

## Control Óptimo- $L_2$ Basado en Red Mediante Funcionales de Lyapunov-Krasovskii

Pablo Millán<sup>a,\*</sup>, Luis Orihuela<sup>a</sup>, Carlos Vivas<sup>a</sup>, Francisco R. Rubio<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad de Sevilla  
Camino de los Descubrimientos s/n, Isla de la Cartuja, Sevilla, España

### Resumen

En el presente trabajo se estudia el control óptimo con rechazo de perturbaciones  $L_2$  para sistemas lineales controlados a través de red. En estos sistemas el lazo de control se cierra utilizando una red de comunicaciones. Entre los problemas que introduce la red se encuentran posibles retrasos, en general aleatorios, así como pérdidas de paquetes. Desde un enfoque basado en funcionales de Lyapunov-Krasovskii (LKF) se aborda el diseño de controladores óptimos que, dado un nivel deseado de atenuación de perturbaciones, establezcan el sistema minimizando a su vez un funcional de coste. En el artículo se desarrolla, en primer lugar, una formulación y solución general para el problema. Posteriormente, se resuelve para un funcional de Lyapunov-Krasovskii particular. El comportamiento de los controladores obtenidos se compara con el dado por un control clásico LQR en un escenario de control de distancia en carretera. Copyright © 2012 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

**Palabras Clave:** Redes de comunicación, Compensación de retrasos, Métodos de Lyapunov, Control óptimo, Retardo temporal.

### 1. Introducción

El notable desarrollo que la implantación de redes de comunicaciones ha tenido en muchos ámbitos de nuestra sociedad, ha propiciado un renovado interés de la Comunidad de Control por la utilización de redes de propósito general para la construcción de lazos de realimentación en aplicaciones de control automático. En otras palabras, emplear redes en principio no diseñadas para operar en tiempo real, para cerrar lazos de control. Esta nueva disciplina se ha dado en llamar, *sistemas de control en red*, *networked control systems* en inglés o, sencillamente, NCS.

Los beneficios asociados al empleo de redes de datos convencionales para aplicaciones de control son múltiples, Hespanha et al. (2007), Salt et al. (2008): reducción de costes, al no ser necesario establecer redes específicas para aplicaciones de control; flexibilidad y portabilidad, ya que los lazos de control trabajan sobre tecnologías bien establecidas en el mercado, etc. No obstante, la introducción de una red de comunicaciones para cerrar lazos de control introduce notables retos desde el punto de vista del diseño de la estrategia de control, así como de la estructura, topología y protocolos de la propia red. Los problemas

que conlleva esta tecnología derivan de la propia imperfección del proceso de comunicación: retrasos de transmisión, pérdidas de información, cuantificación de datos, etc.

La mayoría de las redes de datos hoy día disponibles están basadas en la transmisión de paquetes de datos sobre protocolos fiables, orientados a preservar la integridad de la información transmitida, lo que lleva asociado latencias en general no acotadas. Estas especificaciones son difícilmente compatibles con los estrictos requerimientos de tiempo real de un lazo de control que, como es bien sabido, imponen importantes restricciones en términos de latencia y pérdidas de información. El problema es aún más severo si el canal de comunicaciones es inalámbrico (WiFi, Bluetooth, ZigBee), ya que en estos casos las latencias se incrementan y el ancho de banda disponible suele ser otra restricción adicional.

La mayor parte de los trabajos sobre control de sistemas en red extienden los resultados de la teoría de control de sistemas discretos, considerando las peculiaridades del flujo de información en NCS. El objetivo de estos trabajos es garantizar estabilidad asintótica o práctica de los sistemas controlados frente a retrasos y/o pérdidas de información, ver Hokayem and Abdallah (2004) y Zampieri (2008). Pueden encontrarse trabajos que estudian la estabilidad de NCS frente a retrasos en las comunicaciones, Nikolakopoulos et al. (2008); Naghshtabrizi and Hespanha (2005); frente a pérdidas de datos, Xiong and Lam (2007); Azimi-Sadjadi (2003), con tasas de comunicación limi-

\* Autor en correspondencia

Correos electrónicos: [pmillan@cartuja.us.es](mailto:pmillan@cartuja.us.es) (Pablo Millán),  
[orihuela@us.es](mailto:orihuela@us.es) (Luis Orihuela), [vivas@us.es](mailto:vivas@us.es) (Carlos Vivas),  
[rubio@us.es](mailto:rubio@us.es) (Francisco R. Rubio)

tadas, Tatikonda and Mitter (2004), o con muestreo basado en eventos, Dormido et al. (2008).

Una herramienta muy utilizada para estudiar la estabilidad de los NCS son los funcionales de Lyapunov-Krasovskii, Mahmoud (2000). Con una correcta definición del funcional pueden tenerse en cuenta los retrasos y las pérdidas de paquetes inducidas por la red. Los funcionales de Lyapunov-Krasovskii han sido ampliamente utilizados para estudiar la estabilidad de sistemas con retrasos, véase por ejemplo Zhang and Yu (2008); Xu and Lam (2007) y las referencias citadas en éstos. A partir de la publicación de Mikheev et al. (1988), en la que un sistema muestreado era descrito como un sistema con retraso en la entrada, las contribuciones en el campo de sistemas continuos con retrasos pasaron a aplicarse a los sistemas muestreados y, más recientemente, a los sistemas de control a través de red, véase, por ejemplo, Yue et al. (2005); Meng et al. (2009).

En la práctica, sin embargo, no es sólo importante garantizar la estabilidad del sistema controlado a través de red, sino que es deseable poder imponer un adecuado nivel de desempeño. Un modo apropiado de tratar este problema es recurrir al control óptimo o al control de coste garantizado, cuyo objetivo es diseñar controladores que, respectivamente, minimicen o garanticen un valor máximo para un índice de comportamiento preestablecido.

Con respecto al control óptimo para sistemas con retrasos, muchos han sido los intentos de dar una solución satisfactoria a este problema. Debemos aquí mencionar los enfoques basados en el *Principio del máximo*, Kharatishvili (1961), Control de coste garantizado mediante la solución de desigualdades lineales matriciales (LMIs), Esfahani et al. (1998), el uso de operadores en espacios de dimensión infinita Delfour et al. (1975), y el uso de los principios de la Programación Dinámica, Krasovskii (1962), Ross and Flüge-Lotz (1969), Zhang et al. (2006).

En el contexto de la aplicación concreta de estos resultados para sistemas controlados a través de red, pueden encontrarse en los últimos años algunos trabajos para redes que introducen retrasos, Kosmidou and Boutalis (2006), o pérdidas de paquetes, Sinopoli et al. (2005); Gupta et al. (2007). Éstos últimos emplean una descripción estocástica de las pérdidas de paquetes y utilizan modificaciones del filtro de Kalman clásico.

En este trabajo se presenta un método general para el control óptimo de sistemas a través de red empleando funcionales de Lyapunov-Krasovskii. Adicionalmente, se introducen restricciones en la ganancia  $L_2$  del sistema, imponiendo así un cierto nivel de atenuación de las perturbaciones en la salida del sistema. El esquema utilizado permite tener en cuenta retrasos en ambos sentidos de la comunicación (sensor-controlador y controlador-actuador) así como eventuales pérdidas de paquetes, que se modelarán como retrasos adicionales en la comunicación.

Los datos de partida del problema son cotas para el retraso inducido por la red y para el máximo número de pérdidas de paquetes consecutivas. Asimismo, se especifica un valor máximo aceptable para la norma  $L_2$  del sistema y un funcional de coste. A partir de estos datos, el desarrollo de la solución se basa en el diseño de un funcional de Lyapunov-Krasovskii. Tras ciertos desarrollos matemáticos será necesario resolver un conjunto de

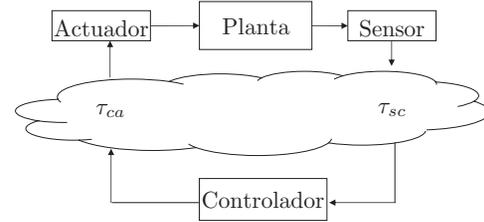


Figura 1: Esquema de un control basado en red

desigualdades lineales matriciales (LMIs) para probar la estabilidad del sistema. Dichos LMIs proporcionarán un controlador que trata de minimizar el funcional de coste teniendo en cuenta las características de la red y la cota impuesta en la norma  $L_2$  del sistema.

El artículo está estructurado del siguiente modo. En la sección 2 se lleva a cabo la descripción del problema de control, detallando también el modelo utilizado para el tratamiento matemático del NCS. En la sección 3 se formula un lema para introducir una solución general al problema, válida para cualquier funcional de Lyapunov-Krasovskii que cumpla ciertas condiciones de estructura y continuidad. En la sección 4 se deriva una solución particular al problema teniendo en cuenta el resultado de la sección anterior. En la sección 5 se aplica el método de diseño a un sistema concreto, al objeto de ilustrar el comportamiento del controlador diseñado. Por último, en la sección 6 se presentan las principales conclusiones que pueden extraerse de este trabajo.

## 2. Descripción del problema

Considérese un sistema continuo perturbado descrito en el espacio de estados:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_\omega \omega(t), \quad (1)$$

$$z(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (3)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  y  $z(t) \in \mathbb{R}^q$  son el vector de estado, el vector de señales de control y la salida, respectivamente;  $\omega(t)$  denota las perturbaciones externas;  $A$ ,  $B$  y  $B_\omega$  son matrices constantes de dimensiones adecuadas y  $x_0$  es la condición inicial.

Supóngase que el sistema (1)-(3) es controlado a través de una red de comunicaciones, como ilustra la Figura 1. La introducción de dicha red hace que, bajo una ley de control lineal, el sistema pueda ser descrito como un sistema continuo con una señal de control retrasada, idea que fue introducida por primera vez en Mikheev et al. (1988).

El sensor muestrea la salida de la planta de forma periódica, en los instantes  $t = j_k h$ , siendo  $h$  el tiempo de muestreo, y siendo  $j_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) números enteros tales que  $\{j_1, j_2, j_3, \dots\} \subseteq \{1, 2, 3, \dots\}$  y  $j_k < j_{k+1}$ . De esta forma, pueden tenerse en cuenta posibles pérdidas de paquetes por la red. Por ejemplo, observando la Figura 2, en el instante dado por  $j_k h$  se envía un paquete que se recibe correctamente en  $t_k$ . A continuación se pierden

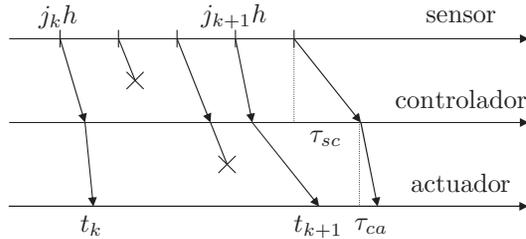
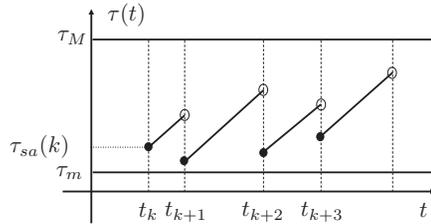


Figura 2: Esquema de tiempos

Figura 3: Evolución cualitativa de  $\tau(t)$ 

dos paquetes (marcados con una cruz) de forma consecutiva. El siguiente paquete que se recibe es el muestreado en el instante determinado por  $j_{k+1}h = (j_k + 3)h$ .

Se define el intervalo genérico  $t \in [t_k, t_{k+1})$  como el intervalo de tiempo en el que la señal de control aplicada a la planta permanece constante. El instante  $t_k$  es el tiempo en el que la señal de control, correspondiente al estado muestreado en  $t = j_k h$ , alcanza la planta.

Por tanto, la señal de control puede ser descrita del siguiente modo:

$$u(t) = Kx(t_k - \tau_{sc}(k) - \tau_{ca}(k)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (4)$$

donde  $\tau_{sc}(k)$  y  $\tau_{ca}(k)$  son los retardos que introduce la red para los datos muestreados en  $t = j_k h$ , en el sentido sensor-controlador y controlador-actuador, respectivamente (ver Figura 1). El retardo total de ida y vuelta  $\tau_{sa}(k)$  se define según  $\tau_{sa}(k) = \tau_{sc}(k) + \tau_{ca}(k)$ . En la Figura 2 puede verse un esquema de tiempos orientativo en el que se representan los retardos y las pérdidas de paquetes. Como se aprecia, cada pérdida de paquete hace que el intervalo genérico  $t \in [t_k, t_{k+1})$  se prolongue un tiempo de muestreo adicional.

De este modo, el sistema controlado (1)-(3) puede reescribirse como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t - \tau(t)) + B_\omega \omega(t), \quad (5)$$

$$z(t) = Cx(t) + DKx(t - \tau(t)), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (6)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [t_0 - \tau_M, t_0], \quad (7)$$

donde  $\tau(t) = t - t_k + \tau_{sa}(k)$ , y  $\tau_M$  es el retardo máximo admisible (ver Definición 1). Es fácil comprobar que  $\tau(t)$  es una función continua a trozos, ya que representa la diferencia temporal entre el tiempo de muestreo  $k$ -ésimo,  $j_k h$ , y el tiempo actual  $t$ . Tal y como se han definido previamente, cada pérdida de paquete conlleva un aumento de  $\tau(t)$  de hasta un tiempo de muestreo. La Figura 3 ilustra una posible evolución de  $\tau(t)$ .

Asociada al sistema (5)-(7) se define la siguiente función de coste a minimizar:

$$J(x(t), u(t)) = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt, \quad (8)$$

donde  $Q, R$  son matrices definidas positivas.

A continuación se introducen un conjunto de hipótesis que serán necesarias en adelante.

*Hipótesis 1.*

1. El sensor actúa de forma periódica. El controlador y el actuador lo hacen basándose en eventos. Es decir, el controlador calcula una nueva señal de control tan pronto como recibe una nueva medida del sensor, y el actuador aplica una nueva señal de control a la planta tan pronto como la recibe, manteniéndola con un mantenedor de orden cero.
2. Existen dos constantes  $\underline{\tau}_{sa}, \bar{\tau}_{sa} \geq 0$ , tales que se verifica la siguiente desigualdad (retardo de ida y vuelta acotado):

$$\underline{\tau}_{sa} \leq \tau_{sa}(k) \leq \bar{\tau}_{sa}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

3. El número máximo de pérdidas de paquetes consecutivas entre el sensor y el actuador está acotado por  $n_p \in \mathbb{N}$ .

Además, la siguiente definición será utilizada en lo sucesivo.

**Definición 1.** Atendiendo a las Hipótesis 2 y 3, es posible definir dos constantes  $\tau_m \geq 0$  y  $\tau_M > \tau_m$  tales que:

$$\tau(t) \geq \underline{\tau}_{sa} = \tau_m, \quad (10)$$

$$\tau(t) \leq (1 + n_p)h + \bar{\tau}_{sa} = \tau_M. \quad (11)$$

**Nota.** Atendiendo a esta definición, el número máximo de pérdidas de paquetes  $n_p$  sólo afecta al modelo en el valor del retardo máximo total  $\tau_M$ . Cada pérdida de paquete adicional hace aumentar la cota máxima para el retardo, al extender el periodo genérico  $t \in [t_k, t_{k+1})$ .

El objetivo de este trabajo es el diseño de controladores óptimos con rechazo de perturbaciones  $L_2$  para el control de sistemas a través de red.

### 3. Procedimiento General

#### 3.1. Formulación del problema

A continuación se formula de forma genérica el problema de control óptimo con rechazo de perturbaciones. Como se probará después, el diseño de un controlador apropiado para este problema podrá llevarse a cabo mediante la resolución de un problema de optimización.

**Definición 2.** El problema de Control Óptimo con Rechazo de Perturbaciones

Considérese que el sistema LTI descrito por (5)-(7) es controlado a través de una red de comunicaciones, la cual satisface (10)-(11). Dados:

- Un nivel deseado de atenuación de perturbaciones  $\gamma$ , y
- Una función de coste cuadrática  $J(x(t), u(t)) = \int_{t_0}^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt$ , con  $Q, R \geq 0$ ,

el problema de Control Óptimo con Rechazo de Perturbaciones consiste en encontrar un controlador lineal  $K$  tal que:

1. El sistema en lazo cerrado sea asintóticamente estable para  $\omega(t) \equiv 0$ ,
2. El controlador minimice la función de coste  $J(x(t), u(t))$  para  $\omega(t) \equiv 0$ ,
3. Bajo la suposición de condiciones iniciales nulas, la salida controlada  $z(t)$  satisfaga  $\|z(t)\|_2 \leq \gamma \|\omega(t)\|_2$  para cualquier perturbación no nula  $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$ .

Como se ha visto en el apartado anterior, el sistema controlado a través de red puede escribirse como un sistema con retrasos variables según (5)-(7). Además, dicho retraso variable es una función continua dentro del intervalo  $t \in [t_k, t_{k+1})$ . Por tanto, para estudiar la estabilidad del NCS pueden emplearse técnicas utilizadas en el ámbito de los sistemas con retrasos. Una de las técnicas más utilizadas es aquella basada en funcionales de Lyapunov-Krasovskii. Véase por ejemplo Xu and Lam (2008) y las referencias citadas en ese artículo. Existen otras aproximaciones, como la de Lyapunov-Razumikhin, cuyos resultados se han comprobado más conservadores para sistemas con retrasos variables en el tiempo.

Así, el primer paso para probar la estabilidad es escoger un funcional  $V(t, x_t)$  que recoja las características del sistema bajo estudio. De esta forma, pueden incluirse términos para tener en cuenta retrasos variables acotados superior e inferiormente (véase por ejemplo Jiang and Han (2008); Shao (2009)).

Para comprobar que el sistema es estable, el funcional de Lyapunov-Krasovskii debe cumplir (Mahmoud (2000)):

- (a)  $\alpha (\|\phi(0)\|) \leq V(t, x_t) \leq \beta (\|\phi\|)$   
 (b)  $\dot{V}(t, x_t) \leq -\varrho (\|\phi(0)\|)$

siendo  $\alpha, \beta, \varrho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  funciones continuas y no decrecientes.

Para sistemas de control a través de redes, el sistema con retraso equivalente (5)-(7) sólo está definido en intervalos finitos de tiempo,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ . Por tanto, no es posible hallar la derivada del funcional en todo instante de tiempo para comprobar la condición (b). Atendiendo a resultados en el campo de los sistemas híbridos Branicky et al. (1998), la solución a este problema pasa por encontrar un funcional cuya derivada verifique (b) dentro de los intervalos de tiempo finito y que, además, en los instantes entre intervalos, el funcional no crezca, es decir,

- (b1)  $\dot{V}(t, x_t) \leq -\varrho (\|\phi(0)\|), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1})$   
 (b2)  $V(t_k^-, x_{t_k^-}) \geq V(t_k^+, x_{t_k^+}), \quad \forall k \in \mathbb{N}_+$

En la práctica suelen escogerse funcionales continuos, de forma que no se produzcan discontinuidades en los tiempos de muestreo  $t_k$  y la condición (b2) se verifique. Teniendo en cuenta todas estas consideraciones, en la siguiente sección se presenta una solución general para el problema de Control Óptimo con Rechazo de Perturbaciones basado en funcionales de Lyapunov-Krasovskii.

### 3.2. Resultado principal

Para el desarrollo del resultado principal es necesario formular una serie de suposiciones o hipótesis previas.

**Hipótesis 2.** Dado un funcional de Lyapunov-Krasovskii continuo y cuadrático (LKF)  $V(t)$ , se asume que su derivada temporal para  $t \in [t_k, t_{k+1})$  puede escribirse de la siguiente forma:

$$\dot{V}(t) \leq \xi^T(t) \Xi(K, \gamma) \xi(t) - z(t)^T z(t) + \gamma^2 \omega^T(t) \omega(t), \quad (12)$$

donde  $\xi(t) \in \mathbb{R}^{n_\xi}$  es un vector de estado aumentado y  $\Xi(K, \gamma) \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi}$  es una matriz simétrica que depende, entre otras, del controlador  $K$  y del nivel deseado de atenuación de perturbaciones  $\gamma$ .

**Hipótesis 3.** El funcional de coste  $J$  puede escribirse como:

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [\xi^T(t) \Phi(K) \xi(t)] dt, \quad (13)$$

donde  $\Phi(K)$  es una matriz semidefinida positiva que puede depender del controlador  $K$ .

**Nota.** En el campo NCS, es común que la derivada del funcional pueda ser reescrita como (12). Véase por ejemplo Yue et al. (2005), Jiang et al. (2008) o Meng et al. (2009). Incluso en trabajos en los que no se tiene en cuenta el rechazo de perturbaciones, la derivada del LKF se escribe de la misma forma con  $z(t) \equiv 0$  y  $\omega(t) \equiv 0$ . Por tanto, la Hipótesis 1 no es en absoluto restrictiva.

**Nota.** La Hipótesis 2 es también una restricción suave. Por ejemplo, si el vector de estado aumentado se define como  $\xi^T(t) = [x^T(t) \ x^T(t - \tau(t))]$ , es fácil comprobar que  $\Phi(K) = \text{diag}(Q, K^T R K)$ .

A continuación, se presenta el resultado general en forma de lema que ofrece una solución genérica al problema que nos ocupa.

**Lema 1.** Supóngase que se verifican las Hipótesis 2 y 3. Entonces, el problema de Control Óptimo con Rechazo de Perturbaciones puede ser resuelto encontrando un controlador  $K$  tal que:

$$\min_K \alpha, \quad (14)$$

$$\text{sujeto a } \alpha \Xi(K, \gamma) < -\Phi(K) \quad (15)$$

$$\alpha > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (16)$$

**Demostración.** Para probar este lema, se va a demostrar que un controlador que resuelva el problema de optimización (14)-(16) también hace que se satisfagan todas las condiciones de la Definición 2.

1) Cuando no hay perturbaciones, esto es  $\omega(t) \equiv 0$ , y teniendo en cuenta (12) para  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , se verifica lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \xi^T \Xi(K, \gamma) \xi(t) - z(t)^T z(t) + \gamma^2 \omega^T(t) \omega(t) \\ &\leq \xi^T \Xi(K, \gamma) \xi(t). \end{aligned} \quad (17)$$

A partir de (17) y teniendo presentes la Hipótesis 3 y las ecuaciones (15)-(16), puede comprobarse que  $V(t)$  decrece para  $t \in [t_k, t_{k+1})$ . Como  $V(t)$  es continuo en  $[t_0, \infty)$ , entonces

$\dot{V}(x_t) \leq -\varrho \|x(t)\|^2$  para un  $\varrho > 0$  suficientemente pequeño, lo cual asegura la estabilidad asintótica del sistema (5)-(7), ver Hale and Verduyn Lunel (1993). La condición (b1) está, por tanto, verificada. Nótese que al ser el funcional  $V(t)$  continuo por la Hipótesis 2, la condición (b2) se verifica de facto.

2) Para  $\omega(t) \equiv 0$ , operando a partir de la condición (15) y la Hipótesis 2 se obtiene:

$$\dot{V}(t) \leq \xi^T \Xi(K, \gamma) \xi(t) < -\xi^T(t) \frac{1}{\alpha} \Phi(K) \xi(t). \quad (18)$$

Integrando ambos lados de (18) desde  $t_k$  hasta  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , se llega a

$$V(t) - V(t_k) < -\frac{1}{\alpha} \int_{t_k}^t [x^T(s) Q x(s) + u^T(s) R u(s)] ds.$$

Obviamente  $\bigcup_{k=1}^{\infty} [t_k, t_{k+1}) = [t_0, \infty)$ . Al cumplirse que  $V(t)$  es continuo en  $t$ , puede verse que,

$$V(t) - V(t_0) \leq -\frac{1}{\alpha} \int_{t_0}^t [x^T(s) Q x(s) + u^T(s) R u(s)] ds.$$

Cuando  $t \rightarrow \infty$ , la estabilidad asintótica del sistema implica que  $V(t) \rightarrow 0$ , así que,

$$\begin{aligned} -V(t_0) &< -\frac{1}{\alpha} \int_{t_0}^{\infty} [x^T(s) Q x(s) + u^T(s) R u(s)] ds \\ \Rightarrow J &< \alpha V(t_0). \end{aligned}$$

El valor de  $V(t_0)$  depende de las condiciones iniciales  $\phi(t)$  y es una medida de su norma. Por tanto, minimizando  $\alpha$  la función de coste  $J$  es minimizada independientemente del valor que tengan las condiciones iniciales.

3) Para  $\omega \neq 0$ , bajo condiciones iniciales nulas se tiene que:

$$\dot{V}(t) \leq -z(t)^T z(t) + \gamma^2 \omega^T(t) \omega(t). \quad (19)$$

Integrando ambos lados de (19) y utilizando los mismo argumentos de continuidad que antes, puede verse que,

$$V(t) - V(t_0) \leq -\int_{t_0}^t z^T(s) z(s) ds + \int_{t_0}^t \gamma^2 \omega^T(s) \omega(s) ds.$$

Cuando el tiempo tiende a infinito  $t \rightarrow \infty$ , y teniendo en cuenta que bajo condiciones iniciales nulas se cumple  $V(t_0) = 0$  y que el funcional es definido positivo, se puede llegar a la siguiente ecuación:

$$\int_{t_0}^{\infty} z^T(s) z(s) ds \leq \int_{t_0}^{\infty} \gamma^2 \omega^T(s) \omega(s) ds,$$

por lo que  $\|z(t)\|_2 \leq \gamma \|\omega(t)\|_2$ . □

El Lema 1 propone una solución general para el problema de Control Óptimo con Rechazo de Perturbaciones. Puede utilizarse para diferentes LKFs y para distintas restricciones de la red.

#### 4. Una solución particular

En esta sección utilizaremos los resultados anteriores para encontrar una solución particular al problema de control que nos ocupa. El funcional de Lyapunov-Krasovskii en el que se basa la solución es el siguiente:

$$\begin{aligned} V(t) = & x^T(t) P x(t) + \int_{t-\tau_m}^t x^T(s) Q_1 x(s) ds + \int_{t-\tau_M}^t x^T(s) Q_2 x(s) ds \\ & + \int_{-\tau_M}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds d\theta + \int_{-\tau_M}^{-\tau_m} \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s) ds d\theta. \quad (20) \end{aligned}$$

donde todas las matrices son definidas positivas. De esta forma conseguimos un funcional definido positivo que además es continuo.

El siguiente teorema propone una solución particular para el problema de Control Óptimo con Rechazo de Perturbaciones.

**Teorema 1.** Dados los escalares  $\tau_m, \tau_M, \gamma, \epsilon > 0$  y las matrices  $Q$  y  $R$ , si las matrices  $X, \tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2 > 0$  y  $Y, \tilde{N}_i, \tilde{M}_i, \tilde{S}_i$ , ( $i = 1, 2$ ) de dimensiones apropiadas resuelven el siguiente problema de optimización para los dos vértices del politopo  $\tau(t)$  definidos por (10)-(11),

$$\begin{aligned} \min & \alpha \\ \text{sujeto a} & (21), \end{aligned}$$

entonces, el controlador óptimo con rechazo de perturbaciones para el sistema (5)-(7) viene dado por  $K = YX^{-1}$ .

**Demostración.** Para probar el teorema anterior es suficiente mostrar que la derivada del LKF (20) puede escribirse de la forma exigida en la Hipótesis 2 (12). También habrá que comprobar que el problema de optimización que se plantea es equivalente a aquel descrito por las ecuaciones (14)-(16) del Lema 1.

Tomando la derivada temporal de  $V(t)$  a lo largo de las trayectorias de (5) se obtiene que, para  $t \in [t_k, t_{k+1})$ :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & 2x^T(t) P \dot{x}(t) + x^T(t) (Q_1 + Q_2) x(t) \\ & - x^T(t - \tau_m) Q_1 x(t - \tau_m) - x^T(t - \tau_M) Q_2 x(t - \tau_M) \\ & + \dot{x}^T(t) (\tau_M Z_1 + \Delta \tau Z_2) \dot{x}(t) - \int_{t-\tau_M}^t \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds \\ & - \int_{t-\tau_M}^{t-\tau_m} \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s) ds. \quad (22) \end{aligned}$$

El vector de estado aumentado se define como:  $\xi^T(t) = [x^T(t), x^T(t - \tau(t)), x^T(t - \tau_m), x^T(t - \tau_M), \omega^T(t)]$ . Ahora se añaden en el lado derecho de la igualdad (22) los siguientes términos nulos:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\xi^T(t) \tilde{N} \left[ x(t) - x(t - \tau(t)) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds \right], \\ 0 &= 2\xi^T(t) \tilde{S} \left[ x(t - \tau(t)) - x(t - \tau_M) - \int_{t-\tau_M}^{t-\tau(t)} \dot{x}(s) ds \right], \\ 0 &= 2\xi^T(t) \tilde{M} \left[ x(t - \tau_m) - x(t - \tau(t)) - \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_m} \dot{x}(s) ds \right], \\ 0 &= \gamma^2 \omega^T(t) \omega(t) - \gamma^2 \omega^T(t) \omega(t), \\ 0 &= \xi^T(t) \tilde{C} \tilde{C}^T \xi(t) - z^T(t) z(t). \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Gamma} & (\tau(t) + \varepsilon)\tilde{N} & (\tau(t) + \varepsilon - \tau_m)\tilde{M} & (\tau_M + \varepsilon - \tau(t))\tilde{S} & \tau_M\tilde{A} & \Delta\tau\tilde{A} & \tilde{C} & \tilde{Q} & \tilde{R} \\ * & -(\tau(t) + \varepsilon)\tilde{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -(\tau(t) + \varepsilon - \tau_m)\tilde{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -(\tau_M + \varepsilon - \tau(t))(\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\tau_M X \tilde{Z}_1^{-1} X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\Delta\tau X \tilde{Z}_2^{-1} X & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\alpha Q^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\alpha R^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (21)$$

donde

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \tilde{M}_1 & -\tilde{S}_1 & B_\omega \\ * & \theta_{22} & \tilde{M}_2 & -\tilde{S}_2 & 0 \\ * & * & -\tilde{Q}_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\tilde{Q}_2 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}^T &= [\tilde{N}_1^T \quad \tilde{N}_2^T \quad 0 \quad 0 \quad 0]; & \tilde{Q}^T &= [X \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]; \\ \tilde{M}^T &= [\tilde{M}_1^T \quad \tilde{M}_2^T \quad 0 \quad 0 \quad 0]; & \tilde{R}^T &= [0 \quad Y \quad 0 \quad 0 \quad 0]; \\ \tilde{S}^T &= [\tilde{S}_1^T \quad \tilde{S}_2^T \quad 0 \quad 0 \quad 0]; & \theta_{11} &= AX + XA^T + \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2 + \tilde{N}_1 + \tilde{N}_1^T; \\ \tilde{C}^T &= [CX^T \quad DY \quad 0 \quad 0 \quad 0]; & \theta_{12} &= BY - \tilde{N}_1 + \tilde{S}_1 - \tilde{M}_1 + \tilde{N}_2^T; \\ \tilde{A}^T &= [AX \quad BY \quad 0 \quad 0 \quad B_\omega]; & \theta_{22} &= -\tilde{N}_2 - \tilde{N}_2^T + \tilde{S}_2 + \tilde{S}_2^T - \tilde{M}_2 - \tilde{M}_2^T; \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \tilde{N}^T &= [N_1^T \quad N_2^T \quad 0 \quad 0 \quad 0]; \\ \tilde{M}^T &= [M_1^T \quad M_2^T \quad 0 \quad 0 \quad 0]; \\ \tilde{S}^T &= [S_1^T \quad S_2^T \quad 0 \quad 0 \quad 0]; \\ \tilde{C}^T &= [C \quad DK \quad 0 \quad 0 \quad 0]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_m} \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s) ds - 2\xi^T(t) \tilde{M} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_m} \dot{x}(s) ds \\ & \leq (\tau(t) - \tau_m + \varepsilon) \xi^T(t) \tilde{M} Z_2^{-1} \tilde{M}^T \xi(t), \\ & - \int_{t-\tau_M}^{t-\tau(t)} \dot{x}^T(s) (Z_1 + Z_2) \dot{x}(s) ds - 2\xi^T(t) \tilde{S} \int_{t-\tau_M}^{t-\tau(t)} \dot{x}(s) ds \\ & \leq (\tau_M - \tau(t) + \varepsilon) \xi^T(t) \tilde{S} (Z_1 + Z_2)^{-1} \tilde{S}^T \xi(t). \quad (24) \end{aligned}$$

Con estos términos, la ecuación (22) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \xi^T(t) (\Gamma + \tilde{C} \tilde{C}^T) \xi(t) + \dot{x}^T(t) (\tau_M Z_1 + \Delta\tau Z_2) \dot{x}(t) \\ & - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds - 2\xi^T(t) \tilde{N} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds \\ & - \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_m} \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s) ds - 2\xi^T(t) \tilde{M} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_m} \dot{x}(s) ds \\ & - \int_{t-\tau_M}^{t-\tau(t)} \dot{x}^T(s) (Z_1 + Z_2) \dot{x}(s) ds - 2\xi^T(t) \tilde{S} \int_{t-\tau_M}^{t-\tau(t)} \dot{x}(s) ds \\ & + \gamma^2 \omega^T(t) \omega(t) - z^T(t) z(t). \quad (23) \end{aligned}$$

Ahora, si se hace uso de una propiedad muy conocida para la acotación del producto escalar de dos vectores:

$$-a^T X a - 2b^T a \leq b^T X^{-1} b, \quad X > 0,$$

se pueden obtener cotas superiores para los términos integrales de la ecuación (23):

$$\begin{aligned} & - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds - 2\xi^T(t) \tilde{N} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds \\ & \leq (\tau(t) + \varepsilon) \xi^T(t) \tilde{N} Z_1^{-1} \tilde{N}^T \xi(t), \end{aligned}$$

donde las constantes  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  han sido introducidas por conveniencias de diseño (ver Nota a continuación). Combinando (23) con las cotas de (24), se puede mostrar que, para  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \xi^T(t) \left( \Gamma + (\tau(t) + \varepsilon) \tilde{N} Z_1^{-1} \tilde{N}^T \right. \\ & + (\tau(t) - \tau_m + \varepsilon) \tilde{M} Z_2^{-1} \tilde{M}^T \\ & + (\tau_M - \tau(t) + \varepsilon) \tilde{S} (Z_1 + Z_2)^{-1} \tilde{S}^T + \tilde{C} \tilde{C}^T + \tilde{A} \tau_M Z_1 \tilde{A}^T \\ & \left. + \tilde{A} \Delta\tau Z_2 \tilde{A}^T \right) \xi(t) + \gamma^2 \omega^T(t) \omega(t) - z^T(t) z(t). \quad (25) \end{aligned}$$

donde  $\tilde{A}^T = [A \quad BK \quad 0 \quad 0 \quad B_\omega]$ . De este modo, si se define  $\Xi(K, \gamma)$  como:

$$\begin{aligned} \Xi(K, \gamma) &\triangleq \Gamma + (\tau(t) + \varepsilon) \tilde{N} Z_1^{-1} \tilde{N}^T + (\tau(t) - \tau_m + \varepsilon) \tilde{M} Z_2^{-1} \tilde{M}^T \\ & + (\tau_M - \tau(t) + \varepsilon) \tilde{S} (Z_1 + Z_2)^{-1} \tilde{S}^T + \tilde{C} \tilde{C}^T \\ & + \tilde{A} \tau_M Z_1 \tilde{A}^T + \tilde{A} \Delta\tau Z_2 \tilde{A}^T, \quad (26) \end{aligned}$$

se llega finalmente a que la derivada del LKF (20) puede escribirse como en la Hipótesis 2 (12).

Sólo queda por demostrar que los problemas de optimización del Lema 1 y del Teorema 1 son equivalentes. Considérese la ecuación (15) del Lema 1 y la Hipótesis 3.

$$\alpha \Xi(K, \gamma) < -\Phi(K) \Leftrightarrow \Xi(K, \gamma) - \tilde{K}^T \frac{-R}{\alpha} \tilde{K} - \tilde{I}^T \frac{-Q}{\alpha} \tilde{I} < 0 \quad (27)$$

donde  $\bar{K}^T = [0 \ K \ 0 \ 0 \ 0]^T$  y  $\bar{I}^T = [I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . A partir de las ecuaciones (26) y (27), aplicando complementos de Schur, se obtiene una desigualdad matricial con la misma estructura que (21). Para obtener definitivamente (21) es suficiente introducir las siguientes definiciones  $X = P^{-1}$ ,  $\bar{Q}_i = XQ_iX$ ,  $\bar{M}_i = XM_iX$ ,  $\bar{N}_i = XN_iX$ ,  $\bar{S}_i = XS_iX$ ,  $\bar{Z}_i = XZ_iX$ ,  $i = 1, 2$ , así como pre- y post-multiplicar la desigualdad matricial por  $\text{diag}\{X, X, X, I, X, X, X, I, I, I, I, I\}$  y su traspuesta.

□

**Nota.** El parámetro escalar  $\varepsilon > 0$  se introduce para que los LMIs que se obtendrán en la próxima sección sean factibles. Si no se hiciese esto, aparecerían términos nulos en las diagonales de algunas matrices al resolver en los vértices del politopo  $\tau(t)$ . Esta modificación no introduce ningún conservadurismo en el método, ya que  $\varepsilon > 0$  puede escogerse tan pequeño como se desee, por ejemplo,  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

#### 4.1. Algoritmo para el diseño de controladores

Nótese que (21) no es una desigualdad lineal. Existe una idea o procedimiento (ver El Ghaoui et al. (1997)) el cual nos permite abordar la desigualdad matricial no lineal (21) introduciendo nuevas matrices y desigualdades lineales. Lo primero que hay que hacer es definir dos variables  $T_1, T_2$  tales que verifiquen,

$$X\bar{Z}_1^{-1}X \geq T_1 > 0, \quad X\bar{Z}_2^{-1}X \geq T_2 > 0, \quad (28)$$

que es equivalente a:

$$\begin{bmatrix} -T_1^{-1} & X^{-1} \\ X^{-1} & -\bar{Z}_1^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad \begin{bmatrix} -T_2^{-1} & X^{-1} \\ X^{-1} & -\bar{Z}_2^{-1} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (29)$$

Ahora se introducen unas nuevas variables

$$\bar{X} = X^{-1}, \quad \bar{T}_i = T_i^{-1}, \quad \bar{Z}_i = \bar{Z}_i^{-1} \quad i = 1, 2, \quad (30)$$

de forma que la ecuación (29) puede reescribirse como,

$$\begin{bmatrix} -\bar{T}_1 & \bar{X} \\ \bar{X} & -\bar{Z}_1 \end{bmatrix} \leq 0, \quad \begin{bmatrix} -\bar{T}_2 & \bar{X} \\ \bar{X} & -\bar{Z}_2 \end{bmatrix} \leq 0. \quad (31)$$

De esta forma, en vez de utilizar la condición original (21), se puede plantear el siguiente problema de minimización no lineal que utiliza desigualdades matriciales lineales (LMIs):

$$\text{Minimizar } \text{Tr}(\bar{X}X + \bar{T}_1T_1 + \bar{T}_2T_2 + \bar{Z}_1\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2\bar{Z}_2)$$

sujeto a

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Lambda} < 0, \quad \begin{bmatrix} -\bar{T}_1 & \bar{X} \\ \bar{X} & -\bar{Z}_1 \end{bmatrix} \leq 0, \quad \begin{bmatrix} -\bar{T}_2 & \bar{X} \\ \bar{X} & -\bar{Z}_2 \end{bmatrix} \leq 0, \\ \begin{bmatrix} X & I \\ I & \bar{X} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} T_1 & I \\ I & \bar{T}_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} T_2 & I \\ I & \bar{T}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \end{array} \right. \quad (32)$$

donde  $\bar{\Lambda}$  es la matriz que se requería que fuese negativa definida en (21), pero substituyendo los elementos no lineales  $X\bar{Z}_i^{-1}X$  por  $T_i$ ,  $i = 1, 2$ . Si se observan las ecuaciones (28), es inmediato ver que, si se verifica  $\bar{\Lambda} < 0$ , entonces (21) también se satisface. El problema de minimización se introduce para forzar que las variables (30) tiendan a las inversas de las matrices

originales. Cuando los LMIs de la segunda fila de las restricciones (32) saturan, se alcanza el óptimo y se verifica (32).

Una vez planteado el problema de minimización que sustituye la desigualdad no lineal, se expondrá a continuación un algoritmo para resolverlo. El Teorema 2.1 de El Ghaoui et al. (1997) asegura la convergencia de este algoritmo.

#### Algoritmo 1:

1. Dados los escalares  $\tau_m, \tau_M, \gamma, \epsilon > 0$ , encontrar una posible solución bajo las condiciones de (32):

$$(X_0, \bar{X}_0, Y_0, \bar{T}_{i0}, T_{i0}, \bar{Q}_{i0}, \bar{N}_{i0}, \bar{M}_{i0}, \bar{S}_{i0}, \bar{Z}_{i0}, \bar{Z}_{i0}, (i = 1, 2))$$

Inicializar  $k = 0$ . Si no hubiese solución, salir del algoritmo.

2. Resolver los siguientes LMIs cuya solución está dada por el conjunto de matrices  $(X, \bar{X}, Y, \bar{T}_i, T_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i, \bar{M}_i, \bar{S}_i, \bar{Z}_i, \bar{Z}_i, (i = 1, 2))$

$$\text{Minimizar } \text{Tr}(\bar{X}_kX + X_k\bar{X} + \bar{T}_{1k}T_1 + T_{1k}\bar{T}_1 + \bar{T}_{2k}T_2 + T_{2k}\bar{T}_2 + \bar{Z}_{1k}\bar{Z}_1 + \bar{Z}_{1k}\bar{Z}_1 + \bar{Z}_{2k}\bar{Z}_2 + \bar{Z}_{2k}\bar{Z}_2)$$

sujeto a los LMIs de (32)

$$\text{Actualizar } X_{k+1} = X, \quad \bar{X}_{k+1} = \bar{X}, \quad Y_{k+1} = Y, \quad \bar{T}_{i,k+1} = \bar{T}_i, \quad T_{i,k+1} = T_i, \quad \bar{Q}_{i,k+1} = \bar{Q}_i, \quad \bar{N}_{i,k+1} = \bar{N}_i, \quad \bar{M}_{i,k+1} = \bar{M}_i, \quad \bar{S}_{i,k+1} = \bar{S}_i, \quad \bar{Z}_{i,k+1} = \bar{Z}_i, \quad \bar{Z}_{i,k+1} = \bar{Z}_i, \quad i = 1, 2.$$

3. Si se satisface la condición (21), entonces el controlador queda definido por  $K = YX^{-1}$ . Finalizar el algoritmo. En otro caso, se hace  $k = k + 1$  y se vuelve al Paso 2.

En el primer y el segundo paso del algoritmo se resuelven LMIs, para lo que pueden utilizarse algoritmos eficientes de punto interior. Como se asegura en El Ghaoui et al. (1997), cuando el algoritmo converge entonces  $\bar{X}X = I$ ,  $\bar{T}_iT_i = I$ ,  $\bar{Z}_i\bar{Z}_i = I$ ,  $i = 1, 2$ . Herramientas como Matlab disponen de paquetes adecuados para la resolución de LMIs.

**Nota.** Obsérvese que para obtener el controlador deben resolverse dos problemas de optimización con restricciones tipo LMI. Éstos son el problema de minimización de  $\alpha$  y el de la minimización de la suma de las trazas de ciertas matrices. El primero de ellos se encuentra en un nivel más alto de jerarquía y su resolución no presenta ninguna dificultad dado que la variable  $\alpha$  es un escalar y su minimización constituye un problema convexo (ver Lema 1). Para optimizar  $\alpha$  puede emplearse un algoritmo de bisección.

## 5. Aplicación al control de distancia a través de red

En esta sección se aplica el control óptimo basado en red explicado anteriormente a un problema de control concreto. Para poner de manifiesto las ventajas de este tipo de controladores en un NCS, se comparará con un control óptimo LQR diseñado sin tener en cuenta la presencia de retrasos de comunicación.

Consideremos el problema de control de distancia en carretera. Supongamos un vehículo (coche 1), circulando a cierta velocidad desconocida y un segundo vehículo (coche 2) circulando detrás suya y tratando de mantener una cierta distancia

de referencia constante (ver Figura 4). Las ecuaciones de este sistema dinámico se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} e(t) &= p_1(t) - p_2(t) - l_r, \\ \dot{e}(t) &= v_1(t) - v_2(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) &= a_1(t) - a_2(t). \end{aligned} \quad (33)$$

Donde  $p(t)$ ,  $v(t)$  y  $a(t)$  denotan posiciones, velocidades y aceleraciones respectivamente,  $e(t)$  y  $y(t)$  son los errores en posición y velocidad y los subíndices de las variables denotan el vehículo al que se refieren. Por otra parte, el equilibrio de fuerzas sobre cada vehículo viene dado por:

$$F_i(t) - F_{a,i}(t) - F_{r,i}(t) = m_i a_i(t), \quad i = 1, 2, \quad (34)$$

donde  $F_i$  es la fuerza que ejerce el motor de cada vehículo,  $F_{a,i}$  es la fuerza debida al rozamiento aerodinámico y  $F_{r,i}$  es la resistencia a rodadura, dadas por:

$$F_a(t) = \frac{1}{2} c_a A_T \rho_{aire} v^2(t), \quad (35)$$

$$F_r(t) = c_r m g \cos(\beta(t)), \quad (36)$$

donde las constantes involucradas en la ecuación anterior son:

- $c_a, c_r$ : coeficientes aerodinámicos y a rodadura.
- $A_T$ : área transversal del vehículo.
- $\rho_{aire}$ : densidad del aire.
- $m$ : masa del vehículo.
- $g$ : constante gravitacional.
- $\beta(t)$ : ángulo de inclinación de la carretera.

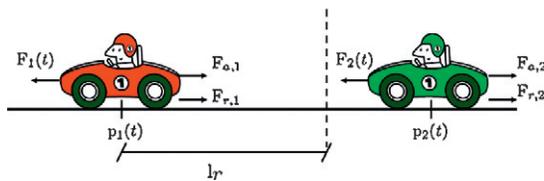


Figura 4: Esquema del problema de control

Se supondrá por simplicidad que los vehículos son iguales y que la inclinación de la carretera es constante. Por otro lado, se realiza una aproximación lineal de la fuerza aerodinámica, en torno a la velocidad nominal  $v_0$ , utilizando los términos de la serie de Taylor truncada convenientemente. De este modo, las ecuaciones del sistema vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \int e(t) \\ e(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -c_3 c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int e(t) \\ e(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_3 \end{pmatrix} F_2(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix} F_1(t) \end{aligned} \quad (37)$$

con  $c_0 = v_0 c_a A_T \rho_{aire}$  y  $c_3 = 1/m$ . Supongamos que el coche 2 se comunica con el coche 1 solicitando conocer su velocidad y posición cada tiempo de muestreo  $h$ . El objetivo es calcular la acción de control  $F_2(t)$  de manera que la distancia con el coche 1 se mantenga en el valor prescrito  $l_r$ . El controlador está implementado localmente en el coche 2, pero para calcular la señal de control necesita conocer variables propias del primer vehículo. Estos datos pueden experimentar pérdidas y retrasos de comunicación ya sea por el mecanismo de comunicación entre los vehículos o por el tiempo de acceso al bus de comunicación propio de cada uno.

De esta forma, la señal de control  $F_2(t)$  viene dada por:

$$F_2(t) = K \begin{pmatrix} \int e(t - \tau(t)) \\ e(t - \tau(t)) \\ y(t - \tau(t)) \end{pmatrix} \quad (38)$$

donde ya se han tenido en cuenta los retrasos de comunicación mediante la variable  $\tau(t)$ .

Se supondrán los siguientes datos para los coches:  $m = 1200 \text{ Kg}$ ,  $A_T = 1,5 \text{ m}^2$ ,  $c_a = 0,15$ ,  $c_r = 0,015$ , densidad del aire  $\rho_{aire} = 1,21 \text{ Kg/m}^3$  y una velocidad nominal de  $v_n = 120 \text{ Km/h}$ . Para el diseño de los controladores se va a ponderar sólo el error en el estado  $Q = 10^{-5} \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01 \end{pmatrix}$ , y se supondrá que el periodo de muestreo es  $h = 500 \text{ ms}$ . Asimismo, se asume que el retraso inducido por la red varía entre 100 y 200 milisegundos, pudiéndose perder como máximo 1 paquete de forma consecutiva. Por tanto, el retraso máximo es  $\tau_M = 200 + (1 + 1)500 = 1200 \text{ ms}$ . Los controladores obtenidos son:

- Controlador local LQR discreto:  $K_{LQR} = [1333 \quad 2882 \quad 2448]$
- Controlador óptimo local basado en LKF:  $K_{LKF,loc} = [109 \quad 813 \quad 1137,5]$
- Control óptimo basado en LKF para la red considerada:  $K_{LKF} = [67 \quad 540 \quad 945]$

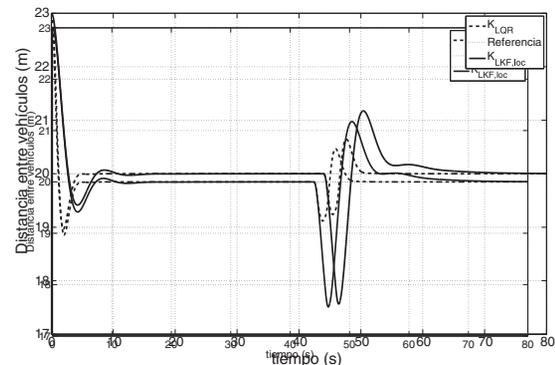


Figura 5: Respuesta de los controladores ignorando los efectos inducidos por la red

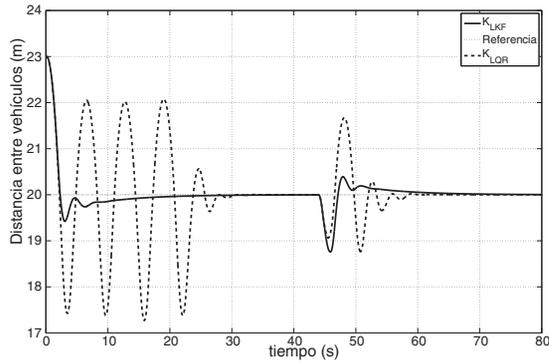


Figura 6: Respuesta de los controladores teniendo en cuenta la red de comunicaciones

Para realizar las simulaciones se ha introducido en la red una probabilidad de pérdida de paquetes del 10%. El controlador LKF diseñado teniendo en cuenta el retraso máximo inducido por la red no puede considerar el porcentaje de pérdidas inducido, ya que éste no puede ser traducido a retraso máximo y requiere consideraciones de estabilidad estocástica para su tratamiento. No obstante, se observará que el controlador diseñado presenta ciertas propiedades de robustez frente a la pérdida de datos. En las siguientes simulaciones el coche 2 trata de mantener una distancia de 20 metros con el coche 1, cuando éste circula a una velocidad de 120 Km/h. Antes de los 50 s de simulación, el primer coche frena durante dos segundos y luego acelera alcanzando otra vez los 120 Km/h. En la Figura 5 se muestra la respuesta de los controladores cuando se asume que el retraso de los datos enviados por la red es nulo. En la Figura 6 se comparan los controladores esta vez teniendo en cuenta los retrasos inducidos por la red de comunicaciones.

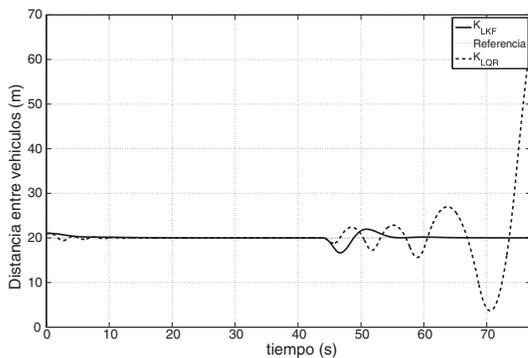


Figura 7: Respuesta de los controladores introduciendo saturación en la señal de control

En la Figura 5 se observa que la respuesta de ambos controladores es satisfactoria. Puede comprobarse además que las señales de control se mantienen en un rango razonable, así como un cierto grado de conservadurismo que se le asocia siempre a los controladores LKF y que hace que la respuesta para retrasos nulos sea algo más lenta que la del controlador LQR.

En la Figura 6 puede observarse como el controlador LQR no logra superar la respuesta del controlador basado en red, pro-

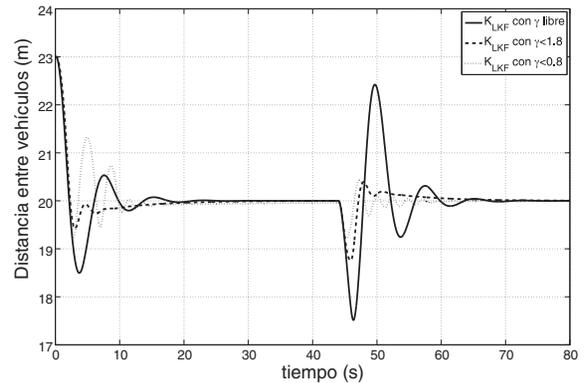


Figura 8: Respuesta de los controladores con distinta  $\gamma$

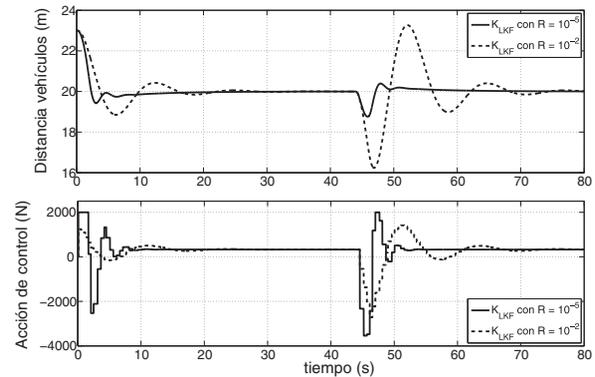


Figura 9: Respuesta de los controladores variando  $R$

duciendo oscilaciones que degradan el comportamiento del sistema en lazo cerrado. De hecho, el motivo por el cual el controlador LQR sigue estabilizando el sistema es porque no se han introducido saturaciones en la señal de control. Puede comprobarse que el controlador LQR requiere un esfuerzo de control en la práctica irrealizable para estabilizar el sistema, mientras que el control LKF sigue manteniendo las señales de control en un rango aceptable. En la Figura 7, se introducen saturaciones en la señal de control en  $\pm 2000$  N, mostrando que en este caso sólo el controlador LKF es capaz de estabilizar el sistema.

En las siguientes gráficas se muestra la respuesta de distintos controladores, que han sido ajustados de forma diferente para ilustrar cómo el método propuesto cuenta con un buen número de grados de libertad que permiten mejorar el desempeño según las especificaciones requeridas. En la Figura 8 se diseñan tres controladores con el mismo funcional de coste pero aumentando la restricción en el rechazo de perturbaciones. Se observa cómo a medida que se exige un mayor grado de atenuación las perturbaciones se rechazan mejor de forma progresiva, mientras que la respuesta del controlador se hace algo más lenta. Por otro lado, en la Figura 9 se comparan dos controladores en los que la matriz  $R$  que pondera la acción de control es distinta. Así se observa cómo puede lograrse acciones de control más suaves sacrificando en cierto grado la velocidad de respuesta del controlador.

## 6. Conclusión

En este trabajo se desarrolla un método para el cálculo de controladores basados en red, en el que se tienen en cuenta de forma explícita retrasos y posibles pérdidas de información inducidas por la red de comunicaciones. El controlador dispone de un buen número de grados de libertad para ajustar la respuesta de forma que se obtenga un comportamiento satisfactorio.

Finalmente, como trabajo futuro puede plantearse reducir el conservadurismo del método, empleando dependencias funcionales más complejas que la introducción del parámetro escalar  $\alpha$  a la hora de minimizar la función de coste.

### English Summary

#### Optimal $L_2$ -gain networked control design with Lyapunov Krasovskii functionals

##### Abstract

This paper deals with the problem of optimal control design for linear network control systems (NCS) with  $L_2$ -gain disturbance rejection. Networked control systems close the control loop using a communication network, that usually accounts for network-induced delays and packet dropouts. Resorting to Lyapunov Krasovskii functionals (LKF), the problem of stabilization of NCS with joint performance index optimization and  $L_2$ -gain disturbance rejection is addressed. The paper initially develops a general solution for the problem, then an specific LKF is particularized to provide a solution in terms of linear matrix inequalities. Performance of the proposed control structure is shown by simulations comparing with LQR control on an inter-vehicle distance regulation problem.

##### Keywords:

Communication networks, Delay compensation, Lyapunov methods, Optimal control, Delays.

### Agradecimientos

Los autores agradecen al proyecto CICYT (DPI2010-19154), y a la Comisión Europea (EC) (FeedNetBack Project, grant agreement 223866), por financiar este trabajo.

### Referencias

- Azimi-Sadjadi, B., December 2003. Stability of networked control systems in the presence of packet losses. In: Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control. Maui, Hawaii, USA, pp. 676–681.
- Branicky, M. S., Borkar, V. S., Mitter, S. K., 1998. A unified framework for hybrid control: model and optimal control theory. *IEEE Trans. on Automatic Control* 43 (1), 31–45.
- Delfour, M. C., McCalla, C., Mitter, S. K., 1975. Stability and infinite-time quadratic cost problem for linear hereditary differential systems. *SIAM Journal on Control and Optimization* 13 (1), 48–88.
- Dormido, S., Sánchez, J., Kofman, E., 2008. Muestreo, control y comunicación basado en eventos. *RIAI Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 5 (1), 5–26.
- El Ghaoui, L., Oustry, F., AitRami, M., 1997. A cone complementary linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 42 (8), 1171–1176.
- Esfahani, S. H., Moheimani, S. O. R., Petersen, I. R., 1998. LMI approach to suboptimal guaranteed cost control for uncertain time-delay systems. *IEEE Proceedings Control Theory and Applications* 145 (6), 491–498.
- Gupta, V., Hassibi, B., Murray, R. M., 2007. Optimal LQG control across packet-dropping links. *Systems and Control Letters* 56 (6), 439–446.
- Hale, J. C., Verduyn Lunel, S. M., 1993. Introduction of functional differential equations. Springer, New York.
- Hespanha, J., Naghshtabrizi, P., Xu, Y., 2007. A survey of recent results in networked control systems. *Proceedings of the IEEE, special edition* 95 (1), 138–162.
- Hokayem, P. F., Abdallah, C. T., June 2004. Inherent issues in networked control systems: a survey. In: Proceedings of the American Control Conference. Boston, Massachusetts, USA, pp. 4897–4902.
- Jiang, X., Han, Q. L., 2008. New stability criteria for linear systems with interval time-varying delay. *Automatica* 44 (10), 2680–2685.
- Jiang, X., Han, Q. L., Liu, S., Xue, A., 2008. A new  $H_\infty$  stabilization criterion for networked control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 53 (4), 1025–1032.
- Kharatishvili, G. L., 1961. The maximum principle in the theory of optimal processes with delay (in russian). *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 136 (1), 39–42.
- Kosmidou, O. I., Boutalis, Y. S., 2006. A linear matrix inequality approach for guaranteed cost control of systems with state and input delays. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans* 36 (5), 936–942.
- Krasovskii, N., 1962. On analytic design of optimal controllers for systems with time delay. *Prikl. matem. i mekh.* 26 (1), 39–51.
- Mahmoud, M. S., 2000. Robust Control and Filtering for Time-delay Systems. Marcel Dekker, Inc., New York.
- Meng, X., Lam, J., Gao, H., 2009. Network-based  $H_\infty$  control for stochastic systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 19 (3), 295–312.
- Mikheev, Y. V., Sobolev, V. A., Fridman, E., 1988. Asymptotic analysis of digital control systems. *Automatic and Remote Control* 49, 1175–1180.
- Naghshtabrizi, P., Hespanha, J., December 2005. Designing an observer-based controller for a network control system. In: Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference. Seville, Spain, pp. 848–853.
- Nikolakopoulos, G., Panousopoulou, A., Tzes, A., 2008. Experimental controller tuning and QoS optimization of a wireless transmission scheme for real-time remote control applications. *Control Engineering Practice* 16 (3), 333–346.
- Ross, D. W., Flügge-Lotz, I., 1969. An optimal control problem for systems with differential difference equation dynamics. *SIAM Journal On Control and Optimization* 7 (4), 609–623.
- Salt, J., Casanova, V., Cuenca, A., Pizá, R., 2008. Sistemas de control basados en red. modelado y diseño de estructuras de control. *RIAI Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 5 (3), 5–20.
- Shao, H., 2009. New delay-dependent stability criteria for systems with interval delay. *Automatica* 45 (3), 744–749.
- Sinopoli, B., Schenato, L., Franceschetti, M., Poolla, K., Sastry, S., December 2005. An LQG optimal linear controller for control systems with packet losses. In: 44th IEEE Conference on Decision and Control and the European Control Conference. Sevilla, Spain, pp. 458–463.
- Tatikonda, S., Mitter, S., 2004. Control under communication constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control* 49 (7), 1056–1068.
- Xiong, J., Lam, J., 2007. Stabilization of linear systems over networks with bounded packet loss. *Automatica* 43 (1), 80–87.
- Xu, S., Lam, J., 2007. On equivalence and efficiency of certain stability criteria for time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 52 (1), 95–101.
- Xu, S., Lam, J., 2008. A survey of linear matrix inequality techniques in stability analysis of delay systems. *International Journal of Systems Science* 39 (12), 1095–1113.
- Yue, D., Han, Q. L., Lam, J., 2005. Network-based robust  $H_\infty$  control of systems with uncertainty. *Automatica* 41 (6), 999–1007.
- Zampieri, S., July 2008. Trends in networked control systems. In: Proceedings of the 17th World Congress IFAC. Seoul, Korea, pp. 2886–2894.
- Zhang, D., Yu, L., 2008. Equivalence of some stability criteria for linear time-delay systems. *Applied Mathematics and Computation* 202 (1), 395–400.
- Zhang, H. S., Duan, G., Xie, L., 2006. Linear quadratic regulation for linear time varying systems with multiple input delays. *Automatica* 42 (9), 1465–1476.