

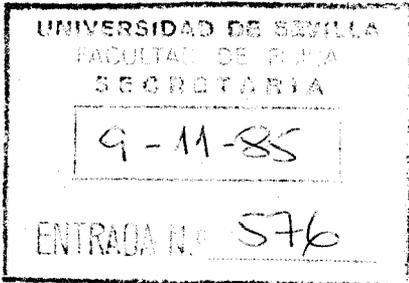
T.S. - 45

R. 2658

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE FÍSICA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA



ESTUDIO DEL MODELO ESTOCASTICO DE MALTHUS-VERHULST

DIRECTOR

JOSE JAVIER BREY ABALO. Catedrático de Mecánica Estadística del Departamento de Física Teórica de la Universidad de Sevilla.

MEMORIA presentada para aspirar al grado de Doctora en Ciencias Físicas por la Licenciada en Ciencias Físicas CONCHA AIZPURU DOMINGUEZ.



Quiero expresar mi gratitud hacia el Dr. D. Jose Javier Brey Abalo, director de esta tesis, por el estímulo, interés y dedicación que ha mostrado y sin cuyas enseñanzas no habría sido posible la realización de este trabajo.

Agradezco a D. Manuel Morillo Buzón su importante ayuda, su aliento constante y las provechosas discusiones mantenidas con él.

Así mismo, no me ha faltado el estímulo y aliento de mis compañeros de Departamento de Física Teórica, a quienes deseo mostrar mi reconocimiento.

## INDICE

1.-	Introducción	4
2.-	Deducción "Mecanicista" de la ecuación estocástica de Verhulst	12
2.1	El modelo de Lotka-Volterra y el de Malthus-Verhulst	13
2.1a	Descripción determinista	
2.1b	Descripción estocástica	
2.2	Deducción del modelo de Verhulst a partir del modelo de Lotka-Volterra	24
2.3	Análisis numérico	44
2.3a	Descripción del modelo	
2.3b	Validez de la aproximación markoviana	
2.3c	Aproximación no markoviana	
3.-	Soluciones de la ecuación estocástica de Verhulst	66
3.1	Resultados previos	67
3.2	Soluciones particulares de la ecuación de Verhulst	75
3.3	Relación entre las condiciones iniciales y el tipo de relajación	98
3.4	Generalización del método para una clase de ecuaciones de Fokker-Planck	108
3.5	Análisis numérico	111
3.5a	Descripción del método	
3.5b	Test del método	
3.5c	Aplicación a una distribución delta de Dirac	
4.-	Conclusiones	126
5.-	Apéndices	130
6.-	Referencias	144

## 1.- INTRODUCCIÓN

## 1.- INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas esenciales de la Mecánica Estadística es la descripción de las fluctuaciones, alrededor de los valores medios, de las macrovariables que caracterizan el estado de un sistema. Estas funciones pueden tener orígenes muy distintos. En ciertos casos están asociadas con el carácter finito del sistema, en otros son debidas al propio movimiento térmico de las partículas que lo componen, etc. También es posible inducir en ciertos sistemas fluctuaciones desde el exterior en un modo perfectamente controlado (fluctuaciones externas).

El análisis de las fluctuaciones en los sistemas físicos puede abordarse a varios niveles. Desde un punto de vista riguroso, lo ideal sería partir de una descripción puramente microscópica del sistema y, utilizando los postulados de la Mecánica Estadística, ser capaces de obtener la función de distribución para los valores de la variable macroscópica. Evidentemente, este programa proporcionaría una clara imagen del sentido físico de las fluctuaciones.

Para el caso particular de sistemas en equilibrio, existe una teoría bien fundamentada cuyos orígenes están en los trabajos de Gibbs, Einstein<sup>20)</sup> y Landau<sup>21)</sup>. Merece la pena decir que tal teoría está íntimamente relacionada con la de los fenómenos de transporte en sistemas cercanos al equilibrio, donde es válida una aproximación lineal. Sin embargo, la situación es muy distinta en el caso de sistemas que no están en

equilibrio. Sólo para modelos muy simplificados se ha sido capaz de establecer una clara conexión entre una descripción microscópica determinista, y una descripción macroscópica estocástica.

Debido a las anteriores dificultades, es una práctica común para abordar problemas concretos partir de una descripción del sistema que es intermedia entre la descripción microscópica y una puramente macroscópica sin fluctuaciones. Normalmente, se utiliza la denominación mesoscópica para referirse a este nivel de descripción. La idea es formular, basándose esencialmente en argumentos intuitivos, una ecuación de evolución que de cuenta de la naturaleza probabilística, de forma que describa no sólo un comportamiento medio sino la probabilidad de que en el sistema tenga lugar ciertos sucesos elementales. Las ecuaciones de este tipo más conocidas son la ecuación maestra, la ecuación de Langevin y la ecuación de Fokker-Planck.

Una vez formulada una ecuación mesoscópica para describir nuestro sistema, todavía queda el problema de cómo obtener de ella la información relevante acerca del comportamiento observable. Para situaciones lejanas al equilibrio, en las que la linealización no es válida, este no es un problema trivial. Como Nordholm y Zwanzig<sup>22)</sup> han señalado, la no linealidad introduce un acoplo dinámico entre valores medios y fluctuaciones. Este acoplo es importante en muchos sistemas físicos y, por tanto, debe tenerse en cuenta al tratar de obtener ecuaciones cerradas de evolución para los valores medios o las fluctuaciones. En los últimos años se

han desarrollado diversos esquemas para dar cuenta de este efecto, la mayor parte de ellos basados en desarrollos perturbativos o de carácter intuitivo. Una cuestión del máximo interés es delimitar la fiabilidad y rangos de validez de estos esquemas. El medio más usual para ello consiste en comparar los resultados a que llevan con los obtenidos mediante resolución numérica de la ecuación de partida. Sin embargo, es claro que sería deseable disponer de modelos cuya solución exacta fuese conocida. Esto proporcionaría, por un lado, información relevante acerca de la influencia de las fluctuaciones y permitiría, por otro lado, efectuar un test de los métodos de aproximación.

En la presente memoria nos ocupamos de los dos problemas que acabamos de señalar, dentro del contexto de un modelo para el comportamiento de la población de un sistema ecológico. En la primera parte, consideramos un conjunto de especies que interactúan entre sí según el modelo determinista de Lotka-Volterra. Una de las especies se toma como la especie problema, actuando las demás como sus alrededores. Estos están inicialmente en un estado muy próximo al de equilibrio. Utilizando las técnicas de la teoría mecánico-estadística del movimiento browniano es posible, entonces, obtener una ecuación de evolución cerrada para la población de la especie problema. Esta ecuación tiene la forma de una ecuación de Verhulst generalizada, con efectos de memoria y con un término de ruido. Además, el núcleo de memoria y la correlación del ruido están relacionados mediante una especie de teorema fluctuación disipación generalizado.

Los anteriores resultados son generales y, en particular, válidos para una amplia gama de interacciones entre las especies. Es posible escoger estas interacciones de manera que los términos de memoria y de ruido puedan calcularse explícitamente. Van Kampen<sup>13)</sup> mostró que en ciertos casos se llega a una ecuación que es markoviana, correspondiendo a un ruido blanco. Uno de los elementos esenciales en estos estudios teóricos es la consideración de un número infinito de especies,  $N$ , en los alrededores. Nosotros hemos creído que es relevante determinar cuando es aplicable este límite en situaciones prácticas. Para ello, hemos realizado un análisis numérico de las ecuaciones deterministas de Lotka-Volterra de partida, comparando los resultados obtenidos con los que predice la teoría para un número infinito de especies. La conclusión, previsible por otro lado, es que  $N$  determina el rango de validez de la teoría sobre una escala temporal. Es decir, cuanto mayor es el número de especies mayor es el intervalo de tiempo en el que los resultados teóricos y los numéricos están de acuerdo.

Existe otro tipo de interacciones entre las especies que lleva a un núcleo de memoria exponencial. En este caso, para situaciones iniciales de la especie problema muy alejadas del equilibrio la evolución de la población no es monótona. Si, por ejemplo, se parte de una población muy superior a la de equilibrio, en una primera etapa tiene lugar un decaimiento muy rápido hasta alcanzar valores por debajo del mismo. Después, la población crece lentamente hacia el equilibrio.

En la segunda parte de la memoria se adopta el punto de vista de que se sabe que el sistema está descrito por la ecuación estocástica de Verhulst, que es una ecuación del tipo Langevin con ruido multiplicativo gaussiano y blanco, cuyas propiedades están especificadas. Como ya se dijo antes, el problema es obtener la información relevante contenida en dicha ecuación, o en la ecuación de Fokker-Planck asociada. En la bibliografía se encuentran soluciones formales de ecuaciones análogas a la de Fokker-Planck que estamos considerando. Estas soluciones vienen expresadas como series infinitas y se obtienen utilizando, por ejemplo, técnicas de autovalores. Sin embargo, por su propio carácter formal estas expresiones son difíciles de manejar en aplicaciones prácticas, excepto quizás para el estudio de comportamientos asintóticos y otras propiedades cualitativas. El espíritu de nuestro trabajo es diferente. Nosotros hemos obtenido en vez de soluciones formales, soluciones particulares exactas explícitas, correspondiendo a ciertas clases de condiciones iniciales. En consecuencia, para dichas condiciones somos capaces de seguir la relajación del sistema hacia el equilibrio en todo instante de tiempo.

Las soluciones particulares que hemos encontrado contienen una gran cantidad de posibilidades en lo que se refiere al comportamiento cualitativo de las cantidades observables del sistema. Además, estas soluciones dependen paramétricamente de los valores medios y las fluctuaciones iniciales, así como de la intensidad de ruido presente en la ecuación de Fokker-Planck. Por todo ello, es posible estudiar en detalle las interrelaciones entre fluctuaciones y valores medios.

Un resultado adicional del análisis que hemos llevado a cabo es que debe tenerse especial cuidado cuando se realizan aproximaciones en la ecuación de evolución que rige el comportamiento de los valores medios. Un valor medio físicamente aceptable no tiene porqué corresponder a una función de distribución también aceptable. En ciertos casos, cuando las condiciones introducidas en la ecuación de valores medios se trasladan a la correspondiente ecuación para la función de distribución completa se obtienen resultados que son claramente incorrectos. En nuestro caso la ecuación de evolución de la función de distribución restringe notablemente el campo de condiciones iniciales que pueden ser utilizadas en la ecuación de valores medios.

Desgraciadamente, las familias de soluciones particulares que hemos encontrado no constituyen un conjunto completo. En particular, no es posible expresar como combinación de ellas una función delta de Dirac, lo que impide calcular explícitamente la función de Green del problema. Hace algunos años, Morita<sup>16)</sup> presentó una solución de la ecuación estocástica de Verhulst correspondiente a una condición inicial delta de Dirac. Su análisis es, sin embargo, incorrecto ya que se basa en un truncamiento inadecuado de una serie infinita. La razón última es que la serie viene expresada en función de los momentos iniciales, de manera que en el caso de una delta de Dirac debe de retenerse formalmente toda la serie.

La anterior discusión, así como el interés intrínseco que tiene, nos ha llevado a desarrollar un método numérico que permita calcular la evolución temporal a partir de una distribu-

ción inicial dada. Para el caso particular de una delta de Dirac los resultados obtenidos discrepan claramente de las conclusiones de Morita, mientras que presentan características cualitativas análogas a las presentadas por nuestras soluciones particulares.

## 2.- DEDUCCIÓN "MECANICISTA" DE LA ECUACIÓN ESTOCÁSTICA

DE VERHULST

## 2.1 EL MODELO DE LOTKA-VOLTERRA Y EL DE MALTHUS-VERHULST

### 2.1a Descripción Determinista

Originalmente, el modelo de Lotka-volterra es un modelo ecológico del tipo depredador-presa, para la descripción de la evolución temporal de especies que interaccionan entre si. Sin embargo, las ecuaciones del modelo han resultado ser útiles para la descripción de otros sistemas tales como determinados tipos de reacciones químicas, ciertos fenómenos sociales, estudio de la evolución de mercado, etc <sup>1)</sup> Para ser concretos, aquí utilizaremos las ecuaciones con el significado original de Volterra. <sup>2)</sup>

Cuando dos especies aisladas del tipo depredador-presa interaccionan entre si, se observa que la evolución del número de individuos de cada especie presenta un comportamiento periódico. En general, las dos especies tienen el mismo periodo, pero sus evoluciones están desfasadas. Si consideramos una especie 1 cuya evolución aislada es lenta, y otra especie de evolución rápida 2, cuando interaccionan aparece un periodo común de evolución para el número de individuos de cada especie. La explicación cualitativa de este fenómeno es la siguiente. Supongamos que inicialmente la especie rápida evoluciona creciendo y multiplicandose. Este proceso durará hasta que el número de individuos de la especie 1 no sea suficiente para mantenerlos. El número de

individuos de la especie 2 comienza entonces a disminuir, implicando un aumento en el número de individuos de la especie de evolución lenta. Al cabo de un cierto tiempo esto permite de nuevo un crecimiento del número de individuos de la especie rápida, y el proceso se repite.

Este mecanismo cualitativo fué descrito por Volterra mediante el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= K_1 N_1 - \lambda_1 N_1 N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} &= -K_2 N_2 + \lambda_2 N_1 N_2\end{aligned}\quad (1)$$

El término  $-\lambda_1 N_1 N_2$  representa la pérdida de elementos de la especie lenta 1, debido a la interacción con los de la especie 2. Análogamente,  $\lambda_2 N_1 N_2$  representa la creación de población de la especie 2 en la interacción. Los términos lineales corresponden a la hipótesis de que mientras la especie 1 (presa) puede sobrevivir aislada, creciendo exponencialmente, la especie 2 (depredador) se extingiría.

El sistema (1) puede generalizarse para un número arbitrario  $n$  de especies

$$\frac{dN_i}{dt} = K_i N_i + \beta_i^{-1} \sum_{j=1}^n a_{ij} N_i N_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(2)

donde por definición,  $\beta_i > 0$ .

El primer sumando del segundo miembro,  $K_i N_i$ , describe el comportamiento de la especie  $i$  en ausencia de todas las demás especies, de tal forma que si  $K_i > 0$  se postula que la especie  $i$  aislada crece exponencialmente, mientras que si  $K_i < 0$  la población de la especie  $i$  aislada decrece exponencialmente. El segundo sumando describe las interacciones de la especie  $i$  con todas las demás especies. Si  $a_{ij} > 0$  la interacción de las especies  $i$ - $j$  produce un crecimiento del número de individuos de la especie  $i$ , mientras que si  $a_{ij} < 0$  la interacción entre ambas especies conduce a un decrecimiento de  $N_i$ . Si  $a_{ij} = 0$ , las especies consideradas no interaccionan. Se verifica que  $a_{ii} = 0$ , pues se considera que ninguna especie interacciona consigo misma. Lógicamente, en la interacción de dos especies si una crece la otra debe disminuir. Esto indica que los signos de  $a_{ij}$  y  $a_{ji}$  deben ser opuestos. Por otro lado, las cantidades positivas  $\beta_i$  tienen el sentido de números equivalentes, es decir se escogen de manera que el cociente de las variaciones de  $N_i$  y  $N_j$  en la interacción entre las especies  $i$  y  $j$  aisladas sea  $\beta_i^{-1} / \beta_j^{-1}$ , lo que significa que

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad (3)$$

Se define el estado estacionario como aquel en el cual  $\frac{dN_i}{dt} = 0$ ,  $\forall i$ . Los valores  $N_i$  que verifican dichas ecuaciones se les denominan valores estacionarios y los representamos por  $Q_i$ . Admitiendo que el estado estacionario existe, los valores estacionarios vendrán dados

por la ecuación

$$Q_i \left[ K_i \beta_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} Q_j \right] = 0 \quad (4)$$

Nosotros supondremos siempre que todos los  $Q_i$  son distintos de cero.

Se definen unas nuevas variables que representan una medida de la desviación respecto del estado estacionario

$$V_i = \ln \frac{N_i}{Q_i} \quad (5)$$

En estas variables las ecuaciones de evolución(2) toman la forma

$$\beta_i \frac{dV_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} Q_j \left[ \exp V_j - 1 \right] \quad (6)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por  $Q_i [\exp V_i - 1]$  y sumando para todo  $i$  se encuentra una constante de movimiento que representaremos por  $G$ .

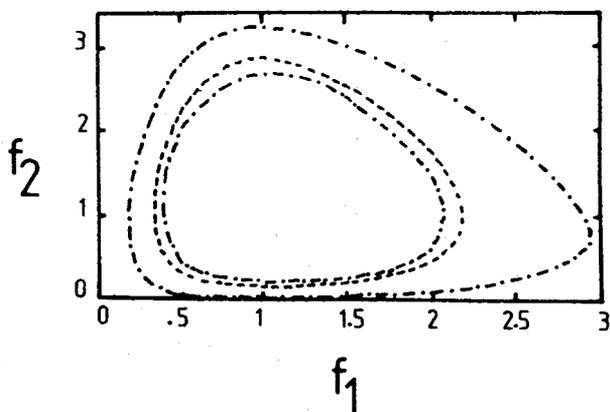
$$G = \sum_{i=1}^n \beta_i Q_i \left[ \exp V_i - V_i \right] = \sum_{i=1}^n G_i \quad (7)$$

Esta constante de movimiento tiene la propiedad de que puede descomponerse en sumandos  $G_i$  función sólo de la variable  $V_i$ , siendo además todos ellos positivos, como puede comprobarse fácilmente.

Consideremos el caso de dos especies. A partir de la ecuación (7) se obtiene<sup>3)</sup>.

$$\left[ \frac{N_1}{Q_1} \exp\left(-\frac{N_1}{Q_1}\right) \right]^{1/K_1} \cdot \left[ \frac{N_2}{Q_2} \exp\left(-\frac{N_2}{Q_2}\right) \right]^{1/K_2} = cte \quad (8)$$

En la figura , representamos  $N_2/Q_2$  en función de  $N_1/Q_1$  , para distintos valores de la constante, es decir de las



condiciones iniciales. Si

$N_i(0) = 0$  , es decir si en el instante inicial no tenemos elementos de la especie  $i$  ,

tampoco lo tendremos en ningún otro instante; este caso

no presenta interés. Si  $N_1(0) = Q_1$  y  $N_2(0) = Q_2$  estamos en un

verdadero estado de equilibrio, el sistema no evoluciona y permanece en el punto (1,1) de la figura , Para cualquier otro par de valores iniciales, las poblaciones evolucionan periódicamente describiendo, en sentido antihorario, una curva cerrada alrededor del punto de equilibrio.

Volvamos ahora a un sistema de  $n$  especies. Un efecto ecológico que no es descrito por el modelo de Volterra es el efecto de saturación, que se produce en una población que debe sobrevivir de recursos limitados. Si el número de individuos de una especie no es controlado por sus interacciones con otras, es de esperar que alcance un valor de saturación y que no continúe creciendo indefinidamente. Uno

de los primeros autores que tuvo en cuenta este efecto de saturación fué Verhulst<sup>3)</sup>, que propuso para la variación de la población de una especie presa no interactuante la expresión

$$\frac{dN}{dt} = KN \frac{\theta - N}{\theta} \quad (K > 0) \quad (9)$$

donde  $\theta$  es el valor de saturación. La ecuación de evolución para especies que obedecen el modelo de Lotka-Volterra, con un término de saturación será

$$\frac{dN_i}{dt} = K_i N_i \frac{\theta_i - \frac{1}{2}(1 + \text{sgn } K_i)N_i}{\theta_i} + \beta_i^{-1} N_i \sum_{j=1}^n a_{ij} N_j \quad (10)$$

En el estado estacionario las poblaciones  $Q_i$  serán

$$K_i \beta_i \frac{\theta_i - \frac{1}{2}(1 + \text{sgn } K_i)Q_i}{\theta_i} + \sum_{j=1}^n a_{ij} Q_j = 0 \quad (11)$$

Para la evolución de la variable  $G$  definida en (7) se obtiene en este caso

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \beta_i K_i (1 + \text{sgn } K_i) \frac{Q_i^2}{\theta_i} (e^{Y_i} - 1)^2 \quad (12)$$

que implica

$$\frac{dG}{dt} < 0 \quad (13)$$

En efecto, si  $K_i < 0$  el término  $\frac{1}{2} K_i (1 + \text{sgn } K_i) = 0$  y el sumando es nulo. Por otro lado, si  $K_i > 0$  se tiene que  $\frac{1}{2} K_i (1 + \text{sgn } K_i) = K_i$  y entonces el sumando es negativo. Así pues, la magnitud  $G$  no es una constante de movimiento cuando se introduce el

término de Verhulst, sino que decrece continuamente hasta que cada  $N_i$  con  $k_i > 0$  se aproxime a  $Q_i$ , ya que en ese caso  $V_i$  tiende a cero y por tanto la derivada de  $G$  tiende a anularse.

## 2.1b Descripción Estocástica

Hasta ahora el análisis ha sido puramente determinista, en el sentido de que las variables poseen en todo instante un valor bien determinado. Sin embargo, en cualquier sistema real existen fluctuaciones que es necesario tener en cuenta para la explicación de ciertos fenómenos<sup>4)</sup>. La inclusión de las fluctuaciones requiere un refinamiento de las teorías macroscópicas del tipo de las que acabamos de exponer.

En realidad, el proceso lógico sería partir de una descripción más detallada del sistema, que permitiera deducir tanto las ecuaciones macroscópicas de evolución como los efectos asociados con las fluctuaciones. Estas descripciones las desarrollaremos en los apartados siguientes. Desde un punto de vista histórico, las primeras ecuaciones estocásticas para la descripción de sistemas se construyeron a partir de ecuaciones macroscópicas de los mismos. Para ello, se introduce en la ecuación un término de ruido o fuerza aleatoria y al mismo tiempo se reinterpretan las variables, considerándolas estocásticas<sup>5)</sup>. Para que la ecuación resul-

tante tenga significado es necesario especificar algunas propiedades de la fuerza aleatoria introducida. Este modo de proceder, aunque presenta serias dificultades e inconvenientes<sup>4)</sup>, ha mostrado ser muy fructífero y sigue utilizándose frecuentemente.

Desde luego, el término de ruido que se introduce debe ser dotado de un significado físico, que dependerá del problema de que se trate. Así, por ejemplo, las fluctuaciones en un sistema pueden ser debidas a causas externas al mismo, o bien tener un origen interno, tal como la dimensión finita del sistema. No entraremos aquí en más detalles acerca de la teoría general de fluctuaciones, sino que nos centraremos en el problema que nos interesa.

Consideremos la ecuación de Verhulst (9), y tratemos de incorporar en ella agentes tales que, aunque su efecto en promedio es nulo, producen una variación irregular, aleatoria del número de individuos  $N$ . Para ello escribimos

$$\frac{dN}{dt} = kN \frac{\theta - N}{\theta} + N F(t) \quad (14)$$

donde ahora  $N$  debe considerarse como una variable estocástica. El significado del ruido nos lleva a admitir que el valor medio de  $F(t)$  es nulo,

$$\overline{F(t)} = 0 \quad (15)$$

Por otro lado, vamos a suponer que el efecto que tratamos de describir no es sistemático, en el sentido de que no trata de llevar al sistema en ninguna dirección determinada. Dicho de otra forma, no existe relación entre los valores de  $F(t)$  en dos instantes distintos. Matemáticamente escribimos

$$\overline{F(t) F(t')} = \sigma^2 \delta(t - t') \quad (16)$$

siendo  $\sigma$  una constante independiente de  $N$  y de  $t$ . Usualmente y por sencillez se admite que  $F(t)$  es además gaussiana, lo que implica que todos los cumulantes de la distribución de orden superior al segundo son nulos<sup>6)</sup>.

La ecuación (14) es un ejemplo de ecuación de Langevin no lineal y con ruido multiplicativo, ya que la fuerza aleatoria  $F(t)$  aparece multiplicada por la variable estocástica  $N$ .

Para la descripción de un sistema estocástico puede utilizarse también la función de distribución de probabilidad  $P(N, t)$ , dando la probabilidad de que en el instante  $t$  la variable estocástica tome el valor  $N$ . Formalmente puede escribirse,

$$P(N, t) = \overline{\delta[N - N(t)]} \quad (17)$$

En esta formulación, lo que se conoce en general es una ecuación de evolución para  $P(N, t)$ . En el caso particular de que la variación de  $N$  venga regida por una ecuación de Langevin del tipo (14), puede demostrarse<sup>7)</sup> que  $P(N, t)$  obedece la ecuación

$$\frac{\partial P(N, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial N} \left[ \kappa N \frac{\theta - N}{\theta} + \frac{\sigma^2}{2} N - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial N} N^2 \right] P(N, t) \quad (18)$$

que es una ecuación de Fokker-Planck no lineal. El término de primer orden en la derivada respecto de  $N$  se denomina término de arrastre, mientras que el de segundo orden se denomina término de difusión.

En este razonamiento hemos obtenido la ecuación Fokker-Planck a partir de la ecuación de Langevin. Sin embargo, no siempre la relación entre ambas descripciones es clara.

En la ecuación (14) del modelo de Verhulst, el término de ruido se introdujo para incorporar causas externas al sistema no especificadas. Puede también escribirse una ecuación de evolución, formalmente idéntica a la ecuación (14), para una especie del sistema pero donde el término de ruido tiene su origen en la propia dinámica interna del sistema, es decir, en las interacciones con otras especies. Consideremos el sistema de ecuaciones (10) donde

los términos cuadráticos de interacción entre las especies se toman como suma aleatoria. Esto puede hacerse si el número de especies que interaccionan es infinito, de manera que cada especie interacciona con un gran número de otras especies, y los coeficientes de interacción  $a_{ij}$  van a tomar un gran número de veces ambos signos, positivo y negativo, para cada  $i$ . Además, como cada  $N_j$  varía con el tiempo influenciada por las otras especies aleatorias, la suma puede considerarse un término aleatorio. De forma que

$$\begin{aligned} \frac{dN_i}{dt} &= K_i N_i \frac{\theta_i - N_i}{\theta_i} + N_i \left( \beta_i^{-1} \sum_{j=1}^n a_{ij} N_j \right) \\ &= K_i N_i \frac{\theta_i - N_i}{\theta_i} + N_i G_i(t) \end{aligned} \quad (19)$$

donde el término aleatorio  $G_i(t)$  está definido por la última igualdad. Ahora el término de ruido multiplicativo es consecuencia de efectos internos al propio sistema. El razonamiento que acabamos de presentar está muy cercano a las ideas que llevaron originalmente a la teoría del movimiento browniano<sup>5)</sup>.

Es importante dejar claro que desde un punto de vista matemático puede aparecer un dilema en la interpretación de un término de ruido multiplicativo<sup>8)</sup>. Sin embargo, no aparecen dificultades cuando se realiza un estudio totalmente microscópico del problema, a partir de ecuaciones de Hamilton con condiciones iniciales adecuadas.



## 2.2 DEDUCCION DEL MODELO DE VERHULST A PARTIR DEL MODELO DE LOTKA-VOLTERRA

El objetivo de este apartado es mostrar como, en ciertas condiciones, una especie perteneciente a un sistema ecológico de especies que interaccionan según el modelo de Lotka-Volterra, obedece una ley del tipo Malthus-Verhulst. El estudio permitirá entender el origen del término de saturación, que evita el crecimiento ilimitado de la especie, en el modelo de Malthus-Verhulst. Al mismo tiempo, aparecerá un término estocástico de ruido que no está presente en la ecuación original.

Supongamos que tenemos un sistema compuesto por  $n$  especies distintas que obedecen las ecuaciones de Lotka-Volterra (2). Estas ecuaciones son deterministas, en el sentido de que, especificadas unas condiciones iniciales dan el número exacto de individuos que hay en cada instante de cada una de las especies.

Admitiremos que existen para todas las especies valores de equilibrio  $Q_j$ , número de individuos de la especie  $j$  en el equilibrio. Estos valores están dados por la ecuación (4). Podemos utilizar esta expresión para eliminar los coeficientes  $K_i$ , de forma que la ecuación de Lotka-Volterra para la especie  $i$  se escribe

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = \beta_i^{-1} \sum_{j=1}^n a_{ij} N_i [N_j - Q_j] \quad (20)$$

Escalando adecuadamente las poblaciones  $N_i$  y la matriz  $a_{ij}$ , se puede tomar los números equivalentes  $\beta_i$  igual a la unidad. A partir de ahora, supondremos que se ha hecho así.

El conjunto (2) de  $n$  ecuaciones diferenciales no lineales puede resolverse algebraicamente para  $n=1$  y estudiarse gráficamente para  $n=2$ , como ya hemos visto anteriormente. Sin embargo, se sabe poco acerca de sus soluciones para valores grandes de  $n$ . Kerner<sup>9)</sup> ha desarrollado una teoría basada en la hipótesis de que para valores grandes de  $n$  se pueden utilizar métodos análogos a los de la Mecánica Estadística. Por otro lado, el método que seguimos en el apartado anterior para obtener la ecuación estocástica (19) se basó en aproximaciones drásticas concernientes a la aleatoriedad o ausencia de correlaciones, sin seguir ningún tipo de razonamientos sistemáticos. Para poder llevar a cabo un estudio detallado, será necesario simplificar el modelo dado por las ecuaciones (20).

Vamos a especificar ahora el modelo que utilizaremos. Dado el conjunto de ecuaciones de Volterra, nos preguntamos en que condiciones la ecuación de evolución de una

especie será del tipo de Verhulst. Puede esperarse que el modelo de Verhulst sea válido para describir situaciones en las que se introduce una nueva especie en un sistema en equilibrio, o cuando se produce un cambio repentino en la constante de evolución aislada causando una rápida variación de las poblaciones de algunas especies del sistema inicialmente en equilibrio.

De acuerdo con esto, vamos a suponer que en el instante inicial las  $n$  especies están próximas a sus valores de equilibrio,

$$\bar{N}_i(0) \simeq Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (21)$$

mientras que la especie añadida o perturbada,  $\bar{N}_0(t)$ , tiene un valor inicial muy separado del de equilibrio.

La evolución de la población de la especie añadida, que denominaremos especie problema, viene dada por la ecuación

$$\frac{d\bar{N}_0(t)}{dt} = \bar{N}_0(t) \sum_{i=1}^n a_{0i} [\bar{N}_i(t) - Q_i] \quad (22)$$

Por otro lado, la ecuación de evolución de la especie  $i$ , con  $i \neq 0$ , se puede separar en dos partes

$$\frac{d\bar{N}_i(t)}{dt} = \bar{N}_i(t) \sum_{j=1}^n a_{ij} [\bar{N}_j(t) - Q_j] + \bar{N}_i(t) a_{i0} [\bar{N}_0(t) - Q_0] \quad (23)$$

La idea es que el resto del sistema actúa como un baño respecto a la especie problema  $N_0(t)$ .

Definimos unas nuevas variables

$$x_i(t) = \frac{N_i(t) - Q_i}{Q_i^{1/2}} \quad i \neq 0 \quad (24)$$

y una nueva matriz de interacción  $\subseteq$  de componentes

$$C_{ij} = Q_i^{1/2} a_{ij} Q_j^{1/2} \quad i, j \neq 0 \quad (25)$$

En estas nuevas variables la ecuación de evolución de las poblaciones de las especies del baño, ecuación (23), se convierte en

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \left[ 1 + \frac{x_i(t)}{Q_i^{1/2}} \right] \sum_{j=1}^n C_{ij} x_j(t) + Q_i^{1/2} \left( 1 + \frac{x_i(t)}{Q_i} \right) a_{i0} [N_0 - Q_0] \quad (26)$$

Hemos admitido que inicialmente los  $x_i$  son todos muy pequeños excepto el correspondiente a la especie problema. Supongamos que durante su evolución se mantienen pequeños, es decir

$$|x_i(t)| \ll Q_i^{1/2} \quad \forall t \quad (27)$$

Si esto es así, las ecuaciones de evolución de las  $x_i(t)$ , (26), pueden aproximarse por su versión linealizada. Posteriormente discutiremos la validez de nuestra suposición. Las ecuaciones linealizadas son

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n C_{ij} x_j(t) + Q_i^{1/2} a_{i0} [N_0(t) - Q_0] \quad (28)$$

Estas ecuaciones pueden resolverse formalmente para unas condiciones iniciales dadas:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n \int_0^t dt' U_{ij}(t-t') Q_j^{1/2} a_{j0} [N_0(t') - Q_0] + \sum_{j=1}^n U_{ij}(t) x_j(0) \quad (29)$$

donde el operador matricial  $\underline{U}(t)$  viene dado por

$$U_{ij}(t) = \left[ \exp \underline{\subseteq} t \right]_{ij} \quad i, j \neq 0 \quad (30)$$

es decir, el elemento  $ij$  del operador matricial es el elemento  $ij$  de la matriz formada por la exponencial del producto de la matriz de los coeficientes de interacción  $\underline{\subseteq}$  por el tiempo. Esto indica que el operador  $\underline{U}(t)$  depende exclusivamente de la dinámica interna de las especies del baño.

Introduciendo esta solución en la ecuación de evolución de la especie problema (22), resulta

$$\frac{dN_0(t)}{dt} = -N_0(t) \int_0^t dt' K(t-t') [N_0(t') - Q_0] + N_0(t) F(t) \quad (31)$$

La única aproximación introducida hasta ahora es la linealización de las especies del baño. En esta ecuación,  $K(t-t')$  es un núcleo que da cuenta de efectos no markovianos o de memoria, en la evolución de la especie problema. Su expresión es

$$K(t) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{0i} Q_i^{1/2} U_{ij}(t) Q_j^{1/2} a_{j0} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i U_{ij}(t) c_j \quad (32)$$

donde  $C_i = a_{oi} Q_i^{1/2}$ . Además por  $F(t)$  hemos representado un término de "ruido" dado por

$$F(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{oi} Q_i^{1/2} U_{ij}(t) x_j(0) \quad (33)$$

Si uno admite que es válida una descripción estocástica, en que inicialmente las especies estaban distribuidas de acuerdo con una distribución análoga al colectivo canónico de la Mecánica Estadística, resulta que<sup>9)</sup>  $F(t)$  tiene las propiedades de un ruido gaussiano verificando

$$\langle F(t) \rangle = 0 \quad (33-a)$$

$$\langle F(t) F(t') \rangle = \Theta K(t-t') \quad (33-b)$$

donde  $\Theta$  es un parámetro análogo a la temperatura dado por

$$\langle x_i x_j \rangle = \Theta \delta_{ij} \quad (33-c)$$

En estas expresiones el corchete angular indica un promedio sobre un colectivo de condiciones iniciales.

Tanto el núcleo  $K(t)$  como el ruido  $F(t)$  dependen de los coeficientes de interacción de las especies del baño entre sí, así como de sus interacciones con la especie problema. Sin embargo, el ruido  $F(t)$  depende también de las condiciones iniciales en las que se encuentre el sistema.

Analícemos más detenidamente el núcleo no markoviano  $K(t-t')$ , que viene determinado por todas las constantes de interacción y por todas las poblaciones de equilibrio. Su evolución explícita es prohibitiva para más de tres especies, por lo que recurriremos a aproximaciones. Sabemos que la matriz  $\Xi$  es antisimétrica. Por tanto, si  $n$  es par, sus autovalores serán  $n/2$  parejas de números complejos conjugados,  $\pm i\omega_p$ . Si  $n$  es impar, aparecerá además, un autovalor real igual a cero. Esto indica que el núcleo de memoria  $K(t)$  puede escribirse en la forma

$$K(t) = \sum_p K_p \cos \omega_p t \quad (34)$$

Cuando el número de especies es muy grande y la matriz de interacción  $\Xi$  es suficientemente irregular, cabe esperar que  $K(t)$  decaiga fluctuando desde un valor inicial, siendo el tamaño de la banda de fluctuaciones del orden de  $1/\sqrt{n}$ . Este decaimiento, que no tiene porqué ser monótono, vendrá caracterizado por un tiempo  $T$ . Para tiempos grandes, comparados con  $T$ , el comportamiento de  $K(t)$  será del tipo de cualquier función cuasiperiódica. Por tanto, para los fenómenos que nos interesan únicamente vamos a considerar tiempos del orden de  $T$ , ignorando los efectos de periodicidad que aparecerían en escalas mayores.

Para resolver explícitamente la ecuación (31) vamos a especificar la matriz de interacción  $\Xi$ , escogiendo una expresión que sea diagonalizable. Al buscar una expresión

sencilla hay que tener en cuenta que no interesa que haya muchos coeficientes nulos. Cuanto mayor es el número de coeficientes no nulos mayor es el efecto del baño térmico ejercido por las demás especies sobre la problema. Por ello, teniendo en cuenta que  $\underline{\underline{\Xi}}$  ha de ser antisimétrica, tomamos

$$\underline{\underline{\Xi}} = w \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \vdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

Esta matriz describe un comportamiento jerárquico de las especies. Cada especie come a todas las que le siguen y es comida por todas las anteriores. Los autovalores  $i\omega_p$  asociados a los autovectores  $\chi_j^{(p)}$  ( $p = 1 \dots n$ ) para cada especie  $j$  de la matriz  $\underline{\underline{\Xi}}$  vienen dados por

$$\omega_p = w \cotg \left[ \frac{\pi(p+1/2)}{n} \right] \quad (36-a)$$

$$\chi_j^{(p)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp \left[ \frac{2\pi i (p+1/2) j}{n} \right] \quad (36-b)$$

con lo que el operador de evolución  $U(t)$  puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} U_{kj}(t) &= \sum_{p=1}^n \chi_k^{(p)} \chi_j^{(p)*} e^{i\omega_p t} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \exp \left[ \frac{2\pi i (p+1/2) (k-j)}{n} + i t w \cotg \left( \frac{\pi(p+1/2)}{n} \right) \right] \end{aligned} \quad (37)$$

Para valores grandes de  $n$ , formalmente para  $n \rightarrow \infty$ , la suma se puede aproximar por una integral con lo que resulta

lo que resulta

$$u_{kj}(t) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \exp[2i(k-j)\varphi + itw \cot \varphi] \quad (38)$$

donde se ha realizado el cambio de variable  $\varphi = \frac{\pi(p+1/2)}{n}$ .

Calculando la integral que aparece en (38) se tiene

$$u_{kj}(t) = \begin{cases} 0 & k < j \\ e^{-tw} & k = j \\ e^{-tw} \sum_{r=0}^{j-1} \binom{k-j-1}{r} \frac{(-2tw)^{r+1}}{(r+1)!} & k > j \end{cases} \quad (39)$$

Este resultado muestra que para  $n$  finito todos los modos normales son oscilatorios, pero para  $n \rightarrow \infty$  aparece un decaimiento irreversible, es decir la función ya no es cuasiperiódica (el tiempo de recurrencia se ha hecho tender a infinito).

Para este modelo, el núcleo  $K(t)$  y la fuerza aleatoria  $F(t)$  vienen dados por

$$\begin{aligned} K(t) &= - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n Q_k^{1/2} a_{0k} u_{kj}(t) Q_j^{1/2} a_{0j} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_k c_j \sum_{p=1}^n x_k^{(p)} x_j^{(p)*} e^{i\omega p t} \\ &= \sum_{p=1}^n e^{i\omega p t} \left| \sum_{j=1}^n c_j x_j^{(p)} \right|^2 \end{aligned} \quad (40)$$

y

$$F(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i u_{ij}(t) x_j(0) \quad (41)$$

La magnitud  $\sum_{j=1}^n C_j \chi_j^{(p)}$  puede tener cualquier valor eligiendo convenientemente los  $C_j$ , cuya única condición es que deben ser reales. Por tanto,  $K(t)$  puede tener cualquier forma sin más condiciones que su transformada de Fourier debe ser positiva.

Vamos a estudiar algunas formas particulares del núcleo  $K(t)$ .

FORMA I: Consideremos el caso en que todos los  $C_j = \Omega$  o todos iguales a  $-\Omega$ . Es decir la especie problema come, o es comida, por todas las especies del baño. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} K(t) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n C_k U_{kj}(t) C_j = \Omega^2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n U_{kj}(t) \\ &= \frac{\Omega^2}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n \exp \left[ \frac{2\pi i (p+1/2)(k-j)}{n} + itw \cot \frac{\pi(p+1/2)}{n} \right] \end{aligned} \quad (42-a)$$

o haciendo el cambio de variable  $\varphi = \frac{\pi}{n} (p+1/2)$

$$K(t) = \frac{\Omega^2}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{\varphi} \exp \left[ 2i\varphi(k-j) + itw \cot \varphi \right] \quad (42-b)$$

En el límite  $n \rightarrow \infty$  aproximamos la suma por una integral y resulta

$$K(t) = \Omega^2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi e^{2i\varphi(k-j)} e^{itw \cot \varphi} \quad (42-c)$$

teniendo en cuenta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (e^{2i\varphi})^j = \frac{e^{2i\varphi}}{1 - e^{2i\varphi}} \quad (43)$$

y análogamente para el otro sumatorio, es fácil ver que

$$\left[ \sum_{j=1}^n (e^{-zij\varphi})^j \right] \left[ \sum_{i=1}^n (e^{-zij\varphi})^i \right] = \frac{1}{\varphi \operatorname{sen}^2 \varphi} \quad (44)$$

y sustituyendo este resultado en la ecuación (42-c) de  $K(t)$

$$K(t) = \frac{\Omega^2}{4\pi} \int_0^\pi d\varphi \frac{e^{it\omega \cot \varphi}}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \quad (45)$$

Este resultado puede expresarse en forma más sencilla haciendo el cambio de variable  $z = \cot \varphi$  con lo que se obtiene

$$K(t) = \frac{\Omega^2}{2} \delta(\omega t) \quad (46)$$

Cuando este resultado se introduce en la ecuación de evolución de  $N_0(t)$ , (31), resulta

$$\frac{dN_0(t)}{dt} = -\frac{\Omega^2}{\omega} N_0(t) [N_0(t) - Q_0] + F(t) N_0(t) \quad (47)$$

Se puede tomar como unidad de tiempo  $\frac{\Omega^2}{\omega}$ , con lo que redefiniendo la fuerza aleatoria escribimos

$$\frac{dN_0(t)}{dt} = -N_0(t) [N_0(t) - Q_0] + \hat{F}(t) N_0(t) \quad (48)$$

Este resultado indica que en el caso que estamos considerando los efectos de memoria se vuelven despreciables.

Para obtener la ecuación (48) hemos supuesto que las especies del baño se encuentran inicialmente muy

proximas a sus valores de equilibrio y que se mantienen así a lo largo de su evolución temporal. Por otro lado, el ruido es proporcional a las desviaciones iniciales de las poblaciones de las especies del baño respecto de sus valores de equilibrio. Parece lógico entonces admitir que el último término de (48) puede desprejiciarse. Por tanto, la expresión para la evolución de  $\bar{N}_0(t)$  se reduce a

$$\frac{d\bar{N}_0(t)}{dt} = -\bar{N}_0(t) \left[ \bar{N}_0(t) - Q_0 \right] \quad (49)$$

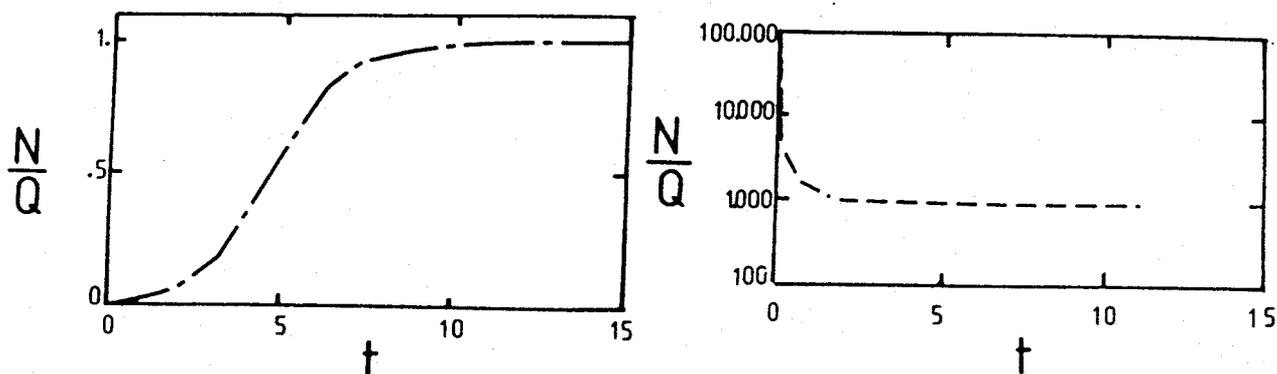
cuya solución es

$$\frac{\bar{N}_0(t)}{Q_0} = \frac{1}{1 - \frac{\bar{N}_0(0) - Q_0}{\bar{N}_0(0)} e^{-Q_0 t}} \quad (50)$$

Esta expresión representa una aproximación monótona hacia el estado de equilibrio estable  $Q_0$ , cualquiera que sea la población inicial de la especie problema satisfaciendo las condiciones necesarias de linealización.

Igualmente la ecuación (49) puede considerarse una ecuación de valores medios si desprejiamos los efectos de renormalización, es decir, si aproximamos el valor medio del cuadrado de la variable por el cuadrado del valor medio. El hecho de tener en cuenta las fluctuaciones no introduce ningún otro estado estacionario estable, sino que simplemente produce una pequeña desviación del valor estacionario. Tampoco se altera el comportamiento cualitativo de la evolución temporal.

En resumen, la resolución exacta de la ecuación de evolución (48) lleva a una solución análoga a la expresión (50). En la figura se muestra el comportamiento de  $N_0(t)$  para una condición inicial mucho mayor que la de equilibrio y para una mucho menor.



FORMA II : Vamos a estudiar ahora un caso de núcleo no markoviano sencillo, concretamente un núcleo proporcional a una exponencial decreciente en el tiempo. Tomaremos los coeficientes de interacción entre la especie problema y las especies del baño como una serie aleatoria de valores  $+\Omega$  y  $-\Omega$ . En este caso

$$\begin{aligned}
 K(t) &= \sum_{p=1}^n e^{i\omega_p t} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n X_j^{(p)} X_i^{(p)*} \overline{C_j C_i} \\
 &= \Omega^2 \sum_{p=1}^n e^{i\omega_p t} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n X_j^{(p)} X_i^{(p)*} \delta_{ij} \\
 &= \Omega^2 \sum_{p=1}^n e^{i\omega_p t} \sum_{j=1}^n |X_j^{(p)}|^2
 \end{aligned} \tag{51}$$

donde

$$|X_j^{(p)}|^2 = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{2\pi i (p+1/2) j}{n}} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{2\pi i (p+1/2) j}{n}} = \frac{1}{n} \tag{52}$$

y por tanto

$$K(t) = \Omega^2 \sum_{p=1}^n e^{i\omega t \cotg \frac{\pi(p+1/2)}{n}} = \Omega^2 \sum_{\varphi} e^{i t \omega \cotg \varphi} \quad (53-a)$$

donde hemos hecho el cambio de variable  $\varphi = \frac{\pi}{n} (p+1/2)$ . En el límite en que el número de especies tiende a infinito el sumatorio se convierte en una integral y tenemos

$$K(t) = \frac{\Omega^2}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi e^{i\omega t \cotg \varphi} \quad (53-b)$$

o, mediante un cambio sencillo,

$$K(t) = \Omega^2 e^{-\omega t} \quad t \geq 0 \quad (54)$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (31)

resulta

$$\frac{dN_0(t)}{dt} = -\Omega^2 N_0(t) \int_0^t dt' e^{-\omega(t-t')} [N_0(t') - Q_0] + N_0(t) F(t) \quad (55)$$

donde, por las mismas razones expuestas antes podemos omitir el término de ruido. Despreciando además las correlaciones entre  $\tilde{N}_0(t)$  y  $\tilde{N}_0(t')$  esta ecuación puede entenderse como una ecuación macroscópica

$$\frac{dN_0(t)}{dt} = -\Omega^2 N_0(t) \int_0^t dt' e^{-\frac{t-t'}{T}} [N_0(t') - Q_0] \quad (56)$$

donde  $T = \frac{1}{\omega}$ .

Si se introduce la variable

$$v(t) = \ln \frac{N_0(t)}{Q_0} \quad (57)$$

que es una medida de la desviación respecto del valor de equilibrio, se tiene

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\Omega^2 Q_0 \int_0^t dt' e^{-\frac{t-t'}{\tau}} [e^{v(t')} - 1] \quad (58)$$

Esta ecuación integrodiferencial puede transformarse en una ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} = -w \frac{dv(t)}{dt} - \Omega^2 [e^{v(t)} - 1] \quad (59)$$

que debe resolverse con las condiciones iniciales  $v(0) = \ln \frac{N_0(0)}{Q_0}$   
y  $\left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0$ .

Para el análisis de esta ecuación es conveniente elegir una escala temporal adecuada. Es evidente que existen dos escalas naturales de tiempo, una asociada con  $\Omega$  (constante de interacción entre las especies del baño y la especie problema) y otra asociada con  $w$  (constante de interacción de las especies del baño entre si). Si eligiéramos  $\Omega$  como escala temporal para medir la evolución de la especie problema  $N_0(t)$ , sucedería que en el caso en que  $w \gg \Omega$  la especie problema vería al baño prácticamente siempre en equilibrio. En este caso, la influencia del baño sobre la relajación de la especie problema sería pequeña

y la especie problema tendría un tiempo de relajación muy grande. Es decir, cuanto mayor fuese la diferencia entre ambas constantes mayor sería el tiempo que tardaría en relajarse al equilibrio la especie problema en esta escala. Esto nos hace pensar que  $\mathcal{L}$ , en sí sola, no es una buena elección de la escala temporal pues no permite una cómoda comparación de los resultados para distintas  $\omega$ . Por ello es conveniente elegir como unidad de tiempo  $\frac{\Omega^2}{\omega}$  y escribir (59) en la forma

$$T \frac{d^2 V(t)}{dt^2} = - \frac{dV(t)}{dt} - (e^{v(t)} - 1) \quad (60)$$

Esta ecuación es formalmente análoga a la ecuación de movimiento de una partícula de coordenada  $V$  y masa  $T$  sobre la que actúa un campo externo de la forma  $u(v) = e^v - v$  existiendo además una fuerza de rozamiento  $-dv/dt$ . Esta analogía con el oscilador sugiere el tipo de comportamiento que debe esperarse. Por ejemplo, en el límite  $T \rightarrow \infty$  (o lo que es lo mismo, para  $K(t)$  constante) el movimiento es periódico. Si  $T$  es grande pero finito, el movimiento es oscilatorio pero amortiguado. Debido a la asimetría del potencial la evolución que parte de un  $V(0)$  grande y positivo ( $N_0(0) \gg Q_0$ ) debe ser muy diferente a la que parte de un  $V(0)$  altamente negativo ( $N_0(0) \ll Q_0$ ). En el límite de  $T \rightarrow 0$ , reobtenemos el caso del núcleo markoviano ( $K(t)$  es nulo salvo si  $t = t'$ ) que es el resultado de la ecuación de Verhulst en forma logarítmica. Cuando  $T \neq 0$  existen efectos de memoria.

Las figuras 1 y 2 son soluciones de la ecuación de Verhulst generalizada, (56), obtenidas por integración numérica de la ecuación (60). En ambos casos se ha fijado la escala temporal tomando  $\frac{R^3}{\omega} = 1$ . En la figura 1 se ha tomado un valor inicial  $\frac{N_0(0)}{Q_0} = 10^{-2}$ . En el límite de Verhulst ( $T \rightarrow 0$ ) el crecimiento es monótono. Para  $T=1$  el crecimiento es inicialmente más lento, aumentando después y superando el estado de equilibrio para relajarse posteriormente hacia él desde arriba. Al aumentar  $T$  las sobrepoblaciones respecto del valor estacionario aumentan y ocurren para tiempos mayores.

En la figura 2 (escala logarítmica), tomamos el valor inicial  $\frac{N_0(0)}{Q_0} = 10^2$ . En el límite de Verhulst ( $T \rightarrow 0$ ) el decaimiento es monótono, alcanzándose el valor estacionario para  $t \approx 3$ . Cuando  $T=1$ , la población decae por debajo del valor de equilibrio, mostrando pequeñas oscilaciones alrededor del mismo.

Los fenómenos de sobrepoblación, es decir aquellos casos en los que la evolución hacia el estado estacionario no es monótona sino que se supera dicho estado para volver a tender hacia él desde la situación contraria a la que se partió, se debe a la inercia asociada con los efectos de memoria. Efectos de sobrepoblación han sido obtenidos también en otros tipos de sistemas. En particular, una situación

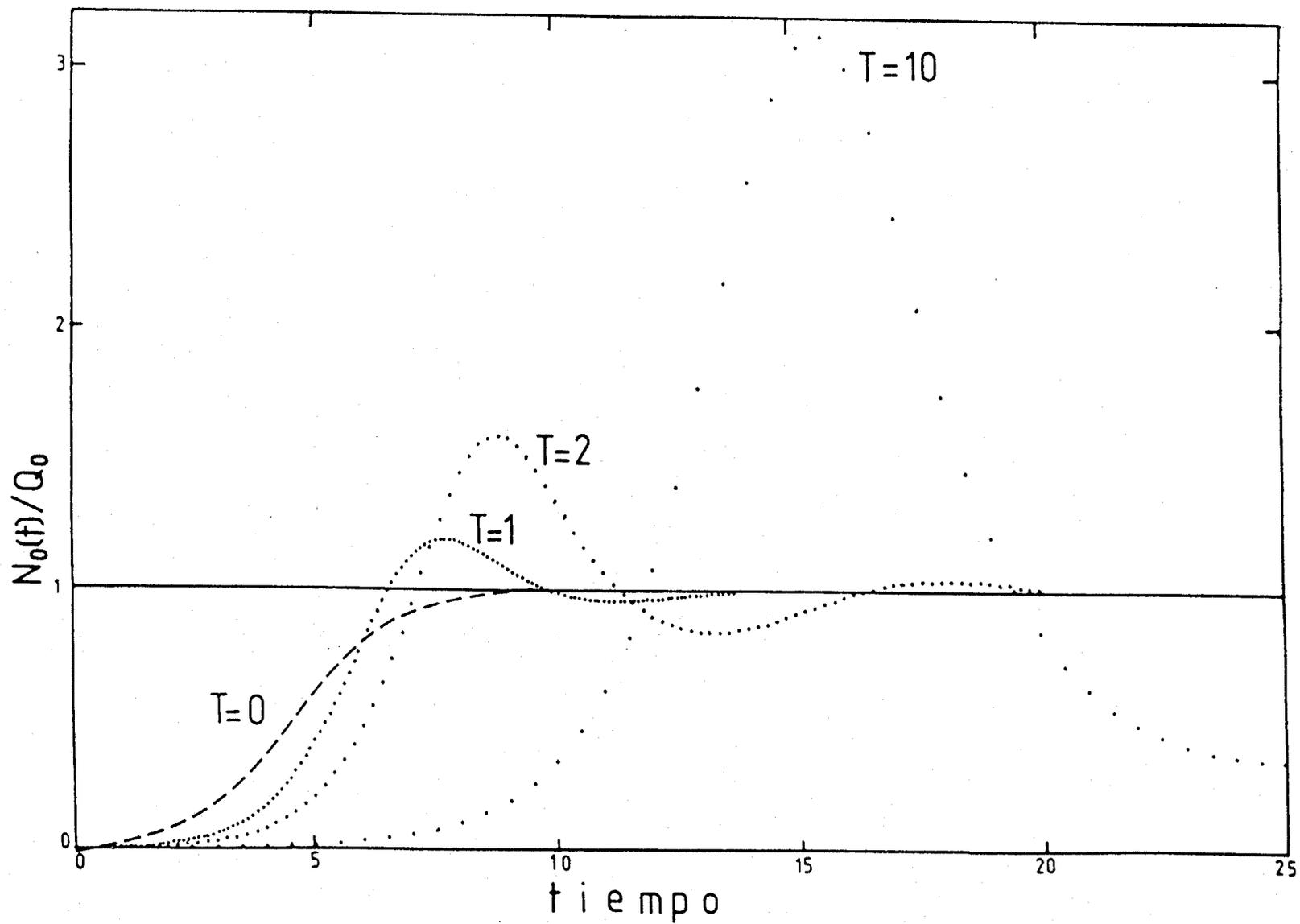


FIG.1 Representación de la evolución de la especie problema en función del tiempo para distintos valores de  $T=1/\omega$ , con la condición inicial  $N_0(0)/Q_0=10^{-2}$

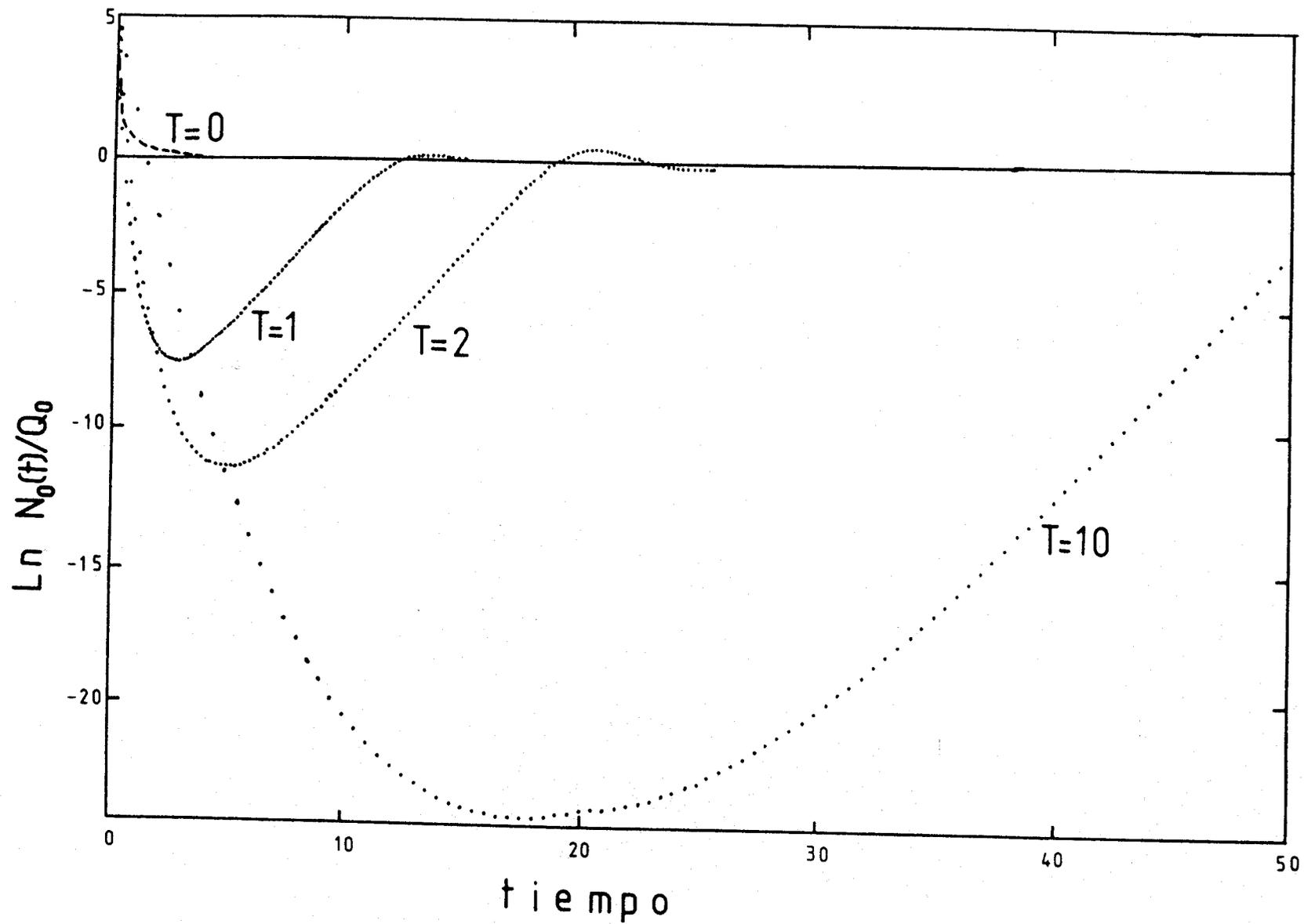


FIG:2 Representación de la evolución de la especie problema en función del tiempo para distintos valores de  $T=1/\omega$ , con la condición inicial  $N_0(0)/Q_0=10^2$

análoga a la encontrada aquí se presenta al resolver la ecuación de Boltzmann no lineal para un gas homogéneo e isótropo cuyas partículas interaccionan según el potencial de Maxwell. En este caso, para ciertas condiciones iniciales se puede obtener una solución analítica exacta de la ecuación de Boltzmann, que tiene la forma de una distribución Maxwelliana de velocidades multiplicada por una función lineal del cuadrado de la velocidad<sup>10)</sup>. Esta función relaja monótonamente hacia la distribución de equilibrio para todas las velocidades. Sin embargo, para otras condiciones iniciales se encontró que la relajación al equilibrio de la función de distribución no es monótona en la región de altas velocidades. Es decir, el número de partículas presentes en el sistema con altas energías aumenta en una primera etapa, sobrepasando el valor de equilibrio, para relajar posteriormente hacia él desde arriba. Este fenómeno de sobrepoblación se denomina efecto Tjon<sup>11)</sup> y ha sido observado también, mediante técnicas de Dinámica Molecular, en fluidos densos interaccionando según un potencial de Lennard-Jones<sup>12)</sup>.

## 2.3 ANÁLISIS NUMÉRICO

### 2.3a Descripción del modelo

El proposito de este apartado es analizar con cierto detalle los límites de validez de los razonamientos expuestos anteriormente y, en particular, de la deducción de la ecuación de Malthus-Verhulst.

Comenzaremos estudiando en que casos es válida la linealización introducida al escribir la ecuación (28). Es decir, admitido que inicialmente las poblaciones de las especies que componen el baño están muy próximas a sus valores de equilibrio, queremos ver cuales son las condiciones para que permanezcan próximas a ellas en su evolución temporal. Un estudio algebraico general, para  $n$  especies, no parece posible. Sin embargo, se puede llevar a cabo cálculos explícitos en el caso de un baño compuesto por una sola especie. Sean  $N_0$ ,  $Q_0$ ,  $N_1$  y  $Q_1$  las poblaciones y valores de equilibrio de las especies problema y baño respectivamente. Tomemos  $N_1(0) = Q_1$ . De acuerdo con la ecuación (8) se tiene

$$G = Q_0 \left[ \frac{N_0(t)}{Q_0} - \ln \frac{N_0(t)}{Q_0} \right] + Q_1 \left[ \frac{N_1(t)}{Q_1} - \ln \frac{N_1(t)}{Q_1} \right] = cte \quad (61)$$

Utilizando esta ecuación es facil ver que la condición (27) es equivalente a

$$i) \quad \ln \frac{Q_0}{N_0(0)} \ll \frac{Q_1}{2Q_0} \quad N_0(0) \ll Q_0 \quad (62-a)$$

$$ii) \quad \frac{N_0(0)}{Q_0} \ll \frac{Q_1}{2Q_0} \quad N_0(0) \gg Q_0 \quad (62-b)$$

Así pues, si  $Q_1$ , población de equilibrio de la especie baño, es suficientemente mayor que la población de equilibrio de la especie problema, las condiciones para la linealización se satisfacen sobre un amplio rango de valores de  $N_0(0)$ . Podemos extrapolar, y esperar que la linealización sea válida siempre que todas las  $Q_j$  sean suficientemente grandes comparadas con  $Q_0$ .

Con el fin de generalizar los resultados anteriores al caso de más especies, vamos a realizar un análisis numérico del sistema de ecuaciones (2). Al mismo tiempo, ello nos va a permitir clarificar la validez de algunas aproximaciones para el núcleo  $K(t)$  dado por la ecuación (32) y, también la posible influencia del término de ruido  $F(t)$  que aparece en la ecuación (31).

A continuación vamos a especificar nuestro modelo es decir los valores de las condiciones iniciales y de los parámetros necesarios para resolver el sistema de ecuaciones (2)

a) Para las especies del baño tomaremos poblaciones iniciales de equilibrio, o sea,

$$x_j(0) = \frac{n_j(0) - Q_j}{Q_j^{1/2}} = 0 \quad \forall j = 1 \dots n \quad (63)$$

b) Tomaremos iguales a la unidad las poblaciones de equilibrio de todas las especies del baño.

$$Q_j = Q = 1 \quad \forall j = 1 \dots n \quad (64)$$

Evidentemente, esto no altera cualitativamente la evolución del sistema, pues en las expresiones del núcleo  $K(t)$  y del ruido  $F(t)$  las  $Q$  siempre aparecen acompañando a los coeficientes de interacción entre las especies,  $a_{ij}$ , luego sus diferencias de valores pueden introducirse en dichos coeficientes.

c) Como matriz  $\subseteq$  de los coeficientes de interacción entre las especies del baño tomaremos una expresión propuesta por van Kampen<sup>13)</sup>

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (65)$$

Como ya sabemos, es posible estudiar esta matriz analíticamente, por lo que esta elección permitirá contrastar con resultados teóricos. Comparando con (35) vemos que ahora hemos tomado  $\omega = 1$  y por tanto  $T = 1$ .

d) Como valor de equilibrio y condición inicial para la población de la especie problema, usaremos las siguientes TIPO I: Cuando queramos partir de una población inicial mayor que la de equilibrio tomaremos

$$Q_0 = 10^{-4} \quad n_0(0) = 10^{-2} \quad (66-a)$$

Con estos valores  $\frac{N_0(0)}{Q_0} = 10^2$  y  $\frac{Q_1}{Q_0} = 10^4$ , la condición (62-b) se cumple con un factor del orden de  $10^2$ .

TIPO II: Cuando estemos interesados en una población inicial menor que la de equilibrio tomaremos

$$Q_0 = 10^{-3} \quad N_0(0) = 10^{-5} \quad (66-b)$$

de forma que  $\frac{N_0(0)}{Q_0} = 10^{-2}$  y la condición (62-a) se cumple de nuevo con un factor del orden de  $10^2$ .

Resumiendo, nuestro modelo consiste en un sistema formado por un gran número de especies interactivas cuya evolución temporal viene dada por las ecuaciones de Lotka-Volterra. Este sistema se encuentra en equilibrio. En el instante inicial se pone en contacto con la especie problema, sobre la cual actúa como baño, y cuya población está muy alejada de su valor de equilibrio. Cuando dicho valor lo tomamos mucho menor que las poblaciones de equilibrio de las especies del baño esperamos que el sistema de ecuaciones de las especies del baño pueda linealizarse entorno a los valores de equilibrio. Por último, según sean los coeficientes de interacción entre la especie problema y las especies del baño, todavía no especificados, así serán el núcleo  $K(t)$  y el ruido  $F(t)$ , y por tanto el resultado analítico con el que debemos comparar.

Como test de validez de la aproximación lineal, hemos comparado la solución del sistema de ecuaciones no

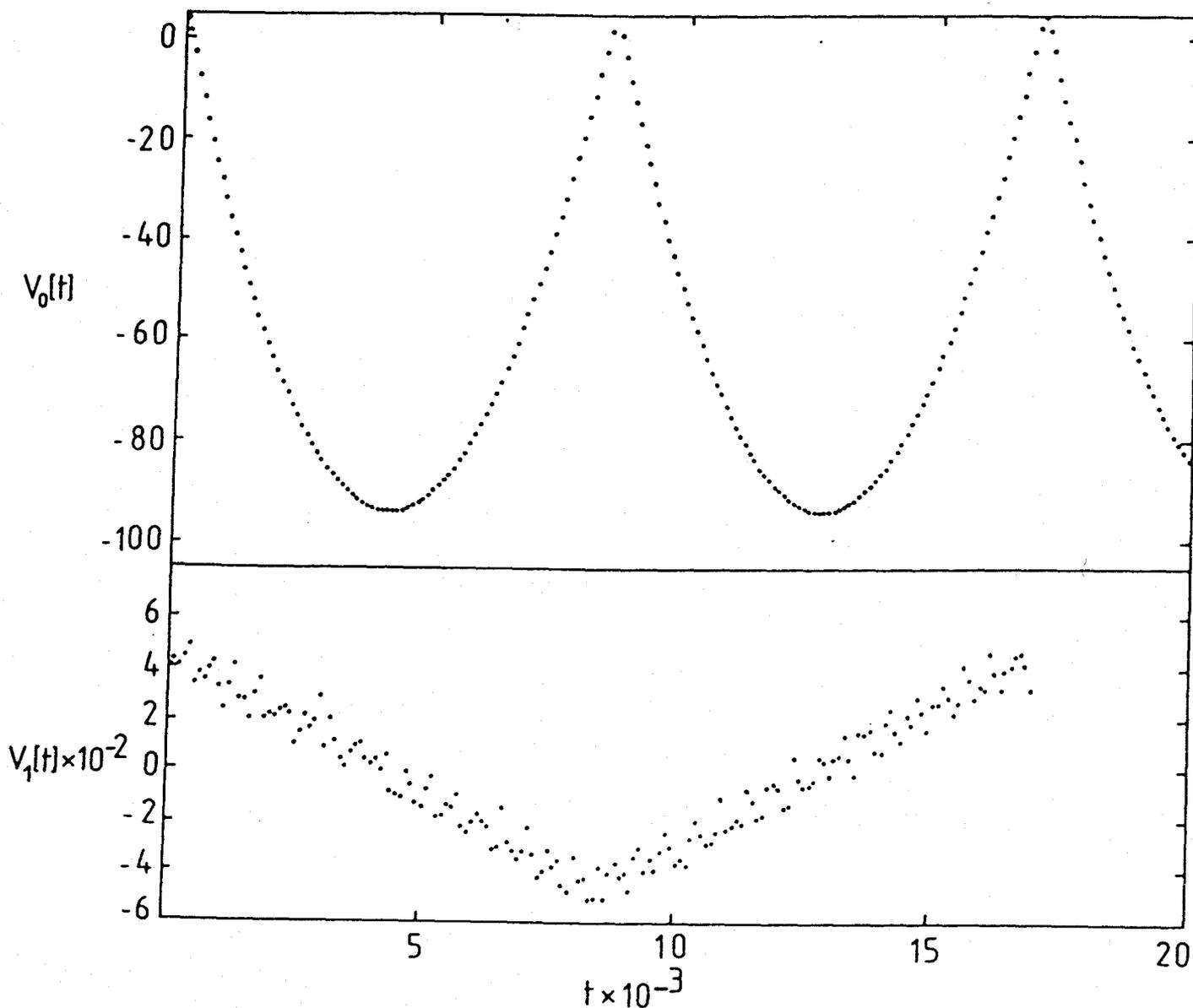


FIG:3 Se representa la solución numérica de la evolución de la especie problema y una de las especies del baño, con las condiciones iniciales  $Q_0 = 10^{-4}$  y  $N_0(0) = 10^{-2}$ . Se observa la validez de la aproximación lineal.

lineales (2) con la solución del sistema linealizado (28) junto con la ecuación para la evolución de la especie problema mantenida sin linealizar (22). Esta comparación la hemos llevado a cabo para dos condiciones iniciales distintas. Las primeras corresponden a un caso en que se verifica una de las condiciones (62) y, por lo tanto, esperamos que la aproximación lineal sea válida. Las segundas condiciones iniciales las hemos tomado de manera que "a priori" la aproximación lineal no es válida.

Por otro lado, hemos considerado en estos cálculos que la interacción entre la especie problema y las especies del baño vienen descritas por unos coeficientes  $\epsilon_j$  todos ellos iguales a la unidad.

En el apéndice 1 damos una idea general del método numérico utilizado. En la figura 3 se muestran los resultados obtenidos con 10 especies y unas condiciones iniciales del tipo I. Las soluciones de las ecuaciones linealizadas y sin linealizar se superponen y no son distinguibles en la escala utilizada. Esto es cierto tanto para las especies del baño como para la especie problema. La parte inferior de la gráfica muestra como la población de las especies del baño permanece en todo instante próxima a su valor de equilibrio, que es la condición necesaria para la validez de la linealización. Nótese que la escala de esta parte inferior se ha aumentado a fin de hacer visible la variación

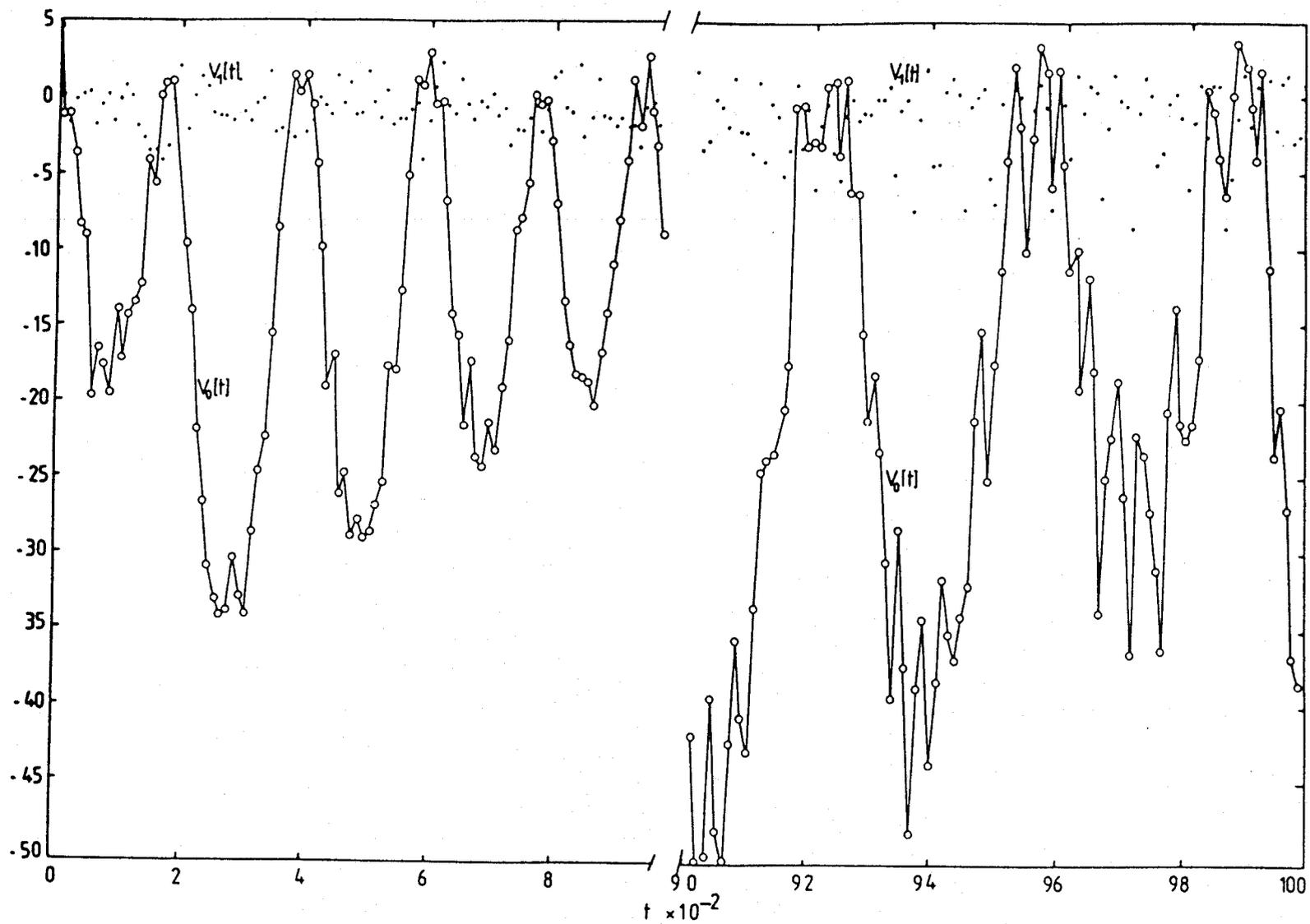


FIG:4 Evolución numérica de la especie problema y una de las especies del baño, con las condiciones iniciales  $Q_0 = 0.1$  y  $N_0(0) = 10$ . Se observa que no es válida la aproximación lineal.

temporal. Por otro lado, el sistema muestra un comportamiento periódico característico, que será objeto de posterior discusión.

Un caso en que la linealización no es válida se presenta en la figura 4, que corresponde también al caso de 10 especies pero con condiciones iniciales  $Q_0 = 0.1$ ,  $N_0 = 10$ . Se observa como efectivamente las poblaciones del baño ya no permanecen próximas a sus valores de equilibrio, sino que fluctúan grandemente alrededor de ellos. Además, la amplitud de las fluctuaciones crece con el tiempo. Por otro lado, el comportamiento regular periódico característico de la aproximación lineal se ha perdido y, en resumen, existe una gran diferencia entre los resultados no lineales y los de la aproximación lineal.

### 2.3b Validez de la aproximación markoviana

De nuestros estudios teóricos del apartado 2.2 dedujimos que el núcleo  $K(t)$  puede aproximarse por una delta de Dirac si se cumplen las tres condiciones siguientes: a) las ecuaciones de evolución del baño pueden linealizarse, b) la matriz de interacción entre las especies del baño tiene la forma (65), c) los coeficientes de interacción entre las especies del baño y la especie problema son todos iguales a +1 o a -1. Además es necesario que el

número de especies del baño sea suficientemente grande a fin de poder tomar el límite continuo. En este apartado que-remos investigar más detalladamente los valores que debe tener  $n$  para que sea válida esta aproximación markoviana. Para ello, partiremos de unas condiciones iniciales para las que sabemos que la aproximación lineal es válida, es decir de unas condiciones iniciales del tipo I o del tipo II definidas en el apartado anterior. El sistema de ecuaciones diferenciales a resolver escrito en las variables  $V_i(t)$  tiene la forma:

$$\frac{dV_0(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n [e^{V_i(t)} - 1] \quad (67-a)$$

$$\frac{dV_j(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n C_{ji} [e^{V_i(t)} - 1] + Q_0 [e^{V_0(t)} - 1] \quad (67-b)$$

estando la matriz  $C_{ij}$  dada por (65).

En la figura 5 hemos representado la evolución temporal de la especie problema para los casos  $n=2,4,6,8,10$  y 12. La evolución temporal es en todos los casos periódica y únicamente se muestra la parte correspondiente al primer periodo. Se observa que el periodo o tiempo de recurrencia,  $T_r$ , aumenta, como era de esperar, con el número de especies que componen el baño. Esto se ve más claramente en la figura 6 que muestra  $T_r$  como una función de  $n$ . Otro parámetro importante es el tiempo  $T_s$  que tarda  $N_0(t)$  en alcanzar por primera vez su valor estacionario. Este tiempo también aumenta con el número de especies como se indica en la

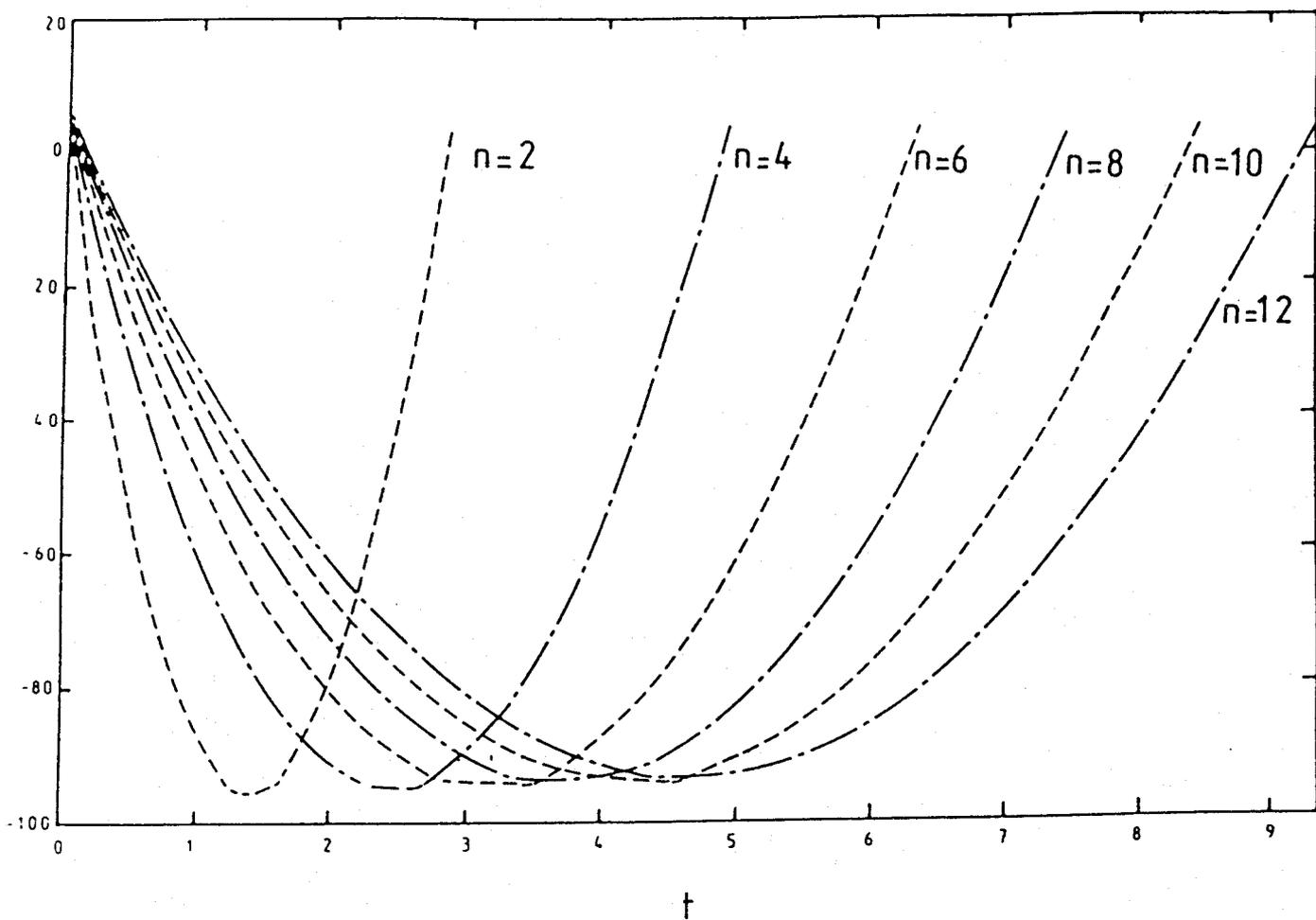


FIG:5 Representación de los resultados numéricos de la evolución temporal de la especie problema  $V_o(t) = \text{Ln}(N_o(t)/Q_o)$  para los casos en que el baño está constituido por 2, 4, 6, 8, 10 y 12 especies.

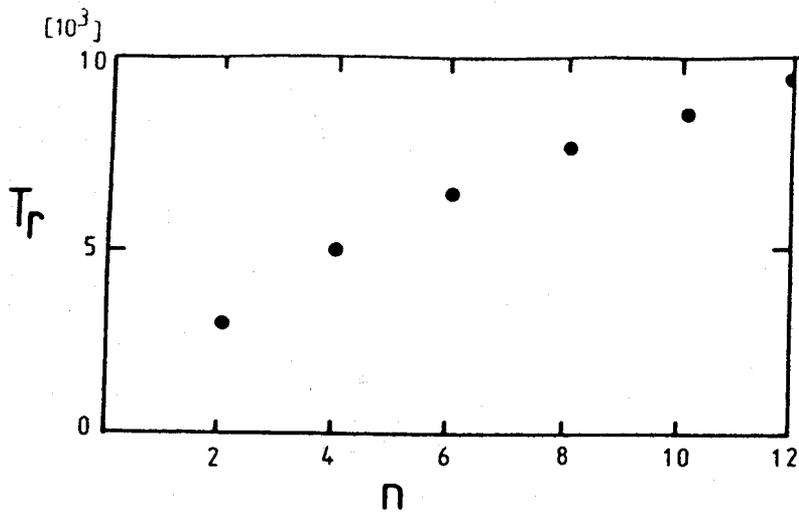


FIG:6

figura 7. Finalmente también el valor de los mínimos alcanzados en la evolución temporal aumenta con  $n$ .

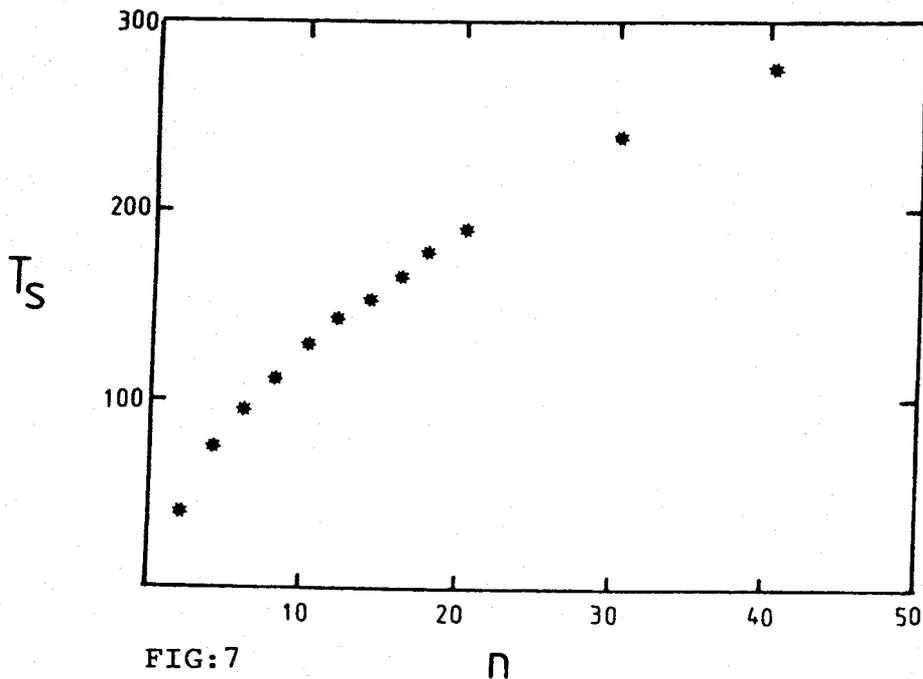


FIG:7

¿Qué consecuencias pueden desprenderse de estos resultados? Creemos que puede afirmarse que en el límite  $n \rightarrow \infty$  tanto  $T_r$  como  $T_s$  tienden a infinito, mientras que el valor del mínimo de  $N_0(t)$  tiende a  $Q_0$ . Dicho de otro modo, esperamos una relajación monótona hacia el valor estacionario.

Nosotros estamos interesados en el estudio de la relajación hacia el equilibrio y no en los efectos periódicos que tienen lugar sobre escalas mayores de tiempo. Por ello, nos vamos a concentrar a partir de ahora en la primera etapa de la evolución de  $N_0(t)$ . En la figura 8 se dan los resultados para  $n=10,30,50,60$ . Se observa que sobre la escala utilizada las curvas presentan una zona común para tiempos cortos, cuya extensión aumenta al aumentar  $n$ . Esta zona puede, por lo tanto, considerarse independiente de  $n$ . Las regiones no comunes de las curvas son manifestación del carácter finito de  $n$ . Así pues solo para tiempos menores que  $t=10^2$  la curva correspondiente a  $n=60$  puede considerarse representativa de lo que sucedería en el límite  $n \rightarrow \infty$ . Esta conclusión se ve corroborada por la comparación de la curva numérica con la teórica, figura 9, dada por la ecuación (50), o sea

$$\frac{N_0(t)}{Q_0} = \frac{1}{1 - 0.99 e^{-10^{-4}t}} \quad (68)$$

Dificultades de tiempo en la utilización del ordenador nos han impedido aumentar significativamente por encima de 60 el número de especies, y alcanzar tiempos suficientemente grandes. De cualquier modo, podemos estimar que para observar la relajación completa al valor estacionario, es decir hasta  $N_0(t)/Q_0$  del orden de  $10^{-1}$  sería necesario como mínimo 250 especies, lo cual está fuera del alcance de nuestras posibilidades de cálculo numérico.

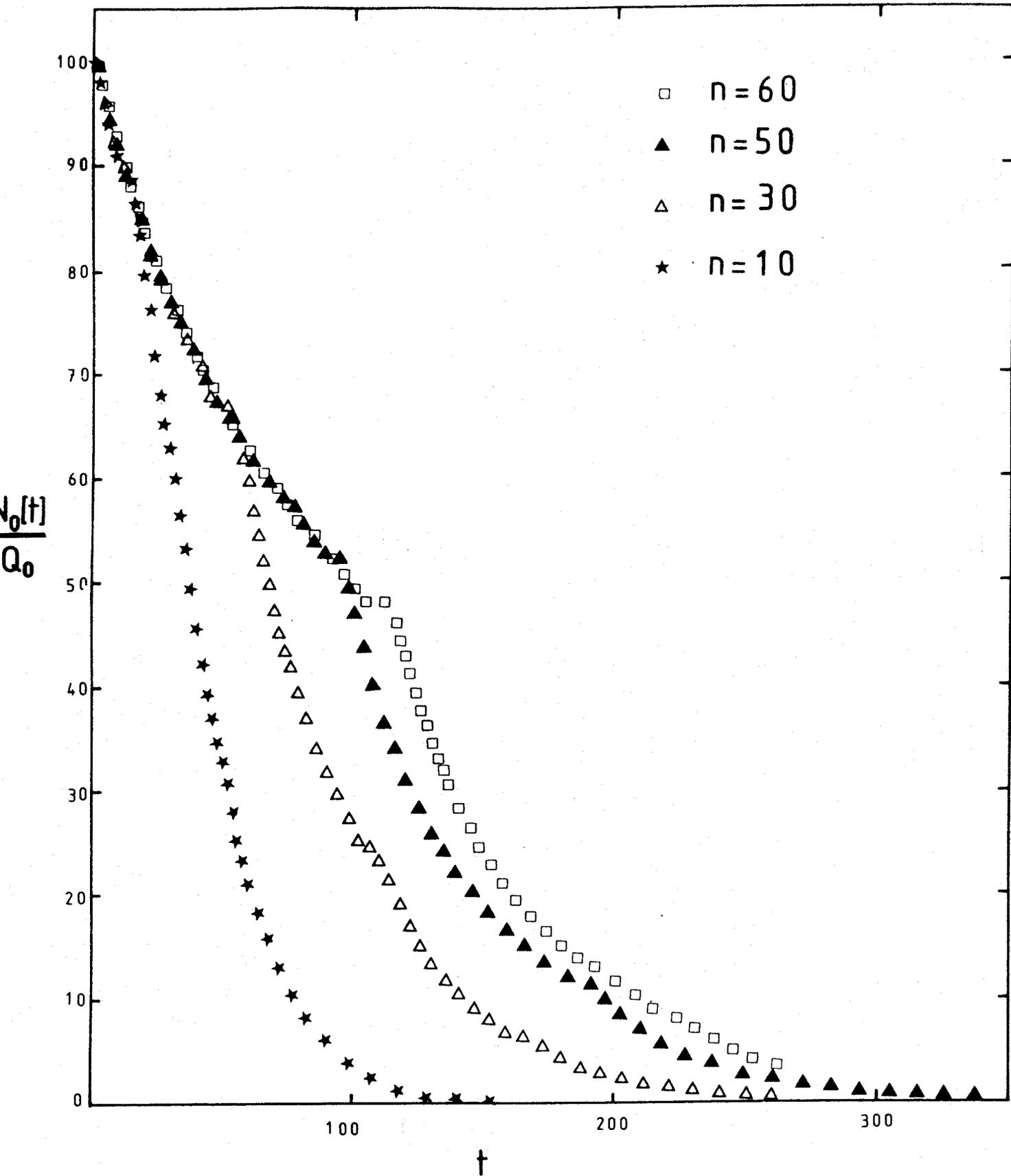


FIG:8 Evolución numérica de la especie problema para un baño constituido por 10,30,50 y 60 especies.

0

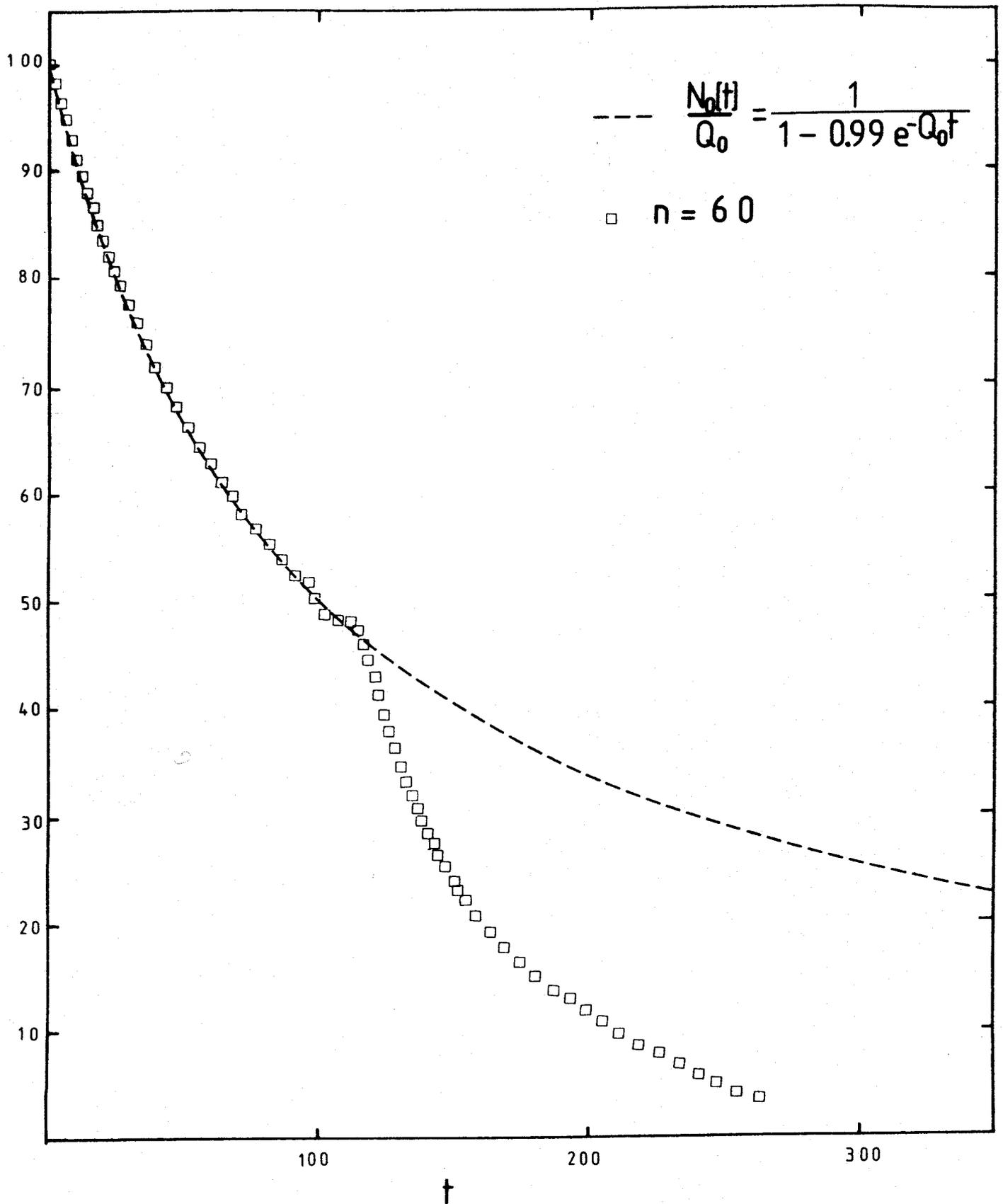


FIG:9 Comparación entre los resultados numéricos de la evolución temporal de la especie problema, sin efecto de memoria y 60 especies en el baño, y la evolución teórica determinista.

### 2.3c Aproximación no markoviana

A continuación nos ocupamos de una interacción entre el baño y la especie problema tal que la teoría predice un núcleo no markoviano. Concretamente, queríamos estudiar numéricamente el caso en que los coeficientes  $\zeta_j$  venían dados por una serie aleatoria de  $+\Omega$  y  $-\Omega$ , para el que el núcleo viene dado por la forma exponencial (54). A las dificultades discutidas de la resolución numérica del sistema de ecuaciones se añade ahora el hecho de que hemos de promediar sobre un conjunto suficientemente grande de valores de los coeficientes  $\zeta_j$  distribuidos de la forma citada. En la figura 10 se dan los resultados obtenidos con  $n=30$  y promediando con 10 series aleatorias de  $+\Omega$  y  $-\Omega$ . Para tiempos mayores que  $t=20$  comienzan a aparecer fluctuaciones espúreas cada vez mayores, manifestación de la insuficiencia del número de especies y del de promedios utilizados. Por ello, y dado que nuestro interés ahora es estudiar la validez de la markovianización, hemos recurrido a resolver el problema numéricamente a partir de una etapa intermedia. En lugar de resolver las ecuaciones no lineales de evolución del sistema, consideraremos su forma una vez promediada sobre el conjunto de valores de los coeficientes  $\zeta_j$ . Es decir, lo que vamos a hacer es resolver numéricamente la ecuación (31) con las expresiones (32) y (33). El procedimiento numérico utilizado se indica a grandes líneas en el apéndice (2).

La influencia del número de especies presentes en el baño sobre el comportamiento de  $N_0(t)$  puede ponerse de

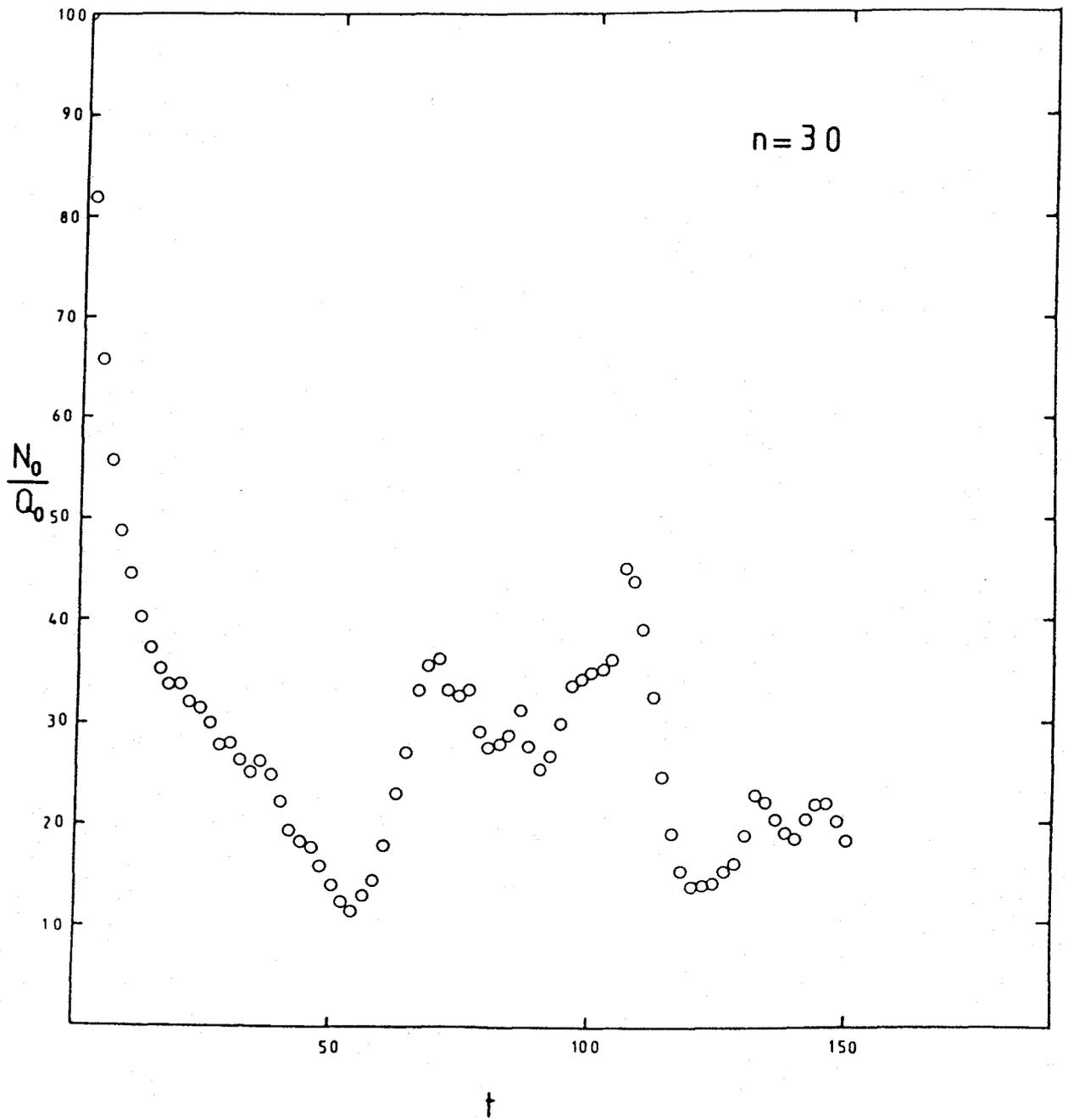


FIG:10 Representación de la evolución temporal numérica de la especie problema con efecto de memoria y un baño constituido por 30 especies, promediando sobre 10 series aleatorias distintas.

manifiesto estudiando directamente el núcleo  $K(t)$ , que sabemos que en el límite  $n \rightarrow \infty$  debe tender a una exponencial de la forma  $e^{-t/\tau}$ . En la figura 11 se muestran los resultados obtenidos para  $n = 100, 200$  así como la curva teórica  $K(t) = e^{-t}$  (hemos tomado  $\omega = 1$ ) Para ambos valores de  $n$  las curvas se comportan bien en promedio, pero las fluctuaciones aumentan con el tiempo siendo mayores, como era de esperar, en el caso  $n = 100$ . Concluimos entonces que el valor  $n = 200$  puede tomarse como significativo, en el sentido de caracterizar bastante bien el límite asintótico. Con este valor hemos resuelto la ecuación de evolución (31) para  $\omega = 0.5, 1$  y para condiciones iniciales del tipo I y del tipo II (figuras 12-15). De los resultados se desprende que hasta tiempos del orden de 15 la resolución numérica de la ecuación concuerda muy bien con la aproximación obtenida introduciendo un núcleo exponencial y despreciando el término de ruido. De hecho, hemos comprobado que este último permanece siempre tres ordenes de magnitud menor que el término de convolución. Para tiempos mayores la resolución numérica de la ecuación de evolución (31) muestra efectos debidos al carácter finito de  $n$ , que se manifiestan en forma de fluctuaciones cuya amplitud aumenta al aumentar  $t$ .

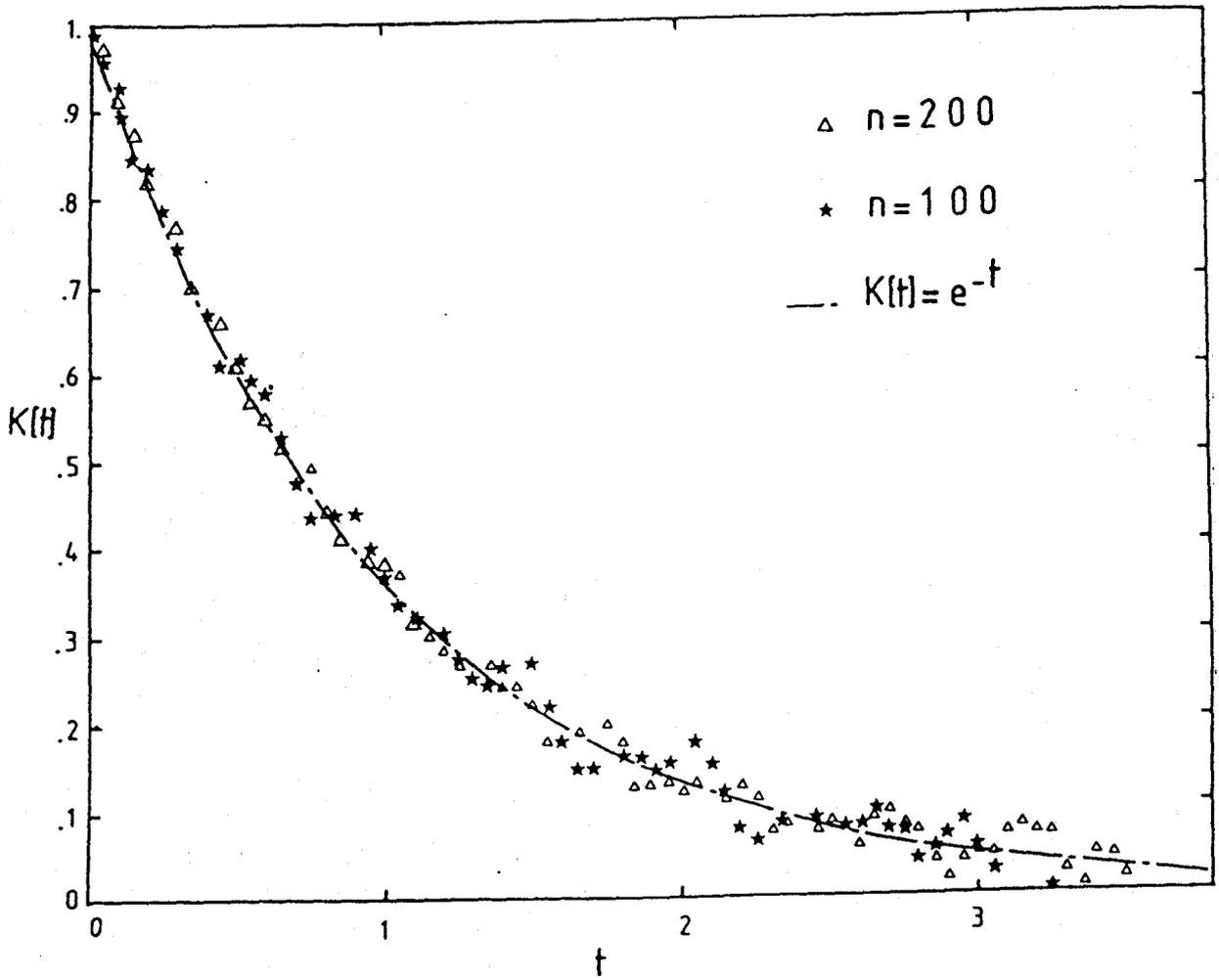


FIG.11 Comparación de los resultados obtenidos para el efecto de memoria calculandolo a partir de su expresión microscópica y con 100 y 200 especies del baño, o calculado a partir del resultado teórico para infinitas especies.

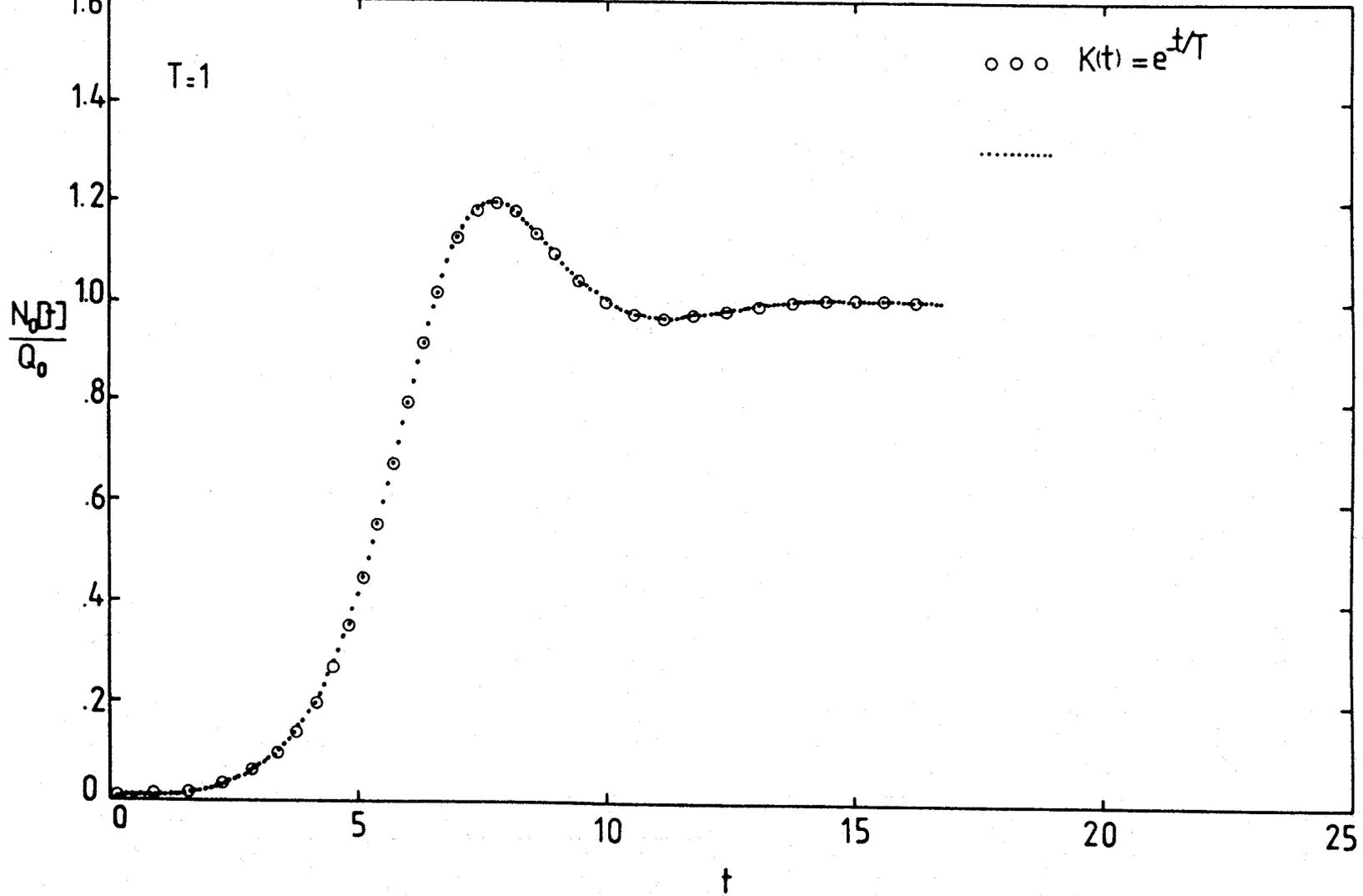


Fig.12 Representación de la evolución temporal numérica de la especie problema con un núcleo con expresión microscópica y efecto de ruido, para 200 especies. Así mismo, se presenta el resultado de despreciar el ruido y considerar un núcleo exponencial. Se considera  $T=1/\omega=1$ ,  $Q_0 = 10^{-4}$  y  $N_0(0) = 10^{-2}$

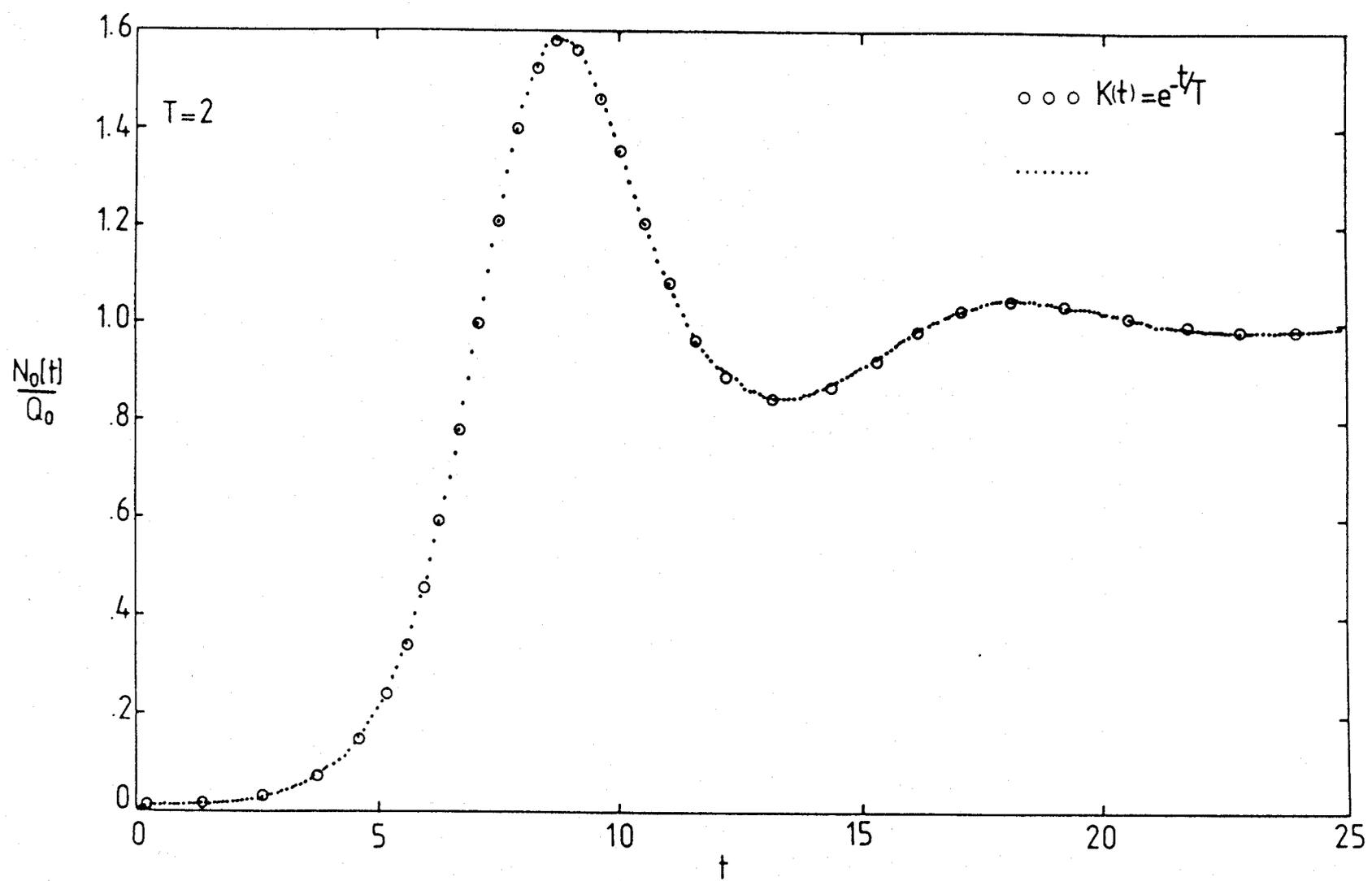


Fig.13 Igual representación que en la Fig.12 con las condiciones  $T=1/\omega=2$ ,  
 $Q_0 = 10^{-4}$  y  $N_0(0) = 10^{-2}$

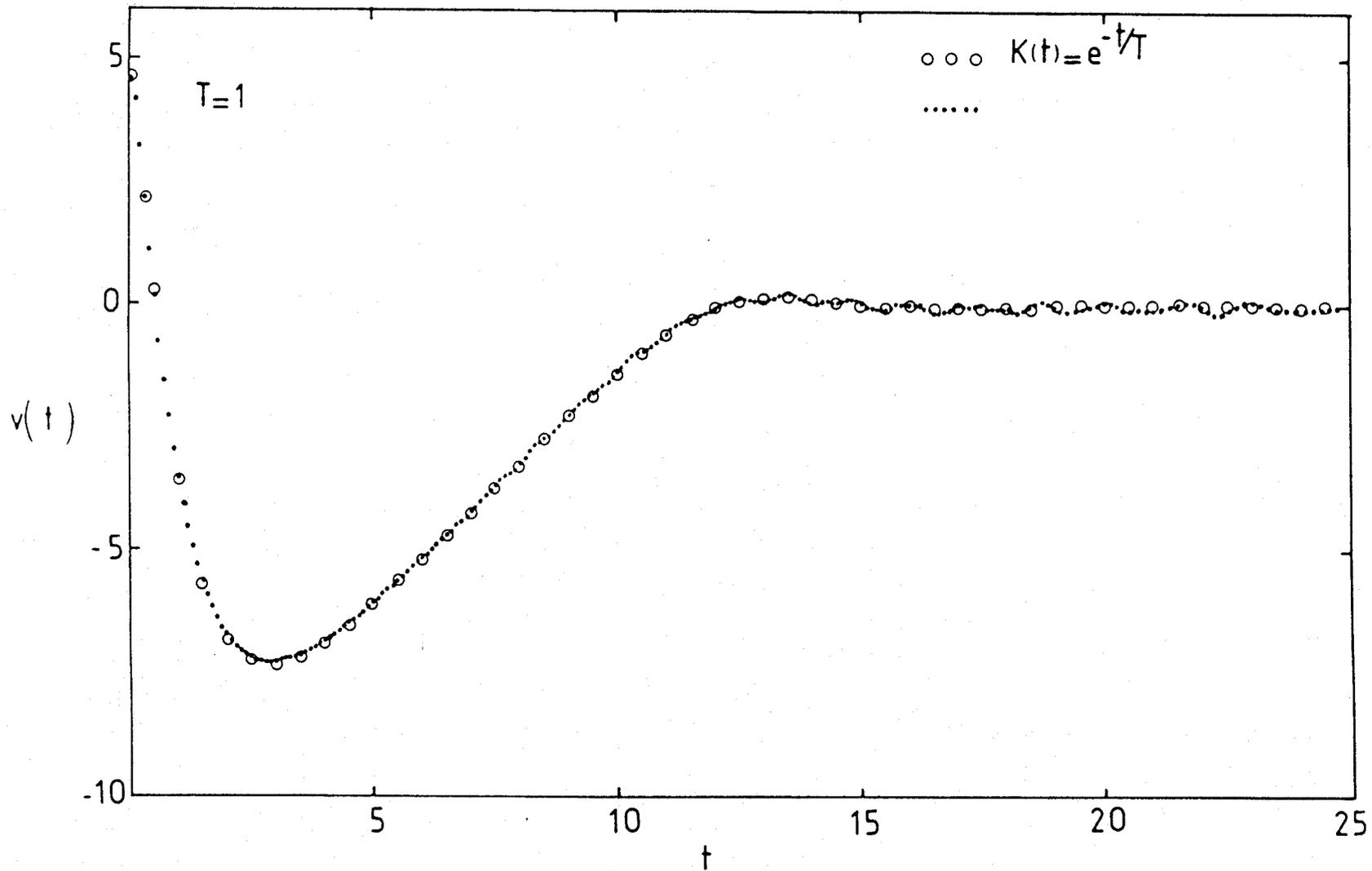


Fig.14 Igual representación que en la Fig.12 con las condiciones  $T = 1/\omega = 1$ ,  $Q_0 = 10^{-7}$  y  $N_0(0) = 10^{-7}$  y donde  $v(t) = \ln(N/Q)$

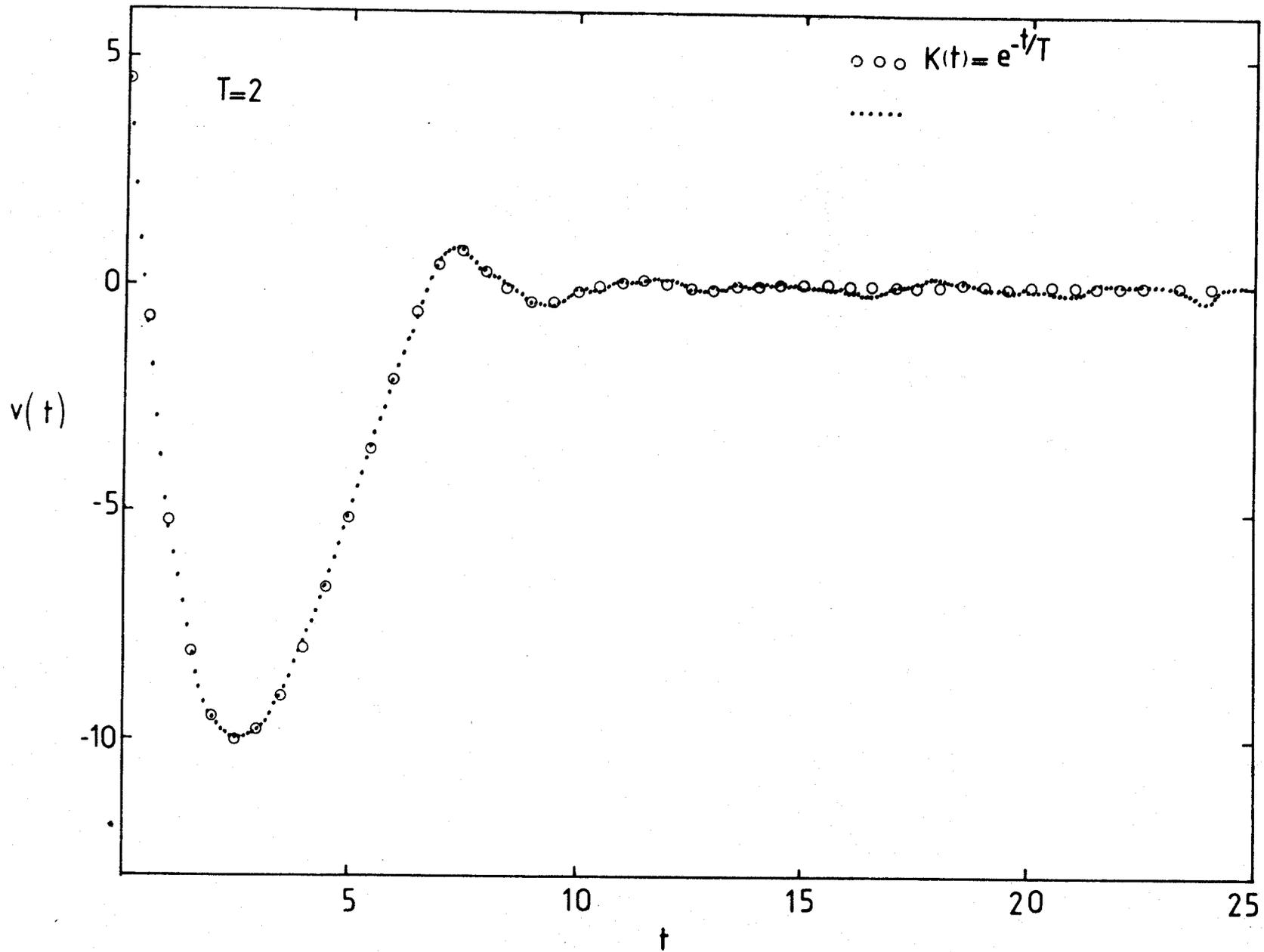


Fig.15 Igual representación que en la Fig.12 con las condiciones  $T = 1/\omega = 2$ ,  $Q_0 = 10^{-}$  y  $N_0(0) = 10$  y donde  $v(t) = \text{Ln}(N/Q)$

### 3.- SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN ESTOCÁSTICA DE VERHULST

### 3.1 RESULTADOS PREVIOS

El modelo de Verhulst para la evolución de la población de una especie viene descrito por la ecuación (9) del apartado 2, o sea,

$$\frac{dN(\tau)}{d\tau} = A N(\tau) [\Theta - N(\tau)] \quad (1)$$

donde ahora hemos escrito como  $A = k/\Theta$  siendo  $A$  una constante y  $\Theta$  es el valor de saturación.

Para introducir en esta ecuación el efecto de los cambios ambientales, el efecto debido a otras especies, influencias externas tales que produzcan fluctuaciones en la especie problema, se ha considerado que  $\Theta$  no es una constante sino una cantidad fluctuante. Se postula que su evolución es tan rápida y aleatoria que no puede expresarse como una función explícita de  $\tau$ , sino que se caracteriza por sus propiedades estadísticas. Lo que se hace es reemplazar  $\Theta$  de la ecuación (1) por  $Q + F(\tau)$  donde  $Q$  es una constante y  $F(\tau)$  es una variable aleatoria estocástica que se postula que tiene valor medio cero, que es gaussiana y que su función de correlación temporal viene dada por

$$\langle F(t_1) F(t_2) \rangle = \sigma^2 \delta(t_1 - t_2) \quad (2)$$

Si redefinimos la escala temporal por  $t = A\tau$ , la ecuación (1) queda en la forma

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t) [Q - N(t) + F(t)] \quad (3)$$

Para calcular la evolución del valor medio  $\langle N(t) \rangle$  es conveniente pasar de esta ecuación de Langevin con ruido multiplicativo a la ecuación de Fokker-Planck asociada, que es

$$\frac{\partial P(N,t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial N} \left[ \left( Q + \frac{\sigma^2}{2} \right) N - N^2 - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial N} N^2 \right] P(N,t) \quad (4)$$

donde  $P(N,t)$  es la función densidad de probabilidad. Morita<sup>16)</sup> ha buscado soluciones analíticas de esta ecuación. A continuación describiremos someramente su trabajo para posterior referencia. Define una función  $\rho(\xi,t)$  que es la transformada de Laplace de  $P(N,t)$  respecto a  $N$

$$\rho(\xi,t) = \int_0^{\infty} dN e^{-\xi N} P(N,t) \quad (5)$$

Derivando respecto al tiempo y considerando que la derivada temporal conmuta con la integración respecto de  $N$ , se llega a la ecuación

$$\frac{\partial \rho(\xi,t)}{\partial t} = \xi \left[ \left( Q + \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \left( 1 + \frac{\sigma^2}{2} \xi \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \rho(\xi,t) \quad (6)$$

La solución estacionaria de esta ecuación o, lo que es lo mismo, la transformada de Laplace de la función densidad de probabilidad estacionaria es

$$\rho_{st}(\xi) = \left( 1 + \frac{\sigma^2}{2} \xi \right)^{-2Q/\sigma^2} \quad (7)$$

Esta distribución verifica

- $\frac{\partial \rho_{st}(\xi)}{\partial t} = 0$
- $\int_0^{\infty} dN P(N,t) = 1$  si  $\frac{2Q}{\sigma^2} > 1$
- $P(\infty, t) = 0$

Se puede calcular facilmente los momentos estacionarios a partir de la transformada de Laplace de la función de distribución estacionaria, ya que

$$\begin{aligned} \langle N^n \rangle_{st} &= \int_0^{\infty} dN N^n P_{st}(N) = \left[ \frac{d^n}{d\xi^n} (-1)^n \int_0^{\infty} dN e^{-\xi N} P_{st}(N) \right]_{\xi=0} \\ \langle N^n \rangle_{st} &= (-1)^n \left[ \frac{d^n}{d\xi^n} P_{st}(\xi) \right]_{\xi=0} \end{aligned} \quad (8)$$

que utilizando (7) da

$$\langle N^n \rangle_{st} = \prod_{l=0}^{n-1} \left( Q + l \frac{\sigma^2}{2} \right) \quad (9)$$

En particular,  $Q$  es el valor medio en el estado estacionario.

Se define ahora una nueva función  $W(\xi; t)$  como

$$W(\xi; t) = \rho(\xi, t) / \rho_{st}(\xi) \quad (10)$$

A partir de la ecuación (6) se encuentra

$$\frac{\partial W(\xi; t)}{\partial t} = \xi \left[ -\left( Q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \left( 1 + \frac{\sigma^2}{2} \xi \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] W(\xi; t) \quad (11)$$

que comparando con la ecuación (6) se observa de diferencia unicamente el signo de  $Q$ .

Morita propone un desarrollo de la función  $W(\xi; t)$  en serie de potencias de  $\xi$  en la forma

$$W(\xi; t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \xi^n \quad (12)$$

Teniendo en cuenta (7), (8) y (10) se obtiene facilmente

$$a_1(t) = Q - \langle N(t) \rangle \quad (13)$$

Introduciendo el desarrollo (12) en la ecuación (11) e igualando coeficientes se llega a la jerarquía de ecuaciones

$$\frac{da_n(t)}{dt} = -\left(Q - \frac{\sigma^2}{2}n\right)a_n(t) + n(n+1)a_{n+1}(t) \quad n=1,2,\dots \quad (14)$$

Tomando ahora transformadas de Laplace respecto del tiempo

$$A_n(s) = \int_0^{\infty} dt e^{-st} a_n(t) \quad (15)$$

resulta

$$A_n(s) \left[ s + \left( Q - \frac{\sigma^2}{2}n \right) \right] = a_n(0) + n(n+1)A_{n+1}(s) \quad n=1,2,\dots \quad (16)$$

que permite escribir

$$A_L(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(0) b_1 b_2 \dots b_{i-1}}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)\dots(s+\lambda_i)} \quad (17)$$

dónde

$$b_i = i(i+1) \quad \text{y} \quad \lambda_i = i \left( Q - i \frac{\sigma^2}{2} \right) \quad (18)$$

Es evidente de la ecuación (13) que  $a_1(t)$  debe satisfacer la condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a_1(t) = 0 \quad (19)$$

Para que se satisfaga dicha condición el desarrollo debe cortarse en un término tal que todas las funciones  $\lambda_i$  que aparecen sean positivas. Este número es el mayor entero menor que el número  $K = 2Q/\sigma^2$ . Por ello, Morita toma

$$A_1(s) = \sum_{i=1}^m \frac{a_i(0) b_1 b_2 \dots b_{i-1}}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)\dots(s+\lambda_i)} \quad (20)$$

Tomando transformadas inversas se tiene

$$\begin{aligned}
 \frac{a_i(t)}{Q} = & \left[ \frac{q_1}{1!} + \frac{q_2}{1!(\kappa-3)} + \frac{q_3}{2!(\kappa-3)(\kappa-4)} + \dots + \frac{q_m}{(m-1)!(\kappa-3)\dots(\kappa-m-1)} \right] e^{-\lambda_1 t} \\
 & - \frac{1}{1!(\kappa-3)} \left[ \frac{q_2}{1!} + \frac{q_3}{1!(\kappa-5)} + \frac{q_4}{2!(\kappa-5)(\kappa-6)} + \dots + \frac{q_m}{(m-2)!(\kappa-5)\dots(\kappa-m-2)} \right] e^{-\lambda_2 t} \\
 & + \frac{1}{2!(\kappa-4)(\kappa-5)} \left[ \frac{q_3}{1!} + \frac{q_4}{1!(\kappa-7)} + \frac{q_5}{2!(\kappa-7)(\kappa-8)} + \dots + \frac{q_m}{(m-3)!(\kappa-7)\dots(\kappa-m-3)} \right] e^{-\lambda_3 t} \\
 & + \dots + \frac{(-1)^{m+1}}{(m-1)!(\kappa-m-1)(\kappa-m-2)\dots(\kappa+1-3m)} q_m e^{-\lambda_m t}
 \end{aligned} \tag{21}$$

donde

$$q_i = \frac{a_i(0)}{Q^i} b_1 b_2 \dots b_{i-1} \kappa^{i-1} \tag{22}$$

Este es el resultado principal de Morita, ya que permite obtener  $\langle N(t) \rangle$  mediante la ecuación (13). Necesitamos ahora encontrar los valores iniciales  $a_i(0)$  o, equivalentemente, los valores  $q_i$ . Si la distribución inicial es de la forma de una delta de Dirac

$$P(N, 0) = \delta(N_0 - N) \tag{23}$$

entonces, utilizando las ecuaciones (7), (10) y (12), se tiene

$$W(\xi; 0) = \left(1 + \frac{\sigma^2}{2} \xi\right)^\kappa e^{-\xi N_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0) \xi^n \tag{24}$$

que conduce a la siguiente relación de recurrencia

$$\left(i \frac{\sigma^2}{2Q} + \frac{N_0}{Q} - 1\right) r_i + \frac{\sigma^2}{2Q} \frac{N_0}{Q} r_{i-1} = -(i+1) r_{i+1} \tag{25}$$

donde  $r_i = \frac{a_i(0)}{Q^i}$ .

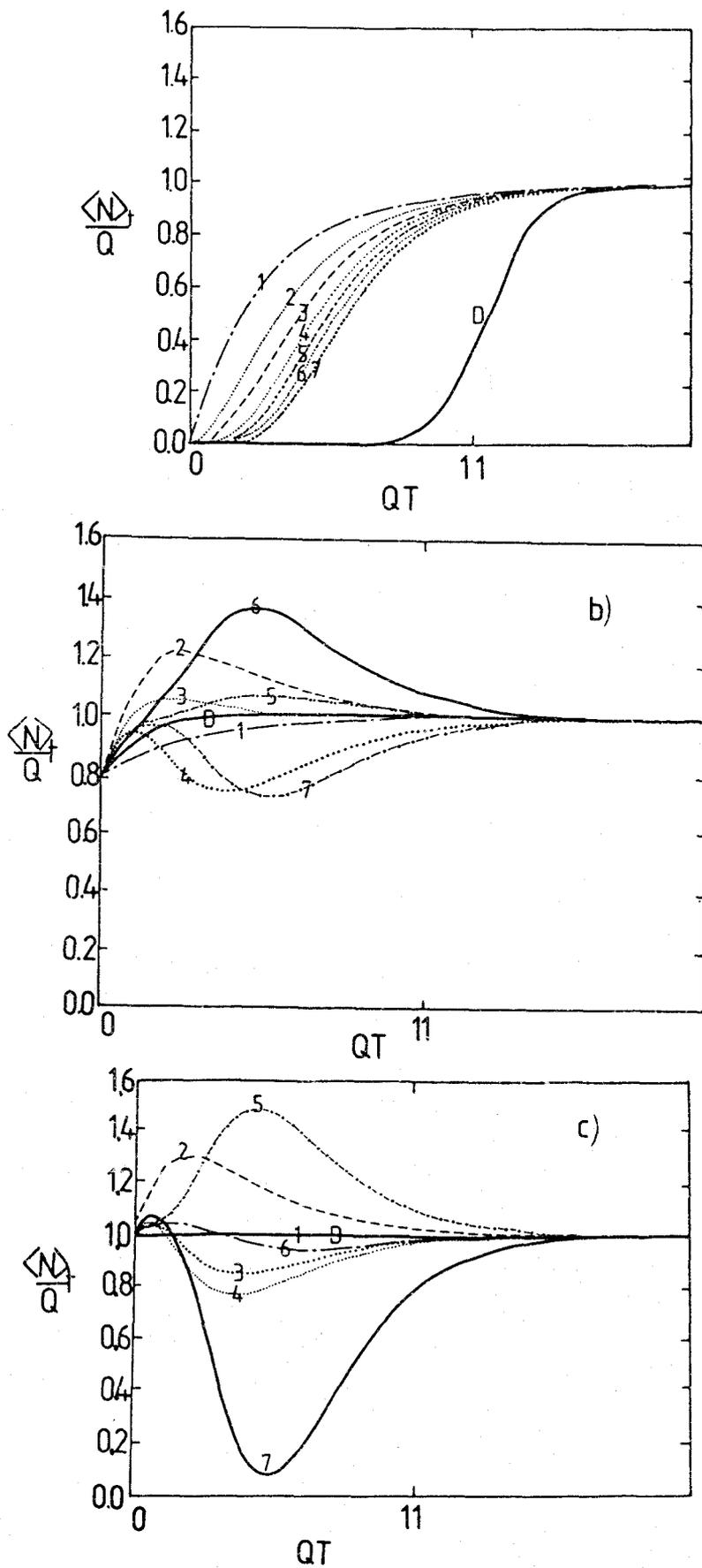


Fig.16 Representación de la evolución temporal del valor medio, para distintas condiciones iniciales, según los resultados de Morita<sup>16)</sup>. En cada figura se representan distintos valores del parámetro  $K = n + 0.5$ , con  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ . a)  $\langle N \rangle_0 / Q = 10^{-5}$ ; b)  $\langle N \rangle_0 / Q = 0.8$ ; c)  $\langle N \rangle_0 / Q = 1.0$

Parece evidente, de la ecuación (21), que si es un entero mayor o igual a 3 la expresión diverge. Sin embargo esta dificultad se elimina rápidamente observando que las  $\lambda_i$  se hacen idénticas o degeneradas y por consiguiente los polos dejan de ser de primer orden. Esto se ve claro a partir de la siguiente relación entre las funciones

$$\lambda_n - \lambda_j = \frac{\sigma^2}{2} (n-j) [K - (n+j)] \quad (26)$$

que deja claro el hecho de que si  $n \neq j$ ,  $\lambda_n$  es igual a  $\lambda_j$  en el caso en que  $K = n+j$  y por tanto entero.

Es interesante analizar el comportamiento del valor medio  $\langle N(t) \rangle$  obtenido a partir de la ecuación (21) con unos coeficientes dados por (25). La figura 16 muestra  $\frac{\langle N(t) \rangle}{Q}$  frente a  $Qt$  para distintos valores de  $\frac{\langle N(t) \rangle}{Q}$  y de la constante  $K$ . Para valores iniciales muy pequeños (del orden de  $10^{-5}$ ) se observa (figura 16-a) que la presencia del ruido no produce una modificación cualitativa del carácter monótono del crecimiento de la población en el caso determinista. Sin embargo, cuando la condición inicial va creciendo, la evolución del valor medio se complica apareciendo diferencias cualitativas respecto a la solución determinista. La más destacable es que el valor medio  $\langle N(t) \rangle$  no tiende monótonamente al valor estacionario. Las desviaciones de  $\frac{\langle N(t) \rangle}{Q}$  frente a la solución obtenida a partir de la ecuación determinista de Verhulst son mayores cuanto mayor es  $\frac{\langle N(0) \rangle}{Q}$ , apareciendo importantes efectos de sobrepoblación y despoblación.

Así pues, en este modelo la ecuación de evolución que rige el comportamiento de la especie problema es una ecuación estocástica markoviana con ruido multiplicativo, que no puede despreciarse pues es la causa de los importantes fenómenos de sobrepoblación. Ya vimos anteriormente que la ecuación de Verhulst determinista para una especie biológica puede presentar también fenómenos de sobrepoblación, asociados en ese caso a la existencia de un término de memoria. Cabe entonces plantearse la cuestión de si ambos efectos de sobrepoblación están relacionados, o son más bien dos causas distintas por las que pueden aparecer sobrepoblación en la evolución de la especie. Tanto desde un punto de vista físico como matemático parece ser que no existe ningún tipo de relación o, al menos, nosotros no hemos sido capaces de encontrarlo.

### 3.2 SOLUCIONES PARTICULARES DE LA ECUACIÓN DE VERHULST

El método de Morita, expuesto en el apartado anterior, para resolver analíticamente la ecuación de Malthus-Verhulst, no es consistente. Para que  $a_1(t)$  verifique la condición (19) es necesario que la jerarquía (16) se corte en un valor dado  $m$  menor que  $K = \frac{2Q}{\sqrt{2}}$ . Observando la estructura de  $A_1(s)$ , vemos que la única forma natural de que se corte la jerarquía es que se cumpla que  $a_i(0) = 0$  para todo  $i > m$ . Pero esto es una condición sobre la distribución inicial, que puede cumplirse o no. En particular, la función de distribución inicial escogida por Morita es una función Delta de Dirac, y conduce a unos valores  $a_i(0)$  que son distintos de cero para todo  $i$ . Es decir, las condiciones iniciales elegidas no son consistentes con la hipótesis de que se corta el sumatorio de infinitos términos que aparece en la expresión de  $A_1(s)$ , ecuación (17). Consecuentemente, no puede decirse que  $a_1(t)$  dado por la ecuación (24) represente la solución general para la evolución del valor medio de la variable  $N(t)$  obedeciendo las ecuaciones (3) o (4).

En este apartado vamos a mostrar como pueden encontrarse soluciones exactas particulares de la ecuación de Fokker-Planck (4) asociada con la ecuación estocástica de Verhulst. Comenzaremos buscando la solución estacionaria de la ecuación de Fokker-Planck,  $P_{st}(N)$ , como aquella que satisface  $\frac{\partial P(N,t)}{\partial t} = 0$ . Poniendo igual a cero el segundo miembro de (4) y resolviendo la ecuación en derivadas totales resultante, se encuentra

$$P_{st}(N) = C e^{-2N/\sigma^2} N^{\frac{2Q}{\sigma^2} - 1} \quad (28)$$

donde  $C$  es una constante de normalización independiente de  $N$ . Para que esta sea una verdadera función de distribución, debe ser normalizable, es decir, debe poder encontrarse un valor de la constante  $C$  tal que se cumpla

$$\int_0^{\infty} dN P_{st}(N) = 1 \quad (29)$$

Ello implica que debe verificarse

$$\frac{2Q}{\sigma^2} > 1 \quad (30)$$

y, por lo tanto,

$$P_{st}(0) = 0 \quad (31)$$

Determinando entonces el valor de  $C$ , obtenemos pues la distribución estacionaria

$$P_{st}(N) = \left(\frac{2}{\sigma^2}\right)^{2Q/\sigma^2} \Gamma^{-1}\left(\frac{2Q}{\sigma^2}\right) N^{\frac{2Q}{\sigma^2} - 1} e^{-2N/\sigma^2} \quad \left(\frac{2Q}{\sigma^2} > 1\right) \quad (32)$$

donde  $\Gamma(x)$  es la función Gamma de Euler. A partir de esta expresión podemos calcular los momentos estacionarios de cualquier orden

$$\langle N^n \rangle_{st} = \int_0^{\infty} dN N^n P_{st}(N) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1 - \frac{2Q}{\sigma^2})} \left(Q + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad (33)$$

En particular, el valor medio viene dado por

$$\langle N \rangle_{st} = \int_0^{\infty} dN N P_{st}(N) = Q \quad (34)$$

Estos resultados coinciden con los obtenidos en el apartado anterior con el método de la transformada de Laplace.

La idea ahora es buscar soluciones particulares de la ecuación de Fokker-Planck (4). Definamos  $\varphi(N, t)$  como

$$P(N, t) = P_{st}(N) \varphi(N, t) \quad (35)$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación de Fokker-Planck (4) se obtiene para la función  $\varphi(N, t)$

$$\frac{\partial \varphi(N, t)}{\partial t} = \left[ \left( Q + \frac{\sigma^2}{2} \right) N - N^2 \right] \frac{\partial \varphi(N, t)}{\partial N} + \frac{\sigma^2}{2} N^2 \frac{\partial^2 \varphi(N, t)}{\partial t^2} \quad (36)$$

Las soluciones particulares que buscaremos van a corresponder al caso en que  $\varphi(N, t)$  sea un polinomio en potencias negativas de  $N$ , con coeficientes dependientes del tiempo. Consideremos las posibilidades más sencillas.

I.- Tomamos en primer lugar

$$\varphi^{(1)}(N, t) = A_1(t) + \frac{A_2(t)}{N} \quad (37)$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (36) se obtiene una ecuación diferencial en derivadas totales que debe verificarse para todo valor de  $N$ . Igualando coeficientes de igual potencia en  $N$  se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dA_1(t)}{dt} &= A_2(t) \\ \frac{dA_2(t)}{dt} &= - \left( Q - \frac{\sigma^2}{2} \right) A_2(t) \end{aligned}$$

(38)

cuya solución es

$$A_2(t) = A_2(0) e^{-\lambda_1 t}$$

$$A_1(t) = \left( A_1(0) + \frac{A_2(0)}{\lambda_1} \right) - \frac{A_2(0)}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \quad (39)$$

donde

$$\lambda_1 = Q - \frac{\sigma^2}{2} \quad (40)$$

que es positivo por la condición (30). Llegamos pues a una solución de la ecuación de Fokker-Planck de la forma

$$P^{(1)}(N, t) = P_{st}(N) \left[ A_1(0) + \frac{A_2(0)}{\lambda_1} + A_2(0) e^{-\lambda_1 t} \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \right] \quad (41)$$

que vemos contiene dos constantes hasta ahora independientes  $A_1(0)$  y  $A_2(0)$ . Para que (41) sea normalizable ha de ser  $K = \frac{2Q}{\sigma^2} > 2$  y, en este caso, la normalización implica  $A_1(0) + \frac{A_2(0)}{\lambda_1} = 1$  con lo que la función de distribución, ya normalizada, es

$$P^{(1)}(N, t) = P_{st}(N) \left[ 1 + A_2(0) e^{-\lambda_1 t} \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \right] \quad (42)$$

La constante  $A_2(0)$  puede relacionarse con el valor inicial  $\langle N \rangle_{t=0} = \langle N \rangle_0$ . En efecto, tenemos

$$\langle N \rangle_t = \int_0^\infty dN N P^{(1)}(N, t) = \langle N \rangle_{st} + A_2(0) e^{-\lambda_1 t} \left( 1 - \frac{\langle N \rangle_{st}}{\lambda_1} \right) \quad (43)$$

Haciendo  $t=0$  resulta

$$\langle N \rangle_0 = Q + A_2(0) \left( 1 - \frac{Q}{\lambda_1} \right)$$

y

$$A_2(0) = (Q - \langle N \rangle_0) \left( \frac{2Q}{\sigma^2} - 1 \right) \quad (44)$$

Sustituyendo tenemos para la función de distribución de probabilidad

$$P^{(4)}(N, t) = P_{st}(N) \left[ 1 + (Q - \langle N \rangle_0) \left( \frac{2Q}{\sigma^2} - 1 \right) \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{\lambda_1} \right) e^{-\lambda_1 t} \right] \quad (45)$$

mientras que el valor medio evoluciona según

$$\langle N \rangle_t = Q - (Q - \langle N \rangle_0) e^{-\lambda_1 t} \quad (46)$$

En general, para el momento de orden  $n$

$$\langle N^n \rangle_t = \langle N^n \rangle_{st} - \langle N^{n-1} \rangle_{st} n (Q - \langle N \rangle_0) e^{-\lambda_1 t} \quad (47)$$

donde los momentos estacionarios vienen dados por (33). Es evidente que en este caso no se va a presentar efecto de sobrepoblación en la evolución de los momentos, ya que decaen exponencialmente hacia el valor estacionario.

Analicemos la función de distribución de probabilidad obtenida. En primer lugar vemos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} P^{(4)}(N, t) = P_{st}(N)$  como era de esperar. Así mismo se verifican las condiciones en los límites que debe satisfacer toda función de distribución bien definida, que son

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow 0} P(N, t) &= 0 \\ \lim_{N \rightarrow \infty} P(N, t) &= 0 \end{aligned} \quad (48)$$

(Recordemos que hemos escogido  $K > 2$ ). Por otro lado, toda función de distribución ha de ser por definición definida positiva para todo valor de  $N$  y todo valor de  $t$ . Un análisis de la expresión (45) muestra que para ciertos valores de  $\langle N \rangle_0$  la función de distribución inicial toma valores negativos para algunos valores de  $N$ . Además es fácil ver que si es negativa

para algún valor de  $N$  lo es necesariamente para  $N=0$ , para  $N$  o para ambas. Teniendo en cuenta que el decaimiento hacia el equilibrio es monótono para todo  $N$  y que en el equilibrio la función de distribución se anula para  $N=0$  y  $N \rightarrow \infty$  resulta que si la función de distribución inicial es negativa en algunos de estos límites permanece negativa en todo instante posterior. En resumen, hemos de excluir aquellos estados iniciales tales que

$$P^{(3)}(0, t) < 0$$

o

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P^{(3)}(N, t) < 0 \quad (49)$$

es fácil ver que estas condiciones son equivalentes a

$$\langle N \rangle_0 \leq Q \quad K \left( 1 - \frac{\langle N \rangle_0}{Q} \right) \leq 1 \quad (50)$$

En la figura 17 se representa la función de distribución de probabilidad  $P^{(3)}(N, t)$ , para el caso de que el valor medio en el instante inicial sea  $\frac{\langle N \rangle_0}{Q} = 0.8$  y  $K = 3.5$ . Las gráficas para otros valores de  $K$  son similares, observándose que la función de distribución relaja más rápidamente hacia la distribución estacionaria cuando aumenta el parámetro  $K$ , es decir, cuando disminuye la intensidad de ruido  $\sigma^2$ . Este comportamiento del tiempo de relajación,  $T_R$ , se puede ver teóricamente, pues de la expresión de  $P^{(3)}(N, t)$  se ve que  $T_R = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{K}{Q(K-1)}$  evidentemente disminuye al aumentar  $K$ .

En la figura 18 se representan los resultados obtenidos a partir de la ec. (46) para distintas condiciones iniciales y para un valor dado de  $K = 2.5$ . Puede observarse la tendencia monótona al estado estacionario del valor medio. Este mismo tipo

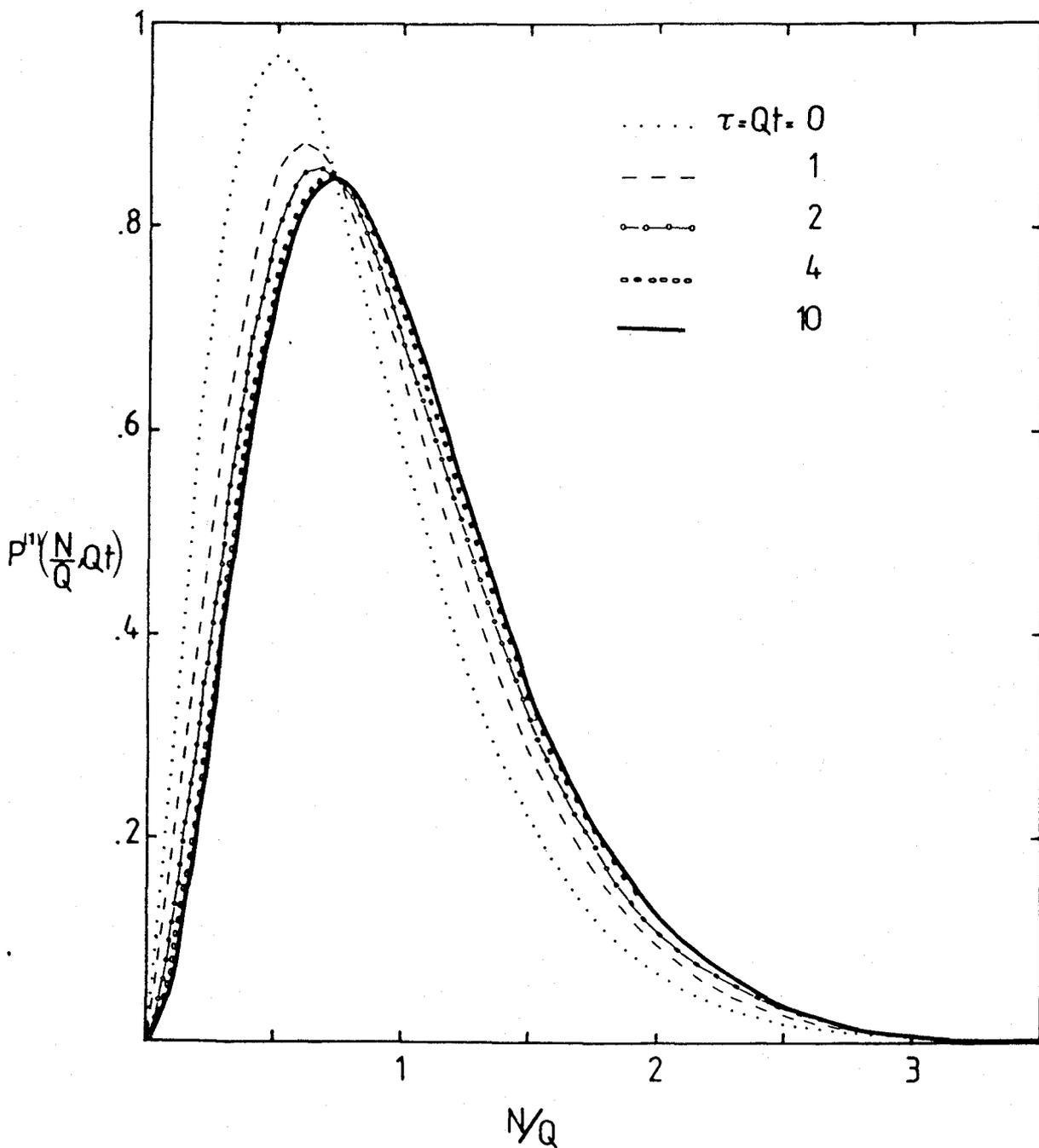


FIG:17 Representación de la función de distribución  $P^{(1)}(N/Q, Qt)$  en función de  $N/Q$  para distintos instantes de tiempo, con  $K=3.5$  y  $\langle N \rangle_0/Q = 0.8$

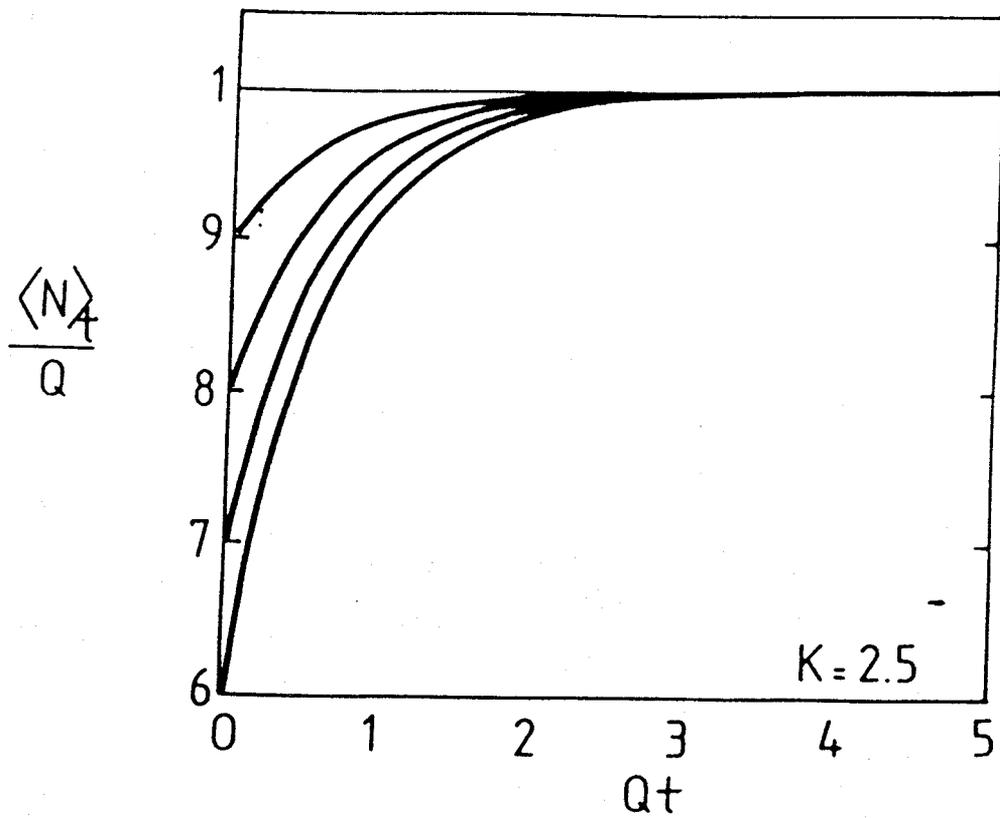


FIG.18 Representación de la evolución temporal del valor medio, calculado con la función de distribución  $P^{(1)}(N,t)$ , para distintas condiciones iniciales y con  $K= 2.5$ .

de comportamiento se presenta cualquiera que sea el valor de  $K > 2$

Por último, en la figura 19, a efectos de comparación con resultados posteriores, representamos el cociente  $\frac{\psi^{(A)}(N,t)}{P_{st}(N)}$  para un valor de  $K = 3.5$  y una condición inicial  $\frac{\langle N \rangle_0}{Q} = 0.8$ . Como puede observarse todas las curvas temporales se cortan en un punto que es aquel en el cual  $N$  toma un valor igual a  $\lambda_1$ , y la tendencia a la unidad es monótona tanto a la izquierda de dicho punto (decaimiento) como a la derecha (crecimiento). Esta figura presenta un caso típico para este tipo de función de distribución, pues para cualquiera que sea el valor de  $K > 2$  y el de la condición inicial, el comportamiento cualitativo es el mismo. No se presenta sobrepoblación en la función de distribución.

II.- La siguiente solución particular de la clase que estamos estudiando es

$$\psi^{(3)}(N,t) = A_1(t) + \frac{A_2(t)}{N} + \frac{A_3(t)}{N^2} \quad (51)$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación de evolución (36), e igualando coeficientes de igual potencia en  $N$  se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{aligned} \frac{dA_1(t)}{dt} &= A_2(t) \\ \frac{dA_2(t)}{dt} &= -\left(Q - \frac{\sigma^2}{3}\right)A_2(t) + 2A_3(t) \\ \frac{dA_3(t)}{dt} &= -2\left(Q - 2\frac{\sigma^2}{3}\right)A_3(t) \end{aligned} \quad (52)$$

cuya solución es

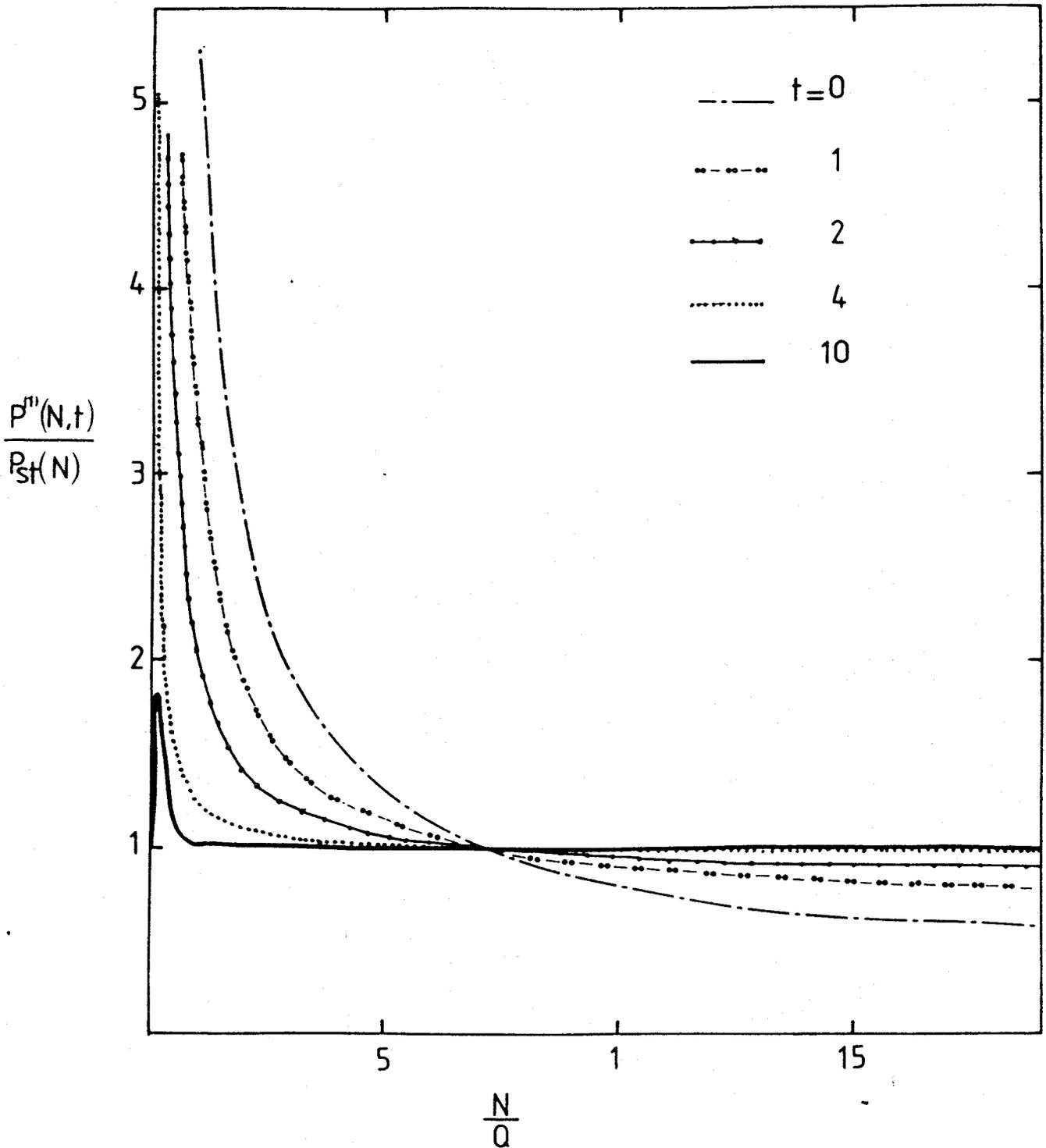


FIG:19 Representación del cociente entre la función de distribución y la estacionaria,  $P^{(1)}(N/Q, Qt)/P_{st}(N/Q)$ , frente a la variable  $N/Q$  para distintos instantes de tiempo en el caso  $K=3.5$  y  $\langle N \rangle_0 / Q = 0.8$

$$\begin{aligned}
 A_3(t) &= A_3(0) e^{-\lambda_2 t} \\
 A_2(t) &= \left[ A_2(0) - \frac{\beta A_3(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right] e^{-\lambda_1 t} + \frac{\beta A_3(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \\
 A_1(t) &= A_1(0) + \frac{1}{\lambda_1} \left[ A_2(0) - \frac{\beta A_3(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right] (1 - e^{-\lambda_1 t}) \\
 &\quad + \frac{1}{\lambda_2} \frac{\beta A_3(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 t})
 \end{aligned}
 \tag{53}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= Q - \frac{\sigma^2}{2} \\
 \lambda_2 &= 2 \left( Q - 2 \frac{\sigma^2}{2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{54}$$

Para condiciones iniciales arbitrarias, es decir con  $A_i(0)$  en general distinta de cero, sólo son físicamente admisibles valores  $\lambda_1 > 0$  y  $\lambda_2 > 0$ , lo que implica  $K > 2$ . Sin embargo, esta condición es insuficiente para asegurar que  $P^{(2)}(N, t)$  sea normalizable. En efecto, se comprueba que ello requiere que sea

$$K > 3 \tag{55}$$

La normalización, entonces, implica la relación

$$A_1(0) + \frac{1}{\lambda_1} \left[ A_2(0) - \frac{\beta A_3(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right] + \frac{1}{\lambda_2} \frac{\beta A_3(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} = 0 \tag{56}$$

Tenemos pues dos constantes arbitrarias, que pueden expresarse en función de los valores iniciales de los dos primeros momentos. En el apéndice 3, se obtiene

$$P^{(2)}(N, t) = P_{st}(N) \left[ 1 + D e^{-\lambda_1 t} \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{\lambda_1} \right) + E e^{-\lambda_2 t} \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{\lambda_2} + \frac{3\sigma^2 - Q}{2N^2} \right) \right] \tag{57}$$

$$\frac{\langle N \rangle_t}{Q} = 1 - B e^{-\lambda_1 t} - C e^{-\lambda_2 t} \tag{58}$$

$$\frac{\langle N^2 \rangle_t}{Q^2} = 1 + \frac{1}{K} - 2B e^{-\lambda_1 t} - 3 \frac{K-1}{K} C e^{-\lambda_2 t} \tag{59}$$

donde

$$B = \frac{1}{\kappa-3} \left[ 2(\kappa-2) - 3(\kappa-1) \frac{\langle N \rangle_0}{Q} + \kappa \frac{\langle N^2 \rangle_0}{Q^2} \right]$$

$$C = \frac{\kappa}{\kappa-3} \left[ 2 \frac{\langle N \rangle_0}{Q} - \frac{\langle N^2 \rangle_0}{Q^2} - \frac{\kappa-1}{\kappa} \right]$$

$$D = Q(\kappa-1) B$$

$$E = Q(\kappa-1)(\kappa-2) C$$

(60)

Así pues para especificar una solución particular concreta perteneciente a la familia  $P^{(2)}(N, t)$  hemos de dar, además del valor de  $\kappa > 3$ , los valores iniciales del primer y segundo momento. En principio estos valores podrían escogerse con total arbitrariedad. Sin embargo, existen una serie de condiciones físicas que deben imponerse sobre la distribución inicial y que discutiremos en le apartado siguiente. Ahora vamos a escoger de forma "ingenua" condiciones iniciales que verifican  $\langle N^2 \rangle_0 = \langle N \rangle_0^2$ , es decir, el segundo cumulante  $\langle\langle N^2 \rangle\rangle_0 = \langle N^2 \rangle_0 - \langle N \rangle_0^2$  es inicialmente nulo. En la figura 20 hemos representado la evolución correspondiente a  $\kappa=3.5$  y  $\frac{\langle N \rangle_0}{Q} = 0.6$ . Como se puede apreciar se tiene una tendencia aproximadamente monótona de la función de distribución hacia el equilibrio (la curva correspondiente a  $\tau=Qt=10$  se superpone prácticamente con la correspondiente a la del estado estacionario). La evolución del valor medio  $\langle N \rangle_t$  y del segundo cumulante  $\langle\langle N^2 \rangle\rangle_t$  para estas condiciones iniciales se representan en las figuras 21 y 22. Nótese que el valor medio sobrepasa ligeramente el valor de equilibrio para decaer posteriormente monótonamente hacia el mismo (efecto de sobrepoblación). La figura 23 muestra la evolución de la función de distribución, normalizada con la estacionaria, para el caso  $\kappa=3.5$  y  $\frac{\langle N \rangle_0}{Q} = 0.8$ . Puede observarse que,

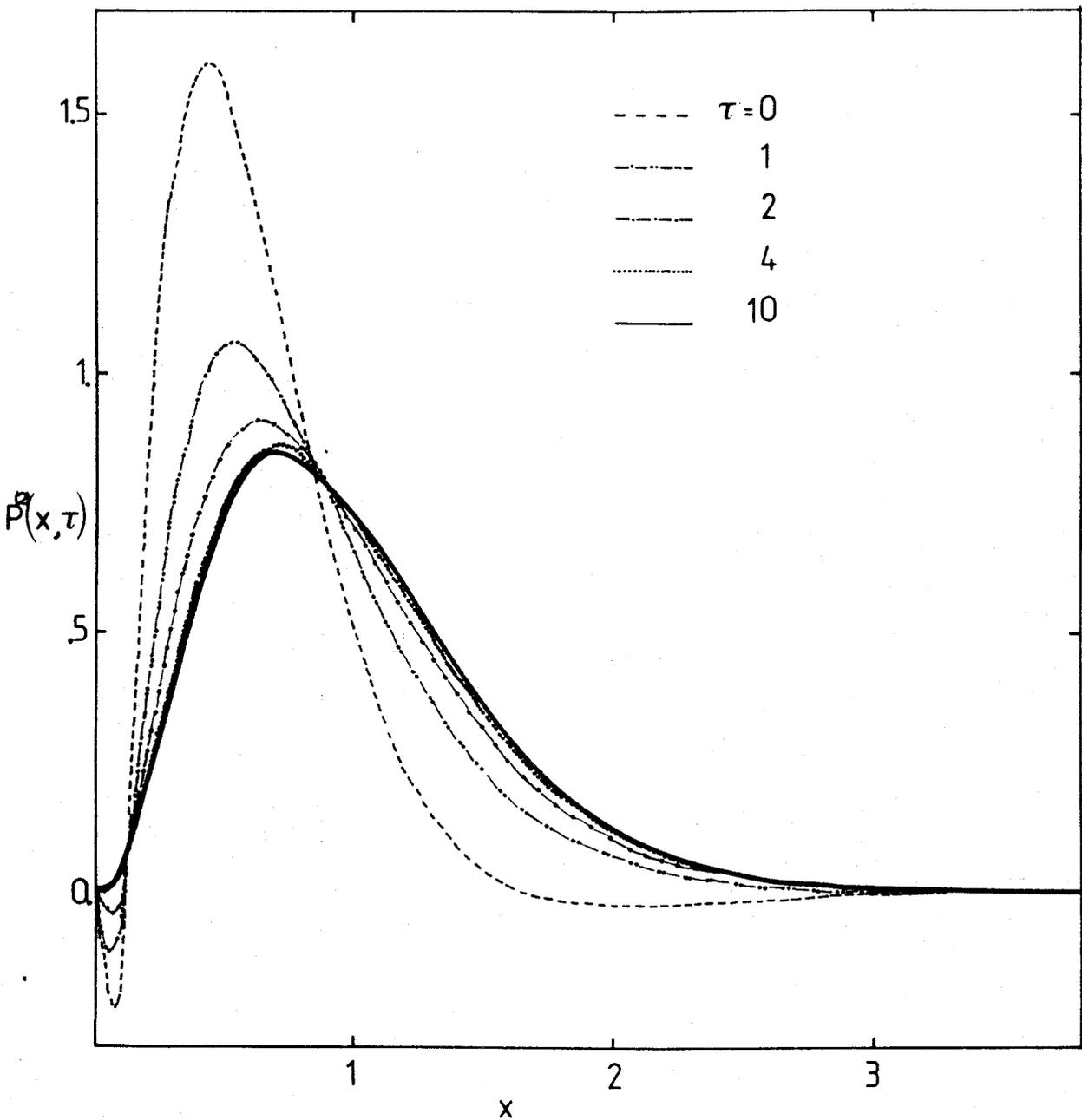


FIG:20 Representación del comportamiento de la función de distribución  $P^{(2)}(x,t)$  en función de  $x$ , para distintos instantes de tiempo, en el caso  $K=3.5$ ,  $\langle x \rangle_0 = 0.6$  y  $\langle\langle x^2 \rangle\rangle_0 = 0$

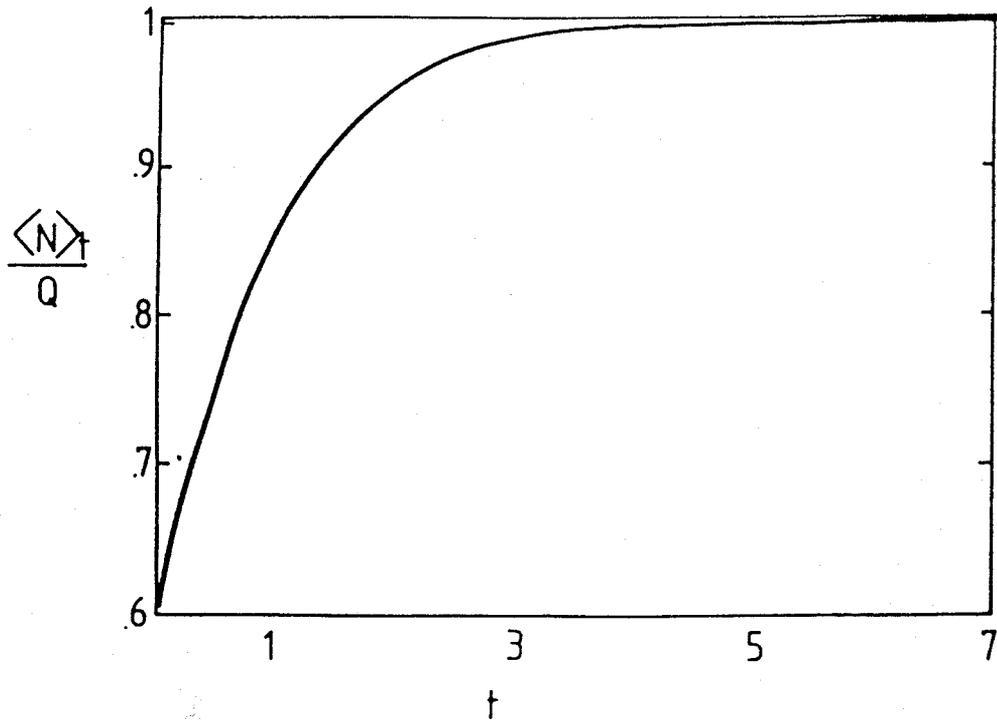


FIG:21 Representación de la evolución temporal del valor medio con la función de distribución  $P^{(2)}(N,t)$ , en las condiciones  $K=3.5$ ,  $\langle N \rangle_0 / Q = 0.6$  y  $\langle\langle N^2 \rangle\rangle_0 / Q^2 = 0$

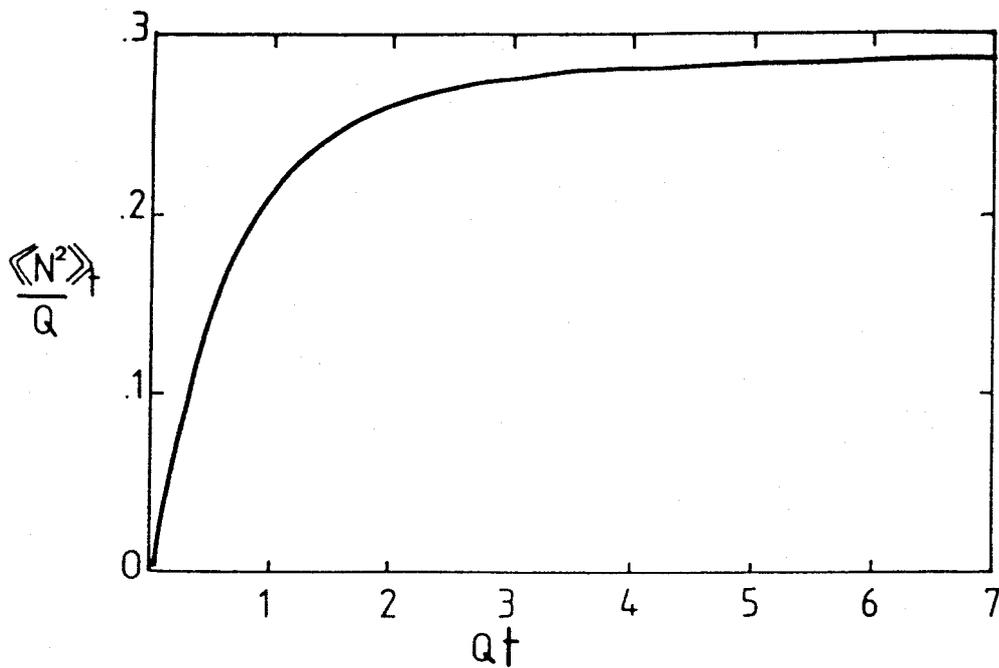


FIG:22 Representación de la evolución temporal del segundo cumulante calculado con la función de distribución  $P^{(2)}(N,t)$  con  $K=3.5$ ,  $\langle N \rangle_0 / Q = 0.6$  y  $\langle\langle N^2 \rangle\rangle_0 / Q^2 = 0$

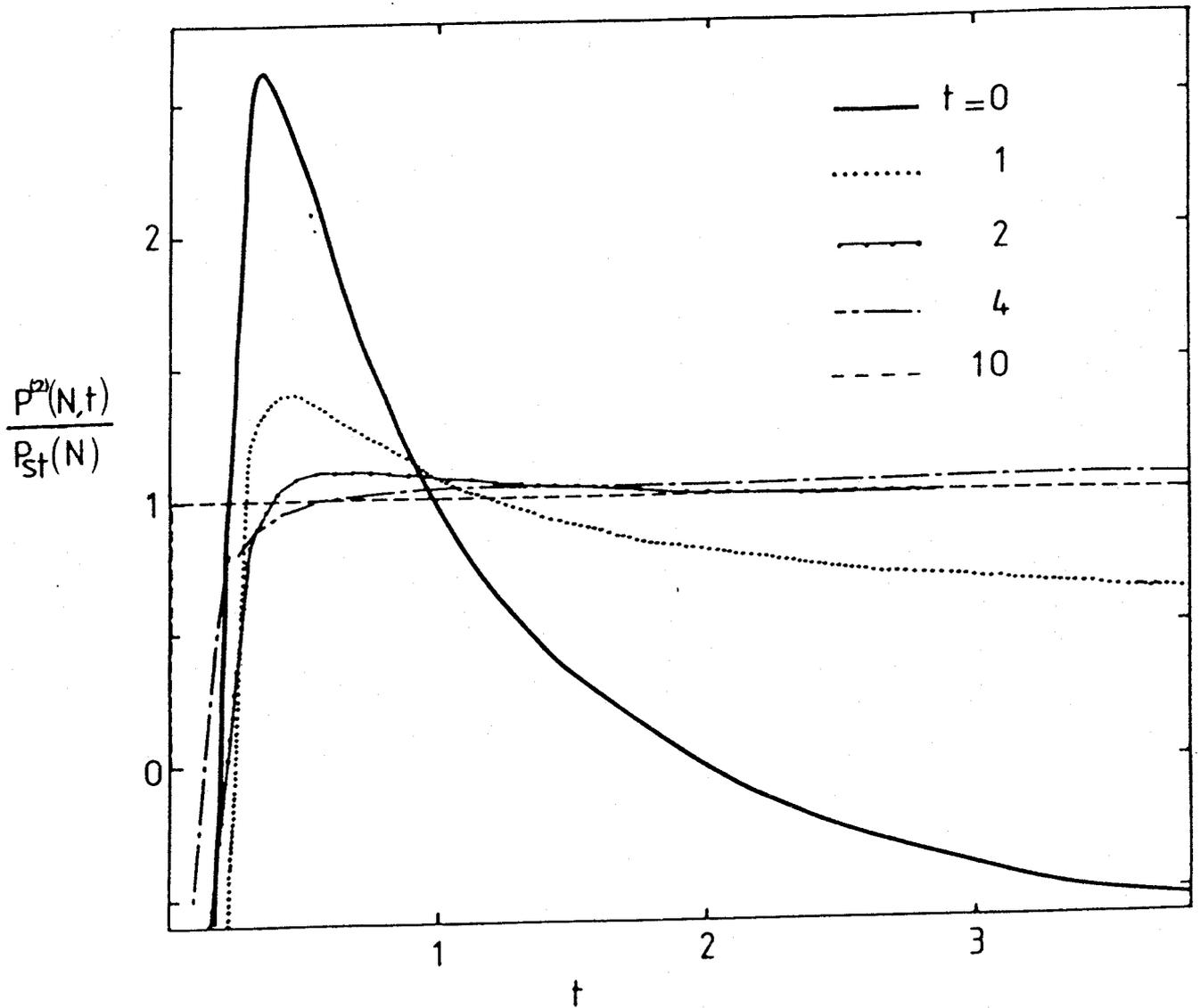


FIG:23 Representación del comportamiento de la función de distribución  $P^{(2)}(x,t)$  normalizada con la estacionaria, en función de  $x$  para distintos instantes de tiempo. Con  $K=3.5$ ,  $\langle x \rangle_0 = 0.8$  y  $\langle\langle x^2 \rangle\rangle_0 = 0$

tanto en la zona de altos valores de  $N/Q$ , como de bajos valores, la evolución al estado estacionario de la función de distribución no se realiza de una forma monótona. De igual forma, para estas condiciones iniciales, el valor medio tampoco tiende de una forma monótona al estado estacionario, figura 24.

Los resultados anteriores parecen indicar la presencia de efectos de sobrepoblación para ciertos valores de los parámetros y de las condiciones iniciales. Sin embargo, las propias curvas de evolución muestran que los dos casos que acabamos de presentar no son físicamente relevantes. La función de distribución es inicialmente negativa para valores suficientemente pequeños de  $N$  y permanece así para todo instante posterior. Esto indica la necesidad de llevar a cabo un análisis detallado de las condiciones iniciales físicamente aceptables, a fin de determinar los tipos de comportamiento posibles.

III.- El procedimiento desarrollado anteriormente puede extenderse sin ninguna dificultad formal para encontrar soluciones que contengan potencias mayores de  $1/N$ , es decir, soluciones de la forma

$$\varphi^{(n)}(N, t) = A_1(t) + \frac{A_2(t)}{N} + \dots + \frac{A_{n+1}(t)}{N^n} \quad (61)$$

Los coeficientes  $A_i(t)$  vendrán dados por las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales que se obtendría al sustituir la expresión (61) en la ecuación de Fokker-Planck. Resolviendo dicho sistema encontraríamos los  $A_i(t)$  que vendrían dados por combinaciones lineales de exponenciales decrecientes en el tiempo. Además para que una solución de la forma (61) sea

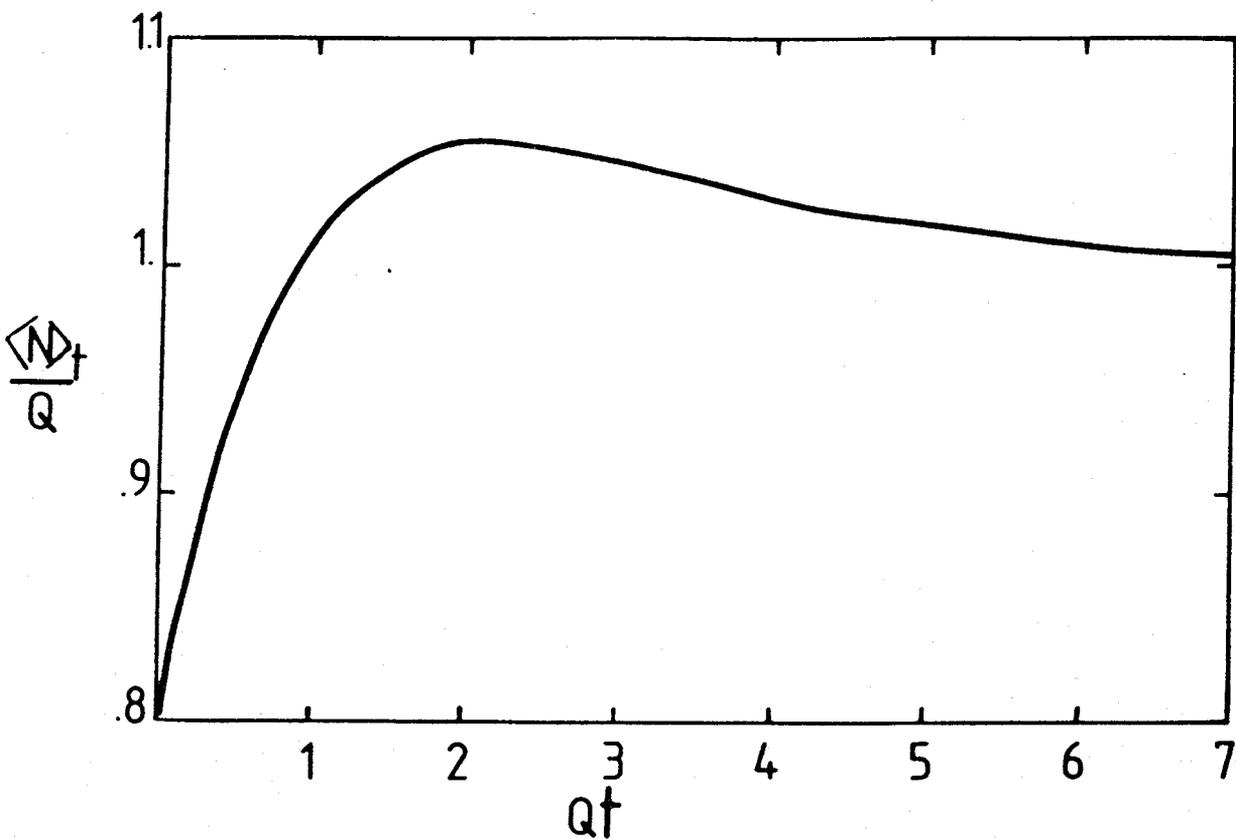


FIG:24 Representación del comportamiento del valor medio de la población hacia el estado estacionario, calculado con la función de distribución  $P^{(2)}(N,T)$  para el caso de  $K=3.5$ ,  $\langle N \rangle_0 / Q = 0.8$  y  $\langle \langle N^2 \rangle \rangle_0 / Q^2 = 0$

admisible es necesario que  $K > n+1$ . Evidentemente para especificar una solución particular de la familia (61) es necesario conocer los  $n$  primeros momentos de la distribución inicial.

Sin embargo, las soluciones correspondientes a  $n=2$  contienen ya muchas de las características que estamos interesados en analizar. Por ello, en el apartado siguiente nos limitaremos a un estudio sistemático de dicho caso.

### 3.3 RELACIÓN ENTRE LAS CONDICIONES INICIALES Y EL TIPO DE RELAJACIÓN

A la vista de los resultados obtenidos en el apartado anterior, parece lógico tratar de determinar si existen condiciones iniciales físicamente admisibles tales que lleven a una relajación no monótona del sistema hacia el estado de equilibrio. Como hemos visto que el carácter monótono o no de la relajación de la función de distribución y del valor medio aparentemente no van siempre ligados, es conveniente realizar un estudio separado para cada uno de ellos.

Por sencillez vamos a escribir las ecs (54-55) en la forma

$$\frac{\rho^{(e)}(x, \tau)}{\rho_{st}(x)} = 1 + D e^{-\tilde{\lambda}_1 \tau} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\tilde{\lambda}_1} \right) + E e^{-\tilde{\lambda}_2 \tau} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\tilde{\lambda}_2} + \frac{3/K - 1}{2x^2} \right) \quad (62)$$

$$\langle x \rangle_\tau = 1 - B e^{-\tilde{\lambda}_1 \tau} - C e^{-\tilde{\lambda}_2 \tau} \quad (63)$$

donde hemos introducido

$$x = \frac{\sqrt{r}}{Q} \quad (64)$$

$$\tilde{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{Q} \quad (65)$$

$$\tau = Qt \quad (66)$$

Además, especificaremos la condición inicial mediante  $\langle x \rangle_0$  y  $\langle\langle x^2 \rangle\rangle_0$ , en lugar de  $\langle N \rangle_0$  y  $\langle N^2 \rangle_0$ .

De las expresiones de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  se sigue que para todo valor de  $K > 3$  se verifica que

$$\tilde{\lambda}_2 > \tilde{\lambda}_1 \quad (67)$$

Consideremos la evolución temporal del valor medio para un valor dado de  $K$ , y estudiemos su comportamiento asintótico para tiempos grandes, formalmente para  $\tau \rightarrow \infty$ . Es claro de (67) que en este límite dominará el término proporcional a  $e^{-\tilde{\lambda}_1 \tau}$ , de forma que tendremos

$$\langle x \rangle_\tau \simeq 1 - B e^{-\tilde{\lambda}_1 \tau} \quad (68)$$

La posibilidad de que pueda observarse una zona de tiempos en que la evolución del sistema venga dada por (68) depende de la separación entre las dos escalas de tiempo definidas por  $\frac{\nu-1}{\lambda_1}$  y  $\frac{\nu-1}{\lambda_2}$ , y esta separación aumenta con el valor de  $K$ .

Naturalmente la expresión (68) muestra una tendencia monótona hacia la unidad. Lo que nosotros pretendemos determinar aquí es cuando esta tendencia al límite se produce desde valores superiores a la unidad o desde valores inferiores a la misma. Es claro que ello dependerá del signo que tenga  $B$ . Utilizando la expresión (60) se tiene

$$\text{sgn } B = \text{sgn} \left[ 2(K-2) - 3(K-1)\langle x \rangle_0 + K\langle\langle x^2 \rangle\rangle_0 + K\langle x \rangle_0^2 \right] \quad (69)$$

de donde

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle x \rangle_\tau = 1^- \iff \langle\langle x^2 \rangle\rangle_0 > 3 \frac{K-1}{K} \langle x \rangle_0 - 2 \frac{K-2}{K} - \langle x \rangle_0^2 \quad (70)$$

y

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle x \rangle_\tau = 1^+ \iff \langle\langle x^2 \rangle\rangle_0 < 3 \frac{K-1}{K} \langle x \rangle_0 - 2 \frac{K-2}{K} - \langle x \rangle_0^2 \quad (71)$$

Recordemos que por definición  $\langle\langle x^2 \rangle\rangle_0 \geq 0$ .

A nosotros lo que nos interesa es relacionar el decaimiento final del valor medio con su valor inicial, para

así determinar si el comportamiento ha sido monótono o no. Distinguiremos por lo tanto los casos  $\langle x \rangle_0 < 1$  y  $\langle x \rangle_0 > 1$ .

I)  $\langle x \rangle_0 < 1$ , es decir el valor medio en el instante inicial tiene un valor inferior al del estado estacionario. Es claro que si para tiempos grandes el valor medio tiende al valor estacionario desde valores superiores al mismo, se ha producido una relajación no monótona. Por otro lado, si asintóticamente tiende al valor estacionario desde valores inferiores podemos también afirmar que no se ha superado el valor estacionario en ningún momento, pues es fácil ver que el valor medio presenta en su evolución como máximo un punto extremo. En efecto, derivando la expresión (60) obtenemos

$$\frac{d\langle x \rangle_\tau}{d\tau} = B \tilde{\lambda}_1 e^{-\tilde{\lambda}_1 \tau} + C \tilde{\lambda}_2 e^{-\tilde{\lambda}_2 \tau} \quad (72)$$

El tiempo para el cual se produce un posible punto extremo viene dado por

$$\tau_m = \frac{1}{\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1} \ln \left( - \frac{C \tilde{\lambda}_2}{B \tilde{\lambda}_1} \right) \quad (73)$$

Entonces vemos que para que exista un máximo o mínimo es necesario que  $\text{sgn } B \neq \text{sgn } C$ , pero que además, si existe es claramente único. En resumen podemos asegurar que para valores de  $\langle x \rangle_0$  que satisfagan la relación (71) se produce efecto de sobrepoblación en la evolución del valor medio cuando su valor inicial está por debajo del valor estacionario.

II)  $\langle x \rangle_0 > 1$ , es decir el valor medio inicial es superior al valor estacionario. Aplicando el mismo razonamiento del caso anterior resulta que tendremos relajación no monótona cuando  $B > 0$ , es decir cuando se satisfaga la condición (70).

Para ser más concretos consideremos de nuevo la expresión (73) y analicemos los dos casos de interés en que puede

existir efecto no monótono, es decir que la evolución del valor medio presenta un máximo o un mínimo.

i)  $C > 0$  y  $B < 0$

$$\begin{aligned} \langle\langle x^2 \rangle\rangle_0 &< 2\langle x \rangle_0 - \langle x \rangle_0^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa} \\ \langle\langle x^2 \rangle\rangle_0 &< 3 \frac{\kappa-1}{\kappa} \langle x \rangle_0 - 2 \frac{\kappa-2}{\kappa} - \langle x \rangle_0^2 \end{aligned} \quad (74)$$

ii)  $C < 0$  y  $B > 0$

$$\begin{aligned} \langle\langle x^2 \rangle\rangle_0 &> 2\langle x \rangle_0 - \langle x \rangle_0^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa} \\ \langle\langle x^2 \rangle\rangle_0 &> 3 \frac{\kappa-1}{\kappa} \langle x \rangle_0 - 2 \frac{\kappa-2}{\kappa} - \langle x \rangle_0^2 \end{aligned} \quad (75)$$

Las parábolas  $y = 2x - x^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa}$  e  $y = 3 \frac{\kappa-1}{\kappa} x - 2 \frac{\kappa-2}{\kappa} - x^2$  se cortan en el punto  $x = 1$ , y se representan en la figura 25 para el caso particular  $\kappa = 3.5$ . Claramente la región del plano  $\langle x \rangle_0, \langle\langle x^2 \rangle\rangle_0$  en que no existe máximo ni mínimo, y por tanto la evolución es monótona, corresponde a la región comprendida entre ambas parábolas. Esto no quiere decir que para cualquier condición inicial fuera de esta región se presenten fenómenos de sobrepoblación, entendida ésta como sobrepasar el valor estacionario para tender después a él desde el lado contrario al que se encontraba inicialmente. Para que haya sobrepoblación es necesario que se verifiquen (70) si  $\langle x \rangle_0 > 1$  y (71) si  $\langle x \rangle_0 < 1$ , o sea que nos encontremos dentro de las zonas rayadas de la figura 25. En la figura 26 representamos el comportamiento típico correspondiente a cada una de las seis zonas en que queda dividido el plano  $\langle x \rangle_0, \langle\langle x^2 \rangle\rangle_0$ .

Pasemos a continuación a estudiar el comportamiento de la función de distribución. Comenzaremos por determinar su comportamiento asintótico, pero en este caso para valores gran-

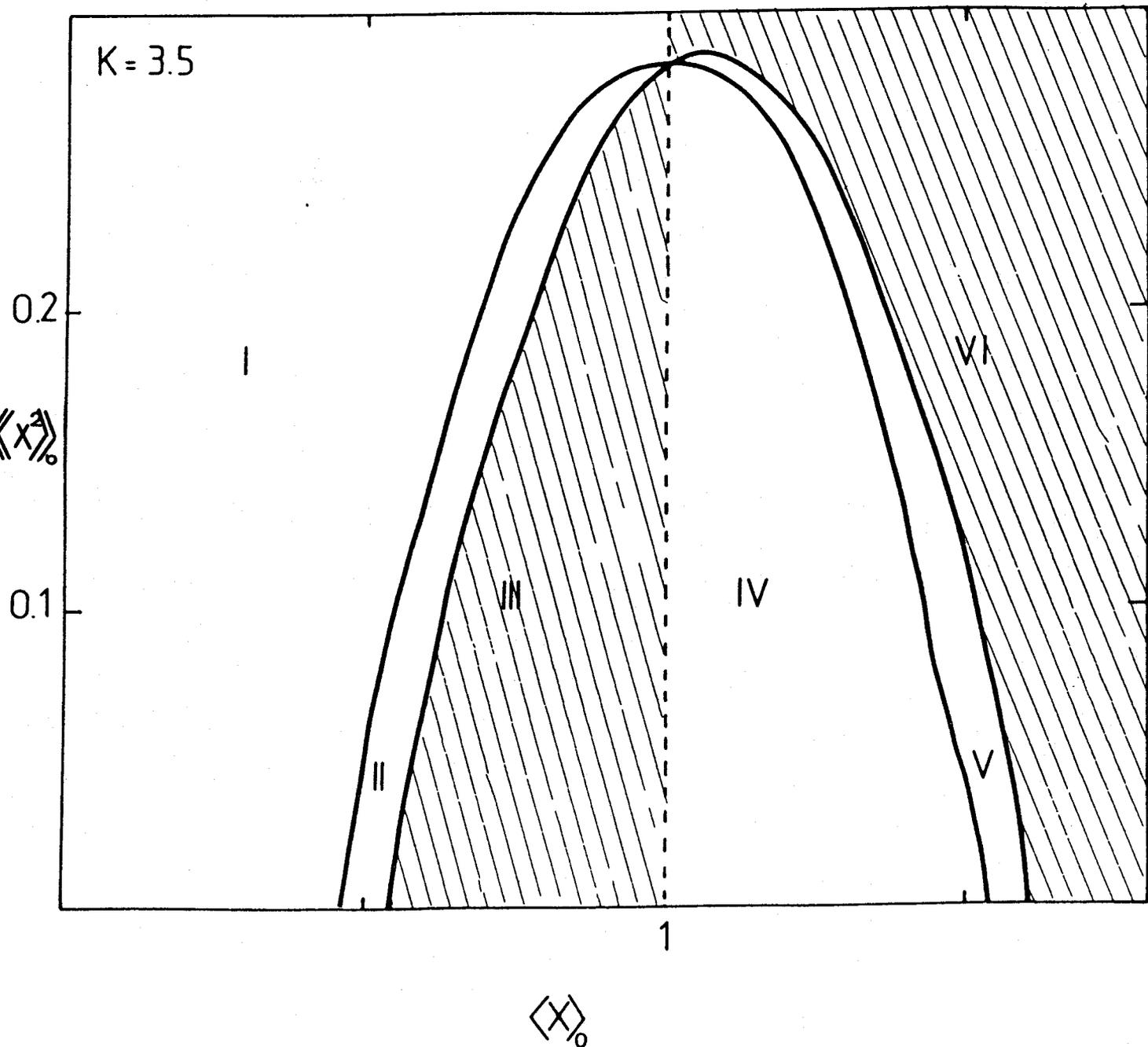


FIG:25 Representación de las distintas zonas de condiciones iniciales correspondientes a diferentes evoluciones temporales del valor medio para  $K=3.5$ . ( $\langle x \rangle_0$  es el valor medio inicial,  $\langle\langle x^2 \rangle\rangle_0 = \langle x^2 \rangle_0 - \langle x \rangle_0^2$  valor inicial del cumulante de segundo orden)

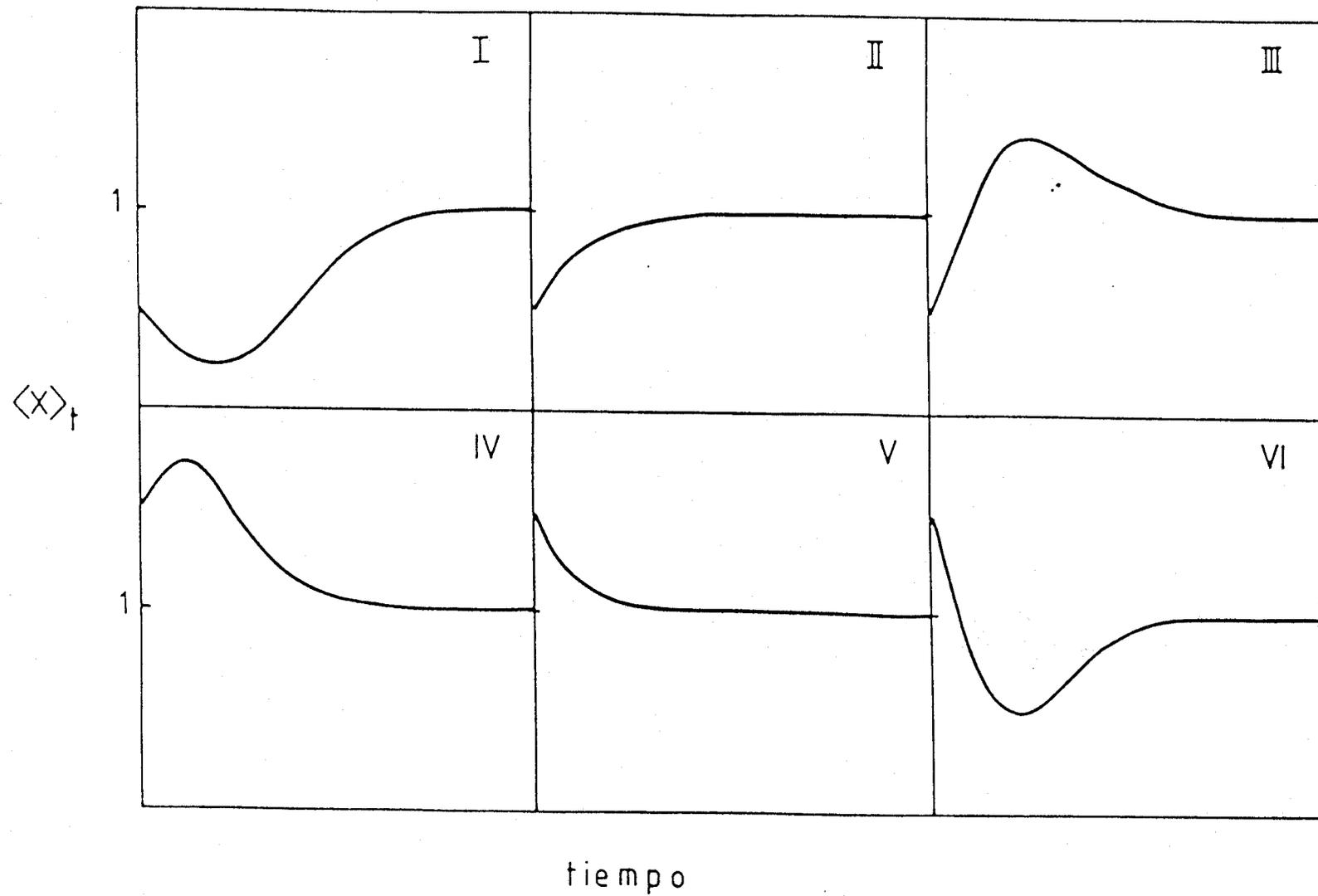


Fig.26 Representación cualitativa de los distintos tipos de evolución del valor medio hacia el estado estacionario.

des de  $X$ , formalmente  $X \rightarrow \infty$ . Tomando el límite en la expresión (57) con  $K > 3$  resulta

$$\frac{P^{(2)}(x, \tau)}{P_{st}(x)} \xrightarrow{x \gg} 1 - \frac{D}{\tilde{\lambda}_1} e^{-\tilde{\lambda}_1 \tau} - \frac{E}{\tilde{\lambda}_2} e^{-\tilde{\lambda}_2 \tau} \quad (76)$$

La idea ahora es realizar un estudio análogo al llevado a cabo para el valor medio, considerando siempre la zona de grandes valores de  $X$ . Para ello, hemos de comparar la forma inicial de la distribución con la que tiene para tiempos asintóticamente grandes. Haciendo  $\tau = 0$  en la ec. (76) resulta

$$\frac{P^{(2)}(x, 0)}{P_{st}(x)} \xrightarrow{x \gg} 1 - \frac{D}{\tilde{\lambda}_1} - \frac{E}{\tilde{\lambda}_2} \quad (77)$$

Podemos distinguir los dos casos siguientes

i)  $\left. \frac{P^{(2)}(x, 0)}{P_{st}(x)} \right|_{x \gg} > 1$  que implica

$$\langle\langle x^2 \rangle\rangle_0 > 3 \frac{K-1}{K} \langle x \rangle_0 - \frac{K-3}{K} - \langle x \rangle_0^2 \quad (78)$$

ii)  $\left. \frac{P^{(2)}(x, 0)}{P_{st}(x)} \right|_{x \gg} < 1$  que implica

$$\langle\langle x^2 \rangle\rangle_0 < 3 \frac{K-1}{K} \langle x \rangle_0 - \frac{K-3}{K} - \langle x \rangle_0^2 \quad (79)$$

Por otro lado en el límite de tiempos grandes tenemos

$$\frac{P^{(2)}(x, \tau)}{P_{st}(x)} \xrightarrow{x \gg, \tau \gg} 1 - \frac{D}{\tilde{\lambda}_1} e^{-\tilde{\lambda}_1 \tau} \quad (80)$$

pudiendo presentarse las posibilidades

iii)  $\left. \frac{P^{(2)}(x, \tau)}{P_{st}(x)} \right|_{x \gg, \tau \gg} > 1$  si

$$\langle\langle x^2 \rangle\rangle_0 < 3 \frac{K-1}{K} \langle x \rangle_0 - 2 \frac{K-2}{K} - \langle x \rangle_0^2 \quad (81)$$

iv)  $\left. \frac{P^{(2)}(x, \tau)}{P_{st}(x)} \right|_{x \gg, \tau \gg} < 1$  si

$$\langle\langle x^2 \rangle\rangle_0 > 3 \frac{K-1}{K} \langle x \rangle_0 - 2 \frac{K-2}{K} - \langle x \rangle_0^2 \quad (82)$$

Resulta entonces que tendremos efectos de sobrepoblación cuando se cumplan simultáneamente las condiciones i) y iv) o las condiciones ii) y iii). El análisis gráfico se presenta en la figura 27 para el caso particular de  $K=3.5$ . Allí hemos dibujado las parábolas

$$y = 2 \frac{K-1}{K} x - \frac{K-3}{K} - x^2$$

$$y = 3 \frac{K-1}{K} x - 2 \frac{K-2}{K} - x^2$$
(83)

que se cortan para  $X = 1$ . Los efectos de sobrepoblación para valores grandes de  $X$  se presentan para aquellas condiciones iniciales que corresponden a puntos interiores o exteriores a ambas parábolas. Es interesante comparar estas zonas con las obtenidas en el estudio del valor medio (figura 25). Se observa entonces que siempre que existe efecto de sobrepoblación en el valor medio existe también en la función de distribución para valores grandes de  $X$ , pero la recíproca no es cierta.

Hasta ahora no nos hemos ocupado del hecho de que la función de distribución inicial tiene que ser por definición semidefinida positiva para todo valor de  $N$ . Vamos a ver que esta condición impone drásticas restricciones sobre los tipos de evolución que son posibles. De la expresión (57) se deduce que para que la distribución inicial sea semidefinida positiva ha de verificarse que

$$x^2 \left( 1 - \frac{D}{\lambda_1} - \frac{E}{\lambda_2} \right) + x(D+E) - \frac{K-3}{2K} E \geq 0 \quad \forall x \geq 0$$
(84)

Por sencillez escribiremos esta condición en la forma

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \geq 0$$
(85)

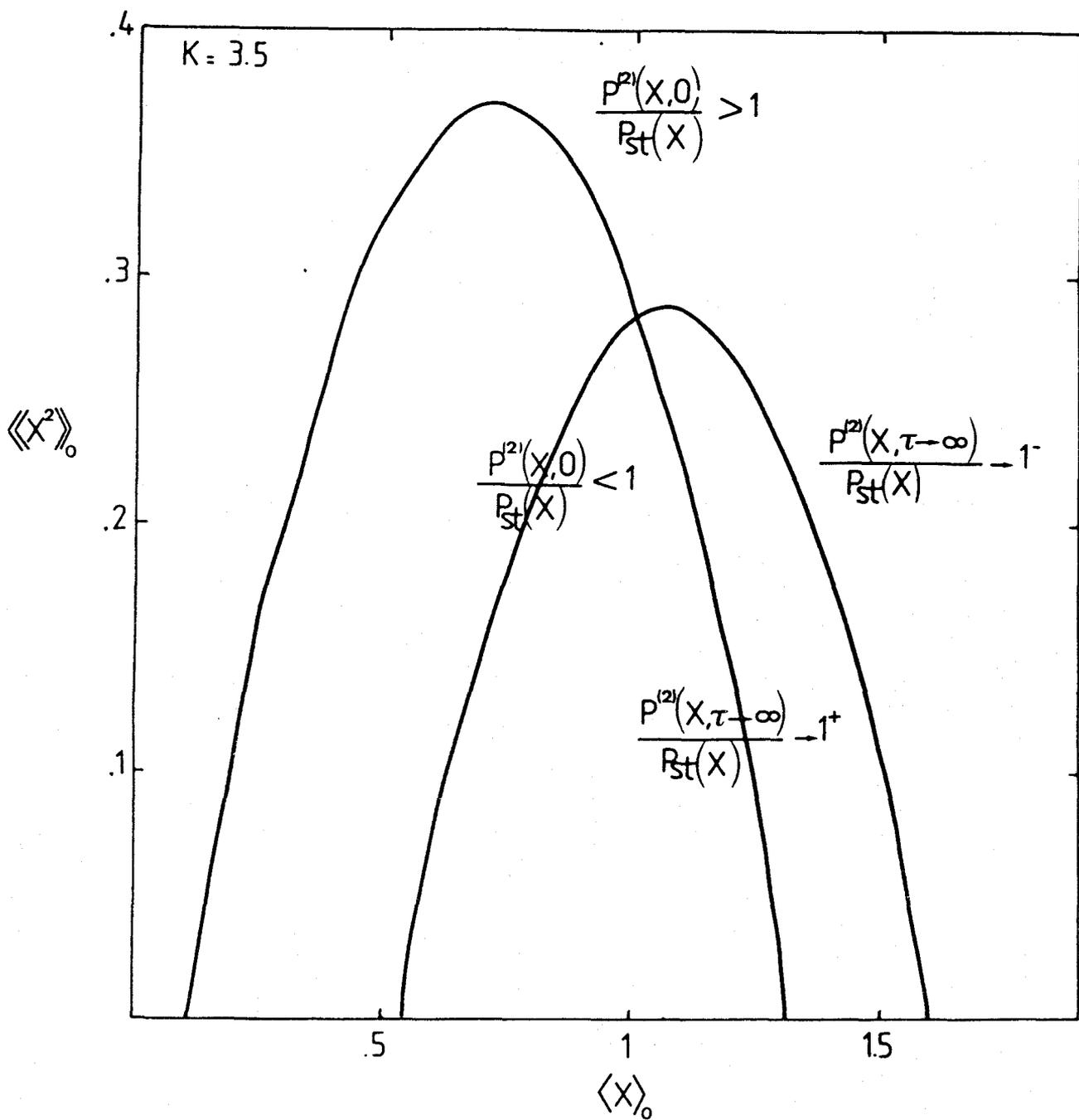


FIG:27 Representación de las distintas zonas de condiciones iniciales correspondientes a los diferentes comportamientos asintóticos de la función de distribución  $P^{(2)}(x, \tau)$ , con  $K=3.5$

donde los coeficientes  $a_0, a_1$  y  $a_2$  se identifican por comparación. La primera consecuencia de la condición (85) es que ha de ser

$$a_2 \geq 0 \quad (86)$$

a) Si  $a_2 = 0$ , es evidente que para que se satisfaga la condición (85) ha de ser  $a_0 \geq 0$  y  $a_1 \geq 0$ . No pudiendo ser simultáneamente ambas nulas.

b) Si  $a_2 > 0$ , es conveniente distinguir los casos en que el mínimo de la parábola  $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  corresponda bien a valores positivos de  $y$ , bien a valores negativos de  $y$ .

i) La parábola presenta un mínimo para valores positivos de  $y$  si se verifica que

$$4a_0 - \frac{a_1^2}{a_2} > 0 \quad (87)$$

y por tanto la parábola toma valores positivos de  $y$  para cualquier valor de  $x \geq 0$ , es decir se satisface (85).

ii) La parábola presenta un mínimo para valores negativos de  $y$  si

$$4a_0 - \frac{a_1^2}{a_2} < 0 \quad (88)$$

pero en este caso, para que se satisfaga la condición (85) para todo valor de  $x \geq 0$  es necesario que se verifique

$$a_0 \geq 0 \quad (89)$$

$$y \quad -\frac{a_1}{2a_2} \leq 0 \quad \iff \quad a_1 \geq 0 \quad (90)$$

En resumen, tenemos tres posibles combinaciones de los parámetros que hacen a la función de distribución semidefinida positiva y que son

$$\text{I) } a_0 \geq 0, a_1 \geq 0 \text{ y } a_2 = 0 \quad (91)$$

$$\text{II) } a_2 > 0 \text{ y } 4a_0 - \frac{a_1^2}{a_2} \geq 0 \quad (92)$$

$$\text{III) } a_2 > 0, a_0 \geq 0, a_1 \geq 0 \text{ y } 4a_0 - \frac{a_1^2}{a_2} < 0 \quad (93)$$

Los coeficientes  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$  en función de las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{(\kappa-1)(\kappa-2)}{2} \left[ 2\langle x \rangle_0 - \langle x^2 \rangle_0 - \frac{\kappa-1}{\kappa} \right] \\ a_1 &= (\kappa-1) \left[ (2\kappa-1)\langle x \rangle_0 - \kappa\langle x^2 \rangle_0 - (\kappa-2) \right] \\ a_2 &= 1 - \kappa(\kappa-1)\langle x \rangle_0 + \frac{\kappa^2}{2}\langle x^2 \rangle_0 + \frac{\kappa(\kappa-3)}{2} \end{aligned} \quad (94)$$

En la figura 28 hemos representado las curvas  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 0$  y  $4a_0a_2 - a_1^2 = 0$  en un diagrama  $\langle x^2 \rangle_0 - \langle x \rangle_0$ . Se observa entonces que:

- Las condiciones I se verifican sobre la recta  $a_2 = 0$  en el intervalo comprendido entre  $\langle x \rangle_0 = \frac{\kappa-2}{\kappa}$  y  $\langle x \rangle_0 = \frac{\kappa-1}{\kappa}$ .
- Las condiciones II se verifican en el interior y el contorno de la elipse  $4a_0a_2 - a_1^2 = 0$ .
- Las condiciones III se verifican en el recinto limitado por la elipse y las rectas  $a_2 = 0$  y  $a_0 = 0$ .

Así pues el carácter semipositivo de la función de distribución implica unas condiciones iniciales dentro del recinto rayado en la figura.

A fin de relacionar este resultado con nuestra discusión anterior, hemos representado el dominio de condiciones iniciales para el caso de  $\kappa = 3.5$  en el plano  $\langle x^2 \rangle_0 - \langle x \rangle_0$ , en la figura 29. Allí también se incluyen las curvas que definen

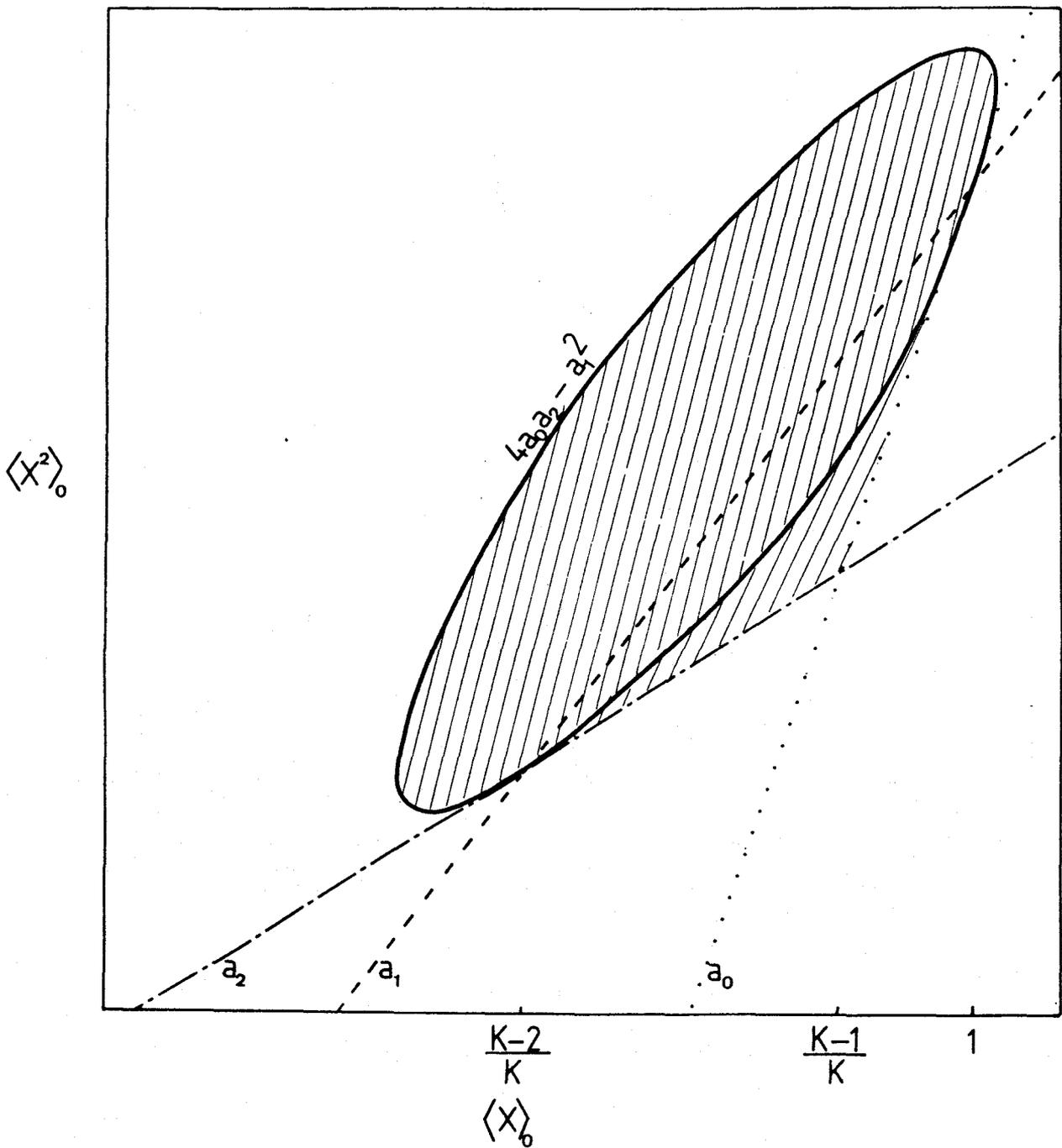


FIG:28 Representación, en función de las condiciones iniciales, de la zona donde la función de distribución  $P^{(2)}(x, t)$  es definida no negativa (zona rayada de la figura)

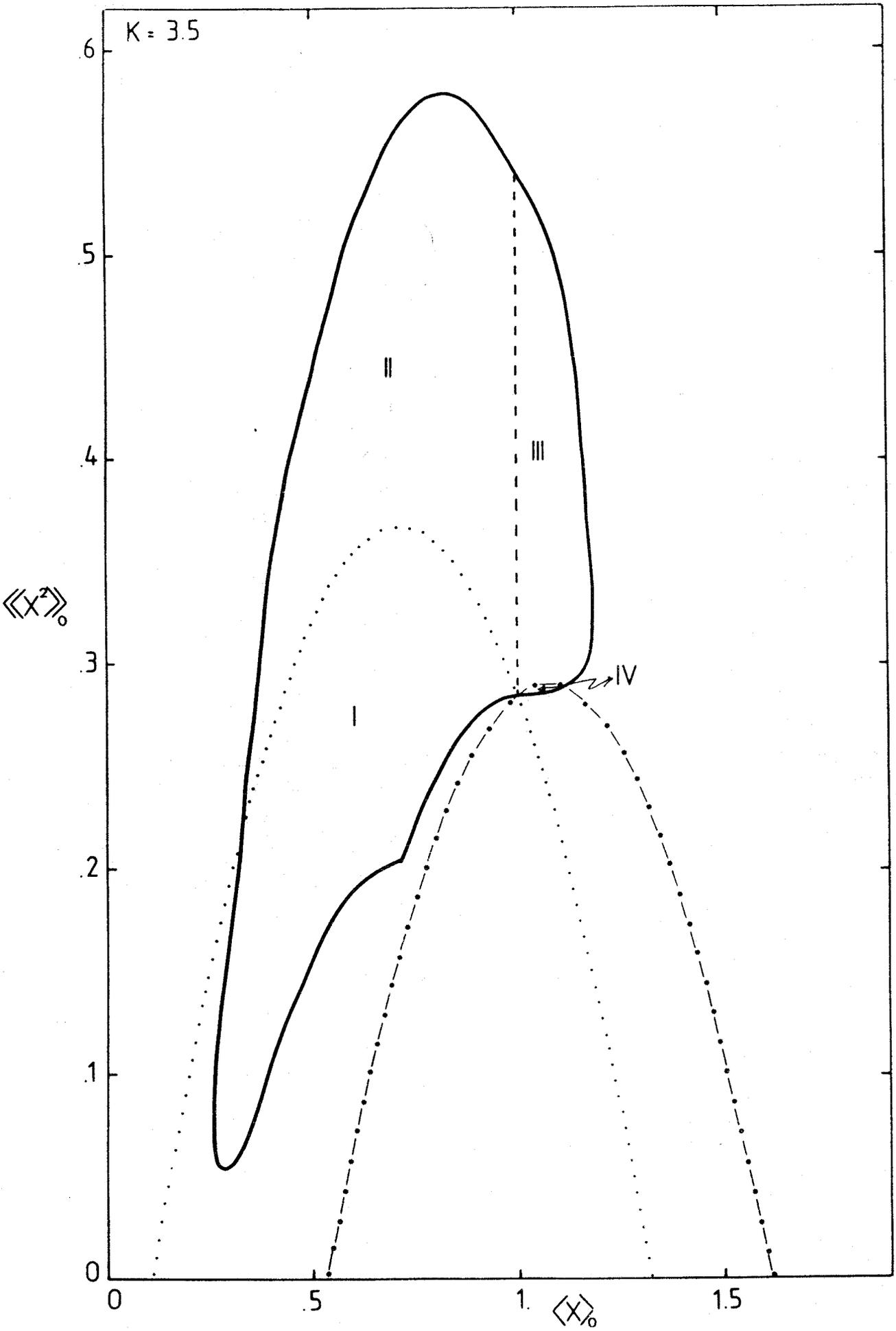


FIG:29 Representación, en función de las condiciones iniciales, de las distintas zonas de comportamiento donde la función de distribución es no negativa.

los distintos tipos de comportamiento de la zona asintótica de la función de distribución. Observamos entonces que toda la zona de sobrepoblación, es decir la zona común a las dos parábolas en la figura 27, corresponde a condiciones iniciales no permitidas. Más concretamente la zona de condiciones iniciales físicamente admisibles puede dividirse en cuatro partes indicadas en la figura 29. En la zona I no hay efecto de sobrepoblación aunque el valor medio tenga un comportamiento no monótono. El valor medio se aleja inicialmente del valor estacionario para tender posteriormente al mismo. En la zona II el valor medio presenta el mismo comportamiento no monótono que en la zona I, pero ahora la función de distribución para valores grandes de  $X$  que inicialmente era mayor que la de equilibrio decae por debajo de la misma antes de tender a ella. En la zona III la función de distribución para valores grandes de  $X$  se comporta igual que en la zona II, mientras que el valor medio que inicialmente era mayor que el de equilibrio decae por debajo del mismo para tender al equilibrio desde abajo (Efecto de sobrepoblación). Finalmente en la zona IV se tiene un comportamiento **monótono** del valor medio, no existiendo efecto de sobrepoblación en la región asintótica de la función de distribución.

Una de las consecuencias más importantes del estudio que acabamos de realizar, es que puede ser peligroso en muchos casos considerar únicamente la evolución del valor medio. En efecto, hemos visto como es posible observar comportamientos anómalos del valor medio que corresponden, sin embargo, a tiempos para los que la función de distribución no es semidefinida

positiva. En este sentido creemos, nuevamente, que muchas de las gráficas presentadas por Morita<sup>16)</sup> son completamente irrelevantes.

Evidentemente, y como ya hemos dicho en el apartado anterior, es casi seguro que aparecen nuevas posibilidades de evolución cuando se incrementa el grado del polinomio  $\varphi^{(n)}(N_i, t)$ . Desgraciadamente, un estudio del caso general parece inviable.

### 3.4 GENERALIZACIÓN DEL MÉTODO PARA UNA CLASE DE ECUACIONES DE FOKKER-PLANCK

Dada la importancia que tiene el conocer soluciones dinámicas exactas de ecuaciones de Fokker-Planck no lineales, es evidente tratar de generalizar el procedimiento expuesto en los apartados anteriores, extendiéndolos a otras clases de ecuaciones de Fokker-Planck. Nosotros aquí vamos a considerar ecuaciones de la forma

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[ a x - x^\gamma - b \frac{\partial}{\partial x} x^2 \right] P(x,t) \quad x \geq 0 \quad (95)$$

siendo  $a > 0$ ,  $b > 0$  y  $\gamma$  un parámetro arbitrario con la condición  $\gamma \geq 2$ . Evidentemente, para  $\gamma=2$  reobtenemos la ecuación de Malthus-Verhulst. La solución estacionaria de la ecuación (95) que es regular en el origen viene dada por

$$P_{st}(x) = C x^{a/b-2} e^{-x^{\gamma-1}/b(\gamma-1)} \quad (96)$$

siendo  $C$  una constante de normalización. Igual que antes introducimos

$$P(x,t) = P_{st}(x) \varphi(x,t) \quad (97)$$

Sustituyendo en (95) resulta que  $\varphi(x,t)$  ha de satisfacer la ecuación

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = (a x - x^\gamma) \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} + b x^2 \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} \quad (98)$$

La idea ahora es buscar soluciones particulares de la forma

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=0}^m \frac{a_{n+1}(t)}{x^n} \quad (99)$$

Para ello, se sustituye esta expresión en la ecuación (98) y se identifican coeficientes de igual potencias de  $x$ , del modo usual. Consideremos aquí el caso  $\gamma = 3$ , para el que

$$P_{st}(x) = C x^{a/b-2} e^{-x^2/2b} \quad (100)$$

Resulta entonces fácil ver que las únicas soluciones posibles de la forma (99) corresponden a desarrollos pares en  $x$ . En particular, la solución más sencilla es de la forma

$$\varphi(x, t) = a_1(t) + \frac{a_2(t)}{x^2} \quad (101)$$

verificando  $a_1(t)$  y  $a_2(t)$  las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{da_1(t)}{dt} &= 2 a_2(t) \\ \frac{da_2(t)}{dt} &= -2(a-3b)a_2(t) = -\lambda a_2(t) \end{aligned} \quad (102)$$

donde la última igualdad define el parámetro  $\lambda$ .

La solución de este sistema es

$$\begin{aligned} a_2(t) &= a_2(0) e^{-\lambda t} \\ a_1(t) &= a_1(0) + \frac{2 a_2(0)}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \end{aligned} \quad (103)$$

Los parámetros  $a_1(0)$  y  $a_2(0)$  pueden expresarse en términos del valor inicial del primer momento utilizando la condición de normalización de la función de distribución. Ello lleva a escribir la solución particular

$$P(x, t) = P_{st}(x) \left[ 1 + \left( \frac{a}{b} - 2 \right) (\langle x \rangle_0 - \langle x \rangle_{st}) \left( 1 - \frac{\lambda}{2x^2} \right) e^{-\lambda t} \right] \quad (104)$$

a la que corresponde un valor medio

$$\langle x \rangle_t = \langle x \rangle_{st} \left[ 1 + (\langle x \rangle_0 - \langle x \rangle_{st}) e^{-\lambda t} \right] \quad (105)$$

Además, para que la expresión (104) no diverga para  $x=0$  es necesario que  $a/b > 4$ . En general, existe una relación entre los valores permitidos de  $m$  en (99) y el valor de  $a/b$  en la ecuación de Fokker-Planck de partida.

En la expresión (104) aparece  $\langle x \rangle_{st}$  que depende del valor de  $y=a/b$ . Concretamente puede establecerse la siguiente relación de recurrencia

$$\langle x \rangle_{st}(y) = C - 2) b \langle x \rangle_{st}(y-2) \quad (106)$$

siendo  $\langle x \rangle_{st}(1) = C b$

$$\langle x \rangle_{st}(2) = C \left( \frac{a}{b} - 2 \right) b^{3/2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (107)$$

No vamos a entrar aquí en más detalles, pero es claro que mediante el procedimiento descrito siempre pueden encontrarse soluciones particulares de ecuaciones de Fokker-Planck de la forma (95). Estas soluciones vendrán dadas por el producto de la función de distribución estacionaria y un polinomio en potencias decrecientes de  $x$ .

Queremos señalar que no hemos conseguido extender el método haciendolo aplicable al caso de ecuaciones de Fokker-Planck asociadas con ecuaciones de Langevin teniendo ruido aditivo.

### 3.5 ANÁLISIS NUMÉRICO

#### 3.5a Descripción del método

En este apartado llevaremos a cabo un estudio numérico de la ecuación estocástica de Verhulst, ecuación (1). La resolución numérica de una ecuación diferencial estocástica es intrínsecamente diferente de la de una ecuación diferencial ordinaria<sup>17)</sup>. La presencia del término estocástico requiere la simulación de números aleatorios. Cada grupo de ellos se utiliza para simular una trayectoria específica, consistente con la ecuación estocástica, que corresponde a una realización particular del término de ruido (una cierta secuencia de números aleatorios). Las propiedades estadísticas en que estamos interesados se obtienen tomando valores medios sobre un número suficientemente grande de trayectorias. Existen diversos métodos para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales estocásticas. El utilizado por nosotros se basa en el denominado método de Montecarlo, y es llamado en ocasiones Dinámica Estocástica. Consiste en resolver las ecuaciones mediante un algoritmo de diferencias finitas, simulando los términos estocásticos con un algoritmo numérico que genera un conjunto de números aleatorios, distribuidos con una determinada ley de probabilidades.

En lugar de describir el fenómeno con toda generalidad, consideraremos desde el principio el tipo de ecuación diferencial estocástica tratado en la memoria, es decir

$$\frac{dx(t)}{dt} = \varphi(x(t)) + g(x(t)) \lambda(t) \quad (108)$$

donde el término  $\lambda(t)$  representa un ruido gaussiano blanco con

$$\begin{aligned} \langle \lambda(t) \rangle &= 0 \\ \langle \lambda(t) \lambda(t') \rangle &= \sigma^2 \delta(t-t') \end{aligned} \quad (109)$$

Los paréntesis angulares indican valor medio sobre las realizaciones del ruido.

Para generar una trayectoria se utiliza la ecuación (108), mediante un algoritmo en diferencias finitas, a partir de un cierto valor inicial  $x(0)$ . Subdividimos el eje temporal en intervalos de dimensión  $h$  de modo que la solución formal de (108) se construye según

$$x(t+h) = x(t) + \int_t^{t+h} \varphi(x(t')) dt' + \int_t^{t+h} g(x(t')) \lambda(t') dt' \quad (110)$$

Desarrollando  $\varphi(x(t'))$  y  $g(x(t'))$  entorno al valor en el punto  $x(t)$  resulta

$$\varphi(x(t')) = \varphi(x(t)) + \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x(t)} (x(t') - x(t)) + \dots \quad (111-a)$$

$$g(x(t')) = g(x(t)) + \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x(t)} (x(t') - x(t)) + \dots \quad (111-b)$$

Si retenemos únicamente los primeros términos del anterior desarrollo queda

$$x(t+h) = x(t) + \varphi(x(t)) h + g(x(t)) w(t) \quad (112)$$

donde

$$w(t) = \int_t^{t+h} \lambda(t') dt' = \sqrt{\sigma^2 h} \theta(t) \quad (113)$$

es un proceso de Wiener Gaussiano, con valor medio cero y cuya varianza es

$$\langle (w(t))^2 \rangle = \sigma^2 h \quad (114)$$

El proceso viene descrito en función del término  $\vartheta(t)$  que se define como un número aleatorio gaussiano de valor medio cero y varianza igual a la unidad. El número  $\vartheta(t)$  puede generarse a partir de dos números aleatorios independientes  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  (distribuidos con igual probabilidad entre 0 y 1) utilizando la fórmula de Box-Mueller<sup>18)</sup>

$$\vartheta(t) = (-2 \ln \alpha_1)^{1/2} \cos(2\pi \alpha_2) \quad (115)$$

El término  $\vartheta(x(t))h$  de la ecuación (112), que proviene de la parte determinista de la ecuación (108), es de orden  $h$  mientras que el otro, obtenido a partir de la parte estocástica, es de orden  $h^{1/2}$ . Por tanto, si queremos retener hasta el orden  $h$  en el desarrollo, debemos considerar también el siguiente término en (111-b), que es de orden  $h$ . Así pues necesitamos

$$\left. \frac{dg}{dx} \right|_{x(t)} \int_t^{t+h} (x(t') - x(t)) \lambda(t') dt' \approx \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x(t)} \int_t^{t+h} dt' g(x(t)) \int_t^{t'} dt'' \lambda(t') \lambda(t'')$$

donde hemos utilizado el hecho de que el término conteniendo

$\vartheta(x(t))$  es de orden  $h$ . Calculemos ahora estas integrales:

$$\int_t^{t+h} \int_t^{t'} dt'' \lambda(t') \lambda(t'') = \frac{1}{2} \int_t^{t+h} dt' \int_t^{t+h} dt'' \lambda(t') \lambda(t'') = \frac{1}{2} \int_t^{t+h} dt' \lambda(t') \int_t^{t+h} dt'' \lambda(t'') = \frac{1}{2} W^2(t) \quad (116)$$

Podemos escribir entonces la nueva contribución a la ecuación (112) en la forma

$$\frac{1}{2} g(x(t)) \left. \frac{dg(x(t))}{dx(t)} \right| W^2(t) \quad (117)$$

que es efectivamente de orden  $h$ . Es importante destacar que este término aparece debido al carácter especial que tiene el ruido blanco y que desaparece si el ruido es aditivo.

Por tanto hasta el primer orden en  $h$  tenemos

$$X(t+h) = X(t) + \mathcal{O}(X(t))h + g(X(t))w(t) + \frac{1}{2}g(X(t))\frac{dg(X(t))}{dX(t)}w^2(t) + \mathcal{O}(h^{3/2}) \quad (118)$$

Este algoritmo<sup>19)</sup> es el que nosotros hemos utilizado en nuestros cálculos, para generar cada una de las trayectorias. Como ya hemos dicho antes, para calcular valores medios hemos de generar un conjunto de trayectorias. Este debe ser lo suficientemente grande como para poder asegurar que las trayectorias están distribuidas según las propiedades estocásticas del ruido.

Hasta ahora nos hemos referido a un valor inicial dado de la variable  $x$ . Sin embargo, si  $x$  está inicialmente distribuida de acuerdo con una ley de probabilidades, esto implica llevar a cabo un segundo promedio sobre trayectorias correspondientes a distintos valores iniciales, distribuidos de acuerdo con una ley dada.

### 3.5b Test del método

Nuestro objetivo es obtener soluciones numéricas para la evolución temporal de los momentos, y también de la función de distribución de la variable estocástica  $x$ . Para ello, aplicamos el método descrito en el apartado anterior a la ecuación de Malthus-Verhulst

$$\frac{dX(t)}{dt} = X(t)[1 - X(t)] + \lambda(t)X(t) \quad (119)$$

donde  $\lambda(t)$  satisface las ecuaciones (109). La ecuación (119) tiene la forma general (108) con

$$\begin{aligned} \varphi(x(t)) &= x(t) [1 - x(t)] \\ g(x(t)) &= x(t) \end{aligned} \quad (120)$$

Por tanto, el algoritmo a utilizar en nuestros cálculos es

$$x(t+h) = x(t) + x(t)(1-x(t))h + x(t)w(t) + \frac{1}{2} x(t) w^2(t) \quad (121)$$

con  $w(t)$  dado por (113).

Para estudiar la validez del método hemos realizado el siguiente test. Nosotros conocemos soluciones particulares exactas de la ecuación de Fokker-Planck asociada a la ecuación de Langevin, es decir conocemos expresiones exactas de la función de distribución y de la evolución de los momentos para ciertas condiciones iniciales correspondientes a las soluciones particulares exactas conocidas, y comparar con los resultados analíticos.

Mediante diversos test, hemos estimado que el paso de tiempo óptimo para la aplicación del algoritmo es  $h=10^{-2}$ , entendiendo por óptimo el equilibrio entre obtener buenos resultados y el tiempo de máquina necesario. Este es por tanto el intervalo temporal utilizado por nosotros en todos nuestros cálculos. En el programa (el diagrama de flujo se da en el apéndice IV) se distribuyen los valores iniciales de  $x$  según la función de distribución inicial que consideramos. En concreto, la función de distribución elegida para realizar el test ha sido  $P^{(2)}(x, t)$  cuya expresión viene dada en la ecuación (57). Hemos realizado pruebas sobre el número de trayectorias necesario para reproducir satisfactoriamente la

evolución de los primeros momentos y de la función de distribución, estimando que un número de 40000 trayectorias, distribuidas de acuerdo con la condición inicial, es suficiente para representar la estocasticidad de la ecuación. Como puede observarse en la figura 30, donde se representa la evolución del primer momento para unas condiciones de  $K=3.5$ ,  $\langle x \rangle_0 = 0.8$  y  $\langle x^2 \rangle_0 = 1.1$ , el ajuste con los resultados analíticos es bastante bueno, aunque se producen fluctuaciones entorno al valor estacionario para valores grandes de  $t$ . La diferencia para valores pequeños de  $t$  es debida a que la simulación no reproduce exactamente la condición inicial deseada. De hecho, el valor inicial del primer momento de la distribución simulada es de 0.803, en lugar de 0.800, y algo análogo sucede con el segundo momento. Si tomásemos como valores teóricos los obtenidos en la simulación, el ajuste sería todavía mejor. En todo caso, hay que señalar que los errores relativos son del orden de 0.4%. Además, como era de esperar, figura 31, las fluctuaciones son mayores para el segundo momento y, en general, serán necesarias mayor número de trayectorias para representar mejor los momentos superiores. Para calcular la función de distribución en el instante  $t$  hemos contado el número de trayectorias que en dicho instante están en cada uno de los intervalos  $\Delta X$  en que hemos dividido nuestro eje real. A fin de evitar tener que realizar un número prohibitivamente grande de trayectorias, hemos realizado un suavizamiento introduciendo un grano grueso temporal. Hemos calculado la función de distribución en el instante  $t$  como el promedio de las probabilidades existentes entre  $t-5h$  y  $t+5h$ . De esta forma conseguimos multiplicar por un factor 11 el número de

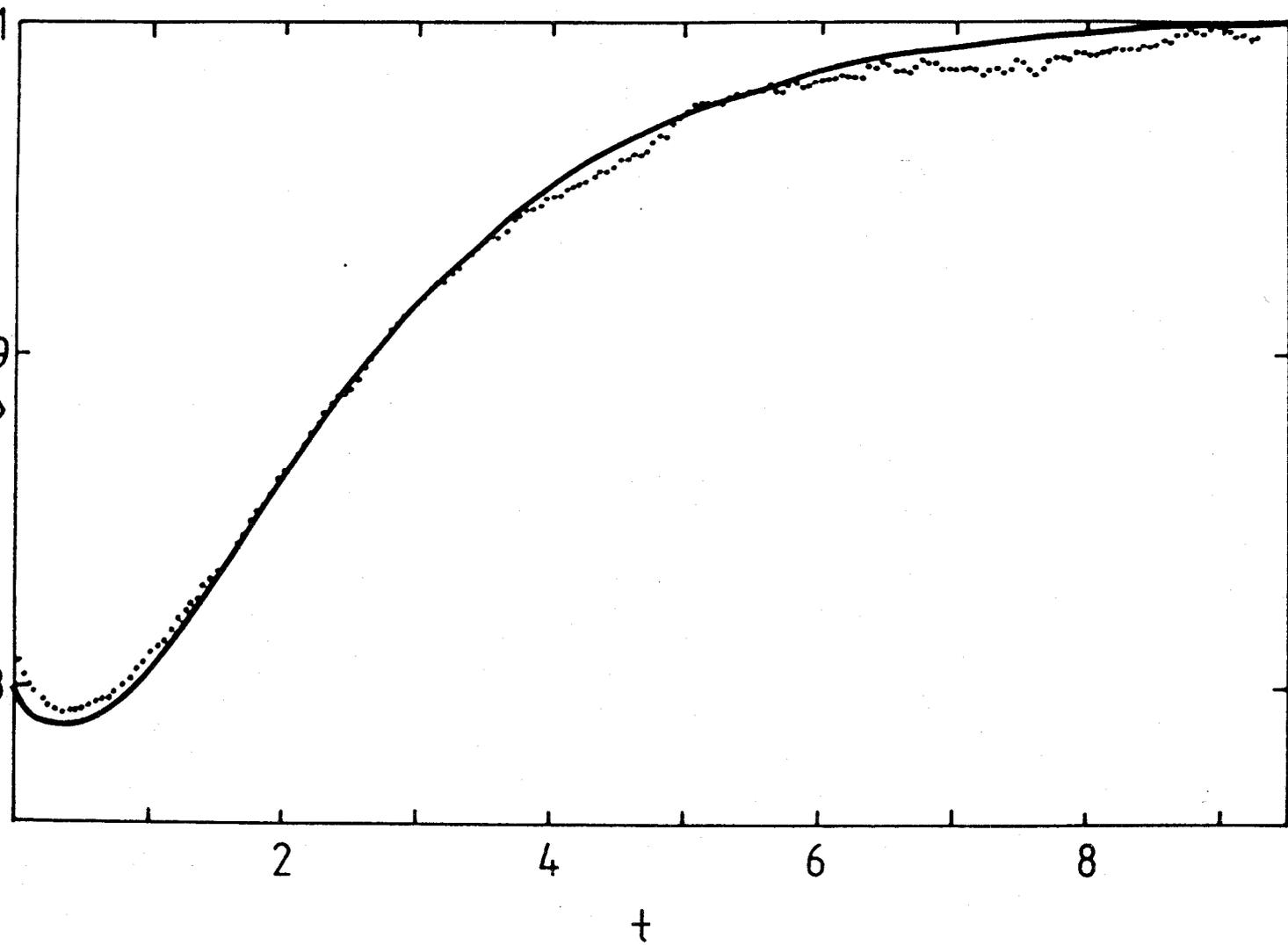


FIG:30 Comparación de la evolución del valor medio calculado de forma numérica (línea de puntos) con la evolución analítica calculada a partir de  $P^{(2)}(X,t)$ . Con las condiciones  $K=3.5$ ,  $\langle X \rangle_0 = 0.8$  y  $\langle X^2 \rangle_0 = 1.1$

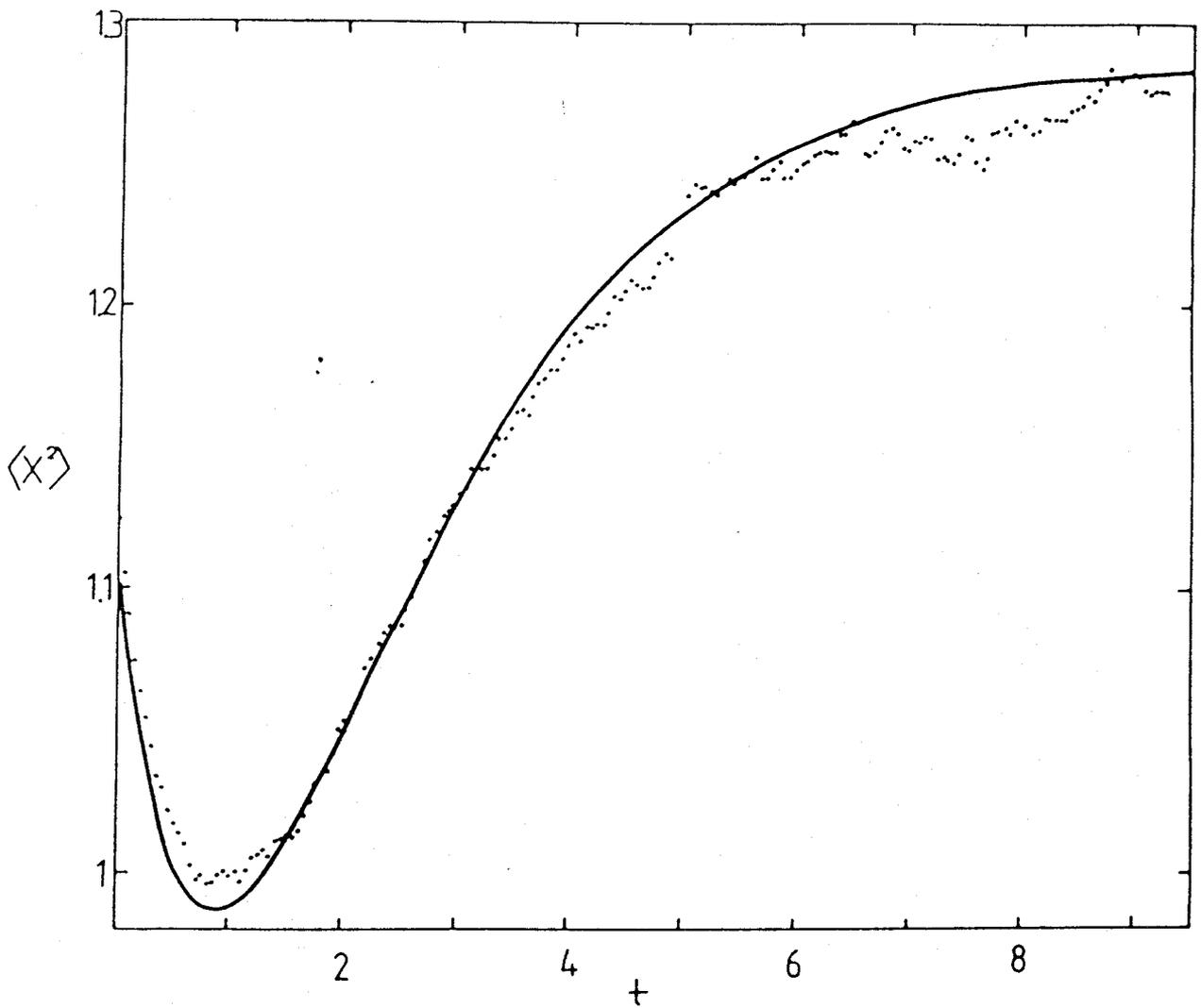
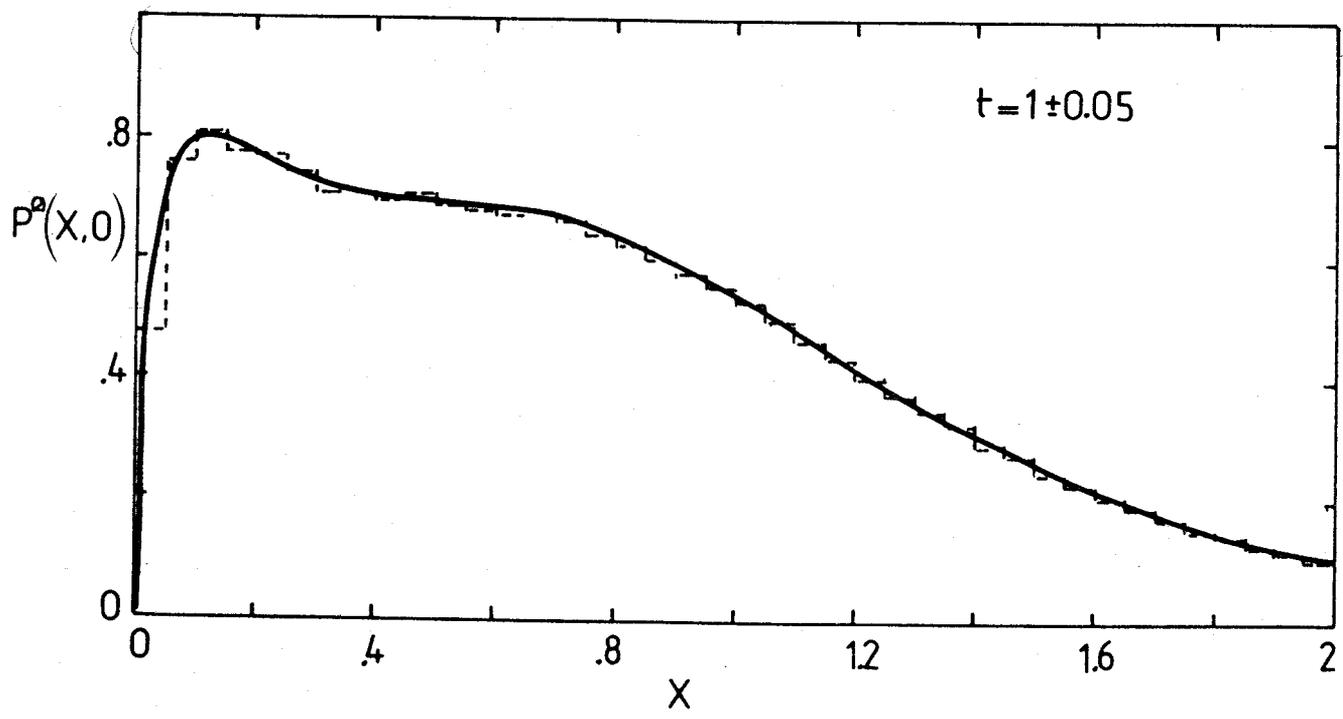
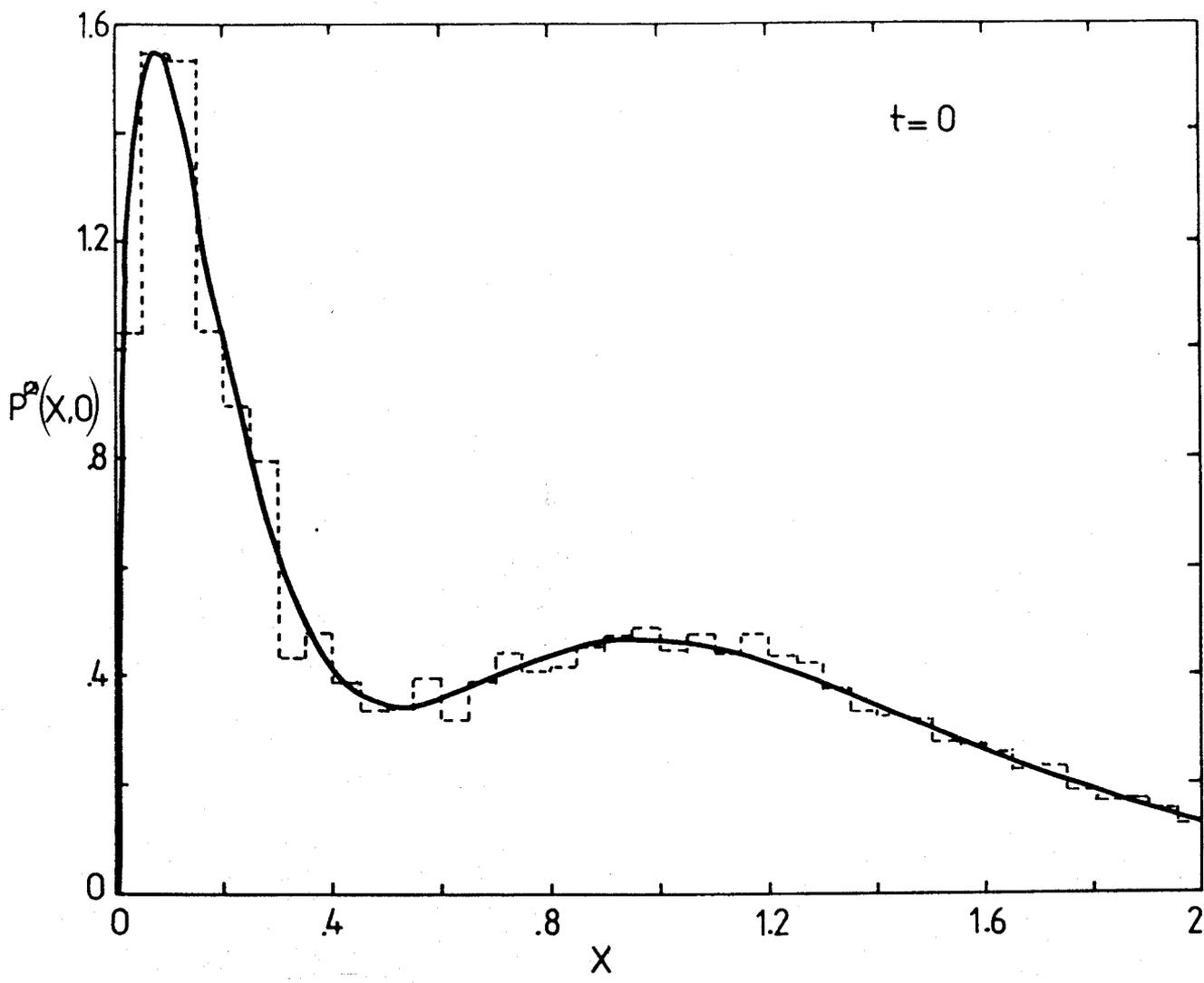


FIG.31 Comparación entre la evolución del segundo momento calculado numéricamente (línea de puntos) y la evolución analítica calculada a partir de  $P^{(2)}(X,t)$ . Con las condiciones  $K=3.5$ ,  $\langle X \rangle_0=0.8$  y  $\langle X^2 \rangle_0=1.1$

valores sobre los que realizar el promedio. Dicho de otra forma, disponemos de 440000 valores para determinar la función de distribución en cada instante de tiempo. En las figuras 32 se presenta la función de distribución calculada por el procedimiento numérico, y se compara con el resultado analítico, para distintos valores de  $t$ . Se observa que nuestro procedimiento de simulación reproduce bastante bien los resultados teóricos. Además, las pequeñas discrepancias iniciales se suavizan en el transcurso del tiempo, de manera que para  $t=1$  la solución obtenida mediante la simulación prácticamente se superpone con la teórica. Para  $t=8$  la distribución está ya muy próxima a la estacionaria.

### 3.5c Aplicación a una distribución delta de Dirac

Una vez confirmada la bondad del método, lo hemos aplicado a un caso de interés, cuyas soluciones analíticas explícitas no conocemos. La condición inicial para la función de distribución que tomamos ahora es una delta de Dirac centrada en  $\langle X \rangle_0 = 0.8$ . Consideremos valores de  $K$  iguales a 2.5, 4.5 y 6.5. Igual que antes, el número de trayectorias realizadas es 40000 y el paso de tiempo  $h=10^{-2}$ . En la figura 33 se muestra la evolución del primer momento para estos casos. Puede observarse que existe efecto de sobre población para  $K=2.5$ . La fluctuación de los resultados aumenta como es lógico al disminuir el valor de  $K$ . La evolución del segundo momento para los mismos casos se da en la figura 34. Como ya comentamos antes la dispersión de los resultados es mayor que para el primer momento. Finalmente, en la figura 35 mostramos la variación de la función de distribución para  $K=4.5$ .



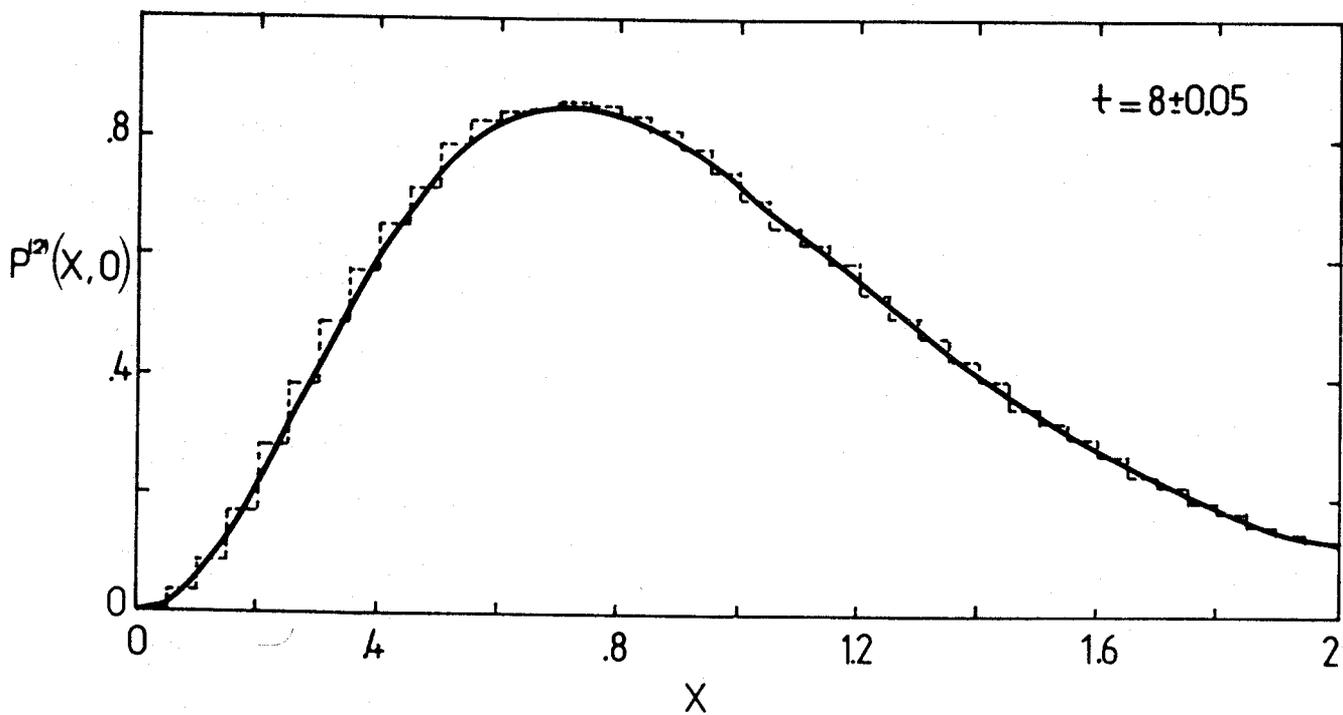
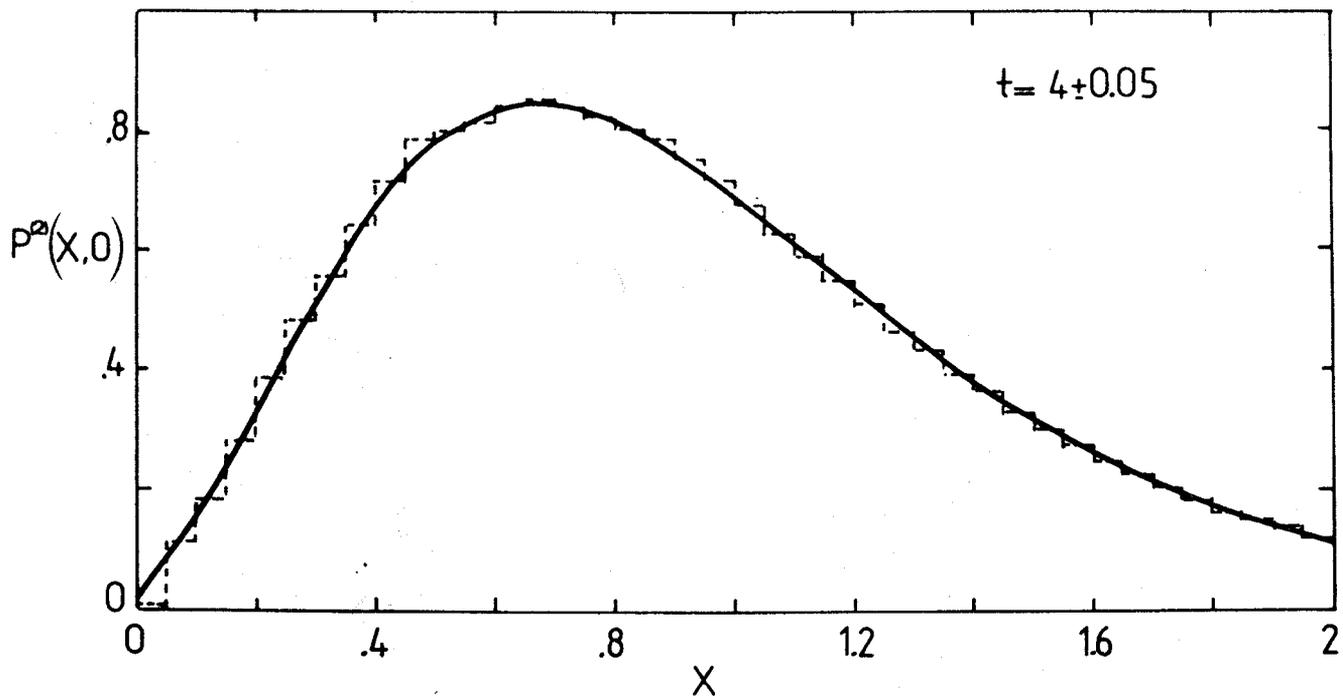


FIG:32 Comparación entre los resultados numéricos y analíticos de la función de distribución para distintos instantes de tiempo y en función de  $X$ . Con las condiciones iniciales  $\langle X \rangle_0 = 0.8$  y  $\langle X^2 \rangle_0 = 1.1$  y el parámetro  $K=3.5$

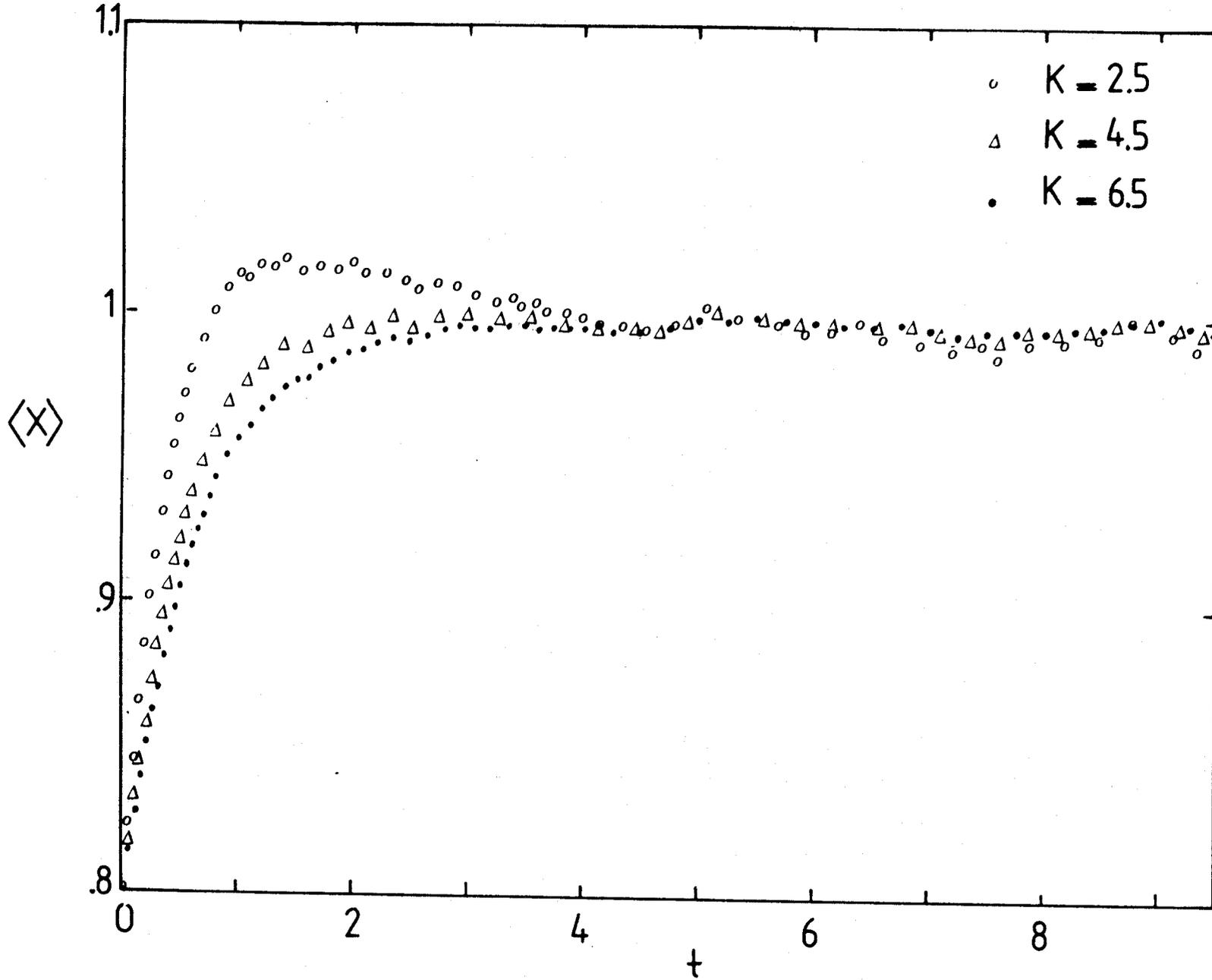


FIG: 33 representación de la evolución numérica del valor medio en función del tiempo a partir de una distribución inicial que es una delta de Dirac centrada en 0.8

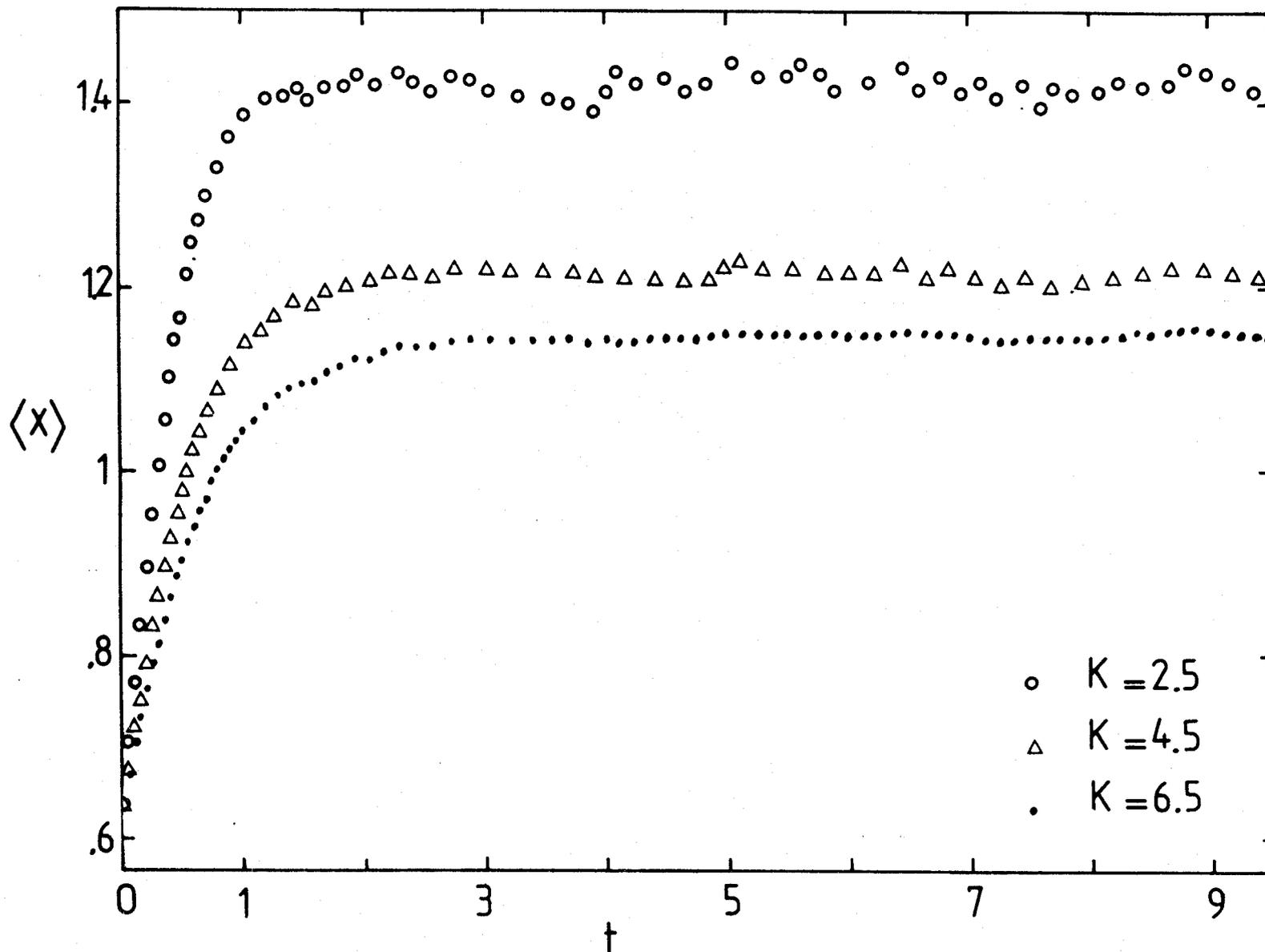


FIG:34 Representación de la evolución temporal del segundo momento calculada numéricamente a partir de una distribución inicial delta de Dirac centrada en 0.8.



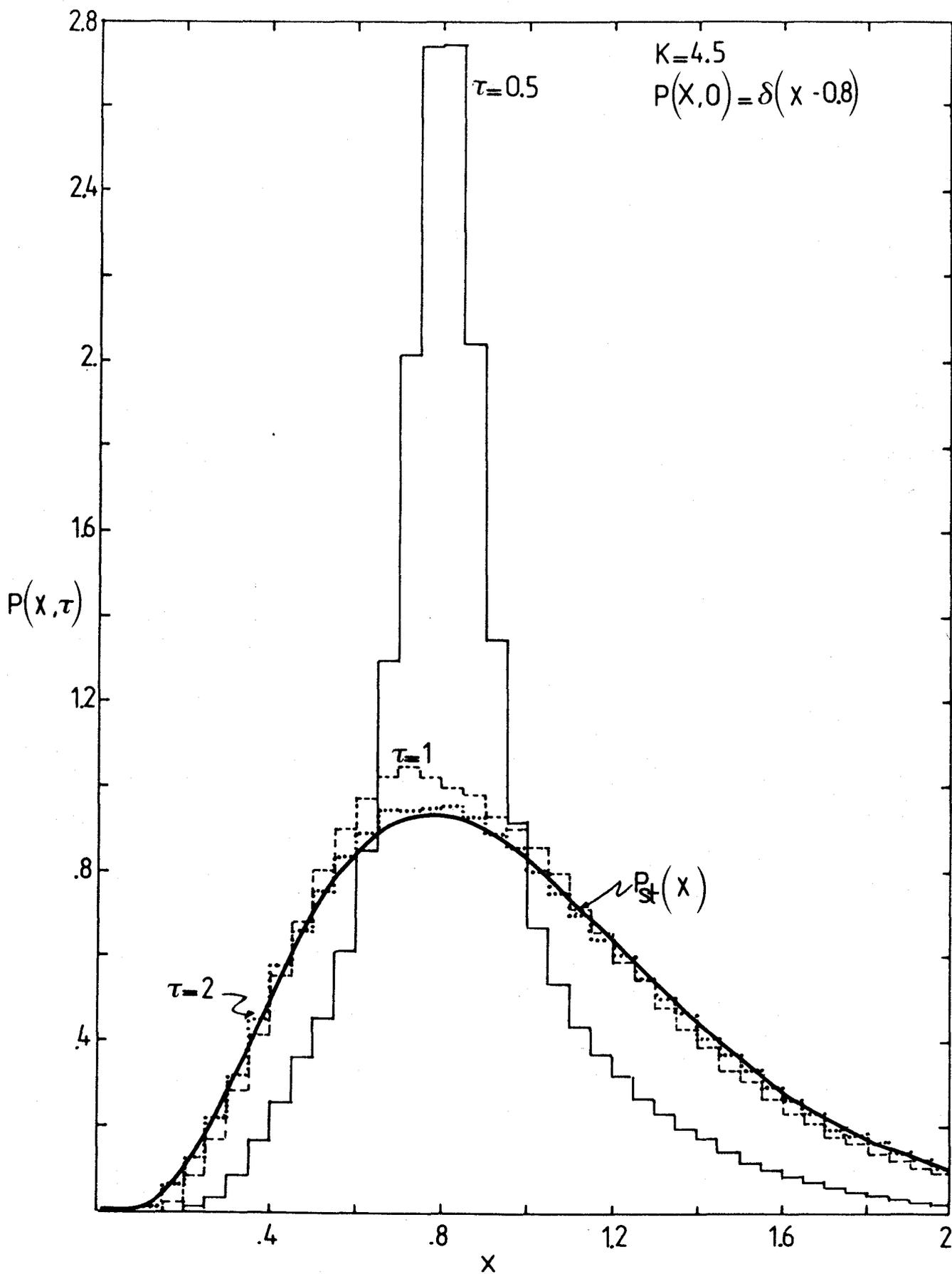


FIG:35 Representación del comportamiento de la función de distribución en función de  $x$ , para distintos instantes de tiempo, a partir de una distribución inicial delta de Dirac centrada en 0.8.

Como era de esperar, relaja hacia la distribución de equilibrio que se alcanza ya prácticamente para tiempos  $t \geq 2$ . Es decir, el tiempo de relajación de una delta de Dirac es del mismo orden que el de las soluciones exactas que hemos estudiado anteriormente. Para otras posiciones del máximo de la función delta y para otros valores de  $K$  los resultados son análogos.

Es interesante comparar estos resultados con los presentados por Morita<sup>16)</sup> para la misma condición inicial. En concreto, comparando con la figura 16-b se observa una gran diferencia incluso cualitativa. Esto es debido, a que como ya discutimos anteriormente los resultados de Morita no son aplicables a una distribución inicial que sea una delta de Dirac.

#### 4.- CONCLUSIONES

#### 4.- CONCLUSIONES

1.- Se ha considerado un sistema ecológico de especies que interactúan según el modelo de Lotka-Volterra. En el caso de que todas las especies excepto una estén inicialmente próximas a su estado estacionario, dicha especie obedece una ecuación del tipo Verhulst con dos características importantes: Es no markoviana, y contiene un término de adición de ruido multiplicativo.

2.- Se ha analizado teóricamente las condiciones necesarias para que sea aplicable una aproximación markoviana. En particular, se ha estudiado la influencia del número de especies así como del tipo de interacción entre ellas. Estos resultados han sido contrastados con los obtenidos mediante resolución numérica del conjunto de ecuaciones de Lotka-Volterra describiendo el sistema ecológico.

3.- Para cierta clase de interacción es posible calcular exactamente el término no markoviano, en el límite de infinitas especies. Ello nos ha permitido estudiar, teórica y numéricamente, la influencia de los efectos de memoria sobre la evolución de la población. Hemos encontrado que para ciertos valores iniciales la relajación hacia el estado estacionario no es monótona.

4.- A continuación hemos considerado el modelo estocástico de Verhulst, que contiene un término multiplicativo de ruido, gaussiano y blanco. Hemos construido la solución estacionaria de la ecuación de Fokker-Planck asociada. También se han encon-

trado familias de soluciones particulares exactas dependientes del tiempo, que vienen expresadas como productos de la función de distribución de equilibrio por polinómios en el inverso de la variable población. El grado máximo del polinómio auxiliar que define una familia de soluciones viene determinado por los parámetros que aparecen en el modelo.

5.- Las soluciones particulares dan lugar a una gran variedad de comportamientos cualitativamente distintos, cuando se va más allá del caso trivial de un polinómio de grado uno. Al analizar la evolución de los dos primeros momentos para soluciones que correspondan a un polinómio de grado dos, se obtienen, en principio, seis clases de comportamientos cualitativamente distintos. Algunos de ellos presentan interesantes fenómenos no monótonos de sobrepoblación y despoblación.

6.- Sin embargo, cuando en el análisis se considera también la función de distribución completa, resulta que algunos de los casos anteriores corresponden a situaciones física y matemáticamente inaceptables. En este sentido, creemos que es importante insistir en la necesidad de considerar también la función de distribución del sistema, cuando se efectúan aproximaciones sobre la evolución de los valores medios. En nuestro caso, hemos sido capaces de delimitar en el espacio de condiciones iniciales aquella región para la cual la función de distribución está bien definida en todo instante.

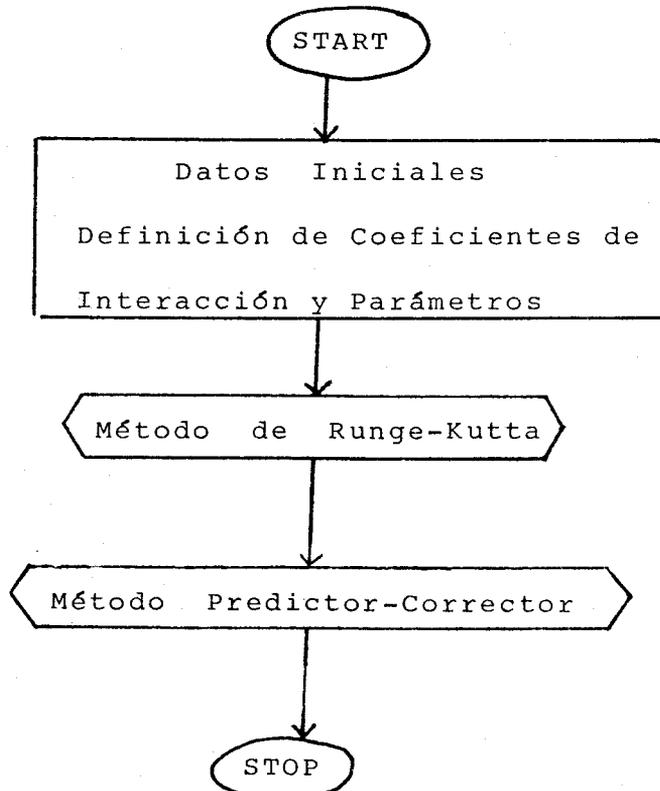
7.- El método desarrollado puede extenderse, generalizándolo para una clase de ecuaciones de Fokker-Planck con ruido multiplicativo.

8.- El conjunto de soluciones particulares que hemos encontrado no es completo, no permitiendo por tanto estudiar la evolución del sistema a partir de una función de distribución inicial arbitraria. Se ha desarrollado, entonces, un método numérico y se ha aplicado al caso de una condición inicial delta de Dirac. Los resultados obtenidos muestran que ciertas características esenciales, como por ejemplo, el orden de los tiempos de relajación, son las mismas que en las soluciones particulares. Al mismo tiempo, nos han permitido comprobar que algunos resultados presentados por otros autores eran esencialmente erróneos.

## 5.- APÉNDICES

APENDICE 1

En primer lugar, veamos un estudio somero del programa FORTRAN utilizado para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones no lineales acopladas que satisfacen el modelo de Lotka-Volterra. El programa consta de un programa principal y un subprograma o FUNCTION, donde se encuentran las ecuaciones diferenciales que se quieren resolver. En el programa principal se introducen las condiciones iniciales y la matriz que constituyen los coeficientes de interacción que interesan en cada caso. Posteriormente se utiliza el método de Runge-Kutta para calcular el siguiente punto en la evolución de las especies y así poder utilizar un método Predictor-Corrector. Es decir, presentando un sencillo diagrama de flujo



Los métodos utilizados son conocidas formas de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, con una condición inicial

$$y'(x) = f(x, y) \quad (\text{A1-1})$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (\text{A1-2})$$

Se presenta<sup>14)</sup> ahora una idea concisa de ellos.

Los métodos de *Runge-Kutta* tienen las siguientes propiedades

a) Son métodos de un paso: para encontrar  $y_{n+1}$  necesitamos solamente la información disponible en el punto precedente  $(x_n, y_n)$ .

b) Coinciden con el desarrollo en serie de Taylor hasta los términos del orden de  $h^p$  ( $h$  es el salto de tiempo), donde  $p$  (orden del método) es distinto para los diferentes métodos.

c) No requiere la evaluación de ninguna derivada de la función, sino únicamente de la función en sí.

El método de Runge-Kutta utilizado en el programa es el Runge-Kutta de cuarto orden, que es el de uso más frecuente. No hacemos su obtención, únicamente presentamos la fórmula de cuarto orden. Este método se puede definir mediante las cinco ecuaciones siguientes:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (\text{A1-3})$$

donde

$$K_1 = f(x_m, y_m) \quad (A1-4)$$

$$K_2 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h K_1}{2}\right) \quad (A1-5)$$

$$K_3 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h K_2}{2}\right) \quad (A1-6)$$

$$K_4 = f(x_m + h, y_m + h K_3) \quad (A1-7)$$

y  $h$  representa el tamaño del intervalo.

El error<sup>15)</sup> por truncamiento en este caso es

$$e_T = K h^5 \quad (A1-8)$$

así que tenemos un método de cuarto orden

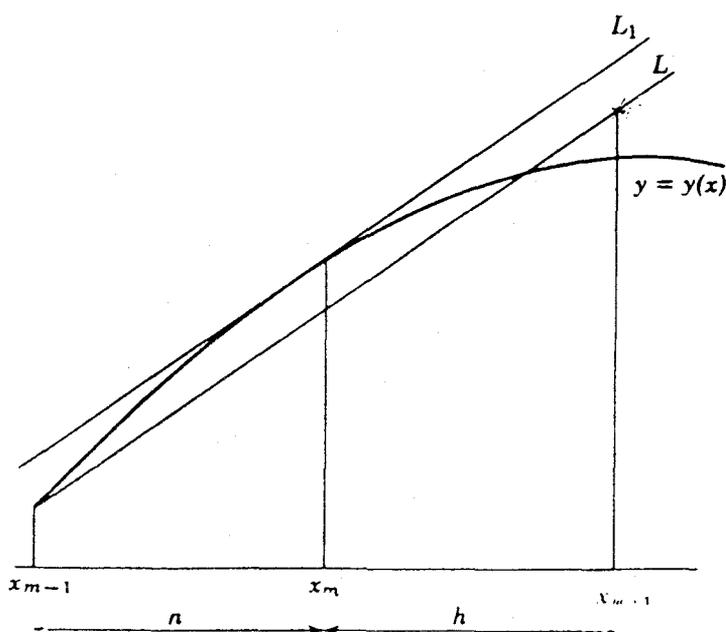
Una característica peculiar de los métodos de Runge-Kutta es que para obtener el punto  $(x_{m+1}, y_{m+1})$  se usa la información suministrada por  $(x_m, y_m)$  pero no por puntos precedentes. El hecho de que no se use la información previa de que se dispone, más la falta de un formalismo conveniente para estimar el error nos hace buscar un procedimiento mejor. Sin embargo estos métodos de segundo orden no pueden "arrancar" por sí solos, ya que exigen puntos previos. Se puede usar el método de Runge-Kutta para que el proceso empiece a funcionar y luego introducir el nuevo método. Estos métodos, de los que existen muchas variantes, se denominan métodos de *Predictor-Corrector*. Como su nombre indica, primero "se predice" un valor de  $y_{m+1}$ . Después se usa una fórmula diferente para "corregir" este valor. Se puede entonces, si parece conveniente, usar nuevamente la fórmula correctora para recorregir el valor de  $y_{m+1}$ . Este proceso puede iterarse tantas veces como se desee, aunque

existen consideraciones de eficiencia que sugieren seleccionar un valor de diferencia relativa que evita tener que hacer muchas iteraciones, así como la elección del tamaño del intervalo.

Veamos ahora el método Predictor-Corrector utilizado en nuestro programa: Para el *Predictor* usaremos un método de segundo orden

$$y_{m+1}^{(0)} = y_{m-1} + 2h f(x_m, y_m) \quad (\text{A1-9})$$

el superíndice cero indica que es la primera suposición para  $y_{m+1}$  (valor predicho). Geométricamente esto equivale a

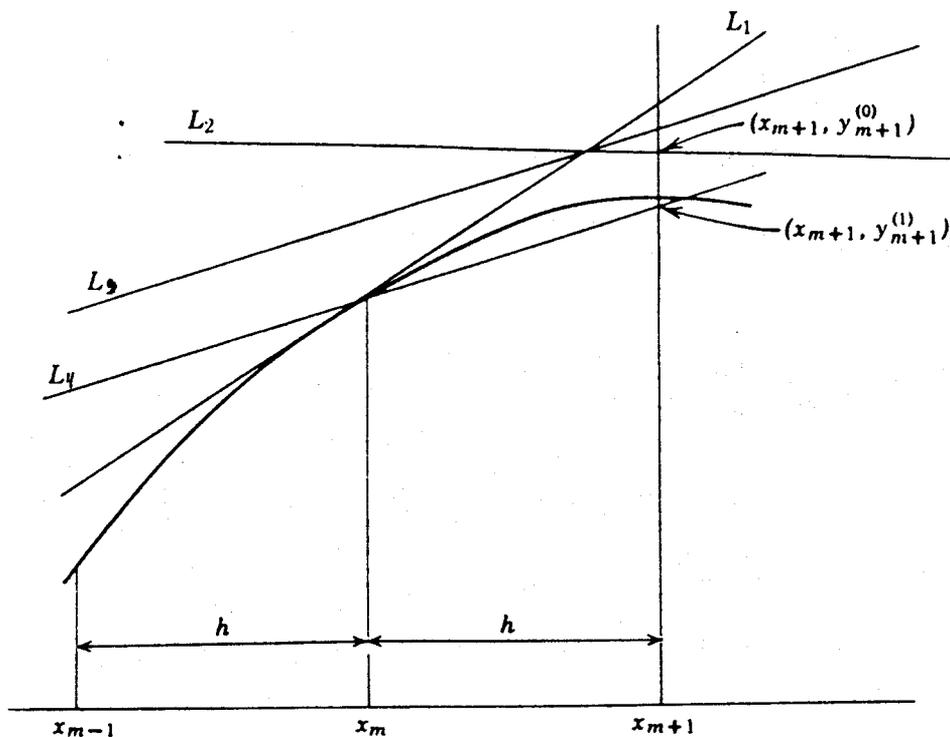


determinar la pendiente en  $(x_m, y_m)$  y dibujar una línea  $L_1$  con dicha pendiente y que pase por dicho punto. Posteriormente dibujar una línea  $L$  paralela a  $L_1$  que pase por  $(x_{m-1}, y_{m-1})$ . Donde esta línea corta la recta  $x = x_{m+1}$  se encuentra  $y_{m+1}^{(0)}$ .

El método *corrector* utilizado es el siguiente. Calculamos una pendiente "aproximada" en  $(x_{m+1}, y_{m+1}^{(0)})$ , (línea  $L_2$ ). Promediamos las pendientes de las líneas  $L_1$  y  $L_2$  y se obtiene la línea  $L_3$ . Finalmente se dibuja una línea  $L_4$  paralela a  $L_3$  por el punto  $(x_m, y_m)$ . Su intersección con la línea  $x = x_{m+1}$

produce una nueva aproximación a  $y_{m+1}$ . Llamamos a este valor corregido  $y_{m+1}^{(1)}$ .

$$y_{m+1}^{(1)} = y_m + \frac{h}{2} \left[ f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}^{(0)}) \right] \quad (\text{A1-10})$$



Tomando  $y_{m+1}^{(1)}$  como valor aproximado se puede hacer una nueva corrección, de forma que en la  $i$ -ésima aproximación  $y_{m+1}^{(i)}$  está dado por

$$y_{m+1}^{(i)} = y_m + \frac{h}{2} \left[ f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}^{(i-1)}) \right] \quad (\text{A1-11})$$

las iteraciones se detienen cuando

$$\left| y_{m+1}^{(i+1)} - y_{m+1}^{(i)} \right| < \epsilon \quad (\text{A1-12})$$

para un valor positivo especificado de  $\epsilon$ .

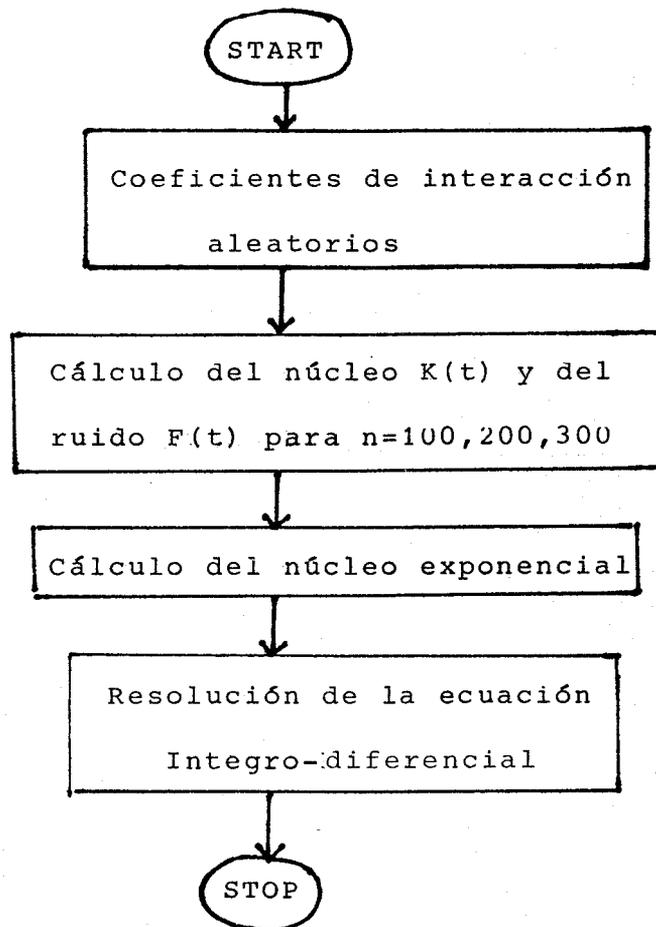
Este método converge a algún valor definido, pero no necesariamente a la solución verdadera. La diferencia entre ambos valores es el error por truncamiento que es

$$E_T^{(c)} = -\frac{h^3}{12} y'''(\eta) = \frac{1}{5} [y_m^{(0)} - y_m^{(1)}] \quad X_{m-1} \leq \eta \leq X_{m+1} \quad (\text{A1-13})$$

el cual puede estimarse facilmente y que nos permite tambien buscar un intervalo  $h$  adecuado.

APENDICE 2

Diagrama de flujo del método numérico utilizado en la resolución de la ecuación integro-diferencial, para la evolución de la población problema, en el caso de un núcleo no markoviano y con ruido multiplicativo.



Veamos ahora cual es el método utilizado para resolver la ecuación integro-diferencial.

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}(t) = -y(t) \int_0^t dt' K(t-t') [y(t') - 1] + y(t) F(t) \quad (\text{A2-1})$$

denotamos  $t = t_j = j \cdot h$  (A2-2)

donde  $h$  es el incremento temporal.

$$\dot{y}(t_j) = \dot{y}_j = -y_j \sum_{i=1}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} ds K(t_j-s) [y(s) - 1] + F_j y_j \quad (\text{A2-3})$$

Si  $h$  es suficientemente pequeño, puede considerarse que dentro de la integral  $\sum_{i=1}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}}$  de forma que  $K(t_j-s) \approx \text{cte}$  e  $y(t_i) = \text{cte}$ .

$$\dot{y}_j = -y_j \sum_{i=1}^{j-1} K_{j-i} (y_i - 1) h + F_j y_j + \mathcal{O}(h^2) \quad (\text{A2-4})$$

En general

$$y_j = y_{j-1} + \dot{y}_j h \quad (\text{A2-5})$$

para  $h$  suficientemente pequeño.

$$y_j = y_{j-1} + y_j h^2 \sum_{i=1}^{j-1} K_{j-i} (y_i - 1) + h F_j y_j + \mathcal{O}(h^3) \quad (\text{A2-6})$$

Despejando  $y_j$

$$y_j = \frac{y_{j-1}}{1 - F_j h + h^2 \sum_{i=1}^{j-1} K_{j-i} (y_i - 1)} \quad (\text{A2-7})$$

Que es el resultado que se utiliza para calcular los distintos valores de la variable  $y(t)$  en función del tiempo, los cuales dependen directamente del valor  $j$ .

APENDICE 3

Conocida la forma funcional de la función de distribución de probabilidad dada en la ec.(48), puede obtenerse para el primer y segundo momentos las expresiones

$$\langle N \rangle_t = \int_0^{\infty} dN N P(N, t) = \langle N \rangle_{st} A_1(t) + A_2(t) + A_3(t) \frac{\kappa}{\kappa-1} \quad A3(1-a)$$

$$\langle N^2 \rangle_t = \int_0^{\infty} dN N^2 P(N, t) = \langle N^2 \rangle_{st} A_1(t) + \langle N \rangle_{st} A_2(t) + A_3(t) \quad A3(1-b)$$

y haciendo uso de la ec.(50) se obtiene

$$\langle N \rangle_t = \langle N \rangle_{st} + e^{-\lambda_1 t} \left[ A_2(0) - \frac{2A_3(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right] \left( 1 - \frac{\langle N \rangle_{st}}{\lambda_1} \right) + e^{-\lambda_2 t} \left[ \frac{A_3(0)}{\lambda_1} + \frac{2A_3(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} \left( 1 - \frac{\langle N \rangle_{st}}{\lambda_2} \right) \right] \quad A3(2-a)$$

$$\langle N^2 \rangle_t = \langle N^2 \rangle_{st} + e^{-\lambda_1 t} \left[ A_2(0) - \frac{2A_3(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right] \left( \langle N \rangle_{st} - \frac{\langle N^2 \rangle_{st}}{\lambda_1} \right) + e^{-\lambda_2 t} \left[ \frac{A_3(0)}{\lambda_1} + \frac{2A_3(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} \left( \langle N \rangle_{st} - \frac{\langle N^2 \rangle_{st}}{\lambda_2} \right) \right] \quad A3(2-b)$$

Recordando las relaciones

$$\langle N \rangle_{st} = Q \quad \langle N^2 \rangle_{st} = Q(Q + \sigma^2/2)$$

$$\lambda_1 = Q - \sigma^2/2 \quad \lambda_2 = 2(Q - 2\sigma^2/2) \quad A3(3)$$

Es facil ver que podemos escribir

$$\langle N \rangle_t = Q - A e^{-\lambda_1 t} - B e^{-\lambda_2 t}$$

$$\langle N^2 \rangle_t = Q^2 \left( 1 + \frac{1}{\kappa} \right) - 2QA e^{-\lambda_1 t} - 3Q \frac{\kappa-1}{\kappa} B e^{-\lambda_2 t} \quad A3(4)$$

donde

$$A = - \left( A_2(0) - \frac{2A_3(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \left( 1 - \frac{\langle N \rangle_{st}}{\lambda_1} \right) = \frac{1}{\kappa-1} \left( A_2(0) - \frac{2A_3(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right)$$

$$B = - \left[ \frac{A_3(0)}{\lambda_1} + \frac{2A_3(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} \left( 1 - \frac{\langle N \rangle_{st}}{\lambda_2} \right) \right] = \frac{2A_3(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{1}{(\kappa-1)(\kappa-2)} \quad A3(5)$$

Las dos constantes que quedan por determinar, A y B, se

pueden expresar en función del primer y segundo momento inicial a partir de las ecuaciones A3(4) haciendo  $t=0$ . Se obtiene, despejando A y B, las siguientes relaciones

$$A = \frac{1}{\kappa-3} \left[ 2Q(\kappa-2) - 3\langle N \rangle_0 (\kappa-1) + \frac{\langle N^2 \rangle_0}{Q} \kappa \right]$$

$$B = \frac{\kappa}{Q(\kappa-3)} \left[ 2Q\langle N \rangle_0 - \langle N^2 \rangle_0 - Q^2 \left( 1 - \frac{1}{\kappa} \right) \right] \quad A3(6)$$

Podemos obtener la dependencia de las constantes  $A_2(0)$  y  $A_3(0)$  en función de las condiciones iniciales y el valor de  $\kappa$ , a partir de las ecs. A3(5) y A3(6)

$$A_3(0) = \frac{1}{2}(\kappa-1)(\kappa-2)(\lambda_1 - \lambda_2) B = -\frac{(\kappa-1)(\kappa-2)}{2} \left[ 2Q\langle N \rangle_0 - \langle N^2 \rangle_0 - Q^2 \left( 1 - \frac{1}{\kappa} \right) \right]$$

$$A_2(0) = (\kappa-1)A + \frac{2A_3(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} = (\kappa-1) \left[ 2(\kappa-1/2)\langle N \rangle_0 - \kappa \frac{\langle N^2 \rangle_0}{Q} - Q(\kappa-2) \right] \quad A3(7)$$

Sustituyendo en la ecuación de la función de distribución de probabilidad

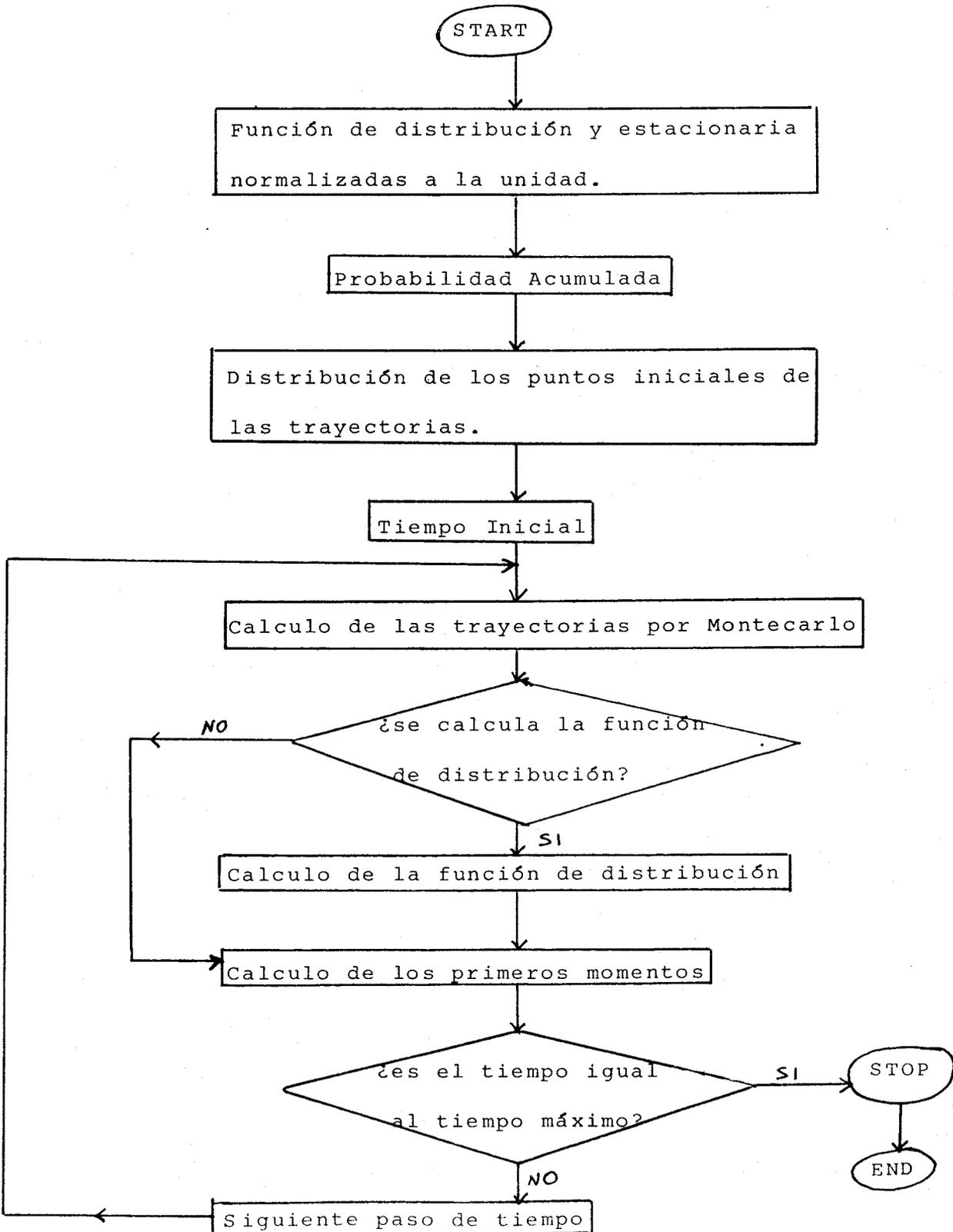
$$P(N,t) = P_{st}(N) \left[ 1 + \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \left( A_2(0) - \frac{2A_3(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) e^{-\lambda_1 t} + \left( \frac{2A_3(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{\lambda_2} \right) + \frac{A_3(0)}{N^2} \right) e^{-\lambda_2 t} \right] \quad A3(8)$$

se obtiene

$$P(N,t) = P_{st}(N) \left[ 1 + A(\kappa-1) \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{\lambda_1} \right) e^{-\lambda_1 t} + B(\kappa-1)(\kappa-2) \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{\lambda_2} + \frac{3Q/2 - Q}{2N^2} \right) e^{-\lambda_2 t} \right] \quad A3(9)$$

APENDICE 4

Diagrama de flujo del programa utilizado para resolver numéricamente la ecuación estocástica de Verhulst.





donde:

NT= número de trayectorias que se realizan

DX= Intervalo elegido en el eje de las X (poblaciones)

N0= La mitad del número de partes en que se ha dividido el eje X

PAC= Probabilidad acumulada

NX= Vector que indica el número de puntos iniciales en cada  
intervalo de X.

## 6.- REFERENCIAS

REFERENCIAS

- 1.- N.S.Goel, S.C.Maitra y E.W.Montrol, Rev.Mod.Phys. 43  
(1971) 231
- 2.- R.M.May, Theoretical Ecology. Principles and Aplications  
Blackwell Scientific Publications (Oxford-London,1976)p.49
- 3.- Bartholomew, Stochastic Models for Social Processes  
John Wiley (Chichester-New York, 1978)
- 4.- N.G.van Kampen, Stochastic Processes in Physics and Chemis-  
try North-Holland Pub.Co. (Amsterdam-New York-Oxford,1981)
- 5.- M.C.Wang y C.E.Uhlenbeck, Rev.Mod.Phys. 17 (1945) 323
- 6.- C.W.Gardiner, Handbook of Stochastic Methods . Springer-  
Verlag (Berlin-Heidelberg-New York,1983)
- 7.- H.Risken, The Fokker-Planck Equation, Springer-Verlag  
(Berlin-Heidelberg-New York,1984)
- 8.- N.G.van Kampen, J.Stat.Phys. 24 (1981) 175
- 9.- Kerner, Gibbs Ensemble: Biological Ensemble. Gordon y  
Breach (New York,1971)
- 10.- A.V.Bobylev, Sov.Phys-Dokl. 20 (1976) 820,822; 21 (1976)  
632.  
M.Krook y T.T.Wu, Phys.Rev.Lett. 36 (1976) 1107; 38  
(1977) 991.
- 11.- J.A.Tjon, Phys.Lett A 70 (1979) 369
- 12.- J.J.Brey,J.Gómez Ordoñez y A.Santos, Phys.Rev. A 26  
(1982) 2817
- 13.- N.G.van Kampen, J.Stat.Phys. 11 (1974) 475
- 14.- D.D.McCraken y W.S?Dorn, Métodos numéricos y programación  
Fortran, Limusa-Wiley (Mexico,1971)

- 15.- A.Ralston, Runge-Kutta Methods with Minimum Error Bounds.  
Mathematics of Computation 16(1962)p.431-437
- 16.- A.Morita, J.Chem.Phys. 76(1982)4191
- 17.- R.Morf y E.Stoll, Numerical Analysis. Editado por  
J.Desdoux y J. Marti (Birkhauser-Basel,1977)33,p.139  
Schneider y E.Stoll, Phys.Rev.B 17(1978)1302
- 18.- W.W.Wood Fundamental Problems in Statistical Mechanics  
Editado por E.G.D.Cohen(north-Holland,Amsterdam,1975)
- 19.- J.M.Sancho y M.Sanmiguel , Phy.Rev. A26 (1982)1589
- 20.- A.Einstein, Investigations on the theory of the Brownian  
Movement Pub.Co. (New York,1956)
- 21.- Landau y Lifshitz. Física teórica.Física Estadística  
Editorial Reverté. 5 (Barcelona,1975)
- 22.- K.Nordholm y R.Zwanzig, J.Stst.Phys.11(1974)143;13(1975)347

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

en el día de la fecha, para optar al título de

D.º Concepción Aizpuro Domínguez  
título "Estudio del modelo estocástico de  
Malthus-Verhulst".

acordó por unanimidad otorgarle el grado de Apto "cum laude"

Sevilla, 7 de febrero

1986

El Vocal,

El Vocal,

El Vocal,

[Signature]

[Signature]

[Signature]

El Presidente,

El Secretario,

El Doctorado

[Signature]

[Signature]

[Signature]

