

# MPC PARA EL SEGUIMIENTO DEL ÁNGULO DE CABECEO DE UN HELICÓPTERO

A. Ferramosca, I. Alvarado, D. Limón, E. F. Camacho  
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática,  
Universidad de Sevilla.

Avda. Camino de los Descubrimientos s/n. 41092 Sevilla, España.  
e-mail: {ferramosca,alvarado,limon,eduardo}@cartuja.us.es

## Resumen

*El control predictivo basado en modelo (en inglés Model Predictive Control, MPC) es una técnica de control que permite considerar restricciones en entradas y estados. La evolución admisible y la convergencia asintótica del sistema en bucle cerrado está garantizada por medio de una apropiada elección del coste terminal y de la restricción terminal. La mayoría de resultados sobre MPC están diseñados para problemas de regulación. En este artículo se presenta la aplicación de un controlador MPC para el seguimiento de referencias, que asegura la evolución asintótica del sistema a un punto de equilibrio admisible. Por lo tanto este controlador asegura un seguimiento sin offset de cualquier referencia constante a trozos admisible. Además este controlador necesita sólo la solución de un problema de programación cuadrática en cada periodo de muestreo.*

**Palabras clave:** Control predictivo, seguimiento de referencias, conjuntos invariantes, sistemas lineales sujetos a restricciones.

## 1. INTRODUCCIÓN

El control predictivo basado en modelo (en inglés Model Predictive Control, MPC) es una técnica de control que permite considerar restricciones, en estados y entradas del sistema, en el diseño del controlador. Eso se consigue prediciendo la evolución del sistema y calculando la secuencia admisible de señales de control que minimice un funcional de coste, tal que la evolución del sistema satisfaga las restricciones. El problema se puede plantear como un problema de optimización; la secuencia de control obtenida se aplica con una técnica de horizonte deslizante, resolviendo el problema de optimización en cada periodo de muestreo.

La base teórica del MPC hoy en día es bien conocida y la estabilidad asintótica está garantizada por medio de una apropiada penalización del estado final y añadiendo una restricción final [10].

La mayoría de los resultados sobre MPC, consideran el problema de regulación, es decir el problema

de llevar el sistema al punto de equilibrio deseado, en general el origen. En [9] se propone un diseño de MPC para el seguimiento sin offset de una secuencia admisible de referencias. Está claro que para una referencia distinta de cero, se puede hacer un cambio de coordenadas de forma que el único punto de equilibrio sea el origen [11]. Sin embargo, la elección de un coste terminal y de restricciones depende del estado de equilibrio deseado; así un cambio de referencia necesita un nuevo diseño del controlador. Este enfoque no es factible por la elevada cantidad de cálculo que se necesita.

Existen algunos resultados para resolver el problema de tracking de sistemas lineales. Un primer enfoque notable es el control de referencia [8], donde se añade un filtro no lineal de la referencia para garantizar la evolución admisible del sistema. Esto es como añadir una referencia artificial (la salida del filtro). En [1] se diseña un control de referencia para minimizar un índice de prestaciones de la evolución predicha del sistema. En [3] se prueba que cualquier conjunto invariante para el sistema sujeto a restricciones es un dominio de atracción para el seguimiento y se propone una ley de control basada en interpolaciones.

En [12] y [1] se muestra como existen semejanzas entre controladores predictivos y gobernadores de mando: los dos calculan una acción de control para que las restricciones sean satisfechas y se garantice convergencia a la referencia. La principal diferencia es la manera de considerar esta acción de control. En [4] se presenta una estrategia de controlador dual basada en MPC: si el MPC no es factible, el controlador cambia a un modo de recuperación de factibilidad, que conduce el sistema a la región de factibilidad del MPC.

En este artículo se presenta la aplicación de una nueva estrategia presentada en [9], al seguimiento del ángulo de cabeceo de un helicóptero. Como en el caso del control de referencia, se utiliza una referencia artificial como variable de decisión del controlador. La factibilidad se garantiza considerando un conjunto invariante para seguimiento como restricción terminal y el seguimiento sin offset se garantiza penalizando el error entre la referencia artificial y la referencia deseada. El problema de

optimización es un problema QP y la ley de control permite el seguimiento de cualquier referencia admisible y, por lo tanto, de cualquier secuencia de referencias constantes a trozos. Además, el controlador propuesto es interesante también en caso de problemas de regulación porque permite obtener un mayor dominio de atracción con un funcionamiento local casi óptimo.

**Notación:** el vector  $(x, t, r)$  indica el vector  $[x^T, t^T, r^T]^T$ ; dado  $\lambda$ ,  $\lambda X = \{\lambda x : x \in X\}$ ;  $\text{int}(X)$  indica el interior del conjunto  $X$ ; una matriz  $T$  definida positiva se indica con  $T > 0$  y  $T > P$  equivale a  $T - P > 0$ ;  $\|x\|_P$  indica la norma euclídea pesada de  $x$ , es decir, dada  $P > 0$ ,  $\|x\|_P = \sqrt{x^T P x}$ ; dados,  $a \in \mathbb{R}^{n_a}$ ,  $b \in \mathbb{R}^{n_b}$  y el conjunto  $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n_a + n_b}$ ,  $\text{Proj}_a(\Gamma)$  define la operación de proyección, es decir  $\text{Proj}_a(\Gamma) = \{a \in \mathbb{R}^{n_a} : \exists b \in \mathbb{R}^{n_b}, (a, b) \in \Gamma\}$ ; el superíndice  $w$  indica que el conjunto  $\Omega^w$  está definido en el estado extendido  $w = [x^T, t^T, r^T]^T$ , mientras  $\Omega = \text{Proj}_x(\Omega^w)$  está definido en el vector de estados  $x$ .

## 2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Sea el sistema lineal discreto descrito por:

$$\begin{aligned} x^+ &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el estado actual del sistema,  $u \in \mathbb{R}^m$  es la entrada actual,  $y \in \mathbb{R}^p$  es la salida actual y  $x^+$  es el estado siguiente. El estado del sistema y la señal de control aplicada en el instante  $k$  se denotan como  $x(k)$  y  $u(k)$ . El sistema está sujeto a restricciones en el estado y en la entrada:

$$\begin{aligned} x(k) &\in \mathcal{X} \\ u(k) &\in \mathcal{U} \end{aligned}$$

para  $k \geq 0$ .  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{U}$  son poliedros compactos y convexos que contienen el origen:

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : A_x \cdot x \leq b_x\} \quad (2)$$

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^m : A_u \cdot u \leq b_u\} \quad (3)$$

El problema que se considera es el diseño de un controlador MPC para el seguimiento de una referencia constante a trozos  $s(k)$  de manera que las restricciones sean siempre respetadas.

## 3. CÁLCULO DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO ADMISIBLES

Sea  $t$  un set-point para el sistema y  $(x_s, u_s)$  el punto de equilibrio asociado a este set-point, tal que:

$$\begin{bmatrix} A - I & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_s \\ u_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} \quad (4)$$

Sea

$$E = \begin{bmatrix} A - I & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} A - I & B & 0 \\ C & D & I_p \end{bmatrix}$$

con  $I_p$  matriz identidad de orden  $p$ . Suponiendo que el rango de  $E$  sea igual al rango de  $F$ , la ecuación 4 tiene una solución para cada set-point  $t$ . La solución se puede escribir como:

$$z_s = \begin{bmatrix} x_s \\ u_s \end{bmatrix} = M \cdot t + N \cdot r = \begin{bmatrix} M_x \\ M_u \end{bmatrix} \cdot t + \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} \cdot r \quad (5)$$

donde  $r$  es una variable auxiliar que depende del rango de  $E$ . Si el rango de  $E$  es máximo, la solución es dada por  $z_s = M \cdot t$ . Si el rango de  $E$  es menor que  $n + m$ , la ecuación tiene infinitas soluciones. Entonces el vector  $r$  puede ser considerado como una variable libre en la selección del punto de equilibrio y de la entrada para un set-point deseado  $t$ .

Estando el sistema sujeto a restricciones, las referencias posibles serían aquellos estados de equilibrio que satisfagan las restricciones. El conjunto de estos estados se define como  $X_s = \{x_s \in \mathcal{X} : \exists u_s \in \mathcal{U} \text{ t.q. } (A - I_n)x_s + Bu_s = 0\}$ . El conjunto de las entradas de equilibrio admisibles se define como  $U_s = \{u_s \in \mathcal{U} : \exists x_s \in \mathcal{X} \text{ t.q. } (A - I_n)x_s + Bu_s = 0\}$ . El conjunto de todos los set-point admisibles se define como  $S = \{s \in \mathbb{R}^p : x_s \in X_s, u_s \in U_s, (A - I_n)x_s + Bu_s = 0 \text{ y } s = Cx_s + Du_s\}$ .

Entonces, dado un set-point  $s$ , el estado y la entrada de equilibrio  $z_s = (x_s, u_s)$ , se puede calcular resolviendo el siguiente problema QP:

$$\begin{aligned} \min_{z_s} & \|z_s\|_W^2 \\ \text{s.t.} & \quad Ez_s = Fs \\ & \quad A_x x_s \leq b_x \\ & \quad A_u u_s \leq b_u \end{aligned}$$

Si el rango de  $E$  es menos que  $n + m$ , la ecuación 4 admite soluciones solo para un subconjunto

de set point. Sin embargo en la práctica se quiere seguir cualquier set-point, de forma que si el set-point pertenece al subconjunto, pues se selecciona la solución óptima; si el set-point deseado no pertenece al subconjunto, pues se calcula un estado de equilibrio de manera que sea mínima la desviación entre la salida relativa a este estado y el set point deseado. Entonces, el problema QP se puede escribir de la forma:

$$\begin{aligned} \min_{z_s} \quad & \|z_s\|_W^2 + \|s - [C \ D]z_s\|_\Theta^2 \\ \text{s.t.} \quad & [A - I_n \ B]z_s = 0 \\ & A_x x_s \leq b_x \\ & A_u u_s \leq b_u \end{aligned}$$

#### 4. CÁLCULO DEL CONJUNTO INVARIANTE PARA SEGUIMIENTO DE REFERENCIA

Sea el controlador:

$$u = K \cdot (x - x_s) + u_s \quad (6)$$

tal que estabiliza asintóticamente el sistema en bucle cerrado, donde  $x_s$  y  $u_s$  son el estado y la entrada de equilibrio que queremos alcanzar. Si la ganancia del controlador  $K$  es tal que todos los autovalores del sistema  $A + BK$  estén en el círculo unitario, entonces el sistema alcanza el punto de equilibrio. Estando el sistema sujeto a restricciones, el controlador es factible sólo en un entorno del origen.

Substituyendo (5) in (6), se encuentran las matrices  $L_t$  y  $L_r$  tal que:

$$u = K \cdot x + L_t \cdot t + L_r \cdot r \quad (7)$$

Sea  $w = (x, t, r)$  un estado extendido. Entonces, el sistema en bucle cerrado se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} x \\ t \\ r \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} A + BK & BL_t & BL_r \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ t \\ r \end{bmatrix} \quad (8)$$

es decir,  $w^+ = A_w \cdot w$ . Este sistema está sujeto a las restricciones  $W$ , donde  $W$  es un poliedro dado por:

$$\begin{bmatrix} A_x & 0 & 0 \\ A_u K & A_u L_t & A_u L_r \\ 0 & A_x M_x & A_x N_x \\ 0 & A_u M_u & A_u N_u \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ t \\ r \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_x \\ b_u \\ b_x \\ b_u \end{bmatrix} \quad (9)$$

Un conjunto  $\Omega^w$  es un conjunto invariante para tracking admisible para el sistema (8) sujeto a restricciones  $W$ , si para cada  $w \in \Omega^w$ ,  $A_w \cdot w \in \Omega^w$  y  $\Omega^w \subseteq W$ . El máximo conjunto invariante para tracking admisible viene dado por [7]:

$$O_\infty^w = \{w : A_w^i w \in W, \forall i \geq 0\}$$

Este conjunto puede no estar finitamente determinable, debido a que  $A_w$  tiene autovalores iguales a 1. Por ello, según [8] se escoge la siguiente variación que sí es determinada en un número finito de pasos.

Sea el conjunto  $W_\lambda = \{w = (x, t, r) : u = K \cdot x + L_t \cdot t + L_r \cdot r \in \mathbb{U}, x \in \mathbb{X}, x_s = M_x \cdot t + N_x \cdot r \in \lambda \mathbb{X} \text{ y } u_s = M_u \cdot t + N_u \cdot r \in \lambda \mathbb{U}\}$ ; este conjunto es un poliedro dado por:

$$\begin{bmatrix} A_x & 0 & 0 \\ A_u K & A_u L_t & A_u L_r \\ 0 & A_x M_x & A_x N_x \\ 0 & A_u M_u & A_u N_u \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ t \\ r \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_x \\ b_u \\ \lambda b_x \\ \lambda b_u \end{bmatrix} \quad (10)$$

Está claro que  $W_1 = W$ .

El máximo conjunto invariante para tracking admisible, para el conjunto de restricciones  $W_\lambda$  es:

$$O_{\infty, \lambda}^w = \{w : A_w^i w \in W_\lambda, \forall i \geq 0\}$$

Para cualquier  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $O_{\infty, \lambda}^w$  está finitamente determinado y  $\lambda O_\infty^w \subset O_{\infty, \lambda}^w \subset O_\infty^w$ . Dado que  $\lambda$  se puede escoger arbitrariamente cerca de 1, el conjunto invariante que se obtiene es arbitrariamente cerca del máximo conjunto invariante  $O_\infty^w$ .

#### 5. MPC PARA SEGUIMIENTO DE REFERENCIA

Supóngase calculado un controlador estabilizante  $K$  para el sistema (1) y supóngase obtenido un conjunto invariante admisible para tracking  $X_f^w$ . Basándose en eso, en [9] se propone un controlador MPC que garantiza seguimiento de referencias sin offset para cualquier estado de equilibrio admisible  $\hat{x}_s$  contenido en  $X_f = Proj_x(X_f^w)$ .

El MPC propuesto considera una referencia artificial  $(x_s, u_s)$  como variable de decisión del funcional de coste. Además se penaliza la diferencia entre el estado de equilibrio artificial  $x_s$  y el estado de equilibrio deseado  $\hat{x}_s$ . Si  $\hat{x}_s$  es un punto de equilibrio admisible, esa penalización garantiza tracking sin offset; sin embargo, si  $\hat{x}_s$  no es admisible, esa penalización permite que el sistema evolucione a un punto de equilibrio admisible, tal

que la diferencia con el estado deseado sea mínima.

El funcional de coste utilizado es:

$$V_N(x, s, \mathbf{u}, t, r) = \sum_{i=0}^{N-1} \|x(i) - x_s\|_Q^2 + \|u(i) - u_s\|_R^2 + \|x(N) - x_s\|_P^2 + \|x_s - \hat{x}_s\|_T^2$$

donde  $x$  es el estado actual,  $s$  es el set-point deseado en la salida,  $\mathbf{u}$  es una secuencia de  $N$  señales de control futuros,  $x(i)$  es la predicción del estado en el instante  $i$  dada por  $x(i+1) = A \cdot x(i) + B \cdot u(i)$ , con  $x(0) = x$ ,  $x_s = M_x \cdot t + N_x \cdot r$  y  $u_s = M_u \cdot t + N_u \cdot r$ .  $\hat{x}_s$  es el punto de equilibrio asociado al set-point  $s$ . Las matrices  $Q, R, P$  y  $T$  son matrices definidas positivas. Por tanto,  $\mathbf{u}, t$  y  $r$  son las variables de decisión y  $x$  y  $s$  son parámetros del funcional de coste propuesto.

El problema  $P_N(x, s)$  de optimización MPC está dado por:

$$V_N^*(x, s) = \min_{\mathbf{u}, t, r} V_N(x, s, \mathbf{u}, t, r)$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & x(0) = x \\ & x(j+1) = A \cdot x(j) + B \cdot u(j), \\ & u(j) \in \mathbb{U}, \\ & x(j) \in \mathbb{X}, \quad j = 0, \dots, N-1 \\ & (x(N), t, r) \in X_f^w \end{aligned}$$

con  $X_f^w$  conjunto invariante para tracking en el estado extendido  $(x, t, r)$ . Dado que esta región es un poliedro, el problema de optimización es un problema cuadrático estándar, que puede ser resuelto de forma eficiente.

## 6. PROPIEDADES DEL CONTROLADOR

Este controlador resulta interesante por las siguientes propiedades:

1. El controlador garantiza la factibilidad considerando un conjunto invariante para seguimiento como restricción terminal.
2. El controlador garantiza también el seguimiento sin offset penalizando el error entre la referencia artificial y la referencia deseada. La ley de control permite el seguimiento de cualquier referencia admisible y, por lo tanto, de cualquier secuencia de referencias constantes a trozos.
3. El problema de optimización es un único problema QP multiparamétrico.
4. La ley de control explícita se puede calcular utilizando técnicas bien conocidas ([2]).

5. El controlador propuesto es interesante también en caso de problemas de regulación porque permite obtener un mayor dominio de atracción con un funcionamiento local casi óptimo.

## 7. APLICACIÓN DEL CONTROLADOR

El sistema a controlar es un helicóptero de dos rotores paralelos a escala de laboratorio diseñado por *Quanser* (figura 1), descrito en [5] y [6].

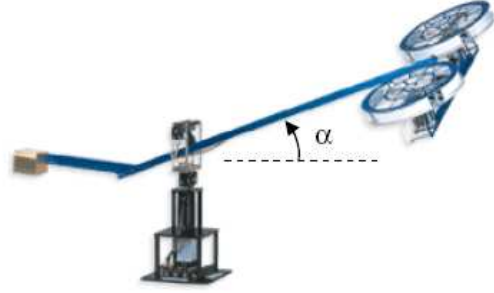


Figura 1: Helicóptero de laboratorio *Quanser Consulting*

La maqueta tiene tres grados de libertad medidos mediante tres encoders: el ángulo de alabeo o *roll* (giro en torno a un eje paralelo a la dirección de avance), el ángulo de cabeceo o *pitch* (giro en torno a un eje perpendicular a la dirección de avance, ángulo  $\alpha$  en la figura 1), y el ángulo de guiñada o *yaw* (giro en torno a un eje perpendicular al suelo). Los actuadores son dos rotores eléctricos de tensión continua, acoplados a cada lado del eje longitudinal, y que accionan las dos hélices del helicóptero, produciendo una fuerza proporcional a la tensión de entrada. El cuerpo del sistema está unido por medio de una barra a un punto fijo alrededor del cual está permitido su giro. Además dispone de un contrapeso para aliviar el esfuerzo de los motores.

### 7.1. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

El modelo del helicóptero está descrito en [5] y [6]. La variable a controlar es el ángulo de cabeceo  $\alpha$ . La función de transferencia del sistema es la función entre el ángulo  $\alpha$  y la suma de las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  proporcionadas por los dos rotores, es decir:

$$\frac{\alpha(s)}{F_{suma}(s)} = \frac{\frac{l_1}{J_e}}{s^2 + \frac{b_e}{J_e} s + \frac{[mg(h+d) + Mg(h-l_3 \sin \theta)]}{J_e}} \quad (11)$$

Siendo la suma de las fuerzas ejercidas por las hélices proporcional a la tensión eléctrica aplicada a

los motores a través de la constante  $k_m$ , se deduce la siguiente ecuación:

$$\frac{\alpha(s)}{v(s)} = \frac{k_m l_1}{J_e s^2 + b_e s + \begin{bmatrix} mg(h+d) + \\ Mg(h - l_3 \sin \theta) \end{bmatrix}} \quad (12)$$

que es la función de transferencia que relaciona el ángulo de cabeceo  $\alpha$  con la tensión eléctrica  $v$ . Esta ecuación se puede escribir de la forma:

$$\frac{\alpha(s)}{v(s)} = \frac{k \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \quad (13)$$

donde  $\alpha(s)$  se expresa en radianes y  $v(s)$  en voltios.

Como se explica en [6], la planta introduce un retraso, así que la función de transferencia, que sustituye a 13, es:

$$\frac{\alpha(s)}{v(s)} = \frac{k \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \cdot e^{-sT} \quad (14)$$

Los valores de los parámetros son  $k = 0,113$ ,  $\xi = 0,11$ ,  $\omega_n = 0,58$  y  $T = 0,1$ .

## 7.2. SEGUIMIENTO DEL ÁNGULO DE CABECEO

El sistema se ha considerado en espacio de estados. Las matrices del sistema LTI en tiempo continuo son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,3364 & -0,1276 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,0380 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \quad 0], \quad D = 0$$

Se ha discretizado el sistema con un tiempo de muestreo  $T_s = 0,01s$ , como se sugiere en [6]. Las matrices del sistema LTI discretizado son:

$$A = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0100 \\ -0,0034 & 0,9987 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0,0019 \\ 0,3799 \end{bmatrix} \times 10^{-3},$$

$$C = [1 \quad 0], \quad D = 0.$$

Las restricciones en la entrada son:  $u_{min} = -17,4$  y  $u_{max} = 2,6$ . Se supone que el helicóptero pueda

bascular respecto al eje perpendicular a la dirección, de un ángulo máximo de  $\pm 90$  grados. Así que se considera  $\|x\|_\infty \leq \pi/2$  [rad] como restricción en el estado.

El controlador local y la matriz de Lyapunov  $P$  se han calculados utilizando un LQR. Las matrices utilizadas han sido  $Q = 100 \cdot I_2$  y  $R = 1$  o  $R = 0,1$ . El sistema se ha controlado con el MPC propuesto, considerando un horizonte de control  $N_c = 3$ , un horizonte de predicción  $N_p = 3$  y una matriz  $T = 10 \cdot P$ . La referencia a seguir ha sido una secuencia de referencias constantes a trozos con valores de set-point  $s_1 = -0,3491$ ,  $s_2 = -1,2$ ,  $s_3 = 0,25$  y  $s_4 = -0,3491$ .

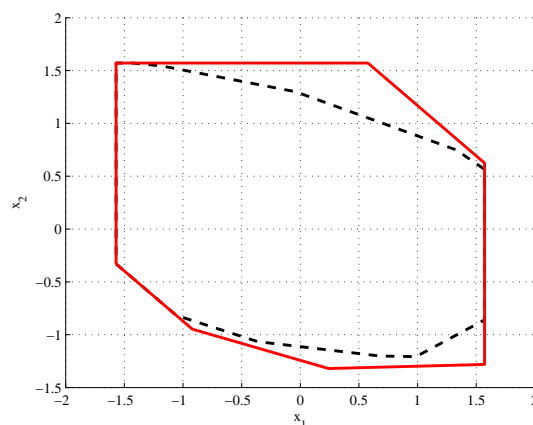


Figura 2: Invariante para tracking y región de atracción

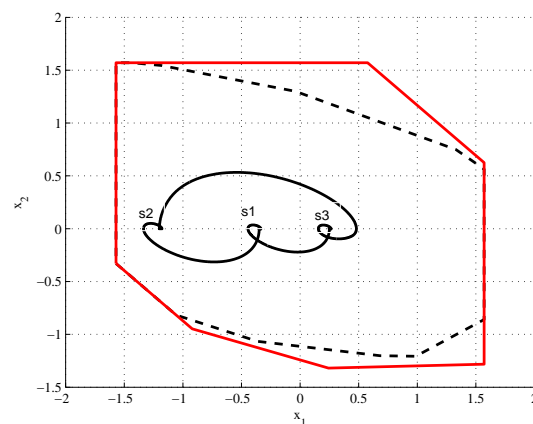
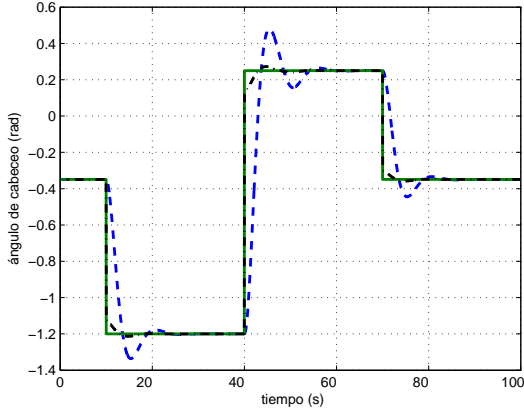
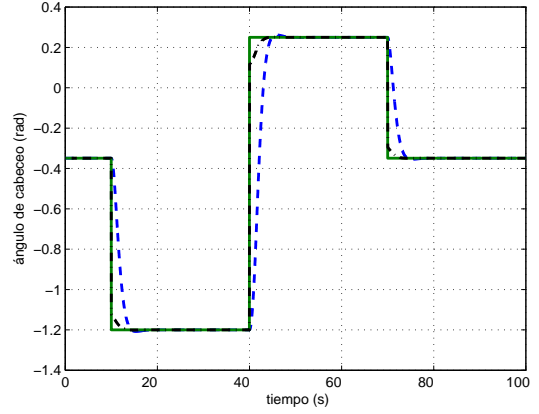


Figura 3: Evolución de los estados

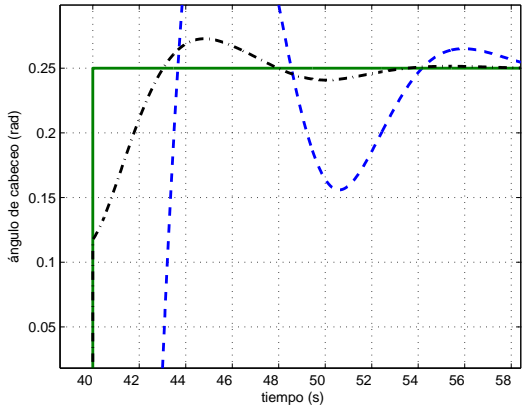
En la figura 2 se muestran el invariante para seguimiento de referencia (en línea de trazos) y la región de atracción (en línea continua). En la figura 3 se muestra la evolución de los estados del sistema (en línea de trazos). En las figuras 4(a) y 5(a) se muestran las evoluciones del sistema en los dos casos de  $R = 1$  y  $R = 0,1$ . En las



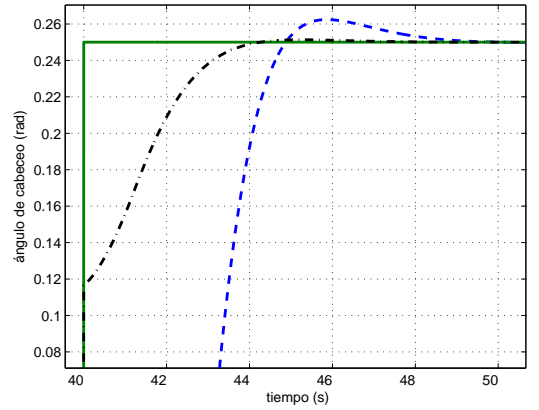
(a) Tracking de la referencia.



(a) Tracking de la referencia.



(b) Evolución de la referencia artificial



(b) Evolución de la referencia artificial

Figura 4: Seguimiento de una referencia constante a trozos con  $Q = 100 \cdot I_2$  y  $R = 1$ .

Figura 5: Seguimiento de una referencia constante a trozos con  $Q = 100 \cdot I_2$  y  $R = 0,1$ .

figuras 4(b) y 5(b) se muestran las evoluciones de las referencias artificiales en los dos casos de  $R = 1$  y  $R = 0,1$ . En las figuras se dibujan en línea continua las referencias, en línea de trazos las evoluciones del sistema y en línea de trazos y puntos las referencias artificiales  $x_s^*(k)$ . Como se puede ver, las evoluciones del sistema son admisibles en cada instante y por cada variación de la referencia. Además se puede ver como, cuando hay un cambio de referencia no factible, el controlador encuentra una referencia artificial factible y la sigue. En la figura 5 se ve como escogiendo  $R = 0,1$  se han eliminado las oscilaciones debidas a los autovalores complejos conjugados del sistema. Aunque, las oscilaciones que ocurren en caso de  $R = 1$  (fig. 4) no son grandes y se rechazan rápidamente.

## Referencias

- [1] Bemporad, A., Casavola, A., Mosca, E., (1997) "Nonlinear control of constrained linear systems via predictive reference management", *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol: 42, 340-349.
- [2] Bemporad, A., Morari, M., Dua, V., Pistikopoulos, E., (2002) "The explicit linear quadratic regulator for constrained systems", *Automatica*, Vol: 38, 3-20.
- [3] Blanchini, F., Miani, S., (2000) "Any domain of attraction for a linear constrained system is a tracking domain of attraction", *SIAM J. Control Optim.*, Vol: 38, 971-994.
- [4] Chisci, L., Zappa, G., (2003) "Dual mode predictive tracking of piecewise constant references for constrained linear systems", *Int. J. Control*, Vol: 76, 61-72.

- [5] García-Sanz, M., Elso, J., Egaña, I., (2006) “Control del ángulo de cabeceo de un helicóptero como benchmark de diseño de controladores”, *RIAI*, Vol: 3, Num: 2, 111-116.
- [6] García-Sanz, M., Elso, J., (2007) “Ampliación del benchmark de diseño de controladores para el cabeceo de un helicóptero”, *RIAI*, Vol: 4, Num: 1, 107-110.
- [7] Gilbert, E., Tan, K., (1991) “Linear systems with state and control constraints: the theory and application of maximal output admissible set”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol: 36, 1008-1020.
- [8] Gilbert, E., Kolmanovsky, I., Tan, K., (1994) “Nonlinear control of discret time linear systems with state and control constraints: a reference governor with global convergence properties”, En: *Proceedings of 33th IEEE Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista, FL, USA, December 14-16.
- [9] Limon, D., Alvarado, I., Alamo, T., Camacho, E.F. (2005) “MPC for Tracking of Piece-Wise Constant References for Constrained Linear Systems”, En: *Proceedings of 16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, July 4-8.
- [10] Mayne, D.Q., Rawlings, J.B., Rao, C.V., Scaekaert, P.O.M., (2000) “Constrained model predictive control: Stability and Optimality”, *Automatica*, Vol: 36, 789-814.
- [11] Muske, K., Rawlings, J.B., (1993) “Model predictive control with linear model”, *AICHE Journal*, Vol: 39, 262-287.
- [12] Rossiter, J., Kouvaritakis, B., (1998) “Reference governors and predictive control”, En: *Proceedings of the American Control Conference*, Philadelphia, PA, USA, June 24-26.

## A. APÉNDICE

### A.1 Análisis de estabilidad

En este apartado se dan las condiciones suficientes para garantizar la estabilidad asintótica del controlador, de manera que el sistema en bucle cerrado alcance asintóticamente cualquier punto de equilibrio  $s \in S$ .

Las demostraciones de los lemas y del teorema que aquí se presentan, se pueden encontrar en [9].

Sea  $O_\infty(x_s)$  el máximo conjunto invariante de estados que pueden llevarse a  $x_s$  de manera admisible por medio de la ley de control 6.

*Lema 1.* Sea  $\hat{x}_s$  un estado de equilibrio admisible y sean  $x_s$  y  $u_s$  estado y entrada de equilibrio para el sistema 1 tal que  $x_s \in \text{int}(X)$  y  $u_s \in \text{int}(U)$ . Sea  $K$  un controlador lineal estabilizante con matriz de Lyapunov  $P$ . Entonces, existe  $\lambda \in [0, 1]$  y  $\bar{x}_s = \lambda x_s + (1 - \lambda)\hat{x}_s$  tal que:

$$(1) \quad x_s \in O_\infty(\bar{x}_s)$$

(2) Para todos  $T > P$  y  $x_s \neq \hat{x}_s$ , pues:

$$\|x_s - \bar{x}_s\|_P^2 + \|\bar{x}_s - \hat{x}_s\|_T^2 < \|x_s - \hat{x}_s\|_T^2$$

*Lema 2.* Sea el sistema (1) sujeto a las restricciones (2). Sea  $u = Kx$  un controlador estabilizante con matriz de Lyapunov  $P$  tal que:

$$(A + BK)^T P(A + BK) - P = -(Q + K^T R K)$$

con  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  matrices definidas positivas. Considérese cualquier  $x \in X_f = \text{Proj}_x(X_f^w)$ . Sea  $x_s$  un estado de equilibrio admisible tal que  $x \in O_\infty(x_s)$ . Entonces:

$$V_N^*(x, s) \leq \|x - x_s\|_P^2 + \|x_s - \hat{x}_s\|_T^2$$

donde  $\hat{x}_s$  es un estado de equilibrio asociado a  $s$ .

*Lema 3.* Sea dada una referencia  $s$  y el estado de equilibrio asociado  $\hat{x}_s$ ; se asume que para un estado  $x$  dado, la solución óptima del problema  $P_N(x, s)$  es tal que  $\|x - x_s^*\|_Q = 0$ ; entonces  $\|x - \hat{x}_s\|_Q = 0$ .

*Teorema 1.* Sea el sistema 1 sujeto a las restricciones 2. Sean  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  matrices definidas positivas. Sea  $u = Kx$  un controlador estabilizante con matriz de Lyapunov  $P$  tal que:

$$(A + BK)^T P(A + BK) - P = -(Q + K^T R K)$$

Sea dada una matriz  $T > P$ . Se asume que  $X_f^w = O_{\infty, \lambda}^w$ , calculado para un dado  $\lambda \in (0, 1)$  y por el controlador  $K$ . Entonces, para cualquier estado inicial factible  $x_0 \in X_n$  y para cualquier set-point admisible  $s \in \lambda S$ , el controlador MPC propuesto ([9]) lleva asintóticamente al sistema a  $s$  de una manera admisible.

*Factibilidad.* Sea  $x_k$  el estado en el instante actual  $k$ , tal que  $x_k \in X_N$ . Sea  $(\mathbf{u}^*(k), t^*(k), r^*(k))$  la solución óptima del problema  $P_N(x, s)$  en el instante  $k$ , con un coste óptimo  $V_N^*(x_k, \hat{x}_s)$ . Sea  $x_{k+1}$  el estado siguiente. Sea  $t(k+1) = t^*(k)$ ,  $r(k+1) = r^*(k)$  y

$$\mathbf{u}(k+1) = \{u^*(1; k), \dots, u^*(N-1; k), \\ K(x^*(N; k) - x_s^*(k)) + u_s^*(k)\}$$

Entonces,  $(\mathbf{u}(k+1), t(k+1), r(k+1))$  es una solución factible, debido a que la solución óptima en

el instante  $k$  y a la invariancia de  $X_f^w$ . Entonces,  $x_{k+1} \in X_N$ .

*Convergencia.* Considérese la solución factible en el instante  $k+1$  presentada anteriormente. Entonces ([10]):

$$\begin{aligned} V_N^*(x_{k+1}, \hat{x}_s) &\leq V_N(x_{k+1}, \hat{x}_s, \mathbf{u}_{k+1}, t_{k+1}, r_{k+1}) \\ &\leq V_N^*(x_k, \hat{x}_s) - \|x_k - x_s^*(k)\|_Q^2 \end{aligned}$$

Siendo el coste óptimo definido positivo y no creciente, entonces:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x_s^*(k)\|_Q = 0$$

y en virtud del *Lema 3*:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - \hat{x}_s(k)\|_Q = 0$$

Por lo tanto, el sistema alcanza  $\hat{x}_s$ .

*Corolario 1.* El conjunto de estados de equilibrio admisibles que pueden ser seguidos sin offset es  $\lambda X_s$ . Dado que  $\lambda X_s \subset O_\infty$  y dado que la evolución del sistema se queda en  $X_N$ , el sistema puede seguir cualquier referencia admisible. Una secuencia de referencias constantes a trozos puede ser seguida sin offset.

Si la referencia deseada  $s$  no es admisible, el controlador lleva al sistema a un estado de equilibrio admisible  $x_s$  de manera que la distancia  $\|x_s - \hat{x}_s\|_T$  sea mínima.

*Corolario 2.* El teorema de estabilidad puede extenderse considerando  $X_f^w$  como cualquier conjunto invariante admisible para seguimiento de referencias. En este caso, el conjunto de referencias que pueden seguirse sin offset es  $\hat{S} = \{s \in \mathbb{R}^p : \exists(x, s, r) \in X_f^w, x = M_x \cdot s + N_x \cdot r\}$ .

*Corolario 3.* Este controlador usado para regulación, tiene una región de atracción potencialmente mayor que un MPC convencional para regulación, debido a que la restricción terminal es mayor.