

Control Predictivo de Sistemas Híbridos a través de Malla de Discretización Circular

Mirko Fiacchini, Eduardo F. Camacho

Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática,
Universidad de Sevilla, España
mirko@cartuja.us.es, eduardo@cartuja.us.es

Abstract – En este artículo se trata el problema del control de sistemas híbridos. Los sistemas híbridos son sistemas en los que interactúan dinámicas continuas y discretas. Esto conlleva que la teoría clásica del control no puede ser aplicada. En este artículo se utiliza un método de discretización combinado con un criterio de optimización basado en el principio de optimalidad de Bellman, para obtener estructuras de control sub-óptimas. La particularidad es que la malla de discretización es de forma circular en vez que la clásica estructura a rejilla. Además se ilustra un procedimiento para evaluar la estabilidad de la solución obtenida.

1. Introduction

Los sistemas híbridos son sistemas que presentan dinámica discretas y continuas a la vez. En práctica estos sistemas pueden ser modelados a través un conjunto de ecuaciones diferenciales (o a las diferencias si tiempo discreto) y un autómata que represente los cambios entre estados discretos. En general a cada estado del autómata es asociado un sistema de ecuaciones diferenciales que expresan la dinámica continua válida en este. Además existe una ley de transición que define la evolución entre los diferentes estados discretos; la conmutación entre estados del autómata es debida al verificarse de algunos eventos. Existen diferentes formalismos para la representación de un sistema híbrido; sin embargo ha sido probada la equivalencia entre ellas y hay métodos que permiten pasar de una a otra [8]. En este artículo se ha adoptado la representación PWA (Piecewise Affine).

El hecho de tener los dos tipos de dinámicas lleva a que no puedan ser aplicadas ni la teoría clásica del control ni la teoría de los autómatas. En los últimos años muchos esfuerzos de investigación se han dirigido al estudio de sistemas híbridos, cuya importancia es evidente si se piensa al empleo, cada vez mayor, de sistemas digitales en el control de procesos industriales. Una línea de investigación es la que se pone el problema de la análisis de *safety*; el objetivo es, dado un sistema híbrido controlado, verificar si algunas regiones no seguras pueden ser alcanzadas. Por eso se usa los

conceptos de *abstracción y refinamiento*; iterativamente se genera un modelo híbrido simplificado (abstracción), se busca un ejemplo que viole la condición de seguridad y se verifica si tal ejemplo es válido también para el sistema completo. Si no, lo se utiliza para refinar la abstracción. Importantes contribuciones a esta línea se encuentran en [1], [2], [3], [4], [9], [11]. Bengua y DeCarlo tratan el problema analizando una familia de sistemas a la que pertenece también el problema original y proporcionan condiciones para que la solución óptima general sea también solución del sistema híbrido, [6]. Una técnica similar a la utilizada en este artículo es presentada en [7] donde se propone la discretización del espacio de los estados y la resolución del problema de optimización utilizando programación dinámica. La malla de discretización usada es una malla a forma de rejilla.

Una de las técnicas que se han demostrado entre las más eficaces, sobre todo para sistemas con dinámicas 'lentas' como en los procesos petroquímicos, es la del control predictivo, *MPC*; así que es natural analizar la posibilidad de utilizar *MPC* para sistemas híbridos. Los controladores predictivos conllevan un alto costo computacional por su propia naturaleza cuando se tratan sistemas lineales, los sistemas híbridos exasperan ulteriormente el problema. La computación de MPC explícito, formulado por Bemporad y otros en [5], y el control óptimo para sistemas con solo entradas discretas, [10], no permiten horizontes de predicción grandes, mientras que en este artículo el problema es el control de sistemas híbridos con horizonte infinito. De hecho la solución analítica del problema no es planteable al crecer de la dimensión del estado y del horizonte de control. Tampoco empleando técnicas para reducir el número de las posibles evoluciones a evaluar, a través consideraciones sobre la alcanzabilidad de las regiones por ejemplo, permite obviar el problema debido a la naturaleza exponencial de la complejidad.

En este artículo se presenta un método que permite encontrar una solución aproximada del problema de control óptimo predictivo con horizonte infinito mediante malla de discretización e interpolación. Se muestra que usando un método de programación dinámica para el cálculo de las

entradas de control en los puntos de una oportuna malla en el espacio de los estados, se puede llegar a encontrar superficies de control que proporcionan buenos resultados y bajo coste computacional para la aplicación on-line. En particular se utiliza una estructura de discretización a malla circular que permite concentrar mas precision donde mas la se necesita. Además se proporciona un criterio de prueba de estabilidad del control obtenido. El método es ilustrado a través la aplicación a un modelo de doble tanque con doble interconexión.

2. Sistemas híbridos en forma PWA

Existen diferentes formalismos para la representación de un sistema híbrido; en este artículo se ha adoptado la representación PWA (Piecewise Affine), definida a continuación.

Las dinámicas del sistema son

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A^i x(t) + B^i u(t) + f^i \\ y(t) &= C^i x(t) + g^i \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{X}_i \quad (1)$$

donde $\{\mathcal{X}\}_{i=1}^s$ es una partición del espacio de estados y entradas. Cada $\{\mathcal{X}\}_i$ es dada por

$$\mathcal{X}_i \triangleq \left\{ \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \mid \mathbf{R}^i \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \leq \mathbf{r}^i \right\} \quad (2)$$

donde con $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y $y(t) \in \mathbb{R}^p$ se indican el estado (continuo), la entrada y la salida respectivamente. Supongamos que el estado sea completamente accesible en cada instante. El problema MPC es el siguiente:

$$\mathbf{u} = \arg \left(\min_{\mathbf{u}} J \right) \quad (3a)$$

$$J = \sum_{i=1}^N q_i [y(t+i | t) - w(t+i)]^2 + \sum_{i=0}^{N-1} r_i u(t+i)^2 \quad (3b)$$

$$u_{min} \leq u(t+1) \leq u_{max} \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3c)$$

donde \mathbf{u} es la secuencia de entrada optima, es decir la que minimiza el coste, $y(t+i | t)$ es la predicción de la salida al instante $t+i$ basada en las medidas hasta el instante t , $w(t+i)$ la salida de referencia y q_i , r_i oportunos coeficientes de ponderacion. La secuencia optima, además de minimizar el coste, tiene que satisfacer las restricciones 3c.

Considerando el problema MPC para un sistema PWA, se nota como la dificultad está en la evaluación de la predicción de la salida. Esto es debido al hecho de que el conjunto de la partición del espacio de estado y entradas alcanzado por el sistema en cada instante depende de las entrada en los instantes anteriores. Así que, indicando con $I = \{I(t), I(t+1), \dots, I(t+N)\}$ la secuencia de subconjuntos alcanzados durante la evolución predicha, solo el primer termino $I(t)$ de dicha sucesion es conocida. Las otras pueden ser consideradas como ultteriores variables de minimizacion y las posibles secuencias, si los conjuntos son s y el horizonte es de N , son s^{N-1} . Esto conlleva un incremento exponencial de la complejidad al aumentar del horizonte. Prácticamente el problema MPC para sistemas híbridos en forma PWA puede ser reformulado:

$$\mathbf{u}^* = \arg \left(\min_I \left(\min_{\mathbf{u}} (J) \right) \right) \quad (4a)$$

$$\mathbf{R}^{IU} \mathbf{u} \leq \mathbf{r}^{IU} \quad (4b)$$

donde ahora con 4b se expresan las restricciones sobre la amplitud de las entradas y las condición de pertenencia a los conjuntos de partición.

De echo para sistemas PWA seria preciso en cada instante de muestreo evaluar todas las posibles secuencias de conjuntos y por cada secuencia resolver el problema MPC asociado. Luego, entre todas las soluciones encontradas, seleccionar la que proporciona coste mínimo y aplicar al sistema el primer elemento de la secuencia de entradas. Es claro que algunas secuencias de conjuntos pueden no ser realizables, así que esas pueden ser eliminadas del problema de minimizacion; además pueden ser empleadas técnica para la ulterior reducción del conjunto de secuencias (a través, por ejemplo, *branch & bound*). Sin embargo el problema queda exponencialmente complejo, es decir que no se puede resolver directamente en linea si el horizonte de control no es muy pequeño. La posibilidad de que también las entradas de control sean discretas lleva a tener que resolver en cada instante un problema MIQP (Mixed Integer Quadratic Programming) por cada posible escenario admisible en la evolución futura, mucho mas oneroso del QP.

3. Programación dinámica

A causa de la prohibitiva complejidad para el control predictivo de sistemas híbridos, se busca una solución que aproxime la optima permitiendo pero su aplicación en tiempo real. Para eso se

utiliza un criterio que se basa en el dicha *Programación Dinámica*, que proporciona una condición para construir la solución óptima de un problema de control.

3.1. Principio de Optimalidad de Bellman

Sea el sistema dinámico, posiblemente no lineal y tiempo variante, descrito en representación espacio-estado por la ecuación;

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)) \quad (5)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control y $f(., ., .)$ es la dicha *función local de transición de estado*. Iterando la 5 es posible definir la *función global de transición de estado*;

$$\varphi(j, k, x(k), u_{[k,j]}) \quad j \geq k \quad (6)$$

La función φ , por una dada secuencia de entrada $u_{[k,j]}$, $j \geq k$, asocia al evento inicial $(k, x(k))$ el evento final $(j, x(j))$. En particular si el sistema es lineal tiempo variante, es decir $x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ la φ asociada es;

$$\begin{aligned} \varphi(j, k, x(k), u_{[k,j]}) &= A(j, k)x(k) + \\ &\quad \sum_{i=k}^{j-1} A(j, i+1)B(i)u(i) \end{aligned}$$

donde

$$A(j, k) \triangleq \begin{cases} I_n & i = k \\ A(j-1) \dots A(k) & j > k \end{cases}$$

Ahora, considerando el sistema 5 inicializado con $(t_0, x(t_0))$, se considera el siguiente funcional de coste, posiblemente no lineal

$$J(t_0, x(t_0), u_{[t_0, T]}) = \sum_{k=t_0}^{T-1} l(k, x(k), u(k)) + \psi(x(T)) \quad (7)$$

donde $l(k, x(k), u(k))$ es el coste no negativo instantáneo relativo al instante k , $\psi(x(T))$ es el coste no negativo debido al estado final $x(T)$, $[t_0, T]$ es el horizonte de control. El objetivo del problema de control es encontrar la secuencia de control $u_{[t_0, T]}$ que minimice el coste J .

Se considere, por $t \in [t_0, T]$, la dicha *función de Bellman*

$$\begin{aligned} V(t, x(t)) &\triangleq \min_{u_{[t, T]}} J(t, x(t), u_{[t, T]}) \\ &= \min_{u_{[t, t_1]}} \left\{ \min_{u_{[t_1, T]}} \left[\sum_{k=t}^{t_1-1} l(k, x(k), u(k)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. J(t_1, \varphi(t_1, t, x(t), u_{[t, t_1]}), u_{[t_1, T]}) \right] \right\} \quad (8) \end{aligned}$$

La segunda igualdad es debida al hecho la secuencia óptima puede ser vista como la concatenación de dos sub-secuencias. La ecuación 9 puede ser reformulada como:

$$\begin{aligned} V(t, x(t)) &= \min_{u_{[t, t_1]}} \left\{ \sum_{k=t}^{t_1-1} l(k, x(k), u(k)) + \right. \\ &\quad \left. \min_{u_{[t_1, T]}} J(t_1, \varphi(t_1, t, x(t), u_{[t, t_1]}), u_{[t_1, T]}) \right\} \\ &= \min_{u_{[t, t_1]}} \left\{ \sum_{k=t}^{t_1-1} l(k, x(k), u(k)) + \right. \\ &\quad \left. V(t_1, \varphi(t_1, t, x(t), u_{[t, t_1]})) \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

Esto lleva al *Principio de Optimalidad de Bellman*;

el **Principio de optimalidad** afirma que una secuencia de entrada óptima $u_{[t, T]}^0$ es tal que, dado el estado $(t_1, x(t_1))$ perteneciente a la trayectoria óptima correspondiente, con $x(t_1) = \varphi(t_1, t, x(t), u_{[t, t_1]})$, también la subsecuencia de entradas $u_{[t_1, T]}^0$ es óptima para el coste residuo y el horizonte $[t_1, T]$.

Por $t_1 = t + 1$, se llega a la *ecuación de Bellman*:

$$V(t, x(t)) = \min_{u(t)} \left\{ l(t, x(t), u(t)) + V(t+1, f(t, x(t), u(t))) \right\} \quad (10)$$

con la condición terminal

$$V(T, x(T)) = \psi(x(T))$$

La ecuación de Bellman proporciona un criterio para el calculo de la secuencia óptima de control. Puede ser utilizada iterativamente como ilustrado a continuación; la ecuación 10 puede ser resuelta por $t = T - 1$

4. Modelo dos tanques

$$\begin{aligned}
 V(T-1, x(T-1)) = \\
 \min_{u(t-1)} \left\{ l(T-1, x(T-1), u(T-1)) + \phi(x(T)) \right\} \\
 x(T) = f(T-1, x(T-1), u(T-1))
 \end{aligned} \tag{11}$$

Resolviendo respecto a $u(T-1)$ se obtiene la entrada optima al instante $T-1$:

$$u^0(T-1) = u^0(T-1, x(T-1))$$

Con esta se puede calcular $V(T-1, x(T-1))$, sustituirla en la ecuación de Bellman y seguir iterativamente en el calculo de las entradas de control. Es decir que, empezando del instante $T-1$ y procediendo hacia atrás en el tiempo se puede calcular la secuencia optima de control:

$$u^0(k) = u^0(k, x(k)), \quad k \in [t_0, T)$$

Resumiendo; se ha introducido el Principio de Optimalidad que proporciona una propiedad para la optimalidad de una secuencia de control, luego a través de la ecuación de Bellman ha sido encontrado un criterio para iterativo para el calculo de una secuencia de control que minimize el funcional de coste.

La ecuación de Bellman es la base para la resolución de problemas de optimización como, por ejemplo, los que lleva a los controladores basados en la ecuación de Riccati. De echo también el problema del control predictivo se puede ver una aplicación del mismo principio. El problema para el uso directo de la ecuación de Bellman para el control óptimo de sistemas híbridos es que la naturaleza discreta de las variables conlleva una complejidad prohibitiva en tiempo real, como ya dicho. Sin embargo la se puede utilizar, desde un punto de vista conceptual, para la búsqueda de una solución aproximada, calculada solo en algunos de los puntos del espacio estado-entrada. Luego, bajo la hipótesis de una cierta regularidad de la solución, se puede utilizar el conjunto de soluciones para interpolar las entradas de control donde no haya sido calculada. Estos métodos de control que emplean una malla de puntos en el espacio y interpolación han demostrado proporcionar buenos resultados en aplicaciones practicas. La particularidad en este artículo es la forma de la malla que, en vez de la clásica rejilla, emplea un conjunto de puntos situados en circunferencias concéntricas, como ilustrado a continuación.

El método con malla de discretización será ilustrado mostrando su aplicación al problema de control de los niveles de dos tanques con dos conexiones a diferentes altura. El hecho de que haya las dos conexiones, que permiten un flujo de liquido entre los dos tanques, conlleva una natura híbrida del sistema. En efecto la variación del nivel de cada tanque depende no solo de la diferencia entre los dos niveles, sino también del hecho de que estos se encuentren mas abajo o mas arriba respecto a las alturas de conexión. Además hay una válvula de descargo en cada tanque, que permite la salida del liquido y dos válvulas que regulan los flujos de entrada y representan las entradas controlables del sistema. Además, mientras que la valvula de entrada del primer tanque puede variar con continuidad entre el valor máximo y el mínimo, es decir flujo nulo, la del segundo es del tipo todo-nada. Es decir que el flujo en entrada al segundo tanque puede tener solo dos valores, cero o flujo máximo, así que también las variables de control presentan ambos los comportamientos continuo y discreto.

La dinámica del sistema es no lineal y, como dicho, depende del hecho de que los niveles estén arriba o abajo de las alturas de conexión. Se indiquen con h_3 y h_4 las altitudes de las conexiones mas baja y mas alta respectivamente. Se suponga que los dos niveles se encuentren ambos mas arriba de h_4 . Las ecuaciones en el espacio de estados son:

$$\begin{aligned}
 h_1(t+1) &= h_1(t) + \\
 & T \frac{-\alpha \sqrt{h_1(t)-h_2(t)} - \beta \sqrt{h_1(t)-h_2(t)} - \gamma_1 \sqrt{h_1(t)+u_c}}{A_1} \\
 h_2(t+1) &= h_2(t) + \\
 & T \frac{\alpha \sqrt{h_1(t)-h_2(t)} + \beta \sqrt{h_1(t)-h_2(t)} - \gamma_2 \sqrt{h_2(t)+u_d}}{A_2}
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\text{si } h_1 > h_4, \quad h_2 > h_4$$

donde con h_1 y h_2 se indican los niveles del primer y segundo tanque, con h_4 , h_3 las altitudes de la conexiones, T es el tiempo de muestreo, α , β , γ_1 , γ_2 son las constantes de proporcionalidad entre los niveles y los flujos de la conexión mas alta, mas baja, de salida del primer tanque y de salida del segundo tanque respectivamente. Además u_c es el valor del flujo (continuo) en entrada al primer tanque, u_d el flujo (discreto; todo-nada) del segundo y, finalmente, A_1 , A_2 las superficies de base de los tanques.

La 12 es, como dicho la dinámica no lineal valida cuando los niveles se encuentran mas arriba de h_4 , la conexión mas alta. A continuación se usara el modelo linealizado, aunque el método pueda ser aplicado a sistemas híbrido con dinámicas no lineales. Los términos afectados de la linealización son las raíces cuadradas, que tienen que ser sustituidos con los mismos termino, pero sin raíz, simplemente. Así el modelo completo es los propuesto a continuación:

$$h_1(t+1) = h_1(t) + T \frac{-\alpha q_{c4} - \beta q_{c3} - \gamma_1 q_{o1} + u_c}{A_1} \quad (13)$$

$$h_2(t+1) = h_2(t) + T \frac{\alpha q_{c4} + \beta q_{c3} - \gamma_2 q_{o2} + u_d}{A_2}$$

donde:

$$\begin{cases} q_{c4} = h_1(t) - h_2(t) \\ q_{c3} = h_1(t) - h_2(t) \\ q_{o1} = h_1(t) \\ q_{o2} = h_2(t) \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} h_1(t) > h_4, \\ h_2(t) > h_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_{c4} = h_1(t) - h_4 \\ q_{c3} = h_1(t) - h_2(t) \\ q_{o1} = h_1(t) \\ q_{o2} = h_2(t) \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} h_1(t) > h_4, \\ h_4 > h_2(t) > h_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_{c4} = h_1(t) - h_4 \\ q_{c3} = h_1(t) - h_3 \\ q_{o1} = h_1(t) \\ q_{o2} = h_2(t) \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} h_1(t) > h_4, \\ h_2(t) < h_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_{c4} = h_4 - h_2(t) \\ q_{c3} = h_1(t) - h_2(t) \\ q_{o1} = h_1(t) \\ q_{o2} = h_2(t) \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} h_4 > h_1(t) > h_3, \\ h_2(t) > h_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_{c4} = 0 \\ q_{c3} = h_1(t) - h_2(t) \\ q_{o1} = h_1(t) \\ q_{o2} = h_2(t) \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} h_4 > h_1(t) > h_3, \\ h_4 > h_2(t) > h_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_{c4} = 0 \\ q_{c3} = h_1(t) - h_3 \\ q_{o1} = h_1(t) \\ q_{o2} = h_2(t) \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} h_4 > h_1(t) > h_3, \\ h_2(t) < h_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_{c4} = h_4 - h_2(t) \\ q_{c3} = h_3 - h_2(t) \\ q_{o1} = h_1(t) \\ q_{o2} = h_2(t) \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} h_1(t) < h_3 \\ h_2(t) > h_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_{c4} = 0 \\ q_{c3} = h_3 - h_2(t) \\ q_{o1} = h_1(t) \\ q_{o2} = h_2(t) \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} h_1(t) < h_3 \\ h_4 > h_2(t) > h_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_{c4} = 0 \\ q_{c3} = 0 \\ q_{o1} = h_1(t) \\ q_{o2} = h_2(t) \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} h_1(t) < h_3 \\ h_2(t) < h_3 \end{cases}$$

Queda entonces evidente la naturaleza híbrida del sistema dos tanques. Así el sistemas toma la forma;

$$x(t+1) = A^i + B^i u(t) + f^i \quad \text{para } x(t) \in \mathcal{X}_i \quad (14)$$

Considerando completamente accesible el estado. Desde ahora se adoptara esta notación para describir la dinámica del sistema. Se note que no todos los valores de equilibrio pueden ser mantenidos; de echo el objetivo de control sera el nivel del segundo tanque. Así, por cada valor de nivel, puede haber dos configuraciones de entradas que lo mantiene o solo una o ninguna. Es decir que, dado un valor de referencia por el nivel del segundo tanque, esto podrá ser mantenido por $u_d = u_d^{MAX}$ y $u_c = u_c^{e1}$, o por $u_d = 0$ y $u_c = u_c^{e2}$, si son admisibles. A continuación se tratara el problema del control predictivo.

5. Control Predictivo con malla de discretización

Supongamos ahora que se pueda conocer el cost-to-go V_∞ en cada punto del espacio de estados, es decir el coste de la trayectoria optima para llegar al valor de referencia a regimen. Bajo esta hipótesis, en cada punto del espacio se puede calcular el valor del control óptimo como la entrada tal que sea mínimo el coste $V_\infty(x(t))$, igual a;

$$\begin{aligned} & \min_{u(t)} \{ (x(t+1) - w)' Q (x(t+1) - w) + \\ & (u(t) - u_w)' R (u(t) - u_w) + V_\infty(x(t+1)) \} \\ & = \min_{u(t)} \{ (A^i x(t) + B^i u(t) + f^i - w)' Q (A^i x(t) + \\ & B^i u(t) + f^i - w) + (u(t) - u_w)' R (u(t) - u_w) + \\ & V_\infty(A^i x(t) + B^i u(t) + f^i) \} \end{aligned}$$

donde w es el valor de la referencia y u_w la entrada necesaria para mantener ese valor. Además, un vez resuelto el problema de minimización respecto a $u(t)$, se ha encontrado el valor de $V_\infty(x)$,

es decir el cost-to-go en el punto x . Ese coste, dado por conocido, puede ser calculado de esta forma. Así que se podría asociar coste cero al equilibrio de referencia y calcular entrada óptima y coste en todo los puntos cuya trayectoria óptima llega al equilibrio en un paso. Luego utilizar el coste en este conjunto de puntos para resolver el problema en dos pasos, después por los puntos con trayectoria óptima a tres pasos y así hasta que se haya cubierto todo el espacio de estados. Por el principio de optimalidad los valores de control obtenidos son las entradas óptimas; además el cálculo puede ser ejecutado fuera de línea y en línea solo habría que aplicar el valor asociado al estado y el tiempo de cálculo sería prácticamente nulo. El problema es que los puntos a evaluar son infinitos en el espacio continuo de estados, así que la análisis necesitaría un tiempo infinito. Lo que se hace entonces es discretizar el espacio de estados, evaluando el coste y la entrada en un conjunto finito de puntos y interpolando los valores donde no han sido determinados expresamente.

Ilustramos ahora el algoritmo para el cálculo off-line de las superficies de control.

5.1. Referencias admisibles

Antes de todo hay que determinar los niveles de equilibrio posibles que serán considerados las referencias admisibles. Los equilibrios también tienen que ser discretizados, así que, definido un δ_w . La referencia a analizar son relativas al nivel del segundo tanque;

$$w_2^e = x_{2,min} + m_w \delta_w \quad \text{para } m_w = 0, \dots, M_w \quad (15)$$

con

$$M_w \delta_w = x_{2,max}$$

La dimensión de w_2 no es la misma del estado es decir 2, sino 1, debido al hecho de que no se pueden estabilizar los dos estados a valores queridos a causa de la naturaleza discreta de u_d . Para cada valor se aplica un algoritmo que evalúa su admisibilidad con entrada discreta cerrada; es decir si el nivel del *segundo* tanque puede ser mantenido por un oportuno valor de la entrada continua y con entrada discreta a valor mínimo; $u_d^e = u_d^{min}$, $u_c^e = u_c(w_2^e, u_d^{min})$ y $w_1^e = w_1(w_2^e, u_d^{min})$. Lo mismo para la admisibilidad con entrada discreta al abierta; $u_d^e = u_d^{max}$ y $u_c^e = u_c(w_2^e, u_d^{max})$ y $w_1^e = w_1(w_2^e, u_d^{max})$. Hay que clarecer que evaluar la admisibilidad de w_2 significa buscar los valores de control que permiten mantener el segundo nivel al equilibrio, sea cual sea lo del primer tanque. De esta manera los potenciales equilibrio a evaluar son $2(M_w + 1)$. Prácticamente para cada par

(w_2^e, u_d) se estudia la admisibilidad; si el equilibrio es posible se calculan los oportunos valores del nivel del primer tanque w_1^e y de la entrada continua u_c^e .

5.2. Malla de discretización

El objetivo es calcular las superficies de control, es decir las funciones que asocian a cada punto del espacio discretizado (malla) los valores de las entradas de control. Esto tiene que ser repetido para cada equilibrio admisible.

Ahora supongamos haber encontrado un valor de estado de referencia $\begin{pmatrix} w_c^e \\ w_d^e \end{pmatrix}$ y la entrada de equilibrio asociada $\begin{pmatrix} u_c^e \\ u_d^e \end{pmatrix}$.

Es necesario definir un malla de discretización, es decir un conjunto discreto de puntos en el espacio de estados.

5.2.1. Rejilla

Una posible elección es una malla con forma de rejilla, es decir los puntos de la malla son $\begin{pmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,j} \end{pmatrix}$ donde

$$x_{1,i} = x_{1,min} + i \delta_1 \quad \text{para } i = 0, \dots, N_1 \quad (16)$$

$$x_{2,j} = x_{2,min} + j \delta_2 \quad \text{para } j = 0, \dots, N_2$$

con

$$N_1 \delta_1 = x_{1,max}$$

$$N_2 \delta_2 = x_{2,max}$$

También la entrada continua tiene que ser discretizada

$$u_{c,k} = u_{c,min} + k \delta_c \quad \text{para } k = 0, \dots, N_c \quad (17)$$

con

$$N_c \delta_c = u_{c,max}$$

mientras, obviamente, la entrada discreta puede tener los dos valores mínimo y máximo

$$u_{d,b} = b u_{d,max} \quad \text{para } b = \{0, 1\} \quad (18)$$

Como mostrado a continuación este tipo de malla lleva a un controlador que no proporciona un buen comportamiento a régimen. Es decir que una vez que el estado ha sido llevado acerca del equilibrio, hay un error constante que no desaparece.

Esto es debido al hecho de que el algoritmo proporciona valores de control que son aproximaciones de los óptimos. Los efectos de los errores debidos a esta aproximación, tolerables cuando el estado se encuentra lejos del equilibrio, conllevan la estabilización hacia valores diferentes del deseado. En otras palabras; cuando el estado esta lejos de la referencia, las entradas de control son grandes (se note que en realidad son las diferencias entre las entradas de equilibrio y las proporcionadas al sistema a ser grandes) y un pequeño error no tiene efecto relevante. En contrario cuando el sistema se halla cerca de la referencia y las entradas son pequeñas (es decir que la diferencia con el valor de las entradas de equilibrio tiende a cero) el error predomina conllevando un mal seguimiento. Por otro lado elegir una malla mas fina, con valores de δ mas pequeños, incrementa el coste de calculo.

5.2.2. Rejillas de nivel

La idea es utilizar mas precision donde mas es necesaria, es decir en el calculo de las entradas para los punto cercanos a la referencia. Un método podría ser lo de usar niveles multiples de mallas de control, es decir mallas mas finas por las regiones mas cercanas al equilibrio. Lo que se hace en este caso es resolver el problema del calculo de las superficies de control para el espacio total utilizando δ relativamente grandes. Se obtiene una estructura gruesa, primer nivel de control;

$$x_{1,i}^1 = x_{1,min} + i \delta_1^1 \quad \text{para } i = 0, \dots, N_1^1 \quad (19)$$

$$x_{2,j}^1 = x_{2,min} + j \delta_2^1 \quad \text{para } j = 0, \dots, N_2^1$$

con

$$N_1^1 \delta_1^1 = x_{1,max}$$

$$N_2^1 \delta_2^1 = x_{2,max}$$

La entrada discretizada a través de una δ de primer nivel

$$u_{c,k}^1 = u_{c,min} + k \delta_c^1 \quad \text{para } k = 0, \dots, N_c^1 \quad (20)$$

con

$$N_c^1 \delta_c^1 = u_{c,max}$$

mientras la entrada discreta sigue pudiendo tener los dos valores mínimo y máximo. Ahora se repite el calculo de la estructura considerando solo una region alrededor del equilibrio. Por ejemplo se puede usar el cuadrado de la rejilla de primer nivel que contiene la referencia, o algunos de estos

cuadrados. De todas formas se elige nuevos $x_{1,min}^2, x_{2,min}^2, \delta_1^2, \delta_2^2, \delta_c^2$, para el segundo nivel. Así se puede seguir utilizando las estructuras de un nivel para encontrar las de nivel mayor, relativos a regiones mas pequeñas alrededor del equilibrio y con mas precision. Es decir que por cada nivel n hay una malla;

$$x_{1,i}^n = x_{1,min}^n + i \delta_1^n \quad \text{para } i = 0, \dots, N_1^n \quad (21)$$

$$x_{2,j}^n = x_{2,min}^n + j \delta_2^n \quad \text{para } j = 0, \dots, N_2^n$$

con

$$N_1^n \delta_1^n = x_{1,max}^n$$

$$N_2^n \delta_2^n = x_{2,max}^n$$

Se note que ahora los valores $x_{1,min}^n, x_{2,max}^n, x_{1,min}^n, x_{2,max}^n$ son diferentes respecto a los de primer nivel pues son los que delimitan la sub-region alrededor de la referencia. En contrario la entrada tiene que ser analizada en todos los valores entre el mínimo $u_{c,min}$ y el máximo $u_{c,max}$ iguales por todos los nivel. Lo que cambia es el δ_c^n , mas pequeño conforme sea mayor el nivel, para garantizar precision creciente. Así;

$$u_{c,k}^n = u_{c,min} + k \delta_c^n \quad \text{para } k = 0, \dots, N_c^n \quad (22)$$

con

$$N_c^n \delta_c^n = u_{c,max}$$

En fase de aplicación en cada instante se busca cual es el nivel mayor que contiene el estado presente y se utiliza la relativa superficie de control, es decir la mas fina posible. En esta manera la precision y la complejidad es concentrada para regiones mas criticas, las mas cercana al equilibrio.

5.2.3. Malla circular

Una otra estrategia, que se utiliza a continuación, es usar una malla circular. Dado un valor de referencia, se definen una serie de círculos centrados en el equilibrio. Lo puntos de malla son dados por las intersección entre las circunferencias y las rectas pasantes por el centro con diferentes ángulos de inclinación. Es decir que, definido un valor δ_θ , los estados discretos están en lo círculos con distancia angular δ_θ entre uno y el otro. De esta manera las coordenada de los puntos de malla son el radio de la circunferencia r_i y el ángulo θ_j . Para que haya una mayor concentración de puntos de análisis en la region cercana a la referencia, el incremento de radio de los círculos crece al alejarse

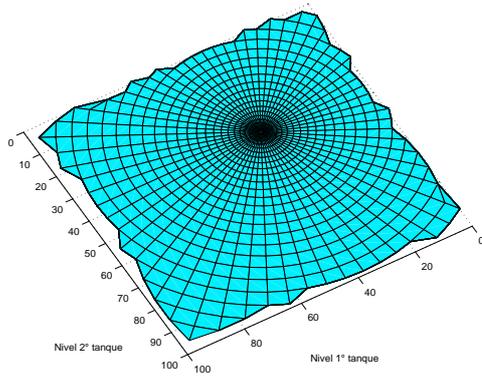


Figura 1: Malla circular por la referencia $w = [38,833 \ 37]'$

del centro, como mostrado a continuación, según una ley cuadrática. Así el radio del i -ésimo círculo será;

$$r_i = c i^2 \quad \text{para } i = 1, \dots, N_r \quad (23)$$

donde se c es una constante de ajuste y N_r el oportuno índice, es decir lo relativo a la mayor circunferencia que tenga puntos de la malla internos al espacio de estados. El otro índice que caracteriza un punto es el relativo al ángulo de la recta que interceptando el círculo lo genera, el ángulo δ_j ;

$$\delta_j = j \delta_\theta \quad \text{para } j = 0, \dots, N_\theta \quad (24)$$

donde N_θ es tal que

$$(N_\theta + 1) \delta_\theta = 2\pi \quad (25)$$

En la figura 1 se muestra un ejemplo de malla circular de discretización del estado, por el equilibrio admisible $w = [38,833 \ 37]'$.

También la entrada continua es discretizada usando un valor δ_u^r que puede ser dependiente del radio de la circunferencia, es decir de la distancia del centro. Esto por el objetivo de concentrar mayor precisión donde mas haga falta; así se podría usar δ_u^r mas pequeño an el análisis de los puntos de las circunferencia con radio pequeño y la se incrementa e medida que el radio crezca. En alternativa se puede emplear un δ_u^r fijo por todos los círculos. Así;

$$u_{c,k}^r = u_{c,min} + k \delta_u^r \quad \text{para } k = 0, \dots, N_u^r \quad (26)$$

donde

$$N_c^r \delta_c^r = u_{c,max} \quad (27)$$

A continuación se empleará esta estructura circular para la búsqueda de una aproximación de la secuencia de control óptimo calculando en cada punto de la malla la entrada (discretizada) que minimize la suma del coste a un paso y la solución hasta el final en el punto de llegada.

5.3. Interpolación

El hecho de que el punto al instante sucesivo pueda ser un estado no perteneciente a la rejilla conlleva la necesidad de introducir un criterio de interpolación para calcular el valor del coste. Además, también en fase de aplicación del control, hace falta recurrir a dicha interpolación para calcular las entradas de control cuando el estado corriente no esta en la malla.

Supongamos querer calcular el valor del coste en un punto que no se encuentra en la malla de discretización. Esto será contenido en un poliedro definido por 4 puntos de la malla si esta es de forma de rejilla. En efecto el espacio de estados puede ser particionado en celdas, con los estados discretizado como vertices. Se considera como valor de coste en el punto x interno una media ponderada de los valores de los cuatro puntos de la malla mas cercanos, es decir;

$$V^i(x) = \frac{\left(\frac{V(x_a)}{\|x-x_a\|} + \frac{V(x_b)}{\|x-x_b\|} + \frac{V(x_c)}{\|x-x_c\|} + \frac{V(x_d)}{\|x-x_d\|} \right)}{\frac{1}{\|x-x_a\|} + \frac{1}{\|x-x_b\|} + \frac{1}{\|x-x_c\|} + \frac{1}{\|x-x_d\|}} \quad (28)$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea de un vector y x_a, x_b, x_c, x_d son los puntos de la malla mas cercanos. Los casos al borde del espacio continuo de los estados, es decir en los puntos que no tengan 4 elementos cercanos de la malla, son tratados de forma análoga. En practica se usa la inversa de la distancia euclídea entre el punto x y los punto de la rejilla como coeficientes de ponderación de la media de manera que cuanto mas los puntos están cerca, tanto mayor es el peso.

El mismo criterio de interpolación lo se aplica para el calculo de la entrada continua en fase de control. Es decir que el control, generado por valores del estado que no pertenezcan a la malla de control, es obtenido por medio de los parámetros de ponderación relativos a los estados discretizados mas cercano. Con ese criterio la entrada continua es

$$u_c^i(x) = \frac{\left(\frac{u_c(x_a)}{\|x-x_a\|} + \frac{u_c(x_b)}{\|x-x_b\|} + \frac{u_c(x_c)}{\|x-x_c\|} + \frac{u_c(x_d)}{\|x-x_d\|} \right)}{\frac{1}{\|x-x_a\|} + \frac{1}{\|x-x_b\|} + \frac{1}{\|x-x_c\|} + \frac{1}{\|x-x_d\|}} \quad (29)$$

mientras que por la entrada discreta hay que calcular la media y evaluar el eventual superación

del valor medio de la entrada continua, pues no admite valores diferentes del mínimo y del máximo

$$\begin{cases} u_d^i(x) = u_d^{min} & \text{si } u_d^{temp} \leq \frac{u_d^{min} - u_d^{max}}{2} \\ u_d^i(x) = u_d^{max} & \text{altriment} \end{cases} \quad (30)$$

donde

$$u_d^{temp}(x) = \frac{\left(\frac{u_d(x_a)}{\|x-x_a\|} + \frac{u_d(x_b)}{\|x-x_b\|} + \frac{u_d(x_c)}{\|x-x_c\|} + \frac{u_d(x_d)}{\|x-x_d\|} \right)}{\frac{1}{\|x-x_a\|} + \frac{1}{\|x-x_b\|} + \frac{1}{\|x-x_c\|} + \frac{1}{\|x-x_d\|}}$$

Obviamente el utilizo de un criterio de interpolación que permita una estimación del valor real comporta la presencia de un error. A continuación se proporcionará una condición suficiente para que, a pesar del error añadido, sea garantizada la estabilidad del sistema en bucle cerrado.

5.4. Algoritmo

Se ilustra aquí el esquema del algoritmo empleado para calcular los valores de las entradas de control en los puntos de la malla. Como dicho, se utiliza el principio de optimalidad de Bellman pero analizando solo un conjunto discreto de puntos y interpolando los valores del coste a un paso. El algoritmo;

1. Repetir hasta que no se hayan analizado todas la referencias admisibles.
2. Calculo nuevo equilibrio de referencia;

$$w = \begin{bmatrix} w_1^e \\ w_2^e \end{bmatrix}$$

y entradas de referencia

$$u^e = \begin{bmatrix} u_c^e \\ u_d^e \end{bmatrix}$$

3. Inicialización estructuras;

$$V(x_{i,j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } r_i = 0 \\ \infty & \text{altriment} \end{cases}$$

$$u(x_{i,j}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{changes} = 1$$

La variable *changes* guarda el numero de cambios en cada iteración.

4. Repetir hasta que *changes* no sea 0.

$$\text{changes} = 0$$

5. Análisis de todos los puntos de la malla, empezando por los círculos con radio menor;

$$V^{new}(x_{i,j}) = \min_u \{ (x(t+1) - w)'Q(x(t+1) - w) + (u - u^e)'R(u - u^e) + V_i(x(t+1)) \}$$

donde $V_i(x(t+1))$ es el valor del coste interpolado en el punto $x(t+1)$.

6. Si el nuevo valor de coste $V^{new}(x_{i,j})$ es menor lo se sustituye;

$$V(x_{i,j}) = V^{new}(x_{i,j})$$

también la entrada de control relativa;

$$u(x_{i,j}) = \arg(V^{new}(x_{i,j}))$$

y se incrementa el contador de los cambio de la iteración corriente

$$\text{changes} = \text{changes} + 1$$

7. Salir.

Para computar el valor el valor $x(t+1)$ se usa el modelo de sistema 14. De esta forma por cada referencia admisible se repite el análisis de los puntos de la malla hasta que no haya cambios; así que los valores que quedan en las estructuras son los óptimos obtenibles. El algoritmo procede por iteraciones; al primer paso los puntos de la malla que se hallan cerca del equilibrio, o que de todas maneras pueden alcanzar el círculo con radio menor, encuentran el valor óptimo. Los puntos mas lejanos, y los que necesitan una secuencia de pasos para llevar el estado cerca de la referencia, llegan a su valor definitivo en los pasos sucesivos, debido al hecho de que el valor de coste mínimo depende del coste en el punto de llagada.

5.5. Análisis de estabilidad

El hecho de utilizar una malla de discretización del estado conlleva la introducción de un error de discretización, es decir que el coste calculado fuera de linea a través la ejecución del algoritmo ilustrado difiere del coste real. Prácticamente; si en fase de aplicación del control se calculara el coste de la evolución temporal del sistema;

$$V(x(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} ((x(t+k+1) - w)'Q$$

$$(x(t+k+1) - w) + (u(t+k) - u^e)'R(u(t+k) - u^e)) \quad (31)$$

esto no será el mismo calculado.

El objetivo es, dado un modelo de error de interpolación, buscar una cota de propagación del mismo que garantice que el coste real siga cumpliendo las condiciones de *estabilidad de Lyapunov*.

Dada una cualquiera función $V(x)$ del estado si esta cumple las condiciones;

1. La función $V(x(t))$ toma valor cero solo en el origen;

$$V(x(t)) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

2. La función $V(x(t))$ toma valores positivos en cada punto diferente del origen;

$$V(x(t)) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

3. La variación de $V(x(t))$ entre dos instantes sucesivos es negativa, es decir que $V(x(t))$ siempre decrece;

$$V(x(t)) > V(x(t+1))$$

entonces el sistema es asintóticamente exponencialmente estable y $V(x(t))$ es una función de Lyapunov del sistema.

Esto significa que, si se encuentra una función del estado positiva, excepto en el origen donde toma valor cero, siempre decreciente, el sistema tiende asintóticamente al origen mismo.

Se define un modelo de propagación del error de interpolación; se suponga que en cada punto de la malla sea definida una cota máxima del error $\delta V(x_{i,j})$, es decir que el coste real de aplicación del control en los puntos de la malla difiere del calculado de una cantidad cuyo valor absoluto no supera la cota. El error en los puntos internos dependerá de los errores en los puntos de la malla, y se supone que crezca al aumentar de la distancia. Es decir que, el error al interno de una celda delimitada por 4 puntos de la malla crece al alejarse de los puntos mismos. Se define el siguiente modelo de error por los puntos interno;

$$\delta V(x) = \left(1 + c_v \min_{i=a,b,c,d} \|x - x_i\|\right) \max_{i=a,b,c,d} \delta V(x_i) \quad (32)$$

donde x_a, x_b, x_c, x_d son los puntos de malla y c_v el parámetro de incremento lineal del error máximo. Para que la cota sea conservativa se ha considerado el máximo entre las cotas en los puntos discretos, como si en todos los puntos de malla hubiera el error máximo. El coste en un punto interno es acotado por el valor interpolado más la cota del error, es decir,

$$V^i(x) - \delta V(x) \leq V(x) \leq V^i(x) + \delta V(x)$$

Definido el modelo de error se puede calcular la cota en los puntos de malla. El coste es;

$$V(x_{i,j}(t)) = l(x_{i,j}(t), u(x_{i,j}(t))) + V^i(x(t+1)) + e_v(x(t+1))$$

donde $V^i(x(t+1))$ es aquello interpolado en el instante sucesivo, obtenido con la definición 28, $l(x_{i,j}(t), u(x_{i,j}(t)))$ es el coste a un paso y $e_v(x(t+1))$ es el error acotado por la $\delta V(x(t+1))$;

$$-\delta V(x(t+1)) \leq e_v(x(t+1)) \leq \delta V(x(t+1))$$

De esta forma la cota del error en el punto de malla $x_{i,j}(t)$ es dada por la cota de interpolación en el punto al instante sucesivo;

$$\delta V(x_{i,j}(t)) = \delta V(x(t+1))$$

Ahora inicializando la cota en el círculo más pequeño, la se puede calcular en cada punto de la malla de discretización. Se puede ver como la cota es válida solo en los puntos de malla, es decir que es válida para los puntos en los que se ha aplicado el algoritmo de minimization. En fase de aplicación el estado no se halla, en general, en la malla; por esto hay que interpolar la entrada como expresado en 29 y 30 y añadir otro error. Así que en un genérico punto, no perteneciente a la malla, la cota es dada por la 32.

Se utiliza ahora la cota para verificar que las condiciones de Lyapunov siguen siendo cumplidas y sigue probada la estabilidad. Considérese la expresión del coste a un paso como la diferencia entre los coste real en instantes sucesivos; el objetivo es encontrar una cota inferior y demostrar que esta es positiva.

$$\begin{aligned} l(x(t), u(x(t))) &= V(x(t)) - V(x(t+1)) \\ &\geq V_i(x(t)) - \delta V(x(t)) - V_i(x(t+1)) - \\ &\delta V(x(t+1)) \geq 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Si se prueba que la segunda desigualdad de 33 es cumplida en todo el espacio del estado, sigue la estabilidad del sistema controlado. En cuanto no se puede evaluar tal desigualdad en todo el espacio, lo se hace en los puntos críticos, es decir donde es más probable que no sea cumplida; en

los estados a mayor distancia de los puntos de la malla, donde el error admitido es mayor.

Además en su entorno la cota decrece. Se puede ver que en estos puntos la cota de error es la máxima de cada celda y por la definición 32 se puede suponer que la cantidad $\delta V(x(t+1))$

Dada una celda delimitada por r_i, r_{i+1} , radios menor y mayor respectivamente, y δ_j, δ_{j+1} ángulos, definidos por 23 y 24, a través de simples consideraciones geométricas se pueden calcular radio y ángulo del punto equidistante de los 4 de la malla. El radio es

$$r_{i,j}^{eq} = r_i \cos(\theta) + \frac{r_{i+1} - r_i}{2 \cos(\theta)} + r_i \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}$$

y el ángulo

$$\delta_{i,j}^{eq} = \delta_i + \theta$$

donde

$$\theta = \frac{\delta_\theta}{2}$$

Así que se puede calcular;

$$V_i(x_{i,j}^{eq}(t)) - \delta V(x_{i,j}^{eq}(t)) - V_i(x(t+1)) - \delta V(x(t+1)) \quad (34)$$

donde con $x_{i,j}^{eq}$ se indica el punto equidistante interno a una genérica celda. Si el valor obtenido en cada estado crítico es positivo, también lo es el coste a un paso y la estabilidad es probada.

6. Simulaciones

En este capítulo se ilustran los resultados de la aplicación del control predictivo al sistema doble tanque.

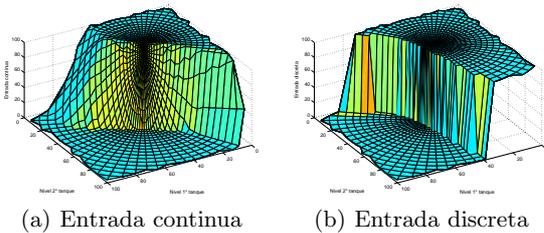


Figura 2: Superficies de control por la referencia $w = [38,833 \quad 37]'$

El modelo utilizado para el cálculo de las estructuras de control y para las simulaciones es el 14 con los siguientes parámetros;

- Nivel mínimo 1º tanque: $h_1^{min} = 0 \text{ cm}$

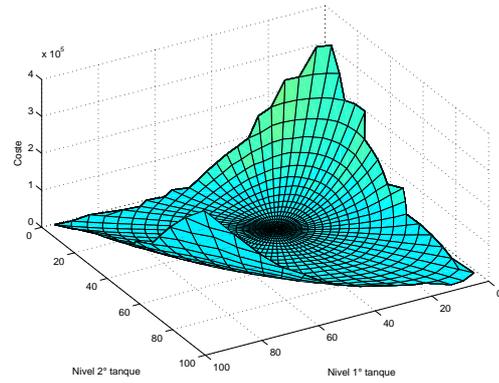


Figura 3: Superficie de coste por la referencia $w = [38,833 \quad 37]'$

- Nivel máximo 1º tanque: $h_1^{max} = 100 \text{ cm}$
- Nivel mínimo 2º tanque: $h_2^{min} = 0 \text{ cm}$
- Nivel máximo 2º tanque: $h_2^{max} = 100 \text{ cm}$
- Nivel 1º conexión entre tanques: $h_3 = 20 \text{ cm}$
- Nivel 2º conexión entre tanques: $h_4 = 30 \text{ cm}$
- Constante del caudal de la 1º conexión: $\beta = 4 \text{ cm}^2 \backslash s$
- Constante del caudal de la 2º conexión: $\alpha = 2 \text{ cm}^2 \backslash s$
- Constante del caudal de descarga del 1º tanque: $\gamma_1 = 2 \text{ cm}^2 \backslash s$
- Constante del caudal de descarga del 2º tanque: $\gamma_2 = 3 \text{ cm}^2 \backslash s$
- Superficie 1º tanque: $A_1 = 12 \text{ cm}^2$
- Superficie 2º tanque: $A_1 = 10 \text{ cm}^2$
- Tiempo de muestreo: $T = 1 \text{ s}$

y los relativos a la discretización;

- Constante de la ley de incremento angular en 23: $c_r = 0,1$
- Incremento angular de la malla en 24: $\delta_\theta = \frac{\pi}{32}$
- Incremento para el cálculo de las referencias admisibles en 15: $\delta_w = 1$

El algoritmo de cálculo proporciona las estructuras de control. Se muestran algunas de estas.

Por los valores de entrada discreta en 0 el equilibrio de segundo nivel admisible se halla entre 0 y 13, mientras que por entrada discreta máxima

lo valores limites de referencia son 26 y 38. Obviamente con nivel del primer tanque y entrada continua de referencia oportunos. Por ejemplo; en figura 2 son representadas las superficie de control de las entradas, continua y discreta, por el valor de referencia $w = [38,833 \ 37]'$.

La figura 3 es el coste obtenido.

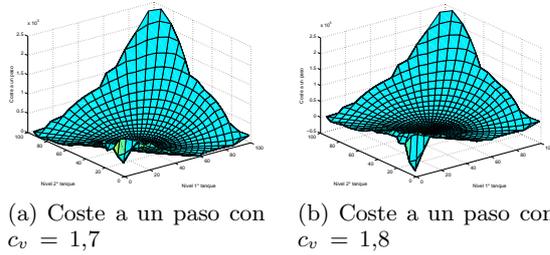


Figura 4: Superficies de limite del coste a un paso por la referencia $w = [38,833 \ 37]'$

Por lo que concierne la análisis de estabilidad, por cada equilibrio admisible se calculan los costes a un paso en los puntos críticos, como explicado en 33; si en ningún punto ese coste es negativo hay estabilidad. Se puede repetir la prueba variando la constante de propagación c_v de la definición 32, hasta encontrar el máximo (o mas bien un valor proximo al máximo) que garantiza estabilidad. Repitiendo el proceso de computación se comprueba el hecho de que cada equilibrio admisible admite un valor máximo c_v que puede ser muy diferente entre uno y otro.

El objetivo de la análisis de estabilidad es encontrar el c_v que garantice el cumplimiento de la 33 por cada equilibrio. Por ejemplo, la referencia $w = [38,833 \ 37]'$ admite hasta $c_v = 1,7$ cumpliendo la condición de estabilidad.

En figura 4 se muestran las superficies de los costes a un paso en los casos limites; a la izquierda se puede ver la relativa al valor $c_v = 1,7$ y a la derecha la obtenida con $c_v = 1,8$. Se puede notar como al pasar de un valor al otro se pierda la estabilidad. Esto significa que se puede tolerar un error que crece del 170% por cada cm , al alejarse de los puntos de la malla. Repitiendo el procedimiento por cada equilibrio admisible se obtiene que el valor critico común es $c_v = 0,5$.

Se muestran a continuación las evoluciones temporales del sistema controlado.

La figura 5(a) representa los niveles de los tanque y las respectivas señales de referencia, que pasa de 27 a 37 en los primeros 100 segundos, de 1 a 11 en los sucesivos 100 por el 2º tanque. La referencia del 1º tanque es la tal que el equilibrio sea admisible. Las entrada de control son las de 5(b); se puede notar como en el segundo 50 la entrada discreta toma, por solo un segundo, el valor bajo

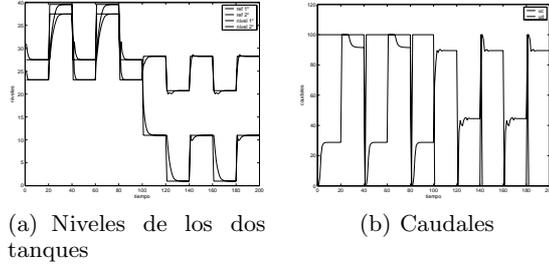


Figura 5: Salidas y entradas con referencias constantes

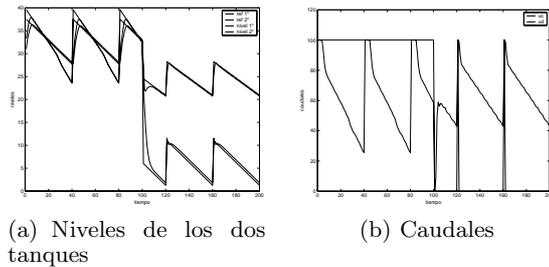


Figura 6: Salidas y entradas con referencias a diente de sierra

a pesar que los equilibrios 27 y 37 sean mantenido por entrada u_d^{max} . Lo mismo, pero al revés, ocurre por $t = 125s$ y $t = 175$, cuando la u_d toma por un instante el valor alto. Esto para que los valores de regimen sean alcanzados mas rápidamente.

Cuando los valores de referencia no son los calculados como equilibrio admisibles, se interpolan los dos mas cercano y se utilizan las entradas ponderadas con el inversa de la distancias. El resultado puede ser observado en las figuras 6, donde la señal de referencia varia constantemente barriendo todos los equilibrios consentidos.

Finalmente se proporciona una señal que varia de forma sinusoidal en valores admisibles; los resultados son representados en 7

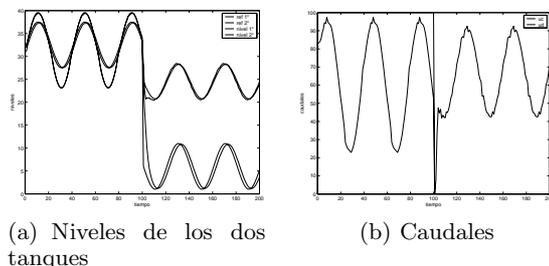


Figura 7: Salidas y entradas con referencias sinusoidales

7. Conclusiones

En este artículo ha sido ilustrado un método para la resolución del problema de control predictivo de sistemas híbridos. Debido a la prohibitiva complejidad que conlleva el resolver analíticamente el problema al crecer del horizonte, se ha utilizado aquí una discretización del espacio de los estados. La estructura de discretización empleada es una malla circular que permite concentrar más precisión donde más es precisa. Una vez discretizados los estados y las entradas, ha sido aplicado un criterio de optimización, la *programación dinámica*, basada en el principio de optimalidad de Bellman, para calcular una aproximación discreta de la solución óptima. Durante el proceso de cálculo off-line de las estructuras, como en fase de aplicación del control, se ha usado un criterio de interpolación para estimar los valores de interés en los puntos que no pertenecen a la malla. Además ha sido considerado el error que dicha interpolación añade y se ha ilustrado un criterio que permite calcular un límite del índice de crecimiento de tal error que garantice la preservación de la estabilidad. Finalmente el control predictivo sub-óptimo con horizonte infinito ha sido aplicado a un modelo de dos tanques, que presenta estados y entradas continuas y discretas con restricciones y se ha evaluado la estabilidad del bucle cerrado. Las simulaciones muestran los buenos resultados obtenidos en fase de aplicación.

Referencias

- [1] Alur R., T. Dang, & F. Ivancic. Reachability analysis of hybrid systems via predicate abstraction. In *Hybrid Systems: Computation and Control, Fifth International Workshop*, LNCS 2289, 35-48. Springer-Verlag, 2002.
- [2] Alur R., T. Dang, & F. Ivancic. Counterexample guided predicate abstraction of hybrid systems. In *Ninth International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems*, LNCS 2619, 208-223. Springer-Verlag, April 2003.
- [3] Alur R., T. Dang, & F. Ivancic. Progress on reachability analysis of hybrid systems via predicate abstraction. In *Hybrid Systems: Computation and Control, Sixth International Workshop*, LNCS 2623, 35-48. Springer-Verlag, April 2003.
- [4] Alur R., T. Henzinger, G. Laferriere & G. J. Pappas. Discrete Abstraction of Hybrid Systems. In *Proc. IEEE*, Vol. 88, NO. 7, July 2000.
- [5] Bemporad A., F. Borrelli, & M. Morari. Piecewise linear optimal controllers for hybrid systems. In *American Control Conference*, Chicago, 1190-1194, 2000.
- [6] Bengua S. C., & R. A. DeCarlo. Optimal Control of Switching systems. In *automatica*, 41, 11-27.
- [7] Hedlund S., & A. Rantzer. Optimal Control of Hybrid Systems. In *Proc. of the 38th Conference on Decision and Control*, Phoenix, Arizona USA, December 1999.
- [8] Heemels W. P. M. H., De Schutter B., & Bemporad A. (2001). Equivalence of hybrid dynamical systems. *Automatica*, 37(7), 1085-1091.
- [9] Laferriere G., G. J. Pappas, & S. Sastry. O-Minimal Hybrid Systems.
- [10] Potocnik B., A. Bemporad, F. D. Torrisi, G. Music, & B. Zupanovic. Hybrid modelling and optimal control of a Multiproduct Batch Plant. In *Control Engineering Practice 12*, 1127-1137, 2004.
- [11] Yazarel H., & G. J. Pappas. Geometric Programming Relaxation for Linear Systems Reachability. In *Proc. American Control Conference 2004*.