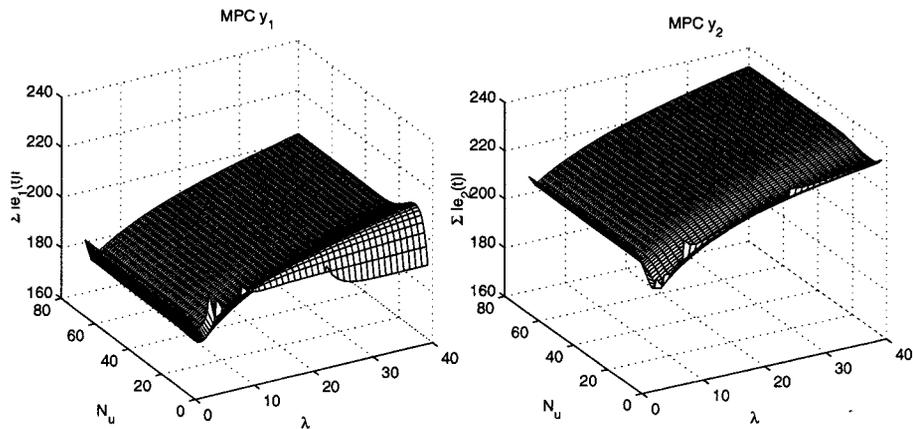


Figura 4.9: SVAE en función de  $N_u$  y  $\lambda$

## 4.2 Ejemplos de aplicación

Con el objetivo de lograr un comportamiento estable en el sistema en lazo cerrado con el controlador predictivo, se reajusta el controlador con las reglas propuestas para evitar la situación de cancelación del cero SD con un polo SD.

En la Figura 4.10 se presenta el comportamiento del proceso en el punto de operación  $P_+$  con los siguientes parámetros de ajuste  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 80$ ,  $N_u = 19$  y  $\lambda = 20$ . Se puede observar como realizando el reajuste con los parámetros propuestos, se logra un comportamiento estable del sistema en lazo cerrado, sin oscilaciones, con señales de control con movimientos suaves. A pesar de que las constantes de tiempo del sistema de los cuatro tanques, son similares en ambos punto de operación el comportamiento en lazo cerrado es mucho mas lento cuando el sistema se encuentra en el punto de operación donde presenta ceros de transmisión SD, tal y como se puede observar al comparar las Figuras 4.3 y 4.10. Se puede observar la fuerte interacción entre las variables de controlada proceso, cuando al aplicar un cambio de referencia en el nivel  $y_1$  afecta considerablemente el nivel  $y_2$  y viceversa. Con la utilización del controlador predictivo se logra un tiempo de establecimiento un 50% menor que el presentado por (Johansson, 2000) empleando controladores del tipo PID.

Un nuevo modelo multivariable (4.7) con ceros de transmisión SD es considerado para el ilustrar las reglas de ajuste.

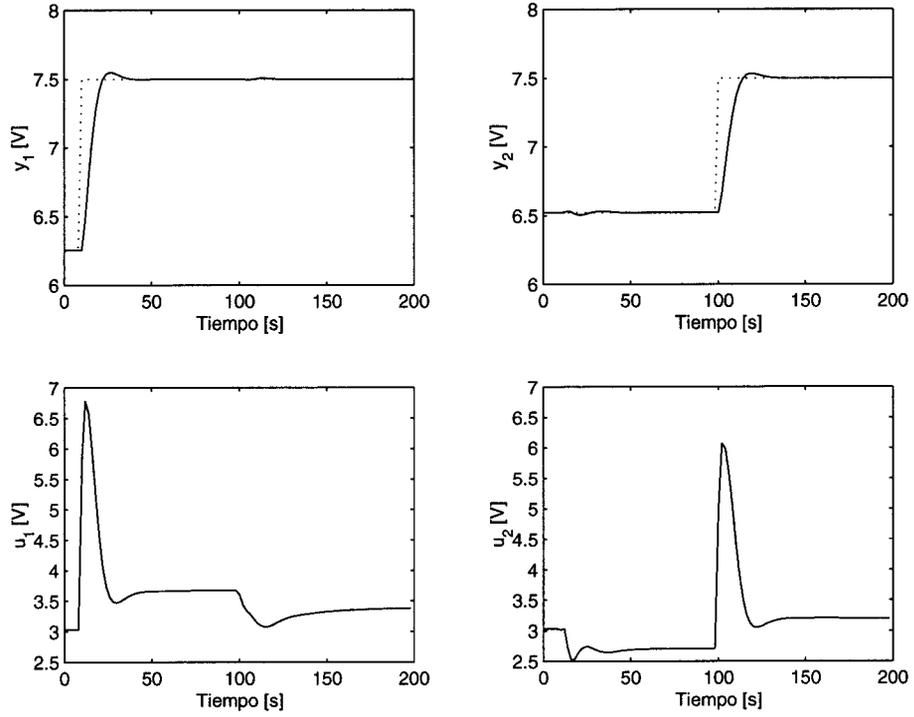


Figura 4.10: Salida del proceso con ceros SD  $G_+$

$$G_-(s) = \begin{bmatrix} \frac{1,2s+6}{52s^2+6s+1} & \frac{2s+5}{20s^2+9s+1} \\ \frac{2s^2-15s+25}{30s^3+31s^2+10s+1} & \frac{-2s+5}{6s^2+7s+1} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

El modelo es discretizado con un tiempo de muestreo de 0,25 quedando de la forma,

$$G_-(z) = \begin{bmatrix} \frac{-0,01775z^{-1} + 0,08248z^{-2}}{1 - 1,7300z^{-1} + 0,7408z^{-2}} & \frac{-0,01611z^{-1} + 0,03088z^{-2}}{1 - 1,8910z^{-1} + 0,8936z^{-2}} \\ \frac{0,002334z^{-1} - 0,02046z^{-2} + 0,02958z^{-3}}{1 - 2,7540z^{-1} + 2,5270z^{-2} - 0,7723z^{-3}} & \frac{-0,04849z^{-1} + 0,09363z^{-2}}{1 - 1,7380z^{-1} + 0,7470z^{-2}} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Calculando los ceros del sistema se encuentra que el modelo tiene los ceros de transmisión en 1,0808; 1.9307; y 4,7261, presentando 3 los ceros SD. En la Figura 4.11 se muestra la respuesta del sistema ante cambios del tipo escalón en ambas referencias de las variables controladas. El MPC es ajustado con tres grupos de parámetros  $N_1 = 1$ ,

$N_2 = 40$ ,  $N_u = 2$  y  $\lambda = 0,1$  [-], se observa como la diferencia entre el horizonte de predicción y el horizonte de control permite, utilizar una ponderación baja del esfuerzo de control, permitiendo al sistema alcanza los valores de referencia sin sobrepaso con un tiempo de estabilización un 50% menor que los resultados presentados en (Hovd y Braatz, 2001) donde se aplica la utilización de una ponderación variable en el tiempo sobre los estados del sistema. El segundo grupo de valores de ajuste utilizados son los siguientes  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 40$ ,  $N_u = 40$  y  $\lambda = 0,1$  [- -], se puede observar utilizando la misma ponderación del esfuerzo de control, al ajustar los horizontes de control en el mismo valor  $N = 40$  el sistema presenta un comportamiento inestable. Por último se aumentó el valor de la penalización del esfuerzo de control hasta lograr un comportamiento estable manteniendo los horizontes iguales, encontrándose los siguientes parámetros de ajuste  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 40$ ,  $N_u = 40$  y  $\lambda = 8$  [--] con estos valores se logran estabilizar las variables controladas pero con un comportamiento bastante deteriorado debido a su lentitud. Adicionalmente en este ejemplo se puede resaltar como el procedimiento para realizar el ajuste del MPC es aplicable a sistemas con múltiples ceros SD.

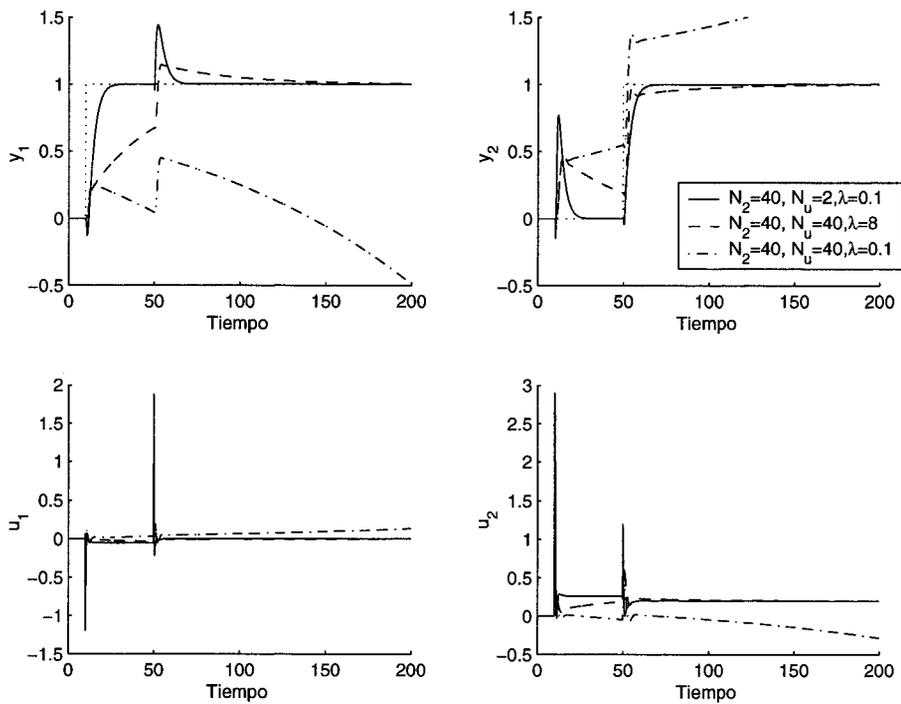


Figura 4.11: Salida del proceso con tres ceros de transmisión SD

El procedimiento utilizado para ajustar sistemas multivariables con ceros de transmisión SD, es posible emplearlos para el caso particular de sistemas monovariables. El sistema propuesto para ilustrar el caso monovariante con ceros SD es el modelo de reac-

ción propuesto por Van de vusse (de Vusse, 1964), El objetivo de control es mantener la concentración ( $C_B$ ) a la salida, manipulando el flujo de entrada ( $F$ ) al reactor . Un estudio mas detallado del model del reactor se presenta en el Apéndice A de donde se obtiene el modelo linealizado 4.10 utilizado para realizar la predicción en el MPC. la función de transferencia entre el flujo de entrada y la concentración del componente  $B$  a la salida viene dada por,

$$G(s) = \frac{-1.1170s + 3.1472}{s^2 + 4.6429s + 5.3821} \quad (4.9)$$

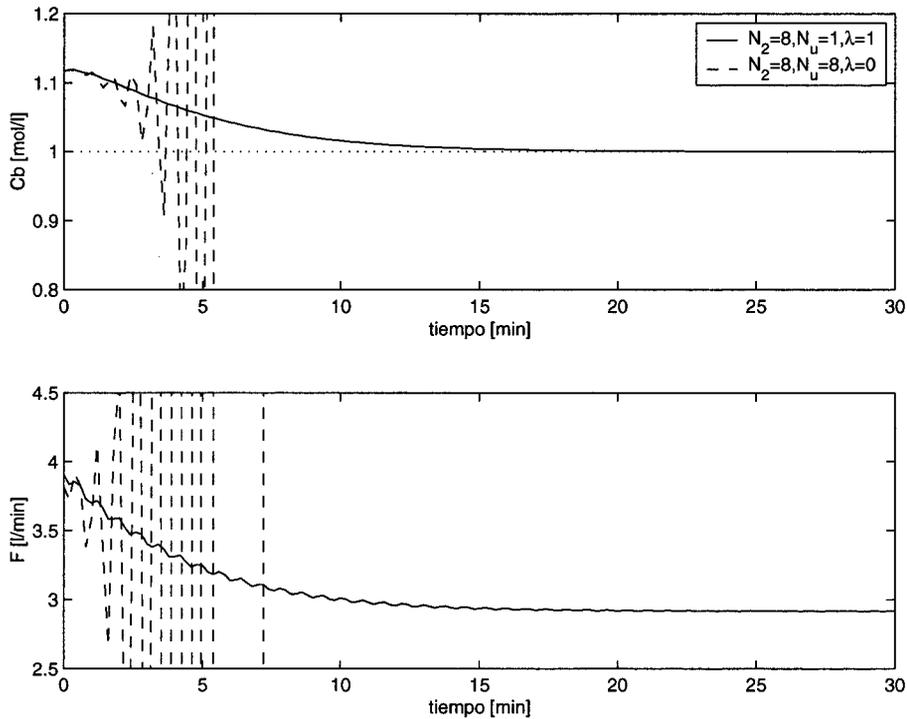
Realizando la discretización del sistema con un tiempo de muestreo de  $T_s = 0,2$  se obtiene,

$$G(z) = \frac{-0.0939 + 0.1745z^{-1}}{1 - 1.2573z^{-1} + 0.3951z^{-2}} \quad (4.10)$$

El sistema tiene un cero SD con el valor de 2,8175. En la Figura 4.12 se presenta la respuesta del sistema para un cambio de referencia en la concentración del componente  $C_B$  a la salida, así como el Flujo de entrada al reactor que constituye la variable manipulada. Se ilustra el comportamiento del proceso para dos grupos de parámetros de ajuste  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 8$ ,  $N_u = 8$  y  $\lambda = 0$  [- -], se observa como la sintonización del MPC con los horizontes de predicción y control con el mismo valor y la penalización del esfuerzo de control en cero, se produce un comportamiento inestable debido a la cancelación del cero SD con un polo SD. El segundo grupo de parámetros presentados son los siguientes  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 8$ ,  $N_u = 1$  y  $\lambda = 1$  [-], se puede observar como utilizando las reglas propuestas con una conveniente diferencia entre el horizonte de predicción y el horizonte de control se logra un comportamiento estable del sistema evitando el problema de la cancelación del cero SD.

### 4.3 Resumen

La contribución en este capítulo es establecer un procedimiento para ajustar un MPC cuando se aplica a sistemas multivariables o monovariable con ceros SD. Se muestra como la utilización de la penalización del esfuerzo de control para lograr la estabilización del sistema en lazo cerrado como se sugiere en la literatura (Clarke *et al.*, 1987a; Clarke *et al.*, 1987b; Bitmead *et al.*, 1990; Soeterboek, 1991; Grimble, 1992), efectivamente logra una respuesta estable, pero a costa de un degradamiento del comportamiento en lazo cerrado del sistema debido a una respuesta muy lenta. Con la manera de ajustar los parámetros propuesta, utilizando un horizonte de predicción lo suficientemente



**Figura 4.12: Salida del proceso con cero SD monovariable**

largo como para observar la dinámica del sistema incluyendo la del cero SD, con una adecuada diferencia entre el horizonte de predicción y el de control el problema de cancelación del cero SD se logra evitar lo que permite la utilización de una penalización del esfuerzo de control mas pequeña, logrando reducir el tiempo de asentamiento del sistema. De esta manera los parámetros de ajuste del controlador, que constituyen una de las herramientas claves con la que cuenta el ingeniero de control en el momento de diseño de los controladores predictivos, pueden ser utilizados la lograr estabilizar sistemas con ceros SD. Los parámetros de ajuste propuestos permiten de una manera fácil e intuitiva disponer de unos parámetros iniciales que establezcan el MPC y sirvan como parámetros de iniciales que pueden ser utilizados como punto de partida para el ajuste final. Procesos no lineales tanto multivariables como monovariable han sido utilizados para ilustrar como realizar el ajuste del MPC para sistemas con ceros SD. El procedimiento de ajuste puede ser utilizado en sistemas con uno a múltiples ceros de transmisión SD como ha sido mostrado. Los controladores predictivos utilizados en los ejemplos de esta sección son del tipo GPC, sin embargo la técnica de ajuste propuesta funciona de igual forma para controladores predictivos que utilizan respuestas impulsivas o escalón truncadas (García-Gabín *et al.*, 2002) incluyendo sistemas monovariables (García-Gabín *et al.*, 2000). Se confirma como la presencia de los ceros de transmisión SD, que constituyen una dinámica oculta en los sistemas multivariables, que produce una fuerte influencia que deteriora el comportamiento de los MPC, haciéndolos inesta-

bles en lazo cerrado.

## Capítulo 5

# Cambios en el modelo de predicción

---

En vista que al utilizar MPC en sistemas con ceros SD se produce una cancelación de estos con polos SD. Una técnica que se emplea para solventar el problema en algoritmos de control en los cuales se emplea el uso explícito del modelo para el diseño del controlador, es la utilización de modelos que no presenten ceros SD. El objetivo de este capítulo es analizar el comportamiento del MPC al utilizar distintos modelos lineales de aproximación de la planta no lineal, como modelos de predicción. Para el análisis se realizan distintas aproximaciones de los modelos no lineales con modelos que no presentan ceros SD con el fin de evitar la inestabilidad del controlador cuando el controlador trata de cancelar la dinámica del proceso. El capítulo está dividido en dos partes, una dedicada a sistemas monovariables, y la segunda a sistemas multivariables, en ambas secciones se definen los métodos usados para la obtención de los modelos de aproximación, se realiza la comparación de los modelos obtenidos respecto al modelo no lineal, y finalmente se muestra su comportamiento en lazo cerrado con modelos no lineales.

En el contexto de diversas técnicas de control tal es el caso del DSC y el IMC se utiliza de manera manifiesta la inversa del modelo de la planta para el desarrollo del controlador (Frank, 1974; Morari y Zafiriou, 1989). Hay ciertas circunstancias que hacen que no sea posible invertir el modelo del sistema, por lo cual la inversa de la planta no pueda ser usada por el controlador, tal es el caso de:

- El número de ceros excede el número de polos en el modelo inverso de la planta, con lo que  $G(s)^{-1}$  es impropia.
- $G(s)$  presenta retardo con lo que  $G(s)^{-1}$  presenta un comportamiento no causal.
- $G(s)$  contiene ceros SD del plano  $s$ , que implican polos SD en  $G(s)^{-1}$

La solución propuesta para el caso en que el sistema presenta ceros SD y la inversa del modelo de la planta no puede ser implementada en el desarrollo del controlador, es la factorización del modelo de la planta  $G(s)$  en dos partes (5.1), una parte invertible  $G_-(s)$  y una no invertible  $G_+(s)$ .

$$G(s) = G_+(s)G_-(s) \quad (5.1)$$

De modo que el controlador emplea en su diseño la parte invertible del modelo de proceso.

El problema se centra en la manera de realizar la factorización, ya que existen diversas posibilidades para la factorización del modelo de la planta  $G(s)$  en el caso monovariable (Jerome y Ray, 1991), e infinitas opciones para el caso multivariable (Holt y M. Morari, 1985; Jerome y Ray, 1992). Adicionalmente la factorización debe ser realizada de forma tal que  $G_+(s) = \mathbf{I}$  para  $s = 0$  de manera de garantizar que la factor  $G_-(s)$  tenga error cero en estado estacionario con respecto al modelo  $G_-(s)$  con ceros SD (Morari, 1984).

Un criterio empleado para realizar la factorización es estableciendo una factorización óptima respecto a algún índice o criterio. Si se tiene un esquema de control como el presentado en la Figura

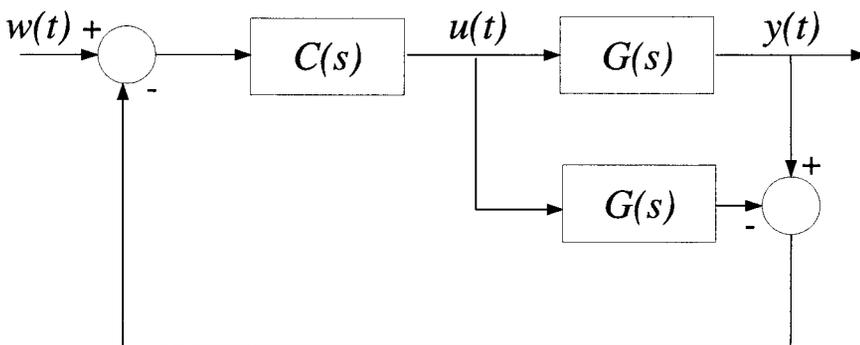


Figura 5.1: Diagrama de bloques del IMC

Estableciendo la función de transferencia del controlador  $C(s)$  de la forma (Frank, 1974),

$$C(s) = G_-^{-1}(s) \quad (5.2)$$

Si el sistema que presenta ceros SD esta modelada perfectamente por  $G(s)$ , la relación en lazo cerrado entre la salida del sistema y la referencia es de la forma,

$$\begin{aligned} G(s)_{LC} &= G(s)C(s) \\ G(s)_{LC} &= G(s)G_-^{-1}(s) \\ G(s)_{LC} &= G(s)(G_+(s)^{-1}G(s))^{-1} \\ G(s)_{LC} &= G_+(s) \end{aligned} \quad (5.3)$$

En este tipo de estructuras de control  $G_+(s)$  representa la dinámica del sistema en lazo cerrado (Jerome y Ray, 1991). Dentro de este contexto diferentes factorizaciones para  $G(s)$ , han sido realizadas, de tal manera la expresión de  $G_+(s)$  es obtenida al minimizar un índice de desempeño del error, definido como la diferencia existente entre la señal de entrada y la salida del sistema en lazo cerrado. La factorización dependerá entonces del índice de desempeño del error seleccionado, y de la forma de la entrada al sistema (escalón, rampa, impulso, etc). La señal de entrada en la mayoría de los sistemas no es conocida a priori, sin embargo si se considera que la entrada de un sistema puede ser representada como una secuencia de escalones, debido a esto la señal de entrada considerada para el cálculo de los índice es una entrada escalón (Holt y M.Morari, 1985). Los índices de desempeño utilizados por lo general son la Integral del Error Cuadrado «Integral of the Squared Error» (ISE) (5.4) y la Integral del Valor Absoluto del Error «Integral of the Absolute value of the Error» IAE (5.5), definidos como,

$$ISE = \int_0^{\infty} (y_w(t) - y_s(t))^2 dt \quad (5.4)$$

$$IAE = \int_0^{\infty} |y_w(t) - y_s(t)| dt \quad (5.5)$$

Donde

$y_s(t)$ : Es la señal de salida.

$y_w(t)$ : Es la señal de referencia.

Existen también otros criterios para la realización de la factorización de  $G(s)$  como por ejemplo determinar  $G_+(s)$  de manera que minimice el tiempo de establecimiento (Jerome y Ray, 1992).

Para aplicar estas técnicas en sistemas multivariables es necesario tomar en cuenta consideraciones adicionales, debido a que para realizar las factorizaciones se debe seleccionar la importancia relativa de las variables de salida del sistema. De esta manera

existen factorizaciones con las cuales una de las salidas debe de ser considerada menos importante, con lo cual al comparar en lazo abierto  $G_-(s)$  con  $G(s)$  ambos sistema presenta  $n - 1$  salidas idénticas, y en la salida restante (la menos importante) es donde se produce un degradación producida por la eliminación de la dinámica contenida en  $G_+(s)$ . En otras factorizaciones  $G_+(s)$  es seleccionado de forma tal que al comparar en lazo abierto  $G_-(s)$  con  $G(s)$  se observa que todas las salidas presenta una degradación.

A pesar de que estas factorizaciones han sido realizadas dentro del contexto de estrategias de control del tipo IMC, ya que logrando minimizar  $G_+$  se está minimizando el error del sistema en lazo cerrado. El factor  $G_-$  pueden ser considerado como una adecuada aproximación de  $G(s)$ , puesto que una factorización que minimice el error producido por  $G_+$  producirá un factor  $G_-$  sin ceros SD parecido a  $G(s)$ .

Como se ha demostrado en el capítulo 3 al aplicar el MPC a sistemas con ceros SD, se producen problemas de inestabilidad debido a la cancelación de los ceros SD con polos SD por parte del controlador. Con el propósito de evitar este problema se pretende realizar una factorización en el modelo del sistema con ceros SD, similar a la utilizada para el IMC y DSC,

$$G(s) = G_+(s)G_-(s) \quad (5.6)$$

y utilizar  $G_-(s)$  como modelo de predicción en el MPC, con esto se pretende que el controlador predictivo basado en modelo pueda realizar la inversión del modelo del sistema, sin que el controlador presente problemas de inestabilidad por la presencia de polos SD. El comportamiento del MPC con las diferentes aproximaciones al modelo del proceso no lineal, por medio modelos que no presenta ceros SD, es analizado para el caso monovariable y multivariable

## 5.1 Sistema monovariable

Como ejemplo de sistema monovariable para el estudio se utiliza el modelo no lineal del reactor de Van de Vusse. Para obtener las diferentes factorizaciones, el proceso es linealizado entorno a su punto de operación, el modelo viene dado por la ecuación (5.7), el desarrollo de como se obtuvo a partir de las ecuaciones no lineales del reactor se muestran en el Apéndice A.

$$G(s) = \frac{-1.11716s + 3.1472}{s^2 + 4.6429s + 5.3821} \quad (5.7)$$

El valor del cero del sistema esta en  $s = 2.8171$ , este se encuentra en el semiplano derecho por consiguiente el sistema es de fase no mínima.

### 5.1.1 Factorización de $G(s)$ minimizando el índice IAE ( $F_1$ )

Tomando como punto de partida del modelo linealizado del reactor (5.7), se aplica la factorización que minimiza el índice IAE (Holt y M.Morari, 1985) que establece,

**Teorema 1** Para una entrada escalón el índice de desempeño IAE es minimizado al seleccionar  $G_+(s)$  como:

$$G_+(s) = \prod_i^m \left( -\frac{1}{z_1} s + 1 \right) \quad (5.8)$$

Esta factorización además de minimizar el valor del índice IAE para entradas del tipo escalón, minimiza el tiempo de asentamiento, esto se debe a que el índice de desempeño IAE penaliza proporcionalmente a los errores grandes respecto a los pequeños, lo que produce un tiempo de asentamiento mínimo (Jerome y Ray, 1991).

Calculado la expresión de  $G_+(s)$  para el modelo del reactor se obtiene,

$$G_+(s) = \left( -\frac{1}{2.8171} s + 1 \right) \quad (5.9)$$

Luego  $G_-(s)$  se consigue a partir de  $G_+(s)$  y  $G(s)$  por medio de,

$$G_-(s) = G_+(s)^{-1} G(s) \quad (5.10)$$

quedando  $G_-(s)$  finalmente de la forma,

$$G_-(s) = \frac{3.1472}{s^2 + 4.6429s + 5.3821} = G_{F1} \quad (5.11)$$

Como puede observarse en el modelo obtenido con esta factorización el cero SD ha sido eliminado.  $G_-(s)$  y  $G(s)$  presentan la misma ganancia en estado estacionario, puesto que  $G_+(0) = 1$  y mantiene la misma dinámica para los polos.

### 5.1.2 Factorización de $G(s)$ minimizando el índice ISE ( $F_2$ )

La segunda factorización aplicada al modelo del reactor (5.7) minimiza el índice ISE (Kwakernaak y Sivan, 1972) que propone,

**Teorema 2** Para una entrada escalón el índice ISE es minimizado al seleccionar  $G_+(s)$  como:

$$G_+(s) = \frac{\left( -\frac{1}{z_1} s + 1 \right) \left( -\frac{1}{z_2} s + 1 \right) (\dots) \left( -\frac{1}{z_m} s + 1 \right)}{\left( \frac{1}{z_1} s + 1 \right) \left( \frac{1}{z_2} s + 1 \right) (\dots) \left( \frac{1}{z_m} s + 1 \right)} \quad (5.12)$$

donde  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  son los ceros SD del sistema.

En esta factorización los ceros están conformados por los ceros SD de  $G(s)$  y los polos de  $G_+(s)$  están situados en la imagen de los ceros SD.

Al factorizar el sistema (5.7), empleando la ecuación (5.12),  $G_+(s)$  es queda de la forma,

$$G_+(s) = \frac{\left(-\frac{1}{2.8171}s + 1\right)}{\left(\frac{1}{2.8171}s + 1\right)} \quad (5.13)$$

Luego con  $G(s)$  y (5.13) se obtiene,

$$G_-(s) = \frac{1.11716s + 3.1472}{s^2 + 4.6429s + 5.3821} = G_{F2} \quad (5.14)$$

El factor  $G_-(s)$  obtenido presenta un cero SI en  $s = -2.8171$ , que es la imagen respecto al eje  $s = 0$  del cero SD de  $G(s)$ , manteniendo los mismos valores de los polos del sistema original. El factor  $G_+(0) = 1$  con lo cual la aproximación (5.14) y el modelo del reactor (5.7) presentan el mismo valor en estado estacionario.

### 5.1.3 Aproximación de Primer Orden con Retardo

Una manera empleada para aproximar los sistemas monovariantes con ceros SD es a través de un modelo de Primer Orden con Retardo (POR) (Smith y Corripio, 1991). El modelo es obtenido a través del método de la curva de reacción (Smith, 1972), según el cual los valores de  $t_0$  y  $\tau$  se seleccionan de tal manera que la respuesta del modelo y la real coincidan en la región de alta pendiente de cambio. Los dos puntos seleccionados para obtener el modelo son los correspondientes a  $(t_0 + 1/3\tau)$  y  $(t_0 + \tau)$ .

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + 1/3\tau \\ t_2 &= t_0 + \tau \end{aligned} \quad (5.15)$$

donde los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  son los valores transcurridos para alcanzar el valor del 28.3% y el 63.2% de la variación a la salida  $\Delta y$ . El modelo de primer orden con retardo tiene la forma,

$$G(s) = \frac{Ke^{-t_0s}}{\tau s + 1} \quad (5.16)$$

donde

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{3}{2}(t_2 - t_1) \\ t_0 &= t_2 - \tau \\ K &= \frac{\Delta y}{\Delta u}\end{aligned}\tag{5.17}$$

Empleando las ecuaciones (5.17), el modelo aproximado POR obtenido al aplicar un escalón del 10% en el flujo de entrada al reactor no lineal es el siguiente,

$$G_{POR}(s) = \frac{0,61198e^{-0,54375s}}{0,68265s + 1}\tag{5.18}$$

Esta aproximación al igual que las dos anteriores no presenta cero SD.

### Comparación de los modelos obtenidos

Una vez obtenidas las distintas aproximaciones lineales que no presentan ceros SD del modelo no lineal del Reactor Van de Vusse, se compararon con este último en lazo abierto, para determinar cual es la mejor aproximación utilizando el índice de desempeño IAE. La comparación se realizó mediante un cambio escalón del 10% en el flujo de entrada. En la Figura 5.2 se muestra la salida normalizada,  $(y/y_{max})$ , para los distintos modelos, puede observarse como en el modelo lineal con ceros SD produce la respuesta inversa característica de los sistemas de fase no mínima, presentada también por el sistema no lineal. En cuanto a las factorizaciones del sistema ( $F_1$  y  $F_2$ ), presentan una dinámica inicial distinta al modelo no lineal, por la ausencia de la respuesta inversa producida por el cero SD, por lo cual presentan un tiempo de asentamiento menor. El sistema POR, presenta los dos puntos de coincidencia (al 28,3% y 63,2%) con el sistema no lineal y aproxima la parte inversa de la respuesta del modelo no lineal manteniendo la salida nula durante ese período.

Para realizar la comparación de los modelos se calculó el índice de desempeño IAE respecto al error existente entre la señal de salida del modelo no lineal y cada una de las aproximaciones lineales del mismo. Los valores del IAE obtenidos se muestran en la Tabla 5.1, el menor valor del índice corresponde como era de esperar al modelo con ceros SD, el segundo menor valor para el sistema es el de POR, los modelos factorizados  $F_1$  y  $F_2$  presentan los mayores valores de IAE respecto al modelo no lineal, siendo el valor del índice de desempeño de  $F_2$  el doble que el producido por el modelo con la factorización  $F_1$ .

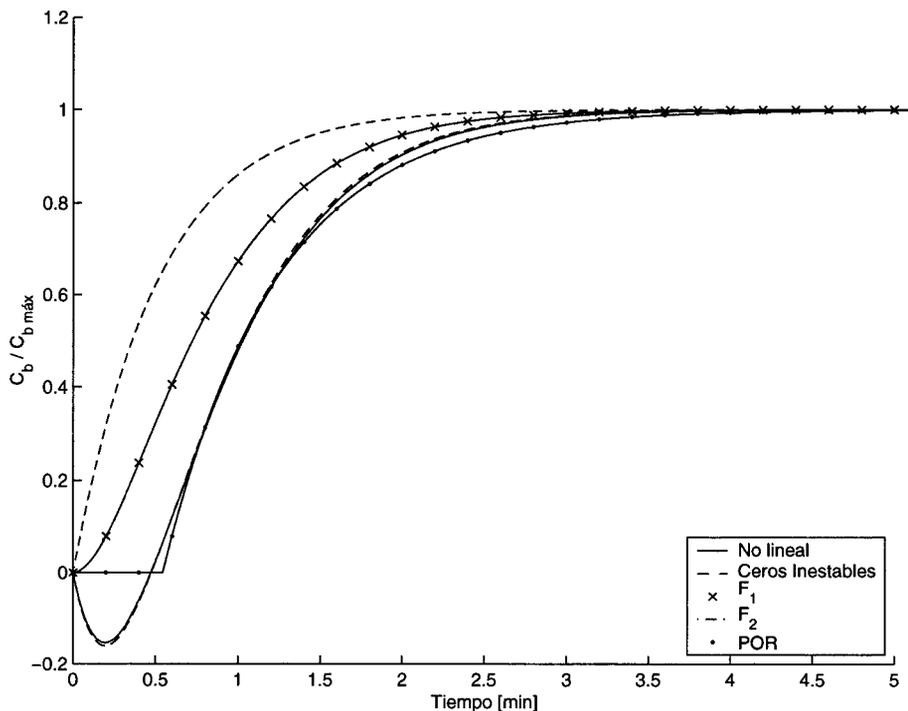


Figura 5.2: Comparación de las salidas para un cambio del 10% en  $F_{ent}$

Tabla 5.1: IAE de los modelos aproximados respecto al modelo no lineal

Modelo	$G_{CerosSD}$	$G_{F_1}$	$G_{F_2}$	$G_{POR}$
IAE	$1,5110 \times 10^{-2}$	$36,524 \times 10^{-2}$	$72,021 \times 10^{-2}$	$10,184 \times 10^{-2}$

### 5.1.4 Comportamiento en lazo cerrado

Una vez obtenidos los modelos aproximados, y de haberlos comparados en lazo abierto, se procede a realizar la comparación del comportamiento de los mismos en el sistema en lazo cerrado. La comparación se realiza obteniendo los valores del índice SVAE obtenidos por medio de la ecuación (4.5) en función de los parámetros de ajuste. Estas superficies permiten obtener los parámetros de ajuste óptimos del controlador para cada modelo, para luego comparar las respuestas temporales ante cambios de referencia y rechazo de perturbaciones. Para construir las superficies de la SVAE se emplearon cada uno de los modelos obtenidos como modelo de predicción en el MPC, luego se aplicó un cambio en la referencia del 10 % en la concentración  $C_b$  de salida del reactor con el modelo no lineal. En la superficie del índice de desempeño es posible observar la influencia sobre este de los valores de los parámetros de sintonización, y analizar como influyen en el desempeño de cada uno de los modelos en lazo cerrado. El tiempo de

muestreo utilizado es de  $T_m = 0,2$  min.

En la Figura 5.3 se muestran las superficies del índice de desempeño obtenidas con la variación de los parámetros ajuste de la penalización del esfuerzo de control  $\lambda$  [0 3] y el horizonte de control  $N_u$  [0 40], manteniendo el horizonte de predicción en  $N_2 = 40$ . Se puede observar que el horizonte de control, después de un determinado valor no influye significativamente en el valor de la SVAE, sin embargo los valores mínimos del índice se logran para valores bajos del horizonte de control. El efecto producido por el incremento de la penalización del esfuerzo de control es aumentar el valor del índice SVAE, debido a que con un mayor valor de  $\lambda$  se produce una respuesta más lenta del sistema lo que degrada el índice de desempeño. Con el modelo con ceros SD no es posible utilizar valores de  $\lambda$  bajos a diferencia del resto de los modelos de aproximación al modelo no lineal. En todos los modelo se produce que al aumentar el valor de  $\lambda$  el SVAE tiende a aumentar, esto se debe a que un mayor valor del parámetro de penalización del esfuerzo de control, hace que las salidas del sistema alcancen el valor de referencia en un tiempo mayor. Al comparar las superficies se observa que el sistema en lazo cerrado con el modelo con ceros SD y el modelo POR, muestran los valores más altos para el índice de desempeño produciendo unos valores similares. Los modelos obtenidos con las factorizaciones presentan un mejor comportamiento, se puede observar como el modelo  $F_1$  alcanza su mínimo valor del SVAE con un  $\lambda$  muy próximo al valor de cero, a diferencia del modelo con ceros SD que necesita de una mayor penalización del esfuerzo de control para evitar que el sistema sea inestable en lazo cerrado y en este caso se requieren valores cercanos a la unidad. Los valores del índice de desempeño obtenidos para el modelo  $F_1$  son del orden del 35% y para el modelo  $F_2$  un 60% de los obtenidos con el modelo con ceros SD.

Para analizar el efecto sobre el índice de desempeño de los horizontes de predicción y control del MPC con los distintos modelos, se realizaron las superficie de SVAE para una variación de  $N_u$  [1  $N_2$ ] y  $N_2$  [1 40], manteniendo constante la penalización del esfuerzo de control en  $\lambda = 1$ . Las superficie de SVAE obtenidas para las distintas aproximaciones de modelos del reactor variando los horizontes se muestra en la Figura 5.3. Se observa como a pesar de que se esta penalizando el esfuerzo de control con el mismo valor  $\lambda = 1$  para todos los modelos, aunque los modelo  $F_1$  y  $F_2$  no lo requieran, se produce la misma tendencia en cuanto a los valores de la SVAE, que en la figura anterior. Los modelos  $F_1$  y  $F_2$  obtenidos con las factorizaciones presentan un mejor comportamiento que el modelo con cero SD y el modelo POR. A pesar de que llegado cierto valor la variación del horizonte de control no aportan una variación notable de la SVAE, se observa que los valores mínimos del índice de desempeño se obtienen para valores de  $N_u < 7$ . El modelo con ceros SD presenta un menor número de combinaciones de los horizontes de predicción y control que producen una salida estable en comparación con

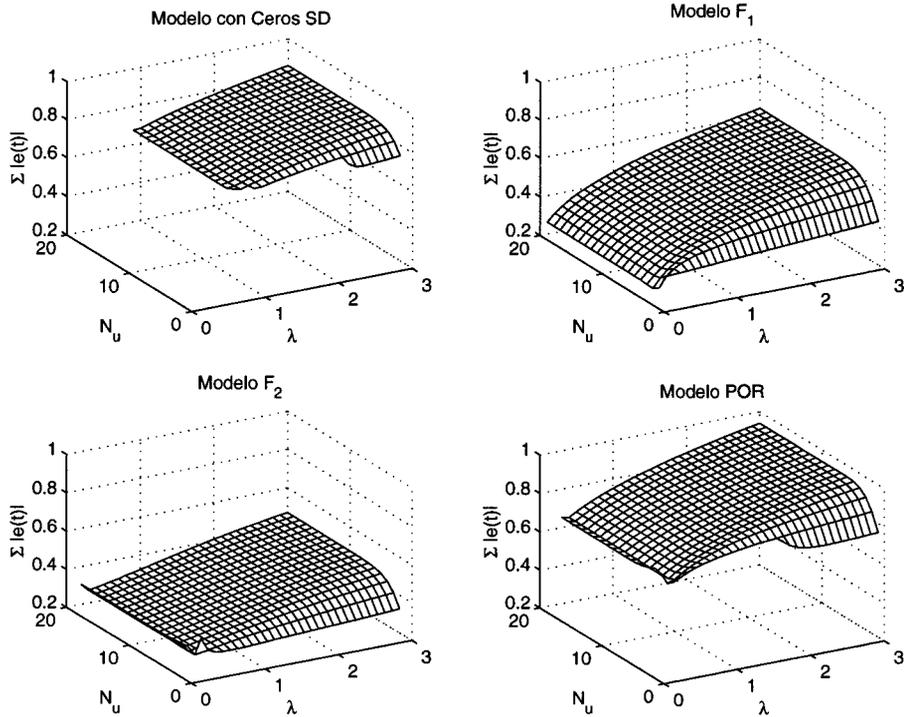


Figura 5.3: Superficies de la SVAE en función de  $\lambda$  y  $N_u$  con  $N_2 = 40$

el resto de los casos.

De las superficies del índice de desempeño mostradas en las figuras 5.3 y 5.4, han sido seleccionados los parámetros de ajuste óptimos para el MPC con cada uno de los modelos de aproximación al modelo no lineal del reactor. El criterio empleado para la selección de  $N$ ,  $N_u$  y  $\lambda$ , es el conjunto de parámetros que proporcionan el mínimo valor del SVAE. Los parámetros elegidos son presentados en la Tabla 5.2.

Tabla 5.2: Parámetros del MPC para cada uno de los modelos

Modelo	$G_{Cero SD}$	$G_{F_1}$	$G_{F_2}$	$G_{POR}$
$N_2$	8	12	20	8
$N_u$	1	3	5	7
$\lambda$	0,95	0,05	0,4	0,35

Una vez obtenidos los parámetros de ajuste se realizaron distintas pruebas en lazo cerrado, para seleccionar cual es la mejor aproximación, estudiando como se desenvuelven cada uno de los sistemas en lazo cerrado para los diferentes modelos. En la figura 5.5, se muestra la salida de los modelos con un cambio de referencia en la concentración

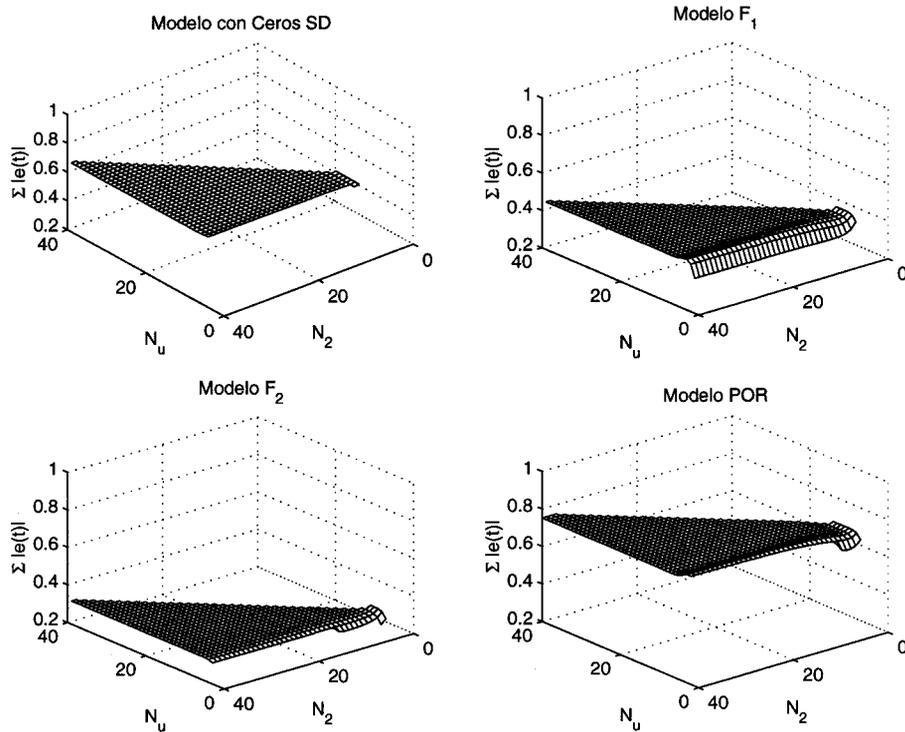
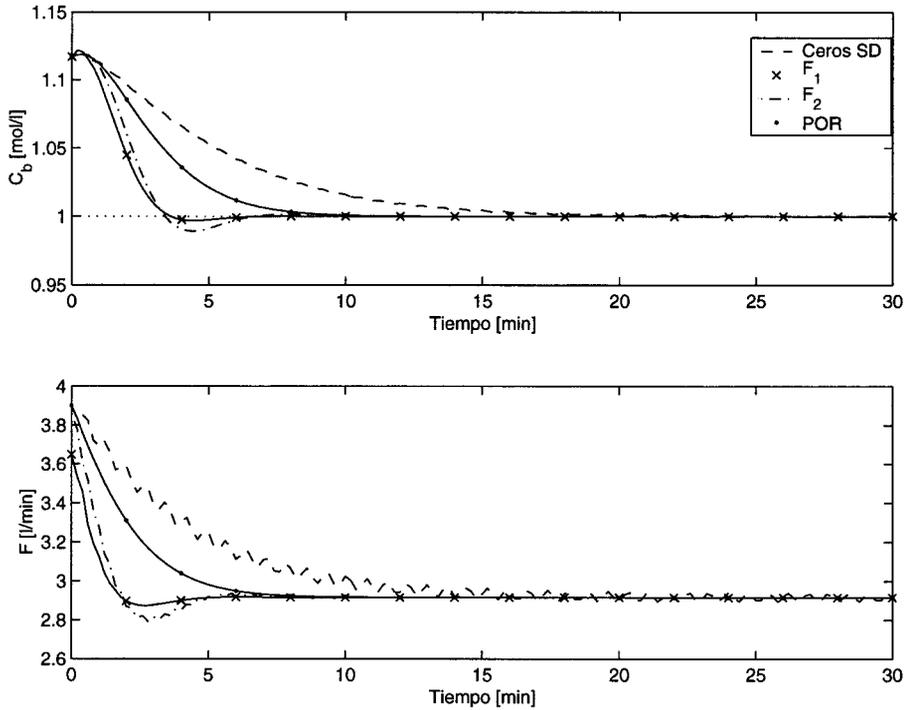


Figura 5.4: Superficies del SvAE con  $N$  y  $N_u$  variables, y  $\lambda = 1$

$C_b$  a 1 mol/l. En esta figura se observa que la señal de salida que presenta un mayor tiempo de asentamiento es la correspondiente al modelo con ceros SD, el segundo mayor tiempo de establecimiento es el producido por el sistema con el modelo POR, es de destacar que estos dos modelos son los que a lazo abierto ante una entrada del tipo escalón se aproximan mejor al modelo no lineal, pero tienen los inconvenientes del cero SD y el retardo respectivamente. El mejor comportamiento es el mostrado por el MPC utilizando como modelo de predicción el obtenido por medio de las factorizaciones. El modelo  $F_2$  presenta sobrepaso ligeramente mayor que al utilizar el modelo  $F_1$ . Con estos modelos se logra un tiempo de establecimiento de un 20% del logrado con el modelo cero SD.

En la Tabla 5.3, se muestran los valores de la SvAE correspondientes a las señales de salida de la figura 5.5. Se observa que el menor valor es el obtenido con el modelo  $F_1$ , que es un 35% del producido por el modelo con cero SD que es el que presenta un mayor valor del índice SvAE. Este cambio de referencia es el que ha sido empleado en la realización de las curvas de superficie de la SvAE. Lo que muestra que el mejor modelo para control, no necesariamente es el que más se aproxime al modelo no lineal en lazo abierto, puesto para sistemas con ceros SD al aproximarlos de una forma más exacta al modelo no lineal, trae como resultado la presencia de ceros SD en el modelo



**Figura 5.5:** Concentración de salida para los distintos modelos con un cambio de referencia

de predicción del MPC. El modelo POR produce un índice SVAE del 60% del logrado por el modelo con cero SD, sin embargo mejores resultados se logran con los modelos obtenidos de las factorizaciones.

**Tabla 5.3:** SVAE de los diferentes modelos en lazo cerrado para un cambio de referencia escalón

Modelo	Cero SD	$G_{F_1}$	$G_{F_2}$	$G_{POR}$
SVAE	$6,6334 \times 10^{-1}$	$2,3062 \times 10^{-1}$	$2,7381 \times 10^{-1}$	$4,0644 \times 10^{-1}$

A continuación se realiza la comparación del comportamiento de los diferentes modelos de aproximación al modelo del reactor ante las no linealidades producidas por un cambio de referencia alejado del punto de operación sobre el que se linealizó el modelo. En la figura 5.6, se muestran la concentración de salida y el flujo de entrada del reactor ante un cambio de referencia a  $0,6 \text{ mol/l}$ . Se puede observar que el modelo con cero SD con este cambio de referencia presenta una respuesta inestable para el segundo cambio de referencia producido en  $t = 50 \text{ min}$ . El sistema  $F_1$  presenta el menor tiempo de asentamiento, pero produce un sobrepaso mucho mayor que el modelo de  $F_2$ . Los

modelos  $F_1$  y  $F_2$  y el modelo POR presentan un tiempo de asentamiento similar.

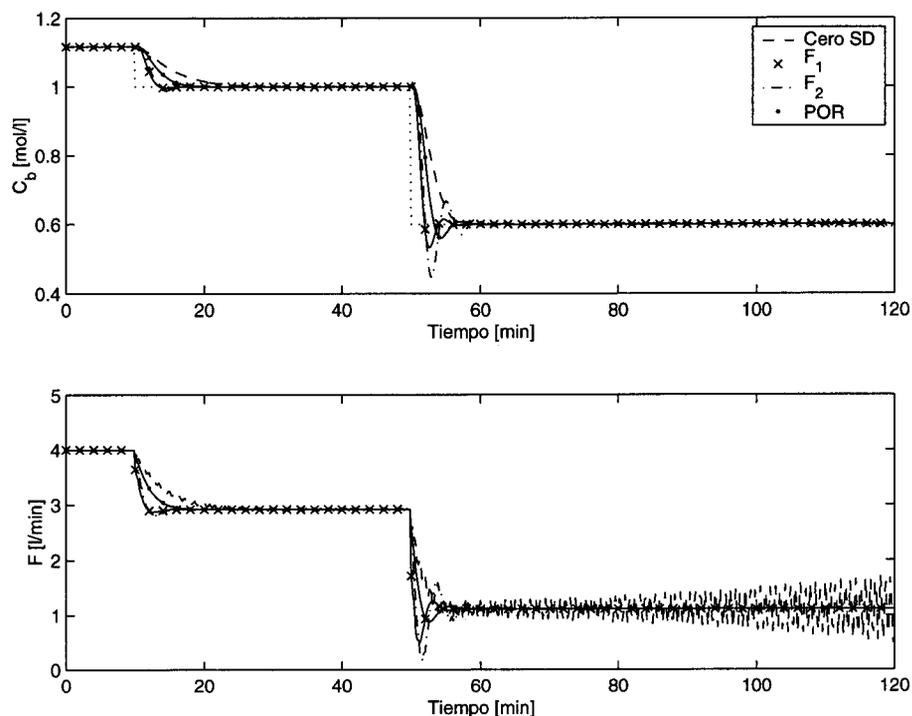


Figura 5.6: Salida para los distintos modelos con cambio de referencia con los parámetros que minimizan el IAE en cada caso

Con el cambio de referencia mostrado en la figura 5.6 se calculó el valor del SVAE en lazo cerrado para cada uno de los modelos obtenidos, estos valores son mostrados en la Tabla 5.4. Se observa que el mejor comportamiento es el obtenido con el modelo  $F_1$ , y que los otros modelos presentan un valor del índice SVAE un 50% mayor que el producido por  $F_1$ , el peor comportamiento es producido por el modelo con ceros SD que presenta un comportamiento inestable al alejarse del punto de operación donde se realizó la linealización del modelo.

Tabla 5.4: SVAE de los modelos aproximados en lazo cerrado con cambio de referencia

Modelo	Cero SD	$G_{F_1}$	$G_{F_2}$	$G_{POR}$
IAE	—	$8,6028 \times 10^{-1}$	$12,4952 \times 10^{-1}$	$13,1181 \times 10^{-1}$

Con el finalidad de analizar la robustez de los modelos obtenidos ante variaciones en el modelo del reactor, se realizaron cambios de 5% y 25% en la velocidad de reacción

del modelo no lineal. Los cambios se llevaron a cabo en los instantes de tiempo de 10 y 50 *min.* En la Figura 5.7 se ilustra la concentración del componente  $C_B$  y el flujo  $F$  de entrada al reactor.

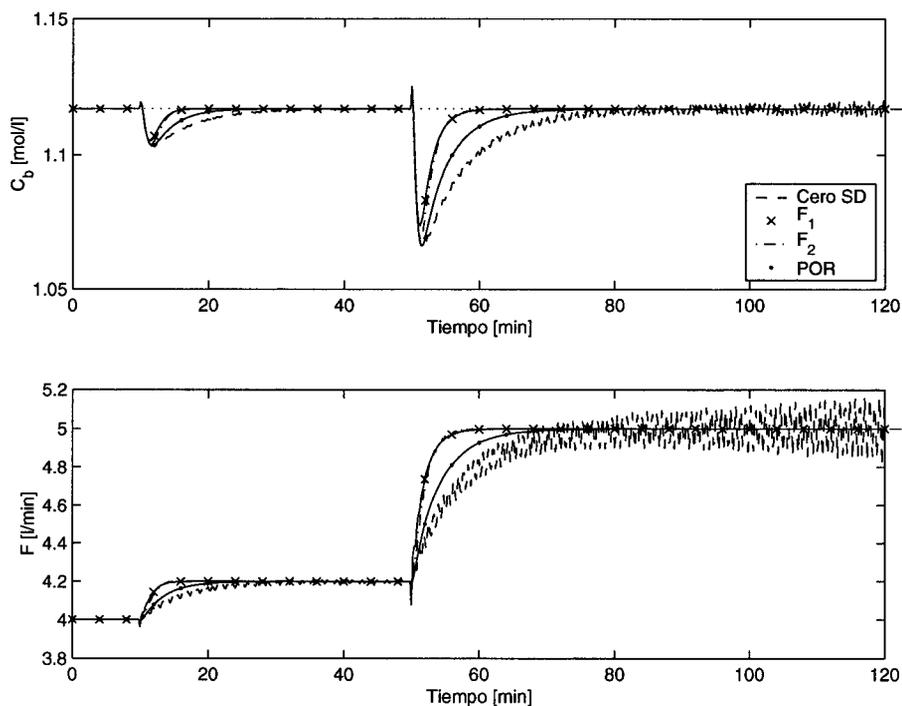
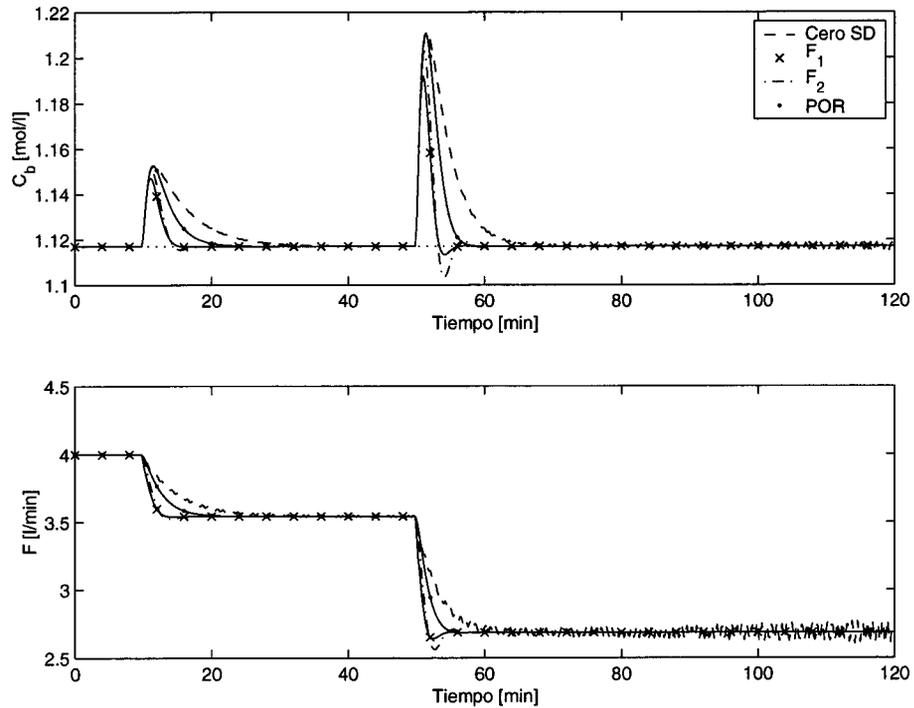


Figura 5.7: Variables de proceso para cambios en el modelo

Se observa que cuando el MPC utiliza el modelo con cero SD es capaz de mantener la variable controlada en su valor de referencia para el cambio del 5%, con un tiempo de asentamiento mucho mayor que los modelos obtenidos de la factorización, al aplicar el cambio del 25% el sistema presenta un comportamiento inestable. El resto de los modelos son capaces de manejar ambos cambios en el modelo del reactor. El mejor comportamiento lo presentan los modelos  $F_1$  y  $F_2$  con respuestas similares entre sí. El modelo POR presentan un comportamiento estable ante los cambios en el modelo, pero con un tiempo de establecimiento del doble que el presentado por el MPC con los modelos  $F_1$  y  $F_2$ . Es posible estabilizar el sistema utilizando el modelo con cero SD incrementando el valor de  $\lambda$ , pero esto involucra tiempos de asentamientos aún mayores que el resto de los modelos obtenidos.

El comportamiento de el MPC con los diferentes modelos de aproximación, ante perturbaciones en la concentración del componente  $A$  en el flujo de alimentación es representado en la figura 5.8.



**Figura 5.8:** Variables de proceso para perturbaciones en la concentración del flujo de alimentación del reactor

El MPC con los distintos modelos obtenidos ha sido ajustado en cada caso manteniendo el mismo criterio, utilizando los parámetros que minimizan la SVAE obtenidos inicialmente. En el ensayo se produce un cambio en la concentración inicial del 5% y el 20% en los instantes de tiempo de 10 y 50 *min* respectivamente. El MPC con el modelo  $F_1$  presenta la respuesta con el menor tiempo de asentamiento siendo este un 20% del presentado por el MPC con el modelo con cero SD para la primera perturbación. El modelo  $F_2$  produce un comportamiento similar al  $F_1$ . El modelo POR exhibe para la primera perturbación un comportamiento estable, con un tiempo de asentamiento un 50% menor que el logrado por el modelo con cero SD. Ante la segunda perturbación del 20%, se observa que las variables manipuladas y controladas del modelo con cero SD presenta un comportamiento inestable. Los modelos  $F_1$ ,  $F_2$  y POR presentan un comportamiento estable. El mayor tiempo de asentamiento lo presenta el modelo POR, los modelos  $F_1$  y  $F_2$  obtenidos con las factorizaciones exhiben un tiempo de asentamiento similar siendo este un 50% del presentado por el modelo POR.

Los resultados obtenidos muestran para el caso monovariante, como un modelo que represente con mayor exactitud la dinámica del modelo no lineal que se pretende controlar, no implica que sea el mejor modelo para el MPC. Entre los modelos estudiados los obtenidos por medio de las factorizaciones son los que presentan un mejor compor-

tamiento en el tiempo de asentamiento para cambios de referencia en torno al punto de operación. Estos modelos también presenta un comportamiento mas robusto tanto para cambios en el modelo no lineal, como perturbaciones en la concentración de alimentación del reactor.

## 5.2 Sistemas multivariables

Siguiendo con las mismas ideas presentadas para el caso monovariable, se realiza la extensión al caso multivariable. Se emplea como proceso para realizar las comparaciones el sistemas de cuatro tanques interconectados. Partiendo de la linealización de ese modelo se obtienen distintos modelos de predicción, que al igual que en el caso SISO, que no presenten ceros de transmisión SD. Con los modelos obtenidos se muestra el comportamiento del MPC con los distintos modelos y se realizan pruebas de robustez con la finalidad de analizar cual es la mejor aproximación.

El modelo linealizado del sistema de cuatro tanques interconectados para el punto de operación  $P_+$  con ceros de transmisión SD es descrito por la matriz de funciones de transferencia 5.19 de transferencia. En el Apéndice (A), se demuestra la obtención del modelo linealizado a partir de las ecuaciones diferenciales que rigen al proceso.

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1.5}{63s + 1} & \frac{2.5}{2457s^2 + 102s + 1} \\ \frac{2.5}{5096s^2 + 147s + 1} & \frac{1.6}{91s + 1} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

### 5.2.1 Factorización no diagonal

Una de las consideraciones adicionales que se deben de tener en cuenta para realizar las factorizaciones en sistemas multivariables, es que se debe analizar la importancia relativa entre las variables del proceso. Al factorizar la matriz de funciones de transferencia de la forma,

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_+(s)\mathbf{G}_-(s) \quad (5.20)$$

La factorización es posible realizarlas con dos criterios, en virtud de la forma como se seleccione el factor  $\mathbf{G}_+(s)$ . Éste puede ser escogido de manera de que sea diagonal con lo cual el efecto de los ceros de transmisión SD se observa en la respuesta dinámica

de cada una de las  $n$  salidas. Por el contrario es posible establecer  $\mathbf{G}_+(s)$  de manera tal que no sea diagonal con lo que es posible realizar un desacoplamiento dinámico de manera que los efectos de los ceros de transmisión SD se vea reflejado en solo una de las salidas del modelo del sistema, es decir, éstas factorizaciones forzan a que todos los efectos de los ceros de transmisión SD se manifiesten en una solo de las salidas solamente, con lo cual la dinámica de la salida seleccionada como menos importante se ve degradada considerablemente, manteniendo las  $n-1$  salidas restante con la dinámica original. En cualquier caso el factor  $\mathbf{G}_+(s)$  debe de ser seleccionado de manera tal de que al evaluarlo en  $s = 0$  se obtenga  $\mathbf{G}_+(0) = \mathbf{I}$ , con lo cual se garantiza que el error en estado estacionario en la comparación entre  $\mathbf{G}(s)$  y  $\mathbf{G}_+(s)$  sea cero.

La factorización del sistema MIMO, al igual que en el caso SISO, depende del índice de desempeño seleccionado y del tipo de entrada al sistema. La importancia relativa de las salidas del sistema, es expresada como un factor de ponderación en la expresión del índice de desempeño usado. El índice empleado es la ISE, y es expresada como,

$$ISE = \int_0^\infty [w(t) - y(t)]^T \mathbf{A} [w(t) - y(t)] dt \quad (5.21)$$

Donde

$w(t)$ : Es el vector de referencias de la salida del proceso.

$y(t)$ : es el vector de salidas del proceso.

$\mathbf{A}$ : Es una matriz de ponderación semi-definida positiva, que indica la importancia relativa de cada salida.

Para encontrar una factorización que produzca el factor  $\mathbf{G}_+(s)$  no diagonal la matriz  $\mathbf{A}$  en (5.21) debe de ser selecciona de la forma (5.22), haciendo que  $w \rightarrow \infty$  ((Holt y M.Morari, 1985)),

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} w & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & w & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

lo cual conduce al siguiente teorema,

**Teorema 3** *Asumiendo que el sistema  $\mathbf{G}(s)$  con  $n$  entradas es cuadrado, estable y tiene  $l$  ceros localizados en el semiplano derecho  $z_i, i = 1, 2, \dots, l$ . Además, asumiendo que todos los elementos de  $\mathbf{G}^{-1}(s)$  son distintos de cero y que contiene todos los  $l$  ceros*

del semiplano derecho como polos. Entonces es posible tener un control perfecto para un conjunto de  $n - 1$  salidas con la salida restante exhibiendo error cero en estado estacionario.

La forma de  $\mathbf{G}_+(s)$  que satisface este teorema es,

$$\mathbf{G}_+(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 1 & 0 \\ \frac{sa_1(s)}{b_1(s)} & \frac{sa_2(s)}{b_2(s)} & \dots & \frac{sa_{n-1}(s)}{b_{n-1}(s)} & \prod_i^l \frac{\left(-\frac{1}{z_m} s + 1\right)}{\left(\frac{1}{z_1} s + 1\right)} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Los términos  $a_i(s)$  y  $b_i(s)$  pueden ser determinados con el siguiente teorema (Kwakernaak y Sivan, 1972).

**Teorema 4** *Asumiendo que el sistema es cuadrado  $\mathbf{G}(s)$  es estable con  $n$  entradas  $n$  salidas y que presenta un solo cero localizado en el semiplano derecho,  $z$ . Además asumiendo que todos los elementos de  $G^{-1}(s)$  son diferentes de cero y tiene como polo a  $z$ . Entonces  $\mathbf{G}_+(s)$  es de la forma,*

$$\mathbf{G}_+(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 1 & 0 \\ \frac{s\beta_1(s)}{\frac{1}{z} - s + 1} & \frac{s\beta_2(s)}{\frac{1}{z} - s + 1} & \dots & \frac{s\beta_{n-1}(s)}{\frac{1}{z} - s + 1} & \frac{-\frac{1}{z} s + 1}{\frac{1}{z} - s + 1} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

donde los  $\beta_i$  son determinados por 5.25

$$\beta_i = \frac{-2\hat{g}_{ji}(z)}{z\hat{g}_{jn}(z)} \quad (5.25)$$

para cualquier  $j$ ,  $y$ ,  $\hat{g}_{ji}$  representa el elemento  $(j,i)$  de la inversa.

Con esta factorización se obtiene el factor  $\mathbf{G}_+(s)$  empleando como índice ISE para una entrada del tipo escalón.

Con los resultados obtenidos se calculan los factores  $\mathbf{G}_-(s)$  para el sistema de los cuatro tanques interconectados partiendo del modelo definido en 5.19. Para aplicar estas factorizaciones es necesario seleccionar la salida que presenta menor importancia que las  $n$  restantes. En vista de que la idea es obtener diferentes modelos para probar su comportamiento en lazo cerrado con el MPC, se realizaron factorizaciones para que cada una de las salidas sea óptima.

Aplicando (5.24) y (5.25) se realizó el cálculo de  $\mathbf{G}_+(s)$  para que la salida  $y_1$  sea óptima obteniéndose,

$$\mathbf{G}_+(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{123.6s}{76.92s + 1} & \frac{-76.92s + 1}{76.92s + 1} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Dados que,

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_+(s)\mathbf{G}_-(s) \quad (5.27)$$

luego

$$\mathbf{G}_-(s) = \mathbf{G}_+(s)^{-1}\mathbf{G}(s) \quad (5.28)$$

De esta manera  $\mathbf{G}_-(s)$  para que la salida  $y_1$  sea óptima, denominado modelo  $F_{y_1}$ , esta dada por la siguiente expresión,

$$\mathbf{G}_-(s) = \begin{bmatrix} \frac{1.5}{63s + 1} & \frac{2.5}{2457s^2 + 102s + 1} \\ \frac{1.229 \times 10^4 s^2 + 356.6s + 2.5}{321048s^3 + 14357s^2 + 210s + 1} & \frac{-3931s^2 + 100.3s + 1.6}{223587s^3 + 11739s^2 + 193s + 1} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

En la ecuación (5.29) puede observarse que la primera fila de funciones de transferencia se corresponde exactamente con la primera fila del modelo 5.19, debido a que la factorización ha sido realizada para que  $y_1$  se óptima. Los valores de los ceros de transmisión del sistema  $\mathbf{F}_{y_1}$  se encuentran en el semiplano izquierdo y vienen dados por  $c_1 = -0.05650(18)$ ,  $c_2 = -0.01300(77)$ .

Aplicando ahora las ecuaciones de factorización (5.24) y (5.25) se obtiene el factor  $\mathbf{G}_+(s)$  para el modelo de los cuatro tanques interconectados (5.19), de manera de lograr que la salida  $y_2$  sea óptima,

$$\mathbf{G}_+(s) = \begin{bmatrix} \frac{-76.92s + 1}{76.92s + 1} & \frac{191.4s}{76.92s + 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Con  $\mathbf{G}_+(s)$  y  $\mathbf{G}(s)$  se calcula el factor  $\mathbf{G}_-(s)$  denominado ( $\mathbf{F}_{y_2}$ ) de manera de obtener una factorización óptima para la salida  $y_2$ ,

$$\mathbf{G}_-(s) = \begin{bmatrix} \frac{-7644s^2 - 27.3s + 1.5}{321048s^3 + 14357s^2 + 210s + 1} & \frac{9783s^2 + 305.8s + 2.5}{223587s^3 + 11739s^2 + 193s + 1} \\ \frac{2.5}{5096s^2 + 147s + 1} & \frac{1.6}{91s + 1} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Al observar (5.31) se aprecia como la segunda fila de funciones de transferencia es igual a la segunda fila del modelo 5.19, puesto que la factorización a sido realizada, de manera que la salida  $y_2$  se óptima. El valor de los ceros de transmisión del sistema (5.31) viene dados por  $c_1 = -0.05650(18)$ ,  $c_2 = -0.01300(77)$ , que presentan los mismos valores que los ceros de transmisión obtenidos para la factorización  $\mathbf{F}_{y_1}$ .

Una vez obtenidos los modelos de las factorizaciones, se procede a realizar la comparación de las respuestas en lazo abierto para las aproximaciones que se van a utilizar como modelo de predicción en el MPC. Para realizar la comparación en lazo abierto respecto al modelo no lineal, se aplicó un escalón del 10% en la entrada  $u_1$  y  $u_2$ , para obtener las señales de salida ( $y_1$  y  $y_2$ ) normalizadas respecto a su valor máximo para cada una de las entradas. La respuestas de los distintos modelos para el cambio escalón en la entrada  $u_1$  se muestran en la Figura 5.9.

Puede observarse que todas las salidas  $y_1$  son similares a la salida del modelo no lineal, exceptuando la salida producida por la factorización  $\mathbf{F}_{y_2}$ , esto se debe a que este modelo ha sido obtenido para que la salida  $y_2$  sea óptima respecto a la salida  $y_2$  del modelo 5.19. La salida  $y_1$  del modelo  $\mathbf{F}_{y_2}$  presenta una respuesta inversa para un cambio escalón en  $u_1$ , se observa como a pesar de que algunos elementos de la matriz de funciones de transferencia presenten ceros SD, el modelo multivariable tiene todos los

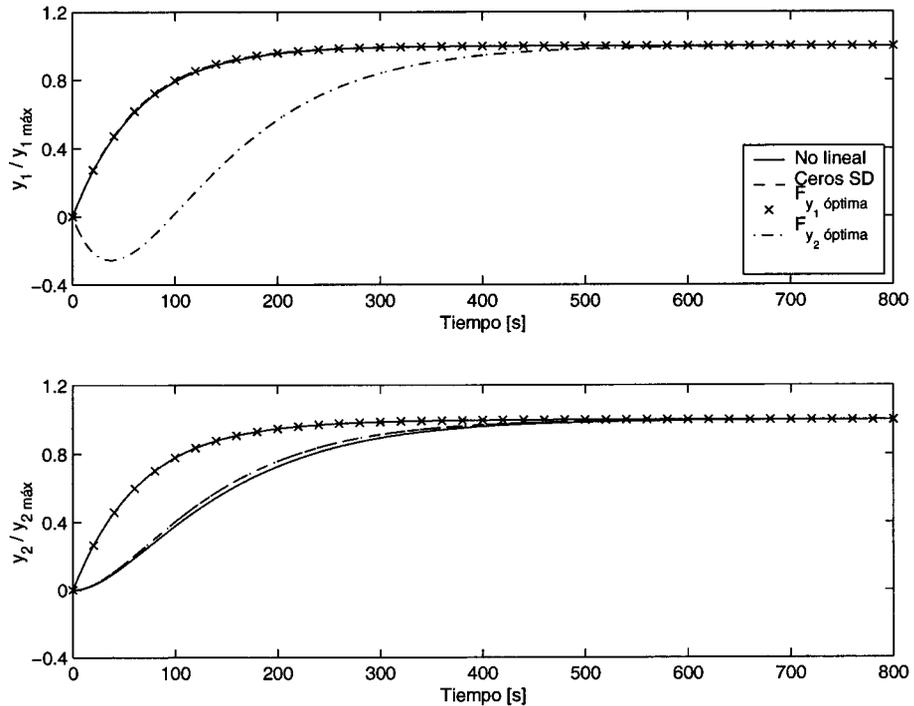


Figura 5.9: Comparación de las salidas para un cambio del 10% en  $u_1$

ceros de transmisión SI. En la segunda gráfica de la Figura 5.9 que se corresponde con la salida  $y_2$  para el cambio  $u_1$  se observan que los modelos con cero SD y la factorización  $F_{y_2}$  coinciden con la respuesta del modelo no lineal. El modelo  $F_{y_1}$  es el que presenta diferencias respecto al modelo al modelo no lineal, debido que fue la salida que se seleccionó menos importante para realizar la factorización. Para la comparación de las salidas, cada una ha sido normalizada respecto a su valor máximo  $y_{max}$  de manera que en estado estacionario presentasen el mismo valor, esto se realizó debido a que diferían un poco del modelo no lineal al aplicar el escalón, lo que producía que el índice de desempeño IAE continuaba incrementándose a pesar de que los modelos habían alcanzado el valor de estado estacionario.

En la Figura 5.10, se muestran las señales de salida  $y_1$  y  $y_2$  de los modelos ante un cambio escalón del 10% en la entrada  $u_2$ . Los resultados obtenidos son equivalentes a los correspondientes a la entrada  $u_1$ . La respuesta del modelo con ceros SD coincide para ambas salidas  $y_1$  y  $y_2$ . Los modelos factorizados presentan una respuesta similar al modelo no lineal solamente para la respuesta para la cual han sido factorizados, es decir, si el modelo ha sido factorizado obtener una salida con  $y_1$ , para esta presenta una dinámica similar a la del modelo no lineal, puesto todo el efecto de la degradación del modelo al eliminar la dinámica del cero SD se traslada a una la otra salida  $y_1$ . Como se pueden observar en las figuras con estas factorización se logran  $n - 1$  salidas idénticas.

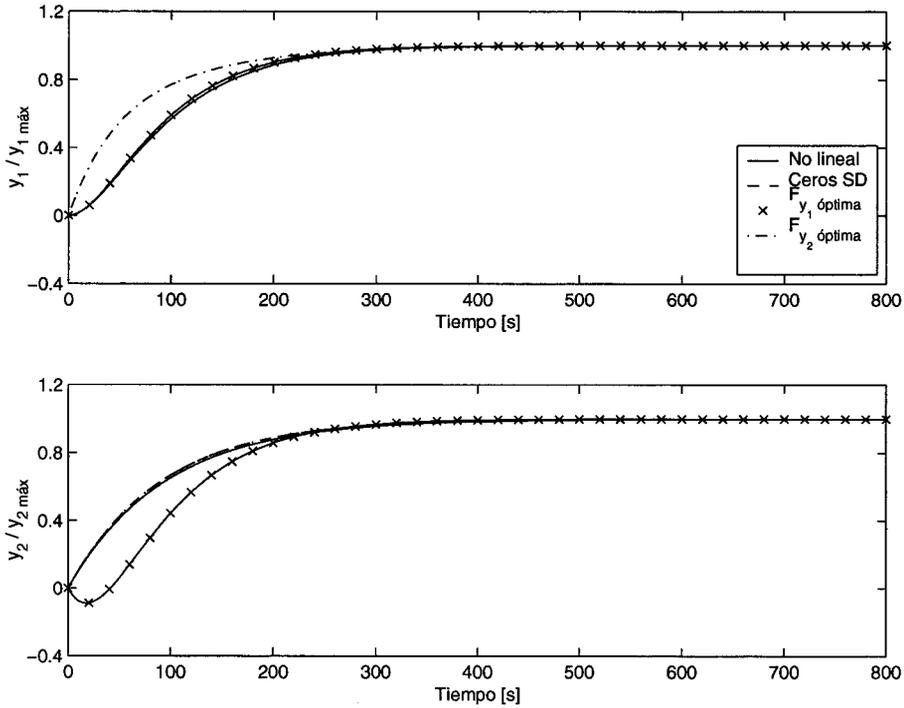


Figura 5.10: Comparación de las salidas para un cambio del 10% en  $u_2$

En la salida  $y_2$  para el modelo  $F_{y_1}$  se presenta una respuesta inversa debido a que  $G_{21}(s)$  es un sistema de fase no mínima. De las últimas dos figuras, se puede determinar que la mejor aproximación al modelo no lineal de los cuatro tanques interconectados, es el modelo SD con la factorización 5.29 y 5.31, se consigue una dinámica "óptima" para solo una de las salidas.

Con el fin de cuantificar la mejor aproximación al modelo no lineal en lazo abierto, se ha calculado el valor del IAE de cada salida respecto a la salida correspondiente del modelo no lineal, los valores obtenidos son mostrados en la Tabla 5.5. El modelo con cero SD como era de esperar es el que presente en menor valor del índice de desempeño. Los resultados obtenidos con modelos deducidos por medio de las factorizaciones son equivalentes, ambos presenta una salida óptima con el mismo valor de IAE que el modelo con cero SD, y otra salida la cual se degrada considerablemente, siendo los valores del índice de desempeño  $F_{y_2}$  ligeramente superiores s a los obtenidos para  $F_{y_1}$ .

Tabla 5.5: IAE de los modelos aproximados respecto al modelo no lineal

Modelo	CeroSD		$G_{-y_1}$		$G_{-y_2}$	
	$y_1$	$y_2$	$y_1$	$y_2$	$y_1$	$y_2$
$u_1$	1,630	9,434	1,630	89,031	163,574	9,434
$u_2$	4,581	4,203	4,581	39,842	36,882	4,203
<i>SUMA</i>	6,211	13,637	6,211	128,873	200,456	13,637

## 5.2.2 Factorización diagonal

Al realizar las factorizaciones de manera de lograr  $n - 1$  salidas óptimas, toda la degradación en el modelo  $\mathbf{G}(s)$  producida al eliminar la dinámica del cero SD se traslada a la salida restante. Como se observa en las Figuras 5.9, 5.10 y en la Tabla 5.5 al concentrar todos los efectos de la degradación del modelo en una salida que es la seleccionada como menos importante se deteriora considerablemente su comportamiento.

Realizando una factorización diagonal se logra repartir el efecto de la degradación del modelo en cada una de las salidas, con lo que es posible lograr una mejor aproximación considerando el conjunto de las  $n$  entradas del sistema. La forma considerado como factorización de  $G_+(s)$  para lograr una matriz diagonal y que elimine de  $G_-(s)$  la dinámica del cero SD, viene dada por:

$$\mathbf{G}_+(s) = \frac{\left(-\frac{1}{z_1}s + 1\right)\left(-\frac{1}{z_2}s + 1\right)\left(\dots\right)\left(-\frac{1}{z_m}s + 1\right)}{\left(\frac{1}{z_1}s + 1\right)\left(\frac{1}{z_2}s + 1\right)\left(\dots\right)\left(\frac{1}{z_m}s + 1\right)} \mathbf{I} = \quad (5.32)$$

donde  $z_i, i = 1, \dots, m$  son los ceros SD del sistema.  $G_+(s)$  para el caso en estudio con un solo cero SD, se reduce a,

$$\mathbf{G}_+(s) = \begin{bmatrix} \frac{-\frac{1}{z}s + 1}{\frac{1}{z}s + 1} & 0 \\ 0 & \frac{-\frac{1}{z}s + 1}{\frac{1}{z}s + 1} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

donde los elementos de la diagonal están formados por una función de transferencia, que tiene como ceros los ceros de transmisión SD del sistema 5.19, y el polo esta dado por la imagen en el semiplano izquierdo de los ceros de transmisión SD. Por consiguiente  $G_+(s)$  se escribe como,

$$G_+(s) = \begin{bmatrix} \frac{-76.92s + 1}{76.92s + 1} & 0 \\ 0 & \frac{-76.92s + 1}{76.92s + 1} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Si calculamos el valor del sistema  $G_-(s)$ , denominado modelo  $F_{diag}$  es,

$$G_-(s) = \begin{bmatrix} \frac{115.384615384615s + 1.5}{-4846.15s^2 - 13.923076923s + 1} & \frac{192.31s + 2.5}{-189000s^3 - 5389.23s^2 + 25.08s + 1} \\ \frac{192.31s + 2.5}{-392000s^3 - 6211.54s^2 + 70.08s + 1} & \frac{123.08s + 1.6}{-7000s^2 + 14.08s + 1} \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Calculando los ceros de transmisión del modelo se obtiene  $c_1 = c_2 = -0.01300(77)$  y  $c_3 = -0.05650(18)$ . Por consiguiente la inversa del modelo es estable.

Para realizar la comparación en lazo abierto respecto al modelo no lineal, se aplicó un escalón del 10% en la entrada  $u_1$  y  $u_2$ , para obtener las señales de salida ( $y_1$  y  $y_2$ ) para cada una de las entradas. La respuestas para la entrada  $u_1$  se muestran en la Figura 5.11 y para la entrada  $u_2$  se muestran en la Figura 5.12.

Observando las Figuras 5.11 y 5.12 se observa como esta factorización produce un factor  $G_-(s)$  inestable en lazo abierto.  $G_+(s)$  en (5.32) puede escribirse de la forma,

$$G_+(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \quad (5.36)$$

donde  $n(s)$  contiene todos los ceros de transmisión de  $G(s)$  y  $d(s)$  contiene solamente polos estables seleccionados como la imagen en el semiplano izquierdo de los ceros semiplano derecho, luego

$$G(s) = G_+(s)G_-(s) = \frac{n(s)}{d(s)}G_+(s) \quad (5.37)$$

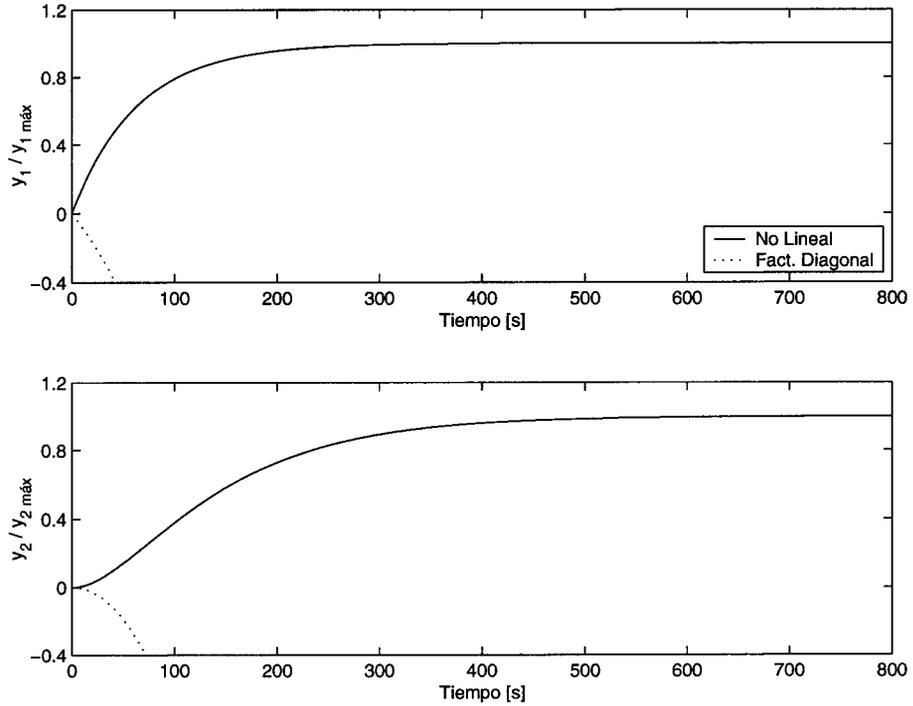


Figura 5.11: Comparación de las salidas del modelo no lineal con las obtenidas con la factorización diagonal, para un cambio del 10% en  $u_1$

el factor  $\mathbf{G}_-(s)$  se obtiene como,

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_+^{-1}(s)\mathbf{G}(s) = \frac{d(s)}{n(s)}\mathbf{G}(s) \tag{5.38}$$

por consiguiente todos los elementos de  $\mathbf{G}_-(s)$  contienen como polos las raíces de  $d(s)$  las cuales son los ceros de transmisión SD del modelo  $\mathbf{G}(s)$ , por esta razón  $\mathbf{G}_-(s)$  presenta un comportamiento inestable en lazo abierto.

Existe la posibilidad de que en algún sistema la función de transferencia  $G_{-i,j}(s)$  de  $\mathbf{G}_-(s)$  contenga los ceros de transmisión SD del sistema  $\mathbf{G}(s)$  con lo cual se cancelen los polos SD, y tenga una salida estable en lazo abierto. Esta situación es difícil encontrarla de manera general, ya que las raíces del numerador del determinante no tienen relación directa con los ceros de cada una de las funciones de transferencia  $G_{i,j}(s)$  que componen el sistema  $G(s)$ , a diferencia de lo que ocurre con las raíces del denominador del determinante del sistema, donde si se aprecia una clara relación con los polos de cada una de las funciones de transferencia  $G_{i,j}(s)$ .

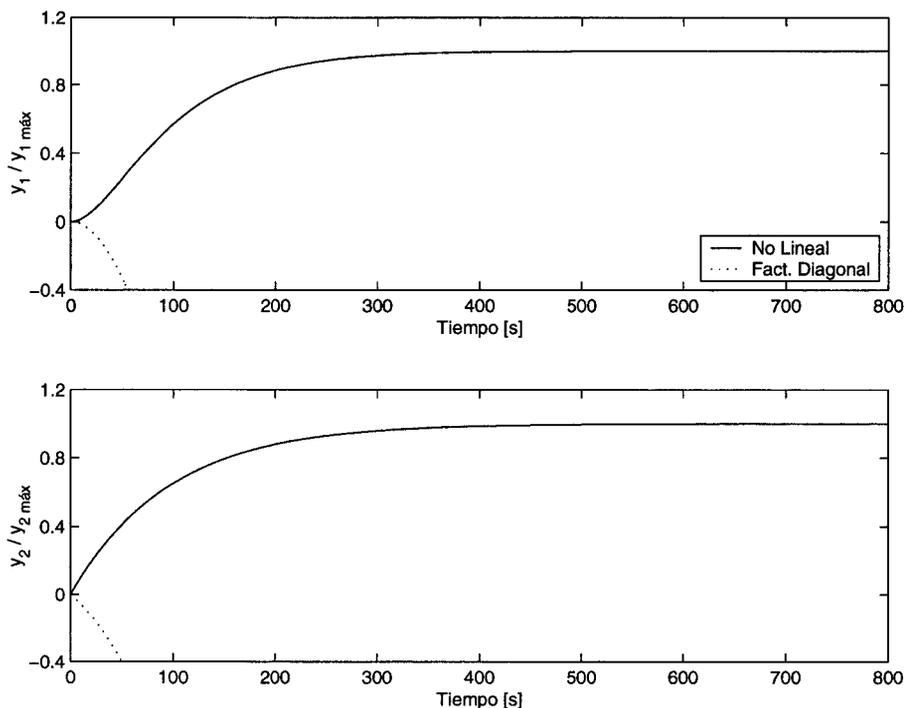


Figura 5.12: Comparación de las salidas del modelo no lineal con las obtenidas con la factorización diagonal, para un cambio del 10% en  $u_2$

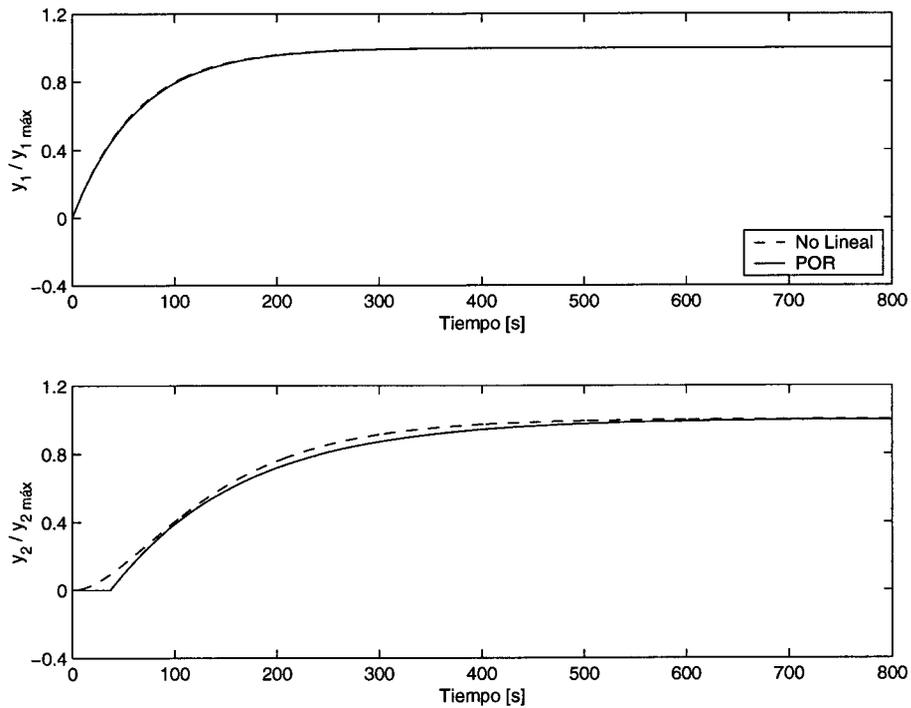
### 5.2.3 Aproximación de Primer Orden con Retardo

Al observar en las Figuras 5.9 y 5.10 el comportamiento en lazo abierto del modelo no lineal del sistema de cuatro tanques interconectados para cambios del tipo escalón en las entradas, se observa que el sistema presenta dinámicas de orden superior a uno, este tipo de dinámicas es posible aproximarlas por un modelo POR. Modificando las funciones de transferencia  $G_{i,j}(s)$  que componen la matriz de transferencia  $\mathbf{G}(s)$ , se modifican el determinante del sistema, con lo cual se logra cambiar las raíces del numerador del determinante y por consiguiente los ceros de transmisión sistema  $\mathbf{G}(s)$ .

Se realizó entonces la aproximación del proceso a un sistema multivariable compuesto por sistemas de primer orden con retardo, estos han sido obtenidos a partir del modelo no lineal, al introducir en cada salida un escalón del 10% del valor de estado estacionario. A partir de las  $m \times n$  curvas de respuesta a la entrada escalón, los parámetros del modelo han sido obtenidos mediante el procedimiento descrito en la sección 5.1.3 para el caso monovariable. El modelo de POR está descrito de la siguiente manera,

$$G_{POR}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1,546}{64,35s + 1} & \frac{2,513e^{-25s}}{88,2s + 1} \\ \frac{2,546e^{-37s}}{129,2s + 1} & \frac{1,633}{94,8s + 1} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

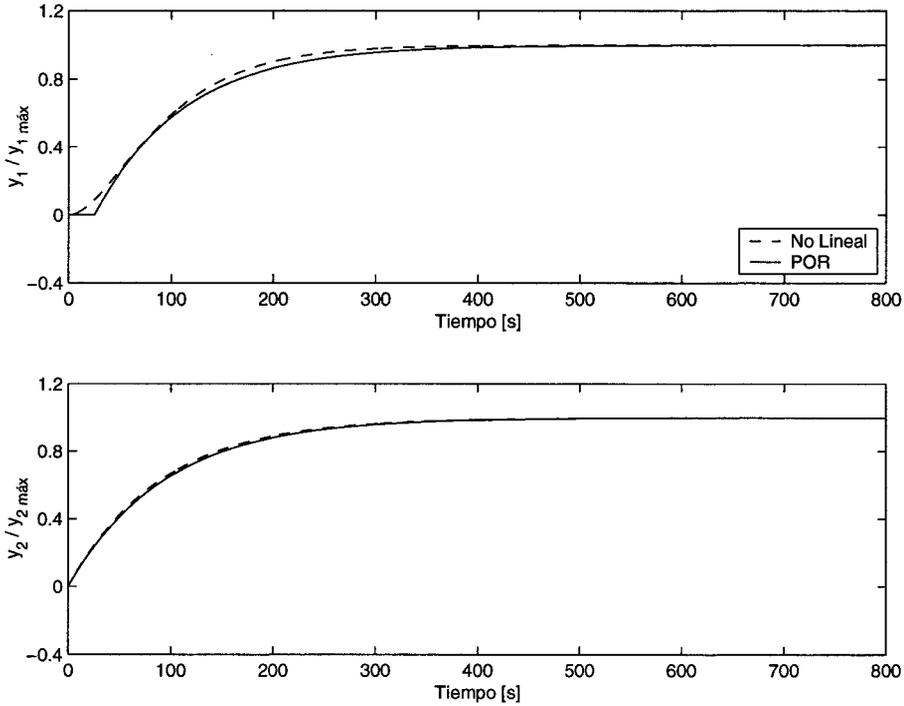
La comparación entre el modelo no lineal y el modelo POR se realizó aplicando una entrada escalón del 10 % a las entradas  $u_1$  y  $u_2$  de manera similar a la realizada con los modelos obtenidos con la factorización. En la Figura 5.13 se muestra la salida normalizada  $y_1/y_{1max}$  y  $y_2/y_{2max}$  al aplicar un cambio escalón en la entrada  $u_1$ . Se observa como la salida  $y_1$  presenta el mismo comportamiento que el modelo no lineal, en la salida  $y_2/y_{2max}$  se observa como la dinámica de orden superior que es aproximada por el modelo de primer orden con retardo, la salida se mantiene en cero inicialmente, luego la región donde mejor se corresponde ambas dinámicas es en donde se obtuvieron los dos puntos de con los que se calcula la constante de tiempo y el retardo del modelo, ambas salidas coinciden en el valor de estado estacionario al estar normalizadas.



**Figura 5.13:** Comparación de las salidas del modelo POR para un cambio del 10% en  $u_1$

Las respuestas de salida del modelo POR al aplicar un escalón en la entrada  $U_2$  se muestran en la Figura 5.13. En esta caso se observa como la salida  $y_2$  aproxima

perfectamente la dinámica del proceso con el modelo de primer orden, para la respuesta  $y_1$  la dinámica de orden superior es aproximada por el modelo POR, presentando un mayor retardo inicial que el correspondiente a la función de transferencia  $G_{12}(s)$ .



**Figura 5.14:** Comparación de las salidas del modelo POR para un cambio del 10% en  $u_2$

En la Tabla 5.2.3 se presentan los valores del índice IAE del modelo POR en comparación con el modelo no lineal. Se observa como los valores obtenidos son del mismo orden de los resultados del modelo con cero SD mostrado en al Tabla 5.5 y considerando ambas salidas de manera conjunta el modelo POR constituye una mejor aproximación que los modelos obtenidos con la factorización.

**Tabla 5.6:** IAE del modelo POR respecto al modelo no lineal

<i>Modelo</i>	$G_{POR}$	
	$y_1$	$y_2$
$u_1$	1, 598	10, 380
$u_2$	7, 427	4, 164
<i>Suma</i>	9, 025	14, 544

Una vez obtenido el modelo POR (5.39) el determinante del modelo es de la forma,

$$\frac{2,5246}{(64,35s+1)(94,8s+1)} - \frac{6,6494e^{-62s}}{(129,2s+1)(88,2s+1)} \quad (5.40)$$

Para obtener las raíces del numerador que determinan los ceros de transmisión del sistema, es necesario resolver la siguiente ecuación polinómica exponencial,

$$2,5246(129,2s+1)(88,2s+1) - 6,6494(64,35s+1)(94,8s+1)e^{-62s} = 0 \quad (5.41)$$

Esta ecuación presenta infinitos ceros SD, con lo cual se sigue manteniendo la presencia de ceros SD. Un estudio completo de como analizar este tipo de ecuaciones para determinar los ceros de un sistema se presenta para sistemas monovariantes (Jerome y Ray, 1991) y para sistemas multivariantes (Jerome y Ray, 1992).

## 5.2.4 Comportamiento en lazo cerrado

Para determinar los parámetros de sintonización del MPC óptimos para cada uno de los modelos de predicción obtenidos, se han elaborado las superficies del valor de índice SVAE, en función de los parámetros de ajuste del MPC, estas superficies también permiten observar el comportamiento en lazo cerrado de las variables controladas para cada uno de los modelos de predicción. La SVAE han sido obtenidas para cada una de las salidas con la diferencia entre la variable de salida y la referencia, al aplicar un incremento en el valor deseado de la variable controlada de 1 V sobre los valores del punto de operación en cada una de las salidas. El primer cambio de referencia es aplicado en  $y_1$  con una separación lo suficientemente grande como para que en el momento de aplicar el cambio en  $y_2$ , ya todas las variables del sistema se hayan estabilizado.

En las Figuras 5.15 y 5.16, se presentan las curvas de la SVAE obtenidas para la salida  $y_1$  y  $y_2$  respectivamente, con los distintos modelos en función de la variación del horizonte de control  $N_u$  [1 80] y la penalización del esfuerzo de control  $\lambda$ , cuyos rangos son diferentes para cada modelo, en virtud de los requerimientos particulares de los mismos, el horizonte de predicción se mantiene constante en el valor  $N_2 = 80$  para el modelo con cero SD y el modelo POR en el valor  $N_2 = 5$ . Al observar las superficies de la SVAE para los distintos modelos, se encuentra que el modelo con cero SD presenta menores valores del índice de desempeño en todo el rango. El efecto producido en todos los modelos por el incremento de la penalización del esfuerzo de control es aumentar el valor del índice SVAE, debido a que con un mayor valor de  $\lambda$  se produce una respuesta más lenta del sistema lo que degrada el índice de desempeño. Para el modelo con cero SD y el

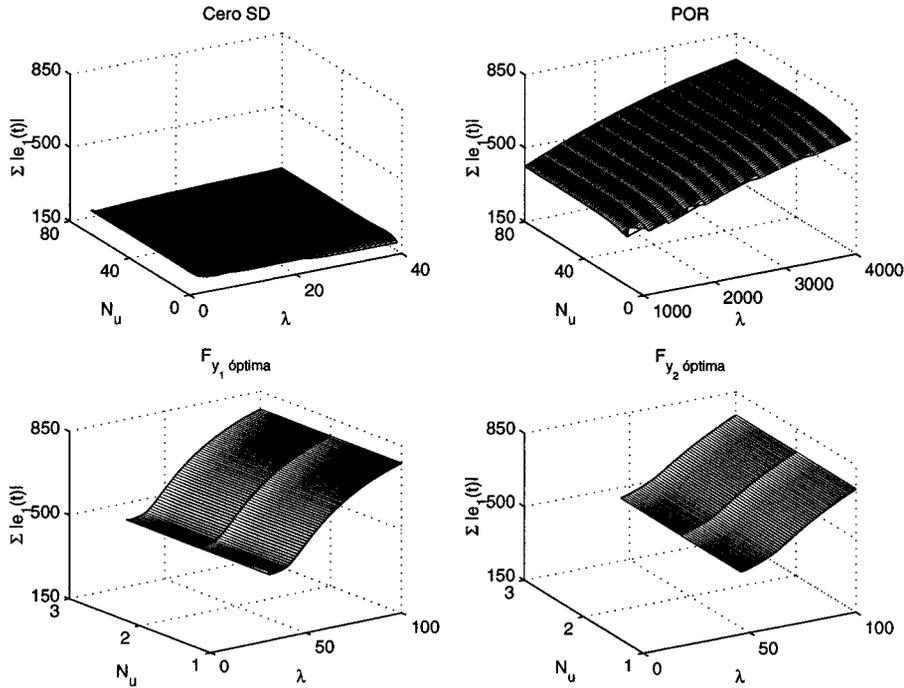
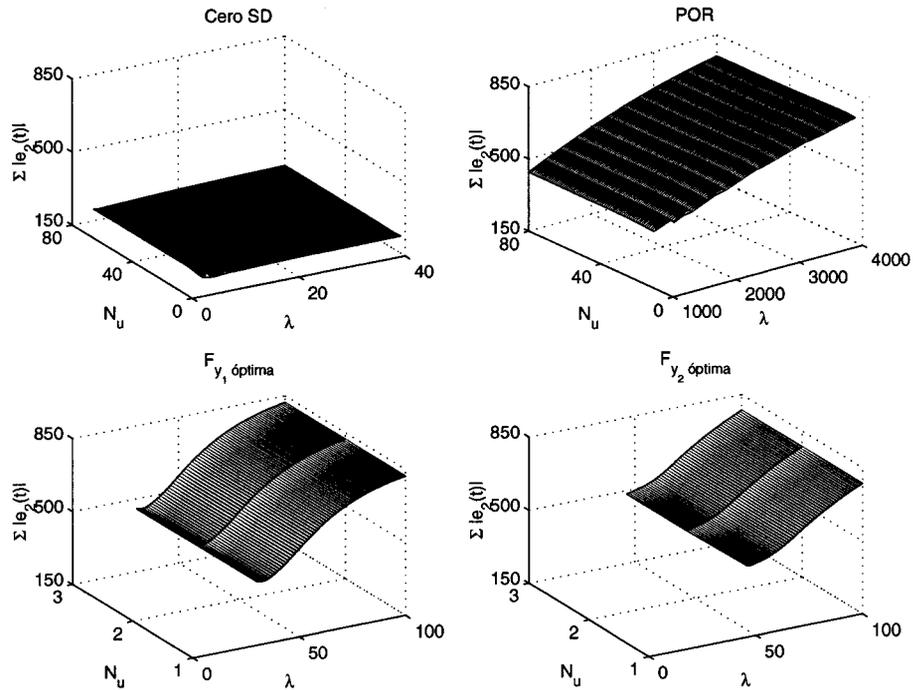


Figura 5.15: SVAE para la salida  $y_1$  con  $N_u$  y  $\lambda$  variable, para los distintos modelos de predicción

modelo POR los valores mínimos del índice se logran para valores bajos del horizonte de control. Se observa como los modelos  $F_{y_1}$  y  $F_{y_2}$  presentan un comportamiento adecuado para un rango de valores excesivamente reducido del horizonte de control, solo se logra una salida estable para valores de  $N_u = [13]$  con un horizonte de predicción de  $N_2 = 5$ , valores mayores donde el controlador pudiese observar un mayor dinámica del sistema produce comportamientos inestable en lazo cerrado, con valores de la penalización del esfuerzo de control mayores que los requeridos por el modelo con cero SD. El modelo POR requiere de valores de la penalización del esfuerzo de control mucho mayores (dos ordenes de magnitud) que los requeridos por el modelo con ceros SD, lo que produce una respuesta lenta, que repercute negativamente en los valores del índice de desempeño, siendo estos mas del doble de los producidos por el modelo POR. El comportamiento del índice de desempeño con los diferentes modelos de aproximación se similar para ambas salidas, presentando unos valores de la SVAE ligeramente superiores para la salida  $y_2$  respecto a la salida  $y_1$  debido a las pequeñas diferencias de la dinámica de cada una de las salidas en el proceso.

Las superficies de la SVAE para variaciones del horizonte de predicción y el horizonte de control con un  $\lambda$  constante han sido realizadas con el objetivo de observar la influencia de estos parámetros en el desempeño en lazo cerrado del MPC, y así poder determinar el



**Figura 5.16:** SVAE para la salida  $y_2$  con  $N_u$  y  $\lambda$  variable, para los distintos modelos de predicción

mejor conjunto de parámetros de sintonización del MPC para cada uno de los modelos. En las Figuras 5.17 y 5.18 se muestran las superficies de la SVAE para la salida  $y_1$  y  $y_2$  respectivamente con los distintos modelos de predicción. El horizonte de predicción se ajustó en el rango  $N_2=[1 \ 80]$ , el horizonte de control  $N_2=[1 \ N_2]$ , la penalización del esfuerzo de control se mantuvo constante en  $\lambda = 10$  par el modelo con cero SD,  $\lambda = 1500$ , para el modelo POR y el valor de  $\lambda = 10$ ,  $\lambda = 50$  para los modelos obtenidos de las factorizaciones, han sido seleccionados de esa manera dadas las necesidades particulares para cada modelo. Los valores mínimos de la SVAE se logran con el modelo con cero SD para valores de  $N_2 > 60$  y valores del horizonte de control  $N_2 < 25$  luego de este valor se observa que el índice de la SVAE no varían notablemente al aumentar el horizonte de control. Para el MPC con modelo POR, se observa que los valores mínimos del índice de desempeño son obtenidos con grandes valores en el horizonte de predicción, y valores pequeños del horizonte de control, sin embargo los valores mínimos logrados son el dobles de los producidos por el MPC con el modelo con cero SD. El modelo con cero y el modelo POR no producen una salida estable para valores de los horizontes de predicción y control menores a 40. En el MPC con los modelos obtenidos con la factorización, se observa, al igual que en las figuras anteriores, que el rango de parámetros de sintonización para el que el controlador en lazo cerrado se estable es muy reducido, encontrándose 4 combinaciones de horizontes, que produzcan una

salida estable. El comportamiento de los valores del índice de desempeño obtenidos en lazo cerrado para los diferentes modelos de predicción en el MPC, presentan un comportamiento semejante siendo al igual que los resultados obtenidos en las figuras de SVAE en función de  $N_u$  y  $\lambda$  los valores obtenidos un para la salida  $y_1$  levemente menores que los presentados por la salida  $Y_2$

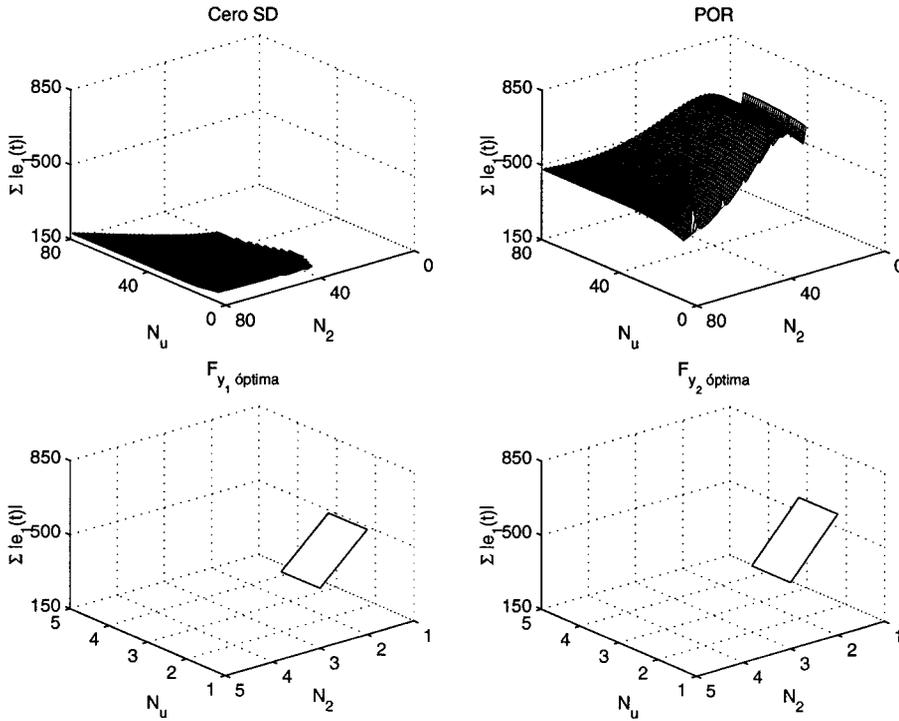


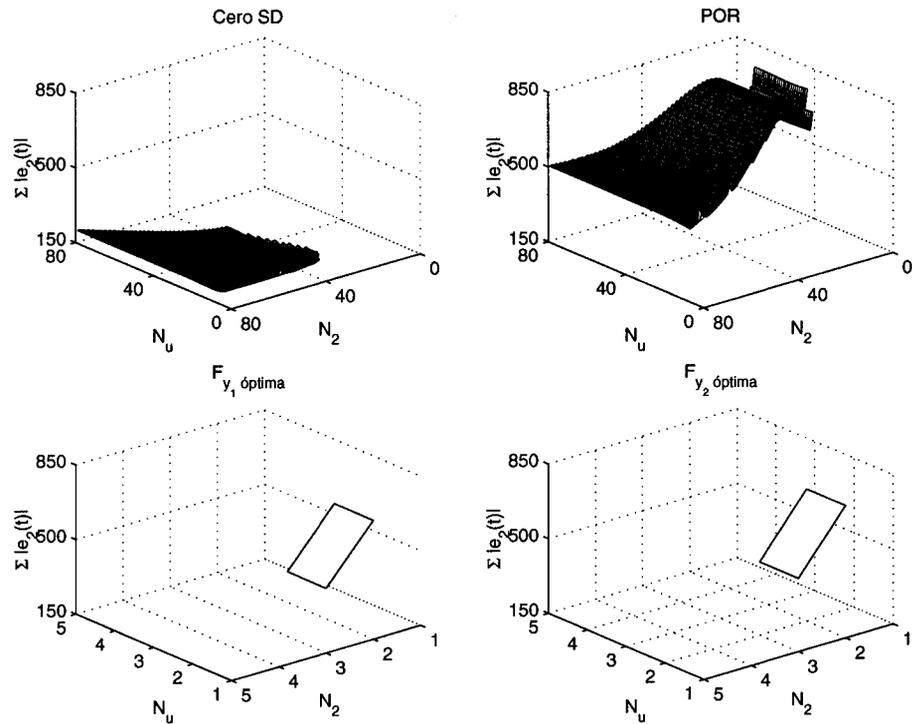
Figura 5.17: SVAE para la salida  $y_1$  variando los horizontes  $N_2$  y  $N_u$  con los distintos modelos de predicción

Las figuras obtenidas permiten encontrar el grupo de valores que minimizan la SVAE para los distintos modelos de predicción utilizados por el MPC.

Tabla 5.7: Parámetros del MPC con los distintos modelos de predicción, con el modelo de los cuatro tanques

Modelo	$G_{CeroSD}$	$G_{y_1}$	$G_{y_2}$	$G_{POR}$
$N$	80	3	3	80
$N_u$	19	1	1	11
$\lambda$	20	35	50	1500

En la Tabla 5.7 se muestran los valores seleccionados que minimizan el índice de desempeño. Se observa como el modelo POR requiere un valor muy grande de pon-



**Figura 5.18: SVAE para la salida  $y_2$  variando los horizontes  $N_2$  y  $N_2$  con los distintos modelos de predicción**

deración del esfuerzo de control, que al compararlo con el obtenido para el modelo con cero SD es aproximadamente el 1% del requerido por este. Los modelo obtenidos con la factorización emplean valores de  $\lambda$  del doble de los requeridos por el modelo con cero SD. AL observar los horizontes se confirma los resultados obtenidos en el capítulo 4, El mejor comportamiento se obtiene con una conveniente diferencia entre el horizonte de predicción y el horizonte de control.

En la Tabla 5.8 se muestran los valores del índice de desempeño SVAE para cada salida con los parámetros de ajuste seleccionados que se mostraron en la Tabla 5.7, aplicando al MPC el cambio de referencia con el que se obtuvieron las superficies del SVAE.

**Tabla 5.8: SVAE de los distintos modelos de predicción en lazo cerrado con los parámetros de ajuste seleccionados**

Modelo	CeroSD		$G_{-y_1}$		$G_{-y_2}$		$G_{POR}$	
Salida	$y_1$	$y_2$	$y_1$	$y_2$	$y_1$	$y_2$	$y_1$	$y_2$
SVAE	214, 81	228, 85	212	212	212	212	509, 16	519, 25

Los menores valores del índice de desempeño han sido obtenidos cuando el MPC emplea

el modelo con cero SD. Los valores de SVAE son el 40% de los logrados con el modelo POR, el 40% con el modelo  $F_{y_1}$ , el 40% con el modelo  $F_{y_1}$

En la figura 5.19, se muestra el desempeño en lazo cerrado, para las salidas  $y_1$  y  $y_2$  con los distintos modelos de predicción, utilizando los parámetros de ajuste de la tabla 5.7, para un cambio de referencia en  $y_1$  en  $t = 10s$  a  $7,5V$ , y en  $y_2$  en  $t = 1500s$  a  $7,5V$ . Se observa que el menor tiempo de asentamiento es obtenido con el modelo con cero SD, siendo este un 30% del presentado por el modelo POR, que obtienen los mayores tiempos de asentamiento de todos los modelos utilizados, esto se debe que requiere de un valor muy grande la penalización del esfuerzo de control, lo que hace que la respuesta sea muy lenta. El modelo  $F_{y_1}$ , para la salida  $y_1$  presenta una respuesta más lenta que la obtenida con el modelo con cero SD, para la salida  $y_2$  presenta la salida con mayor sobrepaso. En las variables manipuladas, el movimiento es más lento que con el primer modelo. Con la factorización  $F_{y_2}$  se presenta para la salida  $y_1$  un mayor sobrepaso para el segundo cambio escalón, presenta un mejor comportamiento para el cambio escalón en la salida  $y_1$  que la factorización anterior, para la salida  $y_2$  la factorización anterior presenta una respuesta con menor tiempo de asentamiento que la obtenida con este modelo.

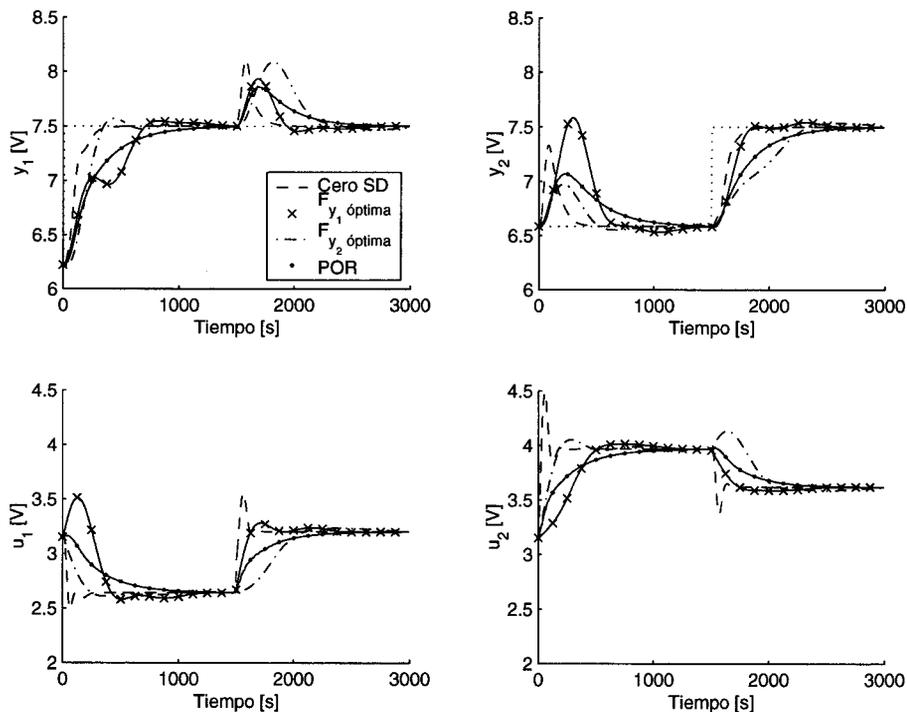


Figura 5.19: Cambio de referencia del MPC con los distintos modelos de predicción

### 5.3 Resumen

La contribución de este capítulo es la presentar el análisis del comportamiento del MPC aplicado a un proceso con ceros de transmisión SD, utilizando como modelo de predicción un modelo sin ceros de transmisión SD. La técnica de utilización de un modelo sin ceros de transmisión SD en la síntesis del controlador es utilizada en estrategias de control que requieren de manera explícita la inversa de la planta. Sin embargo en el ámbito del control predictivo no se emplean procedimientos para la eliminación de la dinámica de los ceros de transmisión SD del modelo de predicción, que como se ha demostrado, produce problemas de inestabilidad al intentar el controlador de cancelar la dinámica del modelo del proceso. En base a los resultados encontrados el mejor modelo para realizar la predicción en el MPC no es necesariamente el modelo que refleje de forma mas exacta la dinámica del sistema. Entre los modelos lineales de aproximación al proceso no lineal, se estudiaron modelos calculados por medio de factorizaciones y modelos obtenidos por medio de la aproximación de la dinámica del sistema a un modelo de primer orden con retardo. Los modelos obtenidos por medio de factorizaciones del modelo linealizado con ceros SD, mostraron un mejor comportamiento al ser empleados como modelos de predicción en el MPC en lazo cerrado, en comparación con el modelo aproximado como una función de transferencia POR. En el caso del MPC monovariante al utilizar factorizaciones que eliminen el cero SD en el modelo de predicción, se logran mejores comportamientos en lazo cerrado que los obtenidos utilizando el modelo con cero SD, dichas mejoras se observan no solamente en un mejor tiempo de asentamiento con la consecuente reducción del índice de desempeño SVAE en las pruebas realizadas, si no que se refleja también, en una mayor robustez del MPC en lazo cerrado ante las no linealidades producidas por cambios en el punto de operación, cambios en el modelo del proceso y perturbaciones. Los resultados obtenidos para el caso monovariante no se han logrado extender al caso multivariante, esto se debe a que las aproximaciones sin ceros de transmisión SD utilizadas como modelo de predicción presentaban limitaciones, en el caso del modelo multivariante POR, a pesar de la aproximación realizada, en el nuevo modelo continua la presencia de ceros de transmisión SD, y al utilizarlo con el MPC en lazo cerrado presentó un peor comportamiento que el modelo original. Con respecto a los modelos obtenidos por medio de factorizaciones se analizaron dos tipos, los que producen una factorización óptima para  $n - 1$  salidas del sistema, en este caso se presenta el inconveniente de trasladar toda la degradación producida sobre el nuevo modelo al eliminar la dinámica de los ceros SD que tiene el proceso original, a una solo a la salida, lo que produce en ésta errores significativos en el modelo que debe de realizar la predicción en el MPC en lazo cerrado. El otro tipo de factorización analizada es la que reparte la degradación del modelo en todas las entradas, esta factorización presenta el inconveniente de producir que el factor que no

contiene la dinámica del cero SD sea inestable en lazo abierto, lo resulta en un muy mal modelo de predicción para el MPC en lazo cerrado. Quedan entonces el camino abierto en esta dirección para encontrar un método de factorización que permita obtener un nuevo modelo, que elimine la dinámica del cero de transmisión SD, pero que permita al MPC un mejor comportamiento en lazo cerrado, que el obtenido con el modelo con cero SD como sucede en el caso monovisible.

## Capítulo 6

# Control predictivo por modos deslizantes

---

En este capítulo se presenta la formulación de un Controlador Predictivo por Modos Deslizantes «Sliding Mode Predictive Control» (SMPC). El controlador desarrollado combina las técnicas de control predictivo basado en modelo, y el control por modos deslizantes. Se demuestra como el SMPC evita el problema de inestabilidad que se produce en los ciertas condiciones en los controladores predictivos basados en modelo cuando es aplicado a sistemas con ceros SD. El desempeño del controlador en las versión monovariante es ilustrado por medio de un reactor isotérmico Van de Vusse, que es un proceso no lineal de fase no mínima y en el caso multivariante por medio de un sistema no lineal de cuatro tanques interconectados, que presenta ceros de transmisión SD.

### 6.1 Control por modos deslizantes

En el control por estructura variable «Variable Structure Control» (VSC) a la señal de control se le permite cambiar su estructura, de tal manera que va cambiando de un forma a otra entre un grupo de estructuras diferentes haciendo que la acción de control sea discontinua. Para el diseño de un controlador por estructura variable se deben establecer los parámetros de la forma de cada una de las estructuras y definir

el criterio de cambio entre cada una de ellas. La idea de la utilización de diferentes estructuras ha sido utilizada inicialmente en la aplicación a sistemas lineales de segundo orden (Clegg, 1956; Garret, 1961; Emelyanov, 1967). El Control por Modos Deslizantes «Sliding Mode Control» (SMC) es una técnica derivada del control por estructura variable, y se ha convertido en el principal modo de operación de esta estrategia de control, ya que prácticamente todos los métodos de diseños de control por estructura variable utilizan modos deslizantes (Utkin *et al.*, 1999). El SMC ido incrementado significativamente su interés desde la publicación del artículo de Utkin (Utkin, 1977), éste ha sido exitosamente empleado en diversos sistemas en el campo de la robótica, aeronáutica, industria aeroespacial, electrónica de potencia, control de procesos, etc (J, 1993). La principal ventaja del SMC es la robustez que presentan en su aplicación para el control de sistemas con incertidumbre, perturbaciones, cambios en el proceso, sistemas variantes en el tiempo (Utkin, 1981; Slotine y Li, 1991).

El SMC se desarrolló para sistemas continuos como una estrategia de control continua a pesar de la naturaleza discontinua de la señal de control producidas por las oscilaciones de alta frecuencia. Posteriormente se analizan las consideraciones para la existencia de modos deslizantes en sistemas discretos (Milosavljevic, 1985), se estudia la estabilidad (Sarptürk *et al.*, 1987). Se introduce el concepto de modos deslizantes en tiempo discreto (Drakunov y Utkin, 1990; Furuta, 1990). En líneas generales los algoritmos de control VSC para sistemas discretos son similares a los del sistemas continuos (Furuta y Morisada, 1988).

El SMC en su formulación convencional no puede ser aplicado a sistemas con ceros SD (Utkin, 1981). Esto es debido a que al aplicar control equivalente para obtener la parte continua del controlador, el cero SD deriva en un polo SD en la ecuación del controlador. Para el modelo del sistema en el desarrollo de controladores de estructura variable se establece entonces como restricción que el proceso tenga los ceros SI, además en controladores discretos (Chen y Furuta, 1999b), en controladores adaptativos discretos (Fukuda, 1993), controladores multivariantes continuos (Elmali y Olgac, 1992; Hsu *et al.*, 2001), controlador de estructura variable adaptativo multivariable (Chien *et al.*, 1996) y controladores discretos multivariantes (Chen y Furuta, 1999a).

Una controlador por modos deslizantes para es aplicado en procesos de fase no mínima en sistemas lineales (Camacho *et al.*, 1997) o no lineales (Camacho *et al.*, 1999). El desarrollo se basa en la aproximación del sistema de fase no mínima a un modelo de primer orden con retardo, con lo que es posible aplicar el controlador por modos deslizantes desarrollado para este tipo de sistemas (Camacho, 1996; Camacho y Smith, 2000).

Un algoritmo de control por estructura variable y control predictivo generalizado para sistema monovariables es propuesto en (Corradini y Orlando, 1997). La predicción de la superficie es realizada solamente con los valores pasados de las entradas no considerando los valores futuros de la señal de control. El diseño de los parámetros de la superficie de deslizamiento son establecidos por medio de asignación de polos, de esta forma los valores obtenidos de las raíces del polinomio discreto de la dinámica de la superficie se encuentran fuera del círculo unitario. Un esquema de control por modo dual que combina MPC y SMC es presentado en (Zhou *et al.*, 2001), el controlador funciona en dos modos, uno con un controlador predictivo no lineal y otro modo con un controlador por modos deslizantes, el cambio entre modos es realizado de acuerdo a si se encuentra dentro o fuera de una determinada región terminal.

## 6.2 Control predictivo por modos deslizantes monovari- able

El controlador desarrollado se basa en la idea de la combinación de las técnicas de control predictivo y control por estructura variable, lo que resulta en un algoritmo de control con las principales ventajas de ambas estrategias de control. La señal de control tiene dos componentes como un controlador de estructura variable, donde la parte continua que en un SMC es obtenida por la técnica de control por modelo equivalente, en el SMPC es desarrollada como un controlador predictivo con una función objetivo que incluye a la superficie de deslizamiento, y un parte discontinua en función del valor de la superficie. El control predictivo por modos deslizantes emplea un modelo de predicción como un controlador predictivo basado en modelo, para su desarrollo se utilizó como modelo de predicción un modelo del tipo Autorregresivo integrado de media móvil controlada (CARIMA) por las siglas en inglés de «Controller Auto-Regressive Integrated Moving-Average» este y resulta bastante apropiado para representar muchos procesos industriales en los cuales las perturbaciones son no estacionarias, (Clarke *et al.*, 1987a). Sin embargo al igual que los controlador predictivo basado en modelo permite la posibilidad de utilizar otros modelos como por ejemplo del tipo respuesta impulsional como base para realizar la predicción.

Cuando se considera el proceso en torno a un punto de operación luego de ser linealizado el modelo CARIMA lo representa de la siguiente manera,

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})\frac{\xi(t)}{\Delta} \quad (6.1)$$

Donde:

$y(t)$ : Es la salida del proceso o variable controlada,

$u(t)$ : Es la entrada al proceso o variable manipulada,

$\Delta$ :  $1 - z^{-1}$ ,

$d$ : Es el retardo del sistema,

$\xi(t)$ : Es un ruido blanco de media cero,

$A(z^{-1})$  y  $C(z^{-1})$  son polinomios mónicos y  $B(z^{-1})$  es el polinomio que contiene los ceros del modelo. Los polinomios son definidos por medio del operador retardo de la siguiente manera,

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_{na}z^{-na}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_{nb}z^{-nb}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots + c_{nc}z^{-nc}$$

Para el desarrollo del controlador se ha asumido  $C(z^{-1}) = 1$  puesto que el polinomio  $C$  es difícil de estimar con suficiente exactitud en la práctica (Camacho y Bordons, 1999). El primer paso de diseño de un controlador por modos deslizantes, es definir una superficie de deslizamiento  $S(t)$ . La siguiente superficie predictiva de deslizamiento es propuesta para el desarrollo del controlador :

$$S_{t+j|t} = P_s(z^{-1})(w(t+j) - y(t+j | t)) + Q_s(z^{-1})\Delta u(t+j-1-d) \quad (6.2)$$

Donde  $P_s(z^{-1})$  y  $Q_s(z^{-1})$  son polinomios de grado  $np$  y  $nq$  respectivamente, dados por,

$$P_s(z^{-1}) = 1 + p_{s1}z^{-1} + \dots + p_{snp}z^{-np} \quad (6.3)$$

$$Q_s(z^{-1}) = q_{s0} + q_{s1}z^{-1} + \dots + q_{snq}z^{-nq} \quad (6.4)$$

Cuando el valor de la superficie es  $S(t) = 0$ , el error es dado por

$$e(t+j) = -\frac{Q_s(z^{-1})}{P_s(z^{-1})}\Delta u(t+j-1) \quad (6.5)$$

$P_s(z^{-1})$  debe de seleccionarse, de forma tal que sus raíces se encuentren dentro del círculo unitario.

Una superficie predictiva deslizante es también presentada en (Corradini y Orlando, 1997), sin embargo esta no utiliza las futuras señales de control  $\Delta u(t-1+j)$  para predecir los futuros valores de la superficie deslizante  $S_{t+j|t}$ , como en la superficie de deslizamiento que se ha propuesto para el desarrollo del SMPC, que adicionalmente toma en cuenta el retardo del sistema. La utilización de los futuros movimientos de control permite una mejor predicción de los futuros valores de la superficie deslizante, especialmente para el control de procesos con retardo.

El objetivo final de control es asegurar que la variable controlada se encuentre sobre su valor de referencia  $w(t+j)$  lo cual implica que el error  $e(t) = w(t) - y(t)$  debe

ser cero. En el control predictivo por modos deslizantes el problema de mantener la variable controlada sobre su referencia se reduce a mantener el valor de la superficie  $S(t)$  en cero. La idea general que se propone para el desarrollo de este controlador, es que la futura superficie predicha (6.2) sobre el horizonte de predicción considerado debe de ser cero, al mismo tiempo que el esfuerzo de control  $\Delta u$  necesario para llevarlo a cabo es penalizado. La expresión para la función objetivo queda por lo tanto dada por (6.6).

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} [\hat{S}(t+j|t)]^T [\hat{S}(t+j|t)] + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^T [\Delta u(t+j-1)] \quad (6.6)$$

Donde  $\hat{S}(t+j|t)$  es la óptima  $j$ -ésima predicción de la superficie deslizante, realizada con la información disponible en el instante  $t$ ,  $N_1$  y  $N_2$  son los valores mínimo y máximo del horizonte de predicción,  $N_u$  es el horizonte de control, y  $\lambda(j)$  es la secuencia de penalización del esfuerzo de control. El objetivo del controlador es calcular la futura secuencia de valores de control, de manera tal que los futuros valores de la superficie  $S(t+j)$  sean conducido al valor cero. La minimización de la función objetivo  $J(N_1, N_2, N_u)$  produce  $\Delta u(t), \Delta u(t+1), \dots, \Delta u(t+N_u)$ , pero solamente  $\Delta u(t)$  es aplicada a la entrada del proceso. En el instante siguiente  $t+1$  un nuevo problema de minimización es resuelto, es decir el control predictivo por modos deslizantes emplea el concepto de horizonte deslizante.

Una vez que la superficie de deslizamiento ha sido seleccionada, el siguiente paso es diseñar una ley de control que satisfaga  $S(t) = 0$ . Finalmente la ley de control  $\Delta u(t)$ , esta constituida por dos términos, un término continuo,  $\Delta u_C(t)$ , y un término discreto,  $\Delta u_D(t)$ , quedando de la forma,

$$\Delta u(t) = \Delta u_C(t) + \Delta u_D(t) \quad (6.7)$$

La parte continua del controlador es dada por un controlador predictivo basado en modelo y que utiliza la función objetivo dada por (6.6). El término discontinuo  $u_D(t)$ , incorpora un elemento predictivo no lineal que incluye un elemento de conmutación en la ley de control. Esta parte del controlador es discontinua de un lado a otro de la superficie de deslizamiento.

$$\Delta u_D(t+j) = K_D \frac{S(t+j|t)}{|S(t+j|t)| + \rho} \quad (6.8)$$

Donde  $K_D$  es un parámetro de ajuste responsable de la agresividad del controlador para alcanzar la superficie de deslizamiento, y  $\rho$  es un parámetro de ajuste utilizado para reducir el problema de las oscilaciones de alta frecuencia en torno a la superficie de deslizamiento propuesto por (Zinober, 1994). En la Figura 6.1 se muestra el efecto

del parámetro de ajuste  $\rho$ , se observa como cuando el valor de  $\rho$  valores de la superficie de deslizamiento entorno al valor de cero producirán como resultado cambios bruscos en la parte discontinua de la ley de control, al aumentar l valor de  $\rho$  se elimina este efecto produciendo salidas mas suaves.

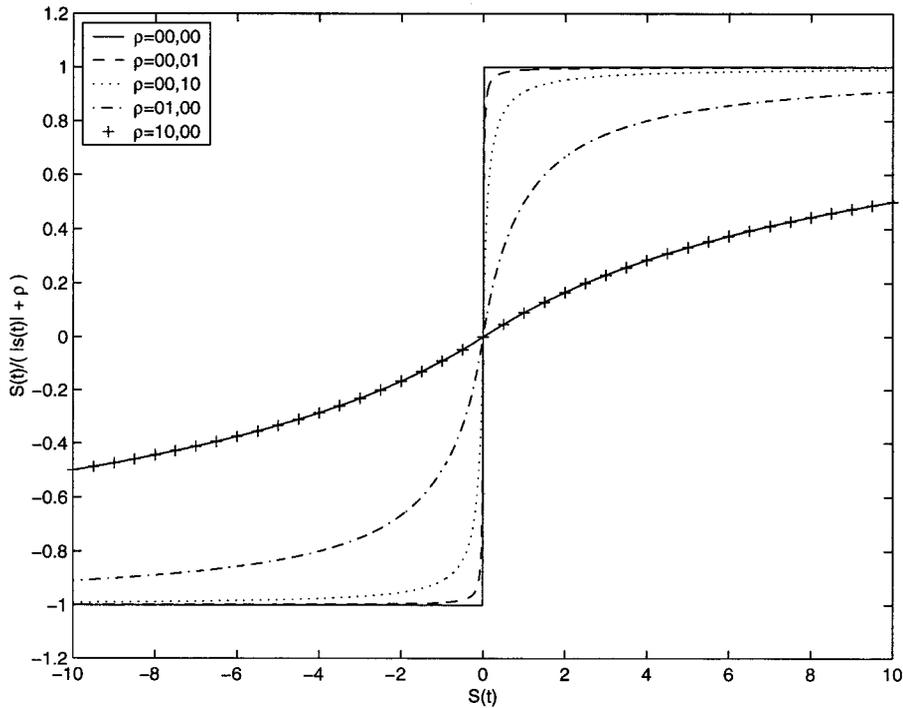


Figura 6.1: Efecto del parámetro de ajuste  $\rho$

Con el objetivo de minimizar (6.6), la  $j$  – esima predicción de la superficie de deslizamiento  $\hat{S}(t + j|t)$  para  $j = N_1, \dots, N_2$  ha sido calculada con la información conocida en el instante  $t$  y los futuros valores de incremento de la señal de control. La siguiente ecuación Diofántica es utilizada,

$$1 = E_j(z^{-1})\tilde{A}(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1}) \tag{6.9}$$

El polinomio  $E_j(z^{-1})$  y  $F_j(z^{-1})$  son inequívocamente definidos con grados  $j - 1$  y  $na$  respectivamente,  $\tilde{A}(z^{-1}) = \Delta A(z^{-1})$ . Combinando el modelo de la planta (6.1), y la ecuación (6.9), la siguiente ecuación de predicción es obtenida,

$$\hat{y}(t + j) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t + j - 1) + F_j(z^{-1})y(t) \tag{6.10}$$

En esta expresión  $\hat{y}(t+j)$  es una función de los valores conocidos en el instante de tiempo  $t$  y las futuras señales de control las cuales todavía no han sido calculadas. Utilizando

una segunda ecuación diofántica (6.11) para distinguir en los valores pasados y futuros,

$$E_j(z^{-1})B(z^{-1}) = G_j(z^{-1}) + z^{-j}\Gamma_j(z^{-1}) \quad (6.11)$$

Donde el polinomio  $G_j$  contiene los primeros  $j - \text{ésimos}$  parámetros de la respuesta escalón del modelo de la planta, con lo cual es obtenida la siguiente expresión de la predicción.

$$\hat{y}(t+j) = G_j(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + \hat{y}(t+j|t) \quad (6.12)$$

Donde  $\hat{y}(t+j|t)$  es la predicción de la respuesta libre de  $\hat{y}(t+j)$  asumiendo que los futuros incrementos siguientes al instante de tiempo  $t-1$  serán cero,

$$\hat{y}(t+j|t) = \Gamma_j(z^{-1})\Delta u(t-1) + F_j(z^{-1})y(t) \quad (6.13)$$

Substituyendo  $E_j(z^{-1})$  de (6.9) dentro de (6.11), se obtiene

$$B(z^{-1}) = z^{-j}\tilde{A}(z^{-1})\Gamma_j + z^{-j}F_j(z^{-1})B(z^{-1}) + \tilde{A}(z^{-1})G_j(z^{-1}) \quad (6.14)$$

Definiendo el vector  $f(t)$ , compuesto por las predicciones de la respuesta libre,

$$\mathbf{f} = [\hat{y}(t+1|t), \hat{y}(t+2|t), \dots, \hat{y}(t+N_2|t)]^T \quad (6.15)$$

El vector de los futuros incrementos de control,

$$\Delta \mathbf{u} = [\Delta u(t), \Delta u(t+1), \dots, \Delta u(t+N_u-1)]^T \quad (6.16)$$

y los vectores de las salidas predichas de la planta,

$$\hat{\mathbf{y}} = [\hat{y}(t+1), \hat{y}(t+2), \dots, \hat{y}(t+N_2)]^T \quad (6.17)$$

De la predicción (6.12) la relación entrada salida de la planta predicha puede ser escrita como

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G}\Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (6.18)$$

Donde la matriz  $\mathbf{G}$  esta compuesta por  $g_k$  parámetros de la respuesta escalón del modelo del proceso.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N_2-1} & g_{N_2-1} & \cdots & g_{N_2-N_u} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

La predicción de la superficie deslizante es obtenida substituyendo (6.18) dentro de (6.2),

$$\hat{S}(t) = (-\mathbf{P}_s \mathbf{G} + \mathbf{Q}_s) \Delta \mathbf{u} + \mathbf{P}_s (\mathbf{w} - \mathbf{f}_s) \quad (6.20)$$

Donde la respuesta libre de la superficie deslizante  $\mathbf{f}_s$  viene dada por,

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{F}(z^{-1})y(t) + \Gamma(z^{-1})\Delta u(t-1) - \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{P}_s^*e(t) - \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{Q}_s^*\Delta u(t-1) \quad (6.21)$$

donde las matrices son definidas de la siguiente manera,

$$\mathbf{P}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{s1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & p_{snp} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

$$\mathbf{P}_s^* = \begin{bmatrix} p_{s1} & \cdots & p_{snp-1} & p_{snp} \\ p_{s2} & \cdots & p_{snp} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} q_{s0} & 0 & \cdots & 0 \\ q_{s1} & q_{s0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & q_{sng} & \cdots & q_{s0} \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

$$\mathbf{Q}_s^* = \begin{bmatrix} q_{s1} & \cdots & q_{sng-1} & q_{sng} \\ q_{s2} & \cdots & q_{sng} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

La función objetivo (6.6) puede ser reescrita como,

$$\begin{aligned} J &= \sum_{j=N_1}^{N_2} [(-\mathbf{P}_s \mathbf{G} + \mathbf{Q}_s) \Delta \mathbf{u} + \mathbf{P}_s (\mathbf{w} - \mathbf{f}_s)]^T [(-\mathbf{P}_s \mathbf{G} + \mathbf{Q}_s) \Delta \mathbf{u} + \mathbf{P}_s (\mathbf{w} - \mathbf{f}_s)] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^T [\Delta u(t+j-1)] \end{aligned} \quad (6.26)$$

La minimización cuadrática de (6.26) se convierte en un problema de álgebra lineal directo, asumiendo que no existen restricciones en la señal de control se obtiene la

expresión para el cálculo de la secuencia de futuras señales de control,

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{u}_C &= K_{SMPC}(\mathbf{w} - \mathbf{f}_s) \\ K_{SMPC} &= [(-\mathbf{P}_s \mathbf{G} + \mathbf{Q}_s)^T (-\mathbf{P}_s \mathbf{G} + \mathbf{Q}_s) + \lambda I]^{-1} \\ &\quad (-\mathbf{P}_s \mathbf{G} + \mathbf{Q}_s)^T \mathbf{P}_s\end{aligned}\quad (6.27)$$

y

$$\Delta \mathbf{u}_D = \left[ \frac{K_D \hat{S}(t)}{|\hat{S}(t)| + \rho}, \frac{K_D \hat{S}(t+1)}{|\hat{S}(t+1)| + \rho}, \dots, \frac{K_D \hat{S}(t+N_u-1)}{|\hat{S}(t+N_u-1)| + \rho} \right]^T \quad (6.28)$$

finalmente, la señal de control es dada por,

$$\Delta \mathbf{u} = K_{SMPC}(\mathbf{w} - \mathbf{f}_s) + \Delta \mathbf{u}_D \quad (6.29)$$

En resumen, el SMPC tiene dos partes una discontinua, responsable de conducir el sistema hacia la superficie deslizando, y una parte continua desarrollada como un MPC, la cual es la responsable de mantener la variable controlada en el valor de referencia. Note que seleccionando  $P_s(z^{-1}) = 1$ ,  $Q_s(z^{-1}) = 0$ , la función objetivo es reducida a,

$$\begin{aligned}J &= \sum_{j=N_1}^{N_2} [\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \\ &\quad \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^2\end{aligned}\quad (6.30)$$

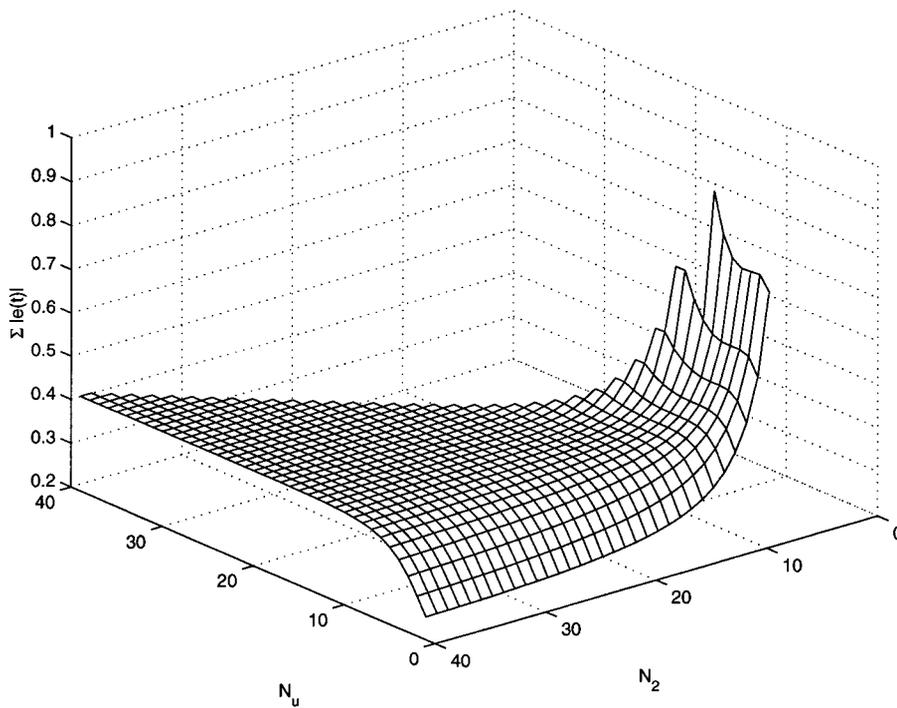
y la matriz de ganancia  $K$  la usual obtenida en un MPC lineal,

$$K_{MPC} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda I)^{-1} \mathbf{G}^T \quad (6.31)$$

### 6.2.1 Parámetros de ajuste

Con el objetivo de ilustrar el efecto de los parámetros de ajuste del control predictivo por modos deslizando se utilizó un reactor Van de vusse, no lineal de fase no mínima descrito en el Apéndice A. Para el estudio se realizó un cambio escalón en la referencia de la concentración  $C_B$  a la salida del reactor y se calcularon los índices de desempeño Sumatoria de los Valores Absolutos de los Errores (SVAE) al variar los parámetros de ajuste del controlador, adicionalmente se muestra la evolución temporal de la variable controlada ( $C_b$ ), la variable manipulada ( $F$ ) y la superficie deslizando  $S(t)$ , al cambiar dichos parámetros.

La Figura 6.2 muestra los valores de SVAE para cambios en los horizontes de predicción entre  $[1, 40]$  y el horizonte de control entre  $[1, N_2]$ , los demás parámetros de ajuste se mantuvieron constantes en  $\lambda = 1$ ,  $P_s = 1 - 0,5z^{-1}$ ,  $Q_s = 0,5z^{-1}$ ,  $K_D = 1$  y  $\rho = 0,4$ , se observa como el índice de desempeño SVAE y para valores de los horizontes  $N_2 > 10$  y  $N_u > 10$  permanece constante con lo que la dinámica en lazo cerrado es poco sensible a los cambios de los valores de los horizontes de predicción y control llegado cierto punto. Los valores mínimos de SVAE se encuentran para valores pequeños del horizonte de control, esto se debe a que al colocar un horizonte de control más pequeño para cumplir el objetivo de la función de costo produce una secuencia de control más agresiva lo que reduce el valor de índice de desempeño, luego de cierto valor no es significativo los cambios producidos por el incremento en el horizonte de control por lo que no es recomendable incrementar el valor de este parámetro, con el consecuente aumento en los tamaños de las matrices del algoritmo. En la Figura 6.3 se ilustra la evolución



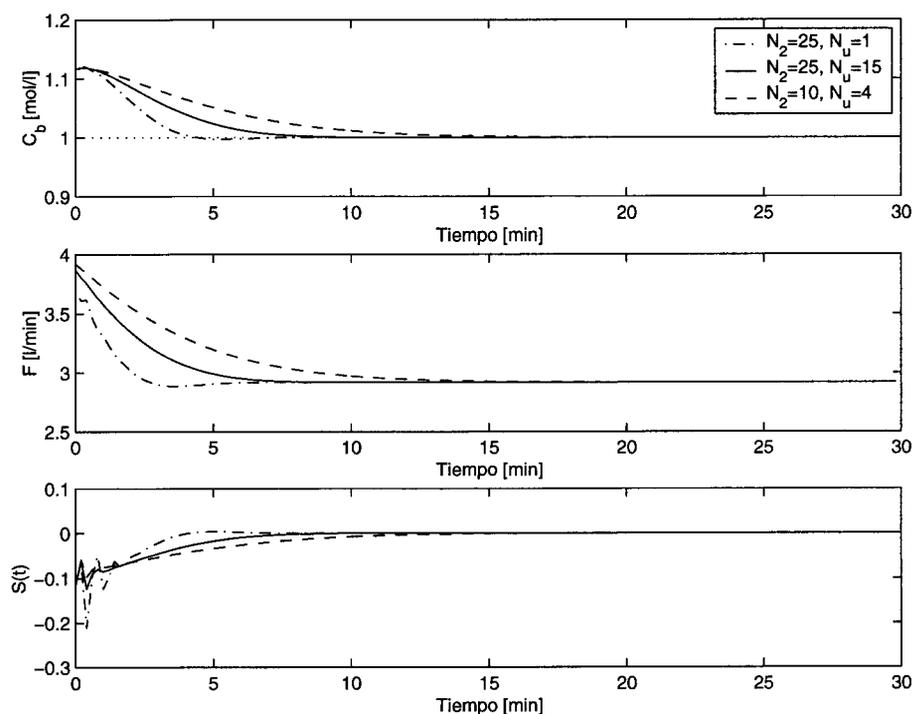
**Figura 6.2:** SVAE en función de los cambios en los horizontes de predicción y control

temporal de Concentración  $C_b$ , el flujo de entrada y la superficie de deslizamiento para tres pares de valores de los horizontes de predicción,  $N_2 = 25$  con  $N_u = 15$  [-],  $N_2 = 10$  con  $N_u = 4$  [-] y  $N_2 = 25$  con  $N_u = 1$  [-]. Se observa como la dinámica en lazo cerrado es similar a pesar de los diferentes valores de los horizontes. Se puede observar con la superficie de deslizamiento inicialmente presenta valores negativos debido a la componente del error y luego tiende a el valor  $S(t) = 0$  sin producir movimientos

brusco en el elemento final de control. En la Tabla 6.1 se encuentran los valores de los índices de desempeño para diferentes valores de los horizontes de predicción, se observa como el valor mínimo logrado con el horizonte de control  $N_u = 1$  es un 34% menor del logrado en la zona plana de valores de la superficie de la del índice SVAE mostrado en la Figura 6.2. Las variaciones del SVAE para cambios en el horizonte de control

**Tabla 6.1: Valores de los índices de desempeño para diferentes horizontes de predicción y control**

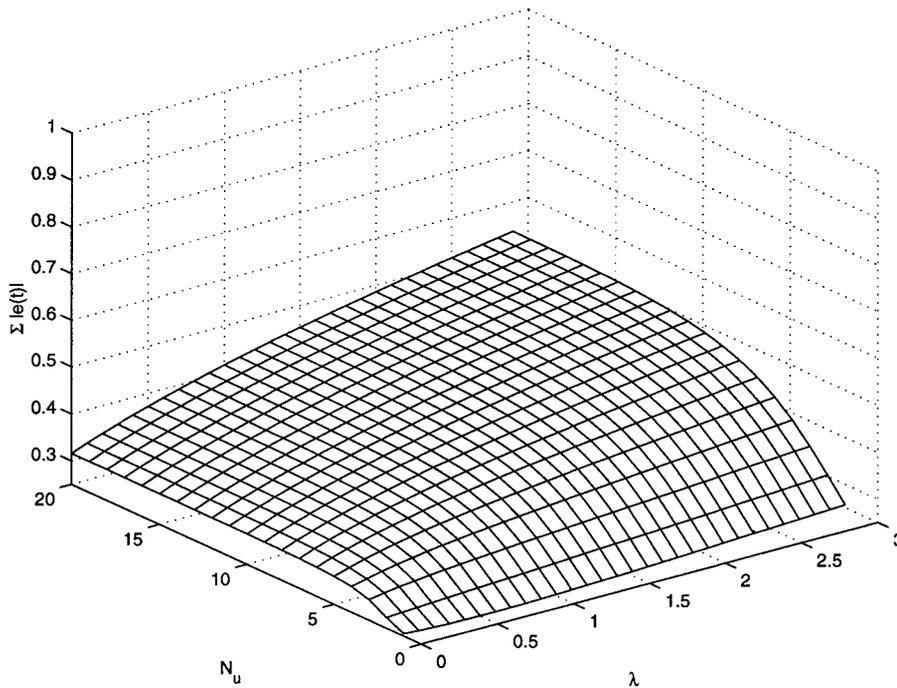
	$N_2 = 25, N_u = 1$	$N_2 = 25, N_u = 15$	$N_2 = 10, N_u = 4$
$C_b$	0,2710	0,4164	0,6540
$F$	0,2983	0,2272	0,2154



**Figura 6.3: Cambios en los horizontes de predicción y control**

( $N_u$ ) y la penalización del esfuerzo de control ( $\lambda$ ) manteniendo el resto de parámetros de ajuste constantes en  $N_2 = 20$ ,  $P_s = 1 - 0,5z^{-1}$ ,  $Q_s = 0,5z^{-1}$ ,  $K_D = 1$  y  $\rho = 0,4$ , se muestra en la Figura 6.4, se observa como al aumentar el valor de  $\lambda$ , aumenta el valor del índice de desempeño, debido a que la respuesta en el tiempo se hace mas lenta por la penalización de la señal de control. Los valores mínimos de SVAE se logran con

valores bajos del horizonte de control y valores bajos de la penalización del esfuerzo de control. La evolución temporal de la concentración  $C_b$ , el flujo de entrada al reactor



**Figura 6.4:** SVAE en función de los cambios en los horizontes control y la penalización del esfuerzo de control

y la superficie de deslizamiento se muestra en la Figura 6.5 para valores los siguientes valores de la penalización del esfuerzo de control  $\lambda = 0$  [- · -],  $\lambda = 1$  [-], y  $\lambda = 10$  [-]. Se observa como al aumentar el valore de la penalización del esfuerzo de control se produce en lazo cerrado un flujo de entrada mas suave y por ende una respuesta de la variable controlada mas lenta, la superficie de deslizamiento se ve afectada de igual forma tendiendo a cero de forma más lenta al aumentar  $\lambda$ . En la Tabla 6.2 se muestra los valores de los índices de desempeño para los valores de penalización del esfuerzo de control mostrados en la Figura 6.5. Se observa como entre  $\lambda = 0$  y  $\lambda = 1$  aumenta la SVAE un 32% y disminuye el índice de la señal de control un 13%, a medida que se va aumentando el valor de  $\lambda$  el índice de desempeño va incrementándose haciendo mas lenta la respuesta del sistema. La parte discontinua del controlador tiene dos parámetros de ajuste,  $K_D$  que es una ganancia que determina la agresividad del controlador cuando el valor de la superficie de deslizamiento sea diferente de cero de tal forma que entre mayor valor tengan, mayor será la contribución de la parte discontinua y  $\rho$  que es un parámetro para evitar los cambios bruscos en la señal de control cuando la superficie de deslizamiento se encuentra entorno al valor cero. En la Figura 6.6 se muestra el índice de desempeño SVAE para cambios en el valor de los parámetros

Tabla 6.2: Valores de los índices de desempeño para diferentes de la penalización del esfuerzo de control

	$\lambda = 0$	$\lambda = 1$	$\lambda = 10$
$C_b$	0,3154	0,4164	0,8708
$F$	0,2570	0,2272	0,2091

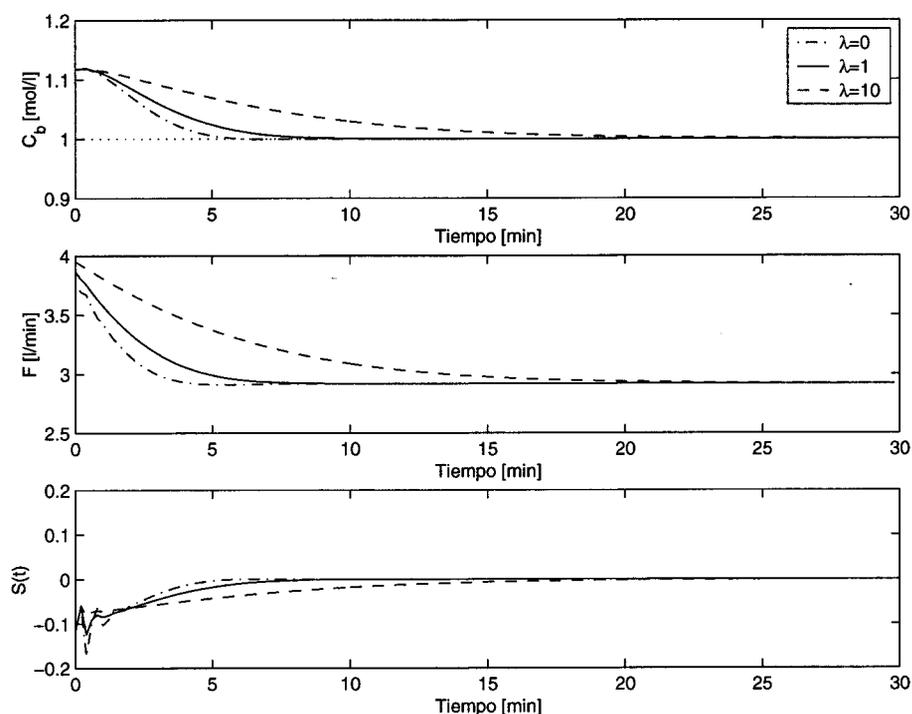
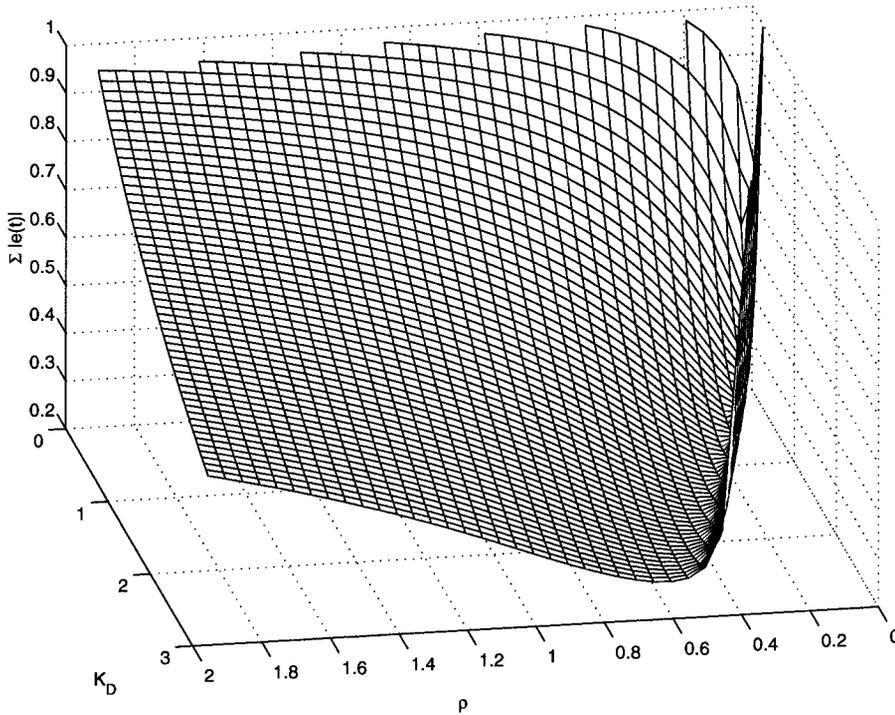


Figura 6.5: Cambios en la penalización del esfuerzo de control

$K_D$  entre  $[0 \ 3]$  y  $\rho$  entre  $[0 \ 2]$  manteniendo los parámetros de ajuste en  $N_2 = 20$ ,  $N_u = 15$  y  $\lambda = 1$ ,  $P_s = 1 - 0,5z^{-1}$ ,  $Q_s = 0,5z^{-1}$ . Se observa como al aumentar el valor de  $K_D$  el valor SVAE disminuye debido a que se alcanza mas rápidamente el valor de referencia, pero valores grandes con un  $\rho$  muy bajo, aumentan nuevamente el índice por las oscilaciones en la variable controlada debidas a la contribución de la parte discontinua, el parámetro de ajuste  $\rho$  busca minimizar este efecto, por lo tanto al aumentar su valor se hace la respuesta mas suave con lo que el valor del índice SVAE tiende a disminuir, pero valores grandes aumentan el índice de desempeño debido a que tiende a suprimir el efecto de la parte discontinua de la señal de control. Los parámetros  $K_D$  y  $\rho$  mantienen un estrecha relación y deben de ser ajustados estableciendo un equilibrio entre ambos, estableciendo el valor de  $K_D$  y luego aumentar el valor de  $\rho$

para lograr el valor mínimo del índice de desempeño. En la Figura 6.7 se muestran la



**Figura 6.6:** SVAE en función de  $K_D$  y  $\rho$

respuesta en el tiempo de la variable controlada, la variable manipulada y la superficie de deslizamiento ajustando la ganancia de la parte discontinua con los siguientes valores  $K_D = 2$  [---],  $K_D = 0,4$  [-] y  $K_D = 0,8$  [- -]. Se puede observar como al aumentar el valor de  $K_D$  el proceso en lazo cerrado presenta una dinámica más agresiva, alcanzando la referencia de concentración  $C_b$  con más rapidez, se ilustra también como al aumentar  $K_D$  el elemento final de control es sometido a cambios más bruscos producidos por el aumento de la influencia de la parte discontinua del controlador sobre la parte continua. En la Tabla 6.3 se observan los índices de desempeño para la variable controlada y manipulada para valores de la ganancia de la parte discontinua, en referencia al valor  $K_D = 1$  se logra disminuir el valor de SVAE del 24% al aumentar a la ganancia a  $K_D = 2$  aumentando el índice en la señal de control un 50 %, por el contrario al disminuir el valor a  $K_D = 0,5$  la SVAE aumentan un 51 % y el índice en la señal de control disminuye un 5 %. El parámetro de ajuste  $\rho$  disminuye el efecto de los cambios bruscos en la señal de control debidos a la parte discontinua de la ley de control, en la Figura 6.8 se muestran las variables en estudio para los siguientes valores de  $\rho = 0,2$  [---],  $\rho = 0,4$  [-] y  $\rho = 0,8$  [- -]. Se puede observar como al aumentar la magnitud del parámetro  $\rho$  se suavizan los movimientos en la variable manipulada producidas por la parte discontinua de la señal de control, pero valores grandes tienden a hacer la respuesta de la variable controlada demasiado lenta. En la tabla 6.4 se encuentran los

Tabla 6.3: Valores de los índices de desempeño para diferentes de valores de  $K_D$

	$K_D = 2$	$K_D = 1$	$K_D = 0,5$
$C_b$	0,2760	0,4164	0,6300
$F$	0,3417	0,2272	0,2174

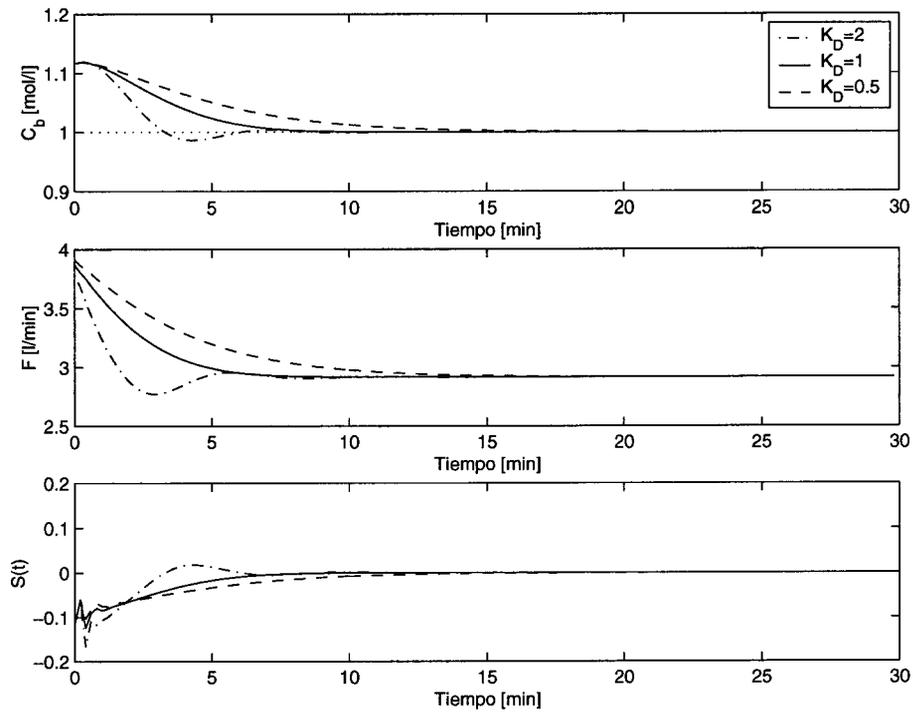
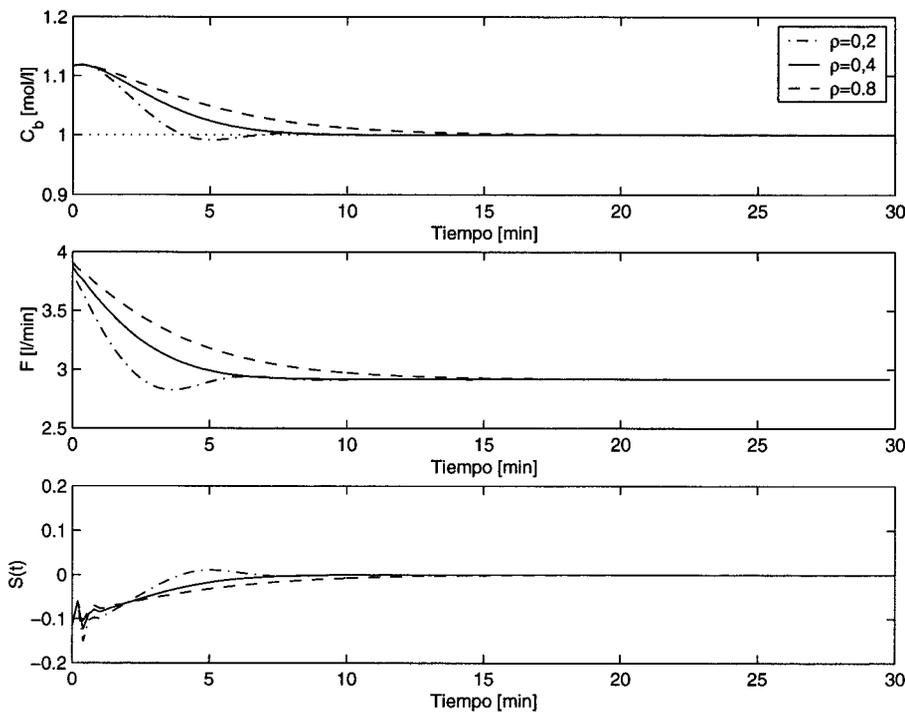


Figura 6.7: Cambios en  $K_D$

valores de los índices de desempeño para la concentración  $C_b$  a la salida y en el flujo de entrada al reactor para los valores de  $\rho$  mostrados en la Figura 6.8. Al aumentar el valor a  $\rho = 0,8$  con referencia al valor  $\rho = 0,4$  aumento el valor del SVAE un 47% disminuyendo el índice de la señal de control un 5%, por el contrario al disminuir el valor a  $\rho = 0,2$  el SVAE disminuyó un 29% aumentando el índice en la señal de control un 17%. La dinámica de la superficie deslizante tiene una gran influencia sobre el comportamiento del sistema en lazo cerrado, puesto que determina directamente como será la evolución del sistema cuando el error sea diferente de cero. El polinomio  $P_s(z^{-1})$  ha sido seleccionado de primer orden con la raíz dentro del círculo unitario y  $Q_s(z^{-1})$  se escogió de forma tal que la relación  $P_s(z^{-1})/Q_s(z^{-1})$  en estado estacionario tenga valor unitario. Esta forma de seleccionar los parámetros de la superficie ha mostrado

Tabla 6.4: Valores de los índices de desempeño para diferentes de valores de  $\rho$ 

	$\rho = 0,2$	$\rho = 0,4$	$\rho = 0,8$
$C_b$	0,2971	0,4164	0,6128
$F$	0,2661	0,2272	0,2186

Figura 6.8: Cambios en  $\rho$ 

buenos resultados en las pruebas realizadas. En la figura 6.9 se presentan las gráficas de Concentración  $C_b$ , Flujo manipulado a la entrada  $F$  y la superficie de deslizamiento  $S(t)$  para diferentes valores de la dinámica de la superficie,  $P_s = 1 - 0.9z^{-1}$  con  $Q_s = 0.1z^{-1}$  [- -],  $P_s = 1 - 0.5z^{-1}$  con  $Q_s = 0.5z^{-1}$  [-] y  $P_s = 1 - 0.1z^{-1}$  con  $Q_s = 0.9z^{-1}$  [-·-]. Al utilizar una superficie de deslizamiento con dinámicas mas lentas aumenta el tiempo de asentamiento de la variable controlada, siendo los movimientos en la señal de control son mas suaves y la superficie de deslizamiento tarda mas en converger al valor de  $S(t) = 0$ . En la tabla 6.5 se muestran los valores de los índices de desempeño para las tres dinámicas diferentes en la superficie de deslizamiento mostradas en la Figura 6.9. Tomando como referencia la dinámica intermedia, al utilizar la dinámica mas lenta en la superficie de deslizamiento la SVAE aumento en un 610% y el índice

en la señal de control disminuyó un 10%, por el contrario al utilizar una dinámica mas rápida se logra disminuir el valor de la SVAE en un 30% aumentando el índice en la señal de control un 57%, se observa como la dinámica de la superficie produce un fuerte influencia en el desempeño del sistema en lazo cerrado. El procedimiento

Tabla 6.5: Valores de los índices de desempeño para diferentes de valores de  $\rho$

	$P_s = 1 - 0,1z^{-1}$ $Q_s = 0,9z^{-1}$	$P_s = 1 - 0,5z^{-1}$ $Q_s = 0,5z^{-1}$	$P_s = 1 - 0,9z^{-1}$ $Q_s = 0,1z^{-1}$
$C_b$	0,2920	0,4164	2,5414
$F$	0,3570	0,2272	0,2055

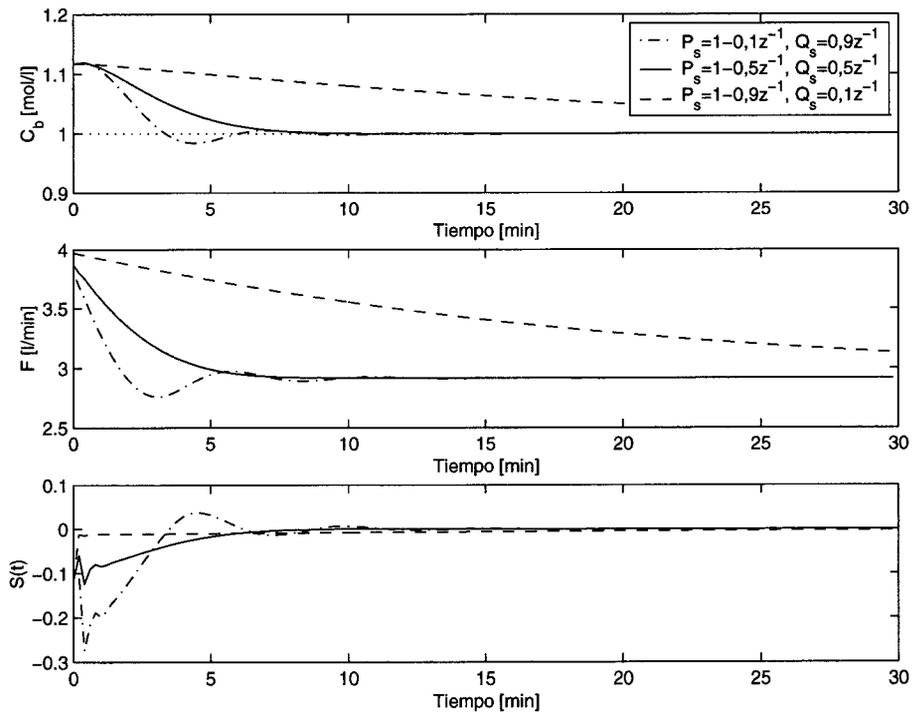


Figura 6.9: Cambios en la dinámica de la superficie

de ajuste del control predictivo por modos deslizantes es el siguiente, seleccionar un horizonte de predicción lo suficientemente largo como para conocer la dinámica del sistema, un horizonte de control corto puesto que llegado cierto punto no producen un aporte significativo a la dinámica del sistema y aumentan considerablemente el costo computacional por el tamaño de las matrices, la penalización del esfuerzo de control

pequeña para evitar el degradamiento del comportamiento del sistema pero lo suficiente como para evitar movimientos bruscos de la señal de control, en líneas generales se usan los mismos criterios que se emplean para el ajuste de un controlador predictivo basado en modelo. En el comportamiento en lazo cerrado del sistema el parámetro de ajuste que tiene mayor influencia es la dinámica seleccionada para la superficie de deslizamiento, produciendo una mayor influencia en el índice de desempeño que los valores de los horizontes y el esfuerzo de control. La parte discontinua agrega dos parámetros adicionales la ganancia  $K_D$  que es la que determina la agresividad con la que se producen los movimientos de la señal de control cuando el se encuentra fuera del valor  $S(t) = 0$  por lo que valores grandes darán como resultado una respuesta mas rápida del controlador y el parámetro  $\rho$  que debe ser pequeño pero lo suficiente para evitar movimientos bruscos en la variable manipulada debido a la contribución de la parte discontinua cuando el valor de la superficie se encuentra alrededor del valor de cero.

### 6.2.2 Relaciones en lazo cerrado

Para demostrar como el control predictivo por modos deslizantes evita el problema de inestabilidad cuando es aplicado a sistemas con ceros SD, en las mismas condiciones en que los controlador predictivo basado en modelo presentan un comportamiento inestable como se demostró en el Capítulo 3, las relaciones en lazo cerrado han sido obtenidas.

El SMPC como otros MPC emplea el concepto de horizonte deslizante, por lo cual, solamente los elementos  $\alpha_i$  de la primera fila de la matriz  $K_{SMPC}$  es tomada en cuenta. la ecuación (6.27) puede ser reescrita como,

$$\Delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N_2} \alpha_i \left[ \mathbf{w} - \mathbf{F}(z^{-1})\mathbf{y}(t) - \Gamma(z^{-1})\Delta u(t-1) + \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{P}_s^*e(t) + \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{Q}_s^*\Delta u(t-1) \right] \quad (6.32)$$

sustituyendo el modelo CARIMA (6.1) en (6.32), la relación a lazo cerrado es obtenida,

$$\begin{aligned} & \left[ \tilde{A} + \sum_{i=1}^{N_2} \alpha_i z^{-1} (\tilde{A}\Gamma_i + \tilde{A}\frac{Q_{s1}}{P_{s0}} + BF_i - B\frac{P_{s1}}{P_{s0}}) \right] \mathbf{y}(t) \\ &= B \sum_{i=1}^{N_2} \alpha_i z^{-N_2+i} \left( 1 + \frac{P_{s1}}{P_{s0}} \right) w(t + N_2 - 1) \\ &+ (B + B \sum_{i=1}^{N_2} \alpha_i z^{-1} (\Gamma_i + \tilde{A}\frac{Q_{s1}}{P_{s0}})) \xi(t) \end{aligned} \quad (6.33)$$

Donde, el polinomio característico  $M_{CP_{SMPC}}$  puede ser definido como,

$$\begin{aligned} & \tilde{A} + \sum_{i=1}^{N_2} \alpha_i z^{-1} \left( \tilde{A}\Gamma_i + BF_i + \tilde{A} \frac{Q_{s1}}{P_{s0}} - B \frac{P_{s1}}{P_{s0}} \right) \\ & \tilde{A} + \sum_{i=1}^{N_2} \alpha_i z^{-1} \left( (B - \tilde{A}G_j)z^j + \tilde{A} \frac{Q_{s1}}{P_{s0}} - B \frac{P_{s1}}{P_{s0}} \right) \end{aligned} \quad (6.34)$$

Los elementos del polinomio de la superficie dan un grado de libertad extra para asignar el comportamiento del sistema dinámico en lazo cerrado. Cuando la ponderación del esfuerzo de control es cero ( $\lambda = 0$ ), (6.27) Puede ser reescrito como,

$$\begin{aligned} K_{SMPC} &= [(\mathbf{P}_s \mathbf{G} + \mathbf{Q}_s)^T (\mathbf{P}_s \mathbf{G} + \mathbf{Q}_s)]^{-1} \\ & \quad (\mathbf{P}_s \mathbf{G} + \mathbf{Q}_s)^T \mathbf{P}_s \\ &= (\mathbf{P}_s \mathbf{G} + \mathbf{Q}_s)^{-1} \mathbf{P}_s \\ \Delta u &= K_{SMPC}(w(t) - f(t)) \end{aligned} \quad (6.35)$$

Adicionalmente, si el horizonte de control y predicción tienen el mismo valor  $N_u = N_2 - N_1 + 1$ , la primera  $K_{SMPC}$  es dada por,

$$\left[ \frac{p_{s0}}{p_{s0} g_0 + q_{s0}}, 0, 0, \dots, 0 \right] \quad (6.36)$$

Consecuentemente, utilizando (6.34) y (6.36) el polinomio característico es obtenido como,

$$\begin{aligned} M_{CP} &= \tilde{A} + \frac{p_{s0}}{p_{s0} g_0 + q_{s0}} (B - \tilde{A}g_0) + \\ & + \frac{p_{s0}}{p_{s0} g_0 + q_{s0}} \left( z^{-1} \tilde{A} \frac{q_{s1}}{p_{s0}} - z^{-1} B \frac{p_{s1}}{p_{s0}} \right) \end{aligned} \quad (6.37)$$

El MPC ( $P_s(z^{-1}) = 1$ ,  $Q_s(z^{-1}) = 0$ ) en las mismas condiciones tiene el polinomio característico dado por,

$$M_{CP_{MPC}}(z^{-1}) = g_0^{-1} B(z^{-1}) \quad (6.38)$$

Consecuentemente, los polos de  $M_{CP_{MPC}}$  contienen los ceros del modelo de la planta(6.1). El MPC es internamente inestable debido a la cancelación de los ceros SD con polos SD del controlador. note que en las mismas condiciones el CPMD evita el problema de inestabilidad, debido a que los ceros SD no son cancelados.

### 6.2.3 Ejemplo de aplicación: Reactor isotérmico Van de Vusse

El desempeño del control predictivo por modos deslizantes monovariante es contrastado con un controlador predictivo basado en modelo y un control por modos deslizantes ,

para lo cual se utilizó nuevamente el modelo del reactor isotérmico Van de Vusse, que se caracteriza por ser un sistema no lineal de fase no mínima, en el Apéndice A se muestran las ecuaciones no lineales que rigen su comportamiento, y el procedimiento seguido para la linealización del modelo. En Las figuras siguientes se muestran las señales de la variable controlada (concentración del componente  $C_b$ ), la variable manipulada (flujo  $F$ ), y la superficie de deslizamiento para el control predictivo por modos deslizantes, el controlador predictivo basado en modelo, y el control por modos deslizantes. En las pruebas se realizan cambios de referencia fuera del entorno del punto de operación inicial y se producen cambios en el modelo y perturbaciones para observar la habilidad de los controladores en mantener la variable controlada en el valor de referencia.

El control por modos deslizantes utilizado para la comparación es el presentado en (Camacho *et al.*, 1999), como se muestra en el artículo éste permite ser utilizado en sistemas de fase no mínima a diferencia de los controladores por modo deslizante desarrollados con la teoría convencional. El controlador emplea una superficie de deslizamiento del tipo proporcional integral derivativa,

$$S(t) = \text{sgn}(K) \left[ \frac{dX(t)}{dt} + \lambda_1 e(t) + \lambda_0 \int_0^t e(t) \right] \quad (6.39)$$

y la señal de control viene dada por

$$U(t) = \frac{t_0 \tau}{K} \left[ \frac{X(t)}{t_0 \tau} + \lambda_0 e(t) \right] + K_D \frac{S(t)}{|S(t)| + \delta} \quad (6.40)$$

Para el ajuste del controlador el modelo del sistema es aproximado como un sistema de primer orden con retardo como se puede observar en el Apéndice A donde,

$K$  Es la ganancia del modelo de aproximación

$\tau$  Es la constante de tiempo del modelo de aproximación

$t_0$  Es el retardo del modelo de aproximación

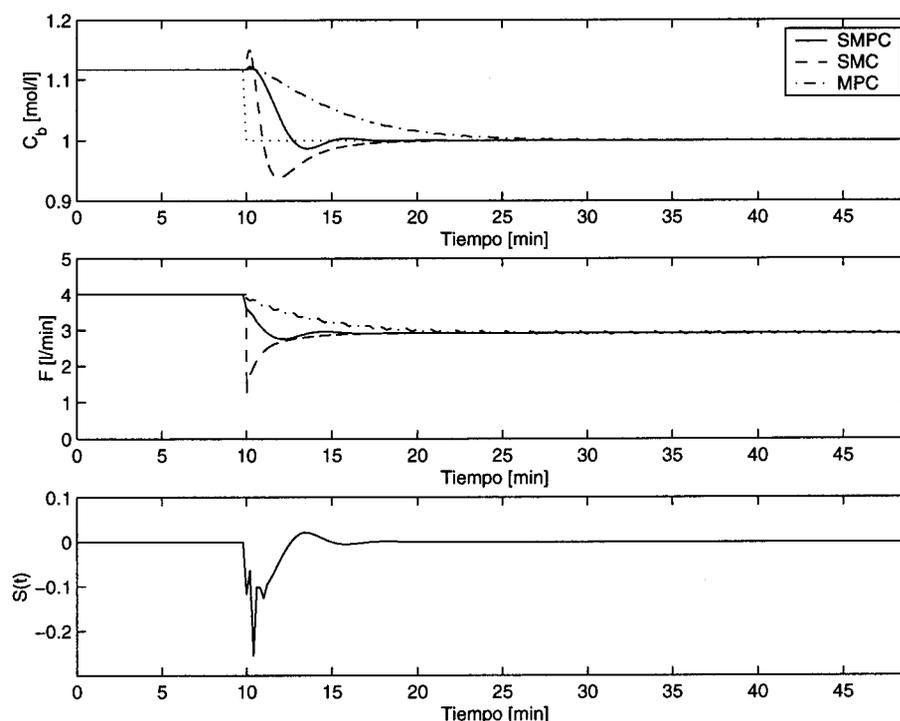
Los parámetros de ajuste del controlador son definidos en función del modelo de aproximación por,

$$\lambda_1 = \frac{t_0 + \tau}{t_0 \tau} \quad (6.41)$$

$$0 < \lambda_0 < \min \left[ \frac{\lambda_1}{\tau}, \frac{\lambda_1^2}{4} \right] \quad (6.42)$$

$$K_D = \frac{0,51}{K} \left[ \frac{\tau}{t_0} \right] \quad (6.43)$$

$$\delta = 0.68 + 0.12(K K_D \lambda_1) \quad (6.44)$$



**Figura 6.10:** Concentración  $C_b$  a la salida para el cambio de referencia de ajuste

El criterio utilizado para el ajuste de los controladores fue el siguiente. Primero se ajustó el controlador predictivo basado en modelo de manera de evitar el problema de inestabilidad producido por la cancelación del cero SD con un polo SD mostrado en el capítulo 3 utilizando los siguientes parámetros óptimos de ajuste obtenidos de las curvas del índice de desempeño SVAE  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 8$ ,  $N_u = 1$ , y  $\lambda = 0,95$ . Luego se ajustó el control predictivo por modos deslizantes de manera de que ambos controladores tuviesen la misma dinámica en lazo cerrado, empleando los siguientes parámetros de sintonización  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 25$ ,  $N_u = 1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $P_s = 1 - 0.5z^{-1}$ ,  $Q_s = 0.5z^{-1}$ ,  $K_D = 2$ , y  $\rho = 0,6$ . El control por modos deslizantes se sintonizó utilizando los valores iniciales propuestos en (Camacho *et al.*, 1999) y luego se realizó un reajuste con los siguientes valores  $\lambda_1 = 3,4$ ,  $\lambda_0 = 2,9$ ,  $K_D = 0,8$  y  $\delta = 3,8$  para lograr un tiempo de asentamiento similar al control predictivo por modos deslizantes ante un cambio de referencia a de la concentración de salida a  $C_b = 1$  mol/l, como se muestra en la figura 6.10. En la Tabla 6.6 se muestran los valores de los índices de desempeño de los tres controladores para el cambio de referencia que se muestra en la figura 6.10. Con los parámetros de ajuste seleccionados el SMPC presenta el comportamiento mas agresivo, el SMC tiene la SVAE 25% mayor que y el MPC un 194% mayor.

La Figura 6.11, muestra el desempeño de los controladores para cambios de referencia,

Tabla 6.6: Valores de los índices de desempeño para el cambio de referencia de ajuste

	SMPC	MPC	SMC
$C_b$	0,2254	0,6634	0,2814
$F$	0,4397	0,2553	0,2129

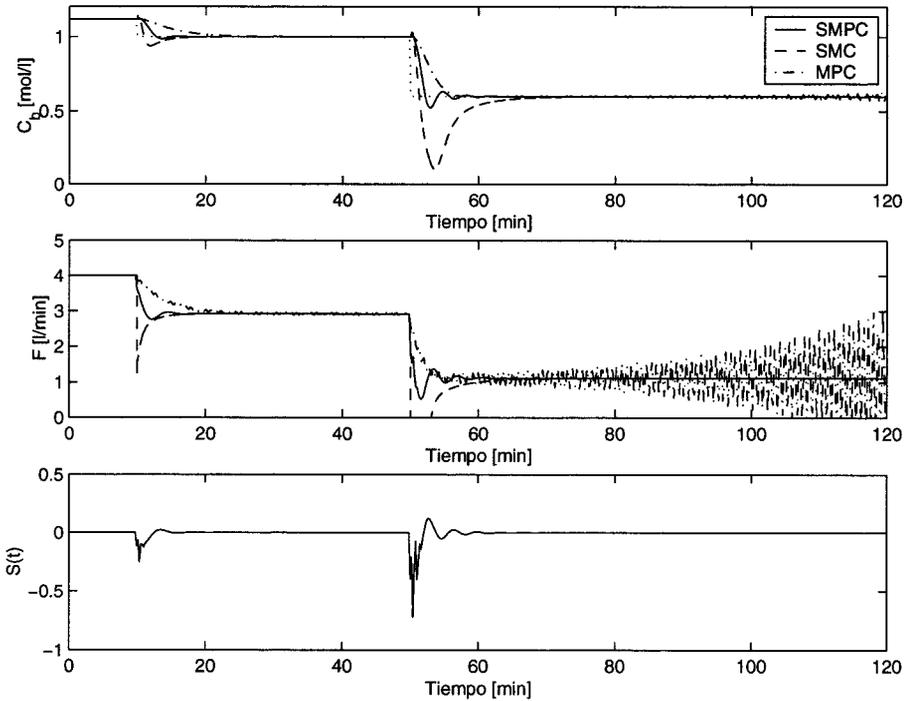


Figura 6.11: Concentración  $C_b$  a la salida para cambios de referencia

el primer cambio se realiza para el tiempo  $t = 10 \text{ min}$ , el SMPC logra llevar la concentración  $C_b$  al valor de  $1 \text{ mol/l}$ , sin sobrepaso, con un tiempo de asentamiento un 50% menor que el presentado por el MPC y similar al del SMC, éste último presentó un sobrepaso del 53%. Para el tiempo  $t = 50 \text{ min}$ , se realizó un nuevo cambio de referencia en la concentración  $C_b$  al valor de  $0,6 \text{ mol/l}$ , el MPC presentó un comportamiento inestable al intentar llevar la variable controlada a un valor de referencia alejado del punto de operación donde se obtuvo el modelo linealizado para realizar la predicción, en cambio el SMPC es capaz de mantener la variable controlada en su valor de referencia con un sobrepaso del 19% y con un tiempo de asentamiento un 33% menor del requerido por el SMC que también logra estabilizar el sistema en lazo cerrado pero produciendo un sobrepaso del 125%. En el flujo de entrada al reactor para el tiempo  $t = 50 \text{ min}$  se puede observar el comportamiento inestable del MPC cuando la variable manipulada intenta disminuir el flujo de entrada como consecuencia del segundo cam-

bio de referencia. El SMC presenta un comportamiento mucho mas agresivo incluso cierra por completo el flujo de entrada al reactor, el SMPC realiza ambos cambios de referencia sin someter a la válvula de control a movimientos excesivos, se observa como el control predictivo por modos deslizantes presenta la robustez del control por modos deslizantes y el buen desempeño del controlador predictivo basado en modelo en el manejo de las no linealidades del proceso debidas a cambios en el punto de operación del sistema. En la Figura 6.11 también se dibuja la superficie de deslizamiento para los cambios de referencia, se puede observar como la superficie de deslizamiento converge al valor  $S(t) = 0$ , se puede ver que cuando la superficie alcanza y se mantiene en el valor  $S(t) = 0$  el error entre la referencia y la variable controlada también es cero. En la tabla 6.7 se muestran los valores de los índices de desempeño para los cambios de referencia que se muestran en la figura 6.11. La SVAE es un 307% mayor para el SMC en comparación con el SMPC, y el índice de la señal de control es un 20% menor para el SMC.

**Tabla 6.7: Valores de los índices de desempeño para el cambio de referencia**

	<i>SMPC</i>	<i>MPC</i>	<i>SMC</i>
$C_b$	0,9813	–	3,014
$F$	0,4104	–	0,3281

La robustez de los controladores ante cambios en el sistema es estudiada realizando incrementos en las velocidades de reacción  $k_1$ ,  $k_2$   $k_3$  del modelo del reactor, dejando los parámetros de ajuste de los controladores en los valores iniciales. En la figura 6.12 se muestra la concentración del componente  $B$  a la salida del reactor, el flujo de entrada y la superficie de deslizamiento, en el tiempo  $t = 10 \text{ min}$  se realizó un incremento del 5%, se observa como los tres controladores logran rechazar la perturbación, el SMC alcanza el valor de referencia con un tiempo de asentamiento un 300% mas lento que el SMPC y el MPC un 700%. Un nuevo incremento se realizó en el tiempo  $t = 50 \text{ min}$  en este caso el incremento en los valores de las velocidades de reacción fue del 25%, el MPC no es capaz de rechazar el cambio en el modelo del reactor y presenta un comportamiento inestable, en cambio el SMC y el SMPC mantiene la variable controlada en su valor de referencia, con un tiempo de asentamiento un 333% mayor para el SMC y comparación con el realizado por el SMPC. Se observa como el SMPC mejora la robustez respecto al MPC para cambios en el modelo del proceso. En el flujo manipulado por los controladores se puede observar el comportamiento inestable del MPC, y como el SMPC presenta un comportamiento sin oscilaciones en el flujo de entrada al reactor. Al observar la superficie deslizante del SMPC se puede observar como en los instante donde se produce el cambio del modelo el valor de la superficie cambia debido al cambio del error, pero

converge al valor  $S(t) = 0$ . Los valores de los índices de desempeño para cambios en el modelo se presentan en la tabla 6.8. La SVAE es un 220% mayor para el SMC en comparación con el SMPC, y el índice de la señal de control es un 42% menor para el SMC respecto al SMPC.

Tabla 6.8: Valores de los índices de desempeño para cambios en el modelo

	SMPC	MPC	SMC
$C_b$	0,1255	—	0,2770
$F$	0,2468	—	0,1434

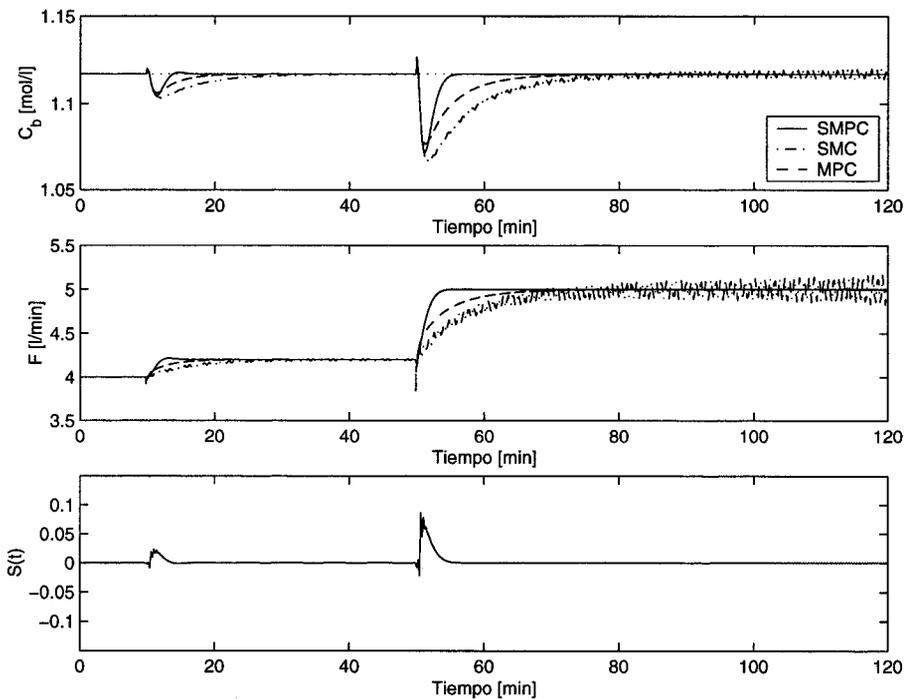


Figura 6.12: Concentración  $C_b$  a la salida ante cambios en el modelo

Una perturbación bastante frecuente en los procesos químicos son los cambios en las características de los elementos de suministro, para estudiar como las perturbaciones en la concentración del componente  $A$  a la entrada del reactor  $C_{ae}$  afectan el desempeño de los controladores, se incrementó la concentración. La Figura 6.13 ilustra como la variable controlada se ve afectada por los cambios en la concentración del componente  $A$  en el flujo de alimentación. En el tiempo  $t = 10 \text{ min}$  se produjo un incremento del 5% en la concentración a la entrada, se observa como todos los controladores rechazan la perturbación, el SMC presenta un tiempo de asentamiento un 100% mayor y el

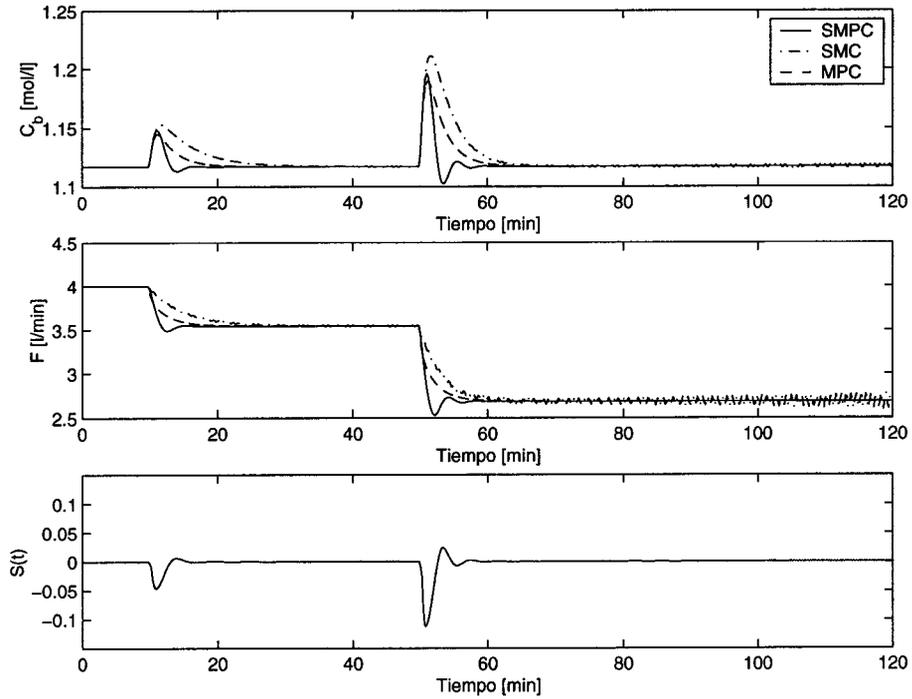


Figura 6.13: Concentración  $C_b$  a la salida ante perturbaciones en  $C_{ae}$

MPC un 417% mayor en comparación con el SMPC. En el instante de tiempo  $t = 50 \text{ min}$  se produjo un incremento del 20% en la concentración del componente A en el flujo de alimentación, el MPC no es capaz de controlar una perturbación de esa magnitud, presentando un comportamiento inestable, en cambio el SMPC y el SMC logran controlar la perturbación con un tiempo de asentamiento un 260% mayor con respecto al SMPC. Se puede ver como el SMPC presenta un mejor robustez comparado con el MPC ante perturbaciones. Observando la variable manipulada para cada uno de los controladores, se puede observar como el MPC presenta un comportamiento inestable, y como el SMC y el SMPC logran rechazar la perturbación. En la superficie de deslizamiento del SMPC, se observa como al producirse la perturbación es movida de su valor nominal  $S(t) = 0$ , pero el controlador la lleva al valor cero. La tabla 6.9 muestra los valores de los índices de desempeño para las perturbaciones presentadas en la figura 6.13. La SVAE es un 174% mayor para el SMC en comparación con el SMPC, y el índice de la señal de control es un 46% menor para el SMC respecto al SMPC.

Tabla 6.9: Valores de los índices de desempeño para perturbaciones en  $C_{ae}$

	<i>SMPC</i>	<i>MPC</i>	<i>SMC</i>
$C_b$	0,2199	—	0,3826
$F$	0,2883	—	0,1519

Con los resultados obtenidos al comparar el desempeño del SMPC con el MPC para el caso monovariable, se encuentra que a pesar de que el control predictivo por modos deslizantes ha sido ajustado con un comportamiento mas agresivo presenta una mayor robustez, similar a la del SMC pero con un mejor comportamiento que este último como se puso observar con los índices de desempeño.

## 6.3 Control predictivo por modos deslizantes multivariable

En esta sección se presenta la extensión del control predictivo por modos deslizantes a sistemas de multivariables y su aplicación a sistemas con ceros de transmisión SD.

Para el desarrollo del control predictivo por modos deslizantes multivariable se empleó como modelo de predicción un modelo linealizado en torno al punto de operación del tipo CARIMA,

$$\mathbf{A}(z^{-1})y(t) = \mathbf{B}(z^{-1})u(t-1) + \mathbf{C}(z^{-1})\frac{\xi(t)}{\Delta} \quad (6.45)$$

Donde:

- $y(t)$  : Vector de la señal de salida del proceso ( $n \times 1$ )
- $u(t)$  : Vector de la señal de entrada al proceso ( $m \times 1$ )
- $\Delta$  :  $1 - z^{-1}$
- $\xi(t)$  : Vector de ruido blanco de media cero ( $n \times 1$ )

$\mathbf{A}(z^{-1})$  y  $\mathbf{C}(z^{-1})$  son  $n \times n$  matrices mónicas polinomiales y  $\mathbf{B}(z^{-1})$  es una  $n \times m$  matriz polinomial que contiene los ceros de trasmisión del modelo del sistema y son definidas por medio del operador retardo  $z^{-1}$  como:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(z^{-1}) &= \mathbf{I} + \mathbf{A}_1 z^{-1} + \mathbf{A}_2 z^{-2} + \dots + \mathbf{A}_{na} z^{-na} \\ \mathbf{B}(z^{-1}) &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 z^{-1} + \mathbf{B}_2 z^{-2} + \dots + \mathbf{B}_{nb} z^{-nb} \\ \mathbf{C}(z^{-1}) &= \mathbf{I} + \mathbf{C}_1 z^{-1} + \mathbf{C}_2 z^{-2} + \dots + \mathbf{C}_{na} z^{-na} \end{aligned}$$

Para el desarrollo del controlador se ha asumido  $\mathbf{C}(z^{-1}) = \mathbf{I}$  puesto que el polinomio  $C$  es difícil de estimar con suficiente exactitud en la práctica especialmente en el caso multivariable (Camacho y Bordons, 1999).

El primer paso de diseño de un controlador por modos deslizantes, es definir una superficie de deslizamiento  $S(t)$ . La siguiente superficie predictiva de deslizamiento

es propuesta para el desarrollo del controlador : La siguiente superficie predictiva multivariable de deslizamiento  $S(t)$  es propuesta para el desarrollo del controlador multivariable,

$$S_{t+j|t} = \mathbf{P}_s(z^{-1})(w(t+j) - y(t+j|t)) + \mathbf{Q}_s(z^{-1})\Delta u(t+j-1) \quad (6.46)$$

Donde  $\mathbf{P}_s(z^{-1})$  y  $\mathbf{Q}_s(z^{-1})$  son matrices polinomiales definidas por por,

$$\mathbf{P}_s(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{s_{11}}(z^{-1}) & \cdots & \mathbf{P}_{s_{1n}}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{s_{1n}}(z^{-1}) & \cdots & \mathbf{P}_{s_{nn}}(z^{-1}) \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

$$\mathbf{P}_{s_{ij}}(z^{-1}) = p_{s0_{ij}} + p_{s1_{ij}}z^{-1} + \dots + p_{snp_{ij}}z^{-np}$$

y

$$\mathbf{Q}_s(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{s_{11}}(z^{-1}) & \cdots & \mathbf{Q}_{s_{1m}}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Q}_{s_{1m}}(z^{-1}) & \cdots & \mathbf{Q}_{s_{mm}}(z^{-1}) \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

$$\mathbf{Q}_{s_{ij}}(z^{-1}) = q_{s0_{ij}} + q_{s1_{ij}}z^{-1} + \dots + q_{snp_{ij}}z^{-np}$$

Estas matrices polinomiales constituyen parámetros de diseño que determina la dinámica de la superficie de deslizamiento. Cuando la superficie es cero  $S(t) = 0$  la dinámica del error es dada por,

$$e(t+j) = -\mathbf{P}_s(z^{-1})^{-1}\mathbf{Q}_s(z^{-1})\Delta u(t+j-1) \quad (6.49)$$

La matriz  $\mathbf{P}_s(z^{-1})$  es seleccionada de manera que el determinante tenga todas sus raíces dentro del círculo unitario. Adicionalmente, se ha escogido con forma diagonal, con polinomios de grado uno en los elementos de la diagonal.  $\mathbf{Q}_s(z^{-1})$  es escogida de forma que,

$$\mathbf{P}_s(1)^{-1}\mathbf{Q}_s(1) = \mathbf{I} \quad (6.50)$$

Con esta forma de escoger a los parámetros de diseño de la superficie, se ha encontrando un buen comportamiento del controlador a lazo cerrado.

El objetivo final de control es asegurar que la variable controlada se encuentre sobre su valor de referencia  $w(t+j)$  lo cual implica que el error  $e(t) = w(t) - y(t)$  debe ser cero. En el control predictivo por modos deslizantes el problema de mantener la variable controlada sobre su referencia se reduce a mantener el valor de la superficie  $S(t)$  en cero. La idea general que se propone para el desarrollo de este controlador,

es que la futura superficie predicha (6.46) sobre el horizonte de predicción considerado debe de ser cero, al mismo tiempo que el esfuerzo de control  $\Delta u$  necesario para llevarlo a cabo es penalizado. La expresión para la función objetivo queda por lo tanto dada por (6.51).

Utilizando una expresión para la función objetivo similar a la definida en el caso mono-variable esta queda determinada por,

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} [\hat{S}(t+j|t)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^2 \quad (6.51)$$

Donde  $\hat{S}(t+j|t)$  es la óptima  $j$ -ésima predicción de la superficie deslizante, realizada con la información disponible en el instante  $t$ ,  $N_1$  y  $N_2$  son los valores mínimo y máximo del horizonte de predicción,  $N_u$  es el horizonte de control, y  $\lambda(j)$  es la secuencia de penalización del esfuerzo de control. El objetivo del controlador es calcular la futura secuencia de valores de control, de manera tal que los futuros valores de la superficie  $S(t+j)$  sean conducido al valor cero. La minimización de la función objetivo  $J(N_1, N_2, N_u)$  produce  $\Delta u(t), \Delta u(t+1), \dots, \Delta u(t+N_u)$ , pero solamente  $\Delta u(t)$  es aplicada a la entrada del proceso. En el instante siguiente  $t+1$  un nuevo problema de minimización es resuelto, es decir el control predictivo por modos deslizantes emplea el concepto de horizonte deslizante.

Una vez que la superficie de deslizamiento ha sido seleccionada, el siguiente paso es diseñar una ley de control que satisfaga  $S(t) = 0$ . Finalmente la ley de control  $\Delta u(t)$ , esta constituida por dos términos, un término continuo,  $\Delta u_C(t)$ , y un término discreto,  $\Delta u_D(t)$ , quedando de la forma,

$$\Delta u(t) = \Delta u_C(t) + \Delta u_D(t) \quad (6.52)$$

La parte continua del controlador es dada por un controlador predictivo basado en modelo y que utiliza la función objetivo dada por (6.51). El término discontinuo  $u_D(t)$ , incorpora un elemento predictivo no lineal que incluye un elemento de conmutación en la ley de control. Esta parte del controlador es discontinua de un lado a otro de la superficie de deslizamiento.

$$\Delta u_D(t+j) = K_D \frac{S(t+j|t)}{|S(t+j|t)| + \rho} \quad (6.53)$$

Donde  $K_D$  es un parámetro de ajuste responsable de la agresividad del controlador para alcanzar la superficie de deslizamiento, y  $\rho$  es un parámetro de ajuste utilizado para reducir el problema de las oscilaciones de alta frecuencia en torno a la superficie de deslizamiento propuesto por (Zinober, 1994).

Con el objetivo de lograr la minimización de la función de objetivo (6.51), se realiza la predicción de las salidas  $j$ -pasos adelante  $\hat{y}(t+1|t)$  para  $j = N_1, \dots, N_2$ , esta es calculada basándose en la información conocida en el instante  $t$  y los valores futuros de las acciones de control. Considérese la siguiente ecuación diofántica,

$$\mathbf{C}(z^{-1}) = \mathbf{E}_j(z^{-1})\tilde{\mathbf{A}}(z^{-1}) + z^{-j}\mathbf{F}_j(z^{-1}) \quad (6.54)$$

Las matrices polinomiales  $\mathbf{E}_j(z^{-1})$  y  $\mathbf{F}_j(z^{-1})$  son matrices diagonales definidas de forma única, con un grados  $j-1$  y  $na$  respectivamente,  $\tilde{\mathbf{A}}(z^{-1}) = \Delta\mathbf{A}(z^{-1})$  es también una matriz diagonal. Si 3.16 es multiplicado por la izquierda por  $\Delta\mathbf{E}_j(z^{-1})z^j$  se obtiene,

$$\mathbf{E}_j(z^{-1})\tilde{\mathbf{A}}(z^{-1})y(t+j) = \mathbf{E}_j(z^{-1})\mathbf{B}(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + \mathbf{E}_j(z^{-1})\mathbf{C}(z^{-1})\xi(t+j) \quad (6.55)$$

Utilizando la ecuación diofántica (6.54), y luego de algunas manipulaciones algebraicas la siguiente ecuación para la salida predicha es obtenida como,

$$\hat{y}(t+j) = \mathbf{C}(z^{-1})^{-1}\mathbf{E}_j(z^{-1})\mathbf{B}(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + \mathbf{C}(z^{-1})^{-1}\mathbf{F}_j(z^{-1})y(t) \quad (6.56)$$

En esta expresión  $\hat{y}(t+j)$  es función de las señales conocidas en el tiempo  $t$  y las señales futuras de control las cuales no han sido calculadas todavía. Utilizando una segunda ecuación (6.57) para distinguir el pasado y el futuro de los valores de la señal de control se tiene,

$$\mathbf{E}_j(z^{-1})\mathbf{B}(z^{-1}) = \mathbf{G}_j(z^{-1})\mathbf{C}(z^{-1}) + z^{-j}\Gamma_j(z^{-1}) \quad (6.57)$$

Donde la matriz polinomial  $\mathbf{G}_j$  ( $n \times m$ ) contiene los primeros  $j$  parámetros del modelo de la planta. La expresión para la salida predicha es obtenida como,

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+j) = & \mathbf{C}(z^{-1})^{-1}\mathbf{G}_j(z^{-1})\mathbf{C}(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + \\ & \mathbf{C}(z^{-1})^{-1}\Gamma_j(z^{-1})\Delta u(t-1) + \mathbf{C}(z^{-1})^{-1}\mathbf{F}_j(z^{-1})y(t) \end{aligned} \quad (6.58)$$

Finalmente, (6.58) puede ser reescrita como,

$$\hat{y}(t+j) = \mathbf{C}(z^{-1})^{-1}\mathbf{G}_j(z^{-1})\mathbf{C}(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + \hat{y}(t+j|t) \quad (6.59)$$

Donde  $\hat{y}(t+j|t)$  es la respuesta libre de predicción de  $\hat{y}(t+j)$  asumiendo que los futuros incrementos de la señal de control luego del tiempo  $t-1$  serán cero,

$$\hat{y}(t+j|t) = \mathbf{C}(z^{-1})^{-1}\Gamma_j(z^{-1})\Delta u(t-1) + \mathbf{C}(z^{-1})^{-1}\mathbf{F}_j(z^{-1})y(t) \quad (6.60)$$

Substituyendo  $\mathbf{E}_j(z^{-1})$  de (6.54) dentro (6.57), se obtiene,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(z^{-1})\mathbf{B}(z^{-1}) = & \tilde{\mathbf{A}}(z^{-1})\mathbf{G}_j(z^{-1})\mathbf{C}(z^{-1}) + z^{-j}\tilde{\mathbf{A}}(z^{-1})\Gamma_j + \\ & z^{-j}\mathbf{F}_j(z^{-1})\mathbf{B}(z^{-1}) \end{aligned} \quad (6.61)$$

Definiendo el vector  $f$ , compuesto por las respuestas libres de predicción,

$$f(t) = [\hat{y}(t+1|t), \hat{y}(t+1|t), \dots, \hat{y}(t+N_2|t)]^T \quad (6.62)$$

El vector de los futuros incrementos de control,

$$\Delta u(t) = [\Delta u(t+1), \Delta u(t+1), \dots, \Delta u(t+N_u-1)]^T \quad (6.63)$$

y el vector de salidas de la planta predichas,

$$\hat{y}(t) = [\hat{y}(t+1), \hat{y}(t+1), \dots, \hat{y}(t+N_2)]^T \quad (6.64)$$

de la predicción (6.60) la relación entre la entrada salida predicha de la planta puede ser escrita de la forma,

$$\hat{y}(t) = \mathbf{G}\Delta u(t) + f(t) \quad (6.65)$$

Donde la matriz  $\mathbf{G}$  esta compuesta por las matrices  $\mathbf{G}_k$ . Estas matrices contienen los parámetros de la respuesta escalón del modelo multivariable de la planta.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{N_2-1} & \mathbf{G}_{N_2-1} & \cdots & \mathbf{G}_{N_2-N_u} \end{bmatrix} \quad (6.66)$$

La predicción de la superficie deslizante es obtenida substituyendo (6.65) dentro de (6.46),

$$\hat{S}(t) = (-\mathbf{P}_s \mathbf{G} + \mathbf{Q}_s) \Delta u + \mathbf{P}_s (\mathbf{w} - \mathbf{f}_s) \quad (6.67)$$

Donde la respuesta libre de la superficie deslizante  $\mathbf{f}_s$  viene dada por,

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{F}(z^{-1})y(t) + \Gamma(z^{-1})\Delta u(t-1) - \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{P}_s^*e(t) - \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{Q}_s^*\Delta u(t-1) \quad (6.68)$$

donde las matrices son definidas de la siguiente manera,

$$\mathbf{P}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{s0} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{p}_{s1} & \mathbf{p}_{s0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathbf{p}_{snp} & \cdots & \mathbf{p}_{s0} \end{bmatrix} \quad (6.69)$$

$$\mathbf{P}_s^* = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{s1} & \cdots & \mathbf{p}_{snp-1} & \mathbf{p}_{snp} \\ \mathbf{p}_{s2} & \cdots & \mathbf{p}_{snp} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (6.70)$$

y las  $\mathbf{p}_{sk}$  matrices internas son definidas por,

$$\mathbf{p}_{sk} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{sk_{11}} & \cdots & \mathbf{p}_{sk_{1m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{p}_{sk_{1m}} & \cdots & \mathbf{p}_{sk_{mm}} \end{bmatrix} \quad (6.71)$$

luego

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{s0} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{q}_{s1} & \mathbf{q}_{s0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathbf{q}_{s_{nq}} & \cdots & \mathbf{q}_{s0} \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

$$\mathbf{Q}_s^* = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{s1} & \cdots & \mathbf{q}_{s_{nq-1}} & \mathbf{q}_{s_{nq}} \\ \mathbf{q}_{s2} & \cdots & \mathbf{q}_{s_{nq}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (6.73)$$

de igual forma las  $\mathbf{q}_{sk}$  matrices internas son definidas por,

$$\mathbf{q}_{sk} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{sk_{11}} & \cdots & \mathbf{q}_{sk_{1m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{q}_{sk_{1m}} & \cdots & \mathbf{q}_{sk_{mm}} \end{bmatrix} \quad (6.74)$$

$$J = [(-\mathbf{P}_s \mathbf{G} + \mathbf{Q}_s)u + \mathbf{P}_s(w - f_s)]^T [(-\mathbf{P}_s \mathbf{G} + \mathbf{Q}_s)u + \mathbf{P}_s(w - f_s)] + \lambda u^T u \quad (6.75)$$

donde,

$$f_s = f - P_s^{-1} P_s^* e(t-1) + P_s^{-1} Q_s^* u(t-1)$$

La minimización cuadrática de (6.75) se convierte en un problema de álgebra lineal directo, asumiendo que no existen restricciones en la señal de control se obtiene la expresión para el cálculo de la secuencia de futuras señales de control,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_C &= K_{SMPC}(\mathbf{w} - \mathbf{f}_s) \\ K_{SMPC} &= [(-\mathbf{P}_s \mathbf{G} + \mathbf{Q}_s)^T (-\mathbf{P}_s \mathbf{G} + \mathbf{Q}_s) + \lambda I]^{-1} \\ &\quad (-\mathbf{P}_s \mathbf{G} + \mathbf{Q}_s)^T \mathbf{P}_s \end{aligned} \quad (6.76)$$

y

$$\Delta \mathbf{u}_D = \left[ \frac{K_D \hat{S}(t)}{|\hat{S}(t)| + \rho}, \frac{K_D \hat{S}(t+1)}{|\hat{S}(t+1)| + \rho}, \dots, \frac{K_D \hat{S}(t+N_u-1)}{|\hat{S}(t+N_u-1)| + \rho} \right]^T \quad (6.77)$$

finalmente, la señal de control es dada por,

$$\Delta \mathbf{u} = K_{SMPC}(\mathbf{w} - \mathbf{f}_s) + \Delta \mathbf{u}_D \quad (6.78)$$

En resumen, el SMPC tiene dos partes una discontinua, responsable de conducir el sistema hacia la superficie deslizante, y una parte continua desarrollada como un MPC, la cual es la responsable de mantener la variable controlada en el valor de referencia. Note que seleccionando  $P_s(z^{-1}) = 1$ ,  $Q_s(z^{-1}) = 0$ , la función objetivo es reducida a,

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} [\hat{y}(t+j | t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^2 \quad (6.79)$$

y la matriz de ganancia  $K$  la usual obtenida en un MPC lineal,

$$K_{MPC} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \quad (6.80)$$

### 6.3.1 Ejemplo de aplicación sistema de cuatro tanques

El desempeño del SMPC en lazo cerrado para sistemas multivariables con ceros de transmisión SD es comparado con el MPC. Para realizar la comparación se utiliza el sistema de los cuatro tanques interconectados descrito con detalle en el Apéndice A. Para el desarrollo del SMPC y el MPC se emplea en ambas formulaciones un modelo de predicción lineal del tipo CARIMA con ceros de transmisión SD.

Se han elaborado las superficies del valor de índice SVAE, en función de los parámetros de ajuste del SMPC, estas superficies permiten observar el comportamiento en lazo cerrado de las variables controladas  $y_1$  y  $y_2$  para SMPC y compararlas con las derivadas para el MPC. Las superficies de la SVAE han sido obtenidas para cada una de las salidas con la diferencia entre la variable de salida y la referencia, al aplicar un incremento en el valor deseado de la variable controlada de 1 V sobre los valores del punto de operación en cada una de las salidas. El primer cambio de referencia es aplicado en  $y_1$  con una separación lo suficientemente grande como para que en el momento de aplicar el segundo cambio en  $y_2$ , ya las se encontraban las variables controladas en estado estacionarios.

En la Figura 6.14 se ilustran las superficies de la SVAE para las salidas  $y_1$  y  $y_2$  de ambos controladores el SMPC y el MPC, para cambios en los horizontes de predicción  $[080]$  y e los horizontes de control  $[0N_2]$ . Manteniendo el resto de parámetros de ajuste

constantes, la penalización del esfuerzo de control utilizadas son  $\lambda = 19$  para el MPC y  $\lambda = 2,5$  para el SMPC, los demás parámetros de ajuste del SMPC se ajustaron con los siguientes valores,  $K_D = -0.5$ ,  $\rho = 2$ ,

$$\mathbf{P}_s = \begin{bmatrix} 1 - 1,5z^{-1} & 0 \\ 0 & 1 - 0,5z^{-1} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} 0,5z^{-1} & 0 \\ 0 & 0,5z^{-1} \end{bmatrix}$$

Se observa como las superficies de la SVAE para el SMPC presenta valores un 20% menores para la salida  $y_1$  y un 19% menores para la salida  $y_2$  de los presentados por el MPC en toda las superficie. El rango de valores de los horizontes de predicción y control con los que se logra un salida estable para el SMPC es mayor que en el MPC. Se observa como el comportamiento de las superficies forma general del SMPC es similar al del MPC, presentando los valores mínimos del índice para valores de horizontes de control cortos y horizontes de predicción largo al controlar sistemas multivariables con cero de transmisión SD.

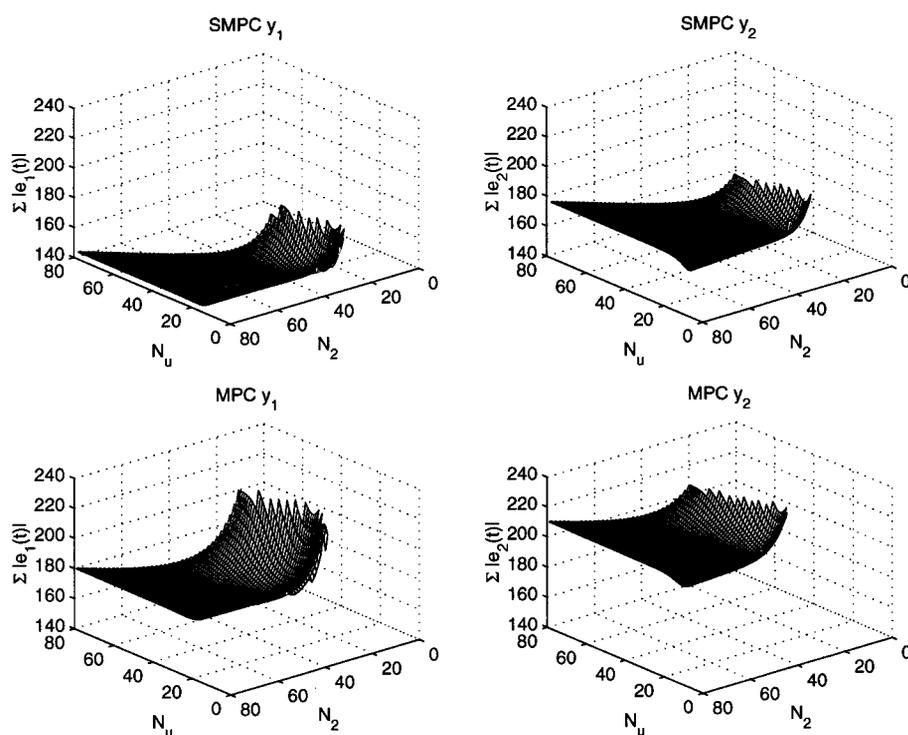


Figura 6.14: SVAE en función de  $N_2$  y  $N_u$  para el SMPC y el MPC

Las variaciones de la SVAE en función del horizonte de control y la penalización del esfuerzo de control se ilustran en la Figura 6.15. Los rangos de variación fueron los

siguientes  $N_u=[0 \ 80]$ ,  $\lambda=[0 \ 40]$  para el MPC y entre  $\lambda = [03]$  para el SMPC,  $N_2 = 80$  se mantuvo constante al igual que el resto de parámetros del SMPC, empleándose los mismo que en el ensayo anterior. El rango de valores de la penalización del esfuerzo de control son diferentes para cada controlador, puesto que el MPC, necesita de una ponderación mas fuerte que el SMPC para lograr una salida estable. El aumento de este parámetro de ajuste produce en ambos controladores un aumento del índice de desempeño, como se puede ilustra en cada una de las superficies, es deseable por lo tanto, ajustarlo en el menor valor posible que produzca un comportamiento satisfactorio en las variables controladas. Se observa como el SMPC presenta para todo el rango de valores un índice de desempeño menor que el MPC, tanto para la salida  $y_1$  como para la salida  $y_2$ . En las Figuras 6.14 y 6.15 se observa como los parámetros de ajuste en el SMPC producen las mismas tendencias en la superficie SVAE que las producidas por el MPC, esto permite utilizar en ambos controladores los mismos criterios generales de ajuste.

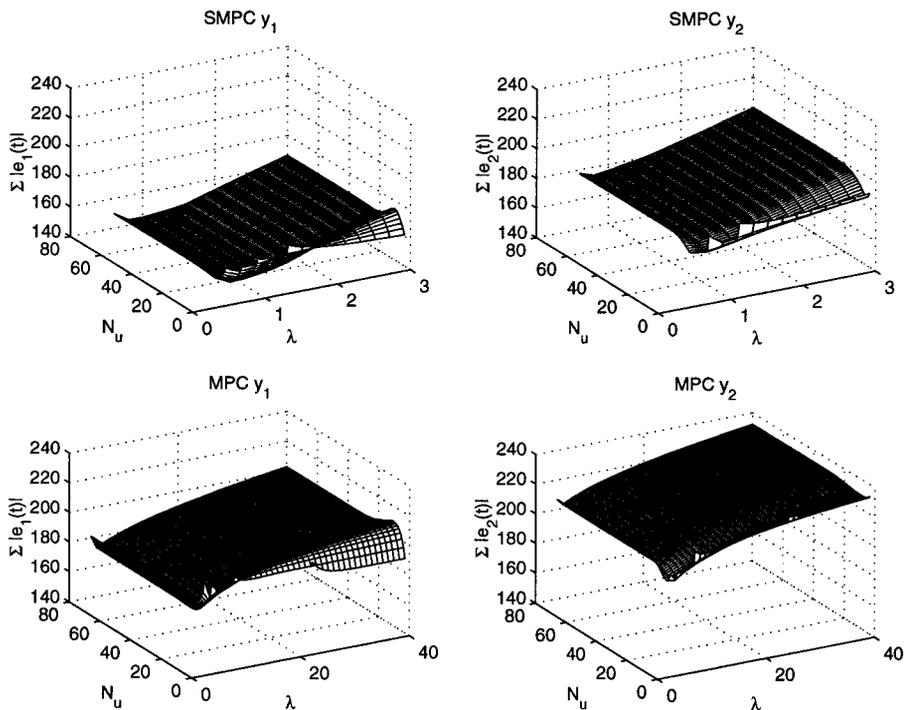


Figura 6.15: SVAE en función de  $N_u$  y  $\lambda$  para el SMPC y el MPC

En la Figura 6.16 se muestran las variaciones en el índice de desempeño SVAE producida por los cambios en los parámetros de ajuste de la parte discontinua del controlador  $K_D [0 \ -1]$  y  $\rho [0 \ 6]$ .

Al aumentar el valor de  $K_D$  se logra una respuesta mas fuerte en la señal de control,

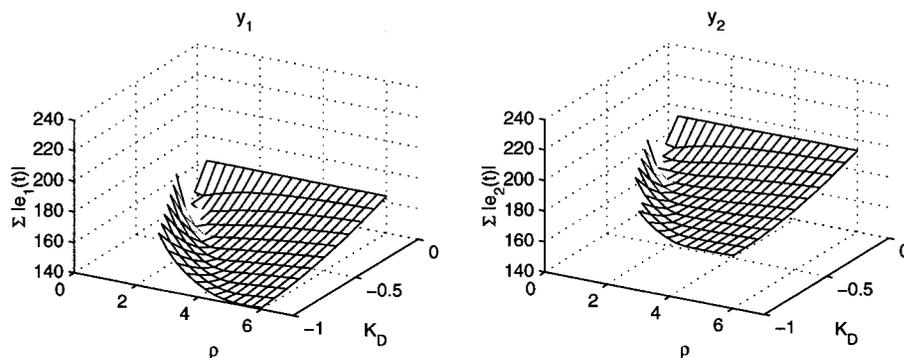


Figura 6.16: SVAE en función de  $K_D$  y  $\rho$  para el SMPC

debido a que los valores de la superficie distintos de  $S(t) = 0$  al aumentar  $K_D$  producen una mayor contribución en la secuencia de valores de control. Al incrementar el valor de  $K_D$  manteniendo  $\rho$  constante se observa como el valor de SVAE tiende a disminuir puesto que se alcanza más rápidamente el valor de la referencia, sin embargo valores muy grandes producen un aumento del índice debido a una respuesta muy agresiva en la señal de control. Éste comportamiento es posible solventarlo aumentando el valor del parámetro de ajuste  $\rho$ . Como se muestran en la Figura 6.1 al aumentar su valor se suaviza el efecto de la parte discontinua del SMPC.

### Comparación del comportamiento en el tiempo

La comparación del comportamiento en el tiempo del SMPC y el MPC, ante cambios de referencia alejados del punto nominal de operación y perturbaciones, es realizada ajustando los controladores de manera que de ambos tuviesen un tiempo de asentamiento similar, para cambios de referencia en las variables controladas  $y_1$  y  $y_2$  en torno al punto de operación.

El MPC ha sido ajustado con los siguientes parámetros óptimos obtenidos de las superficies de la SVAE  $N_2 = 80$ ,  $N_u = 19$ ,  $\lambda = 20$ , que evitan el problema de la inestabilidad al ser utilizado en sistemas con ceros de transmisión SD. El SMPC es ajustado con los siguientes parámetros,  $N_2 = 60$ ,  $N_u = 20$ ,  $\lambda = 2, 5$ ,  $K_D = -0, 1$ ,  $\rho = 1$ . La matriz polinomial  $\mathbf{P}_s$  ha sido seleccionada con polinomios de segundo orden, para lograr un ajuste fino que permitiera un lograr un comportamiento similar al MPC. Resultados similares en cuanto al comportamiento en lazo cerrado y robustez se logra utilizando polinomios de grado uno.

$$\mathbf{P}_s = \begin{bmatrix} (1 - 0,5z^{-1})(1 - 0,6z^{-1}) & 0 \\ 0 & (1 - 0,5z^{-1})(1 - 0,5z^{-1}) \end{bmatrix}$$

y

$$Q_s = \begin{bmatrix} 0, 2z^{-1} & 0 \\ 0 & 0, 25z^{-1} \end{bmatrix}$$

En la Figura En la 6.17 se muestra las variables controladas ( $y_1, y_2$ ) que se corresponden con el nivel en los tanques inferiores del proceso, las variables manipuladas ( $u_1, u_2$ ) que son los flujo de las bombas que actúan como elementos finales de control y por último las superficies de deslizamiento para el SMPC. Se observan como ambos controladores presentan un comportamiento similar, ante los cambios de referencia en las variables controladas, alcanzando los valores el valor en estado estacionario sin producir oscilaciones, y presentando el mismo tiempo de asentamiento. El ajuste ha sido realizado de esta manera para presentar un comparación mas equitativa entre el SMPC y el MPC.

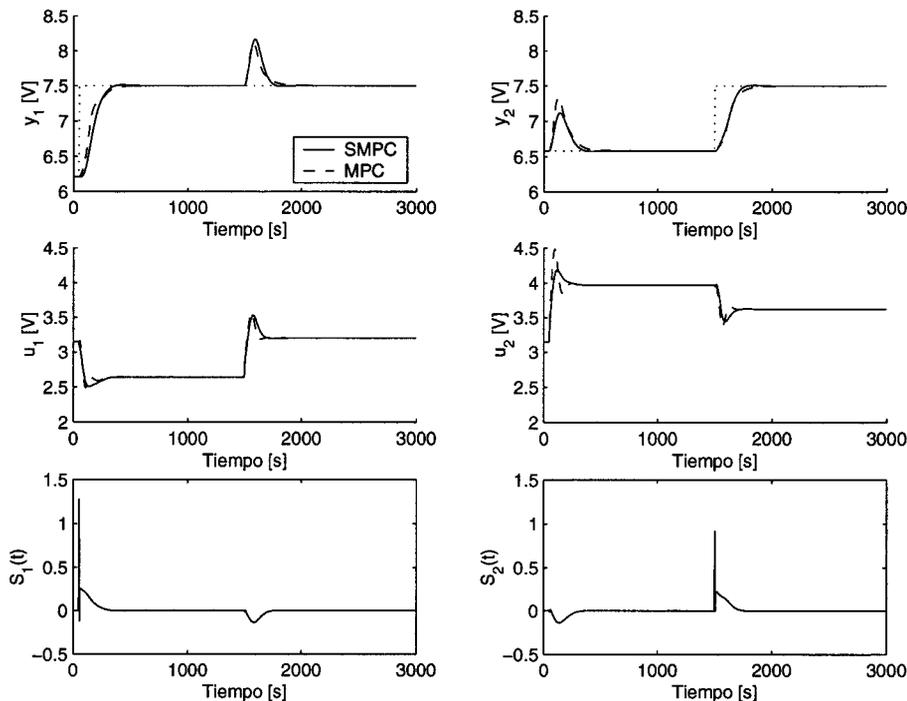


Figura 6.17: Variables del sistemas un cambio de referencia a 7,5 [V]

Con los parámetros de ajuste seleccionados los controladores produjeron los índices de desempeño que se muestran en la Tabla 6.10. Se observa como los índices de desempeño reflejan el criterio utilizado para el ajuste de los controladores, presentando valores muy similares, el SMPC produce un mayor valor del índice SVAE para la salida  $y_1$ , pero en la salida  $y_2$  es menor que el producido por el MPC.

**Tabla 6.10:** Valores de los índices de desempeño del SMPC y el MPC para cambios de referencia a 7,5 V

	<i>SMPC</i>	<i>MPC</i>
$y_1$	221,6	214,81
$y_2$	192,6	228,9
$u_1$	10,04	11,24
$u_2$	10,49	15,49

Con el objetivo de observar la robustez de ambos controladores, ante las no linealidades del proceso producidas al alejarse del punto de operación donde se realizó la linealización del modelo de predicción utilizados por el SMPC y el MPC, se realizaron cambios de referencia mayores en los niveles controlados. La dinámica del sistema de cuatro tanques interconectados se ve modificada considerablemente por los cambios de nivel, ya que el flujo de descarga de los tanques cambia en función del nivel de los mismos, esto produce cambios tanto en los valores de ganancia del modelo como en la dinámica de la respuesta del sistema.

En la Figura 6.18 se muestran las variables del sistema para un cambio de referencia a 9 V, se observa como el cambio de referencia de la variable de control  $y_1$  es alcanzada por ambos controladores, con movimientos mas suaves de la señal de control para el SMPC. Al aplicar el nuevo cambio de referencia a la variable de control  $y_2$  el MPC no es capaz de alcanzarlo presentando un comportamiento oscilatorio, por el contrario el SMPC logra estabilizar el nivel en los tanques 1 y 2. Ambas superficies de deslizamiento salen del valor  $S(t) = 0$  ya que su valor es función del error, pero nuevamente convergen al valor  $S(t) = 0$  cuando las variables controladas alcanzan los nuevos valores de referencia. Puede observarse la fuerte interacción entre las variables del proceso, cuando al cambiar el punto de referencia de una variable controlada, afecta considerablemente a la otra.

Un nuevo cambio de referencia desde el punto nominal del proceso es aplicado disminuyendo el nivel deseado en los tanques 1 y 2 a 4 V, en la Figura 6.19 se muestran las variables controladas y manipuladas del proceso. Al producirse el primer cambio de referencia el MPC alcanza el valor de 4 V en la variable  $y_1$ , pero presentando un comportamiento inestable debido al cambio en la dinámica del proceso bajar la referencia del nivel en el tanque 1, por lo que no es capaz de alcanzar un estado estacionario en la variable  $y_1$  presentando un comportamiento inestable. El SMPC por el contrario logra bajar nivel no solo del tanque 1, si no que en el tiempo  $t = 1500s$  se aplica un cambio en la referencia del nivel en el tanque 2. Ambos valores de referencia son alcanzados con un comportamiento suave sin oscilaciones en la señal de control, presentando

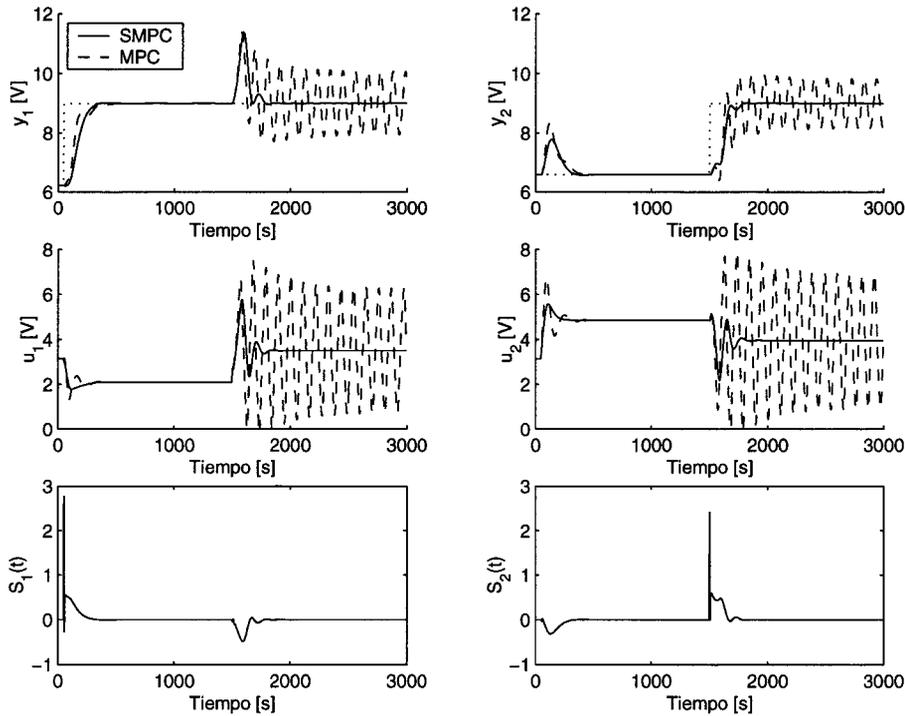


Figura 6.18: Variables del sistemas un cambio de referencia a 9 [V]

las variables controladas una dinámica sin sobrepaso. Se observa como las superficies deslizantes alcanzan el valor de  $s(t) = 0$  llevando los errores en las variables controladas a cero.

Para analizar la robustez de los controladores ante perturbaciones en el sistema de cuatro tanques interconectados, se ilustra el comportamiento de las variables del proceso cuando se produce una reducción del área del orificio de descarga del tanque 1 ( $a_1$ ) debido a una obstrucción. En la Figura 6.20 se observan el nivel en los tanques y el caudal de las bombas ante una reducción del área del orificio de descarga  $a_1$  del 5% y el 18%. Se observa como el MPC supera la primera perturbación, pero al producirse la segunda reducción de área para el tiempo  $t = 1000$  s no es capaz rechazar la perturbación, por lo que presenta un comportamiento inestable. El SMPC en cambio mantiene la referencia de nivel de ambos tanques ante las perturbaciones, presentando un buen comportamiento en las variables controladas, la superficie de deslizamiento al producirse un error entre la referencia y la variable controlada cambia su valor, pero las acciones del controlador hacen que alcance nuevamente el valor  $s(t) = 0$ .

Se realizó otra prueba a los controladores ante perturbaciones produciendo un cambio en la válvula de tres vías que es la encargada de dividir el flujo que envía la bomba hacia el tanque 1 y el tanque 4. Para lo cual se modificó la apertura de la válvula

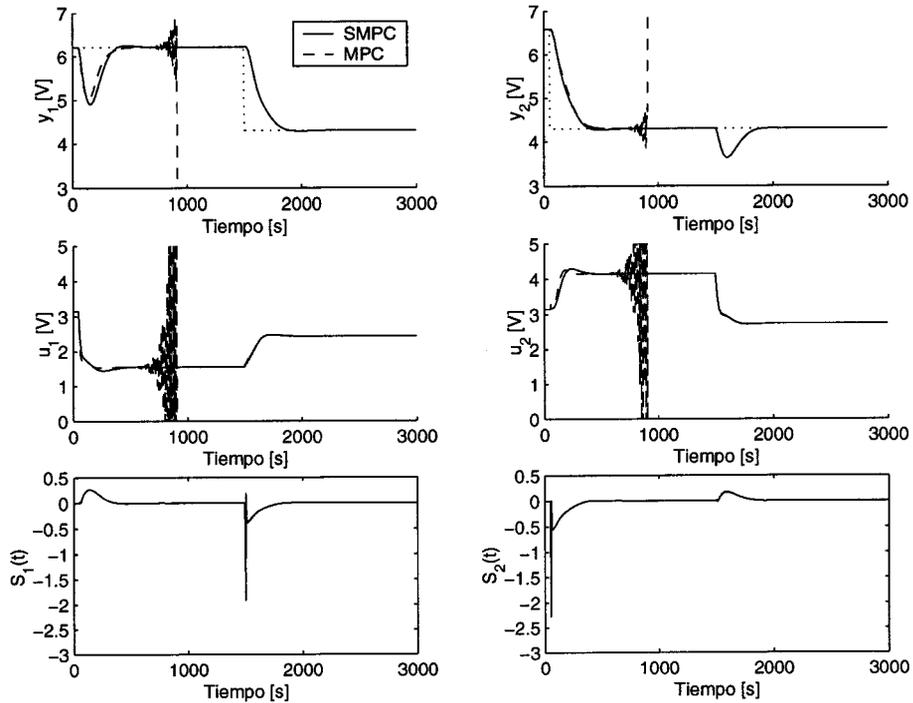


Figura 6.19: Variables del sistemas un cambio de referencia a 4 [V]

aumentándola en un 5% y un 11% esta produce un aumento del caudal hacia el tanque 1 y una disminución de caudal hacia el tanque 4, y por ende un disminución en el flujo del tanque 4 al tanque 2, lo que produce un descenso del nivel de este último. Las variables del proceso se muestran en la Figura 6.21, se puede observar como el primer cambio de flujo es controlado por el MPC con un tiempo de asentamiento similar al SMPC. Para el tiempo  $t = 1000s$  una nueva perturbación es producida en este caso el MPC no es lo suficientemente robusto para soportarla, con lo que presenta un comportamiento inestable. El SMPC controla ambas perturbaciones en el sistema producidas por los cambios en la válvula de 3 vías, manteniendo los niveles de los tanques en sus respectivos valores de referencia. El comportamiento algo oscilatorio en las superficies deslizantes se refleja en las acciones de control, pero finalmente logran las superficies de deslizamiento alcanzar el valor  $s(t) = 0$ .

Las pruebas llevadas a cabo en el sistema de cuatro tanques interconectados muestran como el SMPC presenta una mayor robustez que el MPC, ante cambios producidos por las no linealidades del sistema, al alejarse del punto de operación nominal donde la linealización del modelo del proceso ha sido realizada. En las pruebas de robustez de los controladores ante perturbaciones producidas por cambios en las condiciones de operación, debidas a una modificación de una de las válvulas y cambios en la estructura del modelo, el SMPC presentó un comportamiento mas robusto que el MPC. Una

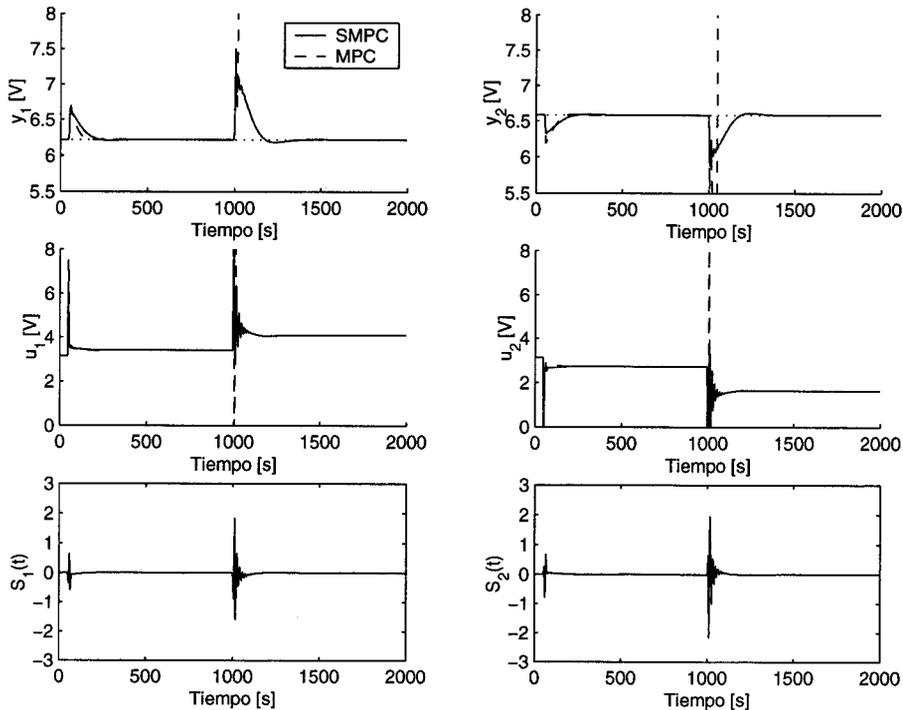
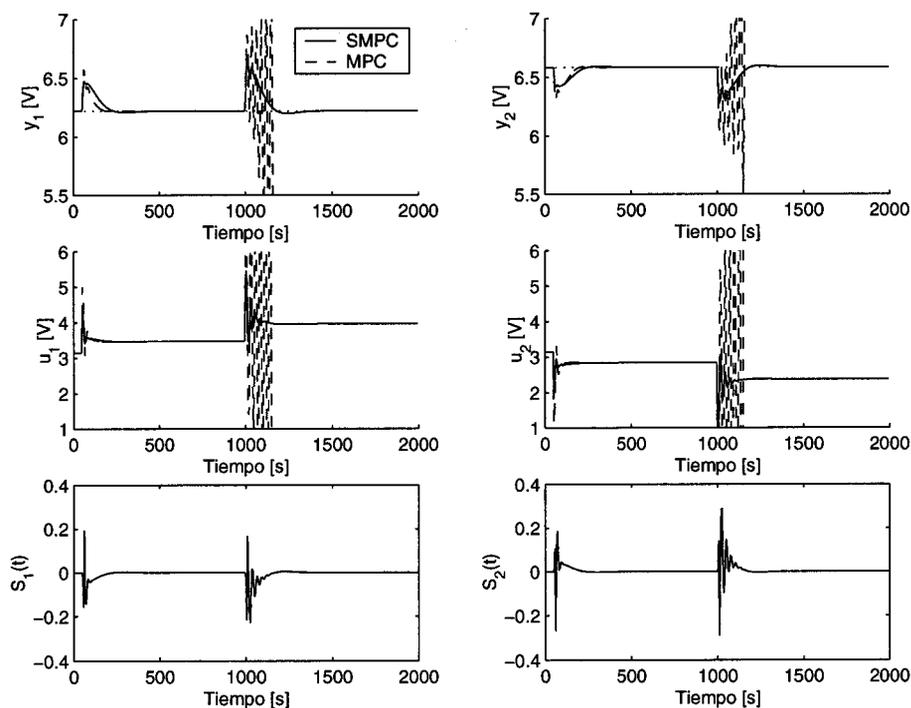


Figura 6.20: Variables del sistemas ante una perturbación en un orificio de descarga

mejor robustez del MPC puede ser lograda aumentando el valor de la penalización del esfuerzo de control, sin embargo esto produciría como se ha visto en las superficies donde se ilustran los cambios de los parámetros de ajuste en función de la SVAE, un comportamiento más lento en las variables controladas. En los ensayos realizados se observa que ajustando el SMPC de manera que ante un cambio de referencia del tipo escalón entorno al punto de operación, tenga el mismo comportamiento que el MPC, el SMPC es mas robusto.

## 6.4 Control predictivo por modos deslizantes con restricciones

Una de las ventajas del control predictivo por modos deslizantes es que al igual que los controlador predictivo basado en modelo permite incorporar restricciones en las variables manipuladas y controladas del sistema . Esta es una característica interesante desde el punto de vista industrial puesto que en la práctica todos los procesos están sujetos a restricciones. Los actuadores tienen rango limitado de acción, una pendiente



**Figura 6.21:** Variables del sistemas ante una perturbación en una de las válvulas de 3 vías

de cambio limitada, de la misma manera las variables controladas que por razones constructivas, de seguridad, o determinados rangos de operación de los sensores producen límites en el rango de operación de la variable controlada. En el caso del sistema de los cuatro tanques existen limitaciones en la variable manipulada dadas por el caudal máximo y mínimo que pueden manejar las bombas y limitaciones en el nivel de los tanques para evitar desbordamiento de los mismos.

Para el desarrollo del control predictivo por modos deslizantes con restricciones se empleó la función objetivo (6.75) obtenida para el SMPC del caso multivariable,

$$J = [(-P_s G + Q_s)u + P_s(w - f_s)]^T [(-P_s G + Q_s)u + P_s(w - f_s)] + \lambda u^T u \quad (6.81)$$

donde,

$$f_s = f - P_s^{-1} P_s^* e(t-1) + P_s^{-1} Q_s^* u(t-1)$$

puede ser reescrita como,

$$J = \frac{1}{2} u^T H u + b^T u + f_0 \quad (6.82)$$

Donde,

$$H = (-P_s G + Q_s)^T (-P_s G + Q_s) + \lambda I$$

$$b = (-P_s G + Q_s)^T P_s (f_s - w)$$

$$f_0 = (-P_s (w - f_s))^T (-P_s (w - f_s))$$

Sujeto a las siguientes restricciones,

$$\begin{aligned} u_{min} &\leq u(t) \leq u_{max} \\ \Delta u_{neg} &\leq u(t) - u(t-1) \leq \Delta u_{pos} \\ y_{min} &\leq y(t) \leq y_{max} \end{aligned} \tag{6.83}$$

Que en forma matricial pueden ser expresadas como,

$$\begin{aligned} \mathbf{1}u_{min} &\leq \mathbf{T}\Delta\mathbf{u}_C + \mathbf{1}\Delta u_D(t) + \mathbf{1}u(t-1) \leq \mathbf{1}u_{max} \\ \mathbf{1}\Delta u_{neg} &\leq \Delta\mathbf{u}_C + \mathbf{1}\Delta u_D(t) \leq \mathbf{1}\Delta u_{pos} \\ \mathbf{1}y_{min} &\leq \mathbf{G}\Delta\mathbf{u}_C + \mathbf{G}\Delta\mathbf{u}_D + f \leq \mathbf{1}y_{max} \end{aligned} \tag{6.84}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ -\mathbf{T} \\ \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \\ \mathbf{G} \\ -\mathbf{G} \end{bmatrix} \Delta\mathbf{u}_C \leq \begin{bmatrix} \mathbf{1}u_{max} - \mathbf{1}\Delta u_D(t) - \mathbf{1}u(t-1) \\ -\mathbf{1}u_{min} + \mathbf{1}\Delta u_D(t) + \mathbf{1}u(t-1) \\ \mathbf{1}\Delta u_{pos} - \mathbf{1}\Delta u_D(t) \\ -\mathbf{1}\Delta u_{neg} + \mathbf{1}\Delta u_D(t) \\ \mathbf{1}y_{max} - \mathbf{G}\Delta\mathbf{u}_D - f \\ -\mathbf{1}y_{min} + \mathbf{G}\Delta\mathbf{u}_D + f \end{bmatrix} \tag{6.85}$$

la parte discontinua del controlador viene dada por,

$$\Delta\mathbf{u}_D = [\Delta u_D(t), \Delta u_D(t+1), \dots, \Delta u_D(t+N_2-1)]^T \tag{6.86}$$

$$\Delta\mathbf{u}_D = \left[ \frac{K_D \hat{S}(t)}{|\hat{S}(t)| + \rho}, \frac{K_D \hat{S}(t+1)}{|\hat{S}(t+1)| + \rho}, \dots, \frac{K_D \hat{S}(t+N_u-1)}{|\hat{S}(t+N_u-1)| + \rho} \right]^T \tag{6.87}$$

finalmente, la señal de control es de la forma,

$$\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u}_C + \Delta\mathbf{u}_D \tag{6.88}$$

En la Figura 6.22 se ilustra las ventajas de la incorporación de restricciones en el control predictivo por modos deslizantes, los resultados se contrastan con la implementación sin restricciones. En el ejemplo se han establecido como restricciones el nivel máximo de los tanques en 10 V para evitar el desbordamiento, en los elementos finales de control se establecieron las restricciones entre el caudal máximo que producen las bombas para una tensión de 5 V, y el caudal mínimo que es necesario mantener en 2 V. En la figura se ilustra como cuando el SMPC no incorpora restricciones [---] se producen violaciones

en el nivel máximo en los tanque 1 y 2, así como en los valores máximos y mínimos de las señales de control. El incorporar restricciones [-] en el algoritmo de control permite realizar el cambio de referencia deseado sin sobrepasar los máximos establecidos, esta característica hace posible hacer trabajar el proceso mas cerca de los límites máximos con una mayor garantía de no sobrepasar las restricciones, permitiendo sacar un mayor rendimiento al sistema. En los procesos donde la referencia sea conocida de antemano, es posible incorporarla en el algoritmo, lo que mejora el desempeño del sistema como se puede observar en la figura 6.22 en la señal distinguida con [- -]. El uso de restricciones es una característica frecuente en los MPC, pero en el contexto de control por modos deslizantes constituye una característica novedosa. En la tabla 6.11 se presentan los índices de desempeño para un cambio de referencia a 9 V en el control predictivo por modos deslizantes con el algoritmo sin restricciones, con restricciones y con restricciones y referencia conocida. Al comparar el índice tomando en como referencia el SMPC con restricciones se encuentra que al no incluirlas en el algoritmo de control se produce un aumento de 145% para  $y_1$  y 120% para  $y_2$  y un incremento en el índice de la señal de control de 367% para  $u_1$  y 300% para  $u_2$ , al incluir adicionalmente a las restricciones la referencia conocida se logra reducir respecto al SMPC con restricciones la SVAE un 53% para  $y_1$  y 66% para  $y_2$  manteniendo los valores del índice de la señal de control en valores similares.

**Tabla 6.11: Valores de los índices de desempeño para el SMPC con el cambio de referencia a 9 V**

	<i>SMPCsinRest.</i>	<i>SMPCconRest.</i>	<i>SMPCsinRest.yRef</i>
$y_1$	862, 2	593, 5	278, 21
$y_2$	639, 01	542, 6	179, 14
$u_1$	333, 5	90, 9	97, 18
$u_2$	305, 5	101, 5	89, 73

## 6.5 Resumen

El algoritmo de control predictivo por modos deslizantes propuesto combina las técnicas de diseño del controlador predictivo basado en modelo con el control por modos deslizantes, lo que produce como resultado un controlador con los puntos fuertes ambas técnicas de control evitando sus principales desventajas. El control predictivo por modos deslizantes tiene la robustez del control por modos deslizantes evitando los movimientos

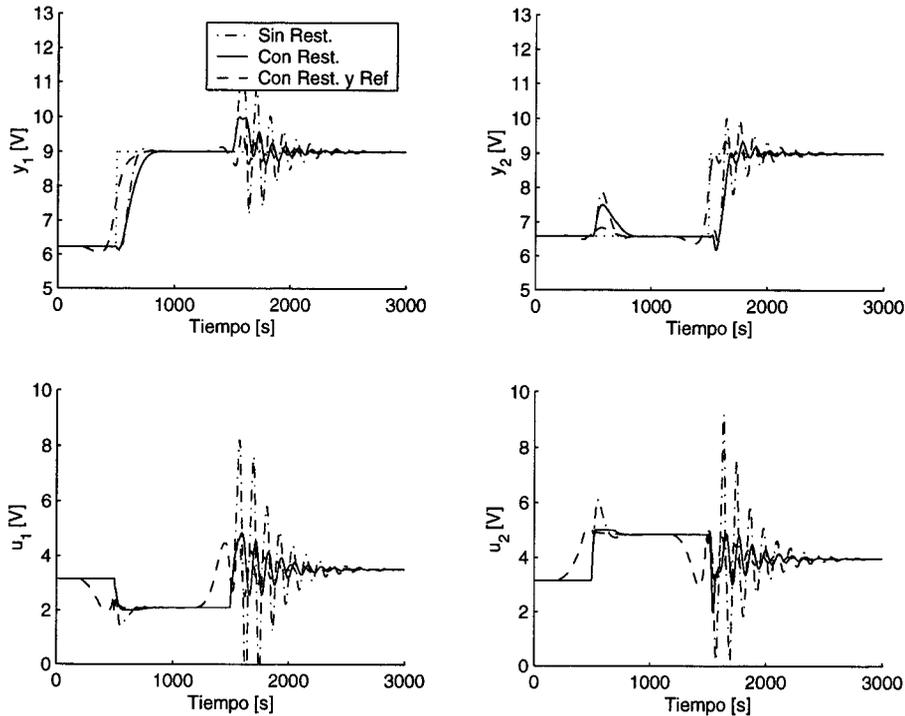


Figura 6.22: Restricciones

bruscos en el elemento final de control que este presenta en este tipo de controladores, además presenta un considerable incremento en cuanto a la robustez ante las no linealidades del proceso, cambios en el proceso, y rechazo de perturbaciones respecto al control predictivo, pero manteniendo de éste las características de un controlador predictivo en cuanto a el buen desempeño, las capacidades de tomar en cuenta las referencias futuras en el calculo de la señal de control, incluir restricciones en las variables del sistema etc. El control predictivo por modos deslizantes en las mismas circunstancias en las que el controlador predictivo basado en modelo presenta problemas de inestabilidad al ser aplicado a sistemas de fase no mínima por la cancelación de los ceros SD con polos SD, evita este problema debido a los grados de libertad adicionales que producen la inclusión de los parámetros de diseño de la superficie de deslizante. Los parámetros de ajuste del control predictivo por modos deslizantes tienen un significado claro, lo que facilita la tarea de sintonización del controlador. Los requerimientos computacionales del controlador predictivo basado en modelo son similares a los de un controlador predictivo basado en modelo lineal por lo cual no requiere para su implementación una plataforma computacional mas potente, pudiendo ser aplicado en cualquier sistema donde se encuentre implementado un controlador predictivo basado en modelo .

Al comparar con el MPC, el efecto del horizonte de predicción, horizonte de control, y la penalización del esfuerzo de control del SMPC, observando la tendencia del com-

portamiento de las superficies del índice SVAE, se encuentra que el SMPC presenta un comportamiento similar al MPC, con lo que al momento de su implementación, el ingeniero de control acostumbrado a la utilizar controladores del tipo MPC, no encontrará un comportamiento extraño, pudiendo realizar el mismo ajuste intuitivo característico de los MPC.

Las superficies de deslizamiento han sido seleccionadas como sistemas de primer orden, puesto que es la dinámica mas sencilla y encontrándose para el SMPC un buen comportamiento en lazo cerrado al ser aplicado a sistemas de fase no mínima. En el caso multivariable las superficies han sido seleccionadas con dinámicas de primer orden y desacopladas.

El comportamiento del SMPC en su versión monovariable ha sido aplicado a un brazo manipulador (García-Gabín y Camacho, 2000) y a sistemas monovariabes de fase no mínima (García-Gabín y Camacho, 2001), presentando mejores resultados que el MPC.

# Capítulo 7

## Conclusiones

---

En esta tesis se ha abordado el estudio del problema de la aplicación de controladores predictivos multivariables basados en modelo a sistemas con ceros de transmisión en el semiplano derecho. A pesar de que el interés está centrado principalmente en los sistemas multivariables, los resultados obtenidos han podido ser particularizados para sistemas monovariables, donde también se han presentado aportes específicos.

Como resultados originales de esta tesis cabe destacar:

- Se ha demostrado bajo que condiciones en los parámetros de ajuste del MPC se produce un comportamiento inestable en lazo cerrado, debido a la cancelación del cero SD del modelo del proceso con un polo SD en el controlador. Encontrándose que siempre que los horizontes de predicción y control sean iguales y la ponderación del esfuerzo de control sea cero, el controlador predictivo multivariable realiza una cancelación perfecta de los ceros de transmisión SD del modelo del proceso. Estos resultados demuestran, que el problema de inestabilidad al aplicar el controlador predictivo no solamente se presenta para sistemas monovariables de fase no mínima, cuando el horizonte de predicción y el horizonte de control valen uno y la ponderación del esfuerzo de control es cero como se muestra en la literatura, ha quedado demostrado que el problema se amplía a un mayor grupo de parámetros de ajuste y además se extiende de igual forma a los sistemas multivariables caso particular para el cual la literatura revisada no se hace referencia

al problema.

- Un procedimiento de como ajustar los controladores predictivos cuando se aplican a sistemas multivariables o monovariables con ceros SD ha sido propuesto. Se ha mostrado que con la utilización de los parámetros presentados se mejora considerablemente el comportamiento de los controladores predictivos al ser aplicados a sistemas con ceros SD, en comparación con la solución propuesta en la literatura. Dicha solución se basa en la utilización de la penalización del esfuerzo de control para lograr la estabilización del sistema en lazo cerrado, que efectivamente logra una respuesta estable, pero a costa de degradar el comportamiento en lazo cerrado del sistema debido a una respuesta muy lenta. Con la manera de ajustar los parámetros propuesta, utilizando un horizonte de predicción lo suficientemente largo como para observar la dinámica del sistema incluyendo la del cero SD, con una adecuada diferencia entre el horizonte de predicción y el de control el problema de cancelación del cero SD se logra evitar, lo que permite la utilización de una penalización del esfuerzo de control mas pequeña, logrando reducir el tiempo de asentamiento del sistema. Se mostraron como el procedimiento de sintonización propuesto para ajustar el controlador predictivo pueden ser utilizados tanto en sistemas con un cero de transmisión SD, así como en sistemas con varios ceros de transmisión SD. Permite mejorar el comportamiento del controlador predictivo tan en sistemas monovariables como multivariables, empleando modelos de predicción del tipo funciones de transferencia o respuesta impulsional truncada.
- Se ha analizado el comportamiento del MPC en lazo cerrado utilizando como modelo de predicción un modelo con sin ceros SD. La técnica de utilización de un modelo sin ceros SD en la síntesis del controlador es utilizada en estrategias de control que requieren de manera explícita la inversa de la planta. Sin embargo en el ámbito del control predictivo no se emplean procedimientos para la eliminación de la dinámica de los ceros SD del modelo de predicción. En base a los resultados encontrados el mejor modelo para realizar la predicción en el MPC no es necesariamente el modelo que refleje de forma mas exacta la dinámica del sistema cuando se aplica a sistemas con ceros SD. Para el caso monovariante se ha mostrado que al utilizar factorizaciones que eliminen el cero SD en el modelo de predicción, se logran mejores comportamientos en lazo cerrado que los obtenidos utilizando el modelo con cero SD, dichas mejoras se han observado no solamente en un menor tiempo de asentamiento, sino que se ha mostrado también, en una mayor robustez del MPC en lazo cerrado ante las no linealidades producidas por cambios en el punto de operación, cambios en el modelo del proceso y perturbaciones. Los resultados obtenidos para el caso monovariante no se han logrado extender al caso multivariante con los modelos de aproximación estudiados. Entre los modelos lineales de aproximación al proceso no lineal, se estudiaron modelos calculados

por medio de factorizaciones y modelos obtenidos por medio de la aproximación de la dinámica del sistema no lineal a un modelo de primer orden con retardo. Los modelos obtenidos por medio de factorizaciones del modelo linealizado con ceros SD, mostraron un mejor comportamiento al ser empleados como modelos de predicción en el MPC en lazo cerrado, en comparación con el modelo aproximado como una función de transferencia de primer orden con retardo.

- Se ha desarrollado un nuevo algoritmo de control predictivo, el control predictivo por modos deslizantes propuesto combina las técnicas de diseño del controlador predictivo basado en modelo con el control por modos deslizantes, lo que produce como resultado un controlador con los puntos fuertes de ambas técnicas de control evitando sus principales desventajas. Para el desarrollo del SMPC se ha propuesto una nueva superficie de deslizamiento predictiva, tiene como aporte que emplea la secuencia de futuras acciones de control para el cálculo de la superficie y además toma en consideración el retardo del sistema. Se ha mostrado como el control predictivo por modos deslizantes presenta un considerable incremento en cuanto a la robustez ante las no linealidades del proceso, cambios en el proceso, rechazo de perturbaciones, respecto al control predictivo, pero manteniendo de éste las características en cuanto a el buen desempeño. El SMPC permite tomar en cuenta las referencias futuras en el cálculo de la señal de control e incluir restricciones en las variables del sistema para el cálculo de los futuros valores de la señal de control, característica que en el ámbito del control por modos deslizantes constituye un aporte novedoso. Se ha demostrado como el SMPC en las mismas circunstancias en las que el MPC presenta problemas de inestabilidad al ser aplicado a sistemas con ceros SD evita este problema. Debido a los grados de libertad adicionales que producen la inclusión de los parámetros de diseño de la superficie de deslizante. Los parámetros de ajuste del control predictivo por modos deslizantes tienen un significado claro, lo que facilita la tarea de sintonización del controlador. Los requerimientos computacionales del SMPC son similares a los de un MPC por lo cual no requiere para su implementación una plataforma computacional mas potente, pudiendo ser aplicado en cualquier sistema donde se encuentre implementado un control predictivo.

### **Futuras líneas de investigación**

Tomando como base los resultados que se han obtenido se proponen continuar el estudio del problema de aplicación de controladores predictivos a sistemas con ceros SD con las siguientes ideas.

- Desarrollar nuevas formas de factorizar los modelos multivariantes con ceros de transmisión SD de manera que se pueda obtener un nuevo modelo que elimine la dinámica del cero de transmisión SD, pero que permita al MPC un mejor comportamiento en lazo cerrado, que el obtenido con el modelo con cero SD, y de esta forma lograr extender los resultados que se han mostrado para el caso monovariante. Se presume que estas nuevas factorizaciones se deben desarrollar de forma tal que trasladen el deterioro del modelo al eliminar la dinámica del cero de transmisión SD a todas las salidas, con lo que se evita la excesiva degradación del modelo para una sola salida cuando se realiza una factorización con  $n - 1$  salidas óptimas.
- Analizar con profundidad como la incorporación de penalización en los estados pueden influir en el comportamiento en lazo cerrado del MPC desarrollado en espacio de estados al aplicarlo en sistemas con ceros SD.
- Estudiar el comportamiento del control predictivo por modos deslizantes propuesto al aplicarlos a sistemas con retardo. Pruebas preliminares han mostrado que la incorporación en la superficie de deslizamiento del retardo permite al SMPC presentar un comportamiento más robusto que el MPC y el SMC al controlar sistemas con retardo, un completo estudio debe realizarse en este sentido como extensión a los resultados de robustez que se han obtenido.
- Realizar comparaciones entre comportamiento en lazo cerrado del SMPC y el MPC, para otros tipos de sistemas, tal es el caso de sistemas de fase mínima, integradores, inestables en lazo abierto, que permitan establecer si los mejores resultados de robustez obtenidos para el SMPC sobre el MPC, pueden ser extendidos a otros tipos de sistemas.
- Analizar la incorporación de modelos no lineales para realizar la predicción en el SMPC.
- Estudiar otros tipos de dinámicas diferentes a los sistemas de primer orden para la superficie de deslizamiento y determinar como influyen en el comportamiento del SMPC. Para el caso multivariante analizar la utilización de dinámicas acopladas, donde la superficie de cada salida dependa del error y las señales de control de todas las entradas.
- Estudiar el efecto de la dinámica de bloqueo de la salida que se produce en sistemas no lineales, en los controladores predictivos no lineales.
- Estudiar el comportamiento de los controladores predictivos para sistemas con ceros SD cuando tienen diferente número de entradas y salidas, es decir sistemas que no son cuadrados, que tienen el mismo número de entradas y salidas, en

donde se presentan otros tipos de ceros, que producen el efecto de bloquear la dinámica a la salida.

# Apéndice A

## Modelos no lineales

---

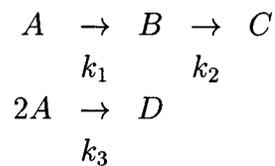
En este apéndice se presenta una descripción detallada de los modelos no lineales utilizados en la tesis para realizar las simulaciones que ilustran el desempeño de los controladores analizados. Se presentan las ecuaciones diferenciales, basadas en las leyes físicas y químicas, que rigen el comportamiento de los procesos utilizados. Los parámetros utilizados así como las condiciones iniciales empleadas. Se presentan las linealizaciones sobre el punto de operación sobre el cual se realizaron las simulaciones.

### A.1 Reactor isotérmico Van de vusse

Los reactores químicos constituyen unas de las operaciones unitarias más importantes en las plantas químicas. En los reactores químicos es posible tomar una serie de consideraciones en el momento de realizar el modelado. Una de las idealizaciones utilizadas con más frecuencia es la del reactor con tanque de agitación continua, siglas en inglés CSTR de « Continuous Stirred Tank Reactor ». Este modelo es frecuentemente utilizado para el estudio de la dinámica del sistema de control, porque permite un modelado de parámetros concentrados. El sistema de reacción estudiado es el propuesto por Van de vusse (de Vusse, 1964). Un estudio más detallado de reactores que utilizan el esquema de reacción Van de vusse puede ser vistos en (Engell y Klatt, 1993; Bequette, 1998). Para el modelado del sistema se consideraron las siguientes asunciones:

- El reactor opera a temperatura constante (isotérmico), por lo cual no se considera el balance de energía para el modelado.
- Las velocidades de reacción son constantes.
- El volumen en el tanque es constante.
- El flujo de entrada solo contiene el componente A
- La densidad es constante

En el reactor van de vusse se producen las siguientes reacciones en serie y paralelo,



Donde,

- A = Ciclopentadieno
- B = Ciclopentenol
- C = Ciclopentanediol
- D = Diciclopentadieno

Balance del Componente A,

$$\frac{d(C_a)}{dt} = -k_1 C_a - k_3 C_a^2 + (C_{ae} - C_a) \frac{F}{V} \quad (\text{A.1})$$

Balance del Componente B,

$$\frac{d(C_b)}{dt} = k_1 C_a - k_2 C_b - C_b \frac{F}{V} \quad (\text{A.2})$$

Balance del Componente C,

$$\frac{d(C_c)}{dt} = k_2 C_b - C_c \frac{F}{V} \quad (\text{A.3})$$

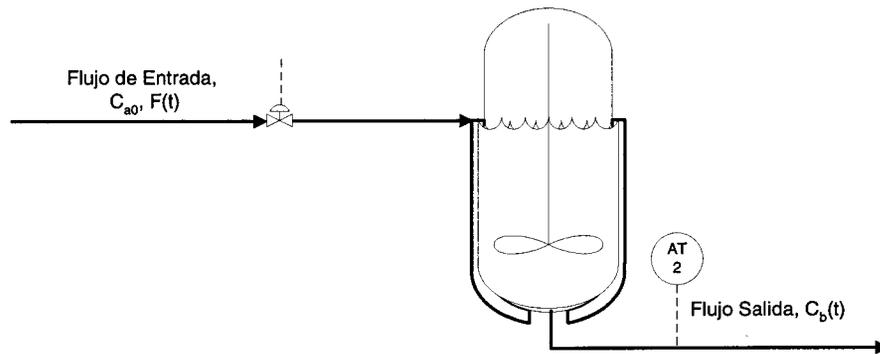
Balance del Componente D,

$$\frac{d(C_d)}{dt} = \frac{1}{2} k_3 C_a^2 - C_d \frac{F}{V} \quad (\text{A.4})$$

Donde

- $C_a$  Es la concentración del componente A  $\left[ \frac{mol}{l} \right]$
- $C_b$  Es la concentración del componente B  $\left[ \frac{mol}{l} \right]$
- $C_c$  Es la concentración del componente C  $\left[ \frac{mol}{l} \right]$
- $C_d$  Es la concentración del componente D  $\left[ \frac{mol}{l} \right]$
- $C_{a0}$  Es la concentración del componente A  $\left[ \frac{mol}{l} \right]$  en el flujo de entrada
- $F$  Es el flujo de entrada  $\left[ \frac{l}{min} \right]$
- $V$  Es el volumen del tanque  $[l]$

El diagrama del procesos es mostrado en la Figura A.1. La variable controlada es la concentración del componente  $B$  y la variable manipulada es el flujo de entrada al reactor  $F$ . Se puede observar en las ecuaciones del modelo que para el análisis de la concentración del componente  $B$  no influyen los componentes  $C$  y  $D$  por lo que las ecuaciones (A.3) y (A.4) es posible descartarlas y utilizar solamente las ecuaciones (A.1) y (A.2) para estudiar la concentración del componente  $B$ . Los valores de los



**Figura A.1: Diagrama esquemático del reactor**

parámetros del proceso (Bequette, 1998) se muestran en la Tabla A.1. Las condiciones

**Tabla A.1: Valores de los parámetros del reactor**

$k_1$	$[min^{-1}]$	5/6
$k_2$	$[min^{-1}]$	5/3
$k_3$	$\left[ \frac{mol}{l min} \right]$	1/6
$C_{ae}$	$\left[ \frac{mol}{l} \right]$	10
$V$	$[l]$	7

iniciales en el punto de operación se muestran en la Tabla A.2. El modelo linealizado en espacios de estado obtenido a partir del modelo no lineal es posible representarlo

Tabla A.2: Valores de las condiciones iniciales en el punto de operación del reactor

$F^0$	[l]	4
$C_b^0$	$\left[\frac{\text{mol}}{\text{l}}\right]$	105/94
$C_a^0$	$\left[\frac{\text{mol}}{\text{l}}\right]$	3

por,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}x \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Donde,

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} C_a - C_{a_{ee}} \\ C_b - C_{b_{ee}} \end{bmatrix} \\ u &= [F - F_{ee}] \\ y &= \begin{bmatrix} C_a - C_{a_{ee}} \\ C_b - C_{b_{ee}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{F_{ee}}{V} - k_1 - 2k_3C_{a_{ee}} & 0 \\ k_1 & -\frac{F_{ee}}{V} - k_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -C_{a0_{ee}} - C_{a_{ee}} \\ -C_{b_{ee}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [0 \ 1]$$

Con los valores de las condiciones iniciales de la Tabla A.2 se obtienen los siguientes valores de las matrices para el modelo en espacios de estado,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -2.4048 & 0 \\ 0.8333 & -2.2381 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 7.000 \\ -1.1170 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= [0 \ 1] \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

y la función de transferencia entre el flujo de entrada y la concentración del componente B a la salida viene dada por,

$$G(s) = \frac{-1.1170s + 3.1472}{s^2 + 4.6429s + 5.3821} \quad (\text{A.9})$$

Realizando la discretización del sistema con un tiempo de discretización de  $T_s = 0.2$  se obtiene,

$$y(t) = \frac{-0.0939 + 0.1745z^{-1}}{1 - 1.2573z^{-1} + 0.3951z^{-2}} \Delta u(t - 1) \tag{A.10}$$

En la Tabla A.3 se muestran los polos y ceros del modelo linealizado del reactor.

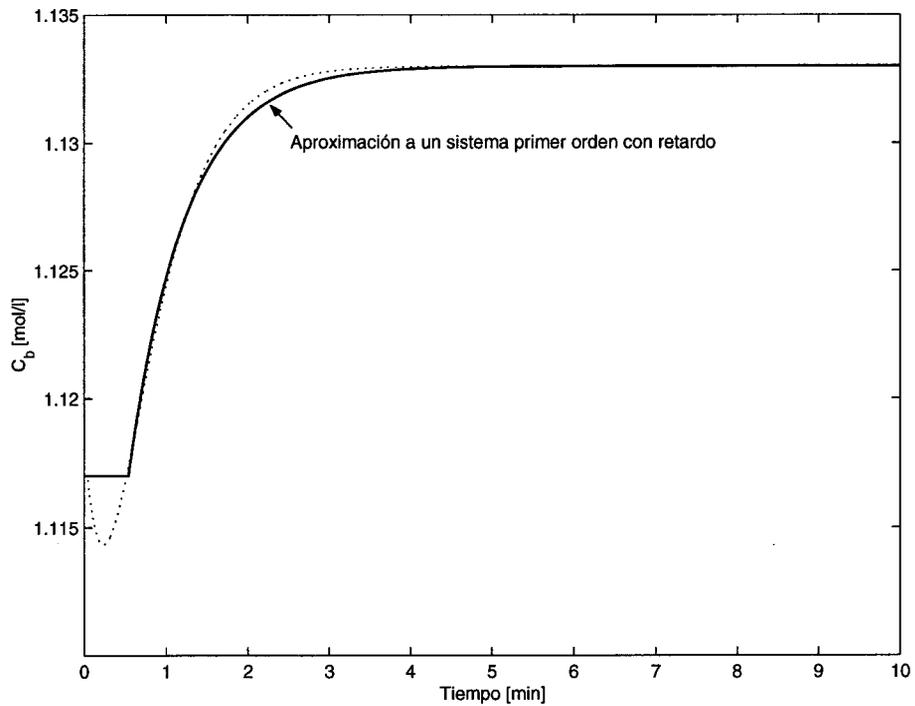
La Figura A.2 muestra la aproximación de la respuesta del reactor a una entrada

**Tabla A.3: Polos y ceros del reactor**

<i>Polos(s)</i>	-2.4048, -2.2381
<i>Polos(z)</i>	0.6182, 0.6391
<i>Cero(s)</i>	2.8175
<i>Cero(z)</i>	1.8574

escalón por medio de un sistema de primer orden con retardo, este método es utilizado en (Smith y Corripio, 1991). El modelo obtenido con este método de aproximación es el siguiente,

$$G(s) = \frac{0.56}{0.7s + 1} e^{-0.5s} \tag{A.11}$$



**Figura A.2: Aproximación del proceso a un modelo de primer orden con retardo**

## A.2 Sistema de cuatro tanques interconectados

El proceso esta constituido por un sistema de cuatro tanques interconectados (Johansson, 2000), y es utilizado para comprobar el desempeño del controlador. El objetivo de control es el nivel en los dos tanques inferiores y los elementos finales de control son las dos bombas, que impulsan el fluido desde un deposito general a cada uno de los tanques interconectados. Las señales de entrada son la tensión en las bombas  $v_1$  y  $v_2$  y la salida del procesos son  $y_1$  y  $y_2$ . El modelo no lineal esta basado en leyes por medio de balances de masa y la ley de Bernoulli,

$$\begin{aligned}
 \frac{dh_1}{dt} &= -\frac{a_1}{A_1}\sqrt{2gh_1} + \frac{a_3}{A_1}\sqrt{2gh_3} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1}v_1 \\
 \frac{dh_2}{dt} &= -\frac{a_2}{A_2}\sqrt{2gh_2} + \frac{a_4}{A_2}\sqrt{2gh_4} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2}v_2 \\
 \frac{dh_3}{dt} &= -\frac{a_3}{A_3}\sqrt{2gh_3} + \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3}v_2 \\
 \frac{dh_4}{dt} &= -\frac{a_4}{A_4}\sqrt{2gh_4} + \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4}v_1
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Donde

- $A_i$  Es el área de la sección del tanque
- $a_i$  Es el área de la sección del orificio de descarga
- $h_i$  Es el nivel del fluido
- $g$  Es la aceleración de gravedad

Un diagrama esquemático del procesos es mostrado en la Figura A.2. La señal de control son los voltajes ( $v_i$ ) aplicados a la bomba  $i$  y los flujos correspondientes son  $k_i v_i$ . Los parámetros  $\gamma_1, \gamma_2 \in (0, 1)$  indican la relación de flujo en la válvula de tres vías. El flujo hacia el tanque 1 es  $\gamma_1 k_1 v_1$  y el flujo hacia el tanque 4 es  $(1-\gamma_1)k_1 v_1$  de manera similar para el tanque 2 y el 3. Los niveles medidos  $y_1$  y  $y_2$  son  $k_c h_1$  y  $k_c h_2$ . Los parámetros del modelo del proceso son presentados en la tabla A.4.

El proceso no lineal es estudiado en dos puntos de operación :  $P_-$  en el cual es sistema presenta los ceros de transmisión en el semiplano izquierdo y en el punto de operación  $P_+$  en el cual el sistema presenta los ceros de transmisión en el semiplano derecho. Las condiciones iniciales para cada uno de los puntos de operación seleccionados son mostradas en la tabla A.5. Introduciendo las variables  $x_i = h_i - h_i^0$  y  $u_i = v_i - v_i^0$ , las ecuaciones que representan el modelo linealizado en variables de estado son,

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \\
 y &= \mathbf{C}x
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

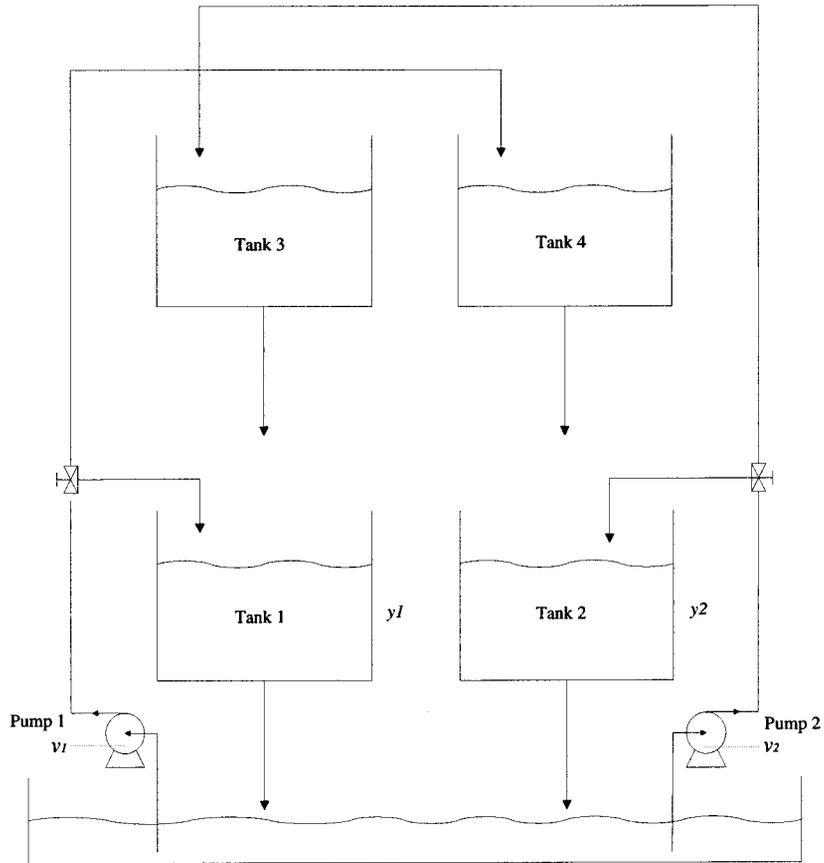


Figura A.3: Diagrama esquemático del proceso de cuatro tanques

Donde,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & \frac{A_3}{A_1 T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & \frac{A_4}{A_2 T_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_4} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1 - \gamma_2) k_2}{A_3} \\ \frac{(1 - \gamma_1) k_1}{A_4} & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

**Tabla A.4: Valores de los parámetros del sistema de cuatro tanques interconectados**

$A_1, A_2$	$[cm^2]$	28.000
$A_2, A_4$	$[cm^2]$	32.000
$a_1, a_3$	$[cm^2]$	0.071
$a_2, a_4$	$[cm^2]$	0.057
$k_c$	$\left[\frac{V}{cm}\right]$	0.500
$g$	$\left[\frac{cm}{s^2}\right]$	981.000

**Tabla A.5: Condiciones iniciales de los puntos de operación del sistema de cuatro tanques interconectados**

	$P_-$	$P_+$	
$h_1^0, h_2^0$	$[cm]$	(12.4, 12.7)	(12.44, 13.17)
$h_3^0, h_4^0$	$[cm]$	(1.8, 1.4)	(4.73, 4.98)
$v_1^0, v_2^0$	$[V]$	(3.00, 3.00)	(3.15, 3.15)
$k_1, k_2$	$\left[\frac{cm^3}{Vs}\right]$	(3.33, 3.35)	(3.14, 3.29)
$\gamma_1, \gamma_2$		(0.70, 0.60)	(0.43, 0.34)

Donde las constantes de tiempo son,

$$T_i = \frac{A_i}{a_i} \sqrt{\frac{2h_i^0}{g}}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (\text{A.15})$$

La matriz de función de transferencia correspondiente es,

$$G_-(s) = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 c_1}{T_1 s + 1} & \frac{(1 - \gamma_2) c_1}{(T_3 s + 1)(T_1 s + 1)} \\ \frac{(1 - \gamma_1) c_2}{(T_4 s + 1)(T_2 s + 1)} & \frac{\gamma_2 c_2}{T_2 s + 1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Donde  $c_1 = T_1 k_1 k_c / A_1$  y  $c_2 = T_2 k_2 k_c / A_2$ .

Para los puntos de operación  $P_-$  y  $P_+$ , las matrices de transferencia correspondientes a cada uno de estos puntos de operación están dadas por,

$$G_-(s) = \begin{bmatrix} \frac{2.6}{62s + 1} & \frac{1.5}{(23s + 1)(62s + 1)} \\ \frac{1.4}{(30s + 1)(90s + 1)} & \frac{2.8}{90s + 1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

y

$$G_+(s) = \begin{bmatrix} \frac{1.5}{63s + 1} & \frac{2.5}{(39s + 1)(63s + 1)} \\ \frac{2.5}{(56s + 1)(91s + 1)} & \frac{1.6}{91s + 1} \end{bmatrix} \quad (A.18)$$

Puede observarse que las constantes de tiempo dominantes son similares para ambos puntos de operación. Realizando la discretización del modelo con un tiempo de muestreo  $T_s = 2$ , (A.19) y (A.20), se obtiene,

$$G_-(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{0.08253z^{-1}}{1 - 0.9683z^{-1}} & \frac{0.002022z^{-1} + 0.001943z^{-2}}{1 - 1.885z^{-1} + 0.8876z^{-2}} \\ \frac{0.001007z^{-1} + 0.0009775z^{-2}}{1 - 1.914z^{-1} + 0.9149z^{-2}} & \frac{0.06154z^{-1}}{1 - 0.9780z^{-1}} \end{bmatrix} \quad (A.19)$$

y

$$G_+(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{0.04687z^{-1}}{1 - 0.9688z^{-1}} & \frac{1.98e^{-3}z^{-1} + 1.926e^{-3}z^{-2}}{1 - 1.9190z^{-1} + 0.9203z^{-2}} \\ \frac{0.9625e^{-3}z^{-1} + 0.9442e^{-3}z^{-2}}{1 - 1.943z^{-1} + 0.9439z^{-2}} & \frac{0.03478z^{-1}}{1 - 0.9783z^{-1}} \end{bmatrix} \quad (A.20)$$

Dando un primer vistazo a los modelo (A.17) y (A.18) se puede encontrar que son bastante similares y el ingeniero de control puede esperar que los ceros de transmisión de ambos modelo lineales sean similares, sin embargo los dos puntos de operación  $P_-$  y  $P_+$  tiene los ceros de transmisión mostrados en la tabla A.6.

**Tabla A.6: Ceros de transmisión**

	$P_-$	$P_+$
<i>Ceros(s)</i>	(-0.0595, -0.0173)	(-0.0565, 0.0130)
<i>Ceros(z)</i>	(0.8878, 0.9660)	(0.8932, 1.0263)

### A.2.1 Localización del cero

Los ceros de la matriz de función de transferencia A.16 son las raíces que anulan el numerador polinomial de la función racional A.21,

$$\det G(s) = \frac{c_1 c_2 \gamma_1 \gamma_2}{\prod_{i=1}^4 (T_i s + 1)} \left[ (T_3 s + 1)(T_4 s + 1) - \frac{(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2)}{\gamma_1 \gamma_2} \right] \quad (A.21)$$

La matriz  $G(s)$  tiene dos ceros finitos para  $\gamma_1, \gamma_2 \in (0, 1)$ . Si el termino  $\eta = -\frac{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)}{\gamma_1\gamma_2}$  tiende a cero, los ceros están localizados en  $-1/T_3$  y  $-1/T_4$ . Si un cero tiende a  $-\infty$  y uno el otro cero tiende a  $+\infty$ , el término  $\eta \rightarrow \infty$ . Si el valor de  $\eta = 1$ , entonces uno de los ceros estará localizado en el origen, este caso corresponde a  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ . Por consiguiente, el sistema es de fase no mínima para,

$$0 < \gamma_1 + \gamma_2 < 1 \quad (\text{A.22})$$

y de fase mínima para

$$1 < \gamma_1 + \gamma_2 < 2 \quad (\text{A.23})$$

### A.2.2 Dirección del cero

En sistemas multivariables, no es solo de importancia la localización de un cero, sino también su dirección. La dirección de un cero  $z$  se define como un vector  $\psi \in R^2$  de módulo la unidad tal que  $\psi^T G(z) = 0$ . Para la función de transferencia A.16, la dirección del cero, para  $z > 0$ , esta determinada por la siguiente expresión,

$$[\psi_1 \quad \psi_2] \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 c_1}{T_1 z + 1} & \frac{(1-\gamma_2)c_1}{(T_3 z + 1)(T_1 z + 1)} \\ \frac{(1-\gamma_1)c_2}{(T_4 z + 1)(T_2 z + 1)} & \frac{\gamma_2 c_2}{T_2 z + 1} \end{bmatrix} = [0 \quad 0] \quad (\text{A.24})$$

Si la ecuación A.24, es resuelta asumiendo que  $\psi_1, \psi_2 \neq 0$ , de manera que el cero no este asociado con solo una salida, se puede expresar  $\psi_1/\psi_2$  como,

$$\frac{\psi_1}{\psi_2} = -\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1} \frac{c_2(T_1 z + 1)}{c_1(T_1 z + 1)(T_2 z + 1)} \quad (\text{A.25})$$

En esta ecuación se puede observar que si  $\gamma_1$  es un valor pequeño, la dirección del cero  $z$  es principalmente asociada con la primera salida. Si el valor de  $\gamma_1$  es cercano a la unidad, entonces la dirección del cero es mayormente asociada con la segunda salida. Por lo tanto, para un determinada localización del cero  $z$ , el magnitud relativa de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  determina con cual salida esta relacionada el cero del semiplano derecho.

### A.2.3 Matriz de Ganancia Relativa

El concepto de Matriz de Ganancia Relativa (MGR)(Relative Gain Array, por sus siglas en inglés) fue propuesto por (Bristol, 1966) como una medida del grado de interacción

de las variables en un sistema de control multivariable. La MGR se define como A.26,

$$MGR = G(0) * G^{-T}(0) \tag{A.26}$$

donde el asterisco representa el producto de Schur, que significa el producto de elemento por elemento. En otras palabras se calcula la transpuesta de la inversa de la matriz de estado estacionario y se multiplica cada término de la nueva matriz por el término correspondiente de la matriz original, los términos que se obtienen son los de la matriz de medida de interacción o matriz de ganancia relativa.

La MGR obtenida para el sistema de los cuatro tanques interconectados es expresada como A.27,

$$MGR = \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} \begin{bmatrix} \gamma_1 \gamma_2 & -(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2) \\ -(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2) & \gamma_1 \gamma_2 \end{bmatrix} \tag{A.27}$$

La matriz RGA es usada como una herramienta principal en la industria de procesos para decidir cuales son los pares de variables de entrada-salida más adecuados para la implementación de controladores descentralizados (Morari y Zafriou, 1989). (Bristol, 1966) presento una regla para agrupar los pares de variables controladas y manipuladas, esta fue posteriormente modificada por (Koppel, 1982), y expresa que "Siempre se deben agrupar por pares los elementos de la MGR más cercanos a 1. La estabilidad de los pares se verifica mediante el teorema de Niederlinski, si el par da origen a un sistema inestable, entonces se elige otro par positivo con valores cercanos a 1. Siempre que sea posible, se evitará la agrupación por pares negativos".

Por consiguiente, si  $0 < \gamma_1 + \gamma_2 < 1$ , es decir el sistema es de fase no mínima, entonces el valor seleccionado de la MGR es,

$$\lambda = -\frac{(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2)}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} \tag{A.28}$$

que para ese rango de valores de  $\gamma_i$  es positivo. Si  $1 < \gamma_1 + \gamma_2 < 2$ , el sistema es de fase mínima, y el valor seleccionado de la MGR es,

$$\lambda = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} \tag{A.29}$$

que para el intervalo mencionado es positivo.

Puede observarse que la localización, dirección y la matriz de interacción están en función de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ .

Sustituyendo los valores en A.27, se tiene para  $P_-$ ,

$$MGR = \begin{bmatrix} 1.4 & -0.4 \\ -0.4 & 1.4 \end{bmatrix} \tag{A.30}$$

y para  $P_+$ ,

$$MGR = \begin{bmatrix} -0.63565 & 1.635652 \\ 1.635652 & -0.63565 \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

# Bibliografía

- Al-Nasr, N. (1982). On zeros of time-variant multivariable linear systems containing input-derivatives. *International Journal of Control* **35**, 749–753.
- Al-Nasr, N., V. Lovass-Nagy y L. Powers (1981). On transmission zeros and zero directions of the multivariable time-variant linear systems with input-derivative control. *International Journal of Control* **33**, 859–870.
- Allgöwer, F. y A. Zheng (Ed) (2000). *Nonlinear model predictive control*. Birkhäuser. Basel.
- Alvarez, A., W. García-Gabín, E. Chacon y O. Camacho (1999). Application of hybrid systems to industrial processes. *ISA Transaction*.
- Athanassiades, M., P. Falb, R. Kalman y E. Lee (1962). Time optimal control for plants with numerator dynamic. *I.R.E. Transaction on Automatic Control* **7**, 47–50.
- Bemporad, A., G. Ferrari, D. Mignone, M. Morari y F. Torrisi (1999). Model predictive control-ideas for the next generation. In: *European Control Conference*.
- Bemporad, Alberto y Manfred Morari (1999). Control of systems integrating logic, dynamics and constraints. *Automatica* **35**, 407–427.
- Bequette, B. Wayne (1998). *Process Dynamics: Modeling, Analysis, and Simulation*. 1 ed.. Prentice Hall. New Jersey.
- Bitmead, R.R., M. Gevers y V. Wertz (1990). *Adaptive Optimal Control: The Thinking man's GPC*. Prentice Hall. Brunswick.
- Bristol, E. (1981). The right half plane'll get you if you don't watch out. In: *Joint Automatic Control Conference*.
- Bristol, E.H. (1966). on a new measure of interaction for multivariable process control. *IEEE Trans. Automat. Contr.* **11**, 133.

- Brockett, R. (1965). Poles, zeros and the feedback: State space interpretation. *IEEE Transaction on Automatic Control* **10**(2), 129–135.
- Camacho, E.F. y C. Bordons (1999). *Model Predictive Control*. 2 ed.. Springer-Verlag. London.
- Camacho, O. (1996). A new approach to design and tune sliding mode controllers for chemical processes. PhD thesis. Department of Chemical Engineering, University Of South Florida. Tampa, USA.
- Camacho, O., , W. Garcia-Gabin y R. Rojas (1997). A new approach of sliding mode control to non-minimum phase system with dead time. In: *Control '97*. Sydney, Australia. pp. 401–406.
- Camacho, O., , W. García-Gabín y R. Rojas (1999). Variable structure control to inverse response systems with dead time. *ISA Transaction* **38**, 87–99.
- Camacho, O. y C. Smith (2000). Sliding mode control an approach to regulate nonlinear chemical processes. *ISA Transaction Vol. 39* ((2), 205 – 218.
- Chen, X. y K. Furuta (1999a). Adaptive quasi-sliding mode control for discrete-time multivariable systems. *International Journal of Control* **72**(6), 133–140.
- Chen, X. y K. Furuta (1999b). Robust quasi-sliding mode tracking control for discrete input-output systems. In: *14th World Congress of IFAC*. pp. 377–382.
- Cheng, V. y C. Desoer (1980). Limitations on the closed-loop transfer function due right half plane transmission zeros of the plant. *IEEE Transaction on Automatic Control* **25**(6), 1218–1220.
- Chien, C., K. Sun, A. Wu y L. Fu (1996). A robust mrac using variable structure design for multivariable plants. *Automatica* **32**(6), 833–848.
- Clarke, D. W., C. Mohtadi y P. S. Tuffs (1985). Self-tuning control of a difficult process. In: *VII IFAC Symposium on Identification and system parameter estimation*. York, UK. pp. 1009–1014.
- Clarke, D. W., C. Mohtadi y P. S. Tuffs (1987a). Generalized predictive control: Part i: The basic algorithm. *Automatica* **23**(2), 137–148.
- Clarke, D. W., C. Mohtadi y P.S. Tuffs (1987b). Generalized predictive control: Part ii: Extensions and interpretations. *Automatica* **23**(2), 149–160.
- Clarke, D.W. (1984). Self-tuning control of nonminimum phase systems. *Automatica* **20**(5), 501–517.

- Clarke, D.W. (1988). Applications of generalized predictive control to industrial processes. *IEEE Control Systems Magazine* **8**(2), 49–55.
- Clegg, J. (1956). Time dependent nonlinear compensating network. *Elec. Eng.*
- Corradini, M. Letizia y G. Orlando (1997). A VSC algorithm based on generalized predictive control. *Automatica* **33**(5), 927–932.
- Cutler, C. R. y B. L. Ramaker (1979). Dynamic matrix control: A computer control algorithm. In: *AICHE National Meeting*. Houston.
- Cutler, C. R. y B. L. Ramaker (1980). Dynamic matrix control: A computer control algorithm. In: *Joint Automatic Control Conference*. San Francisco, USA.
- Dai, L. y K. Astrom (1999). Dynamic matrix control of a quadruple-tank process. In: *14th World Congress of IFAC*. Beijing, China. pp. 397–404.
- Davison, E. (1969). A nonminimum phase index and its application to interacting multivariable control systems. *Automatica* **5**, 791–799.
- Davison, E. (1970). A computational method for finding the zeros of a multivariable linear time invariant system. *Automatica* **6**, 481–484.
- Davison, E. y S. Wang (1974). Properties and calculation of transmission zeros of linear multivariable system. *Automatica* **10**, 643–658.
- de Vusse, J. Van (1964). Plug-flow type reactor versus tank reactor. *Chemical Engineering Science* **19**, 994–996.
- Deshpande, P. B. (1983). *Multivariable process control*. Instrument Society America. North Carolina.
- Desoer, C. y J. Schulman (1974). Zeros and poles of matrix transfer functions and their dynamical interpretation. *IEEE Transation on Circuits and Systems* **21**, 3–8.
- Drakunov, S. y V. Utkin (1990). Sliding mode in dynamic systems. *International Journal of Control* **55**, 1029–1037.
- (ed) Clarke, D. W. (1994). *Advances in Model-Based Predictive Control*. Oxford University Press. Oxford.
- Elmali, H. y N. Olgac (1992). Robust output tracking control of nonlinear mimo systems via sliding mode technique. *Automatica* **28**(1), 145–151.
- Emelyanov, S. (1967). *Variable Structure Control*. Nauka. Moscow.

- Engell, S. y K. Klatt (1993). Nonlinear control of non-minimum phase CSTR. In: *American Control Conference*. pp. 2041–2045.
- Francis, B. y W. Wonham (1975). The role of transmission zeros in the linear multivariable regulators. *International Journal of Control* **22**(5), 657–681.
- Frank, P. M. (1974). *Entwurf von Regelkreisen mit vorgeschrieben Verhalten*. Braun. Karlsruhe.
- Frank, P. M. (Ed) (1999). *Advances in control*. Springer. London.
- Fukuda, K. (1993). Vss type self-tuning control. *IEEE Transaction on Industrial Electronics* **40**(1), 37–43.
- Furuta, K. (1990). Sliding mode control of a discrete systems. *Systems and Control Letter* **14**, 145–152.
- Furuta, K. y M. Morisada (1988). Implementation of sliding mode control by a digital computer. In: *IEEE Ind. Electron. Conf.*. pp. 453–458.
- García-Gabín, W., E.F. Camacho y D. Zambrano (2000). Improving GPC tuning for non-minimum phase systems. In: *4<sup>th</sup> Portuguese Conference on Automatic Control*. Guimarães. pp. 66–71.
- García-Gabín, W., E.F. Camacho y D. Zambrano (2002). Multivariable model predictive control of process with unstable transmission zeros. In: *American Control Conference*. Anchorage, USA.
- García-Gabín, W. y E.F. Camacho (2000). Control predictivo generalizado por modo deslizante aplicado a un brazo manipulador. In: *XXI Jornadas de Automática*. Sevilla, España.
- García-Gabín, W. y E.F. Camacho (2001). Control predictivo generalizado por modo deslizante para sistemas de fase no mínima. In: *XXI Jornadas de Automática*. Bellaterra, España.
- García-Gabín, W. y E.F. Camacho (2002). Application of multivariable gpc to a four tank process with unstable transmission zeros. In: *Control Conference of Applications*. Glasgow, Scotland.
- Garret, S. (1961). Linear switching conditions for a third order positive-negative feedback control. *Appl. Ind.*
- Gatzke, E., E. Meadows, C. Wang y F. Doyle III (2000). Model based control of a four-tank process. *Computers & Chemical Engineering* **24**, 1503–1509.

- Glover, K. y L. Silverman (1976). Characterization of structural controllability. *IEEE Transaction on Automatic Control* **21**, 534–537.
- Grimble, M.J. (1992). Generalized predictive optimal control: an introduction to the advantages and limitations. *International Journal of Systems Science* **23**(1), 85–98.
- Havre, K. y S. Skogestad (1997). Limitations imposed by rhp zeros/poles in multivariable systems. In: *European Control Conference*.
- Holt, B. R. y M. Morari (1985). Design of resilient processing plants-vi. the effect of right half plane zeros on dynamic resilience. *Chemical Engineering Science* **40**(1), 59–74.
- Hovd, M. y R. Braatz (2001). Handling state and output constraints in MPC using time-dependent weight. In: *American Control Conference*. Arlington, USA. pp. 2418–2423.
- Hsu, L., J. Cunha y R. Costa (2001). Model reference sliding mode control of uncertain multivariable systems. In: *Conference on Decision and Control*. Tampa, USA. pp. 756–761.
- Ishitobi, M. (2000). A stability of zeros of sampled multivariable systems. *IEEE Transaction on Automatic Control* **45**(2), 295–299.
- J, Hung (1993). Variable structure control: A survey. *IEEE Transaction on Industrial Electronics* **40**(1), 2–22.
- Jerome, N. y W. Ray (1991). Control of single input single output systems with time delay and an infinite number of right half plane zeros. *Chemical Engineering Science* **46**(8), 2003–2018.
- Jerome, N. y W. Ray (1992). Model-Predictive control of linear multivariable systems having time delay and right half plane zeros. *Chemical Engineering Science* **47**(4), 763–785.
- Johansson, K.H. (2000). The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero. *IEEE Transaction on Control Systems Technology* **8**(3), 456–465.
- Karkanias, N. y B. Kouvaritakis (1979). The output zeroing problem and its relationship to the invariant zero structure. *International Journal of Control* **30**, 395–415.
- Keyser, R. De (1991). Basic principles of model based predictive control. In: *I European Control Conference*. Grenoble, Francia. pp. 1753–1758.

- Keyser, R. De (1998). A gentle introduction to model based predictive control. In: *PAID2 International Conference on Control engineering and Signal Processing*. Piura, Perú.
- Keyser, R. De y A. R. Van Cuawenberghe (1985). Extended prediction self-adaptive control. In: *VII IFAC Symposium on Identification and system parameter estimation*. York, UK. pp. 1317–1322.
- Kimura, H. (1982). Perfect and subperfect regulation in linear multivariable control systems. *Automatica* **18**, 125–145.
- Koppel, L.B. (1982). Input-output pairing in multivariable control. *AIChE Journal*. Revisar esta referencia en el smith corripio, porque en el mio dice sometido al AIChE J.
- Kouvaritakis, B. (1976). A geometric approach to the inversion of multivariable systems. *International Journal of Control* **24**(5), 609–626.
- Kouvaritakis, B. y A. MacFarlane (1976a). Geometric approach to analysis and synthesis of system zeros: Square systems. *International Journal of Control* **23**(2), 149–166.
- Kouvaritakis, B. y A. MacFarlane (1976b). Geometric approach to analysis and synthesis of system zeros: Non square systems. *International Journal of Control* **23**(2), 167–181.
- Kwakernaak, H. y R. Sivan (1972). *Linear Optimal Control Systems*. Wiley. New York USA.
- Latawiec, K., S. Bańka y J. Tokarzewski (1999). Control zeros and nonminimum phase LTI MIMO systems. In: *14th World Congress of IFAC*. Beijing, China. pp. 397–404.
- Lee, E. B. y L. Markus (1967). *Foundations of optimal control theory*. John Wiley and Sons. New York.
- Levine, W.S. (Ed) (1996). *The Control Handbook*. IEEE Press. Boca de Ratón.
- MacFarlane, A. G. J. y N. Karcaniyas (1976). Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of algebraic, geometric and complex-variable theory. *Int. J. Control* **24**(1), 33–74.
- Maciejowski, J.M. (2001). *Predictive Control with Constraints*. Prentice Hall. Harlow.
- Marlin, T. E. (1995). *Process Control: Designing Processes and Control Systems for Dynamic Performance*. 1 ed.. McGraw-Hill. New York.

- Martín, J. M. y J. Rodellar (1996). *Adaptive predictive control: from the concepts to plant optimization*. Prentice Hall. London.
- Mayne, D.Q., J. B. Rawlings, C. V. Rao y P. O. M. Scokaert (2000). Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica* **36**, 789–814.
- Mehra, R. K. y R. Rouhani (1980). Theoretical considerations on model algorithmic control for nonminimum phase systems. In: *Joint Automatic Control Conference*. San Francisco, USA.
- Menga, G. y E. Mosca (1980). Musmar: Multivariable adaptive regulator based on multistep cost functionals. In: *Advances in Control*. Holland. pp. 334–341.
- Milosavljevic, C. (1985). general conditions for the existence of a quasisliding mode on the switching hyperplane in discrete variable structure systems. *Autom. Remote Control* **46**, 307–314.
- Morari, M. (1984). Design of resilient process plants-III. *Chemical Engineering Science*.
- Morari, M. y B. Holt (1987). Design of resilient processing plants. new characterization of the effect of RHP zeros. *Chemical Engineering Science* **41**(10), 2425–2428.
- Morari, M. y E. Zafiriou (1989). *Robust process Control*. Prentice Hall. New Jersey.
- Morari, M. y J. H. Lee (1999). Model predictive control: past, present and future. *Computers & Chemical Engineering* **23**, 667–682.
- Mosca, E. (1995). *Optimal, predictive, and adaptive control*. Prentice Hall. New Jersey.
- Nunes, G., S. Kincal y O. Crisalle (2001). Stability analysis of multivariable predictive control: A polynomial approach. In: *American Control Conference*. Arlington, USA. pp. 2424–2429.
- Ogata, K. (1998). *Ingeniería de control moderna*. Prentice Hall. México.
- Ogunnaike, B.A. y W.H. Ray (1994). *Process Dynamics, Modeling, and Control*. Oxford University Press. Oxford.
- Patel, R. (1975). On zeros of multivariable systems. *International Journal of Control* **21**, 599–608.
- Patel, R. (1976). On computing invariant zeros of multivariable systems. *International Journal of Control* **24**, 145–146.
- Propoi, A. I. (1963). Use of linear programming methods for synthesizing sample-data automatic systems. *Automatic Remote Control* **7**(24), 837–844.

- Qin, S.J. y T. A. Badgwell (1997). An overview of industrial model predictive control technology. In: *V International Conference on Chemical Process Control V Conference*. pp. 232–256.
- Rawlings, J. B. (2000). Tutorial overview of model predictive control. *Control Systems Magazine* pp. 38–52.
- Richalet, J. (1993). Industrial applications of model based predictive control. *Automatica* **29**(5), 1251–1274.
- Richalet, J., J. L. Testud y J. Papon (1976). Algorithmic control of industrial process. In: *IV IFAC Symposium on Identification and System Parameters*. pp. 1119–1167.
- Richalet, J., J. L. Testud y J. Papon (1978). Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes. *Automatica* **14**, 413–428.
- Rosenbrock, H. (1970). *State Space and multivariable theory*. Wiley. New York.
- Rosenbrock, H. (1973). The zeros of the systems. *International Journal of Control* **18**(2), 297–299.
- Rosenbrock, H. (1974a). Correction to 'the zeros of the systems'. *International Journal of Control* **20**(3), 525–527.
- Rosenbrock, H. (1974b). Structural properties of the linear dynamical systems. *International Journal of Control* **20**, 191–202.
- Sain, M. S. y C. B. Schrader (1990). The role of the zeros in the performance of multi-input, multioutput feedback systems. *IEEE Transaction on Education* **33**(3), 244–257.
- Sarptürk, S., o. Istefanopulos y O. Kaynak (1987). On the stability of discrete-time sliding mode control systems. *IEEE Transaction on Automatic Control* **32**(2), 930–932.
- Schaarder, C. y M. Sain (1989). Research on systems zeros: a survey '. *International Journal of Control* **50**(4), 1407–1433.
- Seborg, D. E., E. F. Thomas y D. A. Mellichamp (1989). *Process Dynamics and Control*. John Wiley and Sons. New York.
- Shaked, U. y B. Kouvaritakis (1977). The zeros of the linear optimal control systems and their role in high feedback gain stability design. *IEEE Transaction on Automatic Control* **22**(4), 597–599.

- Shinskey, F. G. (1983). *Controlling multivariable processes*. Instrument Society America. North Carolina.
- Shinskey, F. G. (1996). *Sistemas de control de proceso*. Mc Graw Hill. Ciudad de México.
- Simon, J. y K. Mitter (1969). Synthesis of transferfunction matrices with invariant zeros. *IEEE Transaction on Automatic Control* **14**(4), 420–421.
- Slotine, Jean-Jacques E. y Weiping Li (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall. New Jersey.
- Smith, C. L. (1972). *Digital Computer Process Control*. Inext Educational Publisher. Scranton, Pa.
- Smith, Carlos A. y Armando B. Corripio (1991). *Control Automático de Procesos*. 1 ed.. Limusa. México. Traducción de primera edición principle and Practice of Automatic Process Control.
- Soeterboek, R. (1991). *Predictive Control: A Unified Approach*. Prentice Hall. New York.
- Suda, N. y E. Mutsuyoshi (1978). Invariant zeros and input-output structure of linear, time invariant systems. *International Journal of Control* **28**, 525–535.
- Takatsu, H., T Itoh y M Araki (1998). Future needs for the control theory in industries-report ant topics of the control technology survey in japanese industry. *Journal of Process Control* **8**(5-6), 369–374.
- Thomas, Y. A. (1975). Linear quadratic optimal estimation and control with receding horizon. *Electronic letter* **11**, 19–21.
- Utkin, V. I. (1977). Variable structure with sliding mode. *IEEE Transaction on Automatic Control* **22**(2), 212–222.
- Utkin, V. I. (1981). *Sliding modes in control and optimization*. Spring-Verlag. Moscow.
- Utkin, V. I., J. Guldner y J. Shi (1999). *Sliding modes in electromechanical systems*. Taylor-Francis. London.
- Weller, S. (1999). limiting zeros of decouplable mimo systems. *IEEE Transaction on Automatic Control* **44**(1), 129–134.
- Wolovich, W. (1973a). On determining the zeros of state space systems. *IEEE Transaction on Automatic Control* **18**, 542–544.

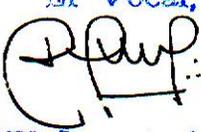
- Wolovich, W. (1973b). On the numerators and zeros of the rational transfer matrices. *IEEE Transaction on Automatic Control* **18**, 544–546.
- Wolovich, W. (1974). On the cancelation of multivariable zeros by state feedback. *IEEE Transaction on Automatic Control* **19**, 276–277.
- Ydstie, B. E. (1984). Extended horizon adaptive control. In: *IX World Congress of IFAC*. Budapest, Hungary. pp. 133–137.
- Zadeh, L. A. y B. H. Whalen (1962). On optimal control and linear programming. *IRE Transaction Automatic Control*.
- Zafriou, E. (1990). Robust model predictive control of process with hard constraints. *Computers & Chemical Engineering* **14**(4-5), 359–371.
- Zafriou, E. y H. Chiou (1996). On the dynamic resiliency of constrained process. *Computers & Chemical Engineering* **20**(4), 347–355.
- Zaris, P., J. Wood, H. Pillai y E. Rogers (2001). on variant zeros of multidimensional linear systems. In: *European Control Conference*. Oporto, Portugal. pp. 1662–1667.
- Zhou, J., Z. Liu y R. Pei (2001). A new non linear model predictive control scheme for discrete time systems based on sliding mode control. In: *American Control Conference*. Arlington. pp. 3079–3084.
- Zinober, A.S. (1994). *Variable Structure and Liapunov Control*. Spring-Verlag. London.

## UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes  
 en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de  
 D. Winston Manuel García Gabin  
 titulada Control Predictivo multivariable para  
Sistemas con retardos de transmisión en el  
semiplano derecho  
 acordó otorgarle la calificación de sobresaliente cum laude  
 por unanimidad.

Sevilla, a 15 de Julio de 2002

El Vocal,  
  
 El Presidente

El Vocal,  
  
 El Secretario,

El Vocal,  
  
 El Doctorante



