

Control Predictivo para el seguimiento de referencias constantes aplicado a un motor lineal

I.Alvarado, M.Fiacchini, D.Limon, T.Alamo y E.F.Camacho
(alvarado, mirko, limon, alamo, eduardo)@cartuja.us.es

Resumen

Este artículo trata de la aplicación de una estrategia de control predictivo (MPC) para seguimiento de referencias a un sistema real: un motor lineal. La formulación del MPC para seguimiento de referencias usada en este artículo fue presentada recientemente por los autores en [6]. Las principales novedades de este controlador son que: (1) utiliza un estado de referencia artificial como variable de decisión, (2) penaliza la desviación entre este estado artificial y el real en el coste y (3) como restricción terminal usa un conjunto invariante para tracking calculado con una ley local como se verá en la sección 3. Esta ley de control asegura la convergencia asintótica verificando las restricciones a cualquier referencia definida dentro de un conjunto de referencias admisibles, partiendo de cualquier punto inicial definido dentro de la región de atracción.

El problema de optimización a resolver en cada periodo de muestreo resulta ser un QP (Quadratic Programming) parametrizado en el estado actual y el estado asociado a la referencia (estado objetivo), lo que nos permite obtener la ley de control de forma explícita y por lo tanto ser capaces de aplicar este controlador a sistemas rápidos como el motor lineal, con un tiempo de muestreo de 10ms.

Palabras clave: MPC, tracking, motor lineal, solución explícita .

1. INTRODUCCIÓN

MPC ha probado ser una técnica de control apropiada para tratar el problema de regulación para sistemas con restricciones (lineales y no lineales), con una base teórica madura [3].

Esta técnica, de acuerdo con un índice que evalúa el desempeño, minimiza el coste de una secuencia finita de acciones de control a lo largo del horizonte de predicción en base a un modelo, obteniendo la secuencia óptima de acciones de control que verifican todas las restricciones. Una vez calculada la secuencia óptima de control se aplicará la primera acción y en el siguiente

periodo de muestreo se volverá a resolver el mismo problema (estrategia de horizonte deslizante). Bajo ciertas condiciones [7] la ley de control resultante hace converger al sistema asintóticamente al punto deseado de una forma admisible.

Normalmente estos controladores se usan para resolver el problema de regulación. Si el setpoint se cambia, las condiciones de estabilidad deben ser recalculadas para poder asegurar convergencia, factibilidad y estabilidad. Para resolver este problema una nueva formulación se presentó por los autores en [6]. Este controlador converge de forma asintótica a cualquier setpoint admisible de una forma factible y sin offset, garantiza la factibilidad considerando una referencia artificial como variable de control y como restricción terminal un conjunto invariante para tracking. La referencia es alcanzada sin offset gracias a una penalización de la desviación entre la referencia artificial y la deseada en la función de coste.

En este artículo se mostrará cómo este controlador ha sido aplicado con éxito a un sistema real: un motor lineal síncrono con imanes permanentes. Debido a que el MPC requiere resolver un problema de optimización en cada periodo de muestreo hace difícil la aplicación de este a sistemas rápidos como el motor lineal.

Para superar este problema se ha recurrido a precalcular la acción de control de una forma explícita. Las técnicas para abordar este problema son propuestas en [1] y [2]. Aplicando técnicas de programación multiparamétrica, la ley de control resulta ser una ley afín a trozos (piecewise affine) definida en un conjunto de regiones críticas. De este modo la mayor parte de carga de computación puede ser precalculada fuera de línea. Bastará con determinar cual es la región crítica activa en el momento y aplicar la ley de control asociada.

El tiempo de cálculo puede ser reducido aún más si utilizamos un árbol de búsqueda [9] y [10]. Afortunadamente el problema de optimización asociado a al MPC para tracking es un QP parametrizado en el estado actual y el estado asociado a la referencia. Esto nos permite calcular la solución explícita y usarla para controlar el motor lineal. El árbol de búsqueda ha sido

implementado en una S-function cargada en una tarjeta dSPACE.

El artículo se estructura de la forma siguiente: primero se verá el planteamiento del problema, a continuación el MPC para tracking. En la sección 3.1 se expondrá brevemente como formular el problema como un QP. En la sección IV la obtención de la solución explícita y el árbol de búsqueda serán mostrados en pocas palabras. En la sección V el motor lineal es presentado y en la sección VI se enseñarán los resultados. Finalizando con algunas conclusiones.

Notación: El vector (x, θ) denota $[x^T, \theta^T]^T$; dado un λ , $\lambda X = \{\lambda x : x \in X\}$; $int(X)$ denota el interior del conjunto X ; una matriz T definida positiva se representará como $T > 0$ y $T > P$ significa que $T - P > 0$. Para una matriz simétrica $P > 0$, $\|x\|_P$ es la norma euclídea de x , i.e. $\|x\|_P = \sqrt{x^T P x}$. $\mathbf{0}_{n,m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es una matriz de ceros de orden $n \times m$, $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad de orden n , y $diag(A_1, \dots, A_n)$ es una matriz diagonal a bloques formada por la matrices A_i . Dado $a \in \mathbb{R}^{n_a}$, $b \in \mathbb{R}^{n_b}$, y el conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n_a+n_b}$, el operador proyección es $Proj_a(\Gamma) = \{a \in \mathbb{R}^{n_a} : \exists b \in \mathbb{R}^{n_b}, (a, b) \in \Gamma\}$.

2. Descripción del problema

Sea el siguiente sistema lineal descrito por:

$$\begin{aligned} x^+ &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (1)$$

Donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $u \in \mathbb{R}^m$ es la acción de control, $y \in \mathbb{R}^p$ La salida y x^+ el estado en el siguiente periodo de muestreo. Se asume que la planta es estabilizable y los estados accesibles. x_k y u_k son el estado y la acción de control en el instante k .

El sistema está sujeto a las siguientes restricciones:

$$x_k \in X, \quad u_k \in U$$

Para todo $k \geq 0$. Los conjuntos X y U son politopos (poliedros cerrados y compactos) que contienen el origen en su interior.

El objetivo es diseñar un controlador $u_k = K_N(x_k, \hat{x}_s)$ que sea capaz de llevar al sistema a cualquier estado de equilibrio admisible \hat{x}_s verificando en su evolución todas las restricciones.

3. MPC para tracking

La formulación del MPC para seguimiento de referencias usada en este artículo fue presentado recientemente por los autores en [6]. Las principales novedades de este controlador son que: (i) utiliza un estado de referencia artificial como variable de decisión, (ii) penaliza la desviación entre este estado artificial y el real en el coste y (iii) como restricción terminal usa un conjunto invariante para tracking.

Para ello se necesita:

- 1) La descripción de los estados de equilibrio: considérese el setpoint t , el estado de equilibrio $z_s = (x_s, u_s)$ asociado a dicho punto debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} A - I_n & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ u_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n,1} \\ t \end{bmatrix} \quad (2)$$

Toda solución de esta ecuación puede ser expresada como:

$$\begin{aligned} z_s &= M\theta \\ t &= N\theta \end{aligned} \quad (3)$$

Donde θ es un parámetro que caracteriza la solución de forma unívoca. Su dimensión es n_θ y depende de las matrices del sistema, pero siempre es $\leq m + p$.

- 2) El controlador local K y y la matriz de Lyapunov P deben verificar la siguiente ecuación: $(A + BK)^T P (A + BK) - P = -(Q + K^T R K)$
- 3) El conjunto invariante para tracking, que se define como el conjunto de condiciones iniciales desde las cuales el sistema puede ser llevado a algún punto de equilibrio admisible por la ley de control: $u = K(x - x_s) + u_s$ donde x_s y u_s son el estado y acción de control asociados a la referencia deseada.

De la ecuación 3 podemos escribir la ecuación en bucle cerrado como:

$$\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} A + BK & BL \\ 0 & I_{n_\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

El anterior sistema de ecuaciones puede ser escrito como, $w^+ = A_w w$. El conjunto invariante para tracking será pues el máximo conjunto invariante de este sistema con las siguientes restricciones (véase [4]):

$$W_\lambda = \{w = (x, \theta) : x \in X, Kx + L\theta \in U, (x_s, u_s) = M\theta \in \lambda X \times \lambda U\}$$

Donde λ es un parámetro toma un valor $\lambda \in (0, 1)$ mediante el cual se puede demostrar que el conjunto está finitamente determinado (ver [6]).

El conjunto de los estados de equilibrio admisibles viene dado:

$$X_s(\lambda) = \{x_s \in \mathbb{R}^n : \exists u_s \text{ tal que } (x_s, u_s) \in \lambda X \times \lambda U, \text{ y } (A - I_n)x_s + Bu_s = 0\}$$

Cabe destacar que $X_s(1)$ es el conjunto de todos los estados de equilibrio admisibles y además que $X_s(\lambda) \subset Proj_x(W_\lambda)$.

Para un estado inicial x y un estado de referencia deseado \hat{x}_s , el problema de optimización $P_N(x, \hat{x}_s)$ viene dado por:

$$\begin{aligned} V_N^*(x, \hat{x}_s) &= \min_{\mathbf{u}, \theta} V_N(x, \hat{x}_s, \mathbf{u}, \theta) \\ \text{s.t.} \quad x(0) &= x. \\ x(j+1) &= Ax(j) + Bu(j), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x(j), u(j)) &\in X \times U, \quad j = 0, \dots, N-1 \\ (x_s, u_s) &= M\theta, \\ (x(N), \theta) &\in \mathcal{X}_f^w. \end{aligned}$$

Donde las decisiones de control son: la secuencia futura de acciones de control $\mathbf{u} = \{u(0), \dots, u(N-1)\}$ y el parámetro θ .

$z_s = (x_s, u_s) = M\theta$ es el estado y acción de control de referencia artificial, $x(i)$ es el estado predicho del sistema en el tiempo i y es calculado en base al modelo $x(i+1) = Ax(i) + Bu(i)$, con $x(0) = x$.

El coste a minimizar será pues:

$$\begin{aligned} V_N(x, \hat{x}_s, \mathbf{u}, \theta) &= \sum_{i=0}^{N-1} \|x(i) - x_s\|_Q^2 + \|u(i) - u_s\|_R^2 \\ &+ \|x(N) - x_s\|_P^2 + \|x_s - \hat{x}_s\|_T^2 \end{aligned}$$

Los parámetros libres del controlador son las matrices definidas positivas Q, R, T , la constante $\lambda \in (0, 1)$ y el horizonte de predicción N .

$P_N(x, \hat{x}_s)$ puede ser formulado como un problema de programación cuadrática en las variables (\mathbf{u}, θ) .

El hecho de considerar θ , variable asociada a la referencia artificial, como una variable de decisión y el utilizar como restricción terminal un invariante para tracking asegura la factibilidad del problema de optimización para cualquier punto de referencia \hat{x}_s . La convergencia del estado de referencia artificial al estado de referencia deseado se asegura penalizando en el coste esta diferencia.

Aplicando la técnica de horizonte deslizante, la ley de control es dada por $K_N(x, \hat{x}_s) = u^*(0)$, donde $u^*(0)$ es función de x y \hat{x}_s .

El dominio de atracción del sistema en bucle cerrado es la región de factibilidad de $P_N(x, \hat{x}_s)$, a la que se llamará X_N . Esta región es un poliedro y es independiente del estado asociado a la referencia \hat{x}_s .

Este controlador es capaz de llevar al sistema a cualquier un punto de referencia admisible $\hat{x}_s \in X_s(\lambda)$, verificando las restricciones, desde cualquier estado inicial $x \in X_N$, por lo tanto cualquier referencia constante a trozos puede ser seguida sin offset [6].

$\lambda \in (0, 1)$ es un parámetro del controlador que puede ser elegido arbitrariamente cerca de 1; esto implica que prácticamente el todo el conjunto de referencias puede ser seguido sin offset $X_s(1)$.

3.1. Formulación del problema como un QP

Sean los vectores $\mathbf{e} = (x - x_s, x(1) - x_s, \dots, x(N) - x_s)$, $\mathbf{v} = (u(0) - u_s, u(1) - u_s, \dots, u(N-1) - u_s)$ y $\mathbf{x} = (x, x(1), \dots, x(N))$. Sean las matrices: $Q_f = \text{diag}(Q, \dots, Q, P) \in \mathbb{R}^{(N+1)n \times (N+1)n}$, $R_f = \text{diag}(R, \dots, R) \in \mathbb{R}^{Nm \times Nm}$. Entonces el coste a minimizar puede ser reescrito como: $V_N(x, \hat{x}_s, \tilde{\mathbf{u}}) = \|\mathbf{e}\|_{Q_f}^2 + \|\mathbf{v}\|_{R_f}^2 + \|x_s - \hat{x}_s\|_T^2$, donde $\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}, \theta)$ denota las variables de decisión. La evolución predicha y el error de seguimiento pueden

reescribirse como $\mathbf{x} = \tilde{G}\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{F}x$ y $\mathbf{e}_f = \tilde{G}\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{F}x$, donde:

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} I \\ A \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix}, \quad \tilde{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n,m} & \mathbf{0}_{n,m} & \dots & \mathbf{0}_{n,m} & -M_x \\ B & B & \dots & \mathbf{0}_{n,m} & -M_x \\ AB & B & \dots & \mathbf{0}_{n,m} & -M_x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & B & -M_x \end{bmatrix}$$

Así como $\mathbf{v}_f = \tilde{H}\tilde{\mathbf{u}}$ and $x_s = \tilde{L}\tilde{\mathbf{u}}$, donde $\tilde{L} = [\mathbf{0}_{n,Nm} M_x]$ y

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} I_m & \mathbf{0}_{m,m} & \dots & \mathbf{0}_{m,m} & -M_u \\ \mathbf{0}_{m,m} & I_m & \dots & \mathbf{0}_{m,m} & -M_u \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{m,m} & \dots & \mathbf{0}_{m,m} & I_m & -M_u \end{bmatrix}$$

Sustituyendo se obtiene:

$$\begin{aligned} V_N(x, x_s, \tilde{\mathbf{u}}) &= \tilde{\mathbf{u}}^T (\tilde{G}^T Q_f \tilde{G} + \tilde{H}^T R_f \tilde{H} + \tilde{L}^T T \tilde{L}) \tilde{\mathbf{u}} \\ &+ 2 \cdot (x^T \tilde{F}^T Q_f \tilde{G} - \hat{x}_s^T T \tilde{L}) \tilde{\mathbf{u}} \\ &+ x^T \tilde{F}^T Q_f \tilde{F} x + \hat{x}_s^T T \hat{x}_s \end{aligned} \quad (5)$$

Considerando que los conjuntos X , U y \mathcal{X}_f^w están determinados por $X = \{x \in \mathbb{R}^n : A_x \cdot x \leq b_x\}$, $U = \{x \in \mathbb{R}^n : A_u \cdot u \leq b_u\}$ y $\mathcal{X}_f^w = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^{n+n_\theta} : A_{\mathcal{X}x}x + A_{\mathcal{X}\theta}\theta \leq b_{\mathcal{X}}\}$ y definiendo las matrices $A_f^x = \text{diag}(A_x, \dots, A_x)$, $b_f^x = (b_x, \dots, b_x)$, $A_f^u = \text{diag}(A_u, \dots, A_u)$ y $b_f^u = (b_u, \dots, b_u)$, las restricciones de $P_N(x, x_s)$ pueden ser reescritas como: $A_x \mathbf{x} + A_{\tilde{\mathbf{u}}} \tilde{\mathbf{u}} \leq \mathbf{b}$, donde:

$$\begin{bmatrix} A_f^x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{\mathcal{X}\theta} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_f^u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{\mathcal{X}\theta} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \leq \begin{bmatrix} b_f^x \\ b_f^u \\ b_{\mathcal{X}} \end{bmatrix}$$

Sea $\bar{G} = \tilde{G} \text{diag}(I_{Nm}, \mathbf{0}_{n_\theta, n_\theta})$, entonces las secuencia de estados futuros puede ser expresada como: $\mathbf{x} = \tilde{F}x + \bar{G}\tilde{\mathbf{u}}$. De donde sacamos que la expresión de las restricciones de $P_N(x, \hat{x}_s)$ como

$$(A_x \bar{G} + A_{\tilde{\mathbf{u}}}) \tilde{\mathbf{u}} \leq \mathbf{b} - A_x \tilde{F}x \quad (6)$$

La solución optima se obtiene pues, minimizando el coste (5) sujeto al conjunto de restricciones (6) para el estado actual x y el estado asociado a la referencia \hat{x}_s .

4. Obtención de la ley de control de forma explícita

Definimos como estado extendido $\tilde{x} = (x, \hat{x}_s)$, teniendo en cuenta las ecuaciones (5) y (6), el problema de optimización $P_N(x, x_s)$ puede ser expresado como un problema QP standard.

$$V_N^*(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \tilde{x}' Y \tilde{x} + \min_{\tilde{\mathbf{u}}} \left\{ \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}}' H \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{x}' F \tilde{\mathbf{u}} \right\}, \quad (7)$$

$$\text{s.t. } G\tilde{\mathbf{u}} \leq W + E\tilde{x},$$

Donde $H = 2(\tilde{G}^T Q_f \tilde{G} + \tilde{H}^T R_f \tilde{H} + \tilde{L}^T T \tilde{L})$, $F = [\tilde{G}^T Q_f \tilde{F}, -L^T T]^T$, $Y = \text{diag}(\tilde{F}^T Q_f \tilde{F}, T)$, $G = A_x \bar{G} + A_{\tilde{\mathbf{u}}}$, $W = \mathbf{b}$ y $E = [-A_x \tilde{F}, \mathbf{0}]$.

Existen métodos [1, 2] que nos permiten resolver un problema QP que depende de uno o varios parámetros, es el llamado *multi-parametric QP (mp-QP)*. Estos métodos nos proporcionan la solución dependiendo del o de los parámetros. Si consideramos el estado \tilde{x} como un parámetro, entonces $P_N(x, \tilde{x}_s)$ puede ser considerado un problema de programación multiparamétrica y puede ser resuelto por uno de estos métodos. La solución de este problema mp-QP nos proporciona de forma explícita la secuencia óptima de acciones de control en función del estado actual, i.e. $\tilde{u} = \mathbf{K}(\tilde{x})$.

Llamamos z a la siguiente variable:

$$z = \tilde{u} + H^{-1}F\tilde{x}$$

Entonces el problema mp-QP puede ser reformulado como sigue:

$$V_z^*(\tilde{x}) = \min_z \frac{1}{2}z'H z$$

$$\text{st. } Gz \leq W + S\tilde{x}$$

donde $S = E + GH^{-1}F'$ y $V_z^*(\tilde{x}) = V_N^*(\tilde{x}) - \frac{1}{2}\tilde{x}'(Y - FH^{-1}F')\tilde{x}$.

La solución del problema de optimización y la trayectoria óptima resulta ser, para un problema mp-QP una función dependiente del estado continua afín a trozos (piecewise affine). Usando las condiciones de optimalidad propuestas por Karush-Khun-Tucker (*KKT*) para el problema mp-QP, el espacio puede ser dividido en un conjunto de regiones $\{\tilde{X}_i\}$, llamadas *regiones críticas*, en cada una de las cuales los parámetros de la función son constantes. Así la acción de control toma la siguiente expresión:

$$\tilde{u}(\tilde{x}) = K_x(i)\tilde{x} + K_p(i), \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{X}_i$$

Donde las matrices $K_x(i)$ and $K_p(i)$ son constantes en la región crítica \tilde{X}_i .

Al final de este proceso el estado queda dividido en un conjunto de regiones críticas en cada una de las cuales existe una ley de control afín, una vez que el estado actual es obtenido bastará determinar a que región pertenece y así obtener la ley de control a aplicar.

Si el nº de regiones es muy grande, el tiempo requerido para ver a que región crítica pertenece el estado puede ser grande. Con objeto de reducir este tiempo un árbol binario de búsqueda es utilizado en concreto el propuesto por [9, 10].

La clave está en asociar una desigualdad y un conjunto de regiones críticas a cada nodo no terminal, de forma que los estados de las regiones de una de las ramas verifican dicha desigualdad y los de la otra no. Solo si una única región es asociada a un nodo está se considerará terminal. El conjunto de desigualdades que determinan el árbol son buscadas de forma que la profundidad del mismo sea mínima.

El algoritmo comenzará evaluando la desigualdad del nodo raíz, dependiendo si el estado actual verifica o no la desigualdad el algoritmo evolucionará al siguiente nodo y así sucesivamente hasta encontrar un nodo terminal que me proporcionará la ley de control a aplicar.

El procedimiento expuesto anteriormente ha sido implementado en línea para controlar un motor lineal mostrado en la siguiente sección.

5. El motor lineal

El motor lineal es un dispositivo posicionador electro-mecánico compuesto por dos partes:

- Una parte fija (estator) de forma rectangular que dispone de imanes permanentes dispuestos a lo largo del mismo de forma que la polaridad de los imanes vaya alternándose de uno al siguiente.
- Una parte móvil que desliza sobre y a lo largo de la anterior. Esta parte posee fuertes electroimanes que generaran un campo variable que al interactuar con el campo del estator generará el movimiento.

Su funcionamiento es similar de un motor eléctrico que hubiésemos "desenrollado" a lo largo de su eje.

El motor lineal usado en este experimento se encuentra en los laboratorios del *Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática* de la *Escuela Superior de Ingenieros* de la *Universidad de Sevilla* (figura 1).



Figura 1: Motor lineal 1FN 3 de Siemens.

La planta de ensayos está compuesta de las siguientes partes:

1. **Motor Lineal:** Es un motor lineal síncrono con imanes permanentes modelo 1FN3 050-2w00-0aa de Siemens. La parte móvil posee en su interior las bobinas que generan el campo magnético. Sus dimensiones son: $254 \times 67 \times 47,7$ mm. El estator esta compuesto por 21 imanes permanentes con 4 pares de polos cada uno, el tamaño de cada imán es: $120 \times 58 \times 11,8$ mm; la longitud total del estator es 2520 mm. Entre en primario y el secundario existe una distancia de 1,3 mm.
2. **Sensor de posición:** Es un sistema óptico de medida LC181 de Heidenhein
3. **Armario de control:** El cual contiene la alimentación, las protecciones y el SimoDrive 611

Universal de Siemens, el cual nos permite controlar el motor. SimoDrive se conecta con el PC mediante un bus RS-232.

4. **PC:** Este Pc posee una tarjeta dSPACE DS1103. Es una tarjeta de control equipada con un procesador PowerPC 604a a 400 MHz la cual puede ser programada con una librería de MATLAB/Simulink. La tarjeta dSPACE se conecta directamente con el armario de control, permitiéndonos actuar directamente, ya sea leyendo las salidas o proporcionando las señales de control.

6. Resultados experimentales

El control esta basado en una tarjeta dSPACE , la cual nos permites usar MATLAB/Simulink para la implementación de los ensayos sobre el motor lineal. El algoritmo para evaluar el arbol de búsqueda asociado a la solución explícita del MPC para tracking ha sido programado en C e implementado como una S-function.

La tarjeta dSPACE mide la posición y la velocidad del motor lineal como una señal analógica y la convierte a digital. La señal de control está compuesta por tres señales:

1. la primera analógica para la amplitud.
2. las otras 2 son digitales y nos sirven para determinar la dirección.

Para identificar el sistema se ha escogido un tiempo de muestreo de 10 ms con objeto de probar la efectividad del procedimiento. Excitando el sistema con un PRBS, el modelo de la velocidad en relación con la señal de control ha sido calculado. Este modelo resultó ser un sistema de primer orden con un retraso de un periodo de muestreo. Considerando que la posición es la integral de la velocidad , el sistema tiene 3 estados con las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1,6667 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0,9686 & 5,1663 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0], \quad D = [0]$$

Donde la entrada es el voltaje [V], el primer estado es la posición [m], el segundo es la velocidad [m/min] y el tercero es la entrada en el periodo de muestreo anterior [V]. Cabe resaltar que todos los estados son accesibles.

El sistema real esta sometido a las siguientes restricciones:

$$U = \{u \in \mathbb{R} : |u| \leq 0,95\}, \quad X = \{x \in \mathbb{R}^3 : |Cx| \leq 0,8\}$$

Los parámetros del controlador son: el horizonte de predicción $N = 3$, Las matrices de peso $Q = C' \cdot C$, $R = 0,01$ y $T = 100 \times P$. Esas matrices han sido escogidas para obtener una respuesta rápida del sistema.

La ley de control local , usada para calcular la restricción terminal ha sido un LQR. P es la matriz de Lyapunov asociada a dicha ley de control. El parámetro $\lambda = 0,95$ lo que hace que el conjunto de puntos de referencia admisibles sea $[-0,76, 0,76]$.

El controlador explícito obtenido tiene 514 regiones críticas con un total de 4740 desigualdades. EL árbol de búsqueda está compuesto por 417 nodos con una profundidad de 13 niveles así que para encontrar el nodo terminal y por lo tanto la región crítica, solo tendremos que evaluar 12 desigualdades, en vez de 4740 desigualdades requeridas en el peor de los casos.

A continuación se mostrarán 2 experimentos.

1. El motor lineal seguirá una serie de referencias entre $-0,5$ y $0,5$ ver figuras [2, 3 y 4]. Se puede ver como el sistema evoluciona hacia la referencia deseada de una forma admisible a pesar de los posibles errores de modelado y ruidos.

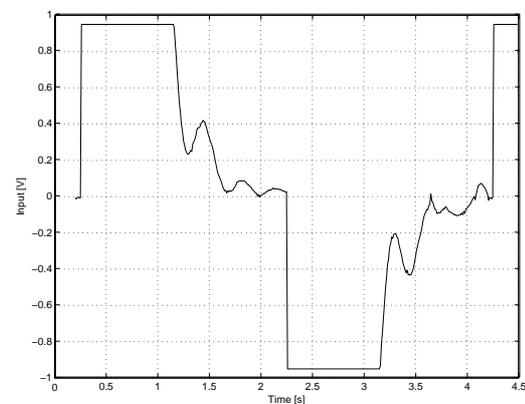


Figura 2: Experimento 1. Acción de control

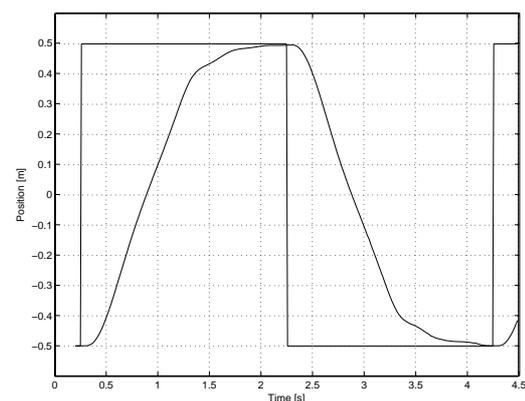


Figura 3: Experimento 1. Posición y referencia

2. El segundo ensayo se pretende mostrar el papel de la referencia artificial en el controlador para asegurar la factibilidad. Para ello se le va a dar como referencia un valor no factible -1 m . El controlador evolucionará al punto de referencia más cercano que sea admisible que es $-0,76$, como se puede ver en las figuras [5, 6 y 7].

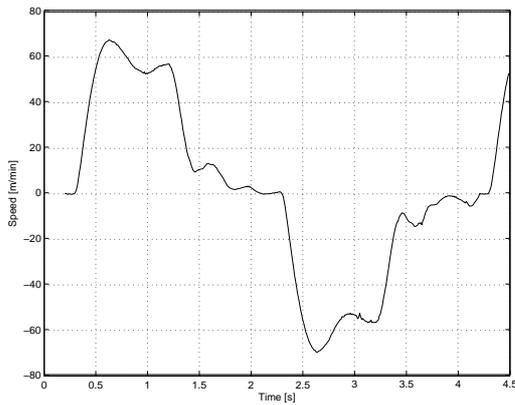


Figura 4: Experimento 1. Velocidad

De la comparación los resultados reales y del controlador aplicado al modelo podemos deducir que el modelo usado para las predicciones difiere del real, actualmente se está trabajando en un nuevo modelo que reduzca estos errores y así obtener mejores respuestas en bucle cerrado y en una formulación robusta del problema.

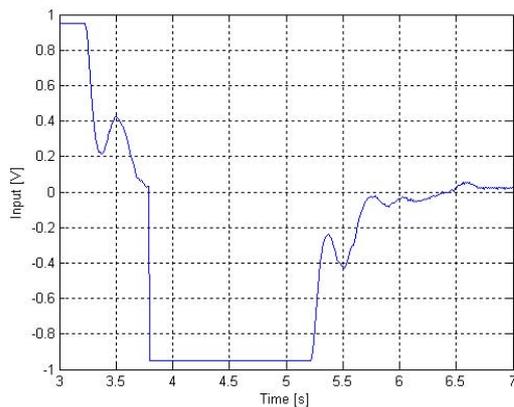


Figura 5: Experimento 2. Acción de control

7. Conclusiones

En este artículo una nueva formulación del MPC para tracking ha sido aplicada a un sistema real: un motor lineal. Este controlador nos permite seguir referencias admisibles constantes a trozos sin offset, manteniendo la factibilidad y asegurando la convergencia.

Gracias a que el problema a resolver para obtener la solución es un mp-QP parametrizado en el estado actual y el estado asociado a la referencia, la solución explícita del mismo puede ser calculada fuera de línea, lo que nos permite aplicar dicho controlador a sistemas rápidos como el motor lineal, con un tiempo de muestreo de 10 ms.

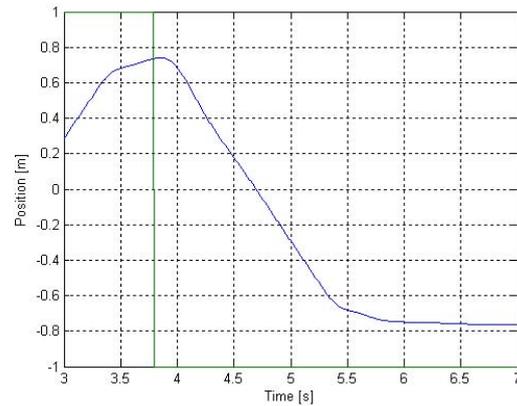


Figura 6: Experimento 2. Posición y referencia

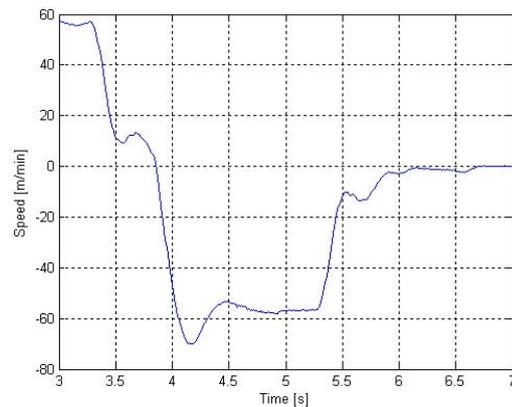


Figura 7: Experimento 2. Velocidad

Referencias

- [1] A. Bemporad, M. Morari, V. Dua, and E.N. Pistikopoulos(2002). The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. In *Automatica*, Vol. 38, pp. 3-20.
- [2] A. Bemporad, F. Borrelli and M. Morari(2002). Model Predictive Control Based on Linear Programming. The Explicit Solution. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, No. 12, pp. 1974-1985.
- [3] E. F. Camacho and C. Bordons. *Model Predictive Control*, 2nd edn, Springer-Verlag.2004.
- [4] E. G. Gilbert and K. Tan. Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output admissible sets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36:1008–1020, 1991.
- [5] A. Grancharova and T. A. Johansen (2005). Survey of Explicit Approaches to Constrained Optimal Control. In *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, Vol 3355.
- [6] D. Limon, I. Alvarado, T. Alamo, and E.F. Camacho. MPC for tracking of piece-wise constant references for constrained linear systems. In *Proceedings of the IFAC World Congress*, 2005.

- [7] D. Q. Mayne, J. B. Rawlings, C. V. Rao, and P. O. M. Scokaert. Constrained model predictive control: Stability and optimality. In *Automatica*, vol. 36, pp. 789–814, 2000.
- [8] M. Morari & A. Gentilini (2004). Challenges and opportunities in process control: Biomedical processes. in *AIChE Journal*, Vol 47, pp 2140-2143
- [9] P. Tøndel , T. A. Johansen, & A. Bemporad (2002). Complexity reduction in linear model predictive control. In *IFAC World Congress 2002*.
- [10] P. Tøndel , T. A. Johansen, & A. Bemporad (2003). Evaluation of piecewise affine control via binary search tree. In *Automatica*, Vol. 39, No. 5, pp. 945-950.