LINEALIDAD A TROZOS DE LA LEY DE CONTROL MIN-MAX MPC CON NORMA CUADRÁTICA E INCERTIDUMBRES ACOTADAS

D.R. Ramírez
danirr@cartuja.us.es
E.F. Camacho
eduardo@cartuja.us.es
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad de Sevilla
Escuela Superior de Ingenieros, Camino de los Descubrimientos s/n 41092 Sevilla
Phone: +34 954487357 Fax: +34 954487340

Resumen

En este trabajo se muestra como la ley de control Min-Max MPC con una función de coste cuadrática y de horizonte finito resulta ser una ley de control lineal a trozos, cuando se tienen en cuenta incertidumbres aditivas acotadas. Los resultados se ilustran con un ejemplo de simulación.

Palabras clave: Control Predictivo Basado en Modelo, Control Min-Max, Control Robusto

1 Introducción

Cuando al diseñar un controlador se tiene como objetivo preservar la estabilidad y el rendimiento, a pesar de las incertidumbres o inexactitudes en el modelado del sistema a controlar, ha de elegirse una forma de modelar la incertidumbre.

Hay diferentes maneras de modelar la incertidumbre, y la idoneidad de cada una depende en gran medida del tipo de controlador que se ha de emplear. Algunas asumen que se cuenta con una familia de modelos más o menos extensa y que la dinámica de la planta a controlar coincide exactamente con uno de los modelos de la familia.

La aproximación que se considera aquí es la de incertidumbres aditivas o globales. Consiste en suponer que todas las incertidumbres se pueden agrupar en un vector, el cual se añade a la ecuación de predicción. Por tanto, las incertidumbres afectan a la capacidad de predicción del modelo ([7]).

Se podría argumentar que este tipo de incertidumbres son en realidad perturbaciones. Sin embargo, dado que la única limitación que se impone es que estén acotadas, pueden ser descritas mediante esta técnica incertidumbres que dependan de las entradas y salidas pasadas. Al emplearse esta técnica se pueden calcular cotas a las trayectorias predichas, y parece que el control sería más robusto si el controlador minimizase la función de coste para la peor situación.

Las técnicas Min-Max MPC consideran de manera explícita el efecto de las incertidumbres en el cálculo de la ley de control (véase [6], [8], [1], [14], [10], [9], [13] y [11]). Todas estas técnicas tienen en común una gran carga de cálculo, lo que limita el rango de procesos al que pueden ser aplicadas.

Recientemente se ha demostrado la linealidad a trozos de leyes de control como el MPC lineal con restricciones, que tradicionalmente se había considerado una ley de control no lineal ([5],[3]).

En este artículo se muestra que el Min-Max MPC con función de coste cuadrática es también una ley de control lineal a trozos. Se presentan demostraciones basadas en las propiedades de la función de coste. Este hecho puede ser explotado para implementar este tipo de leyes en procesos con dinámicas rápidas.

El artículo está organizado de la siguiente manera: la sección 2 presenta el algoritmo de control Min-Max MPC con incertidumbres globales acotadas. A continuación se exponen propiedades de la función de coste en la sección 3. La demostración de la linealidad a trozos de la ley de control se aporta en la sección 4. En la sección 5 se muestra la partición del espacio de salidas del proceso en regiones en las cuales existe una ley de control lineal. Finalmente, en la sección 6, se presenta un ejemplo ilustrativo.

2 Min-Max MPC con incertidumbres globales acotadas

El funcionamiento del MPC consiste en calcular la secuencia de futuras acciones de control $u(t), u(t+1), \dots, u(t+N_u-1)$, de tal manera que las predicciones a j pasos $y(t+j|t)$ se acerquen lo más posible a la secuencia de valores futuros del punto de consigna $w(t), w(t+1), \dots, w(t+N_2-1)$ a lo largo del horizonte de predicción. La bondad de la solución alcanzada se considerará mediante una función J que dependerá de los valores presentes y pasados de las salidas, señales de control e incertidumbres.

Si en el cálculo de la secuencia de actuaciones se consideran de manera explícita incertidumbres parece lógico pensar que, el control obtenido sería más robusto si el controlador considerase la peor situación posible, es decir, si se resolviese el siguiente problema min-max:

$$\min \max_{\theta \in \Theta} J(\theta, u) \tag{1}$$

donde θ representa la secuencia de futuros valores de la incertidumbre. El problema (1) se puede reescribir como:

$$\min \max_{\theta \in \Theta} J(\theta, u) = \min J^*(u) \tag{2}$$

con:

$$J^*(u) = \max_{\theta \in \Theta} J(\theta, u) \tag{3}$$

siendo $\Theta = \{\forall \theta / \underline{\theta} \leq \theta \leq \overline{\theta}\}$. La función $J^*(u)$ es el máximo de los posibles valores de la función objetivo $J(\theta, u)$, la cual mide la bondad del seguimiento de la referencia por parte de la salida del proceso. La forma más usual de $J(\theta, u)$ es un criterio cuadrático:

$$J(\theta, u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} (y_{k+j|k} - w_{k+j})^2 + \lambda \sum_{j=1}^{N_u} (\Delta u_{k+j-1})^2$$

donde: $\Delta = 1 - z^{-1}$,N_1 y N_2 definen el comienzo y final del horizonte de predicción, N_u es el horizonte de control y $y_{k+j|k}$ es la predicción de la salida para el peor caso posible. En la literatura especializada se pueden encontrar esquemas similares que usan otros tipos de función objetivo, por ejemplo basados en la norma $\infty - \infty$ ([8]) o $1 - \infty$ ([1]). Otros ejemplos de control predictivo que utilizan técnicas min-max pueden encontrarse en ([14]), ([10]) y ([9]).

Cuando se emplea la técnica de incertidumbres globales acotadas se asume que todos los errores de modelado se agrupan en un vector de parámetros, de tal manera que la dinámica de la planta se puede describir mediante la siguiente familia de modelos:

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+1) &= \hat{f}(y(t), \ldots, y(t-n_{n_a}), u(t), \ldots, \\ &\quad u(t-n_{n_b})) + \theta(t) \end{aligned} \tag{4}$$

En ([7]) se muestra como se puede relacionar esta técnica con otros tipos de descripción de incertidumbres.

Cuando el modelo de predicción que se considera en (4) es lineal, es frecuente utilizar como descripción un modelo CARIMA:

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})\frac{e(t)}{\Delta}$$

donde $y(t)$ y $u(t)$ son las secuencias de salidas y actuaciones y $e(t)$ es un ruido blanco de media nula.

El concepto de ruido presente en el modelo CARIMA se puede extender para considerar explícitamente las perturbaciones o incertidumbres en el modelo de predicción, resultando el siguiente modelo de predicción que es el usado en este trabajo:

$$\tilde{A}(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})\Delta u(t-1) + \theta(t) \quad \theta(t) \in \Theta$$

con $\tilde{A}(z^{-1}) = \Delta A(z^{-1})$. Este modelo de predicción se conoce como modelo de predicción con incertidumbres integradas.

3 Algunas propiedades de las funciones J y J^*

Considérese el conjunto de predicciones óptimas a j pasos con $j = 1, \ldots, N_2$, las cuales se pueden expresar en forma condensada como:

$$y = G_u u + G_\theta \theta + f$$

donde $y = [y_{k+1} \cdots y_{k+N_2}]^T$, $\theta = [\theta_{k+1} \cdots \theta_{k+N_2}]^T$, $u = [\Delta u_k \cdots \Delta u_{k+N_u-1}]^T$ y f representa la respuesta libre, la cual depende linealmente de los valores presentes y pasados de las salidas y de los valores pasados de las entradas:

$$f = M_f[y_k \cdots y_{k-n_a} \Delta u_{k-1} \cdots \Delta u_{k-n_b}]^T$$

Sin pérdida de generalidad, considérese que el punto de consigna es constante e igual a cero durante todo el intervalo, es decir, $w_{k+j} = 0$ con $j = 1, \ldots, N_2$. En este caso, la función $J(\theta, u)$ resulta ser:

$$J(\theta, u) = (G_u u + G_\theta \theta + f)^T (G_u u + G_\theta \theta + f) + \lambda u^T u$$

operando se llega a:

$$\begin{aligned} J(\theta, u) &= u^T M_{uu} u + \theta^T M_{\theta\theta} \theta + 2\theta^T M_{\theta u} u + \\ &+ 2M_{uf}^T u + 2M_{\theta f}^T \theta + f^T f \end{aligned} \tag{5}$$

donde $M_{uu} = G_u^T G_u + \lambda I$, $M_{\theta\theta} = G_\theta^T G_\theta$, $M_{\theta u} = G_\theta^T G_u$, $M_{uf} = G_u^T f$, $M_{\theta f} = G_\theta^T f$.

De la ecuación (5) se desprende que la funcion J^* definida en (3) se puede expresar como el máximo de una función que es cuadrática en θ para cada valor de u:

$$J^*(u) = \max_{\theta \in \Theta} \{\theta^T M_{\theta\theta} \theta + M'_\theta(u)\theta + M'(u)\} \tag{6}$$

donde $M'_\theta(u) = 2(M_{\theta f}^T + u^T M_{\theta u}^T)$ y $M'(u) = u^T M_{uu} u + 2M_{uf}^T u + f^T f$. G_θ es una matriz triangular inferior que tiene todos los elementos de la diagonal principal igual a uno, lo que implica que $M_{\theta\theta}$ es una matriz definida positiva. Por otra parte, este hecho causa que la funcion J^* es estrictamente convexa (véase el teorema 3.3.8 de [2]) y por ello el máximo de J se alcanzará en uno de los vértices del politopo Θ (véase el teorema 3.4.6 de [2]).

Es fácilmente comprobable que la función J^* es una función cuadrática a trozos de u. Por tanto, podemos establecer una partición de U el dominio de u en diferentes regiones U_p de tal manera que para las $u \in U_p$ el máximo del funcional J se alcanza para el vértice θ_p. En esa región U_p se puede expresar J^* como una función de u:

$$J^*(u) = u^T M_{uu} u + M_u^*(\theta_p) u + M^*(\theta_p) \qquad (7)$$

donde $M_u^*(\theta_p) = 2(\theta_p^T M_{\theta u} + M_{uf}^T)$ and $M^*(\theta_p) = \theta_p^T M_{\theta\theta}\theta_p + 2M_{\theta f}^T \theta_p + f^T f$. La matriz hessiana de la función $J^*(u)$ es M_{uu} la cual es definida positiva para valores positivos de λ. Esto implica que la función es convexa (véase el teorema 3.3.8 de [2]) y además que existe un único mínimo (véase el teorema 3.4.2 de [2]). De esta manera se evita uno de los principales problemas que es el de la existencia de mínimos locales.

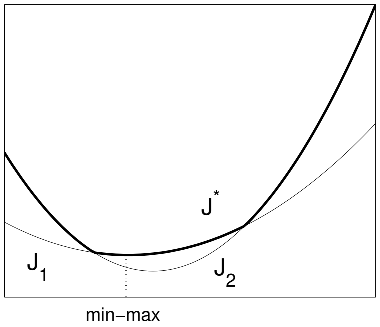
Sin embargo es digno de mencionar que el hecho de que la función J^* sea convexa en u, no garantiza que sea necesariamente diferenciable. Esto hace que el problema de optimización sea más difícil de resolver, y que por ejemplo métodos numéricos populares como los gradenciales no se puedan usar para resolver el problema min-max. Otros métodos como la búsqueda lineal de Nelder-Mead sí se pueden usar, pero tienen el inconveniente de que son mucho más costosos desde el punto de vista computacional.

4 Linealidad a trozos de la ley de control

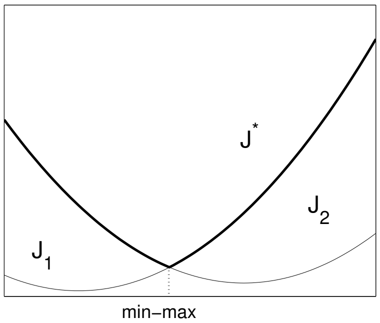
En esta sección se demostrará que la ley de control que resulta de aplicar la solución del problema min-max, depende linealmente del estado del proceso.

En primer lugar, hay que recordar que, tal y como se demostró en la sección 3, la función J^* es una función cuadrática a trozos de u. Cada región es debida a un vértice diferente del politopo Θ. De la misma manera, cada región se puede ver como una región del dominio de u, en la cual se utiliza un modelo concreto y diferente de las adyacentes para calcular el peor caso. El mínimo de esta función cuadrática a trozos es la solución del problema min-max. Esta solución del problema min-max (1) tiene una interpretación gráfica.

Considérese la forma más simple del Min-Max MPC con incertidumbres globales acotadas, es decir $N_u = N_2 = 1$. En este caso sólo aparecen dos funciones cuadráticas J_1 y J_2, una para el valor máximo considerado de la incertidumbre $\overline{\theta}$ y otra



(a)



(b)

Figura 1: Posibles soluciones del problema min-max para dos funciones cuadráticas: (a) La solución está en el mínimo de una de las dos curvas (b) La solución está en la intersección de las curvas

para el mínimo valor considerado de la incertidumbre $\underline{\theta}$. Recuérdese que la resolución del problema min-max consiste en encontrar el mínimo de la curva cuadrática a trozos máxima J^*, resultante de considerar para cada valor de u los valores de J_1 y J_2. El mínimo estará, o bien en el mínimo de una de las funciones cuadráticas J_1, J_2, o en el punto de intersección de ambas. Ambas situaciones se ilustran en la figura 1.

La situación se puede generalizar para un conjunto arbitrario de horizontes, de manera que se puede establecer el lema 1:

Lema 1 *La solución de un problema min-max para un conjunto de funciones cuadráticas está, o bien en el mínimo de una de las funciones, o bien en el punto de intersección de dos o más de ellos.*

Considérese un modelo de predicción lineal y un proceso cuyo estado en un momento dado es tal, que la solución del min-max está en el mínimo de una de las funciones cuadráticas denotada por J_p. Esta función está relacionada con el vértice del politopo θ_p. Se puede ver fácilmente que la solución del min-max da un valor para la acción de control que se ha de aplicar, coincidente con el calculado mediante un MPC, que utilizase como modelo de predicción el modelo nominal de la planta, más un modelo lineal que corresponde a la contribución de la realización extrema de la incertidumbre representada por el vértice θ_p. Como ambos modelos son lineales, el modelo resultante también lo es y por tanto, la ley de control para el proceso en ese estado es también lineal. Si esa situación se mantiene en un cierto entorno del estado del proceso, se tendrá que existe un cierto entorno en el cual, la ley de control que resulta de resolver el problema min-max es una ley de control lineal.

Teorema 1 *Dado un modelo de predicción lineal y un proceso para el cual en el estado $y(t)$ la solución del min-max se alcanza en uno de los mínimos de una de las funciones cuadráticas, entonces existe un entorno de $y(t)$ en el cual el Min-Max MPC con incertidumbres globales acotadas resulta ser una ley de control lineal.*

Demostración Usando el concepto de min-max, si la solución de dicho problema para $y(t)$ se da en $u = u^*$, coincidiendo con el mínimo de la función cuadrática relacionada con el vértice del politopo $\theta = \theta_p$, es fácil ver entonces que se verifica lo siguiente:

$$J_p(u^*, y(t)) \geq J(u^*, y(t)) + h_1 \qquad \forall \theta \neq \theta_p$$

donde h_1 es un cierto valor positivo. Si el estado del proceso cambia de $y(t)$ a $y(t) + \delta y(t)$, el valor de u donde se da el mínimo de la función cuadrática relacionada con el vértice del politopo $\theta = \theta_p$, cambiará también de acuerdo a $u^* + \delta u^*$. Para probar el teorema 1 se tiene que garantizar que la siguiente desigualdad es válida en un cierto entorno de $y(t)$:

$$\begin{aligned} J_p(u^* + \delta u^*, y(t) + \delta y(t)) \;\geq\; & J(u^* + \delta u^*, y(t) + \delta y(t)) \\ & + h_2 \;\; \forall \theta \neq \theta_p \end{aligned}$$

Es fácilmente comprobable que la variación del estado del proceso $\delta y(t)$ se traduce en una variación del valor de la respuesta libre a la hora de calcular las predicciones. Es decir, $\delta y(t)$ puede ser reemplazado por δf. Más aún, el cambio en la posición del mínimo es también una función lineal de δf debido a la linealidad de la ley de control en u^*. Para encontrar el valor exacto de δu^*, se debe resolver:

$$\frac{\partial J_p(u, f + \delta f)}{\partial u} = 0$$

que da como resultado:

$$\delta u^* = -M_{uu}^{-1} G_u^T \delta f$$

Empleando el resultado anterior se puede calcular la diferencia entre J_p y J para el nuevo valor del estado del proceso y la nueva posición del mínimo:

$$\begin{aligned} & J_p(u^* + \delta u, y(t) + \delta f) - J(u^* + \delta u, y(t) + \delta f) \geq \\ & \qquad h_1 - 2(\theta_p^T - \theta^T)(M_{\theta u} M_{uu}^{-1} G_u^T + G_\theta^T)\delta f \end{aligned}$$

Finalmente, se escoge un $\delta y(t)$ que verifique la siguiente desigualdad:

$$h_1 - 2(\theta_p^T - \theta^T)(M_{\theta u} M_{uu}^{-1} G_u^T + G_\theta^T)\delta f \geq 0 \qquad (8)$$

y se puede concluir entonces que el mínimo de J_p en ese entorno particular de $y(t)$ sigue perteneciendo a la función J^*. Más aún, debido a que J^* es convexa (véase la sección 3), sólo posee un mínimo global, por lo que se puede concluir que el mínimo de J_p es la solución del problema min-max para ese entorno particular de $y(t)$. Por tanto, existe una ley de control lineal en este entorno de $y(t)$ y queda así completa la demostración.

También se puede comprobar que cuando la solución del min-max está en la intersección de dos o mas curvas, la ley de control que resulta es también lineal en un cierto entorno de $y(t)$. Este resultado se enuncia en el teorema 2.

Teorema 2 *Dado un modelo de predicción lineal y un proceso para el cual en el estado $y(t)$ la solución del min-max se alcanza en la intersección de dos o más funciones cuadráticas, entonces existe un entorno de $y(t)$ en el cual el Min-Max MPC con incertidumbres globales acotadas resulta ser una ley de control lineal.*

Demostración En primer lugar, se ha de probar que la solución en el punto de intersección es una función lineal del estado del proceso. Considérese la intersección de dos funciones cuadráticas debido a las realizaciones extremas de la incertidumbre θ_1, θ_2:

$$J_1(u, y(t)) = J_2(u, y(t)) \qquad (9)$$

Teniendo en cuenta la expresión (5):

$$\begin{aligned} & \theta_1^T M_{\theta\theta} \theta_1 + 2\theta_1^T M_{\theta u} u + 2f^T G_\theta \theta_1 = \\ & \quad \theta_2^T M_{\theta\theta} \theta_2 + 2\theta_2^T M_{\theta u} u + 2f^T G_\theta \theta_2 \end{aligned} \qquad (10)$$

lo cual conduce a:

$$\begin{aligned} 2(\theta_1^T - \theta_2^T) M_{\theta u} u \;&=\; (\theta_2^T M_{\theta\theta} \theta_2 - \theta_1^T M_{\theta\theta} \theta_1) \\ &+\; 2f^T G_\theta (\theta_2 - \theta_1) \end{aligned} \qquad (11)$$

La expresión (11) representa una restricción del tipo igualdad que debe ser satisfecha por la solución del problema min-max. De este modo, la solución del problema min-max es la solución del siguiente problema de optimización cuadrática con restricciones:

$$\begin{aligned} & \min_u J_1(u, y(t)) \qquad (12) \\ & \quad s.t. \quad (11) \end{aligned}$$

Dado que la restricción es del tipo igualdad, podemos transformar el problema anterior en un problema de optimización cuadrática sin restricciones, sustituyendo una de las variables de decisión por una combinación lineal de las demás que se obtiene directamente de la restricción que aparece en (12). Es decir, el problema de Nu variables de decisión con restricciones se transforma en uno de $Nu-1$ sin restricciones. La solución de este problema se sabe que resulta ser una relación lineal entre el estado del proceso y los incrementos en la acción de control.

Comentario 1 *Dado que la restricción de igualdad debida a la intersección de dos curvas reduce en una las variables de decisión, se desprende que el número máximo de curvas que se podrán considerar en una intersección será en el caso extremo N_u+1. En este caso, la solución del problema (12) viene determinada de manera unívoca por las restricciones de igualdad que aparecen y no es necesaria minimización alguna.*

La solución del problema min-max permanecerá en un el punto de intersección de las curvas cuadráticas, mientras ninguno de los minimizadores de ninguna de las curvas formen parte de la función J^*. Para completar la demostración tenemos que mostrar que existe un entorno del estado del proceso en el cual para un pequeño cambio $\delta y(t)$ se mantiene esa situación. El procedimiento para demostrar esto es análogo al usado en la demostración del teorema 1.

5 Fronteras entre un tipo y otro de solución

En esta sección se analizará la transición de un tipo a otro de solución del problema min-max y la caracterización de esta transición en el espacio de estado del proceso. Se presenta un método para obtener una expresión del lugar geométrico del espacio de estado del proceso, en el cual la solución del problema min-max pasa de estar en el mínimo de una de las funciones cuadráticas a estar en la intersección de dos o más de esas curvas.

Como punto de partida se establece el siguiente lema:

Lema 2 *Si la solución del problema min-max coincide con uno de los mínimos de una de las funciones cuadráticas J_p, entonces el cambio a un punto de intersección se produce cuando el mínimo coincide con el punto de intersección.*

Del lema anterior se ve facilmente que la ecuación que describe el lugar geométrico de la región de frontera es:

$$J_p(u^*, y(t)) = J_i(u^*, y(t)) \tag{13}$$

$$J_p(u^*, y(t)) \geq J_l(u^*, y(t)) \qquad \forall l \neq p, i \tag{14}$$

donde u^* es el mínimo de J_p, J_i es otra de las curvas que intersectan y J_l aquellas funciones que no son parte de la función J^* para ese valor de u^*. El objetivo es derivar una expresión de u^* a partir de la ecuación (5). Para obtener u^* hay que resolver:

$$\frac{\partial J_p(u, y(t))}{\partial u} = 0$$

Tomando en cuenta la expresión (5) la ecuación anterior se puede poner como:

$$u^* = -M_{uu}^{-1}(M_{\theta u}^T \theta_p + M_{uf}) \tag{15}$$

Usando el resultado de la expresión (15) en la ecuación (13) se tiene:

$$\begin{aligned}&(\theta_p^T M_{\theta\theta}\theta_p - \theta_i^T M_{\theta\theta}\theta_i) + 2f^T G_\theta(\theta_p - \theta_i) \\ &-2(\theta_p^T - \theta_i^T)M_{\theta u}M_{uu}^{-1}(M_{\theta u}^T\theta_p + G_u^T f) = 0\end{aligned} \tag{16}$$

agrupando términos:

$$\begin{aligned}&(\theta_p^T M_{\theta\theta}\theta_p - \theta_i^T M_{\theta\theta}\theta_i - 2(\theta_p^T - \theta_i^T)M_{\theta u}M_{uu}^{-1}M_{\theta u}^T\theta_p) + \\ &2(\theta_p^T - \theta_i^T)(G_\theta^T - M_{\theta u}M_{uu}^{-1}G_u^T)f = 0\end{aligned} \tag{17}$$

Finalmente, la desigualdad (14) se puede reescribir usando la expresión (15) como:

$$\begin{aligned}&-(\theta_p^T M_{\theta\theta}\theta_p - \theta_l^T M_{\theta\theta}\theta_l - 2(\theta_p^T - \theta_l^T)M_{\theta u}M_{uu}^{-1}M_{\theta u}^T\theta_p) \\ &-2(\theta_p^T - \theta_l^T)(G_\theta^T - M_{\theta u}M_{uu}^{-1}G_u^T)f \leq 0 \quad \forall l \neq p, i\end{aligned} \tag{18}$$

Comentario 2 *La ecuación (17) describe un hiperplano, lo cual es congruente con el hecho de que es la intersección de dos hiperplanos, dado que la ley de control en ambas regiones es lineal en el espacio de estado del proceso. Por otra parte, el valor de J_p y J_i en todo este hiperplano es el mismo, por lo cual podemos concluir que la ley de control es lineal a trozos y continua (aunque no continuamente diferenciable).*

6 Un ejemplo ilustrativo

Para ilustrar los resultados anteriores se empleará un sistema de primer orden, el cual puede ser descrito mediante un modelo CARIMA:

$$y_{k+1} = 1.9y_k - 0.9y_{k-1} + 0.5\Delta u_k + \theta_{k+1} \tag{19}$$

con $-0.1 \leq \theta \leq 0.1$. Se calcula una ley de control Min-Max MPC usando los siguientes parámetros: $N_u = 2, N_2 = 2, \lambda = 1$. En este caso las predicciones son calculadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} y_{k+1} \\ y_{k+2} \end{bmatrix} &= G_u \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \Delta u_{k+1} \end{bmatrix} + G_\theta \begin{bmatrix} \theta_{k+1} \\ \theta_{k+2} \end{bmatrix} \\ &+F_y \begin{bmatrix} y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix}\end{aligned}$$

con:

$$G_u = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.95 & 0.5 \end{bmatrix} G_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_y = \begin{bmatrix} -0.9 & 1.9 \\ -1.71 & 2.71 \end{bmatrix}$$

Utilizando las expresiones (17) y (18) podemos establecer una partición del espacio de salidas del proceso, en la cual se indiquen que tipo de control existe en cada zona. De esta manera, habrá zonas en las que la solución del min-max se alcance en un mínimo de una de las curvas cuadráticas J_i. Por otra parte, tendremos zonas en las que la solución se alcance en la intersección de varias curvas. Para el sistema que se trata en esta sección se han calculado todas las posibles situaciones, y utilizando las desigualdades que aparecen en (18) se han eliminado las partes de las rectas (17) que no corresponden a las fronteras entre zona y zona. El resultado se muestra en la figura 2. En esa figura se muestran tres zonas en las que se incluyen todas las regiones existentes. Aquellas zonas codificadas con una sola cifra corresponden a regiones del primer tipo, mientras que aquellas que se indican con dos cifras corresponden a regiones en las que la solución del min-max se alcanza en la intersección de las dos curvas indicadas por cada una de las cifras.

Puede observarse en la figura 2 que no aparece ninguna zona vinculada a la intersección de la curva J_2 con J_3. Esta situación se refleja en el hecho de que esta intersección no pertenece nunca a la curva J^*, lo cual se manifiesta en que no existe ningún punto de la región indicada por (17) que satisfaga las restricciones (18). En efecto, a continuación se indican la ecuación correspondiente a una hipotética región debida a la intersección de J_2 con J_3 y las desigualdades asociadas:

$$-0.0349 + \begin{bmatrix} -0.4323 & 0.8177 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix} = 0$$

$$0.0505 + \begin{bmatrix} -0.2774 & 0.4032 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix} \leq 0$$

$$0.1364 + \begin{bmatrix} 0.7098 & -1.2209 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix} \leq 0$$

Puede comprobarse fácilmente que no existe ningún punto de la recta que satisfaga las desigualdades.

Una vez establecida la partición del espacio de salidas del proceso, se procederá a continuación a caracterizar la ley de control en una zona restringida situada entorno al origen. En la figura 3 se muestran los valores de Δu_k, calculados numéricamente, para ese entorno en el espacio de las salidas del proceso. Claramente aparecen tres regiones, correspondientes a dos zonas en las cuales la solución del problema min-max está en un mínimo de una de las curvas cuadráticas y una zona en la que el mínimo está en la intersección de esas dos curvas. En la zona inferior la solución del min-max está en el mínimo de la función J_1, la cual corresponde a la realización de la incertidumbre $[0.1\ \ 0.1]^T$. La región superior corresponde al

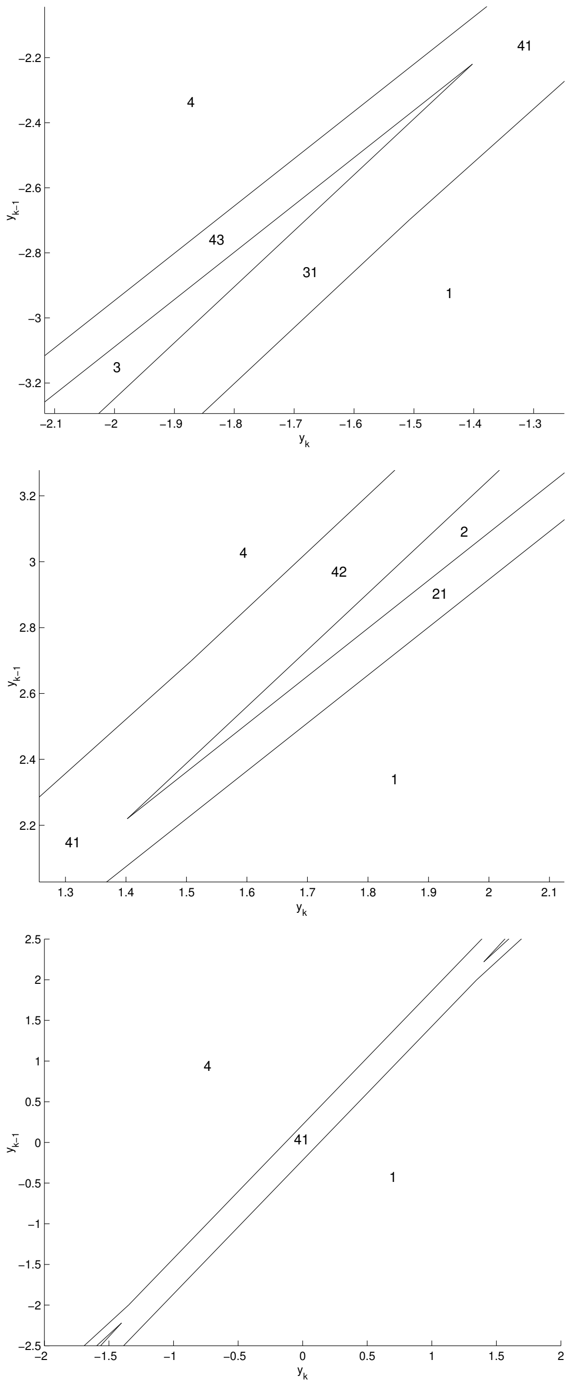


Figura 2: Partición del espacio de salidas del proceso para el ejemplo. Se muestran tres zonas donde se dan todos los casos existentes. Las zonas marcadas con una cifra son aquellas en las que la solución del min-max se alcanza en el mínimo de la curva indicada. Si el número es de dos cifras indica que la solución está en la intersección de las curvas indicadas por cada cifra.

mínimo de J_4, debido a la realización de la incertidumbre $[-0.1 \; -0.1]^T$. La región central es debida a la intersección de J_1 y J_4. Las fronteras pueden ser calculadas para cada región usando las expresiones (17) y (18). Para la frontera entre la región superior y la central esas expresiones dan como resultado:

$$-0.2156 + \begin{bmatrix} 0.9873 & -1.6242 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix} = 0 \quad (20)$$

$$0.0747 + \begin{bmatrix} -0.7098 & 1.2209 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix} \leq 0 \quad (21)$$

$$-0.0111 + \begin{bmatrix} -0.2775 & 0.4032 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix} \leq 0 \quad (22)$$

Las desigualdades (21) y (22) son necesarias para asegurar que el lugar correspondiente a la frontera es parte de J^*. La desigualdad (21) elimina la parte de la frontera que presenta un valor de J inferior que el de la función cuadrática J_2 y (22) realiza la misma operación con J_3. De manera similar podemos calcular la región entre la región inferior y la central resultando:

$$-0.2156 + \begin{bmatrix} -0.9873 & 1.6242 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix} = 0 \quad (23)$$

$$-0.0111 + \begin{bmatrix} 0.2775 & -0.4032 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix} \leq 0 \quad (24)$$

$$0.0747 + \begin{bmatrix} 0.7098 & -1.2209 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix} \leq 0 \quad (25)$$

La figura 4 muestra una vista desde arriba de la figura 3, en la que se superponen las regiones de frontera calculadas en las expresiones (20)-(25). Las restricciones no están activas en el espacio de salidas del proceso que se muestra, pero sí pueden estar activas en otras regiones donde la solución del min-max se alcanza para otras realizaciones de la incertidumbre.

Usando las expresiones derivadas en las secciones 4 y 5 es bastante fácil encontrar una solución en forma explícita de la ley de control que se aplica en este ejemplo. En primer lugar, se ha de calcular la ley de control en cada región. En (26) y (28) se dan las expresiones para la ley de control Min-Max MPC en las regiones superior e inferior. Para encontrar la ley de control en la región central se debe resolver el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} &\min_u J_4(u, y(t)) \\ &\quad s.t. \\ &\Delta u_{k+1} = 4.0407 y_{k-1} - 6.730345 y_k - 2.2448 \Delta u_k \end{aligned}$$

Tal y como se menciona en la sección 4, este problema se puede transformar fácilmente en un problema de optimización sin restricciones cuya solución da la expresión (27). Estos resultados se

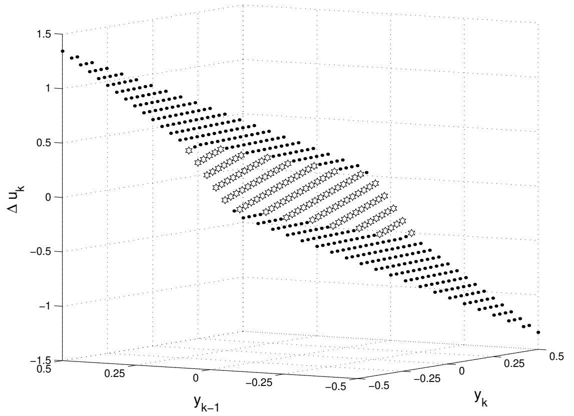


Figura 3: Solución del problema min-max en espacio de salidas del proceso para el ejemplo (solo se muestra Δu_k)

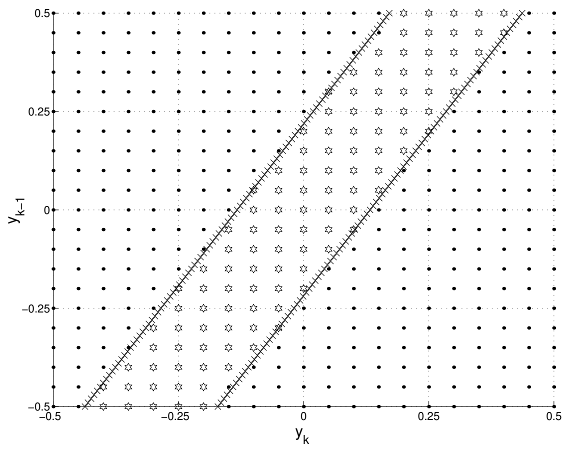


Figura 4: Vista superior de la solución del Min-Max en el espacio de las salidas del proceso para el ejemplo, superponiéndose las regiones de frontera calculadas en las expresiones (20)-(25) (solo se muestra Δu_k)

pueden unir para producir una ley de control lineal a trozos en el espacio de salidas del proceso usado en este ejemplo:

$$\mathbf{y} \in R_4 \quad u_k = 0.1371 + 0.8872 y_{k-1} - 1.5262 y_k \quad (26)$$
$$\mathbf{y} \in R_{42} \quad u_k = 1.451 y_{k-1} - 2.4685 y_k \quad (27)$$
$$otro \quad u_k = -0.1371 + 0.8872 y_{k-1} - 1.5262 y_k \quad (28)$$

donde $\mathbf{y}$ es $[y_{k-1} y_k]^T$ y:

$$R_4 = \left\{ y \mid -0.2156 + \begin{bmatrix} 0.9873 & -1.6242 \end{bmatrix} y > 0 \right\}$$
$$R_{42} = \left\{ y \mid -0.2156 + \begin{bmatrix} 0.9873 & -1.6242 \end{bmatrix} y \leq 0 \text{ Y } -0.2156 + \begin{bmatrix} -0.9873 & 1.6242 \end{bmatrix} y \leq 0 \right\}$$

Para terminar el estudio de este ejemplo se muestra una simulación para el sistema (19) en la figura 5. La salida para el sistema sometido a la ley de control formulada en las expresiones (26)-(28), se compara con la que se produce cuando la salida del sistema se regula con un GPC sin restricciones convencional. El mismo conjunto de horizontes y ponderación del esfuerzo de control se ha utilizado en ambos casos. El valor de la incertidumbre es cero hasta el instante de muestreo 20, momento en el que cambia a 0.07, y finalmente en el instante 30 toma un valor de -0.02.

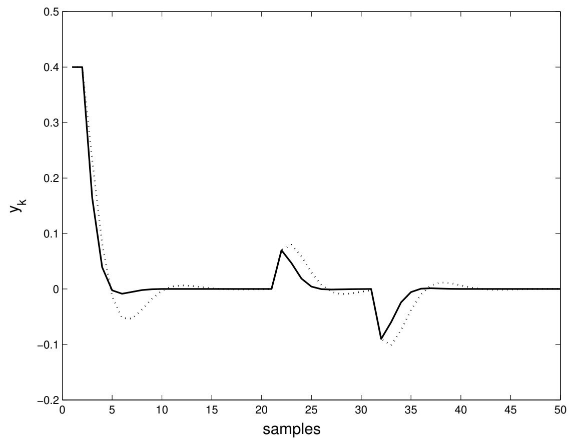


Figura 5: Ejemplo de respuesta temporal del sistema con la ley de control formulada en las expresiones (26)-(28) (trazo sólido), comparado con un GPC sin restricciones (trazo discontinuo) usando los mismos parámetros del controlador

7 Conclusiones

En este artículo se ha presentado la naturaleza lineal a trozos del Min-Max MPC con norma cuadrática e incertidumbres globales acotadas. Estos resultados se ilustran con un ejemplo. En ese ejemplo se apunta de manera implícita que es posible obtener una forma explícita de la ley de control en función del estado del proceso. De esta manera, se evitaría la carga de cálculo que tradicionalmente está asociada a las técnicas Min-Max MPC y que limitan su aplicación a procesos lentos. Las futuras direcciones de trabajo pasan por especificar un procedimiento general para obtener la forma explícita del Min-Max MPC con norma cuadrática e incertidumbres globales acotadas. En ese sentido existen ya resultados ([12]) formulados en base a las propiedades de J^*. Por otra parte, con el desarrollo de herramientas matemáticas apropiadas se podrían extender los resultados de ([5],[3]) a la formulación que aquí se utiliza. En esa línea muy recientemente ha aparecido la solución en forma explícita del Min-Max MPC con norma ∞ ([4]). Aunque el resultado presentado en ese trabajo no puede ser aplicado directamente al problema presentado aquí, da una idea de que puede ser resuelto de manera muy conveniente desde el punto de vista de su aplicación y del análisis de sus propiedades. Finalmente, otras cuestiones que se han de tratar son: caracterizar la estabilidad de sistemas bajo esta ley de control y el efecto de añadir restricciones al cálculo de la ley de control.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la CICYT su ayuda para el desarrollo de este trabajo mediante el proyecto QUI99-0663-C02-01.

Referencias

[1] J.C. Allwright. *Advances in Model-Based Predictive Control*, chapter On min-max Model-Based Predictive Control. Oxford University Press, 1994.

[2] M.S. Bazaraa and C.M. Shetty. *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms.* John Wiley & Sons, 1979.

[3] A. Bemporad, F. Borrelli, and M. Morari. Explicit solution of LP-based model predictive control. In *Proc. 39th IEEE Conf. on Decision and Control*, December 2000.

[4] A. Bemporad, F. Borrelli, and M. Morari. Robust Model Predictive Control: Piecewise Linear Explicit Solution. In *Proc. European Control Conference, ECC'01*, August 31 - September 3 2001.

[5] A. Bemporad, M. Morari, V.Dua, and E. N. Pistikopoulos. The explicit solution of model predictive control via multiparametric quadratic programming. In *Proc. American Control Conference*, June 2000.

[6] E. F. Camacho and Manuel Berenguel. Robust adaptive model predictive control of a

solar plant with bounded uncertainties. *International Journal of Adaptive and Signal Processing*, 11:311–325, 1997.

[7] E.F. Camacho and C. Bordons. *Model Predictive Control*. Springer-Verlag, 1999.

[8] P.J. Campo and M. Morari. Robust model predictive control. In *Proc. American Control Conference*, pages 1021–1026, June 10-12 1987.

[9] Y.H. Kim, W.H. Kwon, and Y.I. Lee. Min-max generalized predictive control with stability. *Computers & Chemical Engineering*, 22(12):1851–1858, 1998.

[10] J.H. Lee and Zhenghong Yu. Worst-case formulations of model predictive control for systems with bounded parameters. *Automatica*, 33(5):763–781, 1997.

[11] D. Megías and J. Serrano C. de Prada. Min-max constrained quasi-infinite horizon model predictive control using linear programming. In *Proceedings of the International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes, ADCHEM 2000*, June 14-16 2000.

[12] D.R. Ramírez and E.F. Camacho. Properties of Min-Max MPC with global uncertainties. Internal Report, Dept. Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad de Sevilla, 2000.

[13] P.O.M. Scokaert and D.Q. Mayne. Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(8):1136–1142, 1998.

[14] S.M. Veres and J.P. Norton. Predictive self-tuning control by parameter bounding and worst case design. *Automatica*, 29(4):911–928, 1993.