UNIVERSIDAD DE SEVILLA - FACULTAD DE CIENCIAS

SECCION DE MATEMATICAS

# PROPIEDADES DE OSCILACION EN ECUACIONES DIFERENCIALES AUTOADJUNTAS

Visado en
Sevilla, febrero de 1973
EL CATEDRATICO DIRECTOR

A. Castro

Fdo. Antonio de Castro Brzezicki

Tesis que presenta Julio Couce Calvo para optar al grado de Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas.
Sevilla, febrero de 1973.

Julio Couce

Fdo. Julio Couce Calvo.

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento alProfesor Dr.D.Antonio de Castro Brzezicki, Catedrático de Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Sevilla por su direción y estímulo en el desarrollo de este trabajo,sin los que no hubiera llegado a feliz término.

# INDICE

PAG.

# C A P I T U L O   I

1.- Nos proponemos en el presente trabajo, estudiar las propiedades oscilatorias de las soluciones de ciertas clases de ecuaciones diferenciales lineales autoadjuntas de orden par ( 2.n) , en particular de orden 6 ( n = 3).

Las ecuaciones que vamos a estudiar son las de la forma:

$$(1,1) \qquad \left[p(x).y^{(n)}\right]^{(n)} + r(x).y = 0 \quad , \quad p(x) > 0$$

donde, en el intervalo de x considerado, $p(x) \in C^n$ y $r(x) \in C$.

A menos que se indique expresamente lo contrario, admitimos que estas funciones están definidas y pertenecen a las clases indicadas en el intervalo $(0, \infty)$.

Los ejemplos mas sencillos nos muestran que el carácter oscilatorio varía radicalmente según sea el signo de r(x). Asi sabemos que en la conocida ecuación de segundo orden:

$$(1,2) \qquad \left[p(x).y'\right]' + r(x).y = 0$$

hay que distinguir que : a) $r(x) < 0$ : la ecuación no puede tener ninguna solución oscilante, b) $r(x) > 0$: si puede tener soluciones oscilantes y de tener una las tiene todas.

Por tanto separaremos en nuestro estudio las ecuaciones según el signo de r(x). Para evitar peligros de confusión, supondremos siempre $r(x) > 0$ y la afectaremos del signo + ó - . Asi consideraremos pues las dos ecuaciones:

(1,3) $\left[p(x).y^n\right]^{(n)} - r(x)\, y = 0\ ,\ p(x),r(x) > 0$

(1,4) $\left[p(x).y^{(n)}\right]^{(n)} + r(x).y = 0 \quad p(x),r(x) > 0$

No discutiremos el caso en que r(x) cambie de signo en el intervalo $(0,\infty)$, o más precisamente en el intervalo $[a,b]$ que estemos considerando. Este cambio de signo como es lógico debe alterar profundamente el carácter de la ecuación desde el punto de vista oscilatorio.

Antes de seguir adelante conviene que precisemos el significado que vamos a dar al término " oscilatorio ".

DEFINICION 1

Solución oscilatoria es aquella que tiene un infinito número de ceros en $(0,\infty)$. No oscilatoria se dice si no es oscilatoria.

Una ecuación se dice no oscilatoria si todas sus soluciones son no oscilatorias, se dice oscilatoria si al menos una de sus soluciones es oscilatoria. Esta precisión es necesaria pues si bien en la ecuación de segundo orden, si una solución es oscilatoria , lo son todas, en las ecuaciones de orden más elevado puede ocurrir que coexistan en una misma ecuación soluciones oscilatorias y no oscilatorias. Es incluso notable que una distinción radical entre las dos ecuaciones (1,3) y (1,4) es, como veremos, precisamente el hecho de que la (1,3) tiene siempre soluciones no oscilantes; mientras la (1,4) o tiene todas las soluciones oscilatorias o todas no oscilatorias.

Algunos autores distinguen estos casos hablando de ecuaciones oscilatorias y " fuertemente oscilatorias "

Según esta nomenclatura la ecuación (1,3) podria ser no oscilatoria u oscilatoria, y la (1,4): no oscilatoria o fuertemente oscilatoria.

Otro concepto muy empleado por los diversos autores que tratan estos problemas es el de " disconjugación "

DEFINICION 2

Una ecuación lineal de orden n se dice disconjugada en un intervalo I, si ninguna de sus soluciones no triviales tiene más de n-1 ceros en I , ( los ceros múltiples contados según su orden de multiplicidad).

Por ejemplo: la ecuación $y^{(n)} = 0$, es disconjugada en cualquier intervalo, dado que todo polinomio no trivial de grado menor que n no tiene más de n-1 ceros.( La exigencia de los n ceros es natural ya que una ecuación lineal de orden n tiene siempre solución con n-1 ceros prefijados arbitrariamente y por tanto con n-1 ceros en cualquier intervalo).

En realidad si el intervalo I es infinito, los conceptos de disconjugación y no oscilatorio pueden hacerse equivalentes.

En efecto si la ecuación es disconjugada en $(a,\infty)$ es tambien no oscilatoria. La reciproca ya no es evidente. Pero para la ecuación de segundo orden tenemos que si es no oscilatoria, por el teorema de separación de Sturm, existirá un valor a tal que la ecuación es disconjugada en $( a,\infty)$.

Probaremos que este resultado se mantiene tambien para las ecuaciones de orden mas elevado ( 1,3 ), ( 1,4 ) Es decir

Si la ecuaciòn es no oscilatoria en $(0,\infty)$ implica la existencia de un punto a tal que le ecuaciòn es disconjugada en $(a,\infty)$.

Se demuestra por otra parte ( ver por ejemplo W.A. Coppel: Disconjugancy [5](*) que si los coeficientes $a_k(x)$ de de una ecuaciòn lineal

(1,5) $y^{(n)} + a_1(x).\ y^{(n-1)} + \ldots\ \ldots + a_n(x).\ y = 0$

( La (1.3) y (1,4) son casos particulares de la ecuaciòn (1,5) de orden 2.n) son continuos en un intervalo I, abierto o semiabierto entonces (1,5) es disconjugada en I, si y solo si, toda soluciòn no trivial tiene menos de n ceros distintos en I, sin tener en cuenta su multiplicidad.

Todavía y debido a la equivalencia entre una ecuaciòn lineal autoadjunta de orden 2n

(1,6) $(-1)^n\left[a_n(x).y^{(n)}\right]^{(n)} + (-1)^{n-1}\left[a_{n-1}(x).y^{(n-1)}\right]^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots + a_0(x).y = 0$

y un sistema lineal hamiltoniano:

$$(1,7)\qquad \left.\begin{aligned} y' &= B(x).y + C(x).z \\ z' &= A(x)y - B^*(x).z \end{aligned}\right\}$$

donde $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ son funciones matriciales de orden nxn, con A y C simètricas y $B^*$ igual a la transpuesta de B; se usa otra definiciòn:

## DEFINICIÒN 3

La ecuaciòn (1,6) es disconjugada en I, si toda soluciòn no trivial tiene como máximo un cero de multiplicidad $\geq$ n . Equivalente en el sistema (1,7) a que el vector n - dimensional $y(x)$ se anule como màximo una vez en I .

(*) Referencias a Bibliografía: [ ]

Esta definición es mucho más restrictiva que la (2) . O sea si (1,6) es disconjugada en el sentido de la definición 2, lo es según la definición 3. Pero para $n > 1$ el recíproco no es cierto. Sin embargo para la ecuación de orden 2($n=1$) ambas definiciones son equivalentes.

Veremos que en el fondo para la ecuación (1,8) $(p(x)\, y^{(n)}]^{(n)} - (-1)^n r(x)\, y = 0$
estas definiciones son equivalentes. pero para la ecuación (1,9)

$$(1.9)\quad [p(x)\, y^{(n)}]^{(n)} + (-1)^n r(x)\, y = 0$$

la definición 3 es inaplicable.(Siempre resultaría disconjugado, aunque puede ser conjugado segun la definición 2 )

Esta última definición no la emplearemos pues su utilidad radica en la simplificación que se obtiene utilizando el sistema equivalente (1,7), pero en compensación no es aplicable a la ecuación (1,9) por ejemplo.

Vamos a estudiar pues en lo que sigue las ecuaciones (1,3) y (1,4) por separado una de otra.

Todavía como ya hemos mencionado incidentalmente, conviene otra distinción entre las ecuaciones (1,8 y (1,9), entre otras cosas porque la (1,8) tiene una notable relación con el problema clásico de autovalores

$$[p(x)\, y^{(n)}]^{(n)} - (-1)^n \lambda\, r(x)\, y = 0$$

y en ella se pueden aplicar una serie de métodos y resultados que no son aplicables a (1,9).

Hay muchos autores (véase Bibliografía), que han estudiado diversos problemas relacionados con la oscilación para las ecuaciones de orden superior. Nosotros en particular nos hemos inspirado en el estudio que para las ecuaciones de orden 4 hacen LEIGHTON y NEHARI [17]

SIN EMBARGO los mètodos que ambos autores emplean no son fàcilmente generalizables para ecuaciones de orden superior. Por-que de mòdo algo anàlogo a lo que sucede con la ecuaciòn de 2º orden, la ecuaciòn de 4º orden resulta ser un caso especial y la mayoria de los mètodos empleados por ambos autores en su estudio hacen referencia a propiedades especificas que se agotan en ella y no valen para ecuaciones de orden superior.

2-- - Por las veces que va ser empleado en los razonamientos que seguirán creo conveniente establecer de entrada con caràcter de proposiciòn un resultado evidente.

PROPOSICIÒN 1 . 1 Para cualquier intervalo I, existe una soluciòn no trivial de (1,5) con " n-1 " ceros arbitrariamente prescritos.

DEMOSTRACION Sea $y_1(x), y_2(x) \dots y_n(x)$ un sisrema fundamental de soluciones de (1,5).

La soluciòn general $y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$

$(c_i = \text{constante})$

Si impnemos que se anule en "n- 1" puntos prefijados tendremos un sistema de n- 1 ecuaciones con n incognitas, lineal y homogèneo. Si el determinante de los coeficientes es $\neq 0$ tendremos una simple infinidad de soluciones ( dependiente de un paràmetro).

Si la caracterìstica del determinante de los coeficientes es "K" tendremos n - k soluciones linealmente independientes " con esos n - 1 ceros.

Hacemos uso tambien frecuentemente del siguiente lema

LEMA 1.1 Si $y(x), z(x) \in C^1$ en $(a,b)$

y si $z(x)$ es de signo constante en este intervalo,
y si $x=\alpha$ y $x=\beta$ $(a<\alpha<\beta<b)$
son ceros consecutivos de $y(x)$, entonces existe una constante $\lambda$ tal que la función $y(x)-\lambda z(x)$
tiene un cero doble en $(\alpha,\beta)$

DEMOSTRACIÓN . El sistema $\left.\begin{array}{l} y(x_0)-\lambda z(x_0)=0 \\ y'(x_0)-\lambda z'(x_0)=0 \end{array}\right\}$

tiene solución para $\lambda=\dfrac{y(x_0)}{z(x_0)}$ si en el punto $x_0$.

se verifica que $\left(\dfrac{y(x)}{z(x)}\right)'=0$

Pero como $\dfrac{y(x)}{z(x)}$ es función continua y derivable en (a , b ) y se anula en $\alpha$ y en $\beta$ por el teorema de ROLLE su derivada se anulará en un punto intermedio : $x_0$ $(\alpha<x_0<\beta)$

Luego ese punto $x_0$ existe y en él $y(x)-\dfrac{y(x_0)}{z(x_0)}z(x)$
tiene cero doble.

Este razonamiento es el típico para demostrar el teorema de separación de STURM para las ecuaciones de 2º orden.

## CAPITULO 2

### 1 . Propiedades generales de los ceros de las ~~ecuacio nes~~ solu de (1,3)

LEMA 2.1 Si $y(x)$ es solución de (1,3) tal que
$y, y', \ldots\ y^{(n)}, [p(x)y^{(n)}]', \ldots [p(x)y^{(n)}]^{(n-1)}$
son todas no negativas ( y al menos una $\neq 0$ ) para $x=a$,

entonces las funciones correspondientes de $x$ son todas positivas para $x > a$.

DEMOSTRACIÓN: Hemos impuesto $2n$ condiciones iniciales a una ecuación de orden $2n$ que determinan una solución única. Alguno de los valores iniciales $\neq 0$, si no la única solución sería la trivial ($\equiv 0$.).

$y(a) \geq 0$, si $y(a) = 0$, la 1ª derivada no nula $> 0$, luego $y(x) > 0$ en algún intervalo $(a, b)$ $(b > a)$

Si no fuera siempre $y(x) > 0$ para $x > a$ existiría un punto $b > a$ tal que $y(x) > 0$ $(a < x < b)$, $y(b) = 0$

Pero por integraciones sucesivas de (1,3)

$$p y^{(n)}\Big|_x = p y^{(n)}\Big|_a + [p y^{(n)}]'\Big|_a (x-a) + \cdots + [p y^{(n)}]_a^{(n-1)} \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)\, k(t)\, y(t)\, dt$$

Para $a < x < b$, el 2º miembro es positivo y creciente con $x$, $\Rightarrow [p y^{(n)}](x) > 0$ para $(a < x < b) \Rightarrow y^{(n)} > 0 \Rightarrow y^{(n-1)}$ creciente con $x$ en $(a, b)$.

Como $y^{(n-1)}(a) \geq 0 \Rightarrow y^{(n-1)}(x) > 0$ en $(a, b)$ $\Rightarrow y^{(n-2)}(x)$ creciente ........etc.

Procediendo sucesivamente llegamos a que $y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x)$ $\ldots\ y'(x) > 0$ en $(a,b)$

$\Rightarrow y(x)$ creciente en $(a, b)$

$0 \leq y(a) < y(x) < y(b) = 0$ Contradicción.

Por tanto $y(x)$ no se anula nunca a partir de $a$ y es siempre positiva. Por el método de demostración $y', y'', \ldots\ y^{(n)}, [p y^{(n)}]', \ldots\ [p y^{(n)}]^{(n-1)}$ son positivas para $a < x < b$, y este punto $b > x_0$ para cualquier $x_0$, vemos que la conclusión es válida para $x > a$.

C.Q.D.

<u>COROLARIO</u> La ecuaciòn (1,3) tiene al menos una solución no oscilatoria. Cualquier soluciòn que cumpla las " 2 n " condiciones iniciales del lema 2.1 ya no vuelve a tener ningún cero más. Asì por ejemplo la ecuaciòn $y^{VI} - y = 0$ tiene la soluciòn $y = e^{x}$ no oscilatoria, sin perjuicio de que tenga otras oscilatorias por ejemplo: $\mathrm{Ch}\,\frac{x}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$

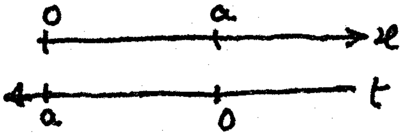
Es pues un ejemplo de la afirmacion que habíamos hecho de la coexistencia de soluciones no oscilatorias y oscilatorias para una misma ecuaciòn del tipo (1,3)

Es fácil dar un resultado anàlogo para los puntos $x < a$

<u>LEMA 2 .2</u> Si $a > 0$ è $y(x)$ una soluciòn no trivial de (1,3) tal que $y, -y', y'', \ldots\ldots (-1)^n y^{(n)},$ $(-1)^{n+1}[p\,y^{(n)}]' \ldots\ldots (-1)^{2n-1}[p\,y^{(n)}]^{(n-1)}$
son todas no negativas en $a$ ( una al menos $\neq 0$, todas estas funciones son positivas para $0 < x < a$.

<u>DEMOSTRACCIÒN</u> Basta hacer un cambio de variable independiente $x = a - t$, $t = a - x$.

Para $x = a$, $t = 0$ . Para $x = 0$, $t = a$




$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{dy}{dx} \; ; \; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\frac{d^n y}{dt^n} = (-1)^n \frac{d^n y}{dx^n} \; ; \; \frac{d}{dt}\left[p\,\frac{d^n y}{dt^n}\right] = \frac{-d}{dx}\left[p\,(-1)^n \frac{d^n y}{dx^n}\right] = (-1)^{n+1}\left[p\,\frac{d^n y}{dx^n}\right]$$

$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left[p\,\frac{d^n y}{dt^n}\right] = (-1)^{2n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[p\,\frac{d^n y}{dx^n}\right]$$

Estamos en el mismo caso que en el Lema 2.1, luego la conclusiòn sigue evidente.

LEMA 2 . 3 Si $y(x)$ es soluciòn de (1,3) tal que $y(a) = y(c) = 0$, $y(x)$ no puede tener un cero de orden 2 n- 2 en algun punto $b \in (a,c)$ $(n \geq 2)$

DEMOSTRACION : En b: $y, y' \ldots y^{(n)}, [p y^{(n)}]' \ldots \ldots [p y^{(n)}]^{(n-3)} = 0$ si b es cero de orden 2 n - 2

Sin pèrdida de generalidad $[p y^{(n)}]^{(n-2)} \geq 0$ ( basta si no multiplicar por ( - 1 )

Si $[p y^{(n)}]^{(n-1)}(b) \geq 0$ entonces $p(c) = 0$ contradicciòn (Lema 2.1)

Si $[p y^{(n)}]^{(n-1)}(b) \leq 0$ entonces $p(a) \neq 0$, contradicciòn (Lema 2.2)

Luego si una soluciòn tiene un cero de orden 2 n - 2 no vuelve a tener otro cero , o no lo ha tenida antes para $x > 0$

COROLARIO 1 Una soluciòn con un cero 2 n - 1 no tiene ningun cero más para $x > 0$

COROLARIO 2. Si $y(x)$ es soluciòn de (1,3) tal que $y(a) = y(c) = 0$ , no puede haber un punto b : $a < b < c$ en el que " 2 n - 1 " cualesquiera de las 2 n cantidades $y(b), y'(b) \ldots y^{(n)}(b), [p y^{(n)}]'(b) \ldots \ldots [p y^{(n)}]^{(n-1)}(b)$ sean $\geq 0$ $(n \geq 2)$

La demostraciòn es esencialmente la misma que la del lema 2.3 En realidad constituye un enunciado algo más general del Lama 2.3.

Sabemos ( proposición 1.1 ) que siempre existen soluciones no triviales de (1,3) que se anulan en 2 n - 1 puntos dados ( no necesariamente distintos) . Pero se nos presenta el problema de si dar esos 2 n - 1 ceros arbitrarios es suficiente para individualizar una sola solución (excepto una cte arbitraria ) . ( Es decir si se verifica un Teorema de unicidad para 2 n - 1 ceros arbitrarios). En general no, pueden darse dos o más soluciones linealmente independientes con 2 n - 1 ( o más) ceros comunes ( incluso con infinitos ceros comunes) .

Sin embargo para las ecuaciones de orden 2 (n =1), sabemos que si dos soluciones tienen un cero común difieren sólo en un factor constante.

Para las ecuaciones de orden 4 , ya no se mantiene. Así la ecuación $[p(x)y'']'' + r(x)\,y = 0$ puede tener soluciones linealmente independientes con infinitos ceros comunes. Por ejemplo la ecuación $y^{IV} + 4y = 0$ tiene las soluciones linealmente independientes: $y_1(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{Sh} x$ e $y_2(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{Ch} x$.

Por el contrario la ecuación $[p(x)y'']' - r(x)\,y = 0$ cumple ( ver LEIGTON - NEHARI, referencia [17]) el siguiente Teorema de unicidad : Si dos soluciones no triviales tienen tres ceros comunes son múltiplo constante una de la otra " Propiedad importante que facilita el estudio de la separación de los ceros de las soluciones, pero que es específica de dicha ecuación .

Para las ecuaciones de orden más elevado 2 n $(n > 2)$ ya nose aprecia esta distinción de la ecuación de 4º orden y tanto las ecuaciones (1,3) como la (1,4) pueden tener soluciones linealmente independientes con 2 n - 1 ceros comunes e incluso $\infty$.

Asì por ejemplo una ecuaciòn del tipo (1,3) es $y^{VI}-y=0$ que admite las soluciones linealmente independientes

$$Sh\,\tfrac{1}{2}x\,\operatorname{sen}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x \quad y \quad Ch\,\tfrac{1}{2}x\,\operatorname{sen}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x$$

con infinitos ceros comunes. Anàlogo sucede para la ecuaciòn $y^{VI}+y=0$.

## 2. TEOREMAS DE SEPARACIÒN

Es lògico que el comportamiento de las soluciones (por lo que respeta al caràcter oscilante) pierde mucha regularidad al aumentar el orden de la ecuaciòn . Pues mientras que en la ecuaciòn de 2º orden los ceros de dos soluciones se separan perfectamente ( uno a uno), en una ecuaciòn de orden 2 n puede haber siempre 2 n - 1 ceros arbitrarios, lo que impide la existencia de Teoremas de separaciòn tan precisos.

El papel fundamental en cuamto al caràcter de oscilación lo van a jugar los llamados " Puntos conjugados ".

### DEFINICIÒN 2.1

Sea la ecuaciòn (1,5)

$$(1.5):\ y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)\,y=0$$

(una ecuaciòn lineal de orden n y coeficientes continuos en un intervalo I )

Sea $y(x)$ una soluciòn de (1,5) para la que $y(a)=0$ y supongamos que $y(x)$ tenga al menos $m+n-1$ ceros: $a_1, a_2, \ldots a_{m+n-1}$ $(a=a_1\leq a_2\leq \ldots \leq a_{m+n-1},\ m\geq 1)$ para $x\geq a$.

Lamamos " m punto conjugado por la derecha de a : $S_m(a)$ " al valor mìnimo de $a_{m+n-1}$ cuando $y(x)$ varía entre toda la clase de funciones que son soluciòn de (1,5) y para las que $y(a)=0$

Asì por ejemplo suponiendo que entre todas las soluciones de (1,5) con cero en $x = a$, haya alguna que tenga al menos n ceros para $x \in I$, $I = [a,b]$, $a < b < \infty$ habrà al menos una soluciòn que tendrà el cero n en un punto $b_1 : a < b_1 \leq b$ y que èste sea el menor valor po-ble de la abscisa del cero n. Entonces $b_1 = \delta_1(a)$

Tenemos pues que si existe al menos una soluciòn con el nùmero requerido de ceros en $[a,b]$, $b < \infty$, entonces la existencia de $\delta_m(a)$ se puede probar fácilmente por argumentos de compacidad.

Se puede enunciar

PROPOSICIÒN 2,1. Si $I = [a,b]$ es un intervalo compacto y existe un $\delta_m(a)$ $(\delta_m(a) \leq b)$, tal que ninguna soluciòn de (1,5) tiene más de $m+n-2$ ceros en $[a, b_1]$ $(b_1 < \delta_m(a))$ (para $m = 1$ puede verse por ejemplo una demostracciòn en COPPEL [5] ) Este resultado es evidente y generalizable para $m > 1$.

Para simplificar algo los enunciados vamos a introducir una nueva notaciòn ( BARRET . Advances in Mathematcs, 3 - 4 - Octubre 1969 [1]. )

Sea la ecuaciòn (1,3)

$$(1,3) : [p(x)\, y^{(n)}]^{(n)} - r(x)\, y = 0$$

utilizamos las notaciones abreviadas

$$D_i y = y^{(i)} \quad \text{para } 0 \leq i \leq n-1$$

$$D_i y = [p(x)\, y^{(n)}]^{i-n} \quad \text{para } n \leq i \leq 2n.$$

DEFINICIÒN 2.2 Para $i + j = 2n$

Llamamos en general $z_{ij}(a)$ los nùmeros $c>a$ tales que (1,3) tiene una soluciòn que satisface

$$y(a) = D_1 y(a) = \cdots = D_{i-1} y(a) = 0 =$$
$$= y(c) = D_1 y(c) = \cdots = D_{j-1} y(c) = 0$$

( Por ejemplo si $y(x)$ tiene un cero de multiplicidad $i$ en $x=a$ y $j$ en $x = c = z_{ij}(a)$)

Si no existe ninguno de tales nùmeros finitos c, entonces $z_{ij}(a) = \infty$

Si existen varias las ordenaremos de menor a mayor: $z_{ij}^1, z_{ij}^2 \ldots$

Sobre la ecuaciòn (1,3) hay dos importantísimos resultados obtenidos por Levin , Nehari, Barret y otros autores para diversos tipos de ecuaciones y que se pueden aplicar a (1,3) y (1,4)

1 . Sea $z_{ij}(a)$ nº finito : tanto $i$ como j son pares
Si "$i$" y "$j$" son impares $z_{ij}(a) = \infty$

Para (1,4) ocurre exactamente lo contrario (Ver Nehari [20])

2 . Si $x = \delta_1(a)$ es el primer punto conjugado de $a$
$\delta_1(a) = \min\{z_{ij}^1(a)\}$ para $\forall\, i,j$, con las restricciones
$1 \leq i,j \leq 2n-1$, $i+j = 2n$, $i$ y $j$ pares (segun vimos por 1 ) ( $i$ y j impares para (1,4))

La ecuaciòn (1,3)(en que como vimos i y j son pares) se dice que presenta una oscilaciòn de tipo par

La ecuaciòn (1,4) de tipo impar.

En ambas ecuaciones (1,3) y (1,4) por ser autoadjuntas $z_{ij}^1(a) = z_{ji}^1(a)$

Asì por ejemplo; si en la ecuación (1,3) hacemos n = 3 tendremos $\delta_1(a) = \min\{z_{42}^1, z_{24}^1\} = z_{42}^1 = z_{24}^1(a)$

Pero para n > 3 ya hay diversas posibilidades .

Asì para n = 4
$\delta_1(a) = \min\{z_{62}^1(a), z_{44}^1(a), z_{26}^1(a)\}$ como $z_{62}^1(a) = z_{26}^1(a)$

nos queda $\delta_1(a) = \min\{z'_{62}(a), z'_{44}(a)\}$

Lo ùnico que sabemos es que de existir una soluciòn con cero en a y al menos 8 ceros en $[a, b]$, existe un punto $\delta_1(a) \neq \infty$ y que debe coincidir con el menor de los nùmeros $z_{62}(a), z_{44}(a)$, en que por lo tanto uno al menos de los dos debe ser finito

Vamos a discutir el problema extremal que conduce a la nociòn de punto m - conjugado. Consideramos las soluciones $y(x)$ de (1,3) que se anulan en x = a y suponiendo esta clase no vacía - tengan al menos m + 2 n - 1 ceros en $[a, \infty)$, donde m es un entero positivo dado. Notamos los ceros :

$$a_1 = a \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_{m+2n-1}$$

Entonces existe un punto $\delta m(a)$ siendo

$$\delta m(a) \leq a_{m+2n-1}$$

Escojamos como soluciones fundamentales de (1,3) las $y_i(x,a)$ tales que para x = a satisfagan las condiciones iniciales

$$D_j y_i = \delta_{ij} \qquad \begin{cases} \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$
$$(i, j = 0, 1, \ldots 2n-1)$$

y designemos el Wronskiano.

$$W_k(x, a; i_1 i_2 \ldots i_k) = \alpha_{0,1,\ldots k-1}[y_{i_1}(x,a), y_{i_2}(x,a) \ldots y_{i_k}(x,a)]$$

donde :

$$\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_k}[y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_k}] = \begin{vmatrix} D_{j_1} y_{i_1} & D_{j_1} y_{i_2} & \cdots & D_{j_1} y_{i_k} \\ D_{j_2} y_{i_1} & D_{j_2} y_{i_2} & \cdots & D_{j_2} y_{i_k} \\ D_{j_k} y_{i_1} & D_{j_k} y_{i_2} & \cdots & D_{j_k} y_{i_k} \end{vmatrix}$$

Una soluciòn con cero $2(n-k)$ en a es :

$$y = \sum_{i=2n-2k}^{2n-1} c_i y_i(x,a) \quad (i = 2n-2k, \ldots 2n-1)$$

Si imponemos que esta soluciòn tenga un cero 2 k en un punto b (O sea b = $z_{2n-2k,2k}(a)$ ) tendremos;

$$W_{2k}(b, a; 2n-2k, 2n-2k+1, \ldots 2n-1) = 0 \iff$$
$$\iff W_{2(n-k)}(b, a; 2k, 2k+1 \ldots 2n+1) = 0$$

DEFINICION 2.3 Diremos que una soluciòn de una ecuaciòn lineal de orden n tiene la propiedad $(k, a, b)$ $(1 \leq k \leq n-1)$

si tiene un cero de multiplicidad k en b y un cero de multiplicidad n - k en a.

Para nuestra ecuación decir que una solución tiene la propiedad ( k , a , b ) equivale a decir que para dicha solución $b = z_{jk}(a)$

TEOREMA 2.1 Si $y(x)$ es una solución de propiedad ( 2k , a , b ) de (1,3)

1º. $y(x)$ está unívocamente determinada salvo un factor constante.

2º. $y(x)$ no puede tener ningún cero múltiple en el abierto I = ( a , b ).

( O sea si $x_0 \in I$ e $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) \neq 0$)

3º . $y(x) \neq 0$ en los abiertos ( 0 , a ) y ( b , $\infty$ )

DEMOSTRACIÓN .

1º . De existir dos soluciones linealmente independientes $y(x), z(x)$ con la propiedad $(2k, a, b)$ podríamos construir una solución $u(x) = z^{2(k-n)}(a)\, y(x) - y^{2(k-n)}(a)\, z(x)$ que tiene en a un cero $2(k-n)+1$ y en b un cero 2 k . Una solución ( Ver por ejemplo Nehari [20]). no puede tener dos ceros de multiplicidades $i+j > 2n$. Hemos llegado pués a un absurdo que demuestra la 1ª parte.

2º Supongamos que $y(x)$ tenga en I = ( a , b ) m ceros distintos de $x_i$;
$y'(x)$ tendrá al menos m + 1 ceros distintos , suponiendo que los m ceros $x_i$ fueran simples.

En efecto entre cada 2 ceros de y hay al menos un cero de y'. Pero $y(x)$ tiene cero en a , luego el 1er cero de y' en ( a , b ) ocurre antes del 1er cero de y . El cero i antes del correspondiente i y entre $x_m$ y b hay al menos un nuevo cero de y'. Luego ésta como mínimo: m + 1 ceros.

Si alguno de los m $x_i$ es múltiple habrà más ceros distintos de $y'$. Es suficiente suponer que uno de los $x_i$ (por ejemplo $x_j$ es doble)

Entonces $y'$ tiene en I al menos $m+1$ ceros simples $y_i + 1$ cero simple : $x_j$ = $m + 2$ ceros simples distintos

Repitiendo el razonamiento

$y''$ tendra al menos $m+3$ ceros simples en I y así sucesivamente podemos ir considerando las derivadas sucesivas generalizadas $D_j y$ : $y, y', y''$ --- $py^{(n)}, [py^{(n)}]'$ ----- $[py^{(n)}]^{(n-1)}$

Supongamos para precisar $k \leq n/2$ ( si no , bastaría cambiar entre sì el papel de k y $n$ - k)

Entonces en la derivada 2 k desaparece el cero en b O sea $y^{(2k)}(b) \neq 0$ si $k < n/2$

o bien si $k = n/2$ $[p\, y^{(n)}](b) \neq 0$, en este caso también desapareceria el cero en a o sea $py^{(n)}(a) \neq 0$

En el 1º caso:

$y^{(2k+1)}(x)$ tiene al menos $m + 2k + 1$ ceros simples .

Este nùmero de ceros tiene al menos que mantenerse para las derivadas sucesivas hasta que desaparezca el cero en a

O sea para : $[p\, y^{(n)}]^{(n-2k)}(a) \neq 0$

$[p\, y^{(n)}]^{(n-2k)}(x)$ tiene al menos $m + 2k + 1$ ceros distintos en I .

$[p\, y^{(n)}]^{(n-2k+1)}(x)$ tiene al menos : $m + 2k$ ceros

: $[p\, y^{(n)}]^{(n-1)}(x)$ " " : $m + 2$ ceros distintos

$[p\, y^{(n)}]^{(n)}(x) = ry$ tiene m ceros distintos cuando debía de tener al menos $m+1$. Contradiccìon debida al cero doble y que demuestra el resultado .

b) El caso $k = n/2$

Razonando igual llegamos

$[p\, y^{(n)}]'(x)$ tiene al menos $m + n$ ceros distintos en I

- - - - - - .

$[p\,y^{(n)}]^{(n-1)}(x)$ tiene al menos $m+(n-k)+2$ ceros distintos en $J$

y el caso es exactamente igual al anterior

3º) a) Vamos a probar que $y(x) \neq 0$ en $(b, \infty)$

Supongamos por el contrario que $y(\beta) = 0$, $b < \beta$

$\beta$: 1^er^ cero a la derecha de b

Supongamos la solución $y(x)$ que verifica.

$y(x)$ tiene cero $2(n-k)$ en a, m ceros simples $x_i$ en $(a,b)$, cero $2k$ en b, 1 cero en $\beta$

(En realidad como en el apartado 2 se podría prescindir de los m ceros simples en ( a, b ) o sea $m = 0$) que no alteran para nada la demostración : es decir solo son los ceros multiples los que influyen)

Analizamos las derivadas sucesivas lo mismo que antes

$y'$: cero $2(n-k)-1$ en a, $m+1$ ceros simples en ( a , b ), cero $2k-1$ en b, un cero en $(b, \beta)$

Al llegar a la derivada de orden $2k$ desaparece el cero en b, pero sigue un cero en $(b, \beta)$

Al proseguir ; ese último cero puede penetrar en el intervalo ( a , b )

Es fàcil comprobar que llegamos a: $[p\,y^{(n)}]^{(n-1)}(x)$ debe tener al menos $m+2$ ceros distintos en $(a, \beta)$; pero como $[p\,y^{(n)}]^{(n)}(x) = r\,y$ tiene m ceros en (a,b), resulta $[p\,y^{(n)}]^{(n-1)}(x)$ solo puede tener $m+1$ ceros en (a,b) distintos.

Luego el cero $m+2$ debe de ser posterior a b.

Supongamos ese cero $b_1$ : $b < b_1 < \beta$

$$[p\,y^{(n)}]^{(n-1)}(b_1) - [p\,y^{(n)}]^{(n-1)}(b) = \int_b^{b_1} r\,y(x)\,dx.$$

Suponemos $y(x) > 0$ en $(b, b_1)$ ( no es perdida de generalidad

pues $b_1 < \beta$ , luego $y(x)$: signo constante en ( b, $b_1$ ) que podemos suponer positivo ( si no multiplicamos por ( - 1)
Lo que implica $[p\, y^{(n)}]^{(n-1)}(b) < 0$

$[p\, y^{(n)}]^{(n-2)}(x)$ como màximo m + 2 ceros distintos en (a,b]
$\Rightarrow [p\, y^{(n)}]^{(n-2)}(x)$ tiene al menos un cero en ( b , $\beta$ ), ese cero b2 naturalmente verifica

$$b_1 \leq b_2$$

Por tanto $[p\, y^{(n)}]^{(n-2)}(x)$ tiene signo constante en (b, $b_1$) ( no tiene ningún cero en ese intervalo).

Consideremos el ùltimo cero de $[p\, y^{(n)}]^{(n-2)}(x)$ antes de b . Ese cero tiene que ser posterior al ùltimo cero antes de b de su derivada.

Luego en èl tiene pendiente negativa :

$$[p\, y^{(n)}]^{(n-1)}(b) < 0 \Longrightarrow [p\, y^{(n)}]^{(n-2)}(b) < 0$$

Reiterando el proceso llegaríamos a que las sucesivas derivadas en b serian negativas o cero :

$$[p\, y^{(n)}]^{(n-3)}(b) \leq 0 \;\; - - - - . \;\; [p\, y^{(n)}]^{[n-2(n-k)]}(b) \leq 0$$

Entonces de acuerdo con el lema 2.1 ($y(x)$ tiene en b todas sus derivadas 0 o negativas) : $y(x)$ no puede tener ningún cero posterior a b ! Contradicciòn que demuestra el Teorema

b) Podemos demostrar que $y(x) \neq 0$ en ( o , a ) por el mismo razonamiento apoyándonos en el Lema 2.2.

Con èsto quedaría demostrado por completo el Teorema 2.1

El mètodo empleado en la demostraciòn del Teorema anterior permite una fácil generalizaciòn.

TEOREMA 2 .2. Sea $y(x)$ una soluciòn de (1,3)

a) Si $y(x)$ tiene un cero de orden 2 k en a , no puede tener 2 n + 1 ceros en [ a , b ],(contando las multiplicidades) sin cambiar de signo al menos una vez . En general si $y(x)$ tiene 2 n + k ceros en el intervalo cerrado [ a , b ] tiene que tener al menos k cambios de signo .

b) Si $y(x)$ tiene un cero de orden 2 k - 1 en a no puede tener 2 n ceros sin haber cambiado de signo al menos una vez . En general si tiene 2 n + k ceros en [ a , b ] tiene que tener al menos k + 1 cambios de signo.

DEMOSTRACIÒN : Sigue el mismo mètodo que en el caso anterior. Podemos prescindir de los ceros simples en ( a , b ) pues en ellos hay un cambio de signo y no alteran por tanto el resultado.

Más general si aparece en ( a , b ) un cero impar 2k+1, podemos limitarnos a estudiarlo como cero par 2 k ya que el cero de más se compensa con un cambio de signo .

Consideremos puès una soluciòn $y(x)$, con ceros en los extremos a y b.

SUPONGAMOS :

1) $y(x)$ cero par en a

Basta demostrar pues que $y(x)$ no puede tener 2 n + 1 ceros en [ a , b ] considerando en ( a , b ) sòlo la existencia de ceros mùltiples pares.

El cero en b tiene que ser impar para que la suma de los ceros sea 2n + 1

O sea $y(x)$ tiene en el intervalo semicerrado [a, b) sólo ceros pares, Sean los ceros: $x_0, x_1, \ldots x_s$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{s-1} < x_s = b$$

de multiplicidades respectivas : $2m_0, 2m_1, 2m_2, \ldots 2m_s - 1$

$$(1 \leq m_i \leq n-1 \; ; \; i = 0, 1, \ldots s)$$

$$2(m_0 + m_1 + \cdots + m_s) = 2(n+1)$$

Consideremos las derivadas sucesivas :

$y'$: ceros $x_i$ con multiplicidades : $2m_i - 1$

$+ \; S$ ceros simples $y_i : x_{i-1} < y_i < x_i$

total $y'(x) : 2n+1-s-1+s = 2n$ ceros

Asì sucesivamente llegaríamos a que $[p\, y^{(n)}]^{(n-1)}$ tendría en ( a , b ) como mìnimo 2 ceros simples

$[p\, y^{(n)}]^{(n)} = ry$ tendría que tener al menos en ( a , b ) un cero simple ( donde cambie de signo $y(x)$; pero $y(x)$ no cambia de signo en ( a , b ).

b) Lo mismo podíamos repetir el rezonamiento suponiendo en a un cero impar y probaríamos la 2ª parte,.

Para la ecuaciòn (1,4) vamos a poder expresar un resultado simètrico.

<u>TEOREMA 2 . 3</u> Las funciones $z_{ij}^{m}(a)$ son funciones continuas y derivables de a

<u>DEMOSTRACIÒN</u> : En efecto siendo la soluciòn general con cero i en $a$( tanto para la ecuaciòn (1,3 ) como la (1,4)

$$y(x) = \sum_{r=i}^{2n} c_r \, y_r(x, a)$$

Los puntos $x = z_{ij}(a)$ vendrian definidos por la ecuaciòn implícita : $W_j(x, a) = 0$

Pero el W estè formado por funciones continuas y derivables de x y de a , luego es funciòn continua y derivable de x y de a.

Por el Teorema de existencia de las funciones implícitas, y teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial W_j}{\partial x}\frac{dx}{da}+\frac{\partial W_j}{\partial a}=0$$

$$\frac{dx}{da}=-\frac{\partial W_j}{\partial a}\Big/\frac{\partial W_j}{\partial x}$$

$W_j(x,a)$ define una función $x=z_{ij}^{m}(a)$ uniforme y continua de a en un cierto entorno de todo punto de (a, b) donde $\frac{\partial W_j}{\partial x}\neq 0$ y esta función es además diferenciable en ese punto.

$$W_j(x,a)=\begin{vmatrix} D_0\,y_i(x,a) & \cdots & D_0\,y_{2n-1}(x,a)\\ D_1\,y_i(x,a) & \cdots & D_1\,y_{2n-1}(x,a)\\ \vdots & & \\ D_{j-1}\,y_i(x,a) & \cdots & D_{j-1}\,y_{2n-1}(x,a)\end{vmatrix}$$

$\frac{\partial W_j(x,a)}{\partial x}=W_j(x,a)$ sustituyendo la última fila por la fila : $D_j\,y_i(x,a),\ D_j\,y_{i+1}(x,a)\ \cdots\ D_j\,y_{2n-1}(x,a)$

En los puntos x= b, donde $W_j(b,a)=0$ $\frac{\partial W_j}{\partial x}(b,a)\neq 0$. Pues si fuera $\frac{\partial W_j}{\partial x}=0$, entonces existiría una solución con cero i en a y cero: $2n-i+j$ en b: imposible.

TEOREMA 2.4 Las funciones $z_{ij}^{m}(a)$ son funciones estrictamente monótonas crecientes de a.

DEMOSTRACION:

1° $z_{ij}^{m}(a)$ es estrictamente monótona :

$$(z_{ij}'^{\,m}(a)\neq 0)$$

Supongamos que $z_{ij}'^{\,m}(a)=0$ para algún punto a.

En tal punto $\frac{\partial W_j(x,a)}{\partial a}=0$

Pero a) $\frac{\partial y_i(x,a)}{\partial a}$ es solución de la ecuación diferencial

En efecto $\frac{\partial y_i(x,a)}{\partial a}$ es la solución de la ecuación diferencial $y_{i-1}(x,a)$, pues la solución $y_i(x,a)$ queda definida por $y = \sum c_j(a)\, Y_j(x)$, donde las $Y_j(x)$ son soluciones fundamentales cualesquiera, y donde las $c_i$ se deducen como solución del sistema :

$$0 = D_0 y(a) = D_1 y(a) = \cdots = D_{i-1} y(a) = D_{i+1} y(a) = \cdots = D_{2n-1} y(a)$$

$D_i y(a) = 1$ ; con lo que $c_j = \frac{(-1)^{i+j} W_{-(i,j)}(a)}{W(a)}$ ; $W_{-(i,j)}$ es el wronskiano menos la fila $i$ y la columna $j$.

Al derivar respecto a "a", no afecta para nada a las soluciones fundamentales $Y_j(x)$ pero ahora

$\frac{\partial y_i(x,a)}{\partial a} = \sum c_j'(a)\, Y_j(x)$ ; luego es solución de la ecuación

y además : $c_j' = (-1)^{i+j} \frac{W(a)\, W'_{-(i,j)}(a) - W_{-(i,j)}(a)\, W'(a)}{W^2(a)}$, $W'(a) = 0$

luego $c_j' = \frac{(-1)^{i+j} W'_{-(i,j)}(a)}{W(a)} = \frac{(-1)^{i+j} W_{-(i-1,j)}(a)}{W(a)}$

$\frac{\partial y_i(x,a)}{\partial a} = -y_{i-1}(x,a)$ ; b) Sea la sol. $y = \sum_{r \neq i}^{2n-1} \frac{\partial y_r}{\partial a} c_r$

por ser $\frac{\partial W_i(a,x)}{\partial a} = 0$ tiene un cero $j$ en b

luego como la $y = \sum c_r y_r(x,a)$ también por ser $W_j(a,x) = 0$

y ambas soluciones son esencialmente distintas $\Longrightarrow$ una solución con cero $i-1$ en $a$ y $2n+1-i$ en b.

Pero si la ecuación tiene oscilación $i, 2n-i$ no la puede tener $i-1$, $2n+i-1$. (Una será par y otra impar)

Se concluye que $\frac{\partial W_i(x,a)}{\partial a} \neq 0$

y por consiguiente $z_{ij}'^{\,m}(a) \neq 0$

OBSERVACION: Esto incluye el que $z_{ij}^{m}(a)$ no pueda ser constante.

2: $z_{ij}^{m}(a)$ no es siempre decreciente: Si lo fuera al aumentar a iría disminuyendo $z_{ij}^{m}(a)$ y por la continuidad llegaríamos a un punto en que $z_{ij}^{m}(a) = a$. Esto sólo lo puede verificar la solución trivial $y \equiv 0$.

En conclusión $z_{ij}^{m}(a)$ es estrictamente monótona creciente, con lo que si $b > a$:

$$z_{ij}^{m}(b) > z_{ij}^{m}(a).$$

Para la demostración a seguir vamos a hacer uso de la dependencia continua de las soluciones respecto a los ceros.

<u>LEMA 2.4</u> Sea $y(x)$ una solución con cero de orden $2n-j-1$ en $a$ y cero de orden $j$ en $b>a$ (Esa solución existe siempre, en realidad existen infinitas, todas deducidas de una al multiplicar por un factor constante). Sea $x_i$ un cero simple de dicha solución tal que $a < x_i < b$.

Formemos ahora la función $x_i(b)$. Entonces $x_i$ es función contínua de $b$.

<u>DEMOSTRACION.</u> En efecto la solución con cero $2n-j-1$ en $a$ es

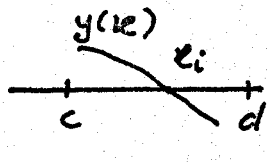
$$y(x) = \sum_{r=2n-j-1}^{2n-1} c_r\, y_r(x,a) \,, \qquad y_r(x,a) \text{ las soluciones fundamentales en } x = a$$

Si queremos que tenga un cero de orden $j$ en $b$.

$$\left.\begin{aligned} &\sum c_r\, y_r(b) = 0 \\ &\sum c_r\, y_r'(b) = 0 \\ &\text{---}\quad\text{---}\quad\text{---} \\ &\sum c_r\, y_r^{(j-1)}(b) = 0 \end{aligned}\right\}$$

Sistema de $j$ ecuaciones homogéneas con $j+1$ incógnitas: $c_r$

Luego la solución $y(x) = \sum_{r=2n-j-1}^{2n-1} c_r(b)\, y_r(x,a)$ con los coeficientes $c_r(b)$ deducidos del sistema anterior es una función contínua y derivable, en realidad analítica respecto a $b$.




Sean ahora puntos $c < x_i < d$ entonces $y(c)\, y(d) < 0$.

Como la solución $y(x)$ es contínua respecto a $b$ Para un $b_1$ suficientemente próximo a $b$ se sigue verificando que: $y_{b_1}(c)\, y_{b_1}(d) < 0$

Luego la función con cero $j$ en $b_1$ sigue teniendo cero simple en $(c,d)$. Como ese intervalo $(c,d)$ podemos hacerlo tan pequeño como queramos. Sigue la conclusión que $x_i(b)$ es función contínua de $b$. Al menos mientras esté definida y $x_i$ no se convierta en un cero múltiple.

<u>TEOREMA 2.5</u> Sea $y(x)$ una solución de $(1,3)$ ó $(1,4)$ con la propiedad $[j, a, z_{ij}^m(a)]$ o sea con cero $i=2n-j$ en $a$ y cero $j$ en $z_{ij}^m(a)$. Dicha solución tiene $m-1$ ceros simples interiores (o sea en $(a, z_{ij}^m(a))$.

<u>DEMOSTRACION.</u> En primer lugar no puede tener ceros multiples (Teorema 2.2)

a) la solución $[j, a, z_{ij}^1(a)]$ no tiene ningún cero interior

En efecto supongamos que tuviese alguno por ejemplo el $x_i$

Formamos la solución $z(x)$ con cero $2n-j-1$ en $a$ y cero $j$ en en un punto $b<z_{ij}^1$ pero tan próximo a él como queramos (solución que como sabemos existe). Esta solución por el teorema anterior tiene que tener un cero $x_i'$ suficientemente próximo a $x_i$

Al ir disminuyendo $b$ el cero $x_i'$ vá variando con continuidad.

El punto $z_{ij}^{1}(a) \geq S_1(a)$ por definición.

Si disminuimos $b$ hasta que $b \leq S_1(a)$ llegamos a una de las varias posibles contradiciones.

1º Tenemos una solución con al menos $2n+1$ ceros en $[a,b]$ : imposible.

2º Há desaparecido del intervalo el cero $x_i$ Sólo lo puede hacer por los extremos; o bien por el interior si previamente se transforma en cero doble. Esto último está descartado según señalamos al comienzo.

Desaparece por $a$: Tememos una solución con cero $2n-j$ en $a$ y cero $j$ en $b$. Luego el punto de partida no seria $z_{ij}^{1}$ si no al menos $z_{ij}^{2}$

Desaparece por $b$: Tenemos una solución $2n-j-1$ en $a$ y cero $j+1$ en $b$. Pero como hemos partido de la existencia de la oscilación $(2n-j, j)$, la $(2n-1-j, j+1)$ no es posible.

b) La solución $[j, a, z_{ij}^{m}(a)]$ tiene $m-1$ ceros simples interiores.

Lo razonamos por inducción: si admitimos que dicha aseveración es correcta probaremos que la $[j, a, z_{ij}^{m+1}(a)]$ tiene $m$ ceros.

Si admitimos que solo tiene $m-1$ ceros

Ahora $b$ lo haríamos disminuir hasta el punto $z_{ij}^{m}(a)$

Ahora el absurdo seria que llegaríamos a que (al no poder desaparecer ceros en el interior del intervalo) nos encontraríamos con una solución con cero $2n-j-1$ en $a$, $m-1$ ceros simples en $(a,b)$ y cero $j$ en $z_{ij}^{m}(a)$.

Pero sabemos que esa solución tiene que tener en $a$ un cero de orden $2n-j$. O sea tiene que adquirir un cero en el extremo $a$ que sólo lo puede adquirir viniendo por la izquierda.

Es decir si $y(x)$ es la solución considerada:

Tendríamos $y^{(2n-j-2)}(a)$ por ejemplo signo más. Al variar $b$, el valor de esa derivada varía continuamente hasta que $b$ coincide con $z_{ij}^{m}(a)$ en cuyo caso $y^{(2n-j-2)}(a)=0$. Al seguir disminuyendo $b$ la $y^{(2n-j-2)}(a)$ adquiere el signo menos.

Mientras $y^{(2n-j-2)}(a)$ era positiva, en el 1º cero de $(a,b)$, sea $x_1$, $y'(x_1)<0$ Al pasar $y^{(2n-j-2)}(a)$ a tener signo menos, como $y'(x_1)$ sigue con signo menos (no puede anularse y pasar a positivo) resulta que necesariamente ha tenido que aparecer un nuevo cero $x_0$; $a<x_0<x_1$

Entonces, como evidentemente $S_m(a)\leq z_{ij}^{m}(a)$,

al seguir disminuyendo $b$ y llegar a valores de $b<S_m(a)$ estaríamos en una contradicción.

O bien una solución con $2n+m-1$ ceros antes de $S_m$.

O bien la desaparición de uno de los ceros interiores que sólo se podria hacer por $a$ previa la aparición de una solución $2n-j$ $a$, $m-1$ ceros simples y cero $j$ en $b<z_{ij}^{m}(a)$.

ABSURDO.

Si por el contrario admitiesemos que la solución con la propiedad $[j,a,z_{ij}^{m+1}(a)]$ tiene más de $m$ ceros, nos encontramos con el mismo absurdo que en el caso $a)$. Haríamos ahora disminuir $b$ hasta el punto $z_{ij}^{m}(a)$ y es evidente.

Queda así demostrado el teorema.

TEOREMA 2.6 $\delta_m(a) = \min z_{ij}^m(a)$
$(i+j = 2n,\ i \geq j)$

(Esto se verifica tanto para la ecuación (1.3) como para la ecuación (1.4)

DEMOSTRACION.

Por definición $\delta_m(a) \leq \min z_{ij}^m(a)$

Hay que demostrar que $\delta_m(a) \not< \min z_{ij}^m(a)$

Por la definición de $\delta_m(a)$ hay una solución de la ecuación: $y(x)$ con cero en el punto $a$, cero en $\delta_m(a)$ y $2n+m-1$ ceros en $[a, \delta_m(a)]$.

Dicha solución no puede tener en $a$ un cero de orden $2n-1$ pues o bien, caso de la ecuación (1.3) dicha solución no puede tener mas ceros; o bien caso de la ecuación (1.4) el cero $2n+m-1$ sería $z_{2n-1,1}^m(a) > \delta_m(a)$ por hipótesis.

Veamos ahora que dicha solución no puede tener en $a$ un cero de orden $2n-2$

Entonces: $y = c_{2n-2}\, y_{2n-2}(x) + c_{2n-1}\, y_{2n-1}(x)$, siendo las $y_i$ las soluciones fundamentales em $a$ que hemos definido anteriormente.

Esta solución tendría que tener $m+1$ ceros en $(a, \delta_m]$

a) Supongamos $y_{2n-1} \neq 0$. Esto se verifica siempre para la ecuación (1.3) como sabemos.

$$\left(\frac{y}{y_{2n-1}}\right)' = c_{2n-2}\left(\frac{y_{2n-2}}{y_{2n-1}}\right)' = c_{2n-2}\, z_{2n-2}$$

Llamamos $z_{2n-2} \cdot a \left(\frac{y_{2n-2}}{y_{2n-1}}\right)'$; $W_2[y_{2n-2}, y_{2n-1}] = y_{2n-1}^2\, z_{2n-2}$

El wronskiano de las dos soluciones $y_{2n-2}$ e $y_{2n-1}$ puede tener en $(a, \delta_m]$ como máximo $m-1$ ceros: $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots \alpha_{2,m-1}$. (El cero $m$ sería $z_{2n-2,2}^m(a) > \delta_m(a)$

Pero de tener $y(x)$ $m+1$ ceros en $(a, \delta_m(a)]$, $\left(\frac{y}{y_{2n-1}}\right)'$ debía tener al menos $m$ ceros (Por aplicación del teorema de Rolle entre dos ceros consecutivos y porque en los ceros múltiples la derivada tiene un cero de un orden menos de multiplicidad).

Pero hemos visto que $W_2[y_{2n-2}, y_{2n-1}]$, $z_{2n-2}$ y por tanto $\left(\frac{y}{y_{2n-1}}\right)'$ sólo puede tener $m-1$ ceros en $(a, \delta_m(a)]$

b) Supongamos que $y_{2n-1}(x)$ pueda tener ceros: caso de la ecuación (1.4)

Entonces $y_{2n-1}$ sólo puede tener en $(a, \delta_m(a)]$

$m-1$ ceros: $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots \alpha_{1,m-1}$

Separemos el intervalo $(a, \delta_m)$ en subintervalos parciales abiertos: $(a, \alpha_{11}), (\alpha_{11}\, \alpha_{12}) \ldots (\alpha_{1,m-1}, \delta_m(a)]$

en cada intervalo tenemos igual que antes;

$$\left(\frac{y}{y_{2n-1}}\right)' = c_{2n-2}\, z_{2n-2}$$

Ahora al poder anularse $y_{2n-1}$, los wronskianos pares son distintos de cero $\Longrightarrow z_{2n-2} \neq 0$.

Luego $y(x)$ sólo puede tener como máximo un cero en cada subintervalo parcial. En total $m$ ceros (el último en $\delta_m$). Entonces para tener $m+1$ ceros debe al menos tener uno en cualquiera de los puntos: $\alpha_{11}, \alpha_{12} \ldots \alpha_{1,m-1}$

Pero si $y(\alpha_{1j}) = 0 = c_{2n-2}\, y_{2n-2}(\alpha_{1j})$

Pero $y_{2n-2}(\alpha_{1j}) \neq 0$ (Ese cero al serlo de $y_{2n-1}$ e $y_{2n-2}$ lo sería de $W_2$ )

Hemos visto pues que es imposible que $y(x)$ tenga en $a$ un cero de orden $2n-2$.

c) Por inducción supongamos que $y(x)$ no puede tener en $a$ un cero de orden $2n-K$.

O sea que la solución

$$y = \sum c_i y_i \quad (i = 2n-K, \ldots 2n-1)$$

no puede tener $m+K-1$ ceros en $(a, \delta_m(a)]$

Veamos entonces que tampoco puede ser una solución con un cero de orden $2n-K-1$ en $a$.

Entonces $y = \sum c_i y_i \quad (i = 2n-K-1, \ldots 2n-1)$

Vamos a probar que no puede tener $K+m$ ceros en $(a, \delta_m]$

Supongamos $y_{2n-1} \neq 0$.

$$\left(\frac{y}{y_{2n-1}}\right)' = \sum c_i z_i = c_{2n-K-1} z_{2n-K-1} + \cdots + c_{2n-2} z_{2n-2}$$

Ceros posibles de $W_{K+1}[y_{2n-K-1}, \ldots y_{2n-1}]$ son $\alpha_{K+1,1} \ldots \alpha_{K+1,m-1}$. En total sólo $m-1$ ceros

$$W_{K+1}[y_i] = y_{2n-1}^{K+1} W_K[z_{2n-K-1}, \ldots z_{2n-2}]$$

$W_K$ sólo $m-1$ ceros

Pero como por la hipótesis de inducción una combinación lineal de $K$ funciones $(z_i)$ cuyo wronskiano tenga en $(a, \delta_m]$ como máximo $m-1$ ceros; solo puede tener como máximo $m+K-2$ ceros; resulta que $y$ sólo puede tener $m+K-1$ ceros

Supongamos que pueda anularse $y_{2n-1}$: ceros posibles de $y_{2n-1}$: $\alpha_{11} \ldots \alpha_{1,m-1}$ $(m-1)$

Como antes descompongamos el intervalo en subintervalos $(a, \alpha_{11})$ $(\alpha_{11}\, \alpha_{12}) \ldots (\alpha_{1,m-1}, \delta_m]$.

En cada uno de ellos podemos expresar

$$\left(\frac{y}{y_{2n-1}}\right)' = c_{2n-K-1} z_{2n-K-1} + \cdots + c_{2n-2} z_{2n-2}$$

Como antes $W_K(z_{2n-K-1} \ldots z_{2n-2})$ sólo puede tener $m-1$ ceros en $(a, \delta_m]$

Resultaría que en $(a,\alpha_{11})\cup(\alpha_{11}\alpha_{12})\cup\ldots\cup(\alpha_{1,m-1},\delta_m]$ $\left(\frac{y}{y_{2n-1}}\right)'$ sólo podía tener como máximo $K+m-2$ ceros y por tanto $y$ : $K+m-1$ ceros.

Luego $y$ debía tener al menos un cero más en un punto $\alpha_{1j}$.

Entonces en ese punto $\frac{y}{y_{2n-1}}$ sería finito y tendríamos un intervalo menos, y seguiría manteniéndose el resultado que queríamos probar.

Conclusión : $\delta_m = \min z_{ij}^m$

COROLARIO: Los teoremas 2.3, 2.4, 2.5 que habíamos probado para las funciones $z_{ij}^m$ valen pues para la función $\delta m(a)$.

O sea: $\delta m(a)$ es una función contínua y derivable de $a$, es estrictamente creciente con $a$. Existe una solución única de las ecuaciones (1.3) y(1.4) con la propiedad $[j,\ a,\ \delta m(a)]$ (o sea con cero de orden $2n-j$ en $a$ y un cero de orden $j$ en $\delta m$, para algún $1\leq j\leq n$ ). Dicha solución tiene exactamente $m-1$ ceros simples en el intervalo abierto $(a.\ \delta m(a))$.

## 3 - ESTUDIO DE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACION (1.3) CON CERO DE ORDEN $2n-2$ EN $a$

Llamamos $Cl_{2n-2}(a)$ a la clase de las soluciones de la ecuación (1.3) con cero $2n-2$ en $a$.

Llamamos $y_m$ a la solución $y_m \in Cl_{2n-2}(a)$ y con cero doble en el punto $z^m_{2n-2,2}(a)$, que para abreviar y siempre que no haya peligro de confusión pondremos simplemente $z^m$.

Por el teorema 2.1 sabemos que $y_m$ no tiene ceros en $(0,a)$, ni en $(z^m,\infty)$ y tiene $m-1$ ceros simples en $(a,z^m)$ (teorema 2.5)

Basándose en la propiedad fundamental de las soluciones de la ecuación (1.3) de tener soluciones siempre positivas y en el hecho de que dos soluciones linealmente independientes $\in Cl_{2n-2}(a)$ constituyen un sistema fundamental que permite expresar todas las soluciones : $y \in Cl_{2n-2}(a)$ podemos deducir fácilmente el comportamiento de éstas.

TEOREMA 2.7 Los puntos $z^m(a)$ separan los ceros de todas las soluciones de la clase $Cl_{2n-2}(a)$

Sea $y(x) \in Cl_{2n-2}(a)$ si los ceros de dicha solución son $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ tenemos:

$$a < x_1 < z^1 < x_2 < z^2 \ldots\ldots$$

DEMOSTRACION: Cualquier otra solución $w(x) \in Cl_{2n-2}(a)$ se puede expresar: $w = Ay + Bu$ ( $A, B$. cts.)

y, solución dada con 2 ceros consecutivos : $x_i, x_{i+1}$

$u(x) \in Cl_{2n-2}(a)$ ; $u(x) > 0$ para $x > a$

$\left(\frac{y}{u}\right)_{x_i} = 0 = \left(\frac{y}{u}\right)_{x_{i+1}}$ ; $\frac{y}{u}$ función contínua en $[x_i, x_{i+1}]$,

luego por el teorema de Rolle en un punto $x_j : x_i < x_j < x_{i+1}$

su derivada se anula $\Longrightarrow uy' - yu' = 0$

$w = u(x_j)y - y(x_j)u$ tiene un cero doble en $x_j$

luego $x_j = z^i$ ; entre cada 2 ceros consecutivos de $y(x)$ hay un punto $z^m$.

Sólo queda demostrar que $x_1 < z^1$.

Si $x_1 > z^1$ sería,

Salvo un factor constante : $y = y_1 \pm Ku$

( $K$ constante positiva)( $u(x)$ solución con cero en $a$ de orden $2n-1$)

$0 = y(x_1) = y_1(x_1) \pm Ku(x_1)$

Supuesto sin pérdida de generalidad $y_1$ positiva; tendremos

$$y = y_1 - Ku$$

luego en $z^1$: $y = -Ku\,(z^1) < 0$

$$y\,(a+\varepsilon) = y_1\,(a+\varepsilon) - Ku\,(a+\varepsilon) > 0 \qquad \text{para } \varepsilon \to 0$$

Por tanto $y(x)$ ha debido tener un cero antes de $z^1$ contra la hipótesis.

COROLARIO: No puede haber dos soluciones linealmente independientes pertenecientes a la $C l_{2n-2}(a)$ con otro cero cumún. (Lo que implicaría: la existencia de una solución con cero $2n-1$ y otro cero más)

COROLARIO: Si en un punto $z^i$, $y_i''(z^i) > 0$ (o bien $< 0$), cualquier $y \in Cl_{2n-2}(a)$ que cumpla $y(z^i) > 0$ (o bien $< 0$), no tiene ningún cero en $(z^i, \infty)$

DEMOSTRACION: Supongamos que sí. Sea ese cero $x_i$

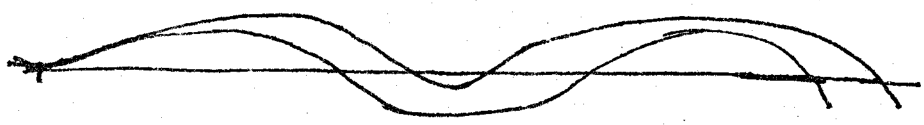
$$y\,(x_i) = 0 \quad ; \quad y = y_i \pm Ku$$

como en $z^i$ : $y > 0$ ; $y = y_i + Ku$

para $x > z^i$ ; $y_i > 0$ , $u > 0 \Longrightarrow y > 0$. C.Q.D.

TEOREMA 2.8: Sean $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$ tres ceros consecutivos de una $y(x) \in Cl_{2n-2}(a)$, cualquier otra solución , $w(x) \in Cl_{2n-2}(a)$ que tenga algún cero en $(x_i, \infty)$, tiene dos ceros en $(x_i, x_{i+1})$ o uno doble, o ninguno. Si tiene dos, en $(x_{i+1}, x_{i+2})$ no tiene ninguno. (Si tiene cero doble ya no vuelve a tener más ceros). Si no tiene ninguno, en $(x_{i+1}, x_{i+2})$ tiene dos o uno doble.

Gráficamente



DEMOSTRACION:

$$w = y \pm Ku$$

Sin pérdida de generalidad supongamos $y$ positiva en $(x_i, x_{i+1})$, por tanto negativa en $(x_{i+1}, x_{i+2})$. Lo mismo para fijar ideas

$$w = y + Ku.$$

Es inmediato que $w \neq 0$ en $(x_i, x_{i+1})$, luego en $(x_{i+1}, x_{i+2})$ tiene que tener dos o uno doble.

Hay un punto $z^j$ entre $x_{i+1}$ y $x_{i+2}$

Por corolario al teorema anterior : $y_j''(z^j) > 0$

Si $W$ no tuviese ceros en $(x_{i+1}, x_{i+2})$ ya no tendría más ceros contra hipótesis.

$\left.\begin{array}{l} w(x_{i+1}) > 0 \\ w(x_i+2) > 0 \end{array}\right\} w(x)$ tiene que tener un número par de ceros en $(x_{i+1}, x_{i+2})$

Si tuviese cero doble sería la solución: $y_j$.

No puede tener dos ceros en $(x_{i+1}, z^j)$ ni en $(z^j, x_{i+2})$

Luego tiene que tener un cero en cada uno de estos subintervalos y dos en $(x_{i+1}, x_{i+2})$. C.Q.D.

Si llamamos $x_j^i$ al cero i-simo de la solución $y_j$ ; surgen como corolarios de los teoremas 2.7 y 2.8 respectivamente, la siguiente distribución de dichos ceros.

COROLARIO: La solución $y_i$ tiene $i-1$ ceros simples que verifican

$$a < x_i^1 < z^1 < x_i^2 < z^2 < \ldots < x_i^{i-1} < z^{i-1} < z^i$$

COROLARIO: Entre $z^{i-1}$ y $z^i$ las soluciones $y_j$ $(j \geq i+1)$ tienen un sólo cero $x_j^i$. Estos puntos $x_j^i$ se ordenan según la relación:

$$z^{i-1} < x^{i}_{i+1} < x^{i}_{i+3} < \dots < x^{i}_{i+4} < x^{i}_{i+2} < z^{i} < x^{i+1}_{i+1}$$

Gráficamente


<u>CONCLUSION:</u> Las soluciones $\in Cl_{2n-2}(a)$ y $\notin Cl_{2n-1}(a)$ y distintas de las soluciones $y_m$ verifican

1º Todos los ceros son simples en $(a,\infty)$

2º Si antes de $z^1$ no ha tenido cero, no lo tiene yá.

3º Si su 1^er cero es anterior a $x^1_2$, no tiene más ceros.

En efecto, en $(x^1_2, z^2)$ no pueden tener ningún cero, luego $y(z^2)<0$, $y''_2(z^2)<0$, luego $y\neq 0$ para $x>z^2$

4º Si tiene cero en $(x^1_3, z^1)$ sólo tiene un nuevo cero más en $(z^1, x^2_3)$ y ninguno más.

5º Si tiene cero en $(x^1_2, x^1_3)$ tiene al menos dos ceros mas. Llamando a esos ceros $\beta_i$

$$x^1_2 < \beta_1 < x^1_3 < x^2_3 < \beta_2 < z^2 < \beta_3 < z^3$$

6º Si tiene cero en $(x^1_{2i}, x^1_{2i+1})$ tiene $2i+1$ ceros en $(a, z^{2i+1})$

7º Cualquier solución $\in Cl_{2n-2}(a)$ tiene menos de $i$ ceros en $(a, z^i)$

O sea las soluciones $y_i$ son las que tienen mayor número de ceros en $[a, z^i]$ de todas las pertenecientes a $Cl_{2n-2}(a)$.

4 - SOLUCIONES DE LA ECUACION (1.3) CON CERO $2n-3$ EN $a$.

Ante todo una solución con cero $2n-3$ en $a$ y cero doble en $b$, que existe siempre, ya no vuelve a tener ningún cero más a partir de $b$ (Teorema 2.2).

Esta solución además es <u>única</u> salvo un factor constante. Si hubiera dos linealmente independientes: ésto implicaría (por combinación lineal) una solución con oscilación $2n-3, 3$.

Se pueden deducir los siguientes resultados:

1º No puede haber tres soluciones linealmente independientes $\in Cl_{2n-3}(a)$ con un cero $b$ común.

La prueba es inmediata $\Longrightarrow$ la existencia de una solución con cero $2n-1$ en $a$ y cero en $b$: imposible.

2º Como consecuencia: dos soluciones linealmente independientes $\in Cl_{2n-3}(a)$ y cero en $b$ común constituyen un sistema fundamental de soluciones, tal que toda otra solución $\in Cl_{2n-3}(a)$ y cero en $b$ se puede poner como combinación lineal de ellas.

3º Sean dos soluciones $L.I.$ (linealmente independientes) $\in Cl_{2n-3}(a)$ y con cero en $b$, sus ceros se separan mutuamente en $(a,b)$.

O sea entre cada dos ceros de una tiene que haber uno y sólo uno de la otra.

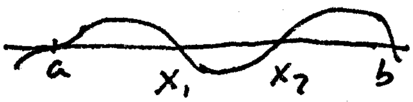
Ante todo los ceros no pueden coincidir, implicaría una solución con cero $2n-3$ $a$, cero 2 y cero posterior: imposible.

Supongamos $x_1, x_2$ ceros consecutivos de $y_1$ y entre ellos ninguno de $y_2$: ésto implica una solución con cero $2n-3$ en $a$, cero 2 y cero $b$ posterior. Luego $y_2$ tiene que tener un cero; dos no pueden ser, porque si no entre ellos debía haber uno de $y_1$.

TEOREMA 2.9 Una solución perteneciente a $Cl_{2n-3}(a)$ no puede tener $2n+m-1$ ceros en $[a, z^{m}_{2n-2,2}(a)]$

DEMOSTRACION: Ante todo no hay una solución con cero $2n-3$ en $a$ que tenga $2n$ ceros en $[a, z^1]$.

En efecto sea esa solución: $u_1$




$b \leq z^1$

Existe una solución $u_2$ con cero $2n-2$ en $a$ y cero en $b$ que no tiene ningún cero más interior. Esto está en contradicción con los resultados anteriores (el de separación de ceros). En el caso que $b = z^1$ la solución cero $2n-2$ en $a$ tiene un cero doble en $b = z^1$ y ningún cero anterior, la conclusión es la misma.

Pero puede ocurrir que $u_1$ sea una solución con cero $v_1$ y cero doble en $b$. Veamos que ésto tampoco introduce nueva complicación en la demostración pues ahora:

$$\frac{u_1}{u_2}(v_1) = 0 \quad ; \quad \frac{u_1}{u_2}(b) = \frac{0}{0} = \frac{u_1'(b)}{u_2'(b)} = \frac{0}{\neq 0} = 0$$

La conclusión se mantiene si $b < z^1$

Si $b = z^1$ habría dos soluciones $L.I.$ con cero $2n-3$ en $a$ y cero $2$ en $z^1 \Rightarrow$ solución con cero $2n-3$ en $a$ y cero $3$ en $z^1$ :imposible.

Veamos ahora la demostración para un $z^m$ cualquiera. Admitamos que exista una solución con $m+2n-1$ ceros en $[a, z^m]$ y llamemos $b$ al cero $m+2n-1$, $b \leq z^m$.

Por tanto esta solución $u_1$ tiene cero $2n-3$ en $a$, $m+1$ ceros y cero $b$.

Puede ocurrir que el cero $x_{m+1}$ coincida con el $b$ (siempre que $b < z^m$ ).

Hay una solución $u_2$ con cero $2n-2$ en $a$, $m-1$ ceros simples y ceros en $b$ (doble si $b=z^{m}$) ).

Como $u_1$ tiene $m+1$ ceros interiores, tiene que haber un intervalo en que haya dos ceros consecutivos de $u_1$, por ninguno de $u_2$ : imposible como sabemos.

Queda la posibilidad de que los dos últimos ceros dé $u_1$ coincidan en un cero doble en $b$. $(b<z^{m})$

$u_1$: $2n-3$ cero en $a$, $m$ ceros y cero en $b$ doble

$u_2$: cero $2n-2$ en $a$, $m-1$ ceros y cero en $b$

O bien hay dos ceros de $u_1$ entre los que no hay ninguno de $u_2$.

O bien el cero $m$ de $u_1$ posterior al $m-1$ de $u_2$. En ambos ceros la misma imposibilidad.

CONCLUSION: COMPORTAMIENTO DE LOS CEROS DE LAS SOLUCIONES CON CERO $2n-3$ EN $a$.

A) Soluciones con cero $2$ en $b$

1: Si $b\leq z^{1}$ la solución no tiene ningún cero en $(a,b)$

2: Si $z^{m-1}\leq b\leq z^{m}$, tiene exactamente $m-1$ ceros simples en $(a,b)$, el cero $i$ comprendido entre $z^{i-1}$ y $z^{i}$, un cero en cada intervalo de las $z^{i}$, cada cero situado además antes del correspondiente cero de la solución cero $2n-2$ en $a$ y cero en $b$.

Efectivamente, sean:

$u_1$: solución cero $2n-2$ en $a$, $m$ ceros, el $k_i$ entre $z^{i-1}$ y $z^{i}$ y el último en $b$.

$u_2$: solución cero $2n-3$ en $a$, cero doble en $b$.

$u_2$ tiene su 1º cero antes del primero de $u_1$ ; ya que $u_1$ y $u_2$ son dos soluciones con cero $2n-3$ en $a$ y cero $b$ comunes (En realidad el 1º cero de $u_1$ es el cero $2n-2$ en $a$ ).

Además como los ceros se separan el cero correspondiente de $u_2$ antes del homólogo de $u_1$.

Entre $x_{m-1}$ y $b$ , ningún cero de $u_2$ , pues de tenerlo como ya tiene $m+4$ ceros, tendria $m+5$ ceros.

B) Soluciones con cero 1 en $b$.

1º Dichas soluciones, si $z^{m} < b < z^{m+1}$ pueden tener $m$ ó m+1 ceros simples en $(a, b)$. Si el 1º cero antes del 1º de la solución con cero $2n-3$ en $a$ ,cero $2b$ , tiene $m+1$ ceros los $m$ primeros antes de los correspondientes $m$ ceros de $u_2$ (separandose)

2º Evidentemente el 1º cero no puede aparecer despues de $z^1$.

## 5 - PROPIEDADES GENERALES DE LOS CEROS DE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACION 1.4 Y TEOREMAS DE SEPARACION.

Ecuación (1.4)

$$[p(x)\, y^{(n)}]^{(n)} + r(x)\, y = 0 \quad (p, r > 0)$$

Como el lema (2.1) ya no es válido en ésta ecuación no nos encontramos con la existencia de las soluciones siempre positivas y crecientes, y por tanto no queda garantizada que existan siempre soluciones no oscilantes. De hecho como veremos o todas las soluciones son oscilantes o ninguna.

Sin embargo el resultado del teorema 2.2 sí se mantiene.

Su enunciado ahora para la ecuación (1.4) queda

TEOREMA 2.2* Sea $y(x)$ una solución de (1.4)

a) Si $y(x)$ tiene un cero de orden $2K$ en $a$, no puede tener $2n$ ceros en $[a,b]$ sin al menos un cámbio de signo. En general: si $y(x)$ tiene $2n+K$ ceros en $[a,b]$ tiene que tener al menos $K+1$ cámbios de signo.

b) Si $y(x)$ tiene un cero de orden $2K-1$ en $a$, puede tener $2n$ ceros sin cámbio de signo. Si tiene $2n+K$ ceros tiene al menos $K$ cámbios de signo.

La demostración es perfectamente paralela a la hecha para la ecuación (1.3)

Ejemplo: La ecuación $y^{VI}+y=0$ tiene solución con cero 5 en $x=0$ : $y = \operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos\frac{x}{2}\operatorname{sh} X + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{ch} X$

$$X = x\,\sqrt{3}/2$$

Esta solución por b) puede tener ceros simples posteriores. Así:

$$y(2\pi) = \sqrt{3}\ \operatorname{sh}\pi\sqrt{3} > 0$$
$$y(3\pi) = -\operatorname{ch}\frac{3\pi\sqrt{3}}{2} < 0$$

Por tanto $y(x)$ tiene al menos un cero en $(2\pi, 3\pi)$.

En particular considerando dos ceros : $a, b$ Entre los dos pueden sumar como máximo $2n$ ceros (cada cero contado tantas veces como indica su orden de múltiplicidad). Pero para ello se requiere que tanto $a$ como $b$ sean ceros impares. O sea pueden darse los siguientes tipos de oscilación

$$2n-1,1 \equiv 1,2n-1;\quad 2n-3,3 \equiv 3,2n-3, \ldots\ldots$$

Ejemplo: la ecuación $y^{VI}+y=0$, hemos visto ya que tiene la oscilación $5,1 \equiv 1,5$. . Esta ecuación tiene además la oscilación 3,3. En efecto la solución general con cero 3 en $x=0$ es:

$$y = c_1\left(\cos x - \cos\frac{x}{2}\, \mathrm{ch}\, X + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}\,\mathrm{sh}\, X\right) + c_2\left(\mathrm{sen}\, x - \mathrm{sen}\frac{x}{2}\,\mathrm{ch}\, X\right) + c_4\left(\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{sh}\, X - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}\,\mathrm{ch}\, X\right)$$

Entre esta triple infinidad de soluciones existe una (infinitas, pues se puede multiplicar por una constante) que tiene tambien un cero triple: por ejemplo en el punto $x = 2\pi$

la solución en que

$$c_1 = \mathrm{sh}\,\pi\sqrt{3}, \quad c_2 = 0; \quad c_4 = 1 + \mathrm{ch}\,\pi\sqrt{3}.$$

Luego esta ecuación también tiene la oscilación 3,3 y se verifica que $z'_{3,3} < z^1_{5,1}$

Veamos las soluciones de (1.4) con cero $2n-1$ en $a$ y con cero $2n-2$ en $a$.

1 - Naturalmente no puede haber dos soluciones linealmente independientes con cero $2n-1$ en $a$. Por tanto una solución perteneciente a $Cl_{2n-1}(a)$ queda perfectamente determinada salvo un factor constante.

2 - Dos soluciones $L.I.$ pertenecientes a $Cl_{2n-2}(a)$ constituyen un sistema fundamental para todas las soluciones de esa clase.

3 - Sean $y(x), u(x)$ dos soluciones $L.I.$; $y(x), u(x) \in Cl_{2n-2}(a)$ sus restantes ceros (todos simples) se separan mutuamente en $(0,a)$ y en $(a,\infty)$

En efecto, de lo contrario habría una solución con oscilación $2n-2,\ 2$ (par).

4 - Surge como consecuencia inmediata que si llamamos ... $z^{-i}, \ldots z^{-2}, z^{-1}, a, z^1, z^2, \ldots z^i \ldots$ los ceros por la derecha y por la izquierda de la solución con cero $2n-1$ en $a$, supuesto que existan. Cualquier solución perteneciente a $Cl_{2n-2}(a)$ tiene en $[z^{-i}, z^i]$ exactamente $2n-2+2i$ ceros

(cero $2n-2$ en $a$ y los restantes $2i$ simples). El cero $-j$ (de lugar $j$ por la izquierda de $a$) situado en $(z^{-j}, z^{-j+1})$ y el cero $+j$ en $(z^{j-1}, z^{j})$.

# CAPITULO 3 .

## Estudio particular de las ecuaciones : de orden 6

$$[p(x)\,y''']''' + r(x)\,y = 0 \quad (3,1$$
$$[p(x)\,y''']''' - r(x)\,y = 0 \quad (3.2)$$

En los capìtulos anteriores se han estudiado las propiedades de las soluciones oscilantes y teoremas de separaciòn de ceros para una ecuaciòn de òrden 2 n autoautoadjunta.

Con el objeto de que quede manifiesta la eficacia del mètodo, en èste capìtulo vamos a hacer un estudio exhaustivo de la ecuaciòn de òrden sexto. El motivo de haber elegido èste òrden en particular es porque que sepamos , mientras que para las ecuaciones de segundo y cuarto òrden ya han sido realizados diversos estudios por otros autores, èsta ecuaciòn no ha sido estudiada y en ella se nos presentan ya las dificultades, que no aparecen en las anteriores y cuyo análisis va a ser el objeto fundamental de èste capitulo.

En efecto por lo que acabamos de ver en la ecuaciòn ( 3. 1) se presentan dos posibles tipos de oscilaciòn. La oscilaciòn del tipo $5-1 \equiv 1-5$ y la del tipo 3 - 3 . Aqui vamos a estudiarlas comparadamente y ver cuál de ellas es la oscilaciòn principal que nos define los puntos conjugados .

Tengase en cuenta que èste discernimiento entre los diversos tipos posibles de oscilaciòn que se puedan presentar en una misma ecuaciòn, que sepamos no ha sido realizado por ningùn autor. Estos en general o bien estudian ecuaciones mas simples en que no se presenta èsta dificultad, o bien se limitan a señalar como 1er punto conjugado el mìnimo de las oscilaciones posibles sin discernir cuál ès ese mìnimo , ni prolongar el estudio para los sucesivos puntos conjugados .

Además en èstas ecuaciones tambien queda clara la diferencia fundamental entre la ecuaciòn ( 3,2 ) que siempre tiene soluciones no oscilantes ( soluciones sin cero en cualquier intervalo), aunque puede tenerlas tambien oscilantes, mientras en la ecuaciòn ( 3 , 1 ) podrmos llegar al fundamental Teorema ( 3 , 4 )que nos dice que en cualquier intervalo la diferencia entre el nùmero de ceros de las soluciones es como màximo 6 , y que por tanto si una es oscilante lo son todas las soluciones y viceversa; si una no lo es, no lo ès ninguna.

En lo que sigue, por tanto, para la ecuaciòn ( 3 ,1) vamos a estudiar 1º la comparaciòn entre las oscilaciones 5-1 y 3-3 y 2º el nùmero màximo y mìnimo de ceros que puede tener una solucion en cualquier intervalo.

Tanto para la ecuaciòn ( 3 ,1) como para la ( 3,2 ) en lo que sigue suponemos que $p(x)$ y $r(x)$ están definidas en el intervalo $(0,\infty)$ y que en él cumplen: $p(x) \in C^3$ y $r(x) \in C^1$.

## ECUACIÒN 3,1

### 1: Estudio comparado de los puntos $z_{51}$ y $z_{33}$

Para ello vamos a estudiar la variaciòn de la soluciòn con cero de orden 3 en $a$ y cero de orden 2 en $b > a$ ( soluciòn que existe siempre: Ver proposiciòn 1,1 y que es ùnica salvo un factor constante), al variar $b$

Veamos dicha soluciòn:

Por tener cero 3 en a: $y(x) = c_3 y_3 + c_4 y_4 + c_5 y_5$, donde las $y_i$ son las soluciones fundamentales en $a$.

Si imponemos un cero doble en $b$:

$$\left.\begin{aligned} c_3 y_3(b) + c_4 y_4(b) + c_5 y_5(b) = 0 \\ c_3 y_3'(b) + c_4 y_4'(b) + c_5 y_5'(b) = 0 \end{aligned}\right\}$$

Sistema homogèneo de 2 ecuaciones con 3 incógnitas: $c_3, c_4, c_5$. Por tanto compatible.

Los coeficientes $c_j$:

$$c_j = (-1)^{j+1} c_5 \frac{W_2[y_i / i = 3,4,5,\ i \neq j](b)}{W_2[y_i / i = 3,4](b)}$$

Si $b \to a$ la soluciòn queda indeterminada $y(x) = \sum \frac{0}{0} y_i + y_5$

Pero tomando lìmites por L' Hòpital, queda como es intuitivo y se puede comprobar desarrollando los cálculos

$y(x) = y_5(x)$ que es la soluciòn con cero 5 en $a$.

O sea cuando $b \to a$, la soluciòn $3a - 2b \to$

$\to$ Soluciòn 5 $a$.

Los $W_2$ que aparecen, son siempre positivos para $x > a$. De anularse alguno equivaldría a la existencia de soluciones con oscilaciòn par: $4-2$. En general para la ecuaciòn (1,4) (que comprende a la (3,1)) se puede demostrar que todos los Wronskianos de òrden par son siempre positivos (definidos esos Wronskianos como lo hemos hecho), por obedecer a un sistema de ecuaciones diferenciales en que partiendo de condiciones iniciales nulas o positivas (como es el caso) dan siempre soluciones positivas ( Ver [20]).

Supongamos que nuestra soluciòn de oscilaciòn $3a - 2b$ tenga ceros simples ademàs (por Teorema 2.2 no pueden ser cero mùltiples )

Designemos por $x_1$ el 1º cero simple a la derecha de $a$

La soluciòn $3a-2b$ es una funciòn $U(b,x)$ continua y derivable respecto a $b$ y a $x$ y que verifica : $U(b,x_1)=0$

De donde por el teorema de existencia de las funciones implìcitas, define una funciòn $x_1=f(b)$ , funciòn continua y derivable en un cierto entorno del punto $(b,x_1)$

Para ello basta que la derivada de $U$ respecto a $x_1$ no se anule en dicho punto.

Derivando $U(b,x_1)=0$

$$U_b+U_{x_1}\frac{dx_1}{db}=0\ ;\ \frac{dx_1}{db}=-\frac{U_b}{U_{x_1}}$$

Pero $U_{x_1}$ es la primera derivada de la soluciòn $y(x)$ con ceros : $3a,2b$ en el punto $x_1$, que es un cero simple de dicha soluciòn. Luego :

$U_{x_1}\neq 0$ ,en todo punto $b\neq x_1$

Sólo se puede anular $U_{x_1}$, si al variar $b$, llegamos a un punto $b=x_1$ . En ese caso $U_{x_1}$ evidentemente es cero.

Pero veàmos entonces $U_b$ .

$$U(x,b)=\left.\frac{W_2[y_4y_5]}{W_2[y_3y_4]}\right|_b y_3(x)-\left.\frac{W_2[y_3y_5]}{W_2[y_3y_4]}\right|_b y_4(x)+y_5(x)$$

Derivando respecto a $b$ :

$$U_b(x,b)=\left.\frac{W_2[y_4y_5]}{W_2[y_3y_4]}\right|_b' y_3(x)-\left.\frac{W_2[y_3y_5]}{W_2[y_3y_4]}\right|_b' y_4(x)$$

Sea $V(x)=U_b(x,b)$ = Combinaciòn lineal de $y_3$ e $y_4$ : es una soluciòn de la ecuaciòn ( 3,1 )

$V(x)$ tiene los mismos ceros que $U_b(x,b)$

Desarrollando :

$$V(x)=\frac{W[y_3y_4]W'[y_4y_5]-W[y_4y_5]W'[y_3y_4]}{W^2[y_3y_4]}(b)\,y_3(x)-$$

$$- \frac{W[y_3 y_4] W'[y_3 y_5] - W[y_3 y_5] W'[y_3 y_4]}{W^2[y_3 y_4]}(b) y_4(x)$$

$$\bar{V}(x) = \frac{1}{W[y_3 y_4](b)} \begin{vmatrix} y_3(x) & y_4(x) & 0 \\ y_3(b) & y_4(b) & y_5(b) \\ y_3''(b) & y_4''(b) & y_5''(b) \end{vmatrix} - \frac{W'[y_3 y_4]}{W^2[y_3 y_4]}(b) \begin{vmatrix} y_3(x) & y_4(x) & 0 \\ y_3(b) & y_4(b) & y_5(b) \\ y_3'(b) & y_4'(b) & y_5'(b) \end{vmatrix}$$

Luego $\bar{V}(x)$ es soluciòn de (3,1) que cumple las condiciones

$$\bar{V}(a) = \bar{V}'(a) = \bar{V}''(a) = 0 \quad ; \quad [p \bar{V}''']''(a) = 0$$

Por otra parte en $b$ :

$$\bar{V}(b) = \frac{-y_5(b) W'[y_3 y_4](b)}{W[y_3 y_4](b)} + \frac{W'[y_3 y_4](b)}{W^2[y_3 y_4](b)} y_5(b) W[y_3 y_4](b) \equiv 0.$$

Soluciòn que queda ( salvo un factor constante) perfectamente determinada al dar el punto $b$.

En un punto $x$ perteneciente a la gráfica de la funciòn $U(x, b) = 0$, $V(x)$ serà en general distinta de cero . Los ceros de $V(x)$ seràn ceros de $U_b$ y por lo tanto de $dx_1/db$

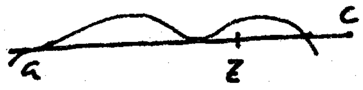
Por tanto $U_b(x, b)$ cuando $x_1 = b$ , o sea $U_b(b,b) = V(b) = 0$

Luego de existir tal punto quedaria $\frac{dx_1}{db}$ indeterminada en dicho punto .

Podríamos seguir derivando para deshacer la indeterminación Pero es preferible ver directamente en dicho posible punto que la $\frac{dx_1}{db}$ es finita.

<u>LEMA 3.1</u> Sea un punto $z$ en el que $x_1 = b = z$. Dicho punto es un cero de orden 3 y por lo tanto es el punto $z_{3,3}$

<u>DEMOSTRACIÒN</u> Sea la soluciòn $y(x)$ con cero 3 en $a$ y cero 2 en $z - \varepsilon$ ( $\varepsilon$ tan pequeño como queramos ). El punto $x_1$ también pròximo a $z$ estarà situado en un punto : $z + \varepsilon'$




No puede ser $x_1$ anterior a $b$ Pues para valores $b \to a$ , el cero $x_1$ debe ser posterior a $b$, como $x_1$ es funciòn continua de $b$, si luego $x_1$ pasara a ser anterior a $b$, entonces el punto $z$ no sería el primero en que $x_1 = b$.

Sea un punto $c > x_1$, $y(c) < 0$

Al aumentar $b$ y llegar a coincidir con $z$, si $y$ tiene en $z$ sòlo un cero de orden 2, $y(c) > 0$

Pero $y$ es una funciòn continua de $b$ para cada punto, luego en particular $y(c)$ es continuo con $b$, luego $y(c)$ debe seguir siendo negativa. La ùnica posibilidad es que el cero en $z$ sea impar : es decir un cero 3.

Para $b = z'_{33}$ (abreviadamente $z'_3$, $b = z'_3 + \varepsilon$) la funciòn $x_1 = x_1(b)$ sigue siendo continua, luego cuando, el cero $x_1$ pasa a la izquierda de $b$.

Efectivamente la función $y''(b)$ es contìnua con $b$, luego en un cero ( el punto $z'_3$ ) debe de cambiar de signo, a menos que $y'''(z'_3) = 0$; pero $y'''(z'_3) \neq 0$. (Si no sería un cero de orden 4 y es imposible)

O sea : $y''(b) > 0$ para $b = z'_3 - \varepsilon$

$y''(b) = 0$ para $b = z'_3$

$y''(b) < 0$ para $b = z'_3 + \varepsilon$

Tratemos de estudiar ahora el signo de $\frac{dx_1}{db}$ para ver los intervalos de crecimiento o descrecimiento de la funciòn $x_1(b)$.

1: $V_{x_1} \neq 0$ para todo punto distinto de $z'_3$.

Pero ademàs vimos que es la primera derivada en el cero $x_1$ de la soluciòn : $3a - 2b - 1\, x_1$; por tanto $V_{x_1} < 0$ (sòlo = 0 en $z'_3$).

Luego el signo de $dx_1/db$ depende del signo de $V_b(b, x_1)$ para cualquier intervalo que no contenga al punto $z'_3$.

<u>Lema 3.2.</u> La función $x_1(b)$ es creciente en $b=a$

Desmostración: $\frac{dx_1}{db} = \frac{-U_b}{U_{x_1}}$, $U_{x_1} \neq 0$ ; $U_{x_1} < 0$

Veamos $U_b(a, z_1')$

$$U_b(a, z_1') = \frac{W'[y_4 y_5] W[y_3 y_4] - W[y_4 y_5] W'[y_3 y_4]}{W^2[y_3 y_4]}(a)\, y_3(z_1') -$$
$$- \frac{W[y_3 y_4] W'[y_3 y_5] - W[y_3 y_5] W'[y_3 y_4]}{W^2[y_3 y_4]}(a)\, y_4(z_1')$$

Hagamos las $W_2 = \sigma_{01}$ (para poner de relieve los órdenes de derivación de las funciones $y_i$ que aparecen en dichos Whonskianos)

Teniendo en cuenta la definición de las soluciones fundamentales: $D^i y_j(a) = 0$ ; $D^i y_i(a) = 1$, ó sea

$$D^i y_j(a) = \delta_{ij}$$

resulta que en todas las $\sigma$ son nulas, excepto aquellas cuyos órdenes de derivación coincidan con los índices de las soluciones fundamentales:

$$\sigma'_{01} = \sigma_{02}$$
$$\sigma''_{01} = \sigma_{12} + \frac{\sigma_{03}}{P} \;;\; \sigma'''_{01} = \frac{\sigma_{13}}{P} + \left(\frac{\sigma_{03}}{P}\right)'$$

En cada derivación se aumenta una unidad la suma de los órdenes de derivación.

$W[y_3 y_4]$ : $\Sigma$ índices soluciones $= 7$
$W[y_3 y_5]$ : $\Sigma$ " " $= 8$
$W[y_4 y_5]$ : $\Sigma$ " " $= 9$
$\sigma_{01}$ : $\Sigma$ órdenes derivación. $= 1$

Luego

$W[y_3 y_4](a)$ es un infinitésimo de orden $6$
$W[y_3 y_5](a)$ " " " $7$
$W[y_4 y_5](a)$ " " " $8$

Las derivadas son respectivamente infinitésimos de un orden menos

Analizando la expresión de $U_b$ vemos que al ser los valores de las soluciones $y_3(z_1')$ e $y_4(z_1')$ finitos, el primer sumando es un infinitésimo (infinitésimo orden 13 )
( " " 12 )

Nos queda pués:

$$U_b(a,z_1') = -\frac{W[y_3 y_4]W'[y_3 y_5]-W[y_3 y_5]W'[y_3 y_4]}{W^2[y_3 y_4]}(a)\, y_4(z_1')$$

El numerador y el denominador son infinitésimos de orden 12. Derivando 12 veces (por la regla de L'Hôpital) y suprimiendo los términos que se anulan.

$$U_b(a,z_1') = -\frac{\binom{12}{6}W^{(7)}[y_3 y_5]W^{(6)}[y_3 y_4]-\binom{12}{5}W^{(7)}[y_3 y_5]W^{(6)}[y_3 y_4]}{\binom{12}{6}W^{(6)}[y_3 y_4]W^{(6)}[y_3 y_4]}(a)\, y_4(z_1')$$

$$U_b(a,z_1') = -\frac{\binom{12}{6}-\binom{12}{5}}{\binom{12}{6}}\,\frac{W^{(7)}[y_3 y_5]}{W^{(6)}[y_3 y_4]}(a)\, y_4(z_1')$$

Todas las derivadas de los Wronskianos de orden par son positivas, luego $\frac{W^{(7)}[y_3 y_5]}{W^{(6)}[y_3 y_4]}(a) > 0$

$$\frac{\binom{12}{6}-\binom{12}{5}}{\binom{12}{6}} = \frac{1}{7} > 0$$

$W_2[y_4 y_5] > 0$. Para $z_1'$: $\begin{vmatrix} y_4(z_1') & 0 \\ y_4'(z_1') & y_5'(z_1') \end{vmatrix} > 0$

$y_4(z_1')\, y_5'(z_1') > 0$ ; $y_5'(z_1') < 0$

$y_4(z_1') < 0$

$\Longrightarrow$ $U_b > 0$ en el punto $b = a$

$$\frac{dx_1}{db} = \frac{-U_b}{U_{x_1}} > 0. \text{ C.Q.D.}$$

Lema 3.3. La derivada de la función $x_1(b)$ se anula en algún punto en el intervalo $(a,z_3')$ ($b\in(a,z_3')$)

Demostración.: Hemos visto que para b=a la pendiente es positiva.

Vamos a suponer que $z_3' > z_1'$.

Entonces para valores próximos al punto $z_3'$, ó sea para el punto $b = z_3' - \varepsilon > z_1'$ tendremos $V_{x_1} < 0$

$V_b = V(x)$ es la solución que cumple:

$$V(a) = V'(a) = V''(a) = 0 \ ; [pV''']''(a) = 0 ; V(b) = 0$$

Si esta solución la comparamos con la solución fundamental $y_4$:

$$y_4(a) = y_4'(a) = y_4''(a) = p\,y_4'''(a) = 0$$
$$[p y_4''']'(a) = 1 \ ; [p y_4''']''(a) = 0$$

Ambas soluciones tienen en a: un cero de orden 4 común. (Coinciden y son cero los valores de las funciones, sus dos primeras derivadas y la derivada de orden 5), luego

$V(x)$ tiene que tener su primer cero antes del primero de $y_4(x)$. En efecto sea $\alpha$ el 1er cero de $y_4$: Supongamos $V(x) \neq 0$ en $(a,\alpha)$

$\frac{y_4}{V}(x)$ es continua en $[a,\alpha]$, tiene ceros en los extremos, luego por combinación lineal de $y_4$ y $V(x)$ podíamos formar una solución con oscilación 4-2; imposible (oscilación par).

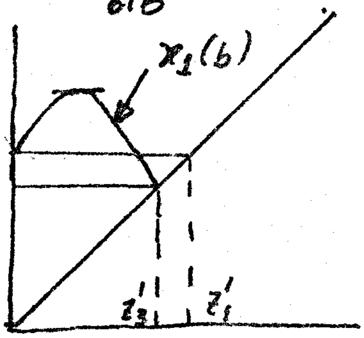
Luego $U_b$ su 1º cero antes de $\alpha < z_1'$,

luego b es un segundo cero, y por tanto en $x_1 > b$ tiene signo negativo.

$$\Longrightarrow \frac{dx_1}{db} < 0 \quad \text{en las proximidades de } z_3'$$

Por consiguiente $\frac{dx_1}{db}$ ha tenido que anularse en algún punto anterior.

Si por el contrario $z_1' \geq z_3'$, la gráfica continua de $x_1(b)$ que pasa por el punto $(a, z_1')$ con pendiente positiva y tiene que pasar por el punto $(z_3', z_3')$ tiene que tener al menos un máximo $\left( \frac{dx_1}{db} = 0 \right)$.




Existencia relativa de los puntos $z_1'$ y $z_3'$

Analizemos la posibilidad de que exista $z_3'$ y no $z_1'$:

$\frac{dx_1}{db}$ es negativa en $z_3'$

$x_1(a) = +\infty$ ; $x_1(z_3' - \varepsilon) > z_3'$ ; $x_1(z_3') = z_3'$ ; $x_1(z_3' + \varepsilon) < z_3'$

La gráfica de la función x1(b) no puede cortar a la recta de ordenada $z_3'$ hasta el mismo punto $(z_3', z_3')$. Para $b \in (a, z_3']$, $x_1$ es siempre continua y se mantiene superior a $z_3'$ ( o igual), toma todos los valores comprendidos entre $+\infty$ en a y $z_3'$ en $z_3'$

Por tanto $x_1(b)$ debe tener una rama asintótica a $x = a$, con lo que $\frac{dx_1}{db} \rightarrow -\infty$ . Esto es lógico pués si $y_5(x)$ no tiene ningún cero, $y_5'(x) \underset{x \to \infty}{\rightarrow} 0$ ya que si no

$y_5(x) \underset{x \to \infty}{\rightarrow} \infty$ Con lo que $\frac{dx_1}{db} = \frac{-U_b}{U_{x_1} \to 0} \rightarrow -\infty$

Veamos la función para valores de b superiores a $z_3'$.

Consideramos dos soluciones

$y_2$: cero 3 en $a$, cero 2 en $b$, cero 1 en $x_1$

$y_1$: " 3 en $a$, cero 1 en $x_1'$, cero 2 en $b'$; $x_1 = b'$

Si $b < z_3'$ , $x_1 > z_3'$.

Veamos que no puede ser $x_1' \geqslant b$ (implica la existencia de una solución 4, 1, 1 que a su vez exige la existencia de una solución ; 5, 1.

En efecto si $x_1' > b$ , formamos una solución

$w = y_1 - A\ y_2$ con cero 4 en $a$

$$\left.\begin{array}{l} w(b) = y_1(b) - A y_2(b) = y_1(b) > 0 \\ w(x_1') = -A y_2(x_1') < 0 \\ w(x_1) = 0 \end{array}\right\} \text{2 ceros de W.}$$

Si coinciden $x_1' = b$ los dos ceros de la solución $w(x)$ son $x_1'$ y $x_1$.

Resumiendo:

Sea $\left.\begin{array}{l} b < z_3' ;\ x_1(b) > z_3' \\ b' > z_3' ;\ x_1'(b') < z_3' \end{array}\right\}$ si $b' = x_1$ no puede ser $x_1' \geqslant b$

O sea la curva $x_1(b)$ no es simétrica respecto a la bisectriz del 1º cuadrante, sino que en el semicuadrante de la derecha toma valores menores de los que tomaría de ser simétrica.

Como por otra parte la curva $x_1(b)$ no puede cortar al eje de las $X$: implicaría la existencia de una sulución 4 a, 2b, resulta que la curva también tiene que tener una rama asintótica al eje horizontal.

<u>NOTA.</u> Cuando el cero $x_1$ coincide con a, aparece un cero 4 en a.

En efecto si una solución 3 a, al tender $x_1$ a "a" no adquiere un cero 4, se perderia un cero, con lo que en cualquier punto $x$, donde y $(x) < 0$ ( al perder un cero, $y$ ( $x$ ) debe cambiar de signo, y por tanto $y$ ( $x$ ) $> 0$, lo que está en contradicción con la continuidad de y respecto a la variación del cero $x_1$

Consideramos ahora la existencia del punto $z_1'$

<u>Teorema 3.1.</u> La existencia del punto $z_1'$ implica la existencia del punto $z_3' \leq z_1'$.

<u>Demostración.</u>

1º Existencia de $z_3'$:

Hemos visto que $\frac{dx_1}{db}$ era negativa al menos en un cierto intervalo

Vamos a ver que precisamente en ese intervalo aparece el punto $z_3'$, y por tanto en el punto $(z_3', z_3')$ $\frac{dx_1}{db} < 0$.

En efecto, podemos construir dos soluciones (debido a la derivada negativa)

$y_1$ : solución 3 en a, cero 2 en b, cero 1 en $x_1$
$y_2$ : " " " cero 2 en b', cero 1 en $x_1'$

con $b < b'$, $x_1 > x_1'$

Formaremos una combinación lineal:

$w = y_1 - A y_2$ . Con $A > 0$ elegida apropiadamente para que W tenga un cero doble en el intervalo ( $b'$, $x_1'$ ) (posible por haber dos ceros de $y_2$ sin cero de $y_1$ )

$$w(b) = -A y_2(b) < 0$$
$$w(b') = y_1(b') > 0 .$$

Luego W.: sol. cero 3 en a, cero 1 en ( $b, b'$ ), cero 2 en ( $b'$, $x_1'$ ).

Evidentemente la existencia de esta solución implica que en las soluciones 3-2-1, previamente el cero simple ha coincidido con el doble en el punto $z_3'$.

2º.: Supongamos $z_3' > z_1'$

Podemos construir dos soluciones de la $Cl_3(a)$

$u_1$: cero 2 b, cero 1 $x_1$ ( $x_1 < z_3'$ (posible pués $z_3' > z_1'$))
$u_2$: cero 1 en $z_3' - \varepsilon$ , cero 2 en $z_3' + \varepsilon'$.

$u_1$ no tiene ceros en $[z_3' - \varepsilon, z_3' + \varepsilon']$, luego por combinación lineal de las dos soluciones, se podría obtener una solución con cero dos en ( $z_3' - \varepsilon, z_3' + \varepsilon'$ ) que cuando $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon' \to 0$ debía ser la solución 3-3.

Pero $w = u_2 - A u_1$ ; para $z_3' + \varepsilon'$ es $> 0$, lo que está en contradicción con lo anterior. C.Q.D.

Seguimos estudiando la función $x_1(b)$ en este último caso de existencia de $z_1'$ y $z_3'$.

Analizamos ahora la función para $b > z_3'$.

Entonces el 1º cero simple ( $x_1'$ ) pasa al interior del intervalo ( $a, z_3'$ )

Tenemos pués una solución de oscilación: 3, 1, 2 y al mismo tiempo otra: 3, 2, 1.

Supongamos que coinciden el cero 2 de una solución del primer tipo con el cero 1 de una solución del segundo tipo.

Ya hemos visto que el admitir $x_1' \geq b$ nos llevaba a la existencia de una solución: 4, 1, 1 (que ahora sólo será una contradicción en las proximidades de $z_3'$ ) Es decir, - ahora sí puede existir la solución 4,1,1, pero ésta no puede tener los dos ceros simples, juntos en las proximidades del punto $z_3'$.

NOTA: Hemos visto que las soluciones de la clase 4, tenían sus ceros separados, luego no puede haber una con los dos ceros próximos a $z_3'$.

De esto comcluimos que al menos para valores de b suficientemente próximos a $z_3'$ el cero $x_1'$ tiene que ser anterior al cero 2b.

<u>Estudio comparado de las gráficas: $y_2(y_1)$, $x_1(b)$, $b(x_1)$</u>

Tengamos una solución de oscilación 4,1,1,.

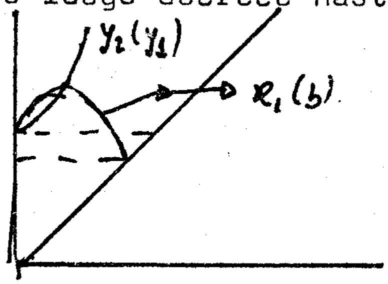
Sean $y_1$ e $y_2$ los dos primeros ceros simples de dicha solución. Veamos la función $y_2(y_1)$

Dicha función es contínua y derivable respecto de $y_1$ y además siempre creciente.

Para $y_1 = a$, $y_2 = z_1'$. Por tanto las funciones $y_2(y_1)$ y $x_1(b)$ tienen el mismo punto inicial.

Lema 3.4. Las gráficas de $y_2(y_1)$ y de $x_1(b)$ se cortan en un punto posterior a "a"

Demostración: $y_2(y_1)$ y $x_1(b)$ coinciden en el punto inicial. Luego $y_2$ es creciente, mientras que $x_1$ primero crece, pero luego decrece hasta cortar a la bisectriz en $(z_3', z_3')$



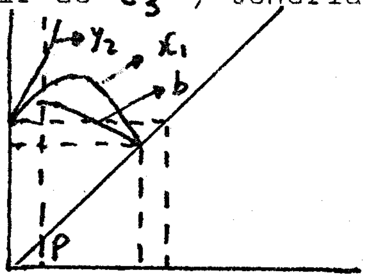

Por consiguiente, ó bien $y_2 > x_1$ para valores mayores que "a", ó bien las gráficas se cortan.

Supongamos $y_2 > x_1$

Sean entonces dos soluciones: $3a - 2b - 1x_1$ y $4a - 1y_1 - 1y_2$ b coincidiendo con $y_1$ y por tanto según nuestra hipótesis $y_2(x_1)$ (b suficientemente próximo a "a")

Debido al hecho de que el cociente de las dos soluciones es contínuo en $[b, x_1]$ y se anula en los extremos del intervalo, puede lograr combinando linealmente las dos soluciones (por medio de una suma con coeficientes apropiados), una solución con cero doble en ( $b, x_1$ ) y que por tanto se-

rá de oscilación: 3a, 1b, 2: con el último cero antes de $x_1$.
Si en vez de la parte de gráfica de $x_1(b)$ situada a la derecha de la bisectriz del primer cuadrante, represento - la función inversa: $b(x_1)$ ( en el intervalo $[z_3', a]$ a partir de $z_3'$ ) tendría:




Para un mismo valor de la abscisa que para:

la función $x_1$ representaría b.

" $y_2$ " $y_1$

" $b$ " $x_1$

con lo que $b = y_2 = x_1 = P$.

tendriamos para las respectivas funciones: $b(P) < X_1(P) < y_2(P)$

(P suficientemente próximo a "a" )

Si esto se mantuviera para todos los puntos en $[a, z_3']$

y en particular para el punto a:

Las soluciones 3,2,1 y 4.1.1. coincidirían como es lógico en la solución: $5,1$ . Pero la solución 3,1,2 tendría que dar origen a una solución 4,2 imposible de ocurrir.

Esto sería inevitable par continuidad, pués habría una solución: $3a, 1(a+\varepsilon), 2(z_3'+\varepsilon')$ que pasando al límite cuando $\varepsilon \to 0$ daría origen a la solución 4,2,

Es evidente pués que la función $b(x_1)$ cuya gráfica ~~que~~ no puede tocar el eje de las $y\,(X=a)$, ~~que~~ tiene que cortar a la de la función $x_1(b)$

Por tanto no es posible la hipótesis hecha y hay que concluir con el lema que la gráfica de la función $y_2(y_1)$ corta a la de $x_1(b)$.

Por lo que para valores de $y_1 = b$ próximos al punto "a" la solución: $4a, 1y_1, 1y_2$ tiene el cero $y_2$ antes que el cero $x_1$ de la solución: $3a, 2(b=y_1), 1x_1$.

Como la función $y_2$ es siempre creciente llegará un punto en que con las mismas premisas (manteniendo la coincidencia de los ceros anteriores) $y_2$ sea igual a $x_1$. A partir de dicho punto $y_2 > x_1$.

Punto caracteristico.:

Lema 3.5. Existe un punto donde se cortan las gráficas de las tres curvas: $y_2$, $x_1$, $b$.

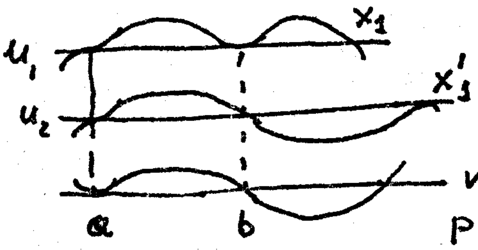
Demostración: 1º para valores cercanos a $z_3'$, la función $b(x_1)$ es menor que $x_1(b)$ (su gráfica queda por debajo)

En efecto para valores de b próximos a $z_3'$, $x_1$ tambien es próximo a $z_3'$.

Sean dos soluciones: $3a, 2b, 1x_1$ y otra $3a, 1b, 2x_1'$

$x_1'$ no puede ser mayor que $x_1$, pués por combinación lineal de las dos obtendremos una solución: $4a, 1b, 1$.

El último cero antes de $x_1'$.




$w = u_1 - Au_2$. La constante A la apropiada para que w tenga cero 4 en a.

Esto implica una contradicción porque para valores de la abscisa muy próximos a $z_3'$. O sea para valores de x comprendidos en un entorno suficientemente pequeño de $z_3'$,

$y_2$ tendría que mantenerse siempre menor que la función $b(x_1)$ que pasa por el punto $(z_3', z_3')$, mientras que $y_2(z_3')$ como es lógico es mayor que $z_3'$.

2º. En el punto en que $y_2 = x_1$ tenemos dos soluciones, 3,2,1 y 4,1,1, con todos los ceros coincidentes, por combinación lineal de las dos fácilmente se ve que se obtiene una solución 3,1,2, tambien con todos los ceros coincidentes con las dos anteriores.

De ello se deduce que en ese punto:

$$y_2 = x_1 = b$$

No puede seguir siendo $b < x_1$ (Equivaldría a la existencia de dos soluciones 3,1,2, con los dos primeros ceros coincidentes y el último distinto).

En efecto de admitir eso, por combinación lineal de las soluciones 3,2,1 $x_1$ con la solución 3,1,2,

Los dos primeros puntos (donde hay ceros) coincidentes, y el último anterior el cero doble al simple, obtendríamos una solución 4,1, con estos dos ceros múltiples coincidiendo con los de las dos anteriores. Pero la solución con cero 4 queda perfectamente determinada por un cero simple.

Luego esta solución necesariamente tiene el 2º cero en el punto $x_1$; por tanto $y_2 = x_1$, mientras que en nuestro caso la combinación lineal no daría cero en $x_1$.

Luego la conclusión anterior es válida. Existe pués un punto donde se cortan las gráficas de las tres curvas C.Q.D.
A partir de ese punto $b(x_1)$ sigue tomando valores crecientes para $x_1$ tendiendo al punto a. (Cuando $x_1$ coincida con a, tiene que tender al $\infty$). La función $b(x_1)$ tiene pués una rama asintótica paralela al eje vertical.

Teorema 3.2.

La existencia del punto $z_1^1$ implica también la existencia del punto $z_3^2$ posterior a $z_1^1$, exista o nó $z_1^2$. De existir $z_1^2$ entonces $z_3^2 < z_1^2$. Ese punto $z_3^2$ es precisamente el máximo de la función $x_1(b)$.

Demostración.

1º. Llamemos a la abscisa del punto característico donde se cortan las tres graficas : $m_1$, el valor común de las tres funciones: $x_1, y_1$, b en m, lo llamaremos $M_1$.
Consideraremos un punto inmediatamente anterior: $m_1 - \varepsilon$.
Sean las soluciones:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 : \text{cero } 3 \text{ en } a,\ 2\,(b = m_1 - \varepsilon),\ 1\,(x_1 = M_1 \pm \varepsilon') \\ u_2 : \ \ '' \ \ 4 \ \ '' \ \ a,\ 1\,(y_1 = m_1 - \varepsilon),\ 1\,(y_2 = M_1 - \varepsilon') \end{array}\right\} x_1 > y_2$$

Cualquier solución 3a, 1 ( $m_1 - \varepsilon$ ) es combinación lineal de esas dos.
Supongamos que nó: Entonces existe una 3ª solución:
$3a - 1(m_1 - \varepsilon)$ linealmente independiente con ellas (No puede ser solución 4,1 ni 5,1) Esta solución junto con la 3.2. - nos daria origen a una solución 4,1 que tendría que ser linealmente independiente de la otra 4,1,: lo que es absurdo.

Por tanto $u_1$ y $u_2$ constituyen un sistema fundamental para todas las soluciones con ceros 3,1, en esos mismos puntos.

Pues bien, una solución de ese subespacio de soluciones 3, 1, es la 3,1,2 que sabemos que tiene cero doble en un punto próximo a $M_1$ (por continuidad)

Sea $w = u_1 \pm \lambda u_2$. Para obtener la solución buscada 3,1,2, debo elegir el signo $+$ $(\lambda > 0)$, si elijo el signo $-$ obtendré una solución 3,1,1, $(m_1 - \varepsilon)$

Entences:

$$w(m_1 - \varepsilon) = 0 \ , \ w'(m_1 - \varepsilon) < 0$$
$$w(y_2) = u_1(y_2) > 0$$

Luego W tiene un cero antes de $y_2$ en el que cambia de signo.

Pero la única forma de que la solución 3,1,2, haya adquirido otro cero (cambio de signo), es que ha tenido que ocurrir primero la solución 3,1,3. O sea ha debido aparecer el punto $z_3^2$.

2º. $z_3^2$ es el valor de la función $x_1$ en el punto $m_1$

En efecto de lo anterior vemos que es la ordenada que corresponde a una abscisa mayor que $m_1$ o igual a $m_1$

Supongamos lo 1º.

Entonces tenemos una solución 3,2,1 y otra 3,1,3, los dos primeros ceros coincidentes y el último cero tres antes del último cero simple.

Por combinación lineal de las dos logramos una solución 4,1, 1, con el 2º cero simple antes del último cero de la solución 3,2,1.

En efecto llamemos a la solución 3,2,1: $u_2$ y a su último cero $x_1$. La solución 3,1,3: $u_1$

$w = u_1 - \lambda u_2$ ( $\lambda$ ajustada de modo que W tenga cero 4 en a.

$$w(z_3^2) = -\lambda u_2(z_3^2) < 0$$
$$w(x_1) = u_1(x_1) \geq 0$$

Luego W tiene su 2º cero simple $y_2$ antes que el $x_1$: ya hemos visto que esto no es posible.

Por tanto el nuevo cero tres : $z_3^2$ debe aparecer para $x = m_1$

O sea la solución es: $3a, 1m_1, 3z_3^2$.

Nótese que la existencia del punto $z_1^1$ ha implicado la existencia de un $z_3^1$ anterior y además un $z_3^2 > z_1^1$, pero $z_3^2 < z_1^2$

3º.- El punto $M_1 = z_3^2$ es precisamente el máximo de la -función $x_1 = x_1(b)$

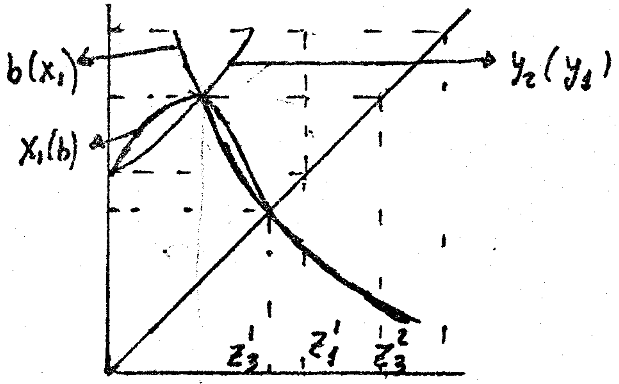
Pues si fuera antes ó después de dicho máximo habría dos soluciones 3,2,1, con el cero 3, y el 1 coincidiendo y el cero doble en distinta posición:

Sea este último cero simple el $M_1$

O sea tenemos soluciones:
$$u_1 : 3a, 2b, 1M_1$$
$$u_2 : 3a, 2m_1, 1M_1$$
$$u_3 : 4a, 1m_1, 1M_1$$

Cualquier par de dichas soluciones constituyen un sistema fundamental para las soluciones 3a, 1 $M_1$.

Pero mientras que $u_2$ y $u_3$ pueden dar origen a la solución 3, 1.3. La $u_1$ y la $u_3$ que también debían engendrar la 3,1,3, (solución del subespacio de soluciones 3a, 1 $M_1$) no lo verifican, pues cualquier combinación lineal de ellas en $m_1$ sería distinta de cero ya que $u_3 = 0$ mientras $u_1 \neq 0$.




Función $x_i(b)$

Siendo ahora $x_i(b)$ la función que ~~re~~ presenta la variación del $i'$,$''$ cero simple de la solución 3,2,1,1,. . . . al variar el cero doble.

Para fijar ideas supongamos el $x_2$ y vamos a empezar suponiendo que exista el punto $z_1^2$

$$V(b, x_2) = 0 \;;\; V_b + V_{x_2}\, dx_2/db = 0$$

$V_{x_2}$ = 1ª derivada de la solución 3a, 2b en el punto $X_2$ que es 2º cero simple. Por tanto $V_{x_2} > 0$

Para b = a, entonces $V_b$ lo mismo que antes.

$$V_b(a, z_1^2) = \frac{-1}{7}\,\frac{W_2^{(7)}[y_3\, y_5]}{W_2^{(6)}[y_3\, y_4]}(a)\, y_4(z_1^2)$$

$$W_2[y_4\, y_5](z_1^2) = \begin{vmatrix} y_4(z_1^2) & 0 \\ y_4'(z_1^2) & y_5'(z_1^2) \end{vmatrix} = y_4(z_1^2)\, y_5'(z_1^2) > 0$$

$$y_5'(z_1^2) > 0 \;;\; y_4(z_1^2) > 0$$

$U_b < 0$ ; $U_{x_2} > 0$ ; $\frac{dx_2}{db} > 0$ en el punto b=a.

En las soluciones con cero 4 en a, podemos ahora estudiar la variación del tercer cero simple. Esto es considerar la función : $y_3(y_1)$ función siempre creciente y que comienza para $y_1 = a$ en $z_1^2$ en realidad la función $y_3(y_1)$ ($y_1$ variando entre $z_1'$ e $\infty$ ) es la misma función $y_2(y_1)$ (para $y_1$ variando entre $z_1'$ e $\infty$ ) Mejor es estudiar ésta última : $y_2(y_1)$ $(y_1 > z_1^1)$

Tiene que existir un punto de corte de las dos gráficas $x_2(b)$ e $y_2(y_1)$, punto a cuya abscisa llamaremos $m_2$ (Téngase en cuenta que la gráfica $x_2(b)$ tiene que pasar por el punto $(z_3^2, z_3^2)$, luego necesariamente tiene que cortar a $y_2(y_1)$

Representemos la función $b(x_2)$ ( en vez de la $x_2(b)$ para valores de $b > z_3^2$ ) Esta función la estudiamos para $x_2$ variando para valores $\leq z_3^2$.

Estudiemos el entorno del punto $z_3^2$.

Para valores próximos a $z_3^2$ por la izquierda, la gráfica de la función $b(x_2)$ tiene que estar por debajo de la $x_2(b)$

De estar por encima, como en el caso anterior, tendríamos - que el tercer cero de la solución 4 en a, sería inferior a b y llegaríamos al mismo absurdo.

Se ve sin dificultad que se pueden repetir los razonamientos: La función $b(x_2)$ tiene que tener una asíntota vertical, luego cortará a la $x_2(b)$ en un punto único, que no puede ser otro que el $m_2$ y que además tiene que ser máximo de la función $x_2(b)$.

En ese punto coinciden:

$$y_2(y_1) = x_2(b) = b(x_2)$$

El valor común de las tres funciones es precisamente $z_3^3$.

Punto que por tanto viene implicado por $z_1^2$.

Para la abscisa $m_2$ de ese punto, se verifica:

$$m_1 < z_3^1 < z_1^1 < m_2.$$

Es más, habíamos visto al estudiar $b(x_1)$ que cuando $x_1 \to a$, $b \to \infty$. O en otras palabras: el primer cero $x_1$ que en principio era posterior a $z_3^1$, al ir aumentando b llega a coincidir con él en el punto $z_3^1$ y luego sigue disminuyendo y tiende al punto a, aunque sin llegar a coincidir con él.

El 2º cero $x_2$, lo mismo, al aumentar b. pasa por $z_3^2$ (coincidiendo con b y originando un cero triple).

al seguir aumentando b va disminuyendo, pero no llega al valor $z_1^1$, sino que tiende automáticamente a él, pero manteniendose siempre superior.

NOTA: Esto es lógico, pués si al aumentar el cero doble fueran todos los ceros simples, tendiendo al punto "a" llegaríamos a una solución : $3a, 2b \to \infty$ que tendría un nº de ceros $\longrightarrow \infty$ todos simples en un entorno de a.

Empezemos viendo la situación del punto $m_2$.

Lema 3.6. $z_1^1 < m_2 < z_3^2$

Desmostración

1º $m_2$ no puede ser **anterior** a $z_3^1$.

Pues entonces existirían soluciones:

$$\left.\begin{array}{l} u_1:\ 3a,\ 2m_2,\ 1x_1,\ 1x_2 \\ u_2:\ 4a,\ 1m_2,\ 1y_2,\ 1y_3 \end{array}\right\}\ y_2 > x_1,\ y_3 = x_2$$

Por combinación lineal de las dos se puede obtener la solución 3a,1,1, 3 $z_3^3$.

Si suponemos ambas soluciones positivas para $x = a+\varepsilon$, entonces en el último cero $x_2, u_1$ tiene pendiente positiva, mientras $u_2$ pendiente negativa. Luego para lograr el cero triple hay que sumar ~~las~~ las dos soluciones. Pero entonces en $m_2$ la combinación lineal W: tiene pendiente negativa (primer cero simple) y téngase en cuenta que $m_2$ debe ser el 2º cero simple de la solución: $3a, 1, 1, 3z_3^3$.

$2°$ $m_2$ no puede verificar $z_3^1 < m_2 < z_1^1$

Entonces existirían soluciones.:

$$\left.\begin{array}{l} 3a,\ 1x_1,\ 2m_2,\ 1x_2 \\ 4a,\ \quad\ 1m_2,\ 1y_2,\ 1y_3 \end{array}\right\}\ y_3 = x_2$$

Ocurre exactamente lo mismo que antes. Para lograr el cero triple hay que sumar las dos soluciones (naturalmente multiplicadas por constantes, apropiadas.).

$$w = u_1 + \lambda u_2$$

$$w(m_2) = 0\ ,\ w'(m_2) = u_1'(m_2) + \lambda u_2'(m_2) = \lambda u_2'(m_2) < 0$$

Pero $m_2$ (2º cero de W debía tener pendiente positiva);

Conclusión : $z_1^1 < m_2 < z_3^2$ C.Q.D.

Entonces ya desaparece esa contradicción.

Soluciones.:

$$\left.\begin{array}{l} 3a,\ 1x_1,\ 2m_2,\ 1x_2 \\ 4a,\ 1y_1,\ 1y_2,\ 1y_3 \end{array}\right\}\ y_3 = x_2;\ y_2 = m_2;\ y_1 < x_1$$

Repitiendo el mismo razonamiento la pendiente en $m_2$ sale positiva como corresponde.

Lema 3.7.

El cero $x_i$ debe mantenerse siempre superior a $z_1^{i-1}$

Demostración.

Cuando $b \to \infty$, el cero $x_1$ siempre decreciente tiene que mantenerse mayor que $a$

El cero $x_2$ se tiene que mantener mayor que $z_1^1$.

En efecto, supongamos que $x_2$ va disminuyendo entre $z_3^2$ y $z_1^1$.

Al llegar al punto $m_2$ $(z_1^1 < m_2 < z_3^2)$ entonces aparece un cero triple.: $z_3^3$. A partir de ahí aparece en el interior del intervalo $(a,b)$ un nuevo cero : $x_3$

Tengamos pués una solución:

$$3a,\ 1x_1,\ 1(x_2 = z_1^1 < m_2),\ 1x_3(z_1^2 < x_3 < z_3^3)\ldots\ 2b$$
$$5a,\ 1z_1^1,\ 1z_1^2\ldots$$

Por combinación lineal de las dos puede lograr una solución $3a,\ 2z_1^1$.

Esa solución sabemos que tiene un cero antes del doble y que el siguiente cero simple está situado entre $z_1^2$ y $z_3^3$.

En $z_1^1$ ambas soluciones tienen pendiente de signo contrario, para lograr cero doble hay que sumarlas.

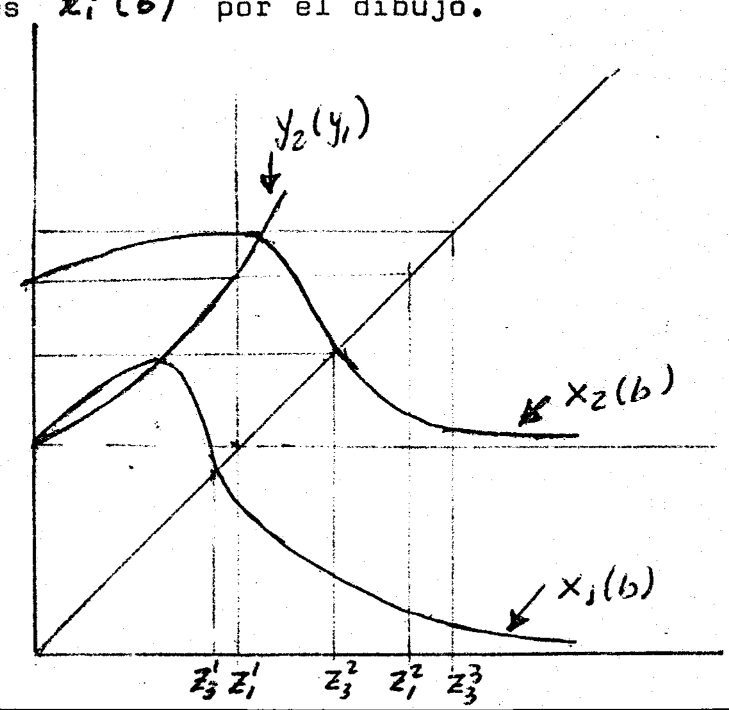
$$w = u_1 + \lambda u_2$$

$w(z_1^2) = u_1(z_1^2) > 0$, pero debia ser signo menos, pués si la solución empieza con signo $+$ para $a+\varepsilon$, en el primer cero cambia de signo, luego llega el cero doble en el punto $z_1^1$, donde no cambia de signo, sigue signo menos y el próximo cero no aparece hasta después de $z_1^2$.

Vemos pués que si $x_2$ llegase a coincidir con $z_1^1$, antes tuvo $x_3$ que pasar por $z_1^2$, luego antes tuvo que alcanzar el punto $m_3$ con lo que apareció un nuevo cero triple $z_3^4$.

Siguiendo este proceso por inducción, llegaríamos a que tiene que aparecer todos los puntos $z_3^m$ conjugados antes que ningún cero $x_i$ pase por el punto $z_1^{i-1}$.

Luego podemos darnos una idea gráfica intuitiva de las funciones $x_i(b)$ por el dibujo.



## 2. NUMERO MINIMO DE CEROS DE LAS SOLUCIONES

( En lo que sigue muchas veces por comodidad utilizamos la abreviatura sol.por solución).

Las soluciones con cero 4 en $a$ , tienen su comportamiento perfectamente conocido por el de las soluciones con cero 5 en $a$ . Por otra parte ya hemos estudiado las sol. 3–2 y por consiguiente las sol. principales.

Soluciones con cero 3 en $a$ :

1. Cualquier sol. 3 $a$ tiene que tener al menos un cero antes de $\delta_2$ .(Hay sol. 3 $a$ – 1 $b$ con $b$ tan próximo a $\delta_2$ como queramos).

En efecto, sea $u_2$ la sol. principal 3 $a$-1-3 $\delta_2$. Si hubiera una sol. 3 $a$ sin cero en $(a, \delta_2]$ ; por combinación lineal obtendríamos una sol. 3–2, y sin ningún cero más en $[a, \delta_2]$ : absurdo.

Quedaría la posibilidad de que la sol. fuera 3 $a$-1-$\delta_2$, con lo que la combinación lineal podría dar lugar a 3–2–1 $\delta_2$ . Pero queda también descartado porque sabemos que en este caso el cero doble debe coincidir exactamente con el cero simple de $u_2$. Aquí es evidente que no puede ocurrir eso.

Luego la sol. 3 $a$ –1 $\delta_2$ tiene necesariamente al menos un cero interior. Esto por otro lado es evidente dado que sabemos que las sol. 3–2–1 y 4–1–1 constituyen un sistema fundamental para todas las sol.3–1, que todas tienen pues un cero más al menos, el cero interior común de las soluciones de la base.

Hay sol. 3 $a$ –1 $b$ , con $b$ tan próximo a $\delta_2$ como queramos:

En efecto sean dos sol. 3 $a$-2$x_1$–1 $\delta_2$ y otra sol. 3 $a$-2$x_1+\varepsilon'$-1$\delta_2-\varepsilon$ sol. ambas existentes. Por suma de ellas obtendremos otra sol: 3$a$-1$b$, $b=\delta_2-\varepsilon''$

2. Cualquier sol. 3 $a$ tiene que tener al menos dos ceros antes de $\delta_3$. (Hay sol. 3 $a$ –1–1 $b$ , con $b$ tan próximo a $\delta_3$ como queramos).

Cualquier sol. 3 $a$ –1 $\delta_3$ tiene que tener al menos dos ceros interio-

Asi se irían construyendo las sucesivas gráficas.

Teorema 3.3.

(Surge como consecuencia que):los puntos $z_1^i$ y $z_3^i$ verifican

$$z_3^1 \leq z_1^1 < z_3^2 < z_1^2 < z_3^3 < \cdots$$

Es decir se separan mutuamente siendo : $z_3^i < z_1^i$

Además el punto $z_1^i$ de existir lleva implícitos la existencia de los $z_1^1, z_1^2 \ldots z_1^{i-1}$ y de los $z_3^1, z_3^2 \ldots$ ... $z_3^i$ anteriores a él y también del $z_3^{i+1} > z_1^i$.

La existencia del punto $z_3^i$ lleva implícitas la existencia de los puntos $z_3^1, z_3^2, \ldots z_3^{i-1}$ y de los $z_1^1, z_1^2 \ldots z_1^{i-1}$ anteriores, pero no la del punto $z_1^i$

Corolario

Los puntos $z_3^i$ coinciden con los conjugados $\delta i$.

Por tanto, si una solución tiene $6+i$ ceros en un intervalo $[a,b]$, existe un puntoconjugado $\delta_{i+1} \in (a,b]$ (puede coincidir con el último cero de la solución dada, si ésta es precisamente la solución de oscilación 3-3)

$$\delta_{i+1} = z_3^{i+1}, \text{ y un punto } z_1^i \in (a,b)$$

En la ecuación $[py''']'''+ry=0$, son por tanto soluciones principales (las que tienen mayor número de ceros en cada intervalo las soluciones con cero 3 en a y cero 3 en $z_3^i$.

res más.

En efecto sea $u_3$ la sol. principal $3\,a-1-1-3\,\delta_3$. Sabemos que existe una sol. $3a-1y_1$, $x_2<y_1<\delta_2$. Esa sol. tiene que tener un cero $y_2$ antes de $\delta_3$; pues si no sumando con $u_3$ obtendríamos: $3\,a-2$ y a lo máximo un cero más en $[a,\delta_3]$; cuando debería tener 7 ceros.

Antes de seguir con la demostración introduzcamos una definición:

<u>Definición</u>: <u>3 1 Soluciones mínimas</u>: Aquellas que tienen el mínimo número de ceros en cada intervalo $[a,\delta_i]$.(En realidad mejor era decir sol. mínimas entre las m $a$: para indicar que la definición la limitamos a la clase de sol. con cero m en $a$. La anterior definición no incluye a las sol. que por ejemplo tengan un mínimo número de ceros en un intervalo $[a,\delta_i]$, pero no en un intervalo anterior $[a,\delta_{i-j}]$.

<u>Lema 3.8</u> : Las sol. $3\,a$ mínimas separan sus ceros.

Por tanto, de existir una sol. mínima 3-1-1, cualquier otra sol. mínima 3-1, con el 1ºcero anterior al 1º.cero de la otra tiene que tener también un 2º.cero anterior al de la otra.

<u>Demostración</u>: Supongamos que existe una sol. mínima $3\,a-1x_1-$ $-1x_2$, y otra sol. $3\,a-1\,y_1$, $y_1>x_2$ y ningún cero entre $x_1$ y $x_2$ ($x_1$ tiene que ser anterior a $\delta_2$ y $x_2$ posterior: la sol. es mínima). Por diferencia de estas dos sol. afectadas de los correspondientes coeficientes podemos obtener una sol. 3 – 2 sin ningún cero.más. Nótese que entre $a$ y $x_1$ la combinación lineal no puede tener un cero más; pues si no tendríamos dos ceros y por ende otra sol. $3\,a-2\,b$ el cero doble antes de $x_1$ y ningún cero más hasta $y_2$ ($y_2>\delta_2$).

Por otra parte, si la 2ª sol. tuviera un 2º.cero antes del 1º de la 1ª, ya no sería sol. mínima.

Hay pues sol. $3\,a-1-1\,b$, con $b$ tan próximo a $\delta_3$ como queramos: pues dada una sol. de esta forma siempre hay otra con el 1º.cero después y por consiguiente también el 2º que por tanto estará más próximo a $\delta_3$

Veamos: la sol. $3a-1\delta_3$ : al menos tiene 5 ceros, pues el cero $\delta_3$ implica un cero anterior (dicha sol. sale por combinación lineal de las sol. $u_3$: principal y $4a-1\delta_3$ que como sabemos tienen un cero interior en común).

Pero es fácil ver si sumamos ambas soluciones que nos engendran una sol. 3-1-1-1

¿ Puede haber otra sol. $3a-1-1\delta_3$ ?. : No, pues entonces una sol. mínima $3a$ y con el 1º cero posterior al de nuestra sol. tendria su 5º. cero posterior a $\delta_3$

3. Cualquier sol. $3a$ tiene al menos i-1 ceros antes de $\delta_i$ (Hay sol. $3a-1b$ con i-1 ceros en $(a,b]$ y $b$ tan próximo a $\delta_i$ como queramos). Cualquier sol. $3a-1\delta_i$ tiene al menos i ceros en $(a,\delta_i]$

<u>Demostración</u>: Por inducción.

Lo admitimos para $[a,\delta_{i-1}]$ . Sea $u_i$ la sol. principal $3a-3\delta_i$

Hay por inducción una sol. $3a, 1x_1=\delta_2-\varepsilon_1, 1x_2=\delta_3-\varepsilon_2, \ldots 1x_{i-2}=\delta_{i-1}-\varepsilon_{i-2}$ Esa sol. evidentemente mínima tiene que tener al menos un cero más antes de $\delta_i$ ; pues si no sumada con $u_i$ obtendriamos un cero doble: 3-2-1-1-.... y a lo máximo un cero más en el último intervalo: contradicción. (Una sol. 3-2 que tiene en $[a,\delta_i]$ sólo i+3 ceros.

Las sol. mínimas ~~se~~ separan sus ceros. El último cero puede estar tan próximo a $\delta_i$ como queramos. El número de ceros de la sol. $3a-1\delta_i$ también se generaliza fácil.

<u>Mínimo número de ceros de las sol. $2a$</u>

1. No existen sol. 2-4

2. Si existe sol. $3a-2b$ con i ceros interiores; hay sol. $2a-3b$ con i ceros interiores.

Pues si $\delta_i$ : es el conjugado i de $a$ ; $a$ es el conjugado -i de

$\delta_i$ . Luego si una sol. 3 $a$ -2 $b$ tiene $m$ ceros interiores en $(a, b)$; la sol. 3$\delta_i$ -2 $b$ también tiene $m$ ceros interiores.

Por simetría la sol. 2$a$ -3$b$, entre $a$ y $b$ tiene número de ceros y comportamiento análogo al de 3 $a$ -2 $b$ , pero después de $b$ , tiene comportamiento análogo al de las sol. 3$a$ -2 $b$ antes de $a$ .

3. Dos sol. 2 $a$ -2 $b$ L.I. forman un sistema fundamental para todas las sol. 2 $a$ -2 $b$ y sus ceros se separan tanto en $(0, a)$ como en $(a, b)$, como en $(b, \infty)$. (Por tanto si coincide un cero más no son independientes).

Demostración: 1º evidente: si no existiría una sol. 4-2 imposible.

2º, si no entre dos ceros consecutivos de una: ninguno de la otra, con lo que una C.L. daría sol. 2-2-2: imposible. Esto es válido igualmente en el caso de que tuvieran un cero común más (sol. 2-2-2)

Corolarios: El número de ceros de las sol. 2-2 está perfectamente aclarado al conocer el número de ceros de las sol. 3-2. Como máximo solo pueden tener el mismo número de ceros que ellas y como mínimo un cero menos.

Nota: Esto aclara a su vez el número de ceros de las sol. 2$a$ -3$b$ Por ejemplo vemos que no puede haber una sol.2-3-1 con el último cero antes de $\delta_i$.

Después de estas consideraciones veamos ahora nuestro problema: el número mínimo de ceros de las sol.2 $a$ .

4. Cualquier sol.2$a$ tiene que tener al menos un cero antes de $\delta_2$. (Hay sol. 2 $a$ -1 $b$ con $b$ tan próximo a $\delta_2$ como queramos).

La demostración es idéntica al caso de las sol. 3 $a$ . Ahora se obtendrían sol. 2-2 sin ningún cero más: absurdo. Aún suponiendo cero en

: obtendriamos sol. 2-2-1: absurdo; tiene que tener un 5ºcero antes de $\delta_2$.

Existen sol. 2 $a$ -1 $b$ con $b$ tan próximo a $\delta_2$ como queramos. Basta dar un método de construcción.

Por ej. con una sol. 3-1 $b$, $b<\delta_2$ y otra 2-1-2 $b$ se puede obtener la sol. 2-1 $b$ $(b=\delta_2-\varepsilon)$

La sol. 2 $a$ -1 $\delta_2$ debe tener al menos 1 cero interior más. Dicha sol. 2$a$-1-1 $\delta_2$ existe: pues p.ej. las sol. 4 $a$ -1-1 $\delta_2$ y la 2$a$ -3-1 $\delta_2$, sumándolas nos dan dicha sol.

5. Las sol. mínimas separan sus ceros.

Así dos sol. 2 $a$ -1-1$y_2$ $>\delta_2$ y otra sol. 2 $a$ -1, con su 1º cero antes del 1º. de la otra y sin cero entre $y_1$ e $y_2$, daría lugar a sol. 2$a$ -2$b$ sin cero más: absurdo.

Todos los razonamientos hechos para las sol. 3$a$ pueden repetirse y lo mismo la conclusión final:

6. Cualquier sol. 2$a$ tiene al menos i-1 ceros antes de $\delta_i$ (Hay sol. 2$a$ -1$b$ con i-1 ceros en $(a,b]$ y $b$ tan próximo a $\delta_i$ como queramos). Cualquier sol. 2 $a$ -1$\delta_i$, tiene al menos i ceros en $(a,\delta_i]$

<u>Soluciones 1$a$</u>

Valen las mismas o parecidas consideraciones.

1. Cualquier solución 1a tiene que tener al menos un cero antes de $\delta_2$

Si tuviera el primer cero en $\delta_2$ o posterior, tendríamos una solución: 2a - 1 - 1, el último coincidente con el de nuestra solución 1 - 1. Sumando estas dos soluciones podríamos obtener una solución 1 - 2 sin más ceros interiores y con el cero 2 posterior a $\delta_2$. Esto es imposible.

También es absurdo suponer que no tuviese cero hasta $\delta_3$, pues entonces tendríamos una solución cero doble y ningún cero más en $[a, \delta_3]$.

Repitiendo los razonamientos anteriores podriamos lograr soluciones 1a – 1b; $\delta_{i-1} < b < \delta_i$ con 1–2 ceros interiores (los podemos construir con soluciones 2a – 1b y 1 a – 2b).

Resumiendo todos los casos analizados tenemos:

Teorema 3.4 Cualquier solución con cero m en a tiene al menos i–1 ceros en $(a, \delta_i)$. O bien más general en un intervalo $[a, b]$ el número de ceros de dos soluciones u $(x)$ y v $(x)$ no puede diferir en más de 6. Este resultado es imposible mejorarlo: como hemos visto por el proceso de construcción pueden diferir en 6.

Corolario: Las soluciones de la ecuación $[p y''']'' + ry = 0$ son todas oscilatorias o todas no oscilatorias.

Corolario: Si existe una solución que no se anula en $(a, \infty)$ entonces todas las soluciones son disconjugadas en ese intervalo (ninguna tiene más de 5 ceros).

La ecuaciòn $[3,2]$, como hemos mencionado, no introduce ningún problema nuevo que pueda ser objeto de un anàlisis similar al hecho para la ecuaciòn $[3,1]$. La ùnica oscilaciòn posible en ella es la $4,2 \rightleftarrows 2,4$. Pero esta oscilaciòn ( y la disposiciòn de los puntos conjugados ), en realidad ya ha sido analizada en el capìtulo 2º al hablar de las oscilaciones pares : $2n-2, 2$. para la ecuaciòn $(1.3)$. El nùmero màximo de ceros en cualquier intervalo $[a, z_2^i]$ viene dado por el de la soluciòn con cero 4 en a y cero dos en $z_2^i$. Podemos anunciar :

SI UNA soluciòn de la ecuaciòn $[3,2]$ tiene $5+i$ ceros en un intervalo $[a,b]$, existe un punto $z_2^i = \delta_i(a) \in (a,b]$, tal que la soluciòn : 4 a , 2 $z_2^i$ tiene $5+i$ ceros en $[a, \delta_i(a)]$. En cualquier intervalo $[a,b]$ siempre hay soluciones de $[3,2]$ sin ningun cero.

Vamos entonces, para completar el anàlisis que hemos hecho de la ecuaciòn $[3,1]$ y aprovechando su ìntima conexiòn con el problema de los autovalores, a dar algunos teoremas de comparaciòn para dicha ecuaciòn que nos permitan ( fuera del anàlisis que hemos hecho para la ecuaciòn general), dar para ciertas condiciones de los coeficientes precisiones sobre el nùmero de ceros que pueda tener la ecuaciòn en un cierto intervalo.

## 3. ALGUNOS TEOREMAS DE COMPARACIÒN PARA LA ECUACIÒN $[3,1]$ RELACIONADOS CON EL PROBLEMA DE AUTOVALORES

Sea el problema de autovalores

$$[3,3].\ [p y''']''' + \lambda r y = 0 \quad \left.\begin{array}{l} \\ y(a)=y'(a)=y''(a)=0 \\ y(b)=y'(b)=y''(b)=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} p(x),\ r(x) > 0 \\ \left.\begin{array}{l} p(x) \in C^3 \\ r(x) \in C \end{array}\right\} \text{en } [a,b] \end{array}$$

Se podrían dar otras condicioneshomogèneas de contorno pero hemos visto que estas son precisamente las que definen los puntos conjugados y por tanto las que mejor pueden darnos idea de la oscilación de las soluciones .

Sabemos que existe un conjunto numeràble creciente de valores positivos de $\lambda$ ( los autovalores) para los que $(3,3)$ tiene soluciòn no trivial . El 1º autovalor $\lambda_1$ es el mìnimo del cociente de Rayleigh $$J[y] = \frac{\int_a^b p[y''']^2 dx}{\int_a^b r y^2 dx}$$

donde "y" puede variar entre la clase de funciones admisibles ( funciones que satisfacen la condición de contorno y que tienen derivada 3ª continua o casi continua en $[a,b]$

El n autovalor : $\lambda_n$ se define de acuerdo con el principio del màximo mìnimo de Courant.

Siendo $f_1, f_2 \cdots\cdots f_{n-1}$ cualquier conjunto de $n-1$ funciones admisibles $\lambda_n = \text{máx. mín. } J[y]$.
donde y pertenece a la clase de funciones admisibles, para las que $\int_a^b r y f_r dx = 0$ , $r = 1, 2, \ldots n-1$

Dos propiedades importantes de los autovalores de èste problema de contorno son :

1º <u>Todos los autovalores de $(3,3)$ son simples</u> .

Si hubiera uno doble , existirían dos soluciones de la ecuaciòn linealmente independientes que cumplirían las condiciones de contorno . Hemos visto que la soluciòn ès ùnica .

2º <u>La n autofunciòn $y_n$ correspondiente al n autova-</u>

lor $\lambda_n$ , tiene $n-1$ ceros simples en $(a,b)$

En efecto de tenerlos , èstos solo pueden ser simples . Teorema 2.2*

Vamos a demostrar que tiene n- 1 ceros .

Sea $\Lambda$ el n autovalor de [3 , 3].

Entonces para que el problema

$$[3.4] \quad \begin{cases} [p y''']''' + \Lambda r y = 0 \\ y(a) = y'(a) = y''(a) = 0 = y(b) = y'(b) = y''(b) \end{cases}$$

tenga soluciòn , b debe ser un punto conjugado de a para la ecuaciòn $[p y''']''' + \Lambda r y = 0$ $(\Lambda = cte.)$

Si demostramos que $b = \delta_n(a)$ para la funciòn $y_n$ estarà demostrada la proposiciòn .

Basándose en el hecho de que el autovalor $\lambda_n$ es una funciòn estrictamente decreciente del intervalo ( disminuye si el intervalo aumenta y viceversa ) tendremos :

Sean los problemas [3,4] con $b$ sucesivamente $= \delta_1(a), \delta_2(a) \ldots$ $\ldots \delta_m(a)$. Supongamos que $b = \delta_m(a)$ para la funciòn $y_n(x)$ ( o sea la soluciòn para la que $\Lambda$ es el n autovalor ) Si $b = \delta_{m-1}(a)$ , también existe el autovalor $\Lambda$ pero èste no puede ser el n autovalor, sinò el n - 1 . Sucesivamente llegamos a que si $b = \delta_1(a)$ , $\Lambda$ debe ser el autovalor : n - m + 1 Pero por otra parte $\Lambda$ debe ser el primer autovalor , si no lo fuera , entonces existiría un conjugado $b < \delta_1(a)$ lo que es absurdo; luego

$$n - m + 1 = 1 \;;\; n = m. \quad C.Q.D.$$

Basándonos en lo anterior vamos a obtener teoremas de comparaciòn y nùmero de ceros para la ecuaciòn [3,1].

Se puede dar una cota superior del nùmero de ceros de la ecuación [3.5]. $y^{(VI)}+r(x)y=0$ caso particular de la [3,5].

TEOREMA 3.5  Sea n el número máximo de ceros de cualquier solución de la ecuación $y^{(VI)}+r(x)y=0$ en $[a,b]$. entonces $n-5<\int_a^b G(x,x)\,r(x)\,dx$

Siendo $G(x,t)$ la función de Green correspondiente al problema

$$[3.6]\quad y^{(VI)}=0 \quad \begin{cases} y(a)=y'(a)=y''(a)=0 \\ y(b)=y'(b)=y''(b)=0 \end{cases}$$

Demostración  Evidentemente $\delta_{n-5}(a)\leq b$

Como el mismo número máximo de ceros los tiene la solución principal en $[a,\delta_{n-5}(a)]$; podemos suponer que $b=\delta_{n-5}(a)$

Sea el problema de autovalores $y^{(VI)}+\lambda r(x)y=0$ con las condiciones de contorno $y(a)=y'(a)=y''(a)=y(b)=y'(b)=y''(b)=0$

entonces al ser $b=\delta_{n-5}(a)$, $\lambda_{n-5}=1$.

Sea $G(x,t)$ la función de Green de $L[y]=y^{(VI)}=0$ y condiciones dadas de contorno

$$y(x)=\lambda\int_a^b G(x,t)\,r(t)\,y(t)\,dt$$

haciendo $u(x)=y(x)\sqrt{r(x)}$

$$u(x)=\lambda\int_a^b G(x,t)\sqrt{r(x)r(t)}\,u(t)\,dt$$

$$K(x,t)=G(x,t)\sqrt{r(x)r(t)} \text{ simétrica en } x \text{ y } t$$

$$u(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\,u(t)\,dt$$

$K(x,t)$ es definida positiva y podemos aplicar el teorema de Mercer

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu}=\int_a^b K(x,x)\,dx\ ;\quad \lambda_{n-5}=1;$$

$$\lambda_\nu<1 \text{ para } 1\leq\nu\leq n-4.\quad \sum_{\nu=1}^{n-5}\frac{1}{\lambda_\nu}>n-5$$

$$n-5<\sum_{\nu=1}^{n-5}\frac{1}{\lambda_\nu}<\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu}=\int_a^b K(x,x)\,dx=\int_a^b G(x,x)\,r(x)\,dx$$

C.Q.D.

Veamos ahora algunos teoremas de comparaciòn.

Sean las ecuaciones :

$$[3.7]\quad \left.\begin{array}{l}(1)\ [p\, y''']''' + r\, y = 0\\ (2)\ [p_1 y''']''' + r_1 y = 0\end{array}\right\}\ \begin{array}{l} p, r > 0\\ p_1, r_1 > 0\end{array}\ \left.\right\}\ \begin{array}{l} p \geq p_1\\ r \leq r_1\end{array}$$

Sean $\delta_n(a)$, $\delta_n^1(a)$ respectivamente los n conjugados del punto a para ambas ecuaciones .

Teorema 3.6 $\delta_n^1(a) \leq \delta_n(a)$

Demostraciòn Si planteamos para las ecuaciones (1), (2) el correspondiente problema de autovalores para el intervalo $[a, \delta_n(a)]$ tenemos que el n autovalor para la ecuaciòn (1) : $\lambda_n = 1$

pero $J = \dfrac{\int p[y''']^2 dx}{\int r y^2 dx}$ ; luego J no aumenta al sustituir $p$ y $r$ por $p_1$ y $r_1$

por tanto $\lambda_n^1 \leq \lambda_n = 1$.

Entonces como al dismiuir el intervalo aumenta el autovalor : $\lambda_n^1 = 1$ para un punto $\delta_n^1(a) \leq \delta_n(a)$ C.Q.D.

Un tipo distinto de teorema de comparaciòn se puede obtener utilizando como término de comparación ecuaciones de orden más bajo, por ejemplo de 2º orden .

Sean las tres ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ [p u']' + r_1 u = 0\\ (2)\ [r_1 v']' + r_2 v = 0\\ (3)\ [r_2 w']' + r w = 0\end{array}\right\}$$

siendo $r_1(x) > 0$, $r_1 \in C^2$ en $[a,b]$, y tal que la soluciòn de (1) que que se anula para x= a no se anule en $(a,b)$

$$r_2(x) > 0,\ r_2 \in C^1 \text{ en } [a,b]$$

tal que la soluciòn de (2) nula en x = a , $\neq 0$ en $(a,b)$

y sean $a_1, a_2, a_3 \ldots (a < a_1 < a_2 < \ldots)$ los ceros en $(a, \infty)$ de la soluciòn $w$ de (3) nula en a. Sea $\delta_n(a)$ el ene punto conjugado de $[p w''']''' + r w = 0$ .

Teorema $a_n \leq \delta_n(a)$

Demostraciòn  Para (1) existe una constante $A \geq 1$ tal que $[pu_1']' + A r_1 u_1 = 0$ tiene soluciòn que se anula en $a$ y $b$ y sin ceros en $(a,b)$

O sea $A = \lambda_1$, 1º autovalor del problema: $[pu']' + \lambda r_1 u = 0$, $u(a) = u(b) = 0$

Por la propiedad del mìnimo.

$$A \leq \frac{\int_a^b p U'^2 dx}{\int_a^b r_1 U^2 dx}$$ ; $U(x)$ perteneciente a la clase de funciones admisibles en $[a,b]$

(derivable y tal que $U(a) = U(b) = 0$

Para (2) existe una constante $B \geq 1$

$[r_1 v_1']' + B r_2 v_1 = 0$, $B$ el 1º autovalor del problema de contorno correspondiente

$$B \leq \frac{\int_a^b r_1 V'^2 dx}{\int_a^b r_2 V^2 dx}$$ $V$ cualquier funciòn de la misma clase que $U$, por tanto

$$B \leq \frac{\int_a^b r_1 U'^2 dx}{\int_a^b r_2 U^2 dx}$$

Para la ecuaciòn de 6º orden :

$$\lambda_n = \min J[W] = \min \frac{\int_a^b p[W''']^2 dx}{\int_a^b r W^2 dx}$$, siendo $W \in C^3$ con ceros triples en a y b y ciertas condiciones de ortogonalidad.

W'' cumple las condiciones de U : $[p[W'']']' + r_1 W'' = 0$

$$A \leq \frac{\int_a^b p[W'']'^2 dx}{\int_a^b r_1 [W'']^2 dx} \; ; \; J[W] = \frac{\int_a^b p[W''']^2 dx}{\int_a^b r_1 [W'']^2 dx} \cdot \frac{\int_a^b r_1 [W'']^2 dx}{\int_a^b r_2 [W']^2 dx} \cdot \frac{\int_a^b r_2 [W']^2 dx}{\int_a^b r W^2 dx}$$

$$J[W] \geq A B \frac{\int_a^b r_2 [W']^2 dx}{\int_a^b r W^2 dx} \geq \frac{\int_a^b r_2 [W']^2 dx}{\int_a^b r W^2 dx} = J_1[W].$$

$J_1[W]$ es el cociente de Rayleigh para

$$(4) \quad \left.\begin{array}{l} [r_2 w']' + \mu r w = 0 \\ w(a) = w(b) = 0 \end{array}\right\}$$

Las condiciones de ortogonalidad de este problema son las mismas condiciones impuestas en la ecuaciòn de 6º orden para obtener el autovalor $\lambda_n$ .

Las condiciones de contorno y las funciones admisibles para la ecuaciòn de 6º orden son más restrictivas que las de éste nuevo problema : ceros triples en vez de ceros simples y derivable tres veces en vez de una sola .

Por el teorema de comparacion de Courant. $\mu_n \leq \lambda_n$.

Si $b = \delta_n(a)$, $\lambda_n = 1$ ; $\mu_n \leq 1$

La autofunciòn $w_n$ de (4) correspondiente a $\mu_n$ tiene $n+1$ ceros en $[a,b]$.

Como $\mu_n \leq 1$ existe un punto $b' \leq b$ tal que la ecuaciòn (3) tiene una soluciòn que se anula en $a, b'$ y con $n-1$ ceros intermedios : $b' \leq b = \delta_n(a)$

$a_n \leq \delta_n(a)$. C.Q.D.

Cualquier elecciòn particular de las funciones $r_1$ y $r_2$ que cumplieran las condiciones dadas , darà lugar a un teorema de comparaciòn específico.

Ejemplos:

1º- Sea la ecuaciòn $[p\,y''']''' + r\,y = 0$ con el coeficiente $p(x)$ tal que

$$K = \frac{1}{\pi}\int_a^{\infty} \frac{dx}{p(x)} < \infty$$

y sea W una soluciòn de:

$$\left[\frac{p}{\left[\int_a^x p\,dx\right]^2}\, w'\right]' + 4K^2 r(x)\, w = 0$$

para la que $w(a) = 0$ . Si $a_1, a_2, \ldots\ (a < a_1 < a_2 < \ldots)$ son los ceros de $w$ en $(a, \infty)$ y $\delta_n(a)$ es el $n$ conjugado de $a$ para la ecuaciòn de 6º orden .

Se tiene $\delta_n(a) \geq a_n$.

En efecto :

Formemos las tres ecuaciones (1), (2), (3)

$$(1)\ [\rho u']' + r_1 u = 0$$

Por un cambio de variable independiente $\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{r_1}{\rho}}$ se reduce a la forma

$$\ddot{u} + \dot{u}\,\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{r_1'}{\rho} + \frac{\rho' r_1}{\rho^2}\right)}{\left(\frac{r_1}{\rho}\right)^{3/2}} + u = 0$$

Si se elige $r_1 = \frac{K}{\rho}$ queda $\ddot{u} + u = 0$, $t = \sqrt{K}\int_a^x \frac{dx}{\rho(x)}$

La soluciòn pedida es $u = \operatorname{sen}\left[\sqrt{K}\int_a^x \frac{dx}{\rho}\right]$; para que no tenga ceros en $(a, \infty)$

$$\sqrt{K}\int_a^\infty \frac{dx}{\rho(x)} \leq \pi \quad ; \sqrt{K} \leq \pi \Big/ \int_a^\infty \frac{dx}{\rho(x)} \quad \text{supuesto} \int_a^\infty \frac{dx}{\rho(x)} < \infty$$

Luego la ecuaciòn

$$(1)\quad [\rho u']' + \frac{1}{K^2 \rho}\, u = 0 \quad \text{con } K = \frac{1}{\pi}\int_a^\infty \frac{dx}{\rho(x)} < \infty$$

es una ecuaciòn del tipo requerido

$$(2)\left[\frac{1}{K^2 \rho}\, v'\right]' + r_2(x)\, v = 0$$

por un cambio de variable independiente $\frac{dt}{dx} = \sqrt{r_2 \rho}$ y eligiendo $r_2 = \rho\left[4K^2 \int \rho\, dx\right]^{-2} > 0$ y por tanto $t = \frac{1}{2K_0}\int_a^x \rho\,dx \Big/ \int \rho\, dx$ se transforma en $\ddot{v} - 2\dot{v} + v = 0$, ecuaciòn que no tiene ninguna soluciòn oscilante .

Por tanto

$$\left.\begin{aligned}
&(1)\ [\rho u']' + \frac{1}{K^2 \rho}\, u = 0 \\
&(2)\left[\frac{1}{K^2 \rho} v'\right]' + \frac{\rho}{\left[4K^2 \int \rho\, dx\right]^2}\, v = 0 \\
&(3)\left[\frac{\rho}{\left[\int_a^x \rho\, dx\right]^2}\, w'\right]' + 4K^2 r(x)\, w = 0
\end{aligned}\right\}$$

con lo que queda demostrado el resultado .

2º – Para la ecuación $y^{(IV)} + r(x)y = 0$ podemos elegir

1ª ecuación : $u'' + r_1 u = 0$, $r_1 = \frac{1}{4x^2} > 0$, ecuación no oscilatoria en $(0,\infty)$.

2ª ecuación $\left[\frac{1}{4x^2} v'\right]' + r_2 v = 0$; $r_2 = \frac{9}{16x^4} > 0$
ecuación no oscilatoria en $(0,\infty)$.

3ª ecuación $\left[\frac{9}{16x^4} w'\right]' + r w = 0$ que se puede transformar en

$$z'' + z\left[\frac{16}{9} x^4 r - \frac{6}{x^2}\right] = 0$$

Por consiguiente :

Sea $z(x)$ una solución de $z'' + z\left[\frac{16}{9} x^4 r(x) - \frac{6}{x^2}\right] = 0$ para la que $z(a) = 0$ y $a_1\ a_2 \ldots (a < a_1 < a_2 \ldots)$ los ceros de $z(x)$ en $(a,\infty)$, $\delta_n(a)$ es el n conjugado de a para la ecuación $y^{(IV)} + r(x)y = 0$, entonces $\delta_n(a) \geq a_n$.

BIBLIOGRAFIA

I J.H.Barret:"Oscillation theory of ordinary linear differential equations".Advances in Math.3(1969)415-509

2.M.Bocher:"Lecons sur les methodes de Sturm" Gauthier-Villars, Paris,1917.

3.E.A.Coddington and N.Levinson:"Theory of Ordinary Differential Equations" Mc.Graw-Hill, New-York,1955.

4.L.Collatz: " Eigenwert Problems" .Chelsea

5.W.A.Coppel:" Disconjugacy".Lecture Notes in Math. 220.Springer-Verlag.Berlin,1971.

6.R.Courant and D.Hilbert:"Methods of Mathematical Physics", Vol.I.Interscience,1953,New-York.

7.D.B.Hinton.:"Disconjugate properties of a system of differential equations" J.Differential Eqs.2(1966)420-437

8D.B.Hinton:" A Criterion for n-n oscillations in differential equations of order 2n".Proc.Am.Math.Soc.19(1968) 511-518.

9.H.C.Howard.:"Oscillation criteria for fourth order linear differential equations" Trans.Am.Math.Soc.,96(1960) 296-311.

10.R.W.Hunt.:"Oscillation properties of even-order linear differential equations" Tran.Am.Math.Soc.115(1965)54-61

11.E.L.Ince:"Ordinary Differential Equations",Dover,New-York 1956

12.W.J.Kim:"On the extremal solutions of nth-order linear differential equations".Proc.Am.Math.Soc.33(1972) 62-68.

13.K.Kreith:"A Comparison theorem for conjugate points of general self-adjoint differential equations".Proc.. Am.Math.Soc.25 (1970) 656-661.

14.K.Kreith:"Oscillation criteria for a class of fourth order differential equations"SIAM.J.Appl.Math.22(1972) 135-137.

15.W.Leighton:"Comparison theorems for linear differential equations of second order".Proc.Am.Math.Soc.13(1962) 603-610.

16.W.Leighton:"Some elementary Sturm theory".J.Differential Eqs.4 (1968) 187-193.

17.W.Leighton and Z.Nehari:"On the oscillation of solutions of self-adjoint linear differential equations of the fourth order"Trans.Am.Math.Soc.89(1958)325-377

18.W.Leighton and W.Oo.Kian Ke:"A comparison theorem" Proc.Am. Math.Soc.28 (1971) 185-187.

19.Z.Nehari:"Oscillation criteria for second-order linear differential equations".Trans.Am.Math.Soc.85 (1957) 428-445.

20.Z.Nehari:"Disconjugate linear differential operators".Trans. Am.Math.Soc.129 (1967) 500-516.

21.Z.Nehari:"Disconjugacy criteria for linear differential equations"J.Differential Eqs.4(1968) 604-611.

22.A.C.Peterson:"Distribution of zeros of extremal solutions of a fourth order differential equation for the nth conjugate point".J.Differential Eqs. 8 (1970) 502-511.

23.M.Petrovitch:"Integration qualitativedes equations differentielles".Gauthier-Villars,Paris,1931.

24.W.T.Reid:"Oscillation criteria for self-adjoint differential systems".Trans.Am.Math.Soc.101(1961)91-106.

25.G.H.Ryder and D.V.Wend:"Oscillation of solutions of certain ordinary differential equations of nth.order" Proc.Am.Math.Soc.25 (1970) 463-469.

26.G.Sansone:"Equazioni Differenziali nel Campo Reale"Zanichelli Bologna,1956.

27.T.L.Sherman:"Conjugate points and simple zeros for ordinary linear differential equations".Trans.Am.Math. Soc.146 (1969) 397-411.

28.M.Svec:"On various properties of the solutions of third and fourth order linear differential equations".Differential Equations and Their Applications.Proc.of the Conference held in Prague,1962. 187-198.

29.C.A.Swanson:"Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations".Academic Press,New-York,London,1968.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE CIENCIAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. JULIO COUCE CALVO titulada "Propiedades de oscilación en Ecuaciones Diferenciales Autoadjuntas." acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente "cum laude"

Sevilla, 24 de febrero 1.973

| | | |
|---|---|---|
| El Vocal, | El Vocal, | El Vocal, |
| A. Castro | | |
| El Presidente, | El Secretario, | El Doctorado, |