

METODOLOGÍA HÍBRIDA PARA RESOLVER EL CONTROL PREDICTIVO DE SISTEMAS (LINEALES) AFINES A TRAMOS

Miguel E. Peña; Eduardo F. Camacho; Sandra Piñón
mpena@inaut.unsj.edu.ar; eduardo@esi.us.es; spinon@cartuja.us.es
Departamento de Sistemas y Automática (ESI)
Universidad de Sevilla

Resumen

Este artículo presenta un procedimiento híbrido para resolver el Control Predictivo (MPC) de sistemas (lineales) afines a tramos (PWA). El procedimiento utiliza los conceptos de conjuntos alcanzables, conjuntos controlables y gráficos de transición de estados (STG) para reducir el número de problemas de programación cuadrática (QP) necesarios para obtener un óptimo global. El algoritmo propuesto reduce considerablemente el número de exploraciones que se necesitan durante la búsqueda de un mínimo global y de esta forma el tiempo requerido por el MPC se reduce a una pequeña fracción del tiempo que se requiere para el problema original.

Palabras clave: Control Predictivo, sistemas híbridos, sistemas (lineales) afines a tramos.

1 INTRODUCCION

En los últimos años se han reportado diferentes métodos de análisis y diseño de controladores para sistemas híbridos (HS) [10], [2]. Entre estos, la clase de controladores óptimos es una de las más estudiadas. La mayor cantidad de los trabajos que se han publicado tratan sobre el control de sistemas híbridos (HS) continuos y el cálculo de soluciones óptimas o subóptimas [5], [8]. Aunque algunas técnicas para determinar leyes de control por realimentación parecen ser muy promisorias, muchas de ellas sufren problemas de dimensión. El control predictivo (MPC) ha sido aceptado como estándar para resolver problemas de control complejos con restricciones para la industria de procesos. Pero por otra parte, aún hoy existen algunas limitaciones para que los procesos controlados por MPC puedan ser utilizados. Esto se debe a que la optimización en línea requiere una gran cantidad de cálculo. Por esta razón se han deducido varias soluciones explícitas para el problema de control MPC de sistemas lineales con restricciones, las cuales pudieran incrementar el área de uso para este tipo de controlador ([3], [6] y [9]). Desafortunadamente, estas aproximaciones también son complejas para los HS. La aplicación del MPC a HS requiere resolver un problema de opti-

mización con variables de decisión reales y enteras mezcladas. Para resolver este problema se pueden utilizar algoritmos llamados MIQP [2]. Varios algoritmos han sido propuestos y aplicados con éxito para los problemas MIQP de aplicación de mediana y gran escala [4]. Sin embargo los MIQPs son grandes consumidores de tiempo y por tanto prohibitivos en tiempo real para la mayoría de los casos. Con el objeto de reducir el tiempo de cálculo [1] presenta una estrategia basada en la poda de las ramas de un árbol que resuelve el MIQP involucrando evoluciones de tiempo de un modelo lineal con dinámicas mezcladas (MLD).

Este trabajo presenta un procedimiento híbrido para resolver el MPC de sistemas PWA y reducir el tiempo de cálculo necesario para resolver el problema. La aproximación presentada aquí no pertenece a la clase de métodos de podas de ramas de un árbol ampliamente conocido como Branch and Bound (B&B), en su lugar se utiliza un método de enumeración y un algoritmo estándar de programación cuadrática (QP) para resolver el problema de optimización con reales y enteros mezclados. El procedimiento utiliza los conceptos de conjunto alcanzable y conjunto controlable [7] combinado con el concepto de gráfico de transición de estado (STG), para reducir el número de problemas QPs que se necesitan para resolver el algoritmo de optimización. El algoritmo propuesto reduce considerablemente el número de exploraciones que se necesitan durante la búsqueda de un mínimo global y así el tiempo de cálculo requerido por el MPC puede reducirse a una pequeña fracción del tiempo requerido si el algoritmo de optimización se aplicase directamente sobre el problema original.

El trabajo está organizado como sigue: en la Sección 2 se describe el sistema PWA y se desarrolla la estrategia de MPC utilizada. Un ejemplo de simulación es mostrado en la Sección 3 y posteriormente en la Sección 4 se dan las conclusiones.

2 FORMULACION DEL PROBLEMA

Varias formas de modelado de HS en tiempo discreto están ya estandarizadas, entre ellas se encuentra el PWA. Un sistema PWA se define como

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A^i x_k + B^i u_k + f^i \\ y_k &= C^i x_k + g^i \end{aligned} \quad \text{for : } \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \in \mathcal{X}_i \quad (1)$$

donde $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^s$ es una partición poliédrica del espacio de estado y las entradas. Cada \mathcal{X}_i está dada por

$$\mathcal{X}_i \triangleq \left\{ \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \mid Q^i \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \preceq q^i \right\}$$

donde x_k , u_k , y_k denotan los vectores de estados, de las entradas y de la salida, respectivamente. Cada subsistema \mathbb{S}^i definido por la 7-upla $(A^i, B^i, C^i, f^i, g^i, Q^i, q^i)$, $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ es denominado componente del sistema PWA. En (1), $A^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B^i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, y (A^i, B^i) es un par controlable. $C^i \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $Q^i \in \mathbb{R}^{p_i \times (n+m)}$, f^i , g^i y q^i son vectores constantes adecuados. Note que n es el número de estados, m es el número de entradas, r es el número de salidas y p_i es el número de hiperplanos que define el poliedro i . En este trabajo se supone que en el instante de tiempo k se dispone de todas las mediciones de los estados.

La mayoría de las formulaciones del MPC requieren que el problema

$$U = \arg(\min_U J) \quad (2)$$

$$\text{to : } J = \sum_{i=1}^N q_{ii} (y_{k+i|k} - w_k)^2 + \sum_{i=1}^{N-1} r_{ii} u_k^2 \quad (3)$$

$$\text{s.t. : } u_{\min} \leq u_{k+i} \leq u_{\max} \quad k = 1, \dots, M \quad (4)$$

se resuelva en cada tiempo k , donde $y_{k+i|k}$ denota el vector de salidas predicho en el tiempo $k+i$, obtenido luego de aplicar la secuencia de entrada $U \triangleq \{u_k, \dots, u_{k+N-1}\}$ al modelo (1) comenzando desde el estado x_k sujeto a restricciones. Nótese que w_k es la salida de referencia. Entonces, se le aplica al proceso la primera entrada de control. En la próxima muestra, las mediciones son utilizadas para actualizar el problema de optimización y la optimización se repite. De esta forma se obtiene una aproximación a lazo cerrado.

Consideremos el problema de predicción asociado al MPC en el caso de un sistema PWA. El subsistema que describe el proceso es conocido si x_k es conocido, pero los siguientes subsistemas dependen de la secuencia de control aplicada. Puede considerarse que entre un instante de muestreo y el próximo se produce un cambio (transición) del modelo. En general se activa una secuencia de subsistemas $I = \{I_k, I_{k+1}, \dots, I_{k+N}\}$. Sólo

se conoce el valor inicial de esta secuencia $I_k = I_k(x_k)$. Si no existen restricciones, el número de secuencias posibles para un horizonte de predicción N es s^{N-1} . Para resolver el problema MPC (3) se añade la secuencia de optimización como variable de decisión. El problema de optimización resultante puede expresarse entonces como

$$U = \arg(\min_{U,I} J) \quad (5)$$

donde las restricciones relacionan la dependencia de las posibles secuencias U e I deben ser añadidas i.e.:

$$Q^{I_{k+j}} x_{k+1} \leq q^{I_{k+j}}, \quad j = \{1, \dots, N\} \quad (6)$$

Debido a la naturaleza entera de la secuencia I , el problema de encontrar el óptimo puede resolverse encontrando el óptimo de las soluciones para toda posible secuencia de I , i.e.

$$U = \arg \left(\min_I \left(\min_{Q^{IU} u \preceq q^{IU}} J \right) \right) \quad (7)$$

donde $Q^{IU} u \preceq q^{IU}$ indica las restricciones debido a la dependencia entre I y U .

2.1 Resolución del Problem Computacional

La ecuación (3) puede escribirse como

$$J = (\bar{y} - \bar{w})^T \bar{Q} (\bar{y} - \bar{w}) + \bar{u}^T \bar{R} \bar{u} \quad (8)$$

donde $\bar{R} = \text{diag}[r_{ii}]$, $(\bar{R} = \bar{R}^T \succ 0)$, $\bar{Q} = \text{diag}[q_{ii}]$, $(\bar{Q} = \bar{Q}^T \succ 0)$. Note que \bar{Q} (matriz que pesa el error) es diferente a Q^i (matriz que define el poliedro), $\bar{w} = [w_{k+1}^T \dots w_{k+N}^T]^T$, $\bar{u} = [u_k^T \dots u_{k+N-1}^T]^T$ y el vector de salida predicho $\bar{y} = [y_{k+1}^T \dots y_{k+N}^T]^T$ puede ser escrito como

$$\bar{y} = F_y x_k + H_y \bar{u} + f_{o_y} \quad (9)$$

$$F_y = C_y F_x, \quad H_y = C_y H_x, \quad f_{o_y} = C_y f_{o_x}$$

donde : $C_y = \text{diag}(C^{I_{k+1}}, C^{I_{k+2}}, \dots, C^{I_{k+N}})$

$$H_x = [h_1 \quad h_2 \quad \dots \quad h_N]$$

$$F_x = \begin{bmatrix} A^{I_k} \\ A^{I_{k+1}} A^{I_k} \\ \vdots \\ A^{I_{k+N-1}} A^{I_{k+1}} \dots A^{I_k} \end{bmatrix}$$

$$h_1 = \begin{bmatrix} B^{I_k} \\ A^{I_{k+1}} B^{I_k} \\ \vdots \\ A^{I_{k+N-1}} A^{I_{k+N-2}} \dots A^{I_{k+1}} B^{I_k} \end{bmatrix}$$

$$h_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ B^{I_{k+1}} \\ A^{I_{k+2}} B^{I_{k+1}} \\ \vdots \\ A^{I_{k+N-1}} A^{I_{k+N-2}} \dots A^{I_{k+1}} B^{I_{k+1}} \end{bmatrix}$$

$$h_N = \left[0 \ 0 \ 0 \ \dots \ (B^{I_{k+N-1}})^T \right]^T$$

$$f_{o_x} = \left[f_1 \ f_2 \ \dots \ f_N \right]$$

$$f_1 = \begin{bmatrix} I \\ A^{I_{k+1}} \\ \vdots \\ A^{I_{k+N-1}} A^{I_{k+N-2}} \dots A^{I_{k+1}} \end{bmatrix}$$

$$f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ A^{I_{k+2}} \\ \vdots \\ A^{I_{k+N-1}} A^{I_{k+N-2}} \dots A^{I_{k+2}} \end{bmatrix}$$

$$f_N = \left[0 \ 0 \ 0 \ \dots \ I \right]^T$$

Note que se cumplen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \bar{x} &= F_x x_k + H_x \bar{u} + f_{o_x} & (10) \\ \bar{y} &= C_y \bar{x} \\ \bar{x} &= \left[x_{k+1}^T \ x_{k+2}^T \ \dots \ x_{k+N}^T \right]^T \end{aligned}$$

Reemplazando (9) en (8) el índice es

$$J(I, U) = \bar{u} H_{QP} \bar{u} + f_{QP}^T \bar{u} + g_{QP} \quad (11)$$

donde

$$\begin{aligned} H_{QP} &= \left[H_y^T \bar{Q} H_y + \bar{Q} \right] \\ f_{QP}^T &= \left[2x_k^T F_y^T \bar{Q} H_y + 2f_o^T \bar{Q} H_y + 2\bar{w}^T \bar{Q} H_y \right] \\ g_{QP} &= x_k^T F_y^T \bar{Q} F_y x_k + 2f_o^T \bar{Q} F_y x_k + 2f_o^T \bar{Q} \bar{w} \\ &\quad + f_o^T \bar{Q} f_o - 2\bar{w}^T \bar{Q} F_y x_k + \bar{w}^T \bar{Q} \bar{w} \end{aligned}$$

La restricción sobre el control (4) puede escribirse como $Q^u \bar{u} \preceq q^u$, $Q^u = [-I_{N \times N} \ I_{N \times N}]^T$, $q^u = \left[-(u_{\min})^T \ (u_{\max})^T \right]^T$ y las restricciones debido a la dependencia de I y U (6) pueden escribirse como

$$Q^{I_x} \bar{x}_I \preceq q^{I_x} \quad (12)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{x}_I &= \left[x_{k+1}^T, \dots, x_{k+N-1}^T \right]^T, \quad Q^{I_x} = \text{diag}(Q^{I_{k+1}}, \\ &\dots, Q^{I_{k+N-1}}), \quad \bar{x}_I = \left[(q^{I_{k+1}})^T, \dots, (q^{I_{k+N-1}})^T \right]^T, \\ \bar{x}_I &\text{ puede escribirse como} \end{aligned}$$

$$\bar{x}_I = C_x \bar{x} \quad (13)$$

donde $C_x = \left[I_{n \times N \times n \times N} \ 0 \right]$. Reemplazando (13) y (10) en (12), las restricciones debido a la dependencia entre U e I resultan en $Q^{IU} \bar{u} \preceq q^{IU}$, $Q^{IU} = Q^{I_x} C_x H_x$, $q^{IU} = q^{I_x} - Q^{I_x} C_x F_x x_k - Q^{I_x} C_x f_{o_x}$. Si las restricciones en las acciones de control se consideran también entonces

$$Q_{QP} \bar{u} \preceq q_{QP} \quad (14)$$

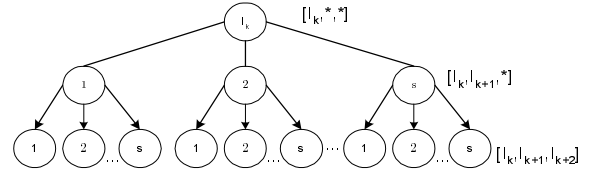


Figura 1: Gráfico de transiciones.

$$Q_{QP} = \left[(Q^u)^T \ (Q^{IU})^T \right]^T \quad \text{y} \quad q_{QP} = \left[(q^u)^T \ (q^{IU})^T \right]^T.$$

Por tanto, una vez que se fija la secuencia I , el problema puede resolverse minimizando (11) sujeto a las restricciones (14).

2.2 Conjunto Alcanzable, Conjunto Controlable y Algoritmo de Transición de Estados

La idea fundamental del algoritmo propuesto es determinar el conjunto de posibles regiones que pueden alcanzarse desde la región actual en unos pocos tiempos de muestreo siguientes. Para este propósito se utiliza el concepto de conjunto alcanzable [7]. El conjunto de regiones que pueden alcanzarse desde una determinada región puede programarse como un Gráfico de Transición de Estados (STG) tal y como puede verse en la figura 1. Entonces puede organizarse una búsqueda dirigida por este gráfico. Es decir, toda secuencia que no pueda obtenerse siguiendo el gráfico de transición, no se considera.

Definición 1: [7] **Conjunto Alcanzable (RS)** $\mathcal{R}_r(\Omega)$. Dado un sistema dinámico discreto $x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k)$ donde $w_k \in \mathbb{W} \subset \mathbb{R}^d$ es una perturbación desconocida (\mathbb{W} son conjuntos cerrados en \mathbb{R}^d) y $u_k \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$ (\mathbb{U} es un conjunto compacto en \mathbb{R}^m). El conjunto $\mathcal{R}_r(\Omega)$ es un conjunto de estados en \mathbb{R}^n en el cual el sistema se encontrará en el próximo paso de tiempo, para algún $x_k \in \Omega$, entrada de control y perturbación admisibles, i.e.

$$\mathcal{R}_r(\Omega) \triangleq \left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} \in \mathbb{R}^n \mid \exists x_k \in \Omega, u_k \in \mathbb{U}, \\ w_k \in \mathbb{W} : x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k) \end{array} \right\} \quad (15)$$

El RS para un sistema lineal discreto $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$ de un conjunto de politopo Ω del espacio de estado, si se considera que la acción de control $u_k \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$ (\mathbb{U} es un politopo (compacto) en \mathbb{R}^m) puede calcularse como una suma de Minkowski de la proyección ortogonal del conjunto Ω sobre A y el \mathbb{U} sobre B . Vea [7] para más detalles.

Basados en la idea de los conjuntos alcanzable puede definirse el *Vecino alcanzable a un paso (1-SRN)*. El subsistema \mathbb{S}^j es 1-SRN del sub-

sistema \mathcal{S}^i , denotado por $\mathcal{S}^i \xrightarrow{1} \mathcal{S}^j$, si el conjunto \mathcal{X}_j puede ser alcanzado desde el conjunto \mathcal{X}_i en un paso. Es posible determinar si $\mathcal{S}^i \xrightarrow{1} \mathcal{S}^j$ debido a $\mathcal{S}^i \xrightarrow{1} \mathcal{S}^j \iff \mathcal{R}(\mathcal{X}_i) \cap \mathcal{X}_j \neq \emptyset$. De la misma manera este se puede determinar a dos pasos (2-SRN) si se consideran los conjuntos alcanzables a dos pasos $\mathcal{R}_2(\mathcal{X}_i) = \mathcal{R}(\mathcal{R}(\mathcal{X}_i))$ como $\mathcal{S}^i \xrightarrow{2} \mathcal{S}^j \iff \mathcal{R}_2(\mathcal{X}_i) \cap \mathcal{X}_j \neq \emptyset$. Y así sucesivamente para el n -SRN.

Definición 2: Conjunto Alcanzable a n -pasos (n -SRN) $\mathcal{S}^i \xrightarrow{n} \mathcal{S}^j$.

$$\mathcal{S}^i \xrightarrow{n} \mathcal{S}^j \iff \mathcal{R}_n(\mathcal{X}_i) \cap \mathcal{X}_j \neq \emptyset$$

El índice de todos los subsistemas n -SRN del subsistema i forman el conjunto índice de n -SRN.

Definición 3: Conjunto índice de n -SRN \mathbb{N}_n^i

$$\mathbb{N}_n^i \triangleq \left\{ k \in [1, \dots, s] / \mathcal{S}^i \xrightarrow{n} \mathcal{S}^k \right\}$$

La transición de estados de I_j a I_{j+1} permanece acotada por los 1-SRNs del correspondiente subsistema I_j . Esto permite podar el gráfico de transición (STG): las transiciones desde I_j a I_{j+1} no son consideradas si $I_{j+1} \notin \mathbb{N}_1^{I_j}$. Si este concepto se extiende, el árbol de búsqueda puede ser podado considerando además que I_{j+k} debería pertenecer a $\mathbb{N}_k^{I_j}$. Por tanto, si solo se consideran los 1-SRN para un horizonte de predicción N , el número de posibles secuencias a probar por el algoritmo QP es $s^{(I_k)} s^{(I_{k+1})} \dots s^{(I_{k+N-1})}$ (en lugar de s^N , $s^{(I_k)} \leq s$), donde s^{I_k} es el número de 1-SRNs correspondientes al subsistema I_k .

Debe notarse que la determinación del 1 a n -SRNs para cada subsistema puede hacerse fuera de línea. La lista de vecinos para cada uno de los subsistemas se incluye en la descripción del modelo. Por tanto, cada subsistema está definido por la $(7+N)$ -upla $(A^i, B^i, C^i, f^i, g^i, Q^i, q^i, \mathbb{N}_1^i, \dots, \mathbb{N}_N^i)$, $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ donde, \mathbb{N}^i es la lista que contiene los vecinos alcanzables del subsistema i . El STG puede podarse más aun si se consideran los conjunto controlables a un paso (1-SCS).

Definición 4: [7] Conjunto Controlable a un paso (1-SCS) $\mathcal{Q}_c(\Omega)$. El conjunto $\mathcal{Q}_c(\Omega)$ es el conjunto de estados en \mathbb{R}^n para el cual existe una entrada de control admisible que garantizará que el sistema sea llevado a Ω en un paso, para toda perturbación permisible, i.e.

$$\mathcal{Q}_c(\Omega) \triangleq \left\{ x_k \in \mathbb{R}^n \mid \exists u_k \in \mathbb{U} : f(x_k, u_k, w_k) \in \Omega, \forall w_k \in \mathbb{W} \right\} \quad (16)$$

En [7] se muestra un método para calcular el 1-SCS. Es importante hacer énfasis en que el 1-SCS y el RS operan en diferentes direcciones. El 1-SCS

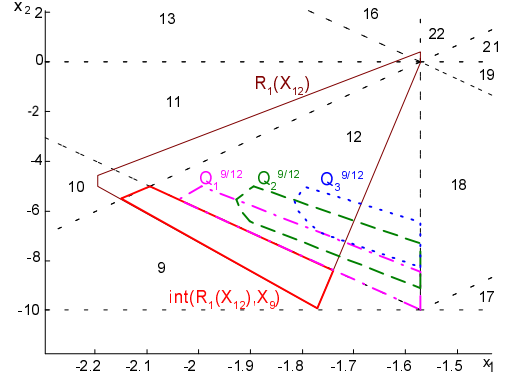


Figura 2: Conjuntos controlables a uno, dos y tres pasos del sector 9 sobre el sector 12

es el conjunto de estados desde el cual el sistema puede ser conducido a un conjunto dado. El RS es el conjunto de estados al cual el sistema puede ser conducido desde un conjunto dado. No existe una relación explícita entre estos dos conjuntos.

El 1-SCS del subsistema j sobre el subsistema i $\mathcal{Q}_1^{j/i}$, es el subconjunto de \mathcal{X}_i desde donde el subsistema j (\mathcal{X}_j) puede ser alcanzado en un paso. Esto es,

$$\mathcal{Q}_1^{j/i} \triangleq \left\{ x_k \in \mathcal{X}_i \mid \exists u_k \in \mathbb{U} : f(x_k, u_k, w_k) \in \mathcal{X}_j, \forall w_k \in \mathbb{W} \right\}$$

Este conjunto puede calcularse como

$$\mathcal{Q}_1^{j/i} = \mathcal{Q}_1(\mathcal{R}_1(\mathcal{X}_i) \cap \mathcal{X}_j) \cap \mathcal{X}_i$$

Este concepto puede ser extendido desde 1 hasta n pasos como $\mathcal{Q}_n^{j/i}$. Note que la próxima función de estado correspondiente al sistema i está implicada en el cálculo del RS así como en el el cálculo del 1-CS. La figura 2 muestra el conjunto de 1, 2 y 3 pasos para el sector 9 sobre el sector 12.

Para reducir el número de evaluaciones del problema QP, se considera el estado de $x_k \notin \mathcal{Q}_1^{I_{k+1}/I_k}$. Si esta proposición se satisface, entonces el estado x_{k+1} no pertenece a la transición I_{k+1} ; por tanto, la transición desde I_k hasta I_{k+1} no está permitida. Para aplicar estos conceptos, debe añadirse la definición del conjunto $\mathcal{Q}_1^{j/i}$, ..., $\mathcal{Q}_N^{j/i}$ a la definición de cada subsistema.

3 EJEMPLO ILUSTRATIVO

La estrategia de exploración del árbol propuesta en este trabajo ha sido aplicada al control predictivo del sistema de un péndulo simple. Se ha utilizado como modelo a la ecuación linealizada de la dinámica discreta del sistema del péndulo simple.

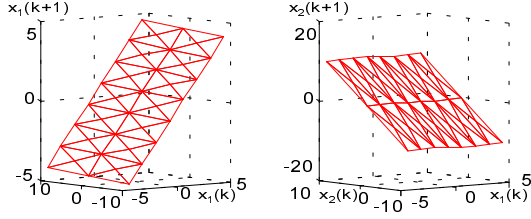


Figura 3: Representación del modelo PWA del péndulo.

Considere el siguiente sistema no lineal

$$ml\ddot{\theta} + kl\dot{\theta} + mg\sin(\theta) = \frac{\tau}{l}$$

donde θ es el ángulo del péndulo, l es la longitud del péndulo, m es la masa del péndulo, g es la fuerza gravitacional, k es un coeficiente de fricción y τ es el torque aplicado. Entonces, el modelo en el espacio de estado discretizado en un tiempo de muestreo T_0 es

$$x_{k+1} = x_k + T_0 x_{k2}$$

$$x_{k1} = \left[1 - \frac{T_0 k}{m} \right] x_{k2} - \frac{T_0 g}{l} \sin(x_{k1}) + \frac{T_0}{l^2 m} u_k$$

donde $u_k = \tau(k)$, $x_{k1} = \theta(k)$ y $x_{k2} = \dot{\theta}(k)$. Utilizando $m = 1$, $l = 1$, $k = 0.5$, $g = 9.8$, $T_0 = 0.02$ como parámetros para el modelo. A partir de un modelo discretizado se ha obtenido un sistema PWA como (1) utilizando una linealización por sectores sobre una grilla uniforme del espacio de estado. Se define una partición $\mathcal{X}_i \triangleq \{x_k | Q^i x_k \preceq q^i\}$ luego de obtener 56 sectores sobre el espacio de estado. Se consideran invariantes a las matrices C^i y B^i , i.e.: $B^i = B = \begin{bmatrix} 0 & T_0 \\ T_0 & m \end{bmatrix}$ y $C^i = C = I_{(m,m)}$. La figura 3 muestra la función de linealización de estados. Una vez más se obtiene el modelo linealizado, los vecinos correspondientes a cada sector se pueden encontrar utilizando el algoritmo de conjuntos alcanzables. En este ejemplo, las cotas del torque son $10.78 \leq \tau \leq 10.78$ ($10.78 = 1.1 mgl$), donde el torque máximo en el estado estacionario para alcanzar cualquier posición es $\tau = mgl$. Todas las pruebas de simulación fueron hechas en Matlab. La Tabla 1 muestra el desempeño del computador utilizado. La Tabla 2 muestra las siglas del método de poda utilizado y una brve aclaración del mismo. Se ha considerado un horizonte de predicción $N=4$. Los pesos del error y de la acción de control son $\bar{Q}_{x_1}=1000$, $\bar{Q}_{x_2}=100$, $R=1$, respectivamente.

La figura 4 muestra los resultados para una referencia $w = [0 \ 0]$ y para diferentes condiciones iniciales. Las líneas sólidas y de puntos muestran

Tabla 1: Estándar de comparación de Matlab (función "bench"): desempeño de la PC bajo Windows 98, Matlab 5.3

ODE	LU	Sparce	3-D	2-D
0.33	0.38	0.39	1.21	1.21

Tabla 2: Siglas del método. SRN = vecinos alcanzables a n pasos; SCOS = conjuntos controlables a n pasos de un sector sobre otro

Sigla	Aclaración
N1	Considera solamente 1-SRN
N123	Considera 1, 2, 3-SRN
N1-C1	Considera 1-SRN y 1-SCOS
N1-C12	Considera 1-SRN y 1, 2-SCOS
N1-C123	Considera 1-SRN y 1, 2, 3-SCOS
N123-C1	Considera 1, 2, 3-SRN y 1-SCOS
N123-C12	Considera 1, 2, 3-SRN y 1, 2-SCOS
N123-C123	Considera 1, 2, 3-SRN y 1, 2, 3-SCOS

el comportamiento del sistema para $\tau = 0$ (lazo abierto) y el sistema controlado, respectivamente. Observe que el estado en lazo abierto diverge para las condiciones iniciales $x_0 = [3 \ 3]^T$.

La figura 5 muestra una curva de estado parametrizada en el tiempo y el número de evaluaciones QP para el método de reducción (poda) N123. En este caso el número de evaluaciones de QP es una función exclusiva del subsistema al cual pertenece. La figura 6 compara las respuestas del método (N1) contra (N123). Note que en general el número de problemas QP decrece cuando se utiliza el método N123.

La figura 8 muestra como si se utiliza el método N1-C123, el número de evaluaciones de QP decrece cuando el estado inicial está lejos de la región de la frontera, esto es, cuando x_0 no pertenece a ningún conjunto controlable y sus vecinos. En este sector el número de evaluaciones QP decrece cuando el método N1-C1 se compara con N1-C123 (Fig. 7). La figura 9 compara el número de evaluaciones QP (mínimo, máximo y promedio) para diferentes métodos de poda. Note que cuando se considera un alto número de conjuntos controlables aunque decrecen la cantidad de evaluaciones mínima y promedio, la máxima cantidad de evaluaciones permanece constante.

4 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha propuesto una nueva aproximación para resolver el control predictivo de sistemas (lineales) afines a tramos. El algoritmo se basa en la exploración de gráficos de transición de estados y los conceptos de conjuntos alcanzables

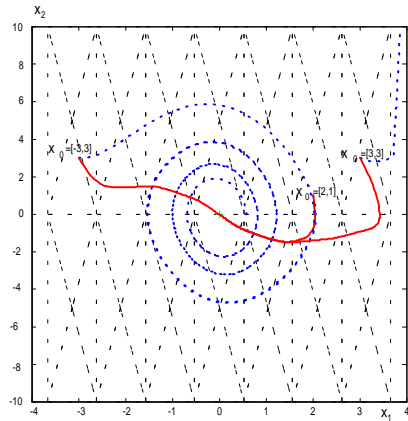


Figura 4: Plano fase con $w = [0 \ 0]$ y $x_0 = [2 \ 1]^T$, $x_0 = [3 \ 3]^T$, $x_0 = [-3 \ 3]^T$

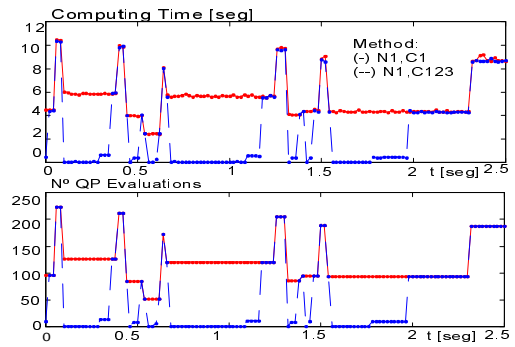


Figura 7: Tiempo de cálculo y número de evaluaciones de QP [(-) N1-C1 (- -) N1-C123]

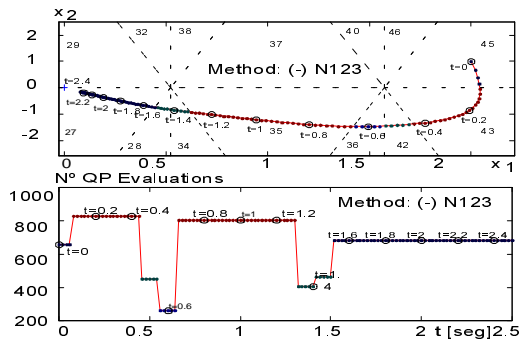


Figura 5: Plano de fase y número de evaluaciones QP parametrizado en el tiempo (N123).

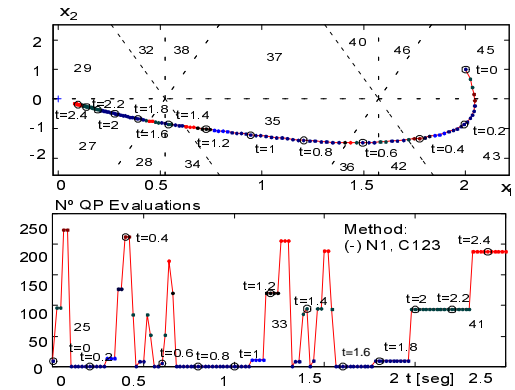


Figura 8: Plano de fase y número de evaluaciones QP parametrizado en el tiempo (N1- C123).

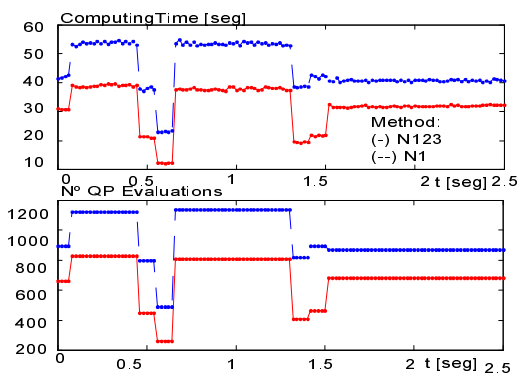


Figura 6: Tiempo de cálculo y número de evaluaciones de QP [(-) N123 (:) N1]

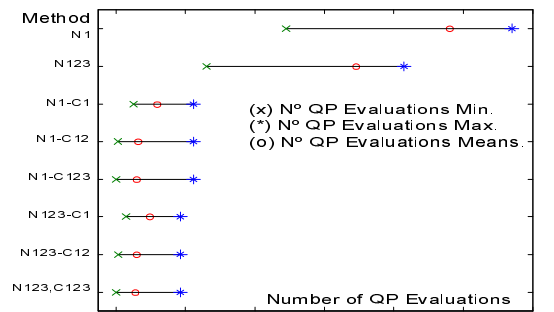


Figura 9: Tabla de comparación del número de evaluaciones QP.

y controlables. Para la estrategia de exploración del árbol se han elegido los conjuntos alcanzables para disminuir el número de posibles realizaciones de las variables enteras y de esa forma reducir considerablemente el número de problemas QP que se necesita resolver.

Agradecimientos

Los autores agradecen a los Ministerios de Educación y Cultura y Deporte y de Ciencia y Tecnología (España) y al Consejo Nacional Investigaciones Científicas y Tecnológicas (Argentina) por financiar este trabajo bajo los proyectos SB2000-0285 and DPI 2002-04375-C03-01

Referencias

- [1] A. Bemporad, D. Mignone, and M. Morari. An efficient branch and bound algorithm for state estimation and control of hybrid systems. In *Proc. European Contr. Conf*, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [2] A. Bemporad and M. Morari. Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints. *Automatica*, 35(3):407–427, 1999.
- [3] A. Bemporad, M. Morari, V. Dua, and E. Pistikopoulos. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. In *Proc. Amer. Contr. Conf*, pages 872–876, Chicago, IL, 2000.
- [4] R. Fletcher and S. Leyffer. Numerical experience with lower bounds for miqp branch-and-bound. Technical report, University of Dundee, Dept. of Mathematics, Scotland, U.K., 1995.
- [5] S. Hedlund and A. Rantzer. Optimal control of hybrid systems. In *Proc. 38th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 3972–3976, Phoenix, AZ, USA, 1999.
- [6] T. Johanssen, I. Petersen, and O. Slupphaug. Explicit suboptimal linear quadratic regulation with input and state constraints. In *Proc. of 39th. IEEE Conf. on Decision and Control*, Sidney, 2000.
- [7] E. Kerrigan. *Robust Constraint Satisfaction: Invariant sets and predictive control*. PhD thesis, University of Cambridge, 2000.
- [8] P. Riedinger, F. Kratz, C. Iung, and C. Zanne. Linear quadratic optimization for hybrid systems. In *Proc. 38th IEEE Conf. on Decision and Control*, Phoenix, AZ, USA, 1999.
- [9] M. Seron, J. Don, and G. Goodwin. Global analytical model predictive control with input constraints. In *Proc. of 39th. IEEE Conf. on Decision and Control*, Sidney, 2000.
- [10] C. Tomlin, J. Lygeros, and S. Sastry. A game theoretic approach to controller design for hybrid systems. In *Proc. of the IEEE*, volume 88, July 2000.