

ESTIMACIÓN DE ESTADOS BASADA EN ERROR ACOTADO

J.M. Bravo

Universidad de Huelva, caro@uhu.es.

T. Alamo y E.F. Camacho

Universidad de Sevilla, {alamo, eduardo}@cartuja.us.es

Resumen

Este artículo presenta una revisión de los trabajos realizados por los autores en el campo de la estimación de estados para sistemas no lineales considerando una descripción acotada de los parámetros del modelo y del ruido en las medidas. El objetivo del algoritmo de estimación de estados propuesto es obtener el conjunto de estados que son consistentes con la evolución del sistema, las medidas de las salidas obtenidas y las cotas de ruido y parámetros consideradas. Zonotopos, Programación DC y aritmética intervalar son los ingredientes de los algoritmos propuestos.

Palabras clave: Estimación de estados, aritmética intervalar, programación DC.

1 INTRODUCCIÓN

El propósito de este artículo es presentar los nuevos algoritmos de estimación de estados desarrollados por los autores. Estos algoritmos de estimación de estados se pueden aplicar a sistemas discretos no lineales con incertidumbres. La teoría del filtro de Kalman proporciona una estimación del estado de un proceso dado basándose en las medidas de la salida del sistema. Esta estimación es óptima respecto la varianza del error. Una alternativa diferente es considerar una incertidumbre acotada (Milanese, Norton, Piet-Lahanier & Walter 1996, Garulli, Tesi & Vicino 1999). Esta hipótesis es la adoptada en este trabajo que presenta un algoritmo de estimación de estados que obtiene un conjunto compacto que acota los estados del sistema que son consistentes con las salidas medidas, la dinámica del sistema y la incertidumbre acotada.

En la literatura se han utilizado diferentes figuras geométricas para acotar el conjunto de estados que representa la estimación en cada instante de muestreo. Elipsoides (Schweppe 1968), poliedros (Kuntsevich & Lychak 1985), cajas (Jaulin 2002) y paralelotopos (Chisci, Garulli & Zappa 1996) han sido las principales elecciones.

Otra opción es la utilización de zonotopos. Un

zonotopo es una transformación de una caja unitaria (Montgomery 1989, Shephard 1974). La aritmética intervalar y los zonotopos se combinan en (Alamo, Bravo & Camacho 2005) para obtener un estimador de estados garantista. En (Alamo, Bravo & Camacho En prensa) se ha desarrollado un estimador de estados basado en Programación DC. Este artículo realiza una revisión comparativa de dichos trabajos.

El artículo está organizado como sigue: La formulación del problema abordado y las líneas generales del algoritmo se presentan en la sección 2. Los métodos para acotar la trayectoria de un sistema dinámico no lineal son abordados en la sección 3. En la sección 4 se presentan métodos para acotar el conjunto de estados consistente con las medidas obtenidas del sistema. La última fase del algoritmo de estimación de estados se presenta en la sección 5. Finalmente, se presentan dos ejemplos para ilustrar los algoritmos.

2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Considérese un sistema discreto no lineal con incertidumbres de la forma:

$$\begin{cases} x_{k+1} &= \mathbf{f}(x_k, w_k) \\ y_k &= \mathbf{d}(x_k, v_k) \end{cases} \quad (1)$$

donde $x_k \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ con $k \geq 0$ es el estado del sistema y $y_k \in \mathbb{R}^p$ es la medida del vector de salida en tiempo de muestreo k . El vector $w_k \in \mathbb{R}^{n_w}$ con $k \geq 0$ representa los parámetros variantes con el tiempo y las posibles perturbaciones del proceso y el vector $v_k \in \mathbb{R}^{p_v}$ con $k \geq 0$ es el ruido de las medidas.

Se asume que las incertidumbres y el estado inicial están acotados mediante conjuntos cerrados y acotados: $w_k \in W \subseteq \mathbb{R}^{n_w}$, $v_k \in V \subseteq \mathbb{R}^{p_v}$ y $x_o \in \mathcal{X}_0 \subseteq \mathbb{R}^n$.

Dada una función continua $\phi(\cdot)$ y un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, la notación $\phi(X)$ representa el rango de la función $\phi(\cdot)$ en X y se define como el conjunto $\{\phi(x) : x \in X\}$. Con esta notación, el conjunto de estados consistente y el conjunto de

estados incierto exacto se definen como:

Definición 1 Dado el sistema (1) y una medida de la salida y_k , el conjunto de estados consistente en el instante de muestro k se define como $\mathcal{X}_{y_k} = \{ x \in \mathbb{R}^n : y_k \in \mathbf{d}(x, V) \}$.

Definición 2 Considerar un sistema descrito mediante la ecuación (1). El conjunto de estados incierto exacto \mathcal{X}_k es igual al conjunto de estados que es consistente con las salidas medidas y_1, y_2, \dots, y_k y el conjunto de estados inicial \mathcal{X}_0 :

$$\mathcal{X}_k = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1}, W) \bigcap \mathcal{X}_{y_k}, \quad k \geq 1$$

La obtención exacta de estos conjuntos es una tarea difícil. Para reducir la complejidad en los cálculos, estos conjuntos son acotados mediante cotas externas conservadoras. Por tanto, en el instante de muestro k , el objetivo es encontrar una aproximación externa y garantista del correspondiente conjunto de estados incierto exacto \mathcal{X}_k .

Este artículo resume los últimos avances realizados por los autores en el desarrollo de algoritmos de estimación de estados para sistemas no lineales con error acotado. A continuación se presenta el esquema general del algoritmo de estimación. Sea una cota externa del conjunto de estados incierto disponible en el instante de muestro $k-1$ (a esta cota se la denotará $\tilde{\mathcal{X}}_{k-1}$). Sea también una medida de la salida y_k obtenida en el instante de muestro k . Bajo estas hipótesis, las operaciones realizadas por el algoritmo de estimación de estados en el instante k son:

Algoritmo 1

Paso 1: Acotar externamente la trayectoria del sistema no lineal: $\tilde{\mathcal{X}}_k \supseteq \mathbf{f}(\tilde{\mathcal{X}}_{k-1}, W)$.

Paso 2: Obtener una cota externa del conjunto de estados consistente \mathcal{X}_{y_k} . Denotarlo como $\tilde{\mathcal{X}}_{y_k}$.

Paso 3: Obtener una cota externa de la intersección de los dos conjuntos $\tilde{\mathcal{X}}_k \cap \tilde{\mathcal{X}}_{y_k}$. Denotarlo como $\tilde{\mathcal{X}}_k$.

Fin del algoritmo 1

El algoritmo propuesto es parecido al filtro de Kalman, el primer paso se puede considerar como un paso de predicción mientras que los pasos segundo y tercero constituyen una corrección. La utilización de aritmética intervalar, programación DC, operadores de intersección, etc, serán expuestas en el resto del artículo.

3 MÉTODOS PARA ACOTAR LA TRAYECTORIA DE UN SISTEMA NO LINEAL

Esta sección trata de la implementación del paso 1 del algoritmo de estimación de estados propuesto. El paso 1 del algoritmo necesita de algún tipo de operador que realice de forma garantista una predicción de la evolución del sistema teniendo en cuenta el conjunto de estados obtenido en la iteración anterior, el modelo del sistema y las posibles incertidumbres. Los autores han considerado dos posibilidades para implementar dicho paso. La primera consiste en utilizar aritmética intervalar, que es una aritmética extendida para operar con cantidades intervalares. La segunda opción consiste en utilizar programación DC. Ambas alternativas son explicadas a continuación.

3.1 ARITMÉTICA INTERVALAR

3.1.1 CONCEPTOS PRELIMINARES

Un intervalo $[a, b]$ es el conjunto $\{ x : a \leq x \leq b \}$. El intervalo unitario es $\mathbf{B} = [-1, 1]$. Una caja es un vector intervalar. Una caja unitaria en \mathbb{R}^m , denotada como \mathbf{B}^m , es una caja compuesta de m intervalos unitarios. La suma Minkowski de dos conjuntos X e Y se define mediante $X \oplus Y = \{ x + y : x \in X, y \in Y \}$. Dado un vector $p \in \mathbb{R}^n$ y una matriz $H \in \mathbb{R}^{n \times m}$, el conjunto:

$$p \oplus H\mathbf{B}^m = \{ p + Hz : z \in \mathbf{B}^m \}$$

se denomina zonotopo de orden m . Notar que un zonotopo es la suma Minkowski de los segmentos definidos por las columnas de la matriz H . Un paralelotopo es un zonotopo con $n = m$. Dado el paralelotopo $P = p \oplus H\mathbf{B}^n$, donde $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es invertible, P se puede escribir como $P = \{ x : \|H^{-1}x - H^{-1}p\|_\infty \leq 1 \}$.

La aritmética intervalar se basa en operaciones aplicadas a intervalos. Una operación op se puede extender de números reales a intervalos como:

$$A \text{ op } B = \{ a \text{ op } b : a \in A, b \in B, A, B \in \mathbb{I} \} \quad (2)$$

Las cuatro operaciones intervalares básicas son (Moore 1966):

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$$

$$[a, b] * [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$$

$$[a, b] / [c, d] = [a, b] * [1/d, 1/c], \quad \text{si } 0 \notin [c, d] \quad (3)$$

Una extensión de la aritmética intervalar para incluir el 0 en la división se puede encontrar en

(Hansen 1992). También es posible realizar extensiones intervalares de funciones estándar como $\{\sin, \cos, \tan, \arctan, \exp, \ln, \text{abs}, \text{sqr}, \text{sqrt}\}$. En resumen, mediante aritmética intervalar es posible obtener una cota del rango de una función no lineal.

Teorema 1 (Moore 1966) *Una extensión intervalar natural $\square(f)$ de una función continua $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sobre una caja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ satisface que $f(X) \subseteq \square(f(X))$. Este es el teorema fundamental de la aritmética intervalar.*

3.1.2 ACOTACIÓN DE LA PREDICCIÓN MEDIANTE ARITMÉTICA INTERVALAR

Considerando un conjunto de estados $\hat{\mathcal{X}}_{k-1}$, en el instante k el algoritmo de estimación, en su paso 1, debe obtener el conjunto de estados alcanzables $\hat{\mathcal{X}}_k$ teniendo en cuenta la dinámica del sistema y la incertidumbre, esto es $\hat{\mathcal{X}}_k \supseteq \mathbf{f}(\hat{\mathcal{X}}_{k-1}, W)$. La incertidumbre se puede representar acotada mediante un zonotopo $W = c_w \oplus M_w \mathbf{B}^{r_w}$ donde $c_w \in \mathbb{R}^{n_w}$.

El siguiente teorema es una generalización del método de Kühn (Kühn 1998) que proporciona un operador para calcular el conjunto $\hat{\mathcal{X}}_k$.

Theorem 1 (Alamo et al. 2005) *Dada una función $\mathbf{f}(x, w)$ donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, un zonotopo $X = p \oplus H\mathbf{B}^m$ y un zonotopo $W = c_w \oplus M_w \mathbf{B}^{r_w}$, considerar las siguientes extensiones intervalares:*

- Un zonotopo $q \oplus S\mathbf{B}^d$ tal que $f(p, W) \subseteq q \oplus S\mathbf{B}^d$.
- Una matriz intervalar $\mathbf{M} = \square(\nabla_x f(X, W))H$.
- Un zonotopo $\Psi(X, W) = q \oplus S\mathbf{B}^d \oplus \diamond(\mathbf{M}\mathbf{B}^m) = q \oplus H_q \mathbf{B}^l$ con $l = d + n + m$

bajo las hipótesis previas resulta $f(X, W) \subseteq \Psi(X, W)$

Notar que el zonotopo $q \oplus S\mathbf{B}^d$ y la matriz \mathbf{M} del teorema 1 se pueden obtener mediante la utilización de aritmética intervalar. El operador $\diamond(\cdot)$ también devuelve un zonotopo garantista (Alamo et al. 2005). Por tanto el operador $\Psi(\cdot, \cdot)$ se puede utilizar en el paso 1 del algoritmo para obtener $\hat{\mathcal{X}}_k$. En la siguiente sección se muestra otra posibilidad basada en Programación DC.

3.2 PROGRAMACIÓN DC

3.2.1 CONCEPTOS PRELIMINARES

Esta sección presenta resultados esenciales acerca de la Programación DC. Estos conceptos se utilizan en uno de los algoritmos de estimación propuesto por los autores. Las referencias (Horst & Thoai 1999, Tuy 1998) y (Tuy 1995) son buenas introducciones a la Programación DC.

Definición 3 *Sea S un polítopo convexo (conjunto poliédrico acotado) de \mathbb{R}^n . Una función real $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina DC en S , si existen dos funciones convexas $g, h : S \rightarrow \mathbb{R}$ tales que f se puede expresar en la forma: $f(x) = g(x) - h(x)$.*

Se sabe que el conjunto de funciones DC definidas en un conjunto convexo compacto es denso en el conjunto de las funciones continuas definidas en ese conjunto (Tuy 1995, Horst & Thoai 1999). Por tanto, cada función continua en un conjunto convexo compacto se puede aproximar por una función DC con la precisión deseada. Además, dada una \mathcal{C}^2 -función, siempre es posible obtener una representación DC. En efecto, suponer que $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ satisface $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) > -2\alpha \mathbf{I}$, $\forall x \in S$ con $\alpha \geq 0$. Una \mathcal{C}^2 -función es convexa en S si y sólo si $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) \geq 0$, $\forall x \in S$. Teniendo esto en mente, es fácil ver que $f(x) = g(x) - h(x)$, con $g(x) = f(x) + \alpha x^\top x$ y $h(x) = \alpha x^\top x$ constituyen una representación DC de $f(x)$. Un método sistemático para obtener (mediante aritmética intervalar) un valor apropiado de α para una \mathcal{C}^2 -función dada se puede encontrar en (Adjiman & Floudas 1996). El siguiente ejemplo ilustra esta idea. Considerar la función $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ en el dominio $x \in [-1, 1]$. Como $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) = 6x + 2$, resulta que $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) \geq -4$, $\forall x \in [-1, 1]$. Por tanto, $f(x) + 2x^2$ satisface $\frac{\partial^2}{\partial x^2} (f(x) + 2x^2) \geq 0$ para todo $x \in [-1, 1]$. Definiendo $g(x) = f(x) + 2x^2$ y $h(x) = 2x^2$, la función equivalente $f(x) = g(x) - h(x)$ es una función DC en $x \in [-1, 1]$.

Definición 4 *Se denominan Programación DC a aquellos problemas de programación que tratan con funciones DC. Una forma general de un problema de Programación DC es de la forma:*

$$\min_{x \in S} f(x)$$

donde $f(x) = g(x) - h(x)$ y $g(x)$ y $h(x)$ son convexas S .

Notar que no es necesario restringir S a la clase de los polítopos. Las siguientes definiciones son estándar en la literatura de optimización convexa.

Definición 5 *El subdiferencial de una función convexa $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto x_0 (también*

denominado el conjunto de subgradientes de g en el punto x_0) denotado $\partial g(x_0)$ se define como:

$$\partial g(x_0) = \{ u_0 \in \mathbb{R}^n : g(x) \geq g(x_0) + u_0^\top (x - x_0), \forall x \in S \}$$

Si la función g es diferenciable en S , el vector u_0 se puede obtener mediante el gradiente de la función: $u_0 = \frac{\partial}{\partial x} g(x_0)$. Esto se deriva directamente de la convexidad de g .

Definición 6 Dada una función convexa $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ y un subgradiente u_0 de g en el punto $x_0 \in S$, un minorante lineal de g es la función lineal:

$$\bar{g}(x) = g(x_0) + u_0^\top (x - x_0)$$

Por definición $g(x) \geq \bar{g}(x)$, $\forall x \in S$. De la misma forma, dada la función convexa $h : S \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{h}(x)$ denota un minorante lineal de h (obtenido mediante el concepto de subgradiente).

Denotando $vert(S)$ el conjunto de vértices de S , y teniendo en mente que $\bar{g}(x) - h(x)$ es una función cóncava y $g(x) - \bar{h}(x)$ es una función convexa, es posible obtener una solución aproximada de los problemas de Programación DC:

$$\min_{x \in S} f(x) \geq \min_{x \in vert(S)} \bar{g}(x) - h(x)$$

$$\max_{x \in S} f(x) \leq \max_{x \in vert(S)} g(x) - \bar{h}(x)$$

Por tanto, para obtener cotas superiores e inferiores de la solución global, se deben visitar todos los vértices del conjunto S .

Utilizando estas ideas, la programación DC se puede utilizar para acotar el rango de una función. A continuación se muestra un ejemplo simple. Considerar la función $f(x) = x^2 - \exp(x)$ en el dominio $S = [0, 2]$. Claramente, $f(x)$ es una función DC ($g(x) = x^2$ y $h(x) = \exp(x)$). El rango exacto de la función es $f(S) = [4 - \exp(2), -\exp(0)] = [-3.3891, -1]$. El rango obtenido mediante aritmética intervalar (Moore 1966) es $f([0, 2]) = [0, 2]^2 - \exp([0, 2]) = [-7.3891, 3.0000]$. Usando $x_0 = 1$ para obtener minorantes lineales de x^2 y $\exp(x)$, el rango aproximado obtenido mediante programación DC es $[-4.3891, 0]$. La sobreestimación se reduce. Por tanto, la utilización de Programación DC puede mejorar en ciertos casos los resultados obtenidos mediante aritmética intervalar (Alamo et al. 2005). Las cotas obtenidas mediante funciones DC se basan en una aproximación lineal de una función convexa, proporcionando una aproximación de segundo orden en el sentido de Taylor. Eso es, el error disminuye de forma cuadrática con la distancia al punto de linealización. Los autores piensan que esta propiedad

asegura un buen balance entre la sobreestimación y el coste computacional.

Para poder aplicar a nuestro problema de estimación de estados la Programación DC hemos de tener en cuenta las siguientes hipótesis. Se asume que $\mathbf{f}(\cdot)$ y $\mathbf{d}(\cdot)$ son funciones continuas, y que cada componente de $\mathbf{f}(\cdot)$ y $\mathbf{d}(\cdot)$ tienen representación DC, esto es,

$$\begin{aligned} f_i(x, w) &= g_i(x, w) - h_i(x, w), \quad i = 1, \dots, n \\ d_i(x, w) &= a_i(x, w) - b_i(x, w), \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

donde $f_i(\cdot, \cdot)$, $d_i(\cdot, \cdot)$ representa el i -ésimo componente de la funciones $\mathbf{f}(x, w)$ y $\mathbf{d}(x, w)$ respectivamente y donde las funciones $h_i(x, w)$, $g_i(x, w)$, $i = 1, \dots, n$ y $a_i(x, w)$, $b_i(x, w)$, $i = 1, \dots, p$ son convexas en (X, W) y (X, V) respectivamente.

3.2.2 ACOTACIÓN DE LA EVOLUCIÓN DEL SISTEMA

Esta sección presenta un método nuevo para acotar la evolución del sistema no lineal (1). Primero se utiliza una aproximación lineal $\mathbf{f}^L(x, w)$ de la función que describe la dinámica del sistema para obtener una primera aproximación de la evolución del sistema. A continuación el método propuesto aprovecha la estructura DC del sistema (1) para acotar el error que se produce por la aproximación lineal. Combinando la aproximación lineal y el error adecuadamente acotado, se obtiene una cota externa de la evolución del sistema no lineal.

La función lineal a utilizar para aproximar la función original $\mathbf{f}(x, w)$ tiene la estructura

$$\mathbf{f}^L(x, w) = \mathbf{f}(p, c_w) + G_x(x - p) + G_w(w - c_w)$$

Esta función se puede obtener de diferentes formas, por ejemplo, cuando $\mathbf{f}(x, w)$ es una función diferenciable las matrices G_x y G_w se pueden calcular mediante $G_x = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(p, c_w)$ y $G_w = \frac{\partial}{\partial w} \mathbf{f}(p, c_w)$ respectivamente.

A continuación se define el error cometido por la aproximación lineal que se va a utilizar.

Definición 7 El conjunto error \mathcal{E} se define como:

$$\mathcal{E} = \{ e \in \mathbb{R}^n : e = \mathbf{f}(x, w) - \mathbf{f}^L(x, w), x \in X, w \in W \}$$

donde

$$\mathbf{f}^L(x, w) = \mathbf{f}(p, c_w) + G_x(x - p) + G_w(w - c_w).$$

El siguiente teorema proporciona un operador para calcular el conjunto \mathcal{X}_k .

Theorem 2 (Alamo et al. En prensa) Considerar los zonotos $X = p \oplus HB^m$ y $W = c_w \oplus M_w B^{r_w}$. Suponer que el paralelotopo $\bar{\mathcal{E}} = \bar{t} \oplus \bar{Q} B^n$ satisface $\mathcal{E} \subseteq \bar{\mathcal{E}}$. Obtener el zonotopo $Z = p_z \oplus H_z B^{m+r_w+n}$ donde:

- $p_z = f(p, c_w) + \bar{t}$
- $H_z = [G_x H \quad G_w M_w \quad \bar{Q}]$

entonces, bajo estas hipótesis:

$$f(X, W) \subseteq Z$$

Por tanto el teorema 2 se puede utilizar en el paso 1 del algoritmo para calcular el conjunto $\bar{\mathcal{X}}_k$. Notar que el único escollo a la hora de aplicar el teorema anterior es la obtención del paralelotopo $\bar{\mathcal{E}}$ que acota el error cometido por la aproximación lineal. Para obtener una acotación garantista de este error se puede utilizar Programación DC.

El lema que se presenta a continuación (Alamo et al. En prensa) muestra un operador para calcular una cota garantista del error de linealización.

Lema 1 Suponer que el paralelotopo P contiene X y definir el paralelotopo $\bar{\mathcal{E}}$ como:

$$\bar{\mathcal{E}} = \{ x \in \mathbb{R}^n : \gamma_i^- \leq x_i \leq \gamma_i^+, i = 1, \dots, n \}$$

donde:

$$\gamma_i^+ = \max_{(x,w) \in \text{vert}(P,W)} (g_i(x,w) - \bar{h}_i(x,w) - f_i^L(x,w))$$

$$\gamma_i^- = \min_{(x,w) \in \text{vert}(P,W)} (\bar{g}_i(x,w) - h_i(x,w) - f_i^U(x,w))$$

entonces, el paralelotopo $\bar{\mathcal{E}}$ es una cota externa del conjunto \mathcal{E} , esto es: $\mathcal{E} \subseteq \bar{\mathcal{E}}$.

Los problemas de optimización incluidos en el lema se resuelven utilizando las técnicas de programación DC expuestas en esta sección.

4 MÉTODOS PARA ACOTAR EL CONJUNTO DE ESTADOS CONSISTENTE

El paso 2 del algoritmo de estimación de estado calcula un conjunto $\bar{\mathcal{X}}_{y_k}$ que acota al conjunto de estados que son consistentes con la medida de la salida del sistema obtenida y_k . Esta sección muestra cómo calcular ese conjunto.

La acotación del conjunto \mathcal{X}_{y_k} se obtiene mediante la intersección de p franjas en el espacio de estados. Dada una medida $y_k \in \mathbb{R}^p$, el conjunto de estados consistente se definió en la sección 2 como: $\mathcal{X}_{y_k} = \{ x \in \mathbb{R}^n : y_k \in \mathbf{d}(x, V) \}$ donde el ruido

está acotado por un zonotopo $V = c_v \oplus M_v B^{p_v}$ con $c_v \in \mathbb{R}^{p_v}$. Se definen los conjuntos $\mathcal{X}_{y_k}(i)$, $i = 1, \dots, p$, como la región del espacio de estados consistente con la i -ésima componente de la salida y_k :

$$\mathcal{X}_{y_k}(i) = \{ x \in \mathbb{R}^n : y_k(i) \in d_i(x, V) \}$$

donde $d_i(x, v)$ denota la i -ésima componente de $\mathbf{d}(x, v) \in \mathbb{R}^p$. Con esta definición está claro que:

$$\mathcal{X}_{y_k} \subseteq \bigcap_{i=1}^p \mathcal{X}_{y_k}(i).$$

A continuación se mostrarán diferentes métodos para acotar el conjunto $\mathcal{X}_{y_k}(i)$ mediante una franja en el espacio de estados. Se explotará la pertenencia de x_k al zonotopo $\bar{\mathcal{X}}_k$.

4.1 ACOTACIÓN MEDIANTE ARITMÉTICA INTERVALAR

A continuación se presenta un operador para obtener la franja garantista $\bar{\mathcal{X}}_{y_k}(i)$ mediante aritmética intervalar.

Propiedad 1 (Alamo et al. 2005) Dado el zonotopo $\bar{\mathcal{X}}_k$ y la medida de la salida y_k , obtener, mediante aritmética intervalar, el vector $c_i \in \mathbb{R}^n$ y los escalares $s_i, \sigma_i \in \mathbb{R}$ tales que:

- $c_i = \text{mid}(\square(\nabla_x d_i(\bar{\mathcal{X}}_k, V)^\top))$
- $c_i^\top \bar{\mathcal{X}}_k - d_i(\bar{\mathcal{X}}_k, V) \subseteq [s_i - \sigma_i, s_i + \sigma_i]$

Entonces, definiendo la franja $\bar{\mathcal{X}}_{y_k}(i) = \{ x : |c_i^\top x - y_k(i) - s_i| \leq \sigma_i \}$, resulta que:

$$\bar{\mathcal{X}}_k \cap \mathcal{X}_{y_k}(i) \subseteq \bar{\mathcal{X}}_k \cap \bar{\mathcal{X}}_{y_k}(i)$$

4.2 ACOTACIÓN MEDIANTE PROGRAMACIÓN DC

A continuación se presenta un operador para obtener la franja garantista $\bar{\mathcal{X}}_{y_k}(i)$ mediante Programación DC.

Propiedad 2 (Alamo et al. En prensa) Dado el zonotopo $\bar{\mathcal{X}}_k$, la medida de la salida $y_k(i)$, y el vector $c_i \in \mathbb{R}^n$, obtener un paralelotopo P tal que $\bar{\mathcal{X}}_k \subseteq P$, y los escalares $s_i, \sigma_i \in \mathbb{R}$ tales que:

$$s_i = \frac{\rho_i^+ + \rho_i^-}{2} \quad \sigma_i = \rho_i^+ - s_i$$

$$\rho_i^+ = \max_{x,v \in \text{vert}(P,V)} c_i^\top x - (\bar{a}_i(x, v) - b_i(x, v))$$

$$\rho_i^- = \min_{x,v \in \text{vert}(P,V)} c_i^\top x - (a_i(x, v) - \bar{b}_i(x, v))$$

Entonces, definiendo la franja $\bar{\mathcal{X}}_{y_k}(i) = \{ x : |c_i^\top x - y_k(i) - s_i| \leq \sigma_i \}$, resulta que:

$$\bar{\mathcal{X}}_k \cap \mathcal{X}_{y_k}(i) \subseteq \bar{\mathcal{X}}_k \cap \bar{\mathcal{X}}_{y_k}(i)$$

5 INTERSECCIÓN DE LOS CONJUNTOS EN EL ESPACIO DE ESTADOS

Esta sección explica cómo implementar la última fase (paso 3) del algoritmo de estimación de estados. En las secciones anteriores se ha abordado la realización de los pasos 1 y 2 del algoritmo de estimación de estados propuesto. El paso 1 obtiene un conjunto $\bar{\mathcal{X}}_k$ que acota la evolución del sistema. El paso 2 calcula con la i -ésima medida de la salida y_k una franja en el espacio de estados $\bar{\mathcal{X}}_{y_k}(i)$ que cumple $\bar{\mathcal{X}}_k \cap \bar{\mathcal{X}}_{y_k}(i) \supseteq \bar{\mathcal{X}}_k \cap \mathcal{X}_{y_k}(i)$. Como $\bar{\mathcal{X}}_k$ es un zonotopo y $\mathcal{X}_{y_k}(i)$ es una franja, para realizar el paso 3 del algoritmo se necesita un operador que obtenga una cota externa de la intersección entre un zonotopo y una franja.

Dados una franja y un zonotopo de orden r , es posible obtener un nuevo zonotopo de orden r que contiene la intersección de ambos. La siguiente propiedad presenta una familia de zonotopos que contiene la intersección entre un zonotopo y una franja dadas.

Propiedad 3 (Bravo, Alamo & Camacho 2006) Considerar el zonotopo $\mathcal{X} = p \oplus H\mathbf{B}^r = p \oplus \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & \dots & H_r \end{bmatrix} \mathbf{B}^r$ y la franja $\mathcal{S} = \{x : |c^\top x - d| \leq \sigma\}$. Por cada entero j , $0 \leq j \leq r$:

$$\mathcal{X} \cap \mathcal{S} \subseteq v(j) \oplus T(j)\mathbf{B}^r$$

donde

$$v(j) = \begin{cases} p + \left(\frac{d - c^\top p}{c^\top H_j} \right) H_j & \text{si } 1 \leq j \leq r \\ & \text{y } c^\top H_j \neq 0 \\ p & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$T(j) = \begin{cases} \begin{bmatrix} T_1^j & T_2^j & \dots & T_r^j \end{bmatrix} & \text{si } 1 \leq j \leq r \\ & \text{y } c^\top H_j \neq 0 \\ H & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$T_i^j = \begin{cases} H_i - \left(\frac{c^\top H_i}{c^\top H_j} \right) H_j & \text{si } i \neq j \\ \left(\frac{\sigma}{c^\top H_j} \right) H_j & \text{si } i = j \end{cases}$$

La propiedad anterior indica que hay $r + 1$ posibles elecciones de j para obtener un zonotopo $v(j) \oplus T(j)\mathbf{B}^r$ que acote la intersección. Un entero óptimo j^* , $0 \leq j^* \leq r$ se puede obtener minimizando el volumen de los diferentes resultados que se obtienen de la intersección. Por tanto

$$j^* = \arg \min_{0 \leq j \leq r} \text{Vol}(v(j) \oplus T(j)\mathbf{B}^r)$$

donde $\text{Vol}(v(j) \oplus T(j)\mathbf{B}^r)$ denota el volumen del zonotopo $v(j) \oplus T(j)\mathbf{B}^r$. Con esta elección de j^* se minimiza la sobreestimación. Ver (Shephard 1974, Montgomery 1989) para consultar la expresión correspondiente al volumen de un zonotopo.

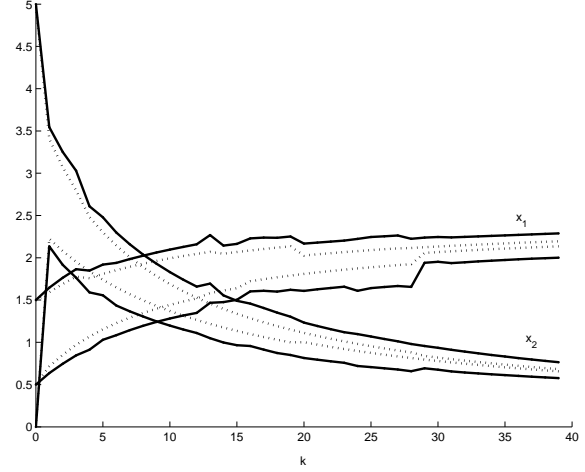


Figura 1: Las líneas solidas representan las acotaciones garantistas de los estados obtenidos mediante el algoritmo propuesto. Las líneas punteadas representan una aproximación interna de las cotas exactas.

6 EJEMPLOS

6.1 EJEMPLO 1

Se presenta un ejemplo simulado de estimación de estados no lineal resuelto utilizando únicamente aritmética intervalar. Considerar un reactor (Tenny 2002) cargado con una cantidad inicial de dos gases A y B . El objetivo es reconstruir la presión parcial de cada especie en el reactor utilizando la medida de la presión total de la mezcla. El sistema se modela mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2k_1 x_1^2 + 2k_2 x_2 \\ \dot{x}_2 &= k_1 x_1^2 - k_2 x_2 \end{aligned}$$

en la que $k_1 = 0.16 \text{ min}^{-1} \text{ atm}^{-1}$, $k_2 = 0.0064 \text{ min}^{-1}$. La salida medida es la presión total descrita mediante: $y_k = [1 \ 1]x_k + v_k$ donde $\|v_k\|_\infty \leq 0.3$. No se considera incertidumbre en los estados ($w_k = 0$). Las condiciones iniciales son:

$$x_0 \in \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1.0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{B}^2$$

El periodo de muestro es 6 segundos. El algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden ha sido utilizado para integrar y obtener el modelo discreto. Se estiman todos los estados. El orden de los zonotopos

se ha limitado a $m \leq 20$. La figura 1 compara las cotas obtenidas en los estados con una aproximación interna de las cotas exactas.

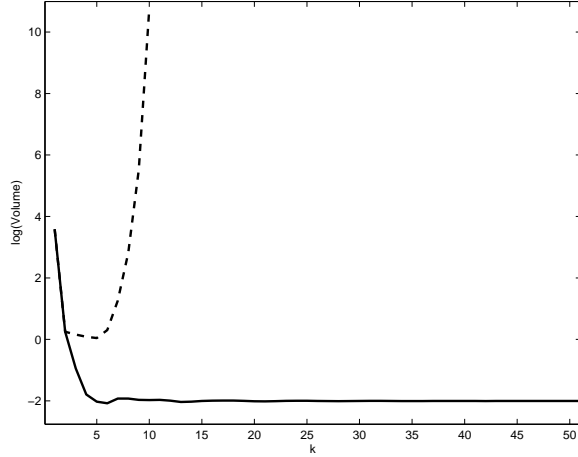


Figura 2: Evolución del volumen de la acotación del estado.

6.2 EJEMPLO 2

Se presenta un ejemplo simulado de estimación de estados no lineal resuelto utilizando las dos técnicas mostradas en este trabajo aritmética intervalar y Programación DC. Dadas las funciones:

$$f_1(x_1, x_2) = -0.7x_2 + 0.1x_2^2 + 0.1x_1x_2 + 0.1exp(x_1)$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 0.1x_1^2 + 0.2x_1x_2$$

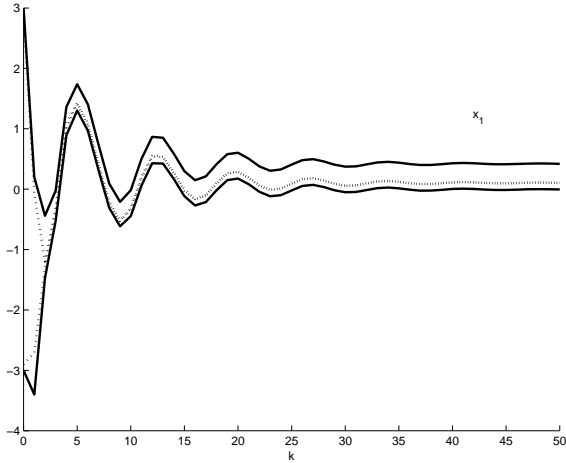


Figura 3: Las líneas sólidas representan las cotas del estado x_1 obtenidas por el algoritmo de estimación. Las líneas punteadas representan cotas internas de x_1 obtenidas de los conjunto inciertos exactos

El sistema se describe mediante la expresión:

$$x_1(k+1) = f_1(x_1(k), x_2(k)) + w_1(k)$$

$$x_2(k+1) = f_2(x_1(k), x_2(k)) + w_2(k)$$

donde $|w_1(k)| \leq 0.1$ y $|w_2(k)| \leq 0.1$. Las medidas son:

$$y_k = x_1(k) + x_2(k) + v(k)$$

El error está acotado por $|v(k)| \leq 0.2$, $k \geq 0$. El estado inicial pertenece a la caja $3\mathbf{IB}^2$ donde \mathbf{I} es la matriz identidad. La señal a estimar es $z_k = [1 \ 0]x_k$. Sabiendo que por cada matriz Q de dimensión $n \times n$, existen dos matrices semidefinidas positivas A, B de dimensión $n \times n$ tales que $x^\top Q x = x^\top A x - x^\top B x$ (Horst & Thoai 1999) y considerando que $0.1exp(x_1)$ es un término convexo, es sencillo obtener una representación DC del sistema considerado.

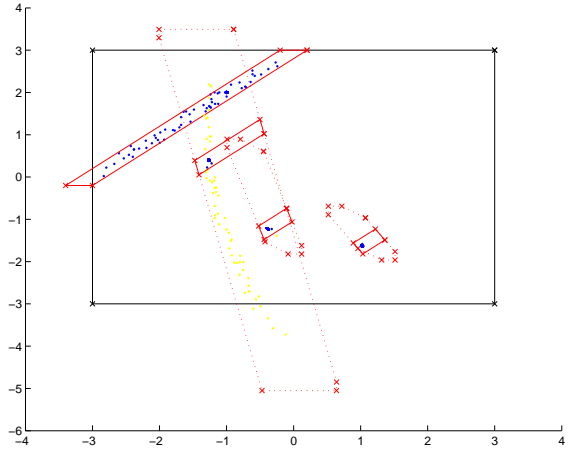


Figura 4: Las líneas punteadas muestran los conjuntos $\tilde{\mathcal{X}}_1, \tilde{\mathcal{X}}_2$ y $\tilde{\mathcal{X}}_3$. Las líneas continuas representan los conjuntos $\hat{\mathcal{X}}_0, \hat{\mathcal{X}}_1, \hat{\mathcal{X}}_2$ y $\hat{\mathcal{X}}_3$. Las nubes oscuras de puntos representan los conjuntos inciertos exactos $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ y \mathcal{X}_3 . Los conjuntos $f(\mathcal{X}_0, W)$, $f(\mathcal{X}_1, W)$ y $f(\mathcal{X}_2, W)$ se muestran como nubes de puntos gris claro.

La figura 2 presenta con línea sólida, La evolución del volumen de las acotaciones de los estados obtenidas usando Programación DC. La línea discontinua muestra el volumen obtenido utilizando aritmética intervalar. En este caso la utilización de Programación DC obtiene claramente mejores resultados.

La figura 3 compara las cotas obtenidas en x_1 con las correspondientes aproximaciones internas a los conjuntos de estados inciertos exactos. Esta acotación interna se ha obtenido de los valores máximo y mínimo de la evolución de una nube de puntos con densidad suficiente. La figura 4 muestra una sucesión de conjuntos $\tilde{\mathcal{X}}_k$ y cómo el algoritmo propuesto reduce sus volúmenes mediante intersección obteniendo los conjuntos $\hat{\mathcal{X}}_k$. La figura 5 muestra una sucesión de conjuntos $\tilde{\mathcal{X}}_k$ obtenidos por el algoritmo propuesto.

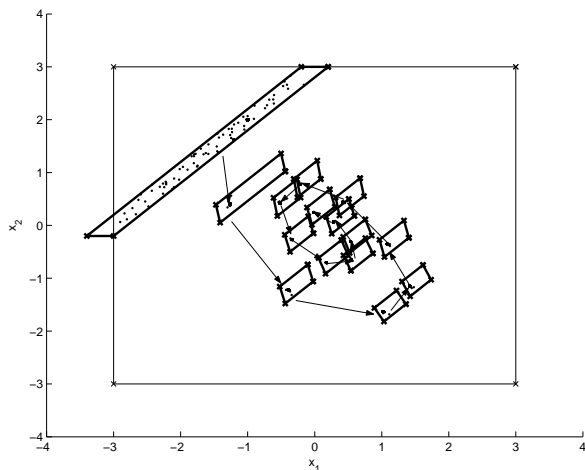


Figura 5: Las líneas sólidas representan los conjuntos $\hat{\mathcal{X}}_0, \hat{\mathcal{X}}_1, \dots, \hat{\mathcal{X}}_{15}$. Las nubes de puntos muestran los conjuntos inciertos exactos $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{15}$. Las flechas indican la evolución del sistema.

7 Conclusiones

Este artículo ha presentado un nuevo estimador de estados para sistemas no lineales considerando una descripción acotada de los parámetros del modelo y del ruido en las medidas. El objetivo del algoritmo de estimación de estados propuesto ha sido obtener el conjunto de estados que son consistentes con la evolución del sistema, las medidas de las salidas obtenidas y las cotas de ruido y parámetros consideradas. Para obtener este resultado se han utilizado zonotopos, aritmética intervalar y Programación DC.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado mediante DPI2006-15476-C02-01 y DPI2007-66718-C04-01.

Referencias

- Adjiman, C. S. & Floudas, C. A. (1996), 'Rigorous convex underestimators for general twice-differentiable problems', *J. Global Optimization* **9**, 23–40.
- Alamo, T., Bravo, J. M. & Camacho, E. F. (2005), 'Guaranteed state estimation by zonotopes', *Automatica* **41**(6), 1035–1043.
- Alamo, T., Bravo, J. M. & Camacho, E. F. (En prensa), 'A set-membership state estimation algorithm based on dc programming', *Automatica*.
- Bravo, J. M., Alamo, T. & Camacho, E. F. (2006), 'Bounded error identification of systems with time-varying parameters', *IEEE Transac-*

tions on Automatic Control **51**(7), 1144–1150.

- Chisci, L., Garulli, A. & Zappa, G. (1996), 'Recursive state bounding by parallelotopes', *Automatica* **32**, 1049–1056.
- Garulli, A., Tesi, A. & Vicino, A. (1999), *Robustness in Identification and Control*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, Germany.
- Hansen, E. (1992), *Global Optimization Using Interval Analysis*, Dekker, New York.
- Horst, R. & Thoai, N. V. (1999), 'Dc programming: Overview', *Journal of Optimization Theory and Applications* **103**(1), 1–43.
- Jaulin, L. (2002), 'Nonlinear bounded-error state estimation of continuous-time system', *Automatica* **36**(7), 1079–1082.
- Kühn, W. (1998), 'Rigorous computed orbits of dynamical systems without the wrapping effect', *Computing* **61**(1), 47–67.
- Kuntsevich, V. M. & Lychak, M. M. (1985), *Synthesis of Optimal and Adaptive Control Systems: The Game Approach [in Russian]*, Naukova Dumka, Kiev.
- Milanese, M., Norton, J., Piet-Lahanier, H. & Walter, E. (1996), *Bounding Approaches to System Identification*, Plenum Press, New York.
- Montgomery, H. L. (1989), 'Computing the volume of a zonotope', *Amer. Math. Monthly* **97**, 431.
- Moore, R. (1966), *Interval Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Schweppe, F. C. (1968), 'Recursive state estimation: Unknown but bounded errors and system inputs', *IEEE Transactions on Automatic Control* **13**, 22–28.
- Shephard, G. C. (1974), 'Combinatorial properties of associated zonotopes', *Canadian Journal of Mathematics* **26**, 302–321.
- Tenny, M. J. (2002), Computational Strategies for Nonlinear Model Predictive Control, PhD thesis, University of Wisconsin-Madison.
- Tuy, H. (1995), *Handbook of Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, chapter D.C. Optimization: Theory, Methods and Algorithms, pp. 149–216.
- Tuy, H. (1998), *Convex Analysis and Global Optimization*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.