

Trabajo Fin de Grado

Ingeniería de las Tecnologías Industriales

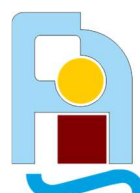
Estudio del frenado magnético en un imán rodante

Autor: Miguel Martín Espinosa

Tutor: Antonio González Fernández

Dpto. Física Aplicada III
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2019



Trabajo Fin de Grado
Ingeniería de las Tecnologías Industriales

Estudio del frenado magnético en un imán rodante

Autor:

Miguel Martín Espinosa

Tutor:

Antonio González Fernández

Profesor titular

Dpto. de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2019

Trabajo Fin de Grado: Estudio del frenado magnético en un imán rodante

Autor: Miguel Martín Espinosa

Tutor: Antonio González Fernández

El tribunal nombrado para juzgar el Trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de

Sevilla, 2019

El Secretario del Tribunal

Agradecimientos

Para poder realizar este trabajo he necesitado aprender un poco más de electromagnetismo, ya que mis conocimientos previos eran muy escasos y aún tengo mucho que aprender. Por eso, le agradezco a mi tutor Antonio González Fernández haberme otorgado el trabajo y enseñarme los conceptos básicos necesarios, también por su gran y constante dedicación durante todo este tiempo. Agradezco también el apoyo de mis hermanas y especialmente el de mis padres que me han animado siempre.

Sevilla, 2019

Resumen

El objetivo de este trabajo es analizar los efectos dinámicos disipativos que tienen las corrientes de Foucault sobre un sólido imanado. Para hacerlo, proponemos un modelo físico en el que una esfera uniformemente imanada se mueve sobre una superficie conductora, diferenciando entre dos situaciones ideales: rodadura sin deslizamiento y deslizamiento puro sobre la superficie. Los resultados obtenidos proceden de la simulación computacional de las ecuaciones que gobiernan la dinámica del sólido, usando primero variables adimensionales y después asignando valores reales a los parámetros.

Antes de pasar a la dinámica del sólido, necesitamos resolver el problema electromagnético que genera pares y fuerzas sobre el sólido. Aplicaremos las leyes de Ohm, Faraday y Conservación de la Energía para calcular las corrientes inducidas. Seguidamente, la ley de Biot y Savart permitirá calcular el campo magnético generado por las corrientes y con este las fuerzas y momentos ejercidos sobre el imán.

Abstract

The purpose of this work is to analyze the dissipative dynamic effects that Foucault's currents have on a magnetized solid. In order to do that, a physical model is proposed in which a uniformly magnetized sphere moves over a conductive surface. Movement of the magnet is considered to have two ideal situations: rolling without sliding and sliding on the surface. Results are obtained by using computational simulation of the equations that govern the dynamics of the solid. At first, adimensional variables are used and then real values to the parameters are assigned.

Before moving on to the dynamics of the solid, we need to solve the electromagnetic problem that generates torques and forces on the solid. We make use of the Ohm, Faraday and Energy Conservation laws to calculate the induced currents. Afterwards, Biot and Savart's law allows us to calculate the magnetic field generated by the currents which apply strength and moment of strength on the magnet.

Agradecimientos	7
Resumen	9
Abstract	11
Índice	13
Índice de Figuras	15
1 El Freno Electromagnético	19
2 Frenado del Dipolo magnético puntual	23
2.1. Cálculo de la densidad de la corriente K	25
2.1.1 Dipolo con velocidad en OY y momento dipolar con orientación OX	28
2.1.2 Velocidad en dirección de OY y momento dipolar paralelo a OZ	33
2.1.3 Velocidad y momento dipolar paralelos al eje OY.	34
2.1.4 Velocidad angular y momento dipolar en todas sus componentes	36
2.2. Campo magnético B^* inducido por densidad de corriente superficial.	38
2.2.1 Velocidad paralela al eje OY	39
2.2.2 Velocidad de rotación y momento dipolar en todas sus componentes	41
3 Imán rodante con deslizamiento sobre una superficie Plana conductora	43
3.1. Ecuaciones del sólido	44
3.1.1 Adimensionalización	46
3.3. Simulaciones computacionales.	47
3.4.1 Análisis velocidad lineal	48
3.4.2 Análisis de rotación pura	61
4 Imán rodante sin deslizamiento sobre una superficie Plana conductora	67
4.1.1 Adimensionalización	68
4.1.2 Simulación computacional	70
5 Caso Práctico. Imán Rodante de Neodimio	79
5.1. Con deslizamiento	79
5.1.1 Dimensionalización	79
5.1.2 Simulación computacional	80
5.2. Sin deslizamiento	85
5.1.3 Dimensionalización	86
5.1.4 Simulación computacional	86
6 Conclusiones y Futuras líneas de Investigación	89
Referencias y Bibliografía	91

Anexo	93
Magnetización paralela al eje OZ con velocidad lineal v_y	93
Magnetización paralela al movimiento con velocidad lineal v_y	95
Momento dipolar y velocidad angular con todas sus componentes	99

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Diagrama de Freno magnético.	19
Figura 2. Ley de Faraday	20
Figura 3. Ley de Biot y Savart.	20
Figura 4. Freno magnético	22
Figura 5. Diagrama de dipolo magnético puntual.	24
Figura 6. Dipolo magnético en movimiento general.	25
Figura 7. Dipolo con velocidad paralela a eje OY y momento dipolar en dirección OX	28
Figura 8. Densidad superficial inducida por velocidad OY y momento dipolar OX $K(v_y, \mu_x, \rho, \theta)$	33
Figura 9. Dipolo con velocidad en dirección del eje OY y momento dipolar vertical	33
Figura 10. Densidad superficial inducida por velocidad OY y momento dipolar OZ $K(v_y, \mu_z, \rho, \theta)$	34
Figura 11. Dipolo con momento dipolar y velocidad paralelos a OY .	34
Figura 12. Densidad de corriente con momento dipolar y velocidad paralelos a OY $K(v_y, \mu_z, \rho, \theta)$.	35
Figura 13. Dipolo con velocidad angular y momento dipolar en todas las componentes	36
Figura 14. Densidad superficial rotación OY y momento dipolar OX . $K(\omega_y, \mu_x, \rho, \theta)$	38
Figura 15. Densidad superficial rotación OY y momento dipolar OZ . $K(\omega_y, \mu_z, \rho, \theta)$	38
Figura 16. Esfera con deslizamiento	43
Figura 17. Definición de ángulos φ y θ	47
Figura 18. Deslizamiento. Distancia de detención. Ejes cartesianos $\Delta x' - v_x'$.	49
Figura 19. Deslizamiento. Distancia de detención. Ejes cartesianos $d\Delta x' / dv_x' - v_x'$	49
Figura 20. Deslizamiento Distancia de detención. $\Delta x' - v_x'$.	50
Figura 21. Deslizamiento Distancia de detención. $\Delta t' - v_x'$.	50
Figura 22. Deslizamiento. Trayectoria. $v_x' = 2.53$	51
Figura 23. Deslizamiento. Trayectoria. $v_x' = 50$.	51
Figura 24. Deslizamiento. Distancia de detención. $\Delta x' - \omega_z' / v_x'$	52
Figura 25. Deslizamiento. Tiempo de detención. $\Delta t' - \omega_z' / v_x'$.	52
Figura 26. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_z' / v_x' = 0.24$	53
Figura 27. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_z' / v_x' = 0.58$	53

Figura 28. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_z'/v_x'=1.3$.	53
Figura 29. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_z'/v_x'=6.77$.	54
Figura 30. Deslizamiento. Distancia de detención. $\Delta x'-\omega_x'/v_x'$.	55
Figura 31. Deslizamiento. Tiempo de detención. $\Delta t'-\omega_x'/v_x'$.	55
Figura 32. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_x'/v_x'=0.09$.	55
Figura 33. Deslizamiento. Trayectoria $\omega_x'/v_x'=0.72$.	56
Figura 34. Deslizamiento. Trayectoria $\omega_x'/v_x'=1.27$.	56
Figura 35. Deslizamiento. Trayectoria $\omega_x'/v_x'=18.09$.	56
Figura 36. Deslizamiento. Distancia de detención. $\omega_y'>0 \Delta X'-\omega_y'/v_x'$.	57
Figura 37. Deslizamiento. Tiempo de detención. $\omega_y'>0 \Delta t'-\omega_y'/v_x'$.	57
Figura 38. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_y'/v_x'=0.51$.	58
Figura 39. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_y'/v_x'=1.45$.	58
Figura 40. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_y'/v_x'=5.82$.	59
Figura 41. Deslizamiento. Distancia de detención. $\omega_y'<0 \Delta X'-\omega_y'/v_x'$.	59
Figura 42. Deslizamiento. Tiempo de detención. $\omega_y'<0 \Delta t'-\omega_y'/v_x'$.	59
Figura 43. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_y'/v_x'=-1.01$.	60
Figura 44. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_y'/v_x'=-6.06$.	60
Figura 45. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_y'/v_x'=-10.1$.	61
Figura 46. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_y'/v_x'=-49.49$.	61
Figura 47. Deslizamiento. Ángulo de detención. $\Delta\phi'-\omega_z'$.	62
Figura 48. Deslizamiento. Tiempo de detención. $\Delta t'/\omega_z'$.	62
Figura 49. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_y'/v_x'=4.70$.	63
Figura 50. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_z'=18.79$.	63
Figura 51. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_z'=46.51$.	64
Figura 52. Deslizamiento. Momento dipolar. μ_z'/t' .	64
Figura 53. Deslizamiento. Evolución temporal de velocidad angular OZ. ω_z'/t' .	64
Figura 54. Deslizamiento. Ángulo girado. $\Delta\theta'-\omega_x'$.	65
Figura 55. Deslizamiento. Tiempo de detención. $\Delta t'-\omega_x'$.	65
Figura 56. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_z'=10.05$.	66
Figura 57. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_x'=50.25$.	66
Figura 58. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_x'=100$.	66
Figura 59. Esfera sin deslizamiento.	67
Figura 60. Sin deslizamiento. Distancia de detención. Ejes cartesianos. $\Delta x'-\omega_y'$.	70
Figura 61. Sin deslizamiento. Distancia de detención. Ejes cartesianos. $d\Delta x'/d\omega_y'-\omega_y'$.	70
Figura 62. Sin deslizamiento. Distancia de detención $\Delta x'-\omega_y'$.	71

Figura 63. Sin deslizamiento. Tiempo de detención $\Delta t' - \omega_y'$.	71
Figura 64. Sin deslizamiento. Trayectoria. $\omega_y' = 3.36$.	72
Figura 65. Sin deslizamiento. Trayectoria $\omega_y' = 50$.	72
Figura 66. Sin deslizamiento. Velocidad lineal $\Delta x' - \omega_z' / \omega_y'$.	73
Figura 67. Sin deslizamiento. Velocidad lineal $\Delta t' - \omega_z' / \omega_y'$.	73
Figura 68. Sin deslizamiento. Trayectoria $\omega_z' / \omega_y' = 0.73$.	74
Figura 69. Sin deslizamiento. Trayectoria $\omega_z' / \omega_y' = 1.21$.	74
Figura 70. Sin deslizamiento. Trayectoria $\omega_z' / \omega_y' = 1.93$.	75
Figura 71. Sin deslizamiento. Trayectoria $\omega_z' / \omega_y' = 7.2$.	75
Figura 72. Sin deslizamiento. Ángulo de detención. $\Delta \phi' - \omega_z'$	76
Figura 73. Sin deslizamiento. Ángulo de detención. $\Delta t' - \omega_z'$	76
Figura 74. Deslizamiento dimensional. Distancia de detención. $\Delta x - v_x$.	81
Figura 75. Deslizamiento dimensional. Tiempo de detención. $\Delta t - v_x$.	81
Figura 76. Deslizamiento dimensional. Potencia de disipación inicial. Velocidad v_x . $P_0 - v_x$	81
Figura 77. Deslizamiento dimensional. Evolución temporal potencia. Velocidad v_x . $P - t$	82
Figura 78. Deslizamiento dimensional. Distancia de detención. $\Delta x - r \omega_z / v_x$	83
Figura 79. Deslizamiento dimensional. Tiempo de detención. $\Delta t - r \omega_z / v_x$	83
Figura 80. Deslizamiento dimensional. Potencia de traslación. $P_t - t$.	83
Figura 81. Deslizamiento dimensional. Potencia de rotación. $P_r - t$.	84
Figura 82. Sin deslizamiento dimensional. Distancia de detención. $\Delta x - v_x$	86
Figura 83. Sin deslizamiento dimensional. Tiempo de detención. $\Delta t - v_x$	87
Figura 84. Sin deslizamiento dimensional. Fuerza normal. $N - t$	87
Figura 85. Sin deslizamiento dimensional. Fuerza de rozamiento. $F_r - t$	88

1 EL FRENO ELECTROMAGNÉTICO

El fenómeno de frenado electromagnético es posible gracias a las leyes físicas de Faraday, Joule y Biot-Savart.

El proceso es similar al de un freno convencional de disco. El disco en movimiento roza con las zapatas y estas ejercen una fuerza de rozamiento sobre el disco consiguiendo que se frene. Para los frenos magnéticos el equivalente a las zapatas es el imán y entre el polo sur y el norte se encuentra el disco girando. En primer lugar, el movimiento del disco hace que el flujo magnético a través de este no sea constante. Por la ley de Faraday, se induce una densidad de corriente en el disco, corrientes de Foucault, \vec{K} . El campo magnético del imán actúa sobre la corriente (sobre cargas en movimiento según la ley de Lorentz) y ejerce una fuerza que se traduce en un par oponiéndose al movimiento del disco, consiguiendo que desacelere y finalmente se detenga. También se puede enfocar desde el punto de vista de la ley de Lenz, el disco se opone al cambio de flujo magnético y surge una fuerza contraria al movimiento. Con la desaceleración del disco, la variación del flujo cada vez es menor y el proceso se repite, pero la fuerza de frenado disminuye. Es un proceso no conservativo porque la energía cinética inicial se transforma en calor, pérdidas en el cobre por el efecto Joule de las corrientes.

Tanto el freno magnético como uno convencional, tienen el inconveniente del calentamiento. Sin embargo, el magnético tiene la ventaja de que no existe un desgaste por fricción que requiera un mantenimiento constante como se da con las zapatas en los demás frenos.



Figura 1. Diagrama de Freno magnético.

Ley de Faraday

Si un campo magnético \vec{B} atraviesa una superficie \vec{S} y este campo magnético es variable o cambia la posición relativa entre el campo y la superficie, se induce una corriente eléctrica o fuerza electromotriz ε sobre dicha la superficie.

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \neq 0$$

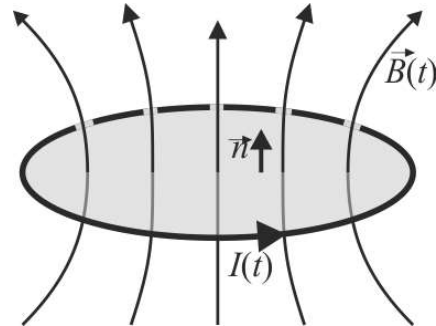


Figura 2. Ley de Faraday [1]

Ley de Ohm

Combinado con la ley de Faraday, relaciona el campo magnético generado por el imán con la densidad de corriente superficial \vec{K} inducida en la superficie conductora.[2]

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Ley de Biot-Savart

La ley de Biot-Savart establece el campo magnético que genera una corriente eléctrica.

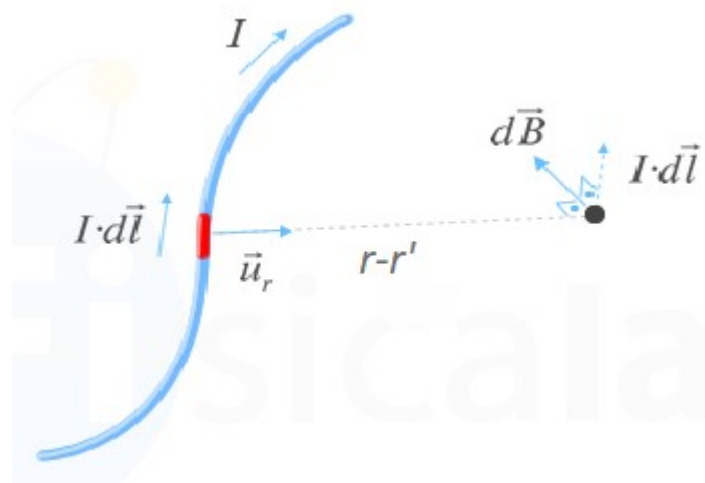


Figura 3. Ley de Biot y Savart. [3]

Esta ley podemos aplicarla a corrientes unidimensionales (como se ilustra en la figura para el caso

de un cable), bidimensionales para un plano o volumétricas en un bloque.

\vec{r} es el vector de posición del campo y \vec{r}' el de la carga eléctrica puntual.

Para el caso de una corriente lineal.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Forma más general con densidad de corriente volumétrica.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

La forma de la ecuación que nos hace falta es en dos dimensiones, donde \vec{K} es la densidad de corriente superficial.

$$\vec{B}_K = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{K} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS$$

Dos claros ejemplos en los que se aprovechan estos fenómenos físicos son el motor eléctrico y el generador, que también ponen de manifiesto que el proceso es reversible.

Si la corriente inducida no circula a través de un hilo conductor cerrado y definido como puede ser una espira en el caso del generador y en lugar de eso se inducen en un volumen de material, se forman corrientes que recirculan conocidas como corrientes de Foucault o parásitas. Normalmente es un efecto indeseable porque conlleva una pérdida de energía en forma de calor (efecto Joule) como por ejemplo ocurre en el transformador. Sin embargo, en el freno magnético se pretende disipar la energía cinética aprovechando el campo magnético generado por las corrientes de Foucault que se oponen al movimiento del rotor que se desea frenar.

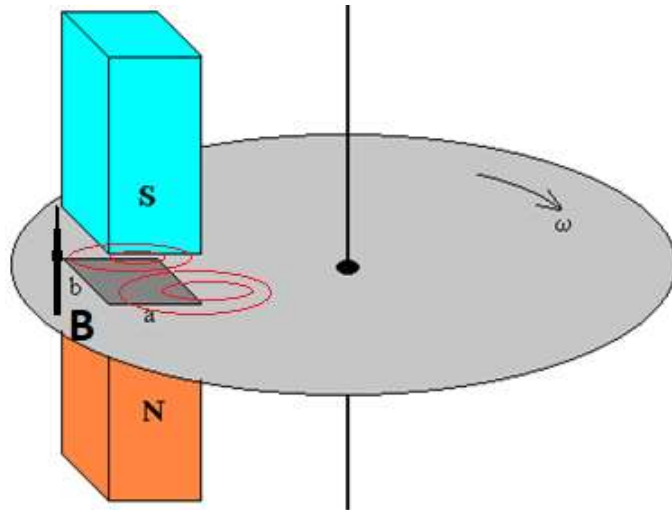


Figura 4. Freno magnético. [4]

En la figura superior se ilustra un esquema básico del freno magnético. El campo magnético atraviesa el disco en movimiento y por la variación de flujo a través de él, se inducen las corrientes parásitas (representadas como líneas curvas cerradas).

2 FRENADO DEL DIPOLO MAGNÉTICO PUNTUAL

Planteamos el problema en el que se encuentra un dipolo magnético situado sobre una placa de pequeño espesor δ e infinita superficie (idealmente de cobre para aumentar el efecto de las corrientes de Foucault). En los siguientes capítulos analizaremos la dinámica de una esfera imanada que se mueve con o sin deslizamiento sobre dicha placa, usando las ecuaciones del teorema de cantidad de movimiento y momento cinético (T.C.M y T.M.C respectivamente). Por eso, en este determinaremos el cálculo de las fuerzas y pares de fuerza sobre el dipolo, imprescindibles para resolver la dinámica del problema. Las fuerzas y pares tienen una dependencia directamente proporcional con la velocidad lineal y angular del dipolo. Las expresiones de fuerza y par calculadas para el dipolo, también son válidas para una esfera uniformemente imanada, gracias a la ley de Gauss

Este proceso es análogo al que explicamos de los frenos magnéticos, con la diferencia de que ahora el elemento móvil es el dipolo y no el conductor. El movimiento del dipolo hace que el campo magnético \vec{B}_D generado por el imán no sea estacionario en los puntos de la placa, esto supone una variación de flujo y por tanto la inducción de corrientes. La densidad de corriente induce otro campo magnético mediante la ley de Biot-Savart, \vec{B}^* . El campo magnético inducido ejerce una fuerza y un par sobre el dipolo su energía cinética. La energía cinética de la esfera, se transforma en energía térmica por el efecto Joule de las corrientes.

Definimos el campo magnético generado por el dipolo puntual como \vec{B}_D .

Llamamos $\Delta\vec{r}$ al vector que va desde la posición de la carga eléctrica hasta el punto del campo magnético.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$$

$$\vec{B}_D = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{\mu} \cdot \Delta\vec{r})\Delta\vec{r} - |\Delta\vec{r}|^2\vec{\mu}}{|\Delta\vec{r}|^5} \quad [5]$$

Las fuerzas y pares dependen de las variables cinemáticas del problema. Esto podemos entenderlo pensando en la ley de Lorentz, las corrientes inducidas son cargas eléctricas en movimiento y el campo magnético hace una fuerza sobre ellas que depende de la velocidad relativa entre el dipolo y dichas

cargas. Por la tercera ley de Newton, la fuerza ejercida por el dipolo sobre las cargas, tiene el mismo módulo, dirección y sentido opuesto que la fuerza de las cargas sobre el dipolo, equivalentes a una fuerza y un par aplicados sobre su centro de gravedad. [5]

$$\vec{M}_G = \vec{M}_G(\vec{\omega}, \vec{v}) = \vec{\mu} \times \vec{B}^*$$

$$\vec{F}_m = \vec{F}_m(\vec{\omega}, \vec{v}) = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B}^*)$$

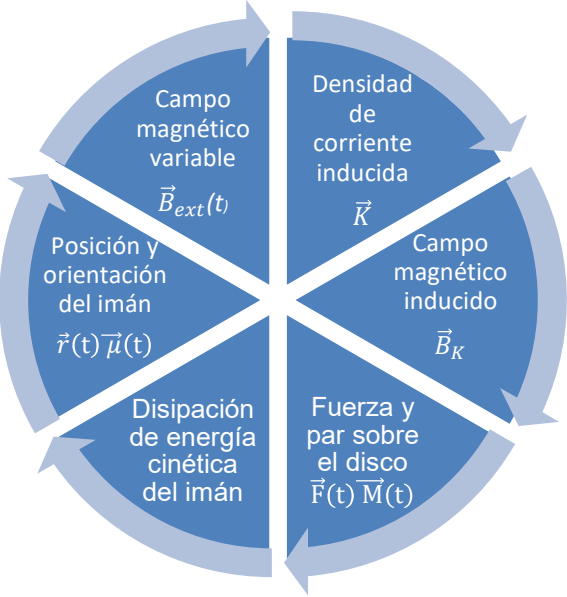


Figura 5. Diagrama de dipolo magnético puntual.

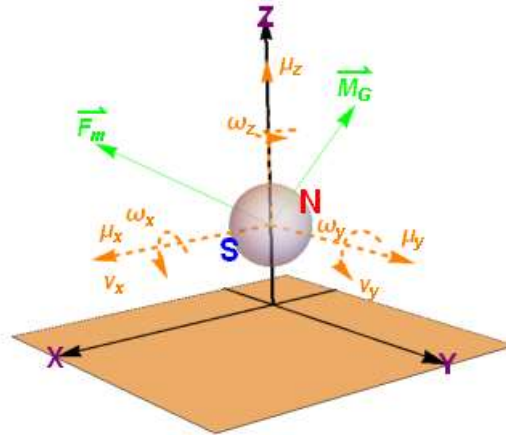


Figura 6. Dipolo magnético en movimiento general.

2.1. Cálculo de la densidad de la corriente K

Usaremos las leyes de Faraday, Ohm y de conservación de la carga para calcular la densidad de corriente inducida en la placa.

Ley de Faraday

En el capítulo anterior expresamos la ley de Faraday en su forma integral, pero para calcular la densidad de corriente superficial, nos interesa emplear la forma diferencial.

$$(1) \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}_D}{\partial t}$$

Ley de Ohm

La más famosa de sus formulaciones es la que relaciona magnitudes macroscópicas, conocida como la forma clásica, relaciona voltaje con intensidad y resistencia en un circuito eléctrico.

$$V = IR$$

Partiendo de esta fórmula clásica, podemos pasar a magnitudes vectoriales que podamos en el sistema de ecuaciones.

$$(2) \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Ley de conservación de la carga

En un sistema cerrado que no intercambia carga con el entorno, la suma total de las cargas de este, debe ser constante. Si en un sistema la carga varía, es porque existe un flujo con el exterior.

Esta ley puede formularse en su forma integral.

$$\frac{dQ}{dt} + \oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

También en forma diferencial, la que usaremos.

$$(3) \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Para abordar el problema de una forma más sencilla, es necesario asumir las siguientes hipótesis:

1. La placa no acumula carga

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

2. El espesor de la placa es muy pequeño, y consideraremos que se trata de un plano ideal.

$$\vec{K} = \delta \vec{J} = \delta \sigma \vec{E}$$

Sustituyendo la ecuación (2) en la ecuación (1) y usando las hipótesis planteadas obtenemos una relación directa entre el campo magnético del dipolo y la densidad de corriente.

$$\nabla \times \vec{K} = \left(-\delta \sigma \frac{\partial \vec{B}_D}{\partial t} \cdot \vec{k} \right) \vec{k}$$
$$\nabla \cdot \vec{K} = 0$$

Para una mayor facilidad a la hora de resolver las ecuaciones, definiremos la densidad superficial de

corriente en coordenadas polares.

$$\vec{K} = K_\rho \vec{u}_\rho + K_\theta \vec{u}_\theta$$

A continuación, desarrollamos el rotacional y la divergencia.

$$\nabla \times \vec{K} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{u}_\rho & \rho \vec{u}_\theta & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ K_\rho & \rho K_\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(\rho K_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial K_\rho}{\partial \theta} \right) \frac{1}{\rho} \vec{k}$$

La densidad de corriente superficial \vec{K} no depende de la coordenada z por la hipótesis 2.

$$\frac{\partial K_\rho}{\partial z} = \frac{\partial(\rho K_\theta)}{\partial z} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{K} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho K_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(K_\theta)}{\partial \theta}$$

Finalmente, obtenemos el sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales que determinan \vec{K}

$$(4) \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho K_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial(K_\theta)}{\partial \theta} \right) = 0$$

$$(5) \left(\frac{\partial(\rho K_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial K_\rho}{\partial \theta} \right) \frac{1}{\rho} = -\delta\sigma \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

En los siguientes apartados, calcularemos \vec{K} para algunos casos particulares de orientación del dipolo y velocidad. Tendremos en cuenta que es posible superponer la densidad de corriente calculada con distintas combinaciones de las componentes del momento magnético y la velocidad. En cada uno de los casos, consideramos las componentes de velocidad y momento dipolar constantes en el tiempo.

2.1.1 Dipolo con velocidad en OY y momento dipolar con orientación OX

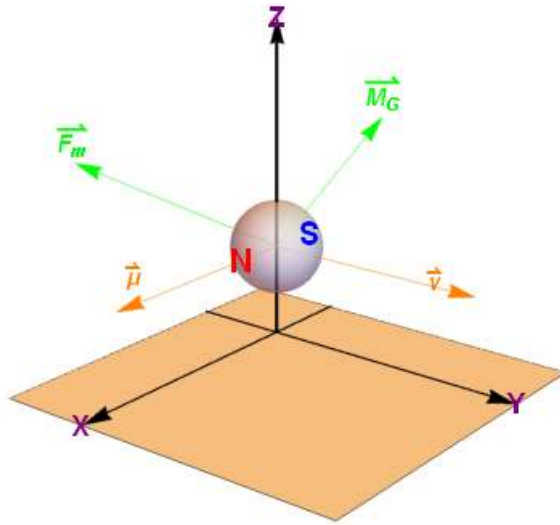


Figura 7. Dipolo con velocidad paralela a eje OY y momento dipolar en dirección OX

Particularizamos el campo \vec{B}_D para este caso:

$$\vec{r}_p = x_p \vec{i} + y_p \vec{j}$$

$$\vec{r}_d = x_d \vec{i} + y_d \vec{j} + z_d \vec{k}$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_d = (\Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} - h \vec{k})$$

$$\Delta z = -h$$

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 = \mu_x \vec{i}$$

\vec{r}_d va desde el origen hasta el dipolo situado a una altura h . Para facilitar el cálculo, fijamos la referencia de $\{x, y, z\}$ en las coordenadas $\{x_d, y_d, z_d\} = \{0, 0, h\}$.

\vec{r}_p va desde el origen hasta un punto genérico de la superficie de la placa.

$\vec{\mu}_1$ es el momento dipolar

$$\vec{B}_D = \vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mu_x \Delta x \Delta \vec{r} - |\Delta \vec{r}|^2 \mu_x \vec{i}}{|\Delta \vec{r}|^5}$$

$$B_{1z} = \vec{B}_1 \cdot \vec{k} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mu_x \Delta x h}{|\Delta \vec{r}|^5} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mu_x \Delta x h}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Por la regla de la cadena:

$$\frac{\partial B_{1z}}{\partial \Delta t} = \frac{\partial B_{1z}}{\partial \Delta y} \frac{\partial \Delta y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial y_d}{\partial t} = v_y(t)$$

$$\frac{\partial y_p}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \Delta y}{\partial t} = \frac{\partial (y_p - y_d)}{\partial t} = -v_y(t)$$

$$\frac{\partial B_{1z}}{\partial \Delta t} = -v_y \frac{15\mu_0\mu_x h}{4\pi} \frac{\Delta y \Delta x}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + h^2)^{7/2}}$$

Para introducirlo en la ecuación (4) debemos hacer el cambio a coordenadas polares:

$$\Delta y = \rho \operatorname{sen}(\theta)$$

$$\Delta x = \rho \operatorname{cos}(\theta)$$

$$\frac{\partial B_{1z}}{\partial \Delta t} = -v_y \frac{15h\mu_0\mu_x \rho^2 \operatorname{sen}(2\theta)}{8\pi (\rho^2 + h^2)^{7/2}}$$

Para simplificar la ecuación (5) definimos $c_1 \neq c_1(\rho, \theta)$ y

$$c_1 = \delta \sigma v_y \frac{15h\mu_0\mu_x}{8\pi}$$

$$f_1(\rho) = \frac{\rho^2}{(\rho^2 + h^2)^{7/2}}$$

$$\left(\frac{\partial(\rho \cdot K_{1\rho})}{\partial\rho} + \frac{\partial K_{1\theta}}{\partial\theta}\right)\frac{1}{\rho} = 0$$

$$\left(\frac{\partial(\rho \cdot K_{1\theta})}{\partial\rho} - \frac{\partial K_{1\rho}}{\partial\theta}\right)\frac{1}{\rho} = c_1 f_1 \text{sen}(2\theta)$$

Para abordar el sistema de ecuaciones buscaremos una solución de la siguiente forma

$$K_{1\rho} = A_{1\rho}(\rho) \cos(2\theta)$$

$$K_{1\theta} = A_{1\theta}(\rho) \text{sen}(2\theta)$$

$$\left(\frac{\partial(\rho A_{1\rho})}{\partial\rho} \cos(2\theta) + 2A_{1\theta} \cos(2\theta)\right)\frac{1}{\rho} = 0$$

$$\left(\frac{\partial(\rho A_{1\theta})}{\partial\rho} \text{sen}(2\theta) + 2A_{1\rho} \text{sen}(2\theta)\right)\frac{1}{\rho} = c_1 f_1 \text{sen}(2\theta)$$

$$\frac{\partial(\rho A_{1\rho})}{\partial\rho} + 2A_{1\theta} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho A_{1\theta})}{\partial\rho} + 2A_{1\rho} = c_1 \rho f_1$$

Podemos obtener dos ecuaciones desacopladas sumando y restando estas ecuaciones y haciendo un cambio de variable

$$A_{1s} = A_{1\rho} + A_{1\theta}$$

$$A_{1d} = A_{1\rho} - A_{1\theta}$$

Ecuación suma

Tras sumar conseguimos reducir un sistema de ecuaciones a una ecuación. Muchas de las soluciones homogéneas se repiten para distintas componentes de velocidad y momento dipolar, únicamente depende de la función trigonométrica del campo magnético.

$$\frac{\partial(\rho A_{1s})}{\partial\rho} + 2A_{1s} = \rho A_{1s}' + 3A_{1s} = c_1 \rho f_1$$

$$\rho A_{1sh}' + 3A_{1sh} = 0 \rightarrow A_{1sh} = c_{1As} \rho^{-3}$$

$$A_{1sp} = U_{1As} \rho^{-3}$$

$$\rho(U_{1As}' \rho^{-4} - 3U_{1As} \rho^{-4}) + 3U_{1As} \rho^{-3} = U_{1As}' \rho^{-2} = c_1 \rho f_1$$

$$U_{1As} = c_1 \int \frac{\rho^5}{(\rho^2 + h^2)^{7/2}} d\rho = -c_1 \frac{8h^4 + 20h^2\rho^2 + 15\rho^4}{15(\rho^2 + h^2)^{5/2}}$$

$$A_{1sp} = -c_1 \frac{8h^4 + 20h^2\rho^2 + 15\rho^4}{15\rho^3(\rho^2 + h^2)^{7/2}}$$

$$A_{1s} = A_{1sh} + A_{1sp} = \rho^{-3} \left(c_{1As} - c_1 \frac{8h^4 + 20h^2\rho^2 + 15\rho^4}{15(\rho^2 + h^2)^{5/2}} \right)$$

Debemos tener en cuenta las siguientes condiciones impuestas sobre la densidad de corriente superficial:

Tiene que tener un valor finito en toda la superficie, en el origen también. $\lim_{\rho \rightarrow 0} \vec{K}_1(\rho, \theta) \neq \infty$

A una distancia infinita del dipolo, la corriente inducida debe ser nula $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \vec{K}_1(\rho, \theta) = 0$

La segunda condición se cumple automáticamente y es la primera la que determina el valor que debe tomar c_{1As}

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \vec{K}_1(\rho, \theta) \neq \infty \rightarrow \infty \neq \lim_{\rho \rightarrow 0} A_{1s}(\rho) = \infty \left(c_{1A} - c_1 \frac{8}{15h} \right) \rightarrow c_{1As} = c_1 \frac{8}{15h}$$

Ecuación diferencia

Restando logramos quedarnos con una ecuación que contenga la otra incógnita. Las soluciones homogéneas vuelven a depender de la función trigonométrica del campo magnético y también se repiten para otras componentes de velocidad y momento dipolar.

$$\frac{\partial(\rho A_{1d})}{\partial \rho} - 2A_{1d} = \rho A_{1d}' - A_{1d} = -c_1 \rho \cdot f_1$$

$$\rho A_{1dh}' - A_{1dh} = 0 \rightarrow A_{1dh} = c_{1Ad} \rho$$

$$A_{1dp} = U_{1As} \rho$$

$$\rho(U_{1As}' \rho + U_{1As}) - U_{1As} \rho = U_{1As}' \rho^2 = -c_1 \rho f_1$$

$$U_{1As} = -c_1 \int \frac{\rho}{(\rho^2 + h^2)^{7/2}} d\rho = c_1 \frac{1}{5(\rho^2 + h^2)^{5/2}}$$

$$A_{1dp} = c_1 \frac{\rho}{5(\rho^2 + h^2)^{7/2}}$$

$$A_{1d} = \rho \left(c_{1Ad} + \frac{c_1}{5(\rho^2 + h^2)^{5/2}} \right)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} A_{1d}(\rho) = 0 \rightarrow c_{1Ad} = 0$$

Deshacemos los cambios:

$$A_{1\rho} = \frac{1}{2}(A_{1d} + A_{1s}) = c_1 \left[\frac{\rho}{10(\rho^2 + h^2)^{5/2}} + \frac{1}{30\rho^3} \left(\frac{8}{h} - \frac{8h^4 + 20h^2\rho^2 + 15\rho^4}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}} \right) \right]$$

$$A_{1\theta} = \frac{1}{2}(A_{1s} - A_{1d}) = c_1 \left[\frac{1}{30\rho^3} \left(\frac{8}{h} - \frac{8h^4 + 20h^2\rho^2 + 15\rho^4}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}} \right) - \frac{\rho}{10(\rho^2 + h^2)^{5/2}} \right]$$

$$K_{1\rho} = \delta\sigma v_y \frac{3h\mu_0\mu_x}{16\pi} \left[\frac{1}{3\rho^3} \left(\frac{8}{h} - \frac{8h^4 + 20h^2\rho^2 + 15\rho^4}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}} + \frac{\rho}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}} \right) \right] \cos(2\theta)$$

$$K_{1\theta} = \delta\sigma v_y \frac{3h\mu_0\mu_x}{16\pi} \left[\frac{1}{3\rho^3} \left(\frac{8}{h} - \frac{8h^4 + 20h^2\rho^2 + 15\rho^4}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}} \right) - \frac{\rho}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}} \right] \sin(2\theta)$$

Dando el valor unidad a los parámetros del sistema, representamos en el software Wolfram Mathematica. La representación se ha hecho usando la base cartesiana igual que se harán las que van más adelante, para eso tenemos que hacer el siguiente cambio:

$$\vec{u}_\rho = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta = \cos(\theta)\vec{j} - \sin(\theta)\vec{i}$$

$$\vec{K}_1 = (\cos(\theta)K_{1\rho} - \sin(\theta)K_{1\theta})\vec{i} + (\sin(\theta)K_{1\rho} + \cos(\theta)K_{1\theta})\vec{j}$$

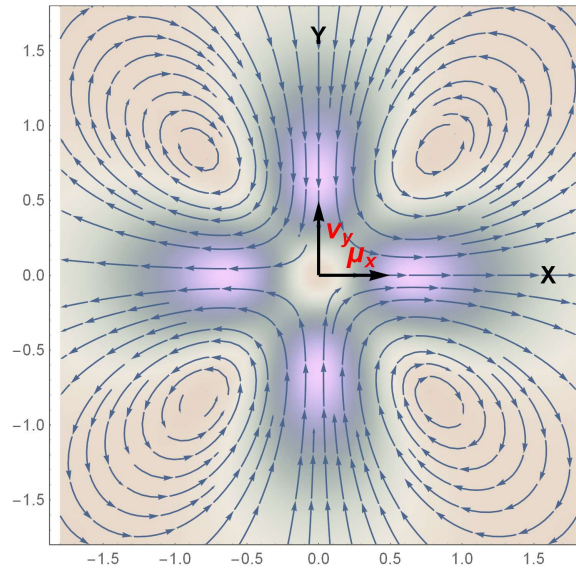


Figura 8. Densidad superficial inducida por velocidad OY y momento dipolar OX $\mathbf{K}(v_y, \mu_x, \rho, \theta)$

Vemos que hay un punto de silla situado debajo del dipolo y centros en cada uno de los cuadrantes, la máxima intensidad de corrientes se produce a lo largo de los ejes cartesianos.

2.1.2 Velocidad en dirección de OY y momento dipolar paralelo a OZ

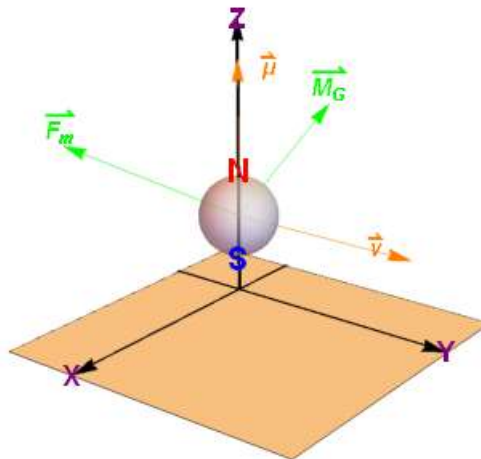


Figura 9. Dipolo con velocidad en dirección del eje OY y momento dipolar vertical

Procediendo de la misma forma que en el apartado anterior, volvemos a calcular la densidad de corriente inducida, esta vez el dipolo está orientado verticalmente. El desarrollo de las ecuaciones se encuentra en el Anexo.

$$K_{2\rho} = \delta\sigma v_y \frac{3\mu_0\mu}{8\pi} \left[\frac{2}{3h^3} - \frac{2h^2 - \rho^2}{3(\rho^2 + h^2)^{5/2}} - \frac{\rho^2}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}} \right] \cos(\theta)$$

$$K_{2\theta} = \delta\sigma v_y \frac{3\mu_0\mu}{8\pi} \left[\frac{2h^2 - \rho^2}{3(\rho^2 + h^2)^{5/2}} - \frac{2}{3h^3} - \frac{\rho^2}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}} \right] \sin(\theta)$$

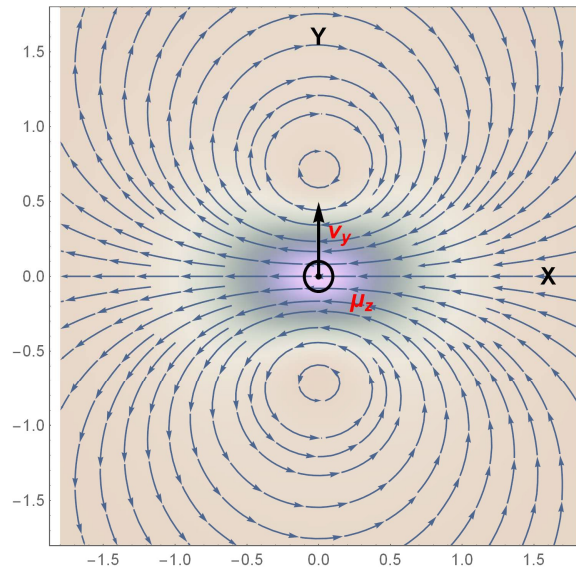


Figura 10. Densidad superficial inducida por velocidad OY y momento dipolar OZ $K(v_y, \mu_z, \rho, \theta)$

En esta ocasión la máxima intensidad se produce a la distancia mínima del dipolo, justo debajo de él.

2.1.3 Velocidad y momento dipolar paralelos al eje OY .

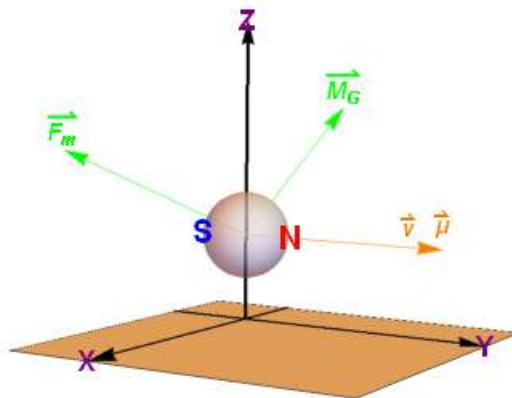


Figura 11. Dipolo con momento dipolar y velocidad paralelos a OY .

Por último, la componente y del momento dipolar completa la densidad de corriente en función de v_y . El desarrollo de las ecuaciones también se encuentra en el Anexo.

$$K_{3\theta} = \delta\sigma v_y \frac{3\mu_0\mu h}{4\pi} \left[\frac{\rho}{4(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{\rho^3} \left(\frac{8h^4 + 20h^2\rho^2 + 15\rho^4}{12(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{3h} \right) \cos(2\theta) - \frac{\rho}{2(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \right]$$

$$K_{3\rho} = \delta\sigma v_y \frac{3\mu_0\mu h}{4\pi} \left[\frac{\rho}{4(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{\rho^3} \left(\frac{2}{3h} - \frac{8h^4 + 20h^2\rho^2 + 15\rho^4}{12(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \right) \right] \sin(2\theta)$$

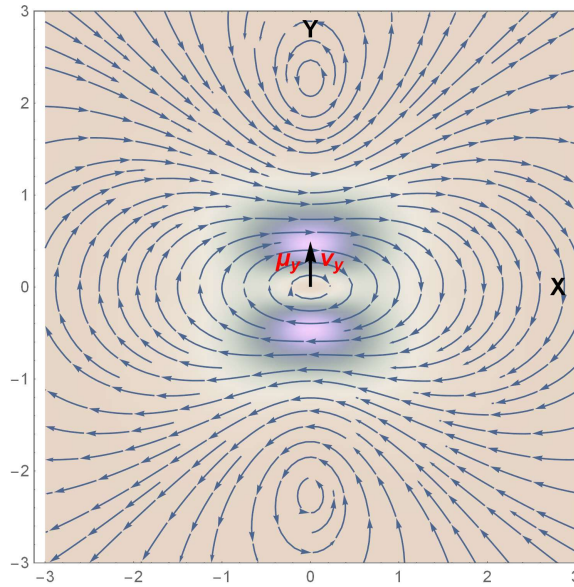


Figura 12. Densidad de corriente con momento dipolar y velocidad paralelos a OY $K(v_y, \mu_z, \rho, \theta)$.

2.1.4 Velocidad angular y momento dipolar en todas sus componentes

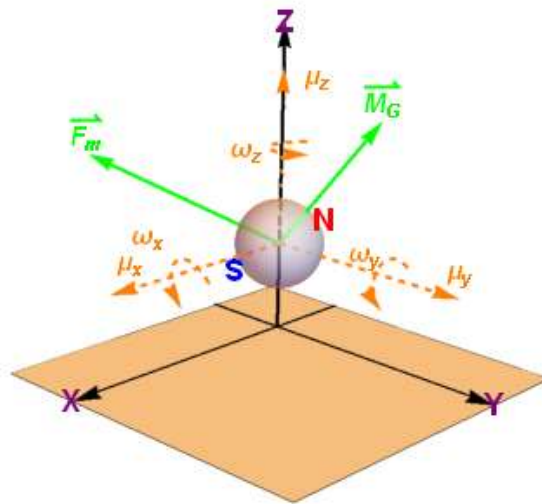


Figura 13. Dipolo con velocidad angular y momento dipolar en todas las componentes

El cálculo de las corrientes inducidas causado por la velocidad angular $\vec{\omega}$ es más sencillo que el que hemos visto en los apartados anteriores generado por una velocidad lineal. Esto ocurre gracias a que el vector de posición \vec{r} se trata como constante en el tiempo y únicamente varía el momento dipolar $\vec{\mu}$. Aprovechando que es más simple y apoyándonos en la herramienta de cálculo Wolfram Mathematica, en este apartado vamos a calcular un caso más general con las tres componentes del momento dipolar y de la velocidad angular.

$$\frac{d\vec{B}_\omega}{dt} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3 \left(\frac{d\vec{\mu}}{dt} \cdot \Delta\vec{r} \right) \Delta\vec{r} - |\Delta\vec{r}|^2 \frac{d\vec{\mu}}{dt}}{|\Delta\vec{r}|^5}$$

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \mu_x & \mu_y & \mu_z \end{vmatrix} = (\omega_y \mu_z - \omega_z \mu_y) \vec{i} + (\omega_z \mu_x - \omega_x \mu_z) \vec{j} + (\omega_x \mu_y - \omega_y \mu_x) \vec{k}$$

Sustituimos $d\vec{\mu}/dt$ y $\Delta\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Posteriormente hacemos el cambio de variable $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta)$, $z = -h$ orientado a la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{B}_\omega}{dt} \vec{k} &= \frac{\mu_0}{4\pi(h^2 + \rho^2)^5} [(h^4 + \rho^4 + h^2(-3 + 2\rho^2))(\mu_y\omega_x - \omega_y\mu_x) \\ &\quad + 3h\rho(\omega_y\mu_z - \omega_z\mu_y) \cos(\theta) - 3h\rho(\omega_z\mu_x - \omega_x\mu_z) \sin(\theta)] \\ \left(\frac{\partial(\rho K_{\omega\rho})}{\partial\rho} + \frac{\partial K_{4\theta}}{\partial\theta}\right) \frac{1}{\rho} &= 0 \\ \left(\frac{\partial(\rho K_{\omega\theta})}{\partial\rho} - \frac{\partial K_{\omega\rho}}{\partial\theta}\right) \frac{1}{\rho} &= c_{\omega 1} f_{\omega 1}(\rho) + c_{\omega 2} f_{\omega 2}(\rho) \cos(\theta) + c_{\omega 3} f_{\omega 3}(\rho) \sin(\theta) = -\delta\sigma \frac{d\vec{B}_\omega}{dt} \vec{k} \end{aligned}$$

Igual que hemos estado haciendo antes, desglosamos el sistema en varios sistemas para facilitar la resolución. A continuación, definimos las constantes y funciones dependientes de ρ .

$$c_{\omega 1} = \frac{\delta\sigma\mu_0}{4\pi} (\omega_x\mu_y - \omega_y\mu_x)$$

$$f_{\omega 1}(\rho) = \frac{\rho^2 - 2h^2}{(h^2 + \rho^2)^{5/2}}$$

$$c_{\omega 2} = \frac{3\delta\sigma\mu_0 h}{4\pi} (\omega_y\mu_z - \omega_z\mu_y)$$

$$f_{\omega 2}(\rho) = \frac{\rho}{(h^2 + \rho^2)^{5/2}}$$

$$c_{\omega 3} = \frac{3\delta\sigma\mu_0 h}{4\pi} (\omega_z\mu_x - \omega_x\mu_z)$$

$$f_{\omega 3}(\rho) = \frac{\rho}{(h^2 + \rho^2)^{5/2}}$$

$$K_{\omega\rho} = K_{\omega 1\rho} + K_{\omega 2\rho} + K_{\omega 3\rho}$$

Llegados a este punto la forma de resolver es igual que la que mostramos anteriormente solo que en este caso dividimos en tres sistemas y finalmente sumamos las ecuaciones de cada uno de ellos. Por eso el desarrollo de las ecuaciones se incluirá en el Anexo.

Sumando y simplificando las soluciones de los tres sistemas obtenemos $K_{\omega\rho}$ y $K_{\omega\theta}$, toda la densidad de corriente debida a la rotación del dipolo.

$$K_{\omega\rho} = \frac{\delta\sigma\mu_0(h - \sqrt{h^2 + \rho^2})}{4\pi\rho^2\sqrt{h^2 + \rho^2}} \left((\omega_x\mu_z - \omega_z\mu_x) \cos(\theta) + (\omega_y\mu_z - \omega_z\mu_y) \sin(\theta) \right)$$

$$\begin{aligned} K_{\omega\theta} &= \frac{\delta\sigma h\mu_0 \left(\rho^3(\omega_y\mu_x - \omega_x\mu_y) + (h^2\sqrt{h^2 + \rho^2} + \rho^2\sqrt{h^2 + \rho^2} - h^3 - 2h\rho^2) \right)}{4\pi\rho^2(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \left((\omega_y\mu_z \right. \\ &\quad \left. - \omega_z\mu_y) \cos(\theta) + (\omega_z\mu_x - \omega_x\mu_z) \sin(\theta) \right) \end{aligned}$$

Si representamos \vec{K} con una sola componente de velocidad y otra de momento dipolar, surgen únicamente dos formas entre las ocho posibles combinaciones.

Cuando el eje de rotación y el momento dipolar se encuentran en el plano de la superficie de cobre, la densidad de corriente circula alrededor de un centro situado bajo el dipolo. Sin embargo, en cualquiera de los casos en que el eje de rotación o el momento dipolar no se contengan en el plano del conductor, se producen dos centros entre los cuales la densidad de corriente es máxima, bajo el dipolo. Para el resto de las combinaciones posibles lo único que cambia es el sentido del campo vectorial o se intercambian las componentes x e y .

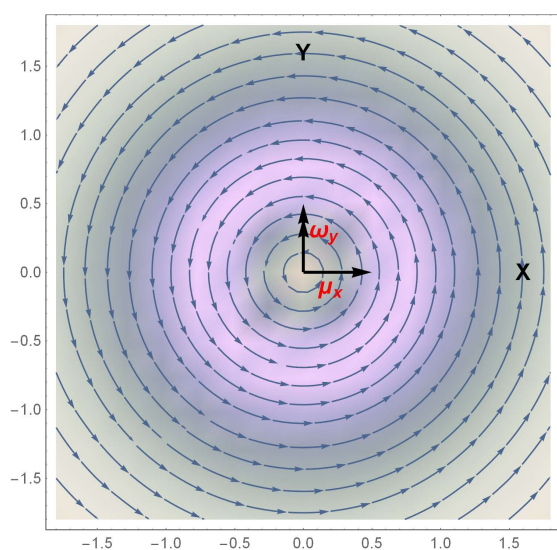


Figura 14. Densidad superficial rotación OY y momento dipolar OX . $K(\omega_y, \mu_x, \rho, \theta)$

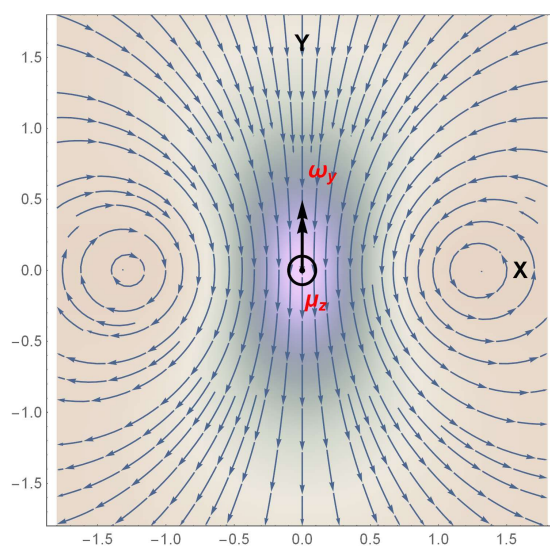


Figura 15. Densidad superficial rotación OY y momento dipolar OZ . $K(\omega_y, \mu_z, \rho, \theta)$

Las corrientes inducidas que se representan en las figuras superiores, se alternarían una con la otra a lo largo del tiempo. La rotación alrededor de OY varía el momento dipolar en el plano $OX-OZ$.

2.2. Campo magnético B^* inducido por densidad de corriente superficial.

En este apartado aplicaremos la ley de Biot y Savart para determinar el campo \vec{B}^* que no debemos

confundir con el campo \vec{B}_D generado por el dipolo. Continuamos el cálculo para los casos mostrados anteriormente.

Ahora el vector de posición incremental es de la misma dirección y sentido opuesto que el que empleábamos antes, $\Delta\vec{r}^*$ va desde un punto genérico del plano al dipolo.

$$\Delta\vec{r}^* = -\Delta\vec{r} = \vec{r}_d - \vec{r}_p = (x - \rho \cos(\theta))\vec{i} + (y - \rho \sin(\theta))\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{r}_d = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{r}_p = \rho \cos(\theta)\vec{i} + \rho \sin(\theta)\vec{j}$$

\vec{r}_d lo expresamos en coordenadas cartesianas porque será necesario hacer derivadas parciales respecto a estas coordenadas. Sin embargo, \vec{r}_p lo ponemos en forma polar porque lo integraremos en toda la superficie del plano es más sencillo en esta base.

Así calculamos el campo magnético para unas coordenadas $\{x, y, z\}$. Si nuestro propósito es el de calcular el par de fuerza, podemos fijar la referencia en dichas coordenadas e integrar en $\{0,0,0\}$. No obstante, no es posible que hagamos dicha sustitución para calcular la fuerza magnética porque depende de la derivada en posición.

Deberemos aplicar la ley de Biot y Savart en dos dimensiones:

$$\vec{B}^* = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j} \times \Delta\vec{r}^*}{|\Delta\vec{r}^*|^3} dV$$

Sustituimos \vec{j} y dV

$$\vec{K} = \vec{j}\delta \quad dV = d\rho d\theta\delta$$

$$\vec{B}^* = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \frac{\vec{K} \times \Delta\vec{r}^*}{|\Delta\vec{r}^*|^3} \rho d\rho d\theta$$

2.2.1 Velocidad paralela al eje OY

Esta es la densidad de corriente inducida para las tres componentes del momento cinético y velocidad del dipolo $\vec{v} = v_y$.

$$\vec{K}_{v_y}(v_y, \mu_x, \mu_y, \mu_z) = K_\rho \vec{u}_\rho + K_\theta \vec{u}_\theta$$

$$K_{\rho v_y} = \frac{\mu_0 \delta \sigma v_y}{4\pi(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \left[-\mu_0 \rho^3 \cos(\theta) \right. \\ \left. + \left(2h^2 \sqrt{h^2 + \rho^2} + 2\rho^2 \sqrt{h^2 + \rho^2} \right) (\mu_x \cos(2\theta) + \mu_y \sin(2\theta)) \right]$$

$$K_{\theta v_y} = \frac{\mu_0 \delta \sigma v_y}{8\pi \rho^3 (h^2 + \rho^2)^{5/2}} \left(-3h\mu_y \rho^4 \right. \\ \left. + \mu_y \left(4h^5 + 10h^3 \rho^2 + 9h\rho^4 - 4h^4 \sqrt{h^2 + \rho^2} - 8h^2 \rho^2 \sqrt{h^2 + \rho^2} \right. \right. \\ \left. \left. - 4\rho^4 \sqrt{h^2 + \rho^2} \right) \cos(2\theta) + 2\mu_z \rho^3 (h^2 - 2\rho^2) \sin(\theta) \right. \\ \left. + \mu_x \left(-4h^5 - 10h^3 \rho^2 - 9h\rho^4 + 4h^4 \sqrt{h^2 + \rho^2} + 8h^2 \rho^2 \sqrt{h^2 + \rho^2} \right. \right. \\ \left. \left. + 4\rho^4 \sqrt{h^2 + \rho^2} \right) \sin(2\theta) \right)$$

Haciendo el cambio a la base cartesiana:

$$\vec{u}_\rho = \cos(\theta) \vec{i} + \sin(\theta) \vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta = \cos(\theta) \vec{j} - \sin(\theta) \vec{i}$$

$$\vec{K}_{v_y} = (\cos(\theta)K_\rho - \sin(\theta)K_\theta) \vec{i} + (\sin(\theta)K_\rho + \cos(\theta)K_\theta) \vec{j}$$

Sustituyendo las coordenadas $\{x,y,z\}$ por $\{0,0,h\}$ calculamos el campo magnético en el punto de referencia donde suponemos que se encuentra el dipolo.

$$\vec{B}_{v_y}^*|_{000} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \left(\frac{\vec{K}_{v_y} \times \Delta \vec{r}^*}{|\Delta \vec{r}^*|^3} \right)_{000} \rho d\rho d\theta = \frac{\delta \mu_0^2 \sigma v_y}{64h^3 \pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_z \\ \mu_y \end{pmatrix}$$

Para simplificar el cálculo de la integral, podemos hacer nulas todas las funciones de tipo $\cos(n\theta)$ y $\sin(n\theta)$ del integrando. Sabemos que entre los límites 0 y 2π su resultado es nulo.

2.2.1.1 Momento de fuerza sobre el dipolo

Después de haber calculado el campo magnético creado por las corrientes de Foucault, resulta muy sencillo determinar el momento en el dipolo.

$$\vec{M}_{Gv_y} = \vec{\mu} \times \vec{B}_{v_y}^* = \frac{\mu_0^2 \delta \sigma v_y}{64\pi h^3} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \mu_x & \mu_y & \mu_z \\ 0 & \mu_z & -\mu_y \end{vmatrix} = \frac{\mu_0^2 \delta \sigma v_y}{64\pi h^3} \begin{pmatrix} -\mu_y^2 - \mu_z^2 \\ \mu_x \mu_y \\ \mu_x \mu_z \end{pmatrix}$$

2.2.1.2 Fuerza sobre el dipolo

Si queremos calcular la fuerza no podemos usar el campo en un punto dado porque antes tenemos que derivarlo en posición.

$$\vec{F}_{mv_y} = \frac{\partial \vec{B}_{v_y}^*}{\partial x} \mu_x + \frac{\partial \vec{B}_{v_y}^*}{\partial z} \mu_y + \frac{\partial \vec{B}_{v_y}^*}{\partial z} \mu_z = \frac{3\mu_0^2 \delta \sigma v_y}{512\pi h^4} \begin{pmatrix} -2\mu_x \mu_y \\ -\mu_x^2 - 3\mu_y^2 - \mu_z^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, no es necesario que derivemos antes de integrar porque son variables diferentes. La integración se hace en toda la superficie del plano ($\{\rho, \theta\}$) pero se deriva respecto a la posición del dipolo ($\{x, y, z\}$).

$$\frac{\partial \vec{B}_{v_y}^*}{\partial x} \Big|_{000} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\vec{K}_{v_y} \times \Delta \vec{r}^*}{|\Delta \vec{r}^*|^3} \right) \rho d\rho d\theta = \frac{3\mu_0^2 \delta \sigma v_y}{512\pi h^4} \begin{pmatrix} -\mu_y \\ -\mu_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{B}_{v_y}^*}{\partial y} \Big|_{000} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\vec{K}_{v_y} \times \Delta \vec{r}^*}{|\Delta \vec{r}^*|^3} \right) \rho d\rho d\theta = \frac{3\mu_0^2 \delta \sigma v_y}{512\pi h^4} \begin{pmatrix} -\mu_x \\ -3\mu_y \\ -4\mu_z \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{B}_{v_y}^*}{\partial z} \Big|_{000} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\vec{K}_{\omega} \times \Delta \vec{r}^*}{|\Delta \vec{r}^*|^3} \right) \rho d\rho d\theta = \frac{3\mu_0^2 \delta \sigma v_y}{512\pi h^4} \begin{pmatrix} 0 \\ -4\mu_z \\ 4\mu_y \end{pmatrix}$$

2.2.2 Velocidad de rotación y momento dipolar en todas sus componentes

Los cálculos realizados en el apartado anterior los repetimos partiendo de la densidad de corriente $\vec{K}_{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z, \mu_x, \mu_y, \mu_z)$

$$\vec{K}_{\omega} = (\cos(\theta) K_{\omega\rho} - \sin(\theta) K_{\omega\theta}) \vec{i} + (\sin(\theta) K_{\omega\rho} + \cos(\theta) K_{\omega\theta}) \vec{j}$$

En el apartado [2.1.4] calculamos $K_{\omega\theta}$ y $K_{\omega\rho}$

$$\vec{B}_{\omega}^* \Big|_{000} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \left(\frac{\vec{K}_{\omega} \times \Delta \vec{r}^*}{|\Delta \vec{r}^*|^3} \right) \rho d\rho d\theta = \frac{\delta \mu_0^2 \sigma}{64h^2\pi} \begin{pmatrix} \omega_z \mu_y - \omega_y \mu_z \\ \omega_x \mu_z - \omega_z \mu_x \\ 2(\omega_y \mu_x - \omega_x \mu_y) \end{pmatrix}$$

2.2.2.1 Momento de fuerza sobre el dipolo

$$\begin{aligned}\vec{M}_{G\omega} &= \vec{\mu} \times \vec{B}_\omega^* = \frac{\delta\mu_0^2\sigma}{64h^2\pi} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \mu_x & \mu_y & \mu_z \\ \omega_z\mu_y - \omega_y\mu_z & \omega_x\mu_z - \omega_z\mu_x & 2(\omega_y\mu_x - \omega_x\mu_y) \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\delta\mu_0^2\sigma}{64h^2\pi} \begin{pmatrix} -2\mu_y^2 - \mu_z^2 & 2\mu_x\mu_y & \mu_x\mu_z \\ 2\mu_x\mu_y & -2\mu_x^2 - \mu_z^2 & \mu_y\mu_z \\ \mu_x\mu_z & \mu_y\mu_z & -\mu_x^2 - \mu_y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2.2.2.2 Fuerza sobre el dipolo

$$\vec{F}_{m\omega} = \frac{\partial \vec{B}_\omega^*}{\partial x} \mu_x + \frac{\partial \vec{B}_\omega^*}{\partial z} \mu_y + \frac{\partial \vec{B}_\omega^*}{\partial z} \mu_z = \frac{\mu_0^2 \delta\sigma}{64\pi h^3} \begin{pmatrix} -\mu_x\mu_y & \mu_x^2 + \mu_z^2 & -\mu_y\mu_z \\ -\mu_y^2 - \mu_z^2 & \mu_x\mu_y & \mu_x\mu_z \\ \mu_y\mu_z & -\mu_x\mu_z & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{B}_\omega^*}{\partial x} \Big|_{000} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\vec{K}_\omega \times \Delta\vec{r}^*}{|\Delta\vec{r}^*|^3} \right)_{000} \rho d\rho d\theta = \frac{\mu_0^2 \delta\sigma}{64\pi h^3} \begin{pmatrix} \omega_y\mu_x - \omega_x\mu_y \\ 0 \\ \omega_y\mu_z - \omega_z\mu_y \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{B}_\omega^*}{\partial y} \Big|_{000} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\vec{K}_\omega \times \Delta\vec{r}^*}{|\Delta\vec{r}^*|^3} \right)_{000} \rho d\rho d\theta = \frac{\mu_0^2 \delta\sigma}{64\pi h^3} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_y\mu_x - \omega_x\mu_y \\ \omega_z\mu_x - \omega_x\mu_z \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{B}_\omega^*}{\partial z} \Big|_{000} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\vec{K}_\omega \times \Delta\vec{r}^*}{|\Delta\vec{r}^*|^3} \right)_{000} \rho d\rho d\theta = \frac{\mu_0^2 \delta\sigma}{64\pi h^3} \begin{pmatrix} \omega_y\mu_z - \omega_z\mu_y \\ \omega_z\mu_x - \omega_x\mu_z \\ 2(\omega_x\mu_y - \omega_y\mu_x) \end{pmatrix}$$

3 IMÁN RODANTE CON DESLIZAMIENTO SOBRE UNA SUPERFICIE PLANA CONDUCTORA

En este capítulo analizaremos el caso de una esfera de radio R y momento dipolar $\vec{\mu}$ que se mueve sobre una superficie plana de cobre. El objetivo es analizar el comportamiento de la frenada debida a las corrientes parásitas. Analizaremos los dos casos ideales que se pueden dar en el movimiento, rodadura sin deslizamiento y deslizamiento puro con fuerzas de rozamiento nulas en el punto de contacto entre esfera y superficie.

En el capítulo anterior, hemos analizado las fuerzas y momentos de fuerzas sobre un dipolo cuando se mueve con distintas velocidades lineales y angulares. Si hacemos el mismo cálculo para todas las velocidades, podríamos superponer todos los casos para tratar un problema real en que las velocidades no son constantes y la orientación del sólido tampoco. De esta forma, concluimos que tanto el par de fuerza como la fuerza sobre el sólido dependen de la velocidad lineal y angular.

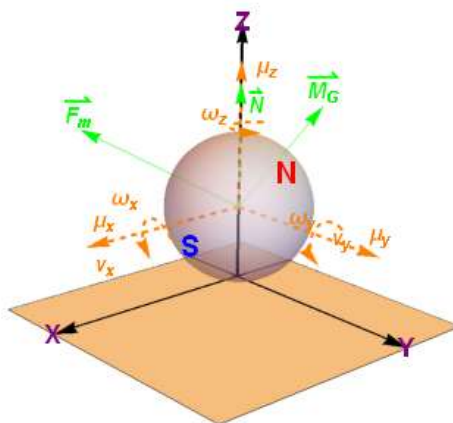


Figura 16. Esfera con deslizamiento

En verde se representan las tres fuerzas y pares de fuerza aplicados sobre la esfera: fuerza magnética, par magnético y fuerza normal. El color naranja indica las distintas componentes de velocidades y momento dipolar. [6]

$$\vec{F}_m = \bar{A} \cdot \vec{v} + \bar{B} \cdot \vec{\omega}$$

$$\vec{M}_G = \bar{C} \cdot \vec{v} + \bar{D} \cdot \vec{\omega}$$

Los tensores que multiplican las velocidades, varían con la orientación del dipolo, todos son función del momento dipolar.

$$\bar{A} = \frac{3\sigma\delta\mu_0^2}{512\pi z^4} \begin{pmatrix} -3\mu_x^2 - \mu_y^2 - 4\mu_z^2 & -2\mu_x\mu_y & 0 \\ -2\mu_x\mu_y & -\mu_x^2 - 3\mu_y^2 - 4\mu_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4(\mu_x^2 + \mu_y^2 + 2\mu_z^2) \end{pmatrix}$$

$$\bar{B} = \frac{\sigma\delta\mu_0^2}{64\pi z^3} \begin{pmatrix} -\mu_x\mu_y & \mu_x^2 + \mu_z^2 & -\mu_y\mu_z \\ -\mu_y^2 - \mu_z^2 & \mu_x\mu_y & \mu_x\mu_z \\ \mu_y\mu_z & -\mu_x\mu_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C} = \frac{\sigma\delta\mu_0^2}{64\pi z^3} \begin{pmatrix} -\mu_x\mu_y & -\mu_y^2 - \mu_z^2 & \mu_y\mu_z \\ \mu_x^2 + \mu_z^2 & \mu_x\mu_y & -\mu_x\mu_z \\ -\mu_y\mu_z & \mu_x\mu_z & 0 \end{pmatrix} = \bar{B}^T$$

$$\bar{D} = \frac{\sigma\delta\mu_0^2}{64\pi z^2} \begin{pmatrix} -2\mu_y^2 - \mu_z^2 & 2\mu_x\mu_y & \mu_x\mu_z \\ 2\mu_x\mu_y & -2\mu_x^2 - \mu_z^2 & \mu_y\mu_z \\ \mu_x\mu_z & \mu_y\mu_z & -\mu_x^2 - \mu_y^2 \end{pmatrix}$$

Lev de Gauss

Los tensores los hemos calculado suponiendo que el dipolo es puntual. Sin embargo, el problema dinámico que queremos analizar es una esfera con la imantación uniformemente distribuida en su volumen. Para justificar que podemos emplear los tensores de igual forma, debemos recurrir a la ley de Gauss.

“El flujo del vector campo a través de una superficie cerrada es igual a la suma de las fuentes escalares en el interior de la superficie”. [1]

3.1. Ecuaciones del sólido

Para determinar la dinámica de la esfera, emplearemos los teoremas de cantidad de movimiento y momento cinético. [7]

Teorema de cantidad de movimiento (T.C.M)

Supondremos que la esfera está en todo momento en contacto con el plano, eso significa que de las

tres ecuaciones dinámicas, es estática la de componente vertical. Las únicas fuerzas con componentes horizontales son las fuerzas magnéticas y si es el caso de rodadura sin deslizamiento, también la fuerza de rozamiento en el punto de contacto entre esfera y plano.

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \bar{A} \cdot \vec{v} + \bar{B} \cdot \vec{\omega} + \vec{N}$$

Teorema del momento cinético (T.M.C)

Para el momento de fuerza si intervienen en el problema las tres proyecciones de la ecuación vectorial. Al igual que en el teorema de cantidad de movimiento, los únicos momentos de fuerza son los originados por el magnetismo y si es el caso de rodadura sin deslizamiento, también el momento asociado a la fuerza de rozamiento.

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum \vec{M}_{ext}$$

$$\frac{2}{5} mR^2 \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \bar{C} \cdot \vec{v} + \bar{D} \cdot \vec{\omega}$$

Gracias a la simetría de forma de una esfera, el tensor de inercia es independiente de la orientación y se simplifica el problema.

$$\vec{L}_o = \bar{I} \cdot \vec{\omega}$$

$$\bar{I} = \frac{2}{5} mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usando estos dos teoremas y la ley de Poisson aplicada al momento dipolar obtenemos las ecuaciones necesarias para cerrar el problema.

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\mu}$$

Con solo la ligadura de contacto entre esfera y plano ($v_z = 0$) el problema tiene muchísimas posibles combinaciones para analizar, con siete valores iniciales: dos ángulos para la orientación, dos velocidades lineales y tres velocidades angulares.

3.1.1 Adimensionalización

Asignamos las siguientes definiciones a los parámetros dimensionales.

$$A_u = \frac{3\sigma\delta\mu_0^2\mu^2}{512\pi z^4} \quad B_u = C_u = \frac{\sigma\delta\mu_0^2\mu^2}{64\pi z^3} \quad D_u = \frac{\sigma\delta\mu_0^2\mu^2}{64\pi z^2}$$

Definimos las variables adimensionales con las que resolveremos las ecuaciones.

$$\begin{aligned} \bar{A}' &= \frac{\bar{A}}{A_u}, & \bar{B}' &= \frac{\bar{B}}{B_u}, & \bar{C}' &= \frac{\bar{C}}{C_u}, & \bar{D}' &= \frac{\bar{D}}{D_u}. \\ t' &= \frac{t}{t_d}, & \vec{v}' &= \vec{v} \frac{t_d}{R}, & \vec{\omega}' &= \vec{\omega} t_d, & \vec{\mu}' &= \frac{\vec{\mu}}{\mu}. \end{aligned}$$

A partir de las ecuaciones vectoriales podemos realizar la adimensionalización para determinar las ecuaciones escalares a introducirlas en el programa de cálculo.

$$\frac{mR}{t_d^2} \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{A_u R}{t_d} \bar{A}' \cdot \vec{v}' + \frac{B_d}{t_d} \bar{B}' \cdot \vec{\omega}' \rightarrow \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{A_u t_d}{m} \bar{A}' \cdot \vec{v}' + \frac{B_u t_d}{mR} \bar{B}' \cdot \vec{\omega}'$$

Elegimos el parámetro del tiempo característico t_D para simplificar nuestra ecuación.

$$t_D = \frac{m}{A_u}$$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt'} = \bar{A}' \cdot \vec{v}' + \frac{8}{3} \bar{B}' \cdot \vec{\omega}'$$

$$\frac{I}{t_D^2} \frac{d\vec{\omega}'}{dt'} = \frac{C_D R}{t_D} \bar{C}' \cdot \vec{v}' + \frac{D_u}{t_D} \bar{D}' \cdot \vec{\omega}' \rightarrow \frac{d\vec{\omega}'}{dt'} = \frac{5C_u t_D}{2mR} \bar{C}' \cdot \vec{v}' + \frac{5D_u t_D}{2mR^2} \bar{D}' \cdot \vec{\omega}'$$

$$\frac{d\vec{\omega}'}{dt'} = \frac{20}{3} (\bar{C}' \cdot \vec{v}' + \bar{D}' \cdot \vec{\omega}')$$

Sistema de ecuaciones

Estas ecuaciones ya adimensionalizadas son las que se implementarán en el programa. Gracias a la ligadura $v_z = 0$ la proyección vertical del T.C.M está desacoplada del resto del sistema y no será necesaria para resolver el problema. Haciendo esto, eliminamos la fuerza incógnita de reacción $\vec{N} = N\vec{k}$.

$$[1] \frac{dv'_x}{dt'} = (-3\mu_x'^2 - \mu_y'^2 - 4\mu_z'^2)v'_x - 2\mu'_x\mu'_y v'_y + \frac{8}{3}(-\mu'_x\mu'_y\omega'_x + (\mu_x'^2 + \mu_z'^2)\omega'_y - \mu'_y\mu'_z\omega'_z)$$

$$[2] \frac{dv'_y}{dt'} = -2\mu'_x\mu'_y v'_x + (-\mu_x'^2 - 3\mu_y'^2 - 4\mu_z'^2)v'_y + \frac{8}{3}((-\mu_y'^2 - \mu_z'^2)\omega'_x + \mu'_x\mu'_y\omega'_y + \mu'_x\mu'_z\omega'_z)$$

$$[3] \frac{d\omega'_x}{dt'} = \frac{20}{3}(-\mu'_x\mu'_y v'_x + (-\mu_y'^2 - \mu_z'^2)v'_y + \mu'_y\mu'_z v'_z + (-2\mu_y'^2 - \mu_z'^2)\omega'_x + 2\mu'_x\mu'_y\omega'_y + \mu'_x\mu'_z\omega'_z)$$

$$[4] \frac{d\omega'_y}{dt'} = \frac{20}{3}((\mu_x'^2 + \mu_z'^2)v'_x + \mu'_x\mu'_y v'_y - \mu'_x\mu'_z v'_z + 2\mu'_x\mu'_y\omega'_x + (-2\mu_x'^2 - \mu_z'^2)\omega'_y + \mu'_y\mu'_z\omega'_z)$$

$$[5] \frac{d\omega'_z}{dt'} = \frac{20}{3}(-\mu'_y\mu'_z v'_x + \mu'_x\mu'_z v'_y + \mu'_x\mu'_z\omega'_x + \mu'_y\mu'_z\omega'_y + (-\mu_x'^2 - \mu_y'^2)\omega'_z)$$

$$[6] \frac{d\mu'_x}{dt'} = \omega'_y\mu'_z - \omega'_z\mu'_y$$

$$[7] \frac{d\mu'_y}{dt'} = \omega'_z\mu'_x - \omega'_x\mu'_z$$

$$[8] \frac{d\mu'_z}{dt'} = \omega'_x\mu'_y - \omega'_y\mu'_x$$

3.3. Simulaciones computacionales.

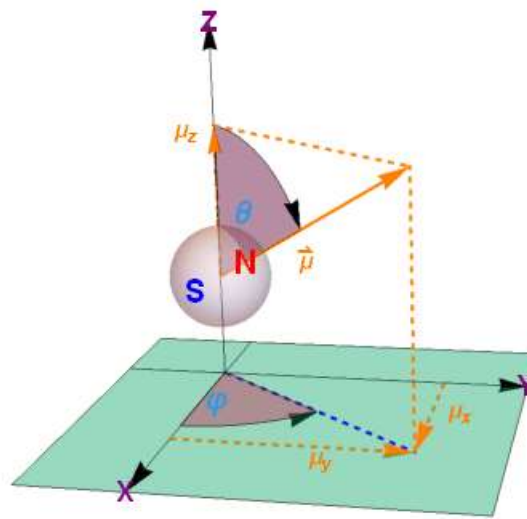


Figura 17. Definición de ángulos φ y θ

Los ángulos φ y θ serán empleados para variar la orientación del momento dipolar y comparar sus

diferencias.

$$\mu_x = \mu \sin \theta \cos \varphi \quad \mu_y = \mu \sin \theta \sin \varphi \quad \mu_z = \mu \cos \theta$$

3.4.1 Análisis velocidad lineal

Lo primero que haremos será simular que la esfera lleva una velocidad inicial lineal paralela al eje x y medimos como varía la distancia de detención en función de la velocidad y la orientación del momento dipolar.

Dado que el objetivo principal es analizar los efectos disipativos, las representaciones gráficas harán comparaciones de la distancia que recorre la esfera y el tiempo que tarda antes de detenerse. Definimos dos variables a medir.

Distancia de detención $\Delta t'$: Es el tiempo que tarda la velocidad del imán en alcanzar la milésima parte de su valor en el instante inicial.

$$v'_x(\Delta t') = 0.001 v'_x(0)$$

Distancia de detención $\Delta x'$: Es el recorrido del sólido en la dirección de la velocidad inicial desde que comienza el movimiento hasta que se alcanza el tiempo de detención. También puede existir un desplazamiento perpendicular a la velocidad inicial (más pequeño), se verá reflejado en las trayectorias, pero no es la variable principal a medir.

$$\Delta x' = x'(\Delta t') - x'(0).$$

Para todos los casos que analizaremos de velocidad lineal inicial, la tomaremos en el eje x . Al existir simetría de revolución en torno al eje vertical, usando el mismo vector como velocidad inicial siempre, es representativo el resultado.

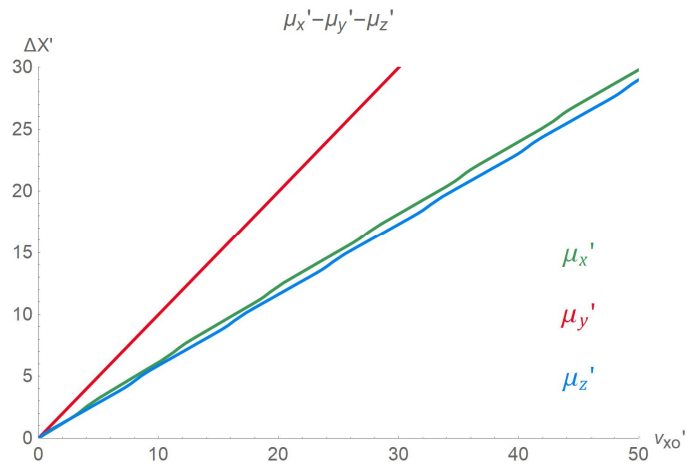


Figura 18. Deslizamiento. Distancia de detención. Ejes cartesianos $\Delta x' - v_{x'}$.

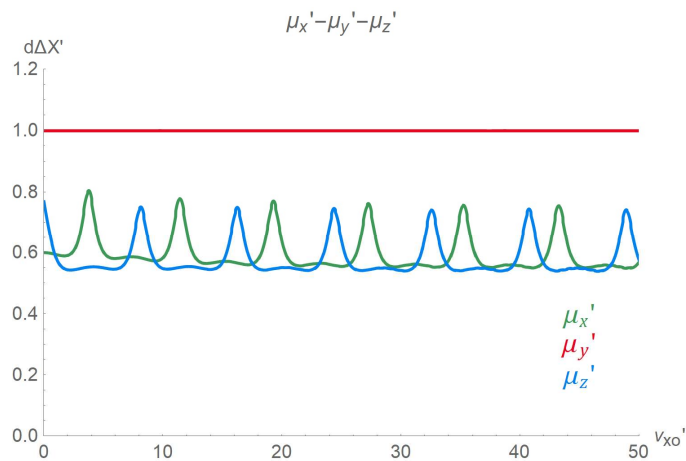


Figura 19. Deslizamiento. Distancia de detención. Ejes cartesianos $d\Delta x' / dv_{x0}' - v_{x'}$

De las distintas orientaciones iniciales que podemos tomar para el momento dipolar, la única que mantiene la proporcionalidad es $\vec{\mu} = \mu_y \vec{j}$ y se debe a que en esta posición el par sobre la esfera es nulo en todo momento, $\vec{C} \cdot \vec{v} = 0$. Para las orientaciones en OY y OZ observamos una periodicidad en la pendiente de la distancia de detención, esto es debido al número de vueltas rotado por la esfera, es una periodicidad angular.

A continuación, representaremos variando el ángulo φ del momento dipolar y manteniéndolo en el plano horizontal ($\theta = \pi/2$). Esta forma de variar los ángulos muestra más diferencia entre las distintas orientaciones que variando θ y manteniendo fijo φ . Cada color representa una orientación determinada del momento dipolar. Las orientaciones cuya dirección forman el mismo ángulo con la dirección de la velocidad, se representan en el mismo color, pero en línea continua y discontinua.

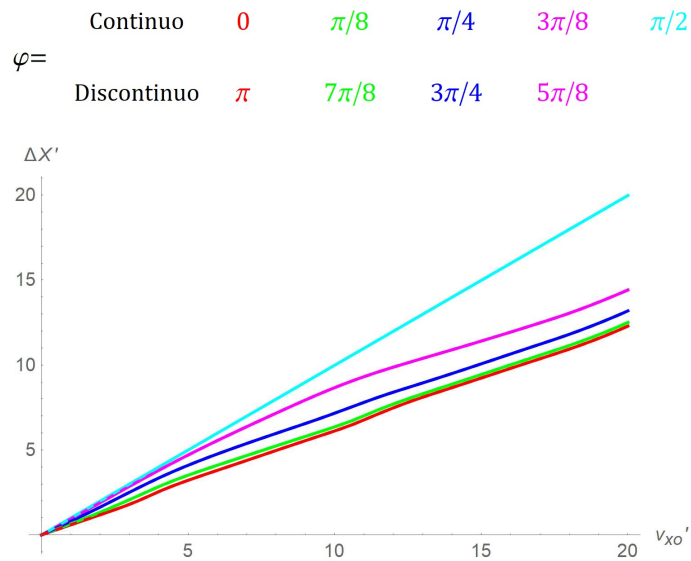


Figura 20. Deslizamiento Distancia de detención. $\Delta x' - v_{x'}$.

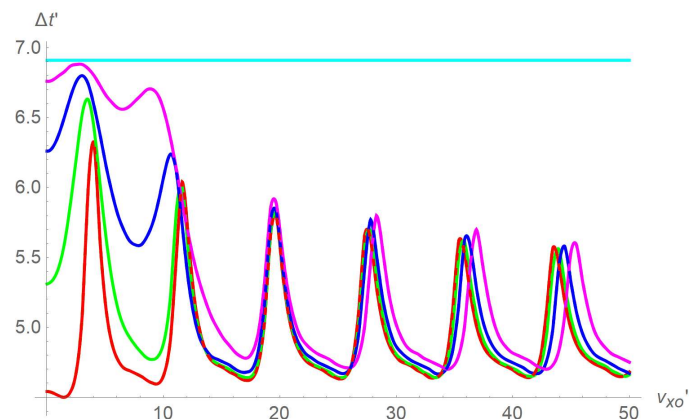


Figura 21. Deslizamiento Distancia de detención. $\Delta t' - v_{x'}$.

No existe una gran diferencia salvo para la orientación perpendicular a la velocidad, que es la peor disposición para disipar energía y por eso tiene mayor distancia y tiempo de detención.

Para las orientaciones de φ distintas a $\pi/2$ el tiempo de detención sigue un transitorio hasta alcanzado cierta velocidad, a partir de la cual es periódico. La periodicidad se debe a la rotación del imán, si $\varphi = \pi/2$ no rota y es constante el momento dipolar.

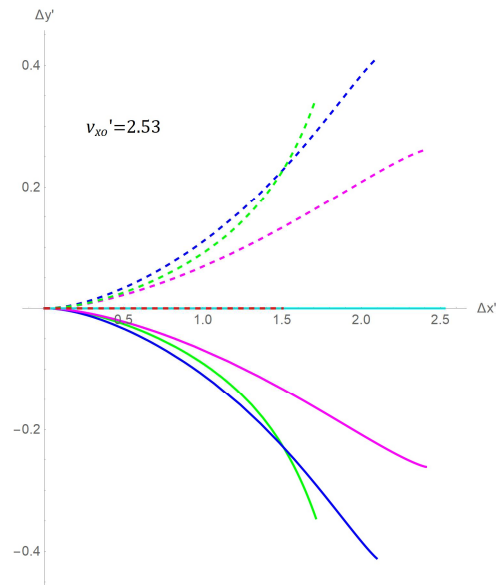


Figura 22. Deslizamiento. Trayectoria. $v_x' = 2.53$

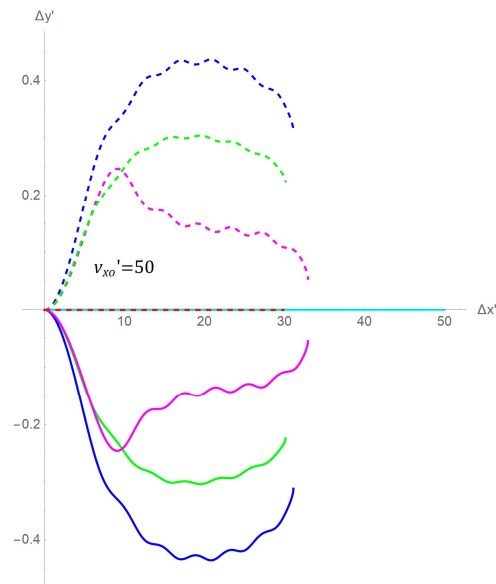


Figura 23. Deslizamiento. Trayectoria. $v_x' = 50$.

Al aumentar la velocidad, se producen oscilaciones en la trayectoria debidas al cambio de orientación del momento dipolar. Como debe de ser por simetría, las orientaciones paralelas al eje x no tienen desplazamiento en y , también los desplazamientos en y son opuestos para las orientaciones simétricas respecto el eje x .

Efecto de ω_z'

Si introducimos una rotación en el eje z , la distancia de detención aumenta para bajas velocidades, pero disminuye con las altas. El efecto del pivotamiento es mayor para una orientación magnética

inicial con mayor verticalidad. Para el caso de una imantación inicial totalmente horizontal, el efecto giroscópico es nulo y consiguientemente la distancia de detención no se ve disminuida por el pivotamiento.

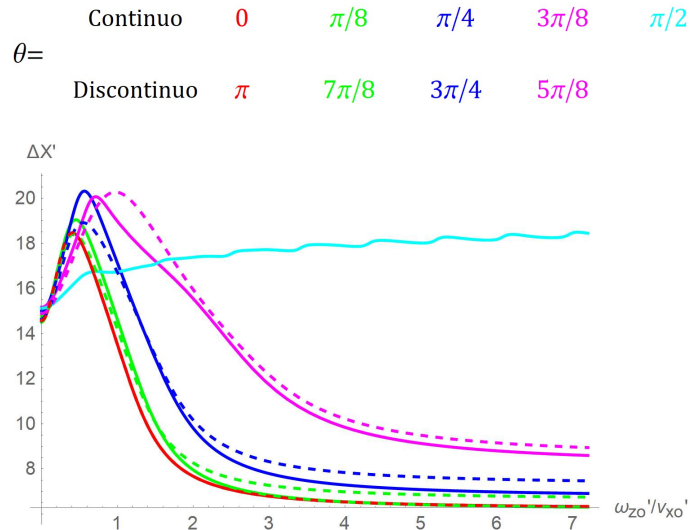


Figura 24. Deslizamiento. Distancia de detención. $\Delta x' - \omega_z' / v_{x0}'$

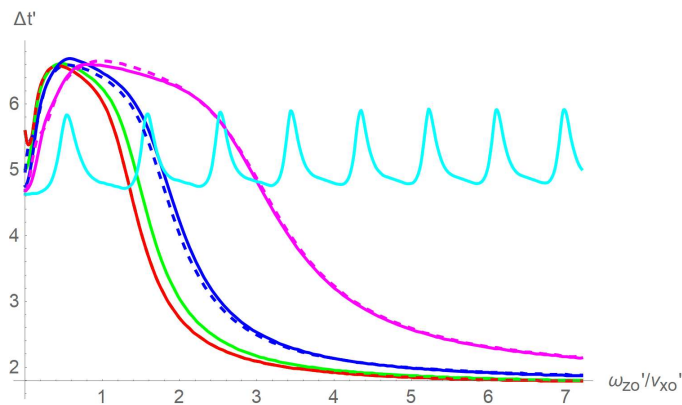


Figura 25. Deslizamiento. Tiempo de detención. $\Delta t' - \omega_z' / v_{x0}'$

En las siguientes figuras, podemos ver la trayectoria que sigue para distintos valores de la relación ω_z' / v_{x0}' .

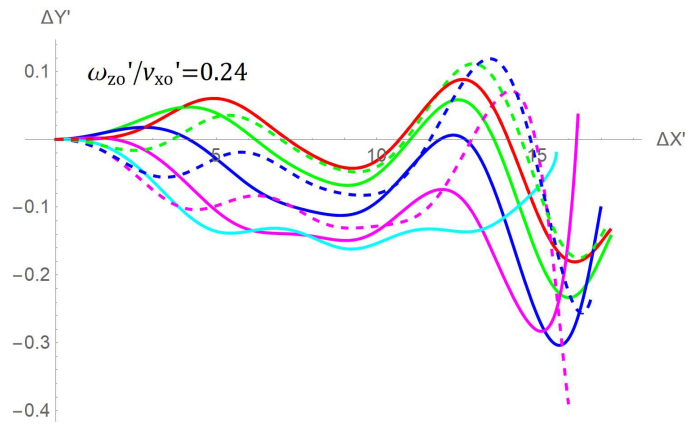


Figura 26. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_z'/v_x' = 0.24$

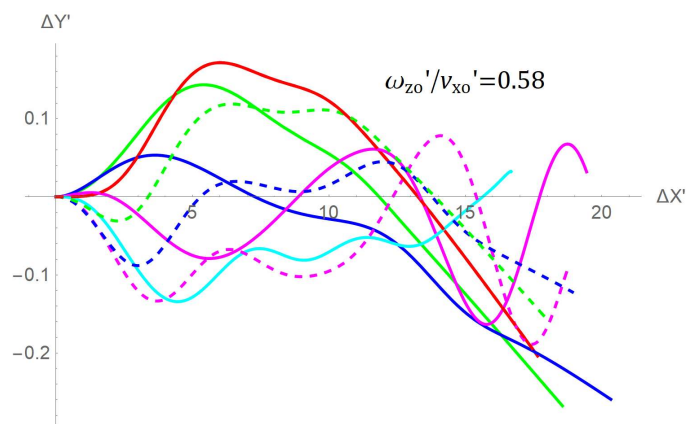


Figura 27. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_z'/v_x' = 0.58$

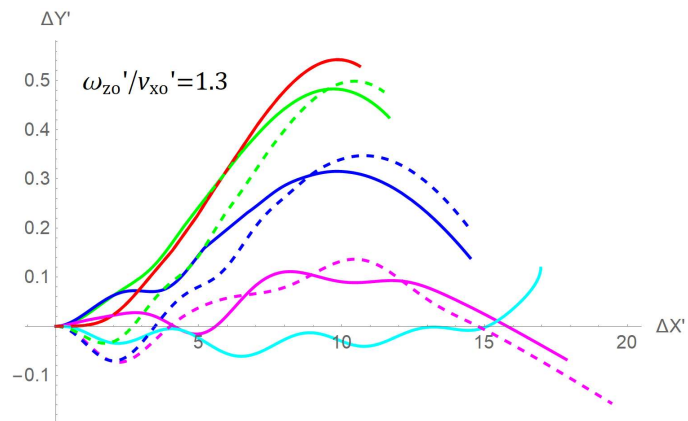


Figura 28. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_z'/v_x' = 1.3$.

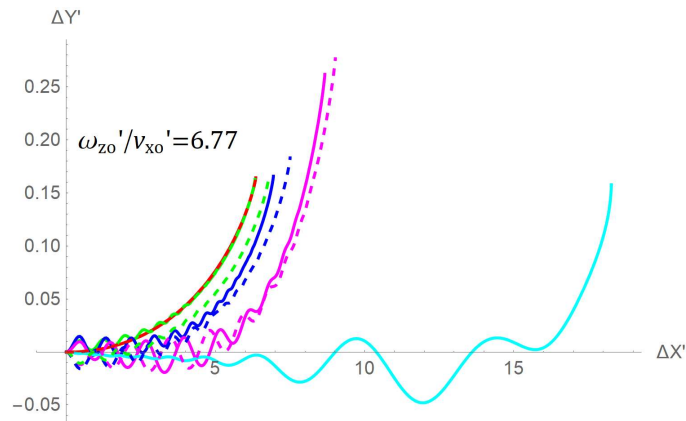


Figura 29. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_z'/v_x' = 6.77$.

La velocidad angular tiende a regularizar la trayectoria e igualar las orientaciones con mismo valor absoluto de μ_z' . Después veremos como la rotación ω_z' tiende a producir trayectorias en curvas cerradas.

Efecto de ω_x'

El efecto que se produce es similar que el del pivotamiento en el eje z. A bajas velocidades aumenta la distancia de detención a excepción del caso con momento dipolar perpendicular al eje de rotación. Como es de esperar, para una mayor velocidad angular (hasta aproximadamente cinco veces la velocidad lineal, dependiendo de la orientación) disminuye la distancia de detención.

A diferencia del pivotamiento en torno a OZ en torno al eje OX si disminuye la distancia de detención con el momento dipolar perpendicular al eje de rotación.

	Continuo	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
$\varphi =$	Discontinuo	π	$7\pi/8$	$3\pi/4$	$5\pi/8$	

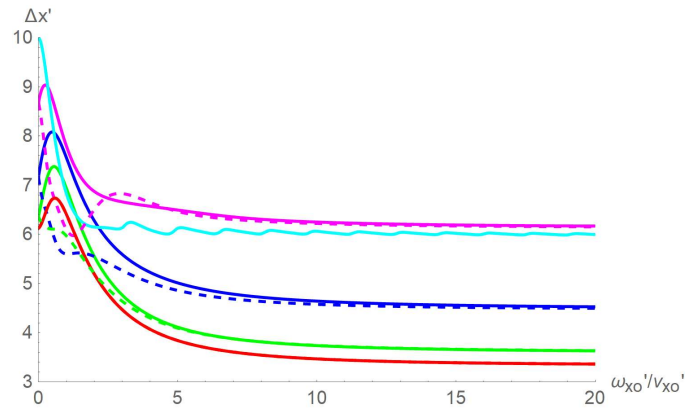


Figura 30. Deslizamiento. Distancia de detención. $\Delta x' - \omega_{x0}'/v_{x0}'$.

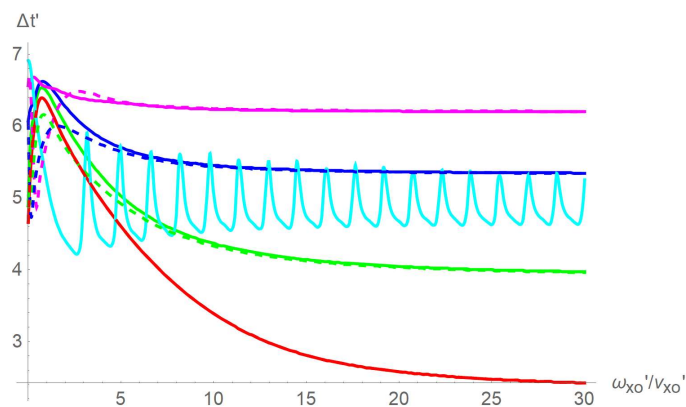


Figura 31. Deslizamiento. Tiempo de detención. $\Delta t' - \omega_{x0}'/v_{x0}'$.

La rotación en torno a OX hace que el momento dipolar sea paralelo al eje OX que es una posición en la que la disipación es mayor. Por eso, si la orientación es inicialmente paralela a OX esta se mantiene así con una alta velocidad angular y disipa mejor la velocidad lineal inicial.

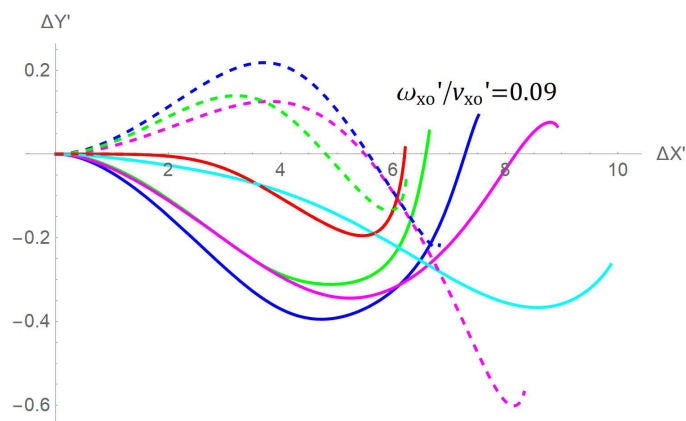


Figura 32. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_{x0}'/v_{x0}'=0.09$.

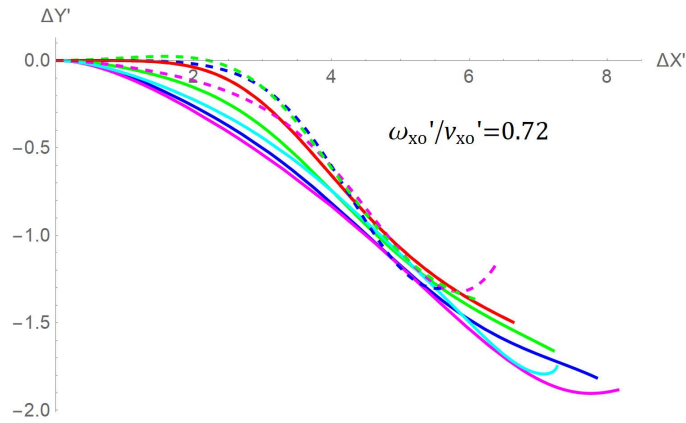


Figura 33. Deslizamiento. Trayectoria $\omega_x'/v_x'=0.72$.

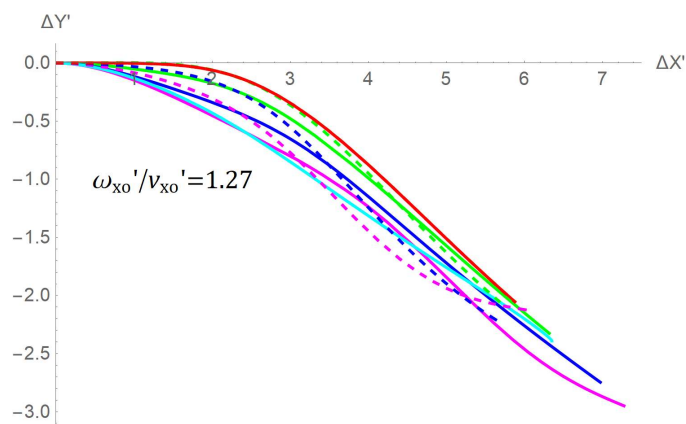


Figura 34. Deslizamiento. Trayectoria $\omega_x'/v_x'=1.27$.

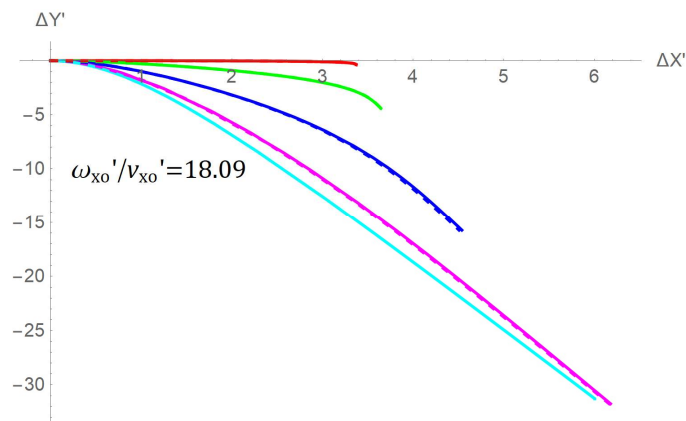


Figura 35. Deslizamiento. Trayectoria $\omega_x'/v_x'=18.09$.

En cuanto a las trayectorias, vemos claramente que la distancia recorrida en el eje OY aumenta con la velocidad angular porque parte de la velocidad angular ω_x' se transforma en velocidad lineal v_y' . También vemos que las trayectorias con alta ω_x' y momento dipolar simétrico respecto al eje OY son iguales.

Efecto de ω_y

A diferencia de las rotaciones en torno al eje z y el x , ahora debemos distinguir entre los dos posibles sentidos de la rotación, ya que uno va a favor de la velocidad inicial (como si rodara) y el otro en contra. En las dos rotaciones anteriores un sentido tenía un comportamiento simétrico con el otro.

A diferencia de las rotaciones en eje OZ y OX , si la velocidad ω_y es paralela al momento dipolar, esta no afecta para nada a la trayectoria. Como siempre, una rotación paralela al momento dipolar no disipa energía y esta vez se mantienen paralelos en toda la trayectoria. En los dos casos anteriores, aunque fueran paralelos inicialmente, la esfera cambia su orientación y comienza a disipar energía la rotación, por lo que si influye.

	Continuo	$-\pi/2$	$-3\pi/8$	$-\pi/4$	$-\pi/8$	0
$\varphi =$	Discontinuo	$\pi/2$	$3\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/8$	

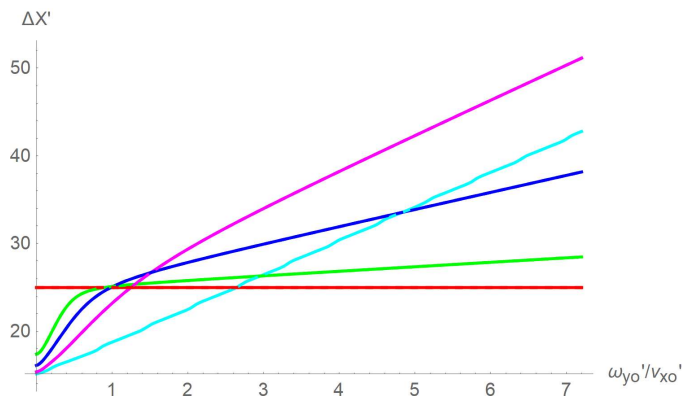


Figura 36. Deslizamiento. Distancia de detención. $\omega_y' > 0 \Delta X' - \omega_y' / v_x'$.

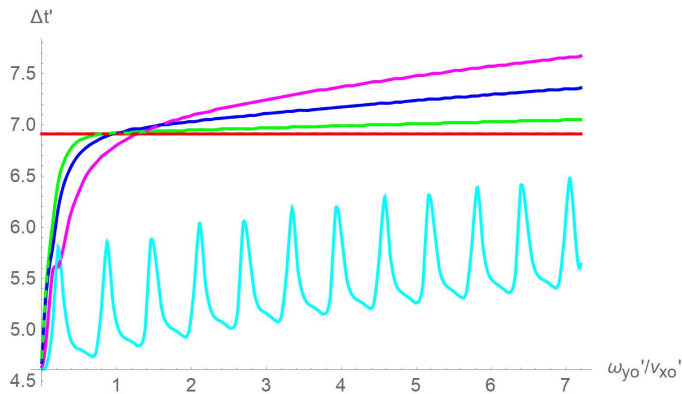


Figura 37. Deslizamiento. Tiempo de detención. $\omega_y' > 0 \Delta t' - \omega_y' / v_x'$.

En estas dos primeras representaciones vemos la repercusión desfavorable de la rotación positiva en torno al eje OY . En esta ocasión el efecto giroscópico tiende a mantener el ángulo $\varphi = \pm\pi/2$, una orientación de menor disipación de la velocidad lineal. Además, parte de la velocidad angular se transforma en velocidad positiva en el eje OX . El efecto aumenta cuanto mayor es el ángulo formado por el momento dipolar y el eje OY porque así es como la velocidad angular hace variar más el momento dipolar.

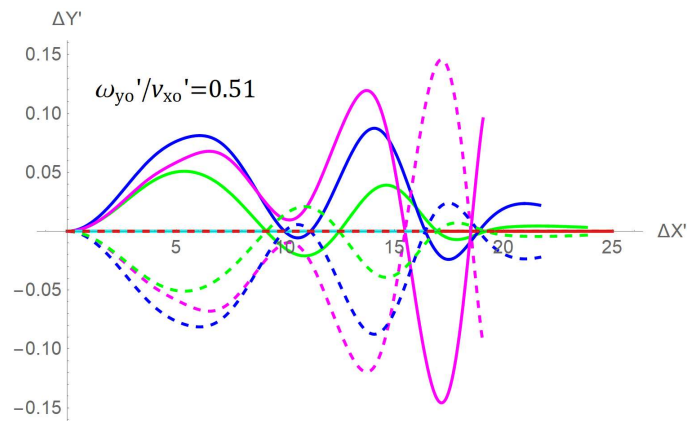


Figura 38. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_{y_0}'/v_{x_0}'=0.51$.

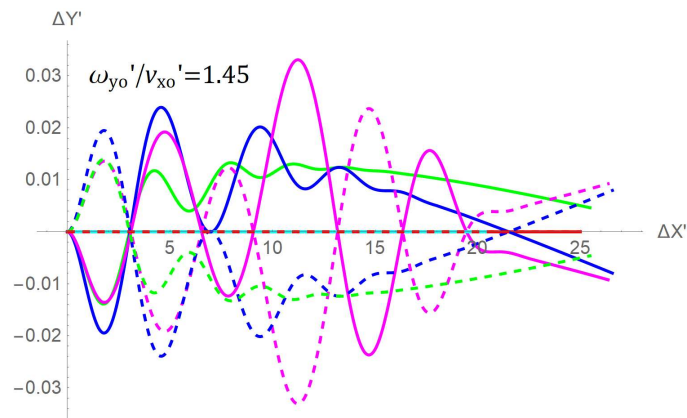


Figura 39. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_{y_0}'/v_{x_0}'=1.45$.

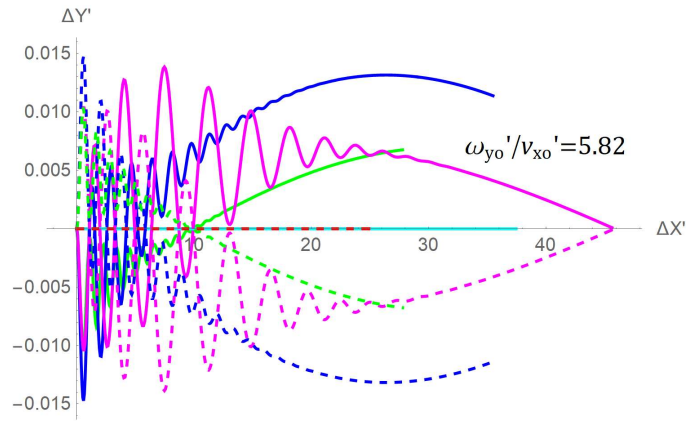


Figura 40. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_{y0}'/v_{x0}'=5.82$.

Al aumentar la relación entre las velocidades se obtienen mayores desplazamientos en OX pero menor desviación en OY .

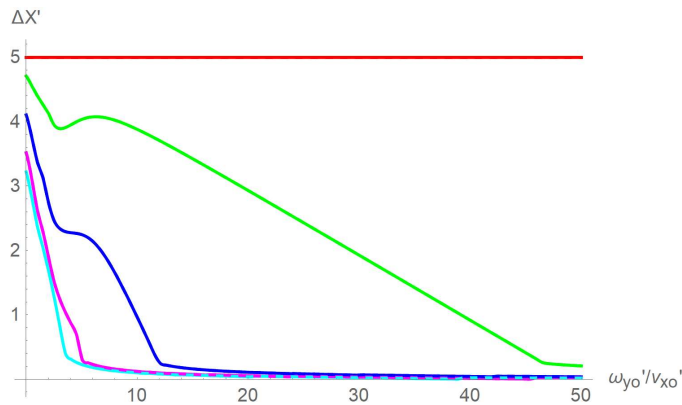


Figura 41. Deslizamiento. Distancia de detención. $\omega_{y0}' < 0 \Delta X' - \omega_{y0}'/v_{x0}'$.

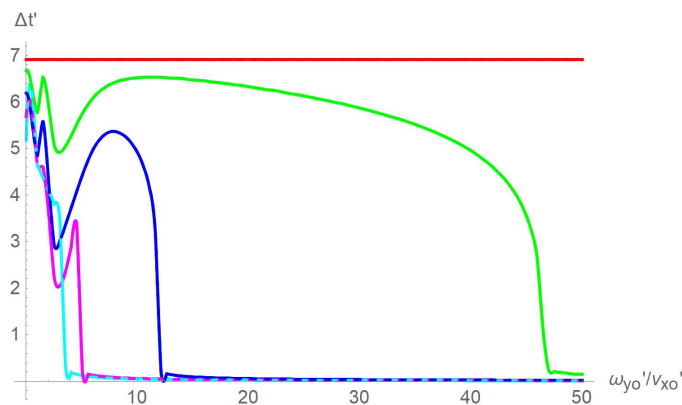


Figura 42. Deslizamiento. Tiempo de detención. $\omega_{y0}' < 0 \Delta t' - \omega_{y0}'/v_{x0}'$.

Nota: Lo que se representa como tiempo y distancia de detención, solo mide hasta el momento en que la velocidad inicial se hace nula por primera vez. Para cada una de las representaciones, cuando alcanzan el valor constante, es porque el imán adquiere velocidad negativa.

Si la rotación es negativa, ayuda a disminuir la distancia de detención. Podemos ver que para las distintas orientaciones existen diferentes rangos de velocidades con diferentes comportamientos de tiempo y distancia de detención. A partir de una relación de velocidad determinada, se mantienen constantes $\Delta t'$ y $\Delta X'$. Tras alcanzar dicha velocidad, si la seguimos aumentando, la esfera retrocederá tras y obtendremos desplazamientos negativos en OX . Los resultados con orientación de momento dipolar simétrico al eje OX , tienen un desplazamiento en OY contrario y de igual magnitud pero idénticos en OX . Por eso, no se ven los ángulos representados en línea discontinua en las dos figuras superiores.

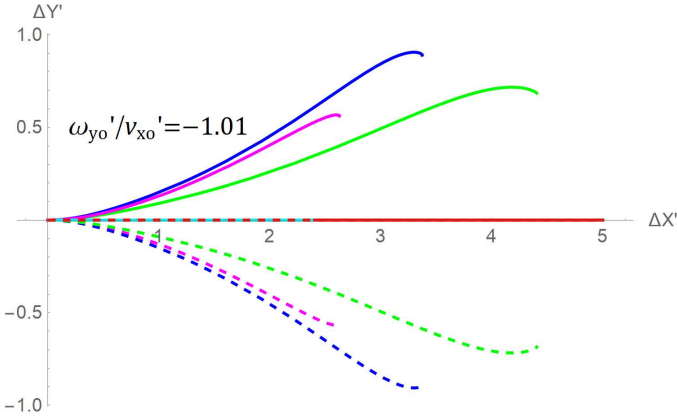


Figura 43. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_y'/v_x' = -1.01$.

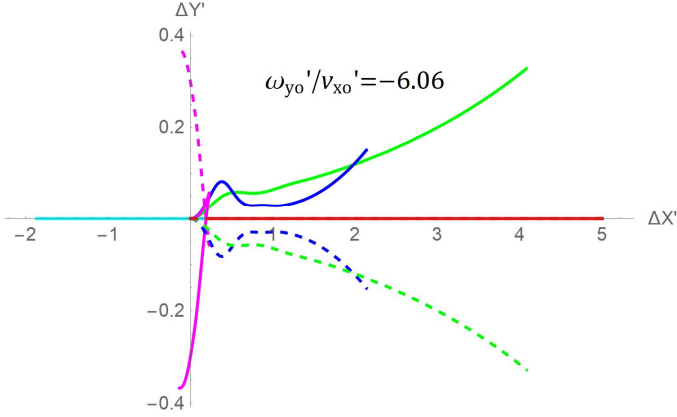


Figura 44. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_y'/v_x' = -6.06$.

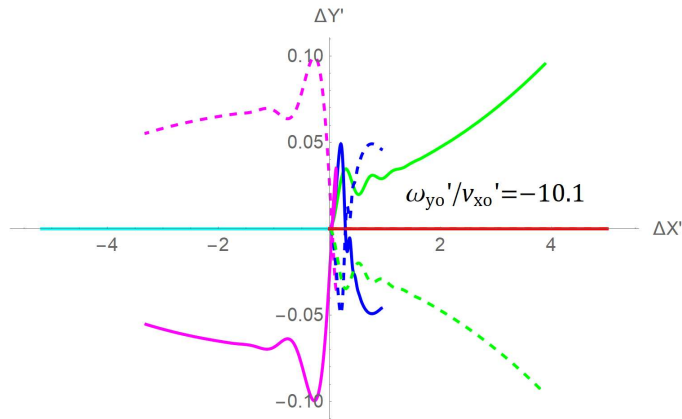


Figura 45. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_y' / v_{x0}' = -10.1$.

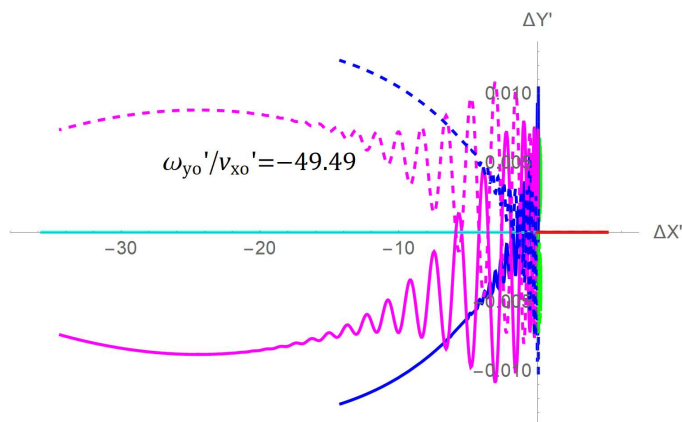


Figura 46. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_y' / v_{x0}' = -49.49$.

Cuando $\omega_y' < 0$ surge una fuerza que se opone al movimiento de la esfera, lo que explica los desplazamientos negativos en contra de la velocidad lineal inicial. Como siempre ocurre con la rotación cuando es el efecto de las fuerzas y momentos inducidos por la propia rotación y no su efecto giroscópico, es mayor para grandes ángulos formados entre el eje de rotación y el momento dipolar.

3.4.2 Análisis de rotación pura

Analizaremos el ángulo recorrido y el tiempo que tarda en alcanzar el régimen permanente la esfera para una velocidad en el eje z y el x . Por eso, ahora hablaremos de ‘ángulo de detención’ en vez de ‘distancia de detención’.

La rotación en torno al eje OY es análoga a la de OX con un momento dipolar girado 90° en φ , por eso solo mostraremos una de ellas.

Ahora hablaremos de ‘ángulo de detención’ en vez de ‘distancia de detención’. Tras alcanzar el ‘ángulo de detención’ el imán puede seguir rotando, pero con su momento dipolar paralelo al eje de rotación (situación en la que ya no se produce ninguna fuerza ni momento sobre el imán). Es el ángulo

recorrido hasta que la aceleración angular alcanza su valor centesimal en el instante inicial. El único caso en que la esfera se detiene por completo (traslación y rotación) ocurre cuando el momento dipolar es inicialmente perpendicular a la rotación.

Rotación en ω'_z

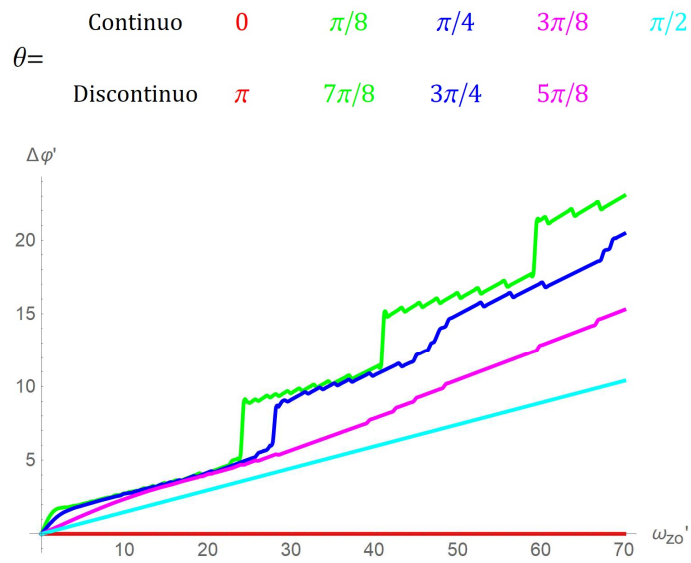


Figura 47. Deslizamiento. Ángulo de detención. $\Delta\phi' - \omega'_z$.

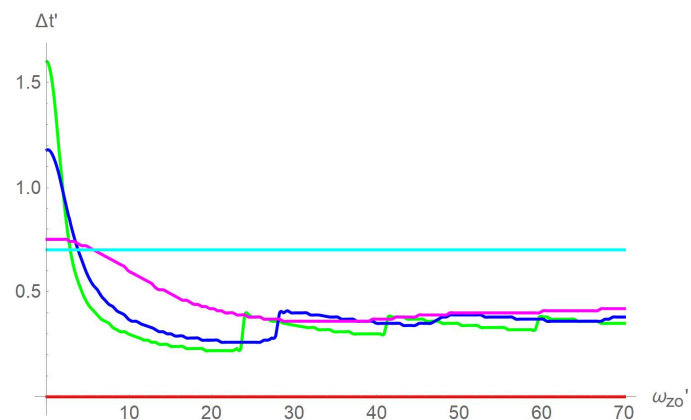


Figura 48. Deslizamiento. Tiempo de detención. $\Delta t' / \omega'_z$.

Se producen saltos debidos a la periodicidad en el cambio de orientación del momento dipolar,

también ocurre este efecto con otras rotaciones. La única orientación que da una linealidad entre el ángulo recorrido y la velocidad inicial, es la que tiene un momento dipolar horizontal, perpendicular al eje de rotación.

Para este caso y los demás, la linealidad en la distancia de detención y constancia en el tiempo de detención frente a la velocidad con ciertas orientaciones iniciales, se debe a la disposición para disipar de $\vec{\mu}$ (diferente de la potencia instantánea disipada que es decreciente porque disminuye la velocidad angular). Por ejemplo, en este caso si $\theta=\pi/2$, se mantiene constante el ángulo a lo largo del tiempo, pero si forma cualquier otro ángulo inicialmente, este varía.

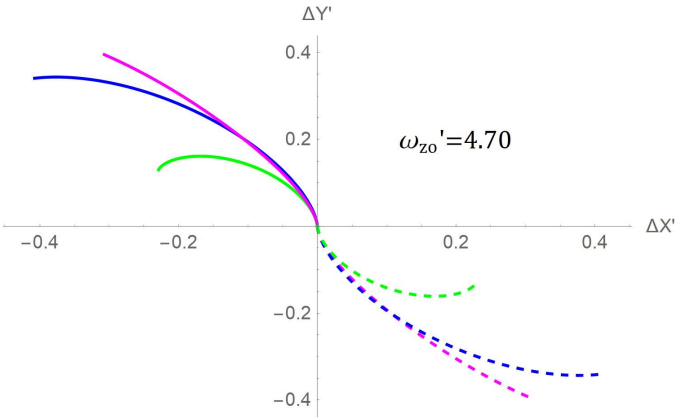


Figura 49. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_{z0}'/v_x' = 4.70$.

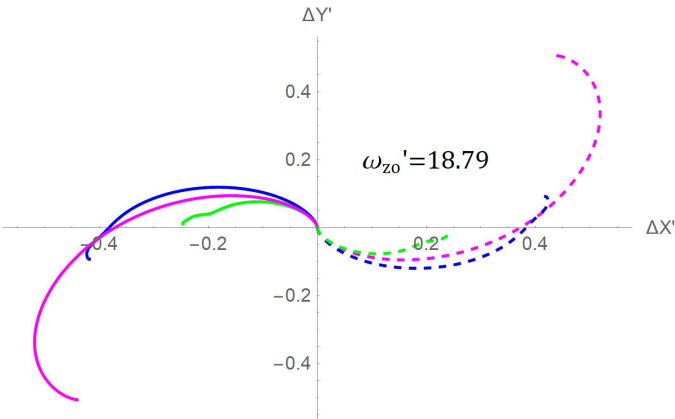


Figura 50. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_z' = 18.79$.

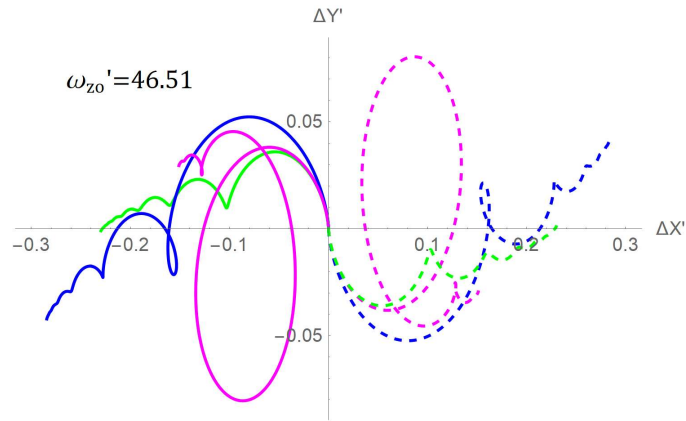


Figura 51. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_z' = 46.51$.

Las trayectorias que tienen mismo valor absoluto en la componente z del momento dipolar, tienen una simetría impar. Como es lógico, la distancia recorrida es mayor con altas velocidades. Sin embargo; la distancia desde el punto final hasta el origen no, porque la trayectoria describe curvas cerradas.

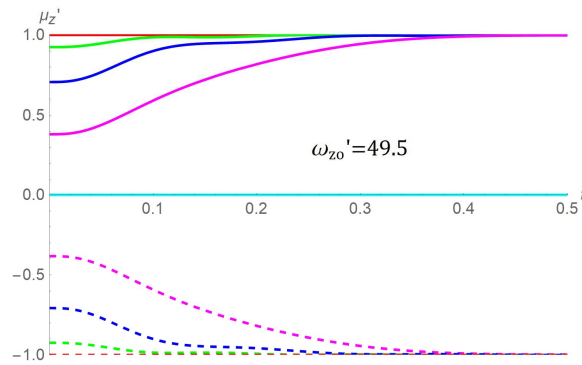


Figura 52. Deslizamiento. Momento dipolar. μ_z'/t'

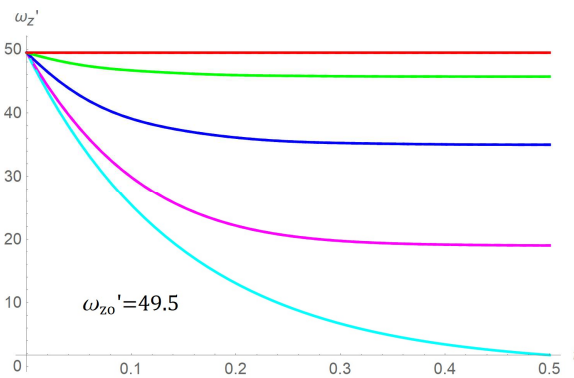


Figura 53. Deslizamiento. Evolución temporal de velocidad angular OZ . ω_z'/t' .

En las dos figuras superiores vemos que el momento dipolar tiende a ponerse paralelo al eje de rotación. Consecuentemente desaparece la desaceleración angular y se mantiene constante la rotación en OZ . Para la orientación con $\theta = \pi/2$ no tiende a ponerse vertical por simetría y se mantiene constante

el ángulo disipando hasta su detención.

Rotación en ω_x'

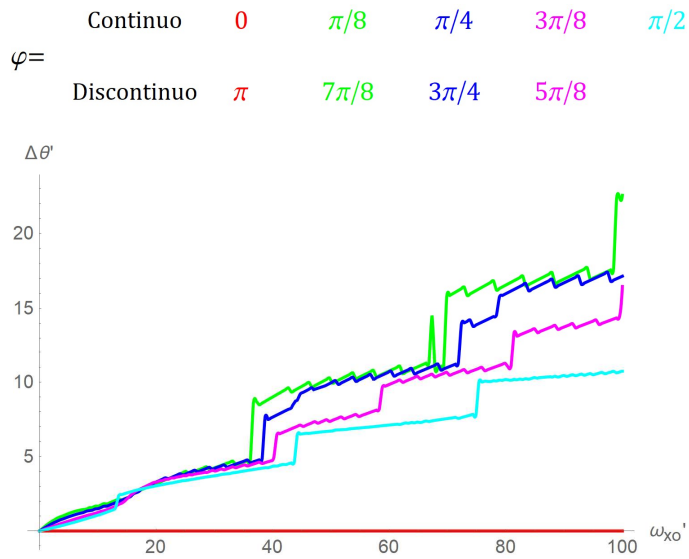


Figura 54. Deslizamiento. Ángulo girado. $\Delta\theta'$ - ω_x' .

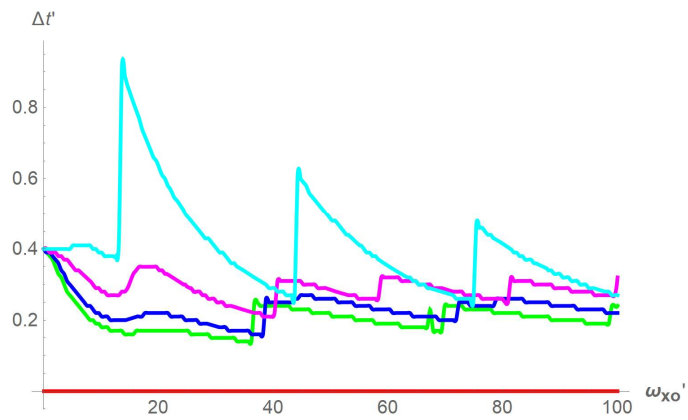


Figura 55. Deslizamiento. Tiempo de detención. $\Delta t'$ - ω_x' .

Si aumenta ω_x' , también lo hace el ángulo girado pero el tiempo de detención disminuye convergiendo a un valor (asíntota horizontal). En ambas gráficas apreciamos que para ciertos valores de ω_x' se producen saltos.

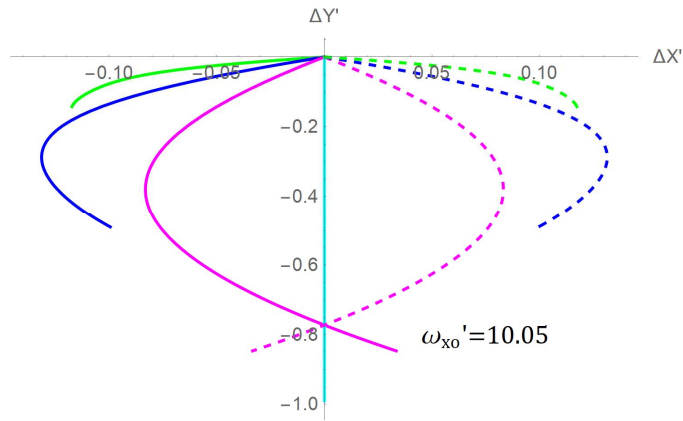


Figura 56. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_{x_0}' = 10.05$.

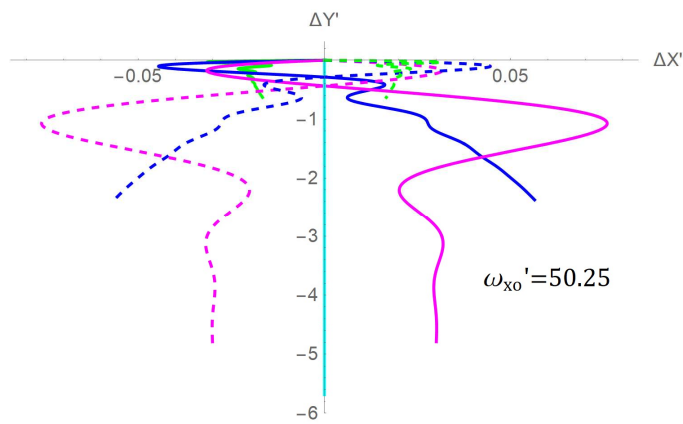


Figura 57. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_{x_0}' = 50.25$.

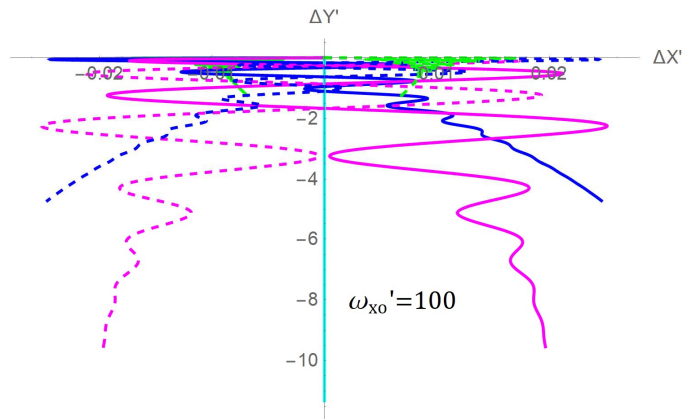


Figura 58. Deslizamiento. Trayectoria. $\omega_{x_0}' = 100$.

Existe simetría respecto al eje OY por la disposición de las orientaciones. Cuanto mayor es la velocidad angular, mayor es el desplazamiento en OY pero menor en OX . La única trayectoria rectilínea es la que tiene un momento dipolar paralelo al eje OY (debe serlo por simetría).

4 IMÁN RODANTE SIN DESLIZAMIENTO SOBRE UNA SUPERFICIE PLANA CONDUCTORA

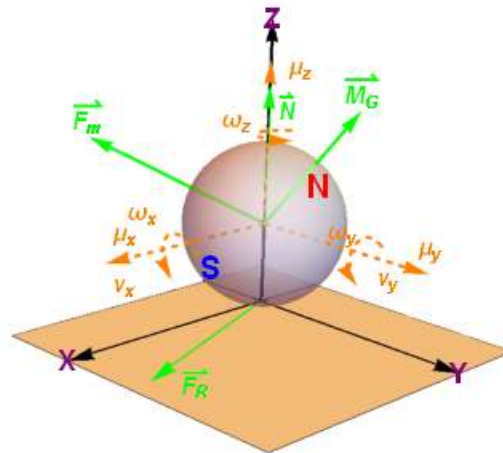


Figura 59. Esfera sin deslizamiento.

Este caso es el más sencillo de los dos gracias a que rodar sin deslizar liga las velocidades angulares con las velocidades lineales mediante la siguiente restricción cinemática:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \overline{GP} = 0 \rightarrow \vec{v}_G = R\omega_y \vec{i} - R\omega_x \vec{j}$$

$$v_x = R\omega_y$$

$$v_y = -R\omega_x$$

Al introducir esta ligadura cinemática, surge la incógnita dinámica de la fuerza de rozamiento en el punto de contacto entre esfera y plano. No obstante, podemos simplificar las ecuaciones y eliminar esta fuerza de rozamiento del problema combinando las ecuaciones de cantidad de movimiento y momento cinético.

Teorema de Cantidad de Movimiento (T.C.M)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_M + \vec{F}_R = \vec{A} \cdot \vec{v} + \vec{B} \cdot \vec{\omega} + \vec{F}_R + \vec{N}$$

$$mR \frac{d\omega_x}{dt} = -(\bar{A} \cdot \vec{v} + \bar{B} \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{j} - F_{Ry}$$

$$mR \frac{d\omega_y}{dt} = (\bar{A} \cdot \vec{v} + \bar{B} \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{i} + F_{Rx}$$

$$0 = N + (\bar{A} \cdot \vec{v} + \bar{B} \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{k}$$

Teorema del Momento Cinético (T.M.C)

$$\frac{2}{5} mR^2 \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_G + \vec{GP} \times \vec{F}_R = \bar{C} \cdot \vec{v} + \bar{D} \cdot \vec{\omega} + \vec{GP} \times \vec{F}_R$$

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\mu}$$

$$\frac{2}{5} mR^2 \frac{d\omega_x}{dt} = (\bar{C} \cdot \vec{v} + \bar{D} \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{i} + RF_{Ry}$$

$$\frac{2}{5} mR^2 \frac{d\omega_y}{dt} = (\bar{C} \cdot \vec{v} + \bar{D} \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{j} - RF_{Rx}$$

$$\frac{2}{5} mR^2 \frac{d\omega_z}{dt} = (\bar{C} \cdot \vec{v} + \bar{D} \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{k}$$

Si multiplicamos por R las ecuaciones de cantidad de movimiento y las sumamos con las del momento cinético conseguimos eliminar la fuerza de ligadura \vec{F}_R .

$$\frac{7}{5} mR^2 \frac{d\omega_x}{dt} = (\bar{C} \cdot \vec{v} + \bar{D} \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{i} - R(\bar{A} \cdot \vec{v} + \bar{B} \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{j}$$

$$\frac{7}{5} mR^2 \frac{d\omega_y}{dt} = (\bar{C} \cdot \vec{v} + \bar{D} \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{j} + R(\bar{A} \cdot \vec{v} + \bar{B} \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{i}$$

Estas dos ecuaciones junto con la proyección sobre el eje OZ del T.M.C y las tres del momento de magnetización, suman seis ecuaciones en total. Serán las que se usen en el programa de simulación.

4.1.1 Adimensionalización

Utilizamos los mismos parámetros dimensionales que empleamos en el capítulo anterior, exceptuando t_{R0} que lo elegiremos de acuerdo a la simplificación de las ecuaciones. Como cambiamos el tiempo característico del problema, también cambian las variables adimensionales con unidad de tiempo, las demás las definimos como en el capítulo anterior.

$$\frac{d\omega_y'}{dt'} = \frac{5}{7} \frac{t_{Ro}^2}{R^2 m} \left[\left(\frac{A_u R^2}{t_{Ro}} \bar{A}' \cdot \vec{v}' + \frac{B_u R}{t_{Ro}} \bar{B}' \cdot \vec{\omega}' \right) \cdot \vec{i} + \left(\frac{C_u R}{t_{Ro}} \bar{C}' \cdot \vec{v}' + \frac{D_u}{t_{Ro}} \bar{D}' \cdot \vec{\omega}' \right) \cdot \vec{j} \right]$$

Imponiendo que el coeficiente que multiplica el primer término sea unitario obtenemos el valor de t_{Ro} y eliminamos todos los parámetros de las ecuaciones.

$$\frac{5 A_u t_{ro}}{7 m} = 1 \rightarrow t_{Ro} = \frac{7 m}{5 A_u}$$

$$\frac{d\omega_x'}{dt'} = - \left(\bar{A}' \cdot \vec{v}' + \frac{8}{3} \bar{B}' \cdot \vec{\omega}' \right) \cdot \vec{j} + \frac{8}{3} \left(\bar{C}' \cdot \vec{v}' + \bar{D}' \cdot \vec{\omega}' \right) \cdot \vec{i}$$

$$\frac{d\omega_y'}{dt'} = \left(\bar{A}' \cdot \vec{v}' + \frac{8}{3} \bar{B}' \cdot \vec{\omega}' \right) \cdot \vec{i} + \frac{8}{3} \left(\bar{C}' \cdot \vec{v}' + \bar{D}' \cdot \vec{\omega}' \right) \cdot \vec{j}$$

$$\frac{d\omega_z'}{dt'} = \frac{28}{3} \left(\bar{C}' \cdot \vec{v}' + \bar{D}' \cdot \vec{\omega}' \right) \cdot \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{\mu}'}{dt'} = \vec{\omega}' \times \vec{\mu}'$$

Sistema de ecuaciones

Haciendo los productos escalares queda el siguiente sistema de ecuaciones que implantaremos en el ordenador.

$$[1] \frac{d\omega_x'}{dt'} = -\frac{2}{3} \mu_x' \mu_y' v_x' + \frac{(3\mu_x'^2 + \mu_y'^2 + 4\mu_z'^2)}{3} v_y' - \frac{8}{3} \mu_y'^2 \omega_x' + \frac{8}{3} \mu_x' \mu_y' \omega_y'$$

$$[2] \frac{d\omega_y'}{dt'} = -\frac{1}{3} (\mu_x'^2 + 3\mu_y'^2 + 4\mu_z'^2) v_x' + \frac{2}{3} \mu_x' \mu_y' v_y' + \frac{8}{3} \mu_x' \mu_y' \omega_x' - \frac{8}{3} \mu_x'^2 \omega_y'$$

$$[3] \frac{d\omega_z'}{dt'} = \frac{28}{3} [-\mu_y' \mu_z' v_x' + \mu_x' \mu_z' v_y' + \mu_x' \mu_z' \omega_x' + \mu_y' \mu_z' \omega_y' - (\mu_x'^2 + \mu_y'^2) \omega_z']$$

$$[4] \frac{d\mu_x'}{dt'} = \mu_z' \omega_y' - \mu_y' \omega_z'$$

$$[5] \frac{d\mu_y'}{dt'} = \mu_x' \omega_z' - \mu_z' \omega_x'$$

$$[6] \frac{d\mu_x'}{dt'} = \mu_y' \omega_x' - \mu_x' \omega_y'$$

4.1.2 Simulación computacional

Uno de los objetivos principales del estudio de las gráficas, será la distancia de detención del imán y su relación con la velocidad inicial. Para algunos casos existirá una relación lineal.

4.1.2.1 Análisis velocidad lineal

Para todos los casos que analizaremos de velocidad lineal inicial, la tomaremos en el eje OX . Al existir simetría de revolución en torno al eje vertical, usando el mismo vector como velocidad inicial siempre, es representativo el resultado.

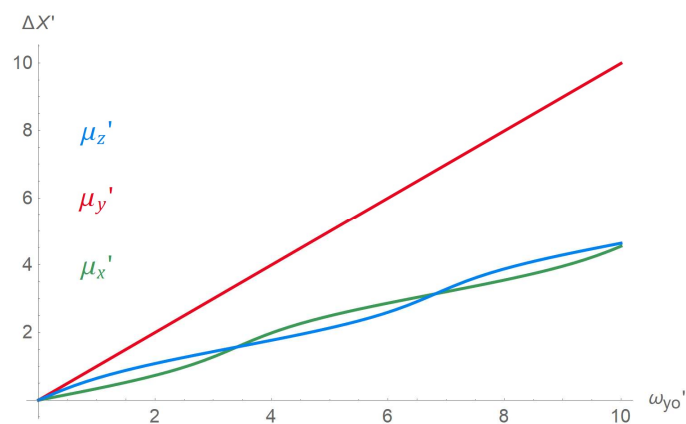


Figura 60. Sin deslizamiento. Distancia de detención. Ejes cartesianos. $\Delta x' - \omega_{y_0}'$.

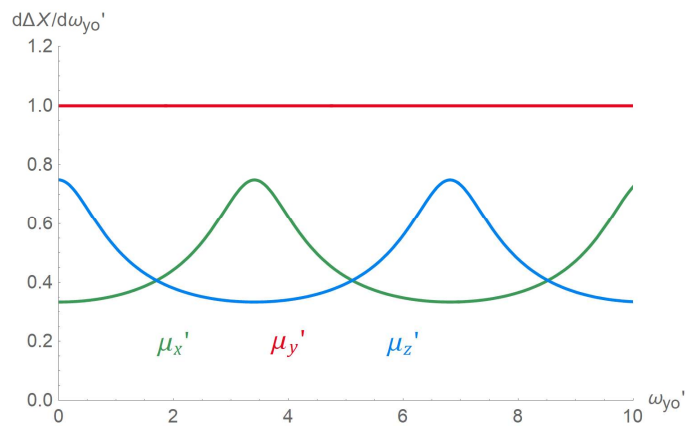


Figura 61. Sin deslizamiento. Distancia de detención. Ejes cartesianos. $d\Delta x'/d\omega_{y_0}' - \omega_{y_0}'$.

Vemos que ocurre lo mismo que en el caso en que la esfera desliza, con la diferencia que la amplitud de la pendiente es mayor aquí. Esto puede deberse a que el movimiento de rodadura de la esfera, hace que varíe el momento dipolar (exceptuando el caso de $\vec{\mu} = \mu_y \vec{j}$)

Igual que en capítulo anterior también representaremos variando el momento dipolar en el plano horizontal $\theta=\pi/2$

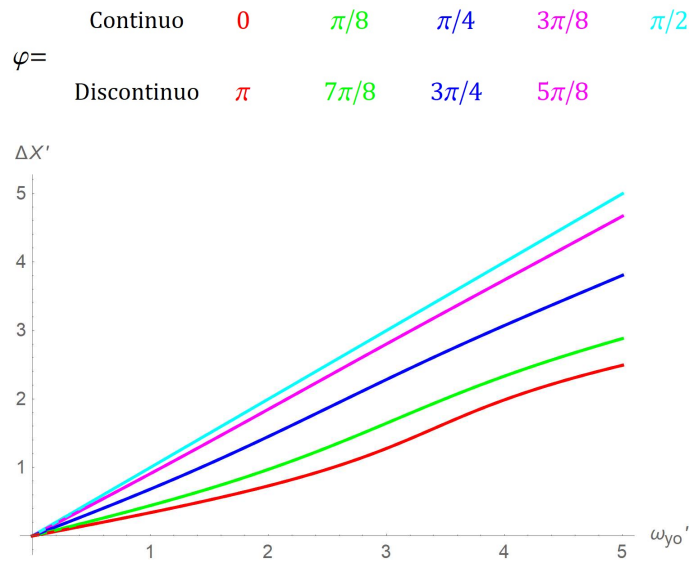


Figura 62. Sin deslizamiento. Distancia de detención $\Delta x' - \omega y'$.

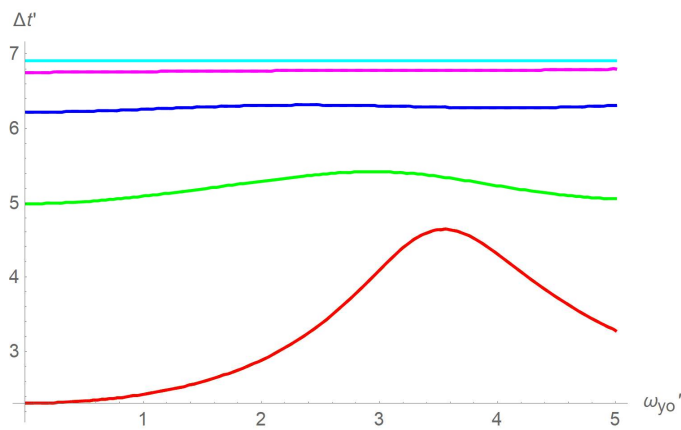


Figura 63. Sin deslizamiento. Tiempo de detención $\Delta t' - \omega y'$.

Existe una mayor diferencia entre las distintas orientaciones que cuando desliza. Verificamos que la distancia de detención es menor para aquellas posiciones del momento dipolar en que varíe más a lo largo del tiempo debido a la rodadura.

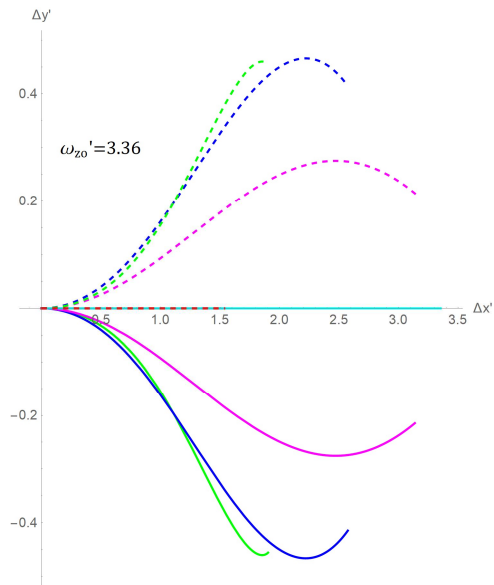


Figura 64. Sin deslizamiento. Trayectoria. $\omega_y' = 3.36$.

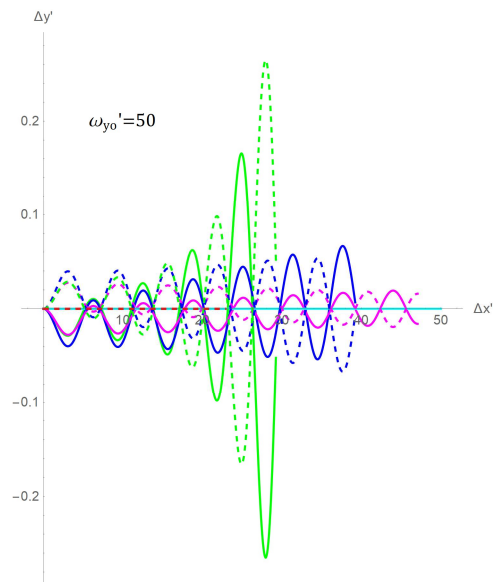


Figura 65. Sin deslizamiento. Trayectoria $\omega_y' = 50$.

Efecto de ω_z'

$\theta =$	Continuo	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
	Discontinuo	π	$7\pi/8$	$3\pi/4$	$5\pi/8$	

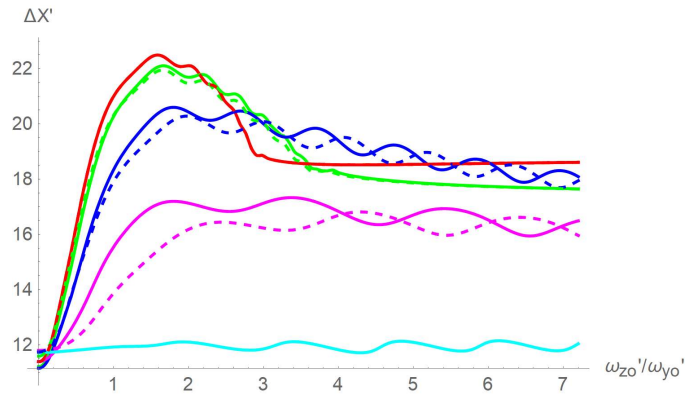


Figura 66. Sin deslizamiento. Velocidad lineal $\Delta x' - \omega_z' / \omega_{y'}$.

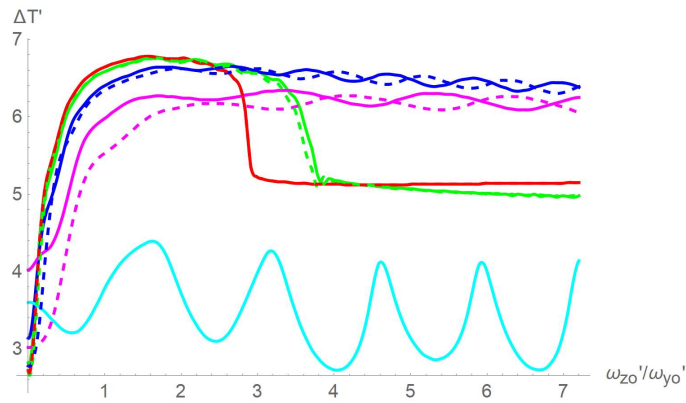


Figura 67. Sin deslizamiento. Velocidad lineal $\Delta t' - \omega_z' / \omega_{y'}$.

Al contrario del caso con deslizamiento, ahora aumenta tanto la distancia de detención como el tiempo de detención si comparamos los resultados de alta velocidad de pivotamiento y pivotamiento nulo. Se debe a que ahora la rotación ω_z' no mantiene ni hace tender al momento dipolar que sea lo más vertical posible por la rodadura. Sin embargo, podemos afirmar que tanto el tiempo como la distancia de detención para una alta $\omega_z' / \omega_{y'}$ son menores que para $\omega_z' / \omega_{y'} \sim 1$.

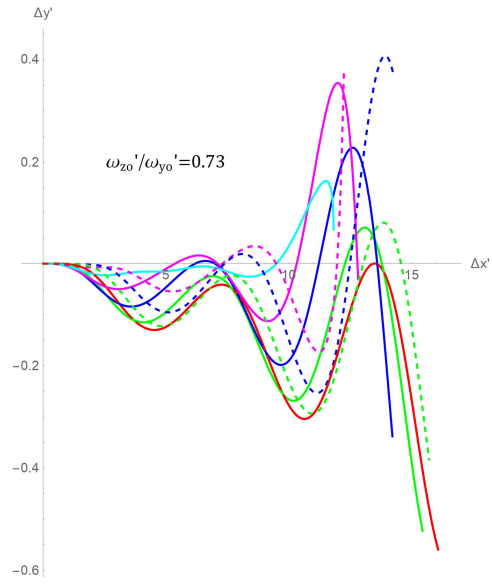


Figura 68. Sin deslizamiento. Trayectoria $\omega_z' / \omega_y' = 0.73$.

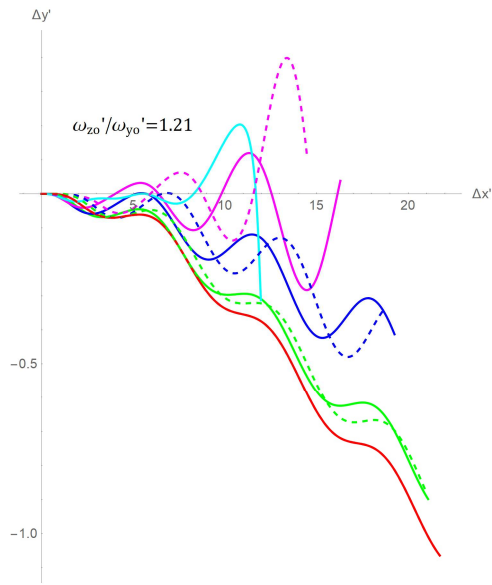


Figura 69. Sin deslizamiento. Trayectoria $\omega_z' / \omega_y' = 1.21$.

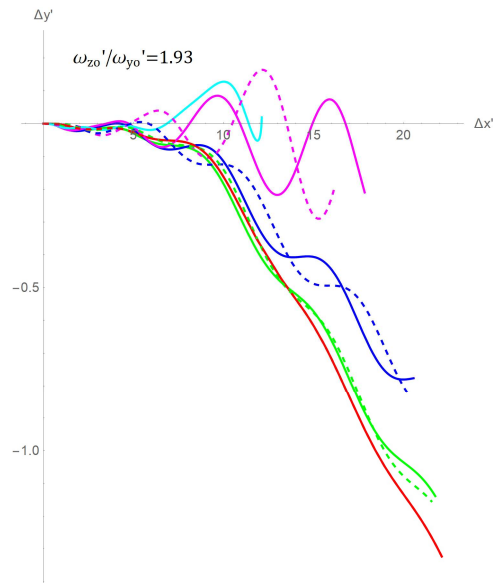


Figura 70. Sin deslizamiento. Trayectoria $\omega_z' / \omega_y' = 1.93$.

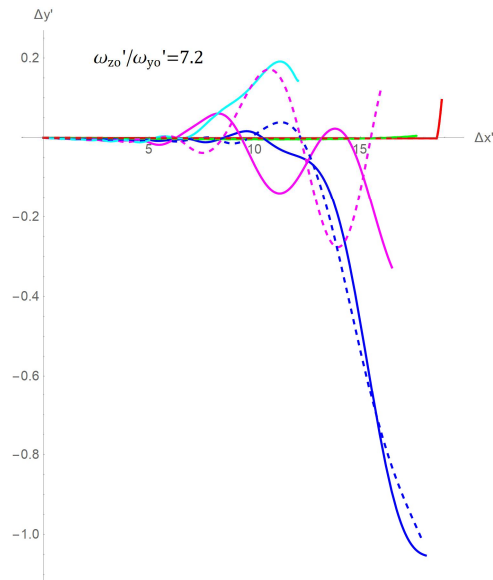


Figura 71. Sin deslizamiento. Trayectoria $\omega_z' / \omega_y' = 7.2$.

La rotación en torno al eje OZ altera la trayectoria haciendo que esta tenga una desviación en OY . Dicha desviación ocurre cuando el momento dipolar varía en el plano $OX-OY$. Por lo tanto, en el caso de que ω_z' sea mucho mayor que ω_y' y el momento dipolar sea inicialmente paralelo o casi paralelo a ω_z' , surgirá un efecto giroscópico que mantendrá $\vec{\mu}$ en el plano $OX-OZ$ produciendo una trayectoria rectilínea (lo vemos en la figura 71).

4.1.2.2 Análisis rotación pura

En el capítulo anterior analizamos la cinemática cuando el movimiento de la esfera únicamente tenía dos rotaciones: la rotación en torno al eje z o x . Esta vez solo analizamos la rotación ω_z , porque la

rotación ω_x va ligada al desplazamiento que ya hemos visto en el anterior subapartado.

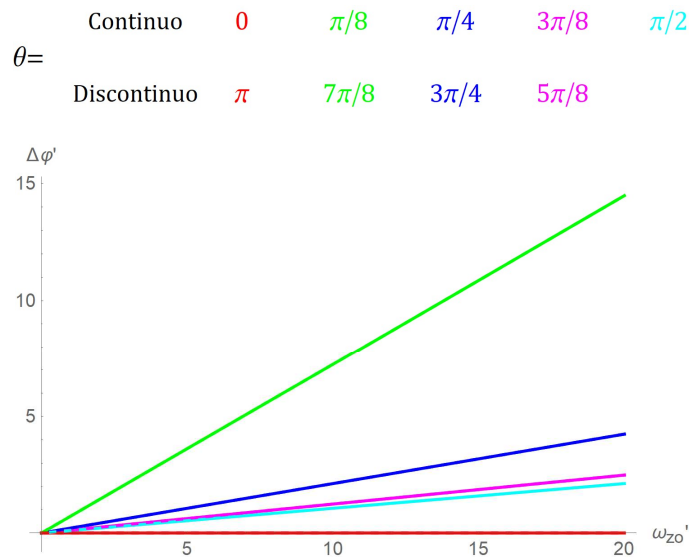


Figura 72. Sin deslizamiento. Ángulo de detención. $\Delta\varphi' - \omega_z'$

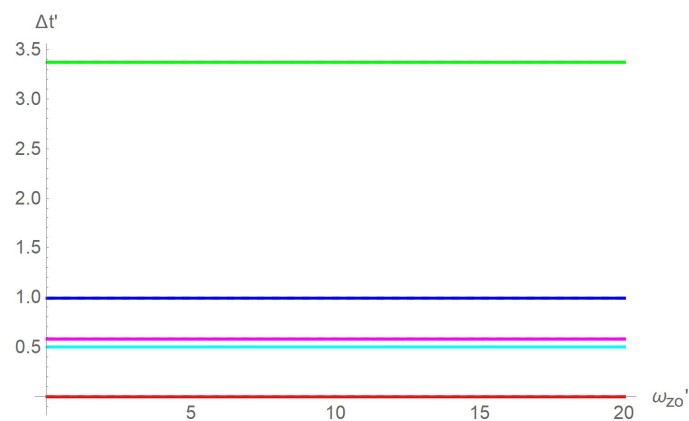


Figura 73. Sin deslizamiento. Ángulo de detención. $\Delta t' - \omega_z'$

El ángulo recorrido es directamente proporcional a la velocidad angular inicial y es mayor cuando el momento dipolar forma un menor ángulo con el eje OZ (ya sabemos que al formar un menor ángulo la rotación disipa menos energía). Para un mismo ángulo entre el momento dipolar y el eje OZ , la dinámica es igual (líneas discontinuas coinciden con las continuas). Por último, es evidente que el tiempo de detención no depende de la velocidad, y el ángulo de detención aumenta linealmente, de nuevo porque el ángulo θ se mantiene constante en el tiempo para cada una de las orientaciones.

En este caso no existe ningún desplazamiento de la esfera, es decir la fuerza neta aplicada sobre la esfera es nula y solo hay un par aplicado al eje OZ . El momento dipolar mantiene en todo momento su componente vertical constante $\mu_z = cte$

Si retomamos las ecuaciones de la aceleración angular en los ejes OX y OY y particularizamos las velocidades para las condiciones iniciales planteadas en esta rotación pura, verificamos que la aceleración angular en OY y OX son nulas.

$$\vec{v}(0) = 0 \quad \vec{\omega}(0) = \omega_z \vec{k}$$

$$\frac{7}{5}mR^2 \frac{d\omega_x}{dt} = (\bar{C} \cdot \vec{v}(0) + \bar{D} \cdot \vec{\omega}(0)) \cdot \vec{i} - R(\bar{A} \cdot \vec{v}(0) + \bar{B} \cdot \vec{\omega}(0)) \cdot \vec{j} = 0$$

$$\frac{7}{5}mR^2 \frac{d\omega_y}{dt} = (\bar{C} \cdot \vec{v}(0) + \bar{D} \cdot \vec{\omega}(0)) \cdot \vec{j} + R(\bar{A} \cdot \vec{v}(0) + \bar{B} \cdot \vec{\omega}(0)) \cdot \vec{i} = 0$$

5 CASO PRÁCTICO. IMÁN RODANTE DE NEODIMIO

Tras haber hecho un análisis adimensional en los dos capítulos anteriores, en este daremos valor a las magnitudes físicas. Supongamos que la esfera es de neodimio y tiene un radio de un centímetro. Su imanación de saturación es $M_s = 1.27324 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ y la densidad $D = 6800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, datos fundamentales para poder calcular el momento dipolar y la masa respectivamente.

A continuación, calcularemos los parámetros del sólido: volumen (V), masa (m) y momento dipolar (μ):

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4.186 \cdot 10^{-6} \text{m}^3, \quad m = V \cdot D = 0.0285 \text{ kg}, \quad \mu = V \cdot M_s = 5.33 \text{Am}^2.$$

El plano conductor será una chapa de cobre de un milímetro de espesor, por lo tanto:

$$\delta = 10^{-3} \text{m} \quad \sigma = 5.98 \cdot 10^7 \text{S} \cdot \text{m}^{-1} \text{ [8]}.$$

Como venimos haciendo anteriormente, analizaremos los dos casos: con deslizamiento entre esfera y chapa y rodadura ideal sin deslizamiento.

5.1. Con deslizamiento

5.1.1 Dimensionalización

Las integraciones numéricas del problema seguiremos haciéndolas con variables adimensionales. Después de eso, únicamente tendremos que dar dimensión a las variables haciendo uso de los parámetros dimensionales definidos en capítulos anteriores.

$$A_u = \frac{3\sigma\delta\mu_0^2\mu^2}{512\pi z^4} = 0.4993\text{N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}}, \quad t_d = \frac{m}{A_u} = 0.05705\text{s}$$

$$t = t' t_d = 0.05805 t' \text{s}, \quad \vec{v} = \vec{v}' \frac{R}{t_d} = 0.1753 \vec{v}' \frac{m}{s},$$

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{\omega}'}{t_d} = 17.53 \vec{\omega}' \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \vec{\mu} = \vec{\mu}' \mu = 5.33 \vec{\mu}' \text{Am}^2.$$

El tiempo característico del problema (t_d), determinará la dinámica de la esfera para unas condiciones iniciales dadas, a menor t_d significa que el sólido se detiene antes y tiene un menor recorrido; es decir, la frenada es más eficiente. Este parámetro a su vez depende de las propiedades físicas de la superficie conductora y el imán:

$$t_d = f(\sigma, \delta, R, M_s, D)$$

5.1.2 Simulación computacional

A continuación, volveremos a representar la “distancia de detención” y el “tiempo de detención”, esta vez usando variables dimensionales en unidades del sistema internacional. También veremos que la mayor parte de la energía se disipa al comienzo del movimiento porque la potencia de disipación P es mayor a causa de una mayor velocidad. Cuando exista velocidad lineal y también angular, distinguiremos entre la potencia de disipación de traslación P_t y la de rotación P_r .

$$P = P_r + P_t, \quad P_r = \vec{M}_G \cdot \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \vec{C} \cdot \vec{v} + \vec{\omega} \cdot \vec{D} \cdot \vec{\omega}, \quad P_t = \vec{F}_m \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{A} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{B} \cdot \vec{\omega}$$

5.1.2.1 Velocidad lineal

Continuo	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
Discontinuo	π	$7\pi/8$	$3\pi/4$	$5\pi/8$	

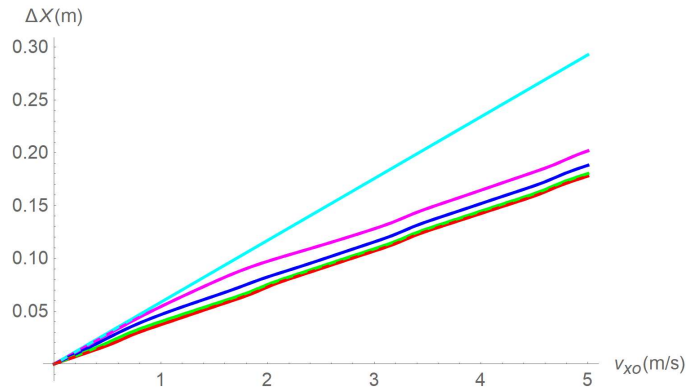


Figura 74. Deslizamiento dimensional. Distancia de detención. $\Delta x - v_x$.

Teniendo en cuenta las distancias recorridas y la velocidad inicial que se le imprime al imán, podemos concluir que el efecto de disipación es importante.

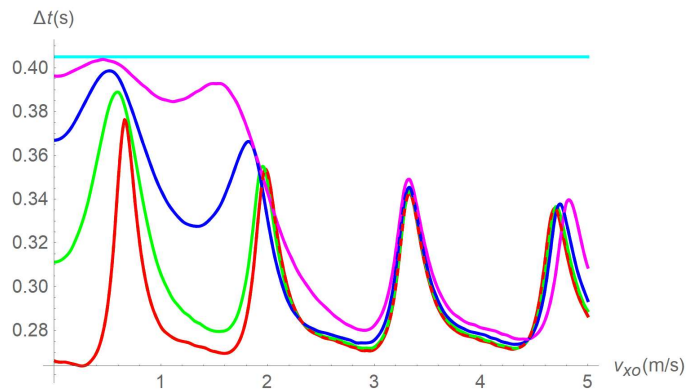


Figura 75. Deslizamiento dimensional. Tiempo de detención. $\Delta t - v_x$.

Para las orientaciones de φ distintas a $\pi/2$ el tiempo de detención sigue un transitorio hasta alcanzado cierta velocidad, a partir de la cual es periódico. Esto se debe a la rotación del imán, si $\varphi = \pi/2$ no rota y es constante.

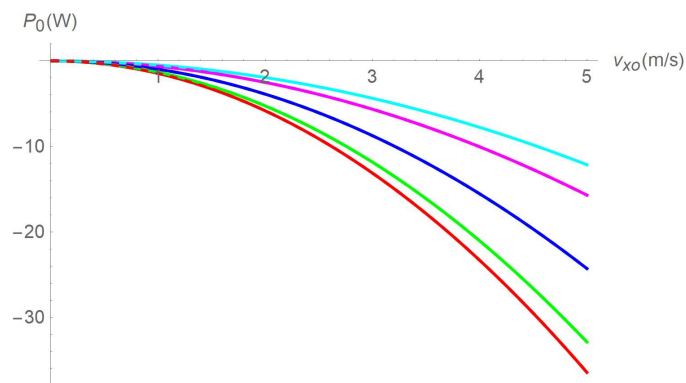


Figura 76. Deslizamiento dimensional. Potencia de disipación inicial. Velocidad v_x . $P_0 - v_x$

Como es de esperar las que dan una menor distancia de detención, son las que disipan más energía.

En la figura superior, apreciamos que la potencia inicial disipada sigue una función no lineal aproximadamente cuadrática con el aumento de la velocidad.

$$P_0 \approx P_{t0} \approx \vec{v}_0 \cdot \vec{A} \cdot \vec{v}_0 \propto v_0^2$$

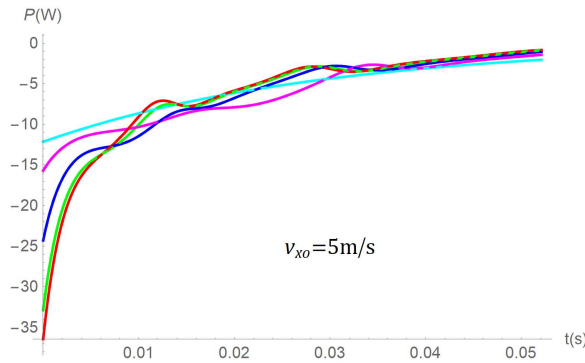


Figura 77. Deslizamiento dimensional. Evolución temporal potencia. Velocidad v_x . $P-t$

La representación temporal de la potencia muestra que la mayor parte de la energía es disipada al comienzo del movimiento, cuando la velocidad es más alta. Esto supone una fuerte desaceleración al principio y después menor.

Efecto de ω_z

Como vimos en el tercer capítulo uno de los casos más interesantes entre combinar velocidad lineal con angular, es el efecto del pivotamiento ω_z . Gracias al análisis dimensional, sabemos que este efecto depende del cociente entre las velocidades adimensionales, pero no es lo mismo que el cociente entre las velocidades dimensionales. Ya sabemos que el efecto se consigue con una relación aproximada de tres.

$$3 \sim \frac{\omega'_z}{v'_x} = R \frac{\omega_z}{v_x} \rightarrow \omega_z = 300 v_x$$

La relación es muy grande porque el radio es pequeño. Por ejemplo, para una velocidad inicial de 5m/s se necesitaría una angular de 1500rad/s, un valor disparatado. Es importante tener presente que aumentando el radio de la esfera buscando este efecto, también aumenta t_d , incrementando la distancia de detención.

La dependencia del radio también ocurre para el resto de relaciones entre velocidad angular y lineal.

	Continuo	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
$\theta =$	Discontinuo	π	$7\pi/8$	$3\pi/4$	$5\pi/8$	

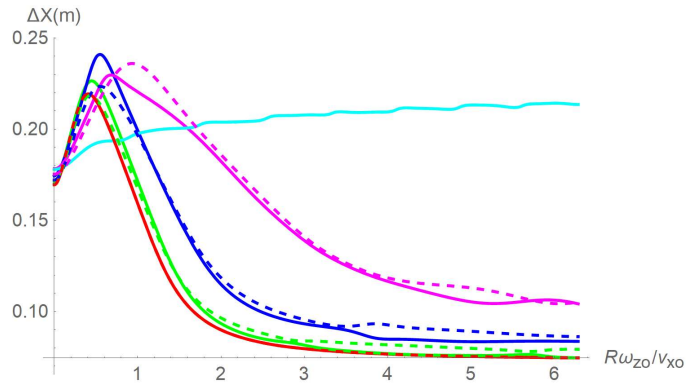


Figura 78. Deslizamiento dimensional. Distancia de detención. $\Delta x - r\omega_z/v_x$

En esta gráfica la velocidad lineal ha sido en todo momento $v_x = 5\text{m/s}$ y

$\omega_z \in [0, 30\ 000]\text{r. p. m.}$

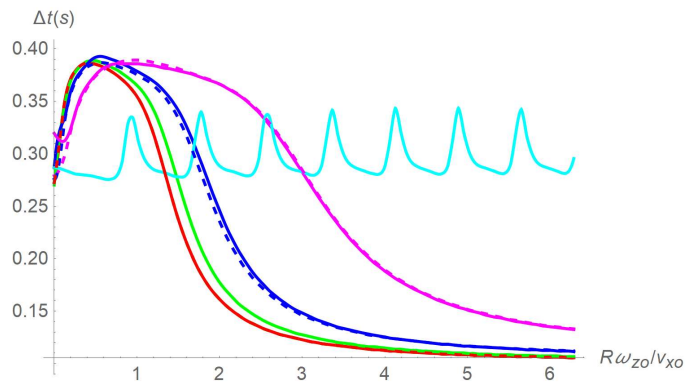


Figura 79. Deslizamiento dimensional. Tiempo de detención. $\Delta t - r\omega_z/v_x$

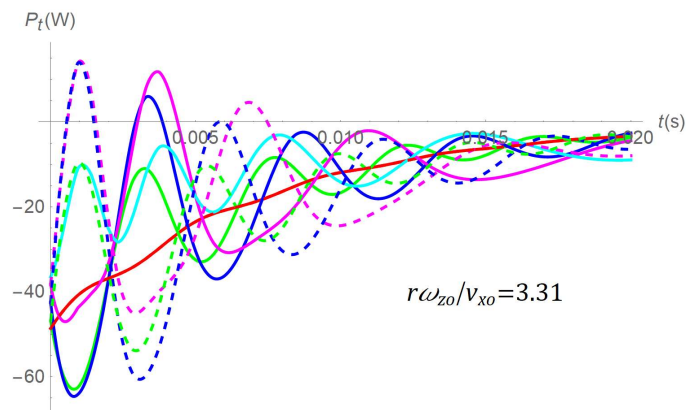


Figura 80. Deslizamiento dimensional. Potencia de traslación. $P_t - t$.

La potencia disipada en traslación es superior cuando introducimos velocidad angular en el OZ porque evita que el momento dipolar se ponga paralelo al eje OY , la orientación que peor disipa la energía de traslación. Según la posición del momento dipolar en cada instante, la disipación es mayor o menor pudiendo incluso aumentar la energía cinética en traslación momentáneamente (por supuesto la mecánica no, es físicamente imposible y se compensa con la disminución de energía de rotación). La orientación paralela al eje de rotación en el momento inicial tiende a mantenerse constante y es una buena orientación para disipar energía de traslación, por eso su distancia recorrida es menor.

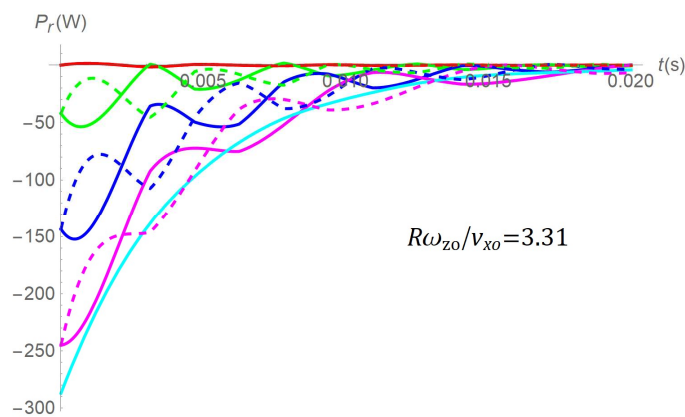


Figura 81. Deslizamiento dimensional. Potencia de rotación. P_r-t .

La figura superior nos muestra que la potencia disipada en rotación es mayor con ángulo de θ lo más cercano a $\pi/2$ (ángulo recto entre μ y ω).

Si nos fijamos en el tiempo en que las dos gráficas de potencia tienden a cero nos daremos cuenta de que es un tiempo muy inferior al denominado tiempo de detención. Esto es simplemente porque llegado el momento en que la potencia disipada es tan baja, tarda mucho en alcanzarse la milésima parte de la velocidad inicial.

Teniendo en cuenta la alta velocidad angular que hemos usado, podemos concluir que este efecto giroscópico solo lo podremos aprovechar en situaciones en que el imán sea de un radio mucho mayor o para velocidades lineales muy pequeñas.

5.2. Sin deslizamiento

Para que se dé la rodadura ideal sin deslizamiento, es necesario que exista suficiente fricción entre el imán y la superficie de cobre. Consecuentemente, uno de aspectos que vamos a estudiar en este apartado es la fuerza de rozamiento que exige el imán para no deslizarse y compararla con la fuerza máxima de rozamiento dependiente de la fuerza normal. De esta manera, podremos determinar las situaciones en las que el imán es más propenso a deslizarse.

Ninguno de los parámetros físicos del problema es diferente a los que usamos para el movimiento con deslizamiento.

Usando la proyección en el eje OZ en el T.C.M ya planteada en el capítulo cuatro, podemos calcular la fuerza normal sobre el imán.

$$0 = N + (\bar{A} \cdot \vec{v} + \bar{B} \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{k}$$

Expresándolo en forma escalar:

$$N = \frac{\sigma \delta \mu_0^2}{64\pi R^3} (\omega_y \mu_x \mu_z - \omega_x \mu_y \mu_z)$$

Por otra parte, está la fuerza de rozamiento necesaria para garantizar la rodadura:

$$mR \frac{d\omega_x}{dt} = -(\bar{A} \cdot \vec{v} + \bar{B} \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{j} - F_{Ry}$$

$$mR \frac{d\omega_y}{dt} = (\bar{A} \cdot \vec{v} + \bar{B} \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{i} + F_{Rx}$$

Pasando a la forma escalar y despejando:

$$F_{Ry} = \frac{\sigma \delta \mu_0^2}{512\pi R^4} \left(3 \left(2v_x \mu_x \mu_y + v_y (\mu_x^2 + 3\mu_y^2 + 4\mu_z^2) \right) \right. \\ \left. + 8R (\omega_x (\mu_y^2 + \mu_z^2) - \omega_y \mu_x \mu_y - \omega_z \mu_x \mu_z) \right) - mR \frac{d\omega_x}{dt}$$

$$F_{Rx} = \frac{\sigma \delta \mu_0^2}{512\pi R^4} \left(3 \left(2v_y \mu_x \mu_y + v_x (3\mu_x^2 + \mu_y^2 + 4\mu_z^2) \right) \right. \\ \left. + 8R (\omega_x \mu_x \mu_y + \omega_z \mu_y \mu_z - \omega_y (\mu_x^2 + \mu_z^2)) \right) + mR \frac{d\omega_y}{dt}$$

Lo que nos interesa estimar es el módulo de la fuerza de rozamiento:

$$|\vec{F}_R| = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

5.1.3 Dimensionalización

Como ya sabemos, en este caso cambia el valor del tiempo característico, t_{Ro} .

$$t_{Ro} = \frac{7 \text{ m}}{5 A_u} = 0.0799\text{s}$$

La integración numérica de las ecuaciones también se hace con las variables adimensionales y posteriormente se hacen los siguientes cambios.

$$t = t' t_{Ro} = 0.0799 t' \text{ s} \quad \vec{\omega} = 12.521 \vec{\omega}' \text{ rad/s} \quad \vec{v} = 0.1252 \vec{v}' \text{ m/s}$$

Las demás variables adimensionales mantienen la misma relación que en el caso de movimiento con deslizamiento puro.

5.1.4 Simulación computacional

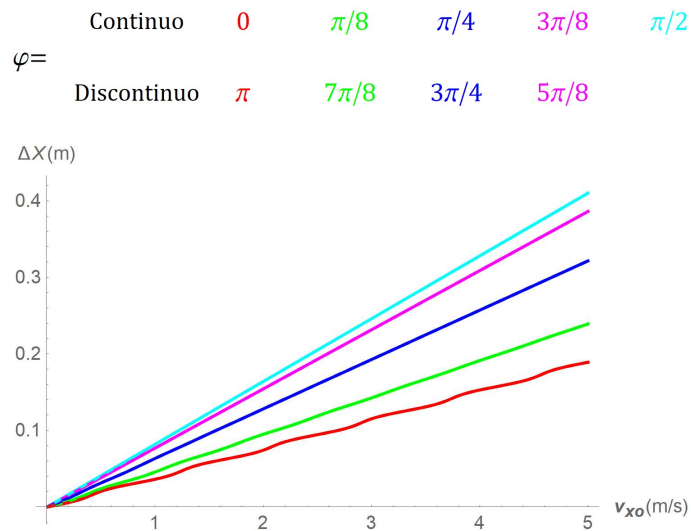


Figura 82. Sin deslizamiento dimensional. Distancia de detención. $\Delta x - v_x$

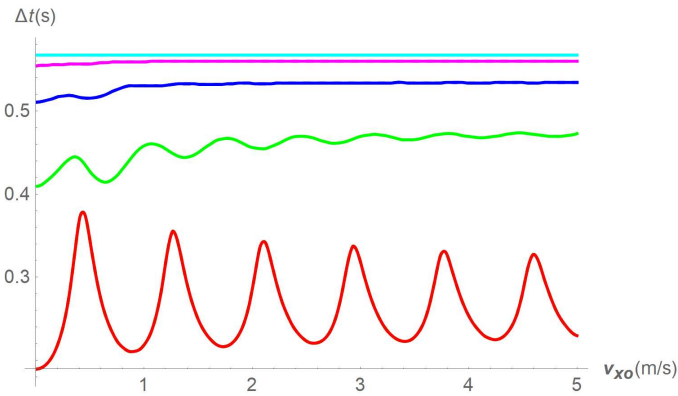


Figura 83. Sin deslizamiento dimensional. Tiempo de detención. $\Delta t-v_x$

Vemos que para la misma velocidad la distancia de detención es ahora mayor que cuando la esfera deslizaba. Esto simplemente se debe a la mayor energía cinética inicial, ya que la energía de traslación es la misma pero ahora además existe una energía cinética de rotación. Además, la rotación en torno al eje OY favorece que el momento dipolar se aproxime más rápido a la orientación con $\varphi = \pi/2$, posición de mínima disipación de energía cinética de rotación (nula) y también de traslación.

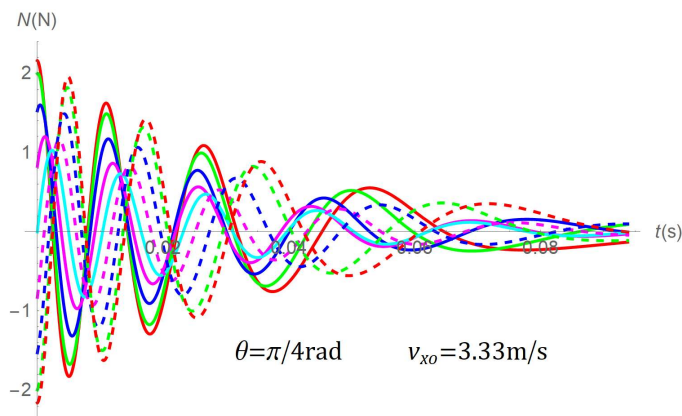


Figura 84. Sin deslizamiento dimensional. Fuerza normal. $N-t$

La representación de la fuerza normal frente al tiempo, muestra que esta va alternando su dirección, lo que significa que en el momento en que es negativa estaría en una situación de deslizamiento o levitación y no se cumpliría la premisa de rodadura sin deslizamiento. Esto demuestra la dificultad que existe para que se produzca dicho supuesto, la propia rodadura cambia la orientación del momento dipolar e inevitablemente produce estas oscilaciones en la fuerza normal. La única forma de evitar que la esfera deslice, es que su velocidad inicial sea tan pequeña que no gire lo suficiente como para cambiar el signo de las componentes del momento dipolar. Comparando los rangos máximos y

mínimos de la fuerza normal, vemos que son mucho mayores que la fuerza gravitatoria en caso de haberla considerado, lo que sugiere que la esfera tiene una fuerte imanación en comparación a su masa.

$$mg < 0.3N$$

Sería diferente y mucho más fácil pretender que la esfera deslice, gracias a que no existiría una rodadura que cambie la orientación del momento dipolar. Con orientarlo inicialmente en una posición con fuerza normal negativa y mantenerla e introduciendo una rotación con efecto giroscópico (si es necesario) se consigue.

La figura inferior representa la fuerza de rozamiento necesaria para producir la rodadura sin deslizamiento:

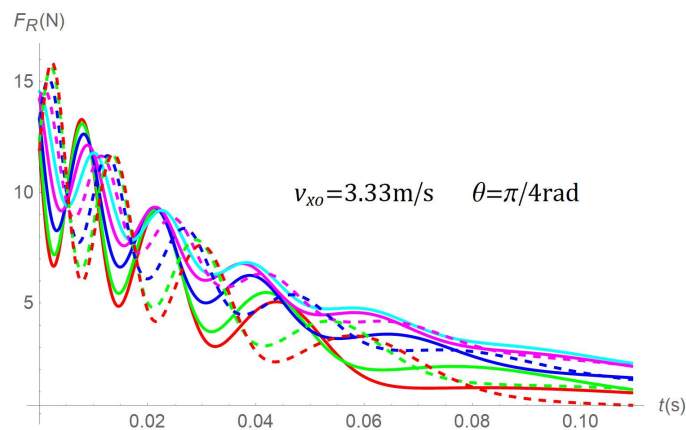


Figura 85. Sin deslizamiento dimensional. Fuerza de rozamiento. F_R-t

Además de que en ciertos instantes pueda no haber fuerza normal de la superficie sobre la esfera, en la figura superior vemos que la fuerza de rozamiento necesaria es mucho mayor que la normal, lo que significa que no se producirá la supuesta rodadura sin deslizamiento en ningún momento. Observando las expresiones de la fuerza normal y la de rozamiento necesaria, el deslizamiento puede deberse a que el radio en este caso sea demasiado pequeño.

6 CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Después de haber analizado la dinámica del imán con distintas condiciones iniciales podemos sacar algunas conclusiones. De entrada, conviene destacar la gran relevancia de las características físicas en el problema como, por ejemplo, el radio de la esfera, su imanación de saturación, la densidad o la conductividad de la superficie conductora. La variación de dichos parámetros va a determinar la eficacia en la frenada y el tipo de relación que se puede producir entre las distintas variables cinemáticas.

En los dos casos ideales analizados, movimiento con deslizamiento y rodadura sin deslizamiento, los resultados en la distancia de detención presentan poca diferencia. Para una misma velocidad la distancia recorrida es ligeramente superior en el caso del movimiento con rodadura, aunque hay que tener en cuenta que es porque lleva una mayor energía cinética. Por otra parte, el hecho de que la esfera deslice puede permitir un mayor control del movimiento porque el momento dipolar no varía a causa de la rodadura, únicamente lo hace con el momento magnético aplicado, que puede compensarse imprimiendo una velocidad angular inicial induciendo un efecto giroscópico.

Otro punto que cabe destacar es la linealidad que puede o no existir entre la velocidad inicial y la distancia o el ángulo rotado, ya sea para un caso de velocidad lineal o angular respectivamente. Cuando la potencia disipada a lo largo del tiempo únicamente varía porque disminuye la velocidad y no por una orientación distinta del momento dipolar, el ángulo o la distancia recorrida serán directamente proporcionales a la velocidad inicial y el tiempo que tarde en alcanzarse la posición final no depende de la velocidad, es constante frente a esta. En cambio, en caso de que la potencia disipada dependa también de la orientación del momento dipolar, podríamos decir que velocidad y recorrido tienen una relación casi lineal, una linealidad con oscilaciones siguiendo la forma de una onda. Esto se ve reflejado en el tiempo de detención como una función periódica, periodo que se debe a las vueltas que da el imán.

En presencia de disipación, la dinámica de los sistemas tiende a la situación de mínima energía, en la cual se anulan fuerzas y momentos y se alcanza el equilibrio: por ejemplo, una vela de un barco que no esté bien atada no se opondrá al viento y se quedará como una bandera. Lo mismo ocurre con el imán: una vez que empieza a moverse, va a buscar la orientación del momento dipolar en que sufra menos fuerzas y momentos disipando menos energía (a excepción de cuando inicialmente la

orientación es simétrica). Esta idea podemos aplicarla por separado a las distintas velocidades: cada una de ellas tendrá una orientación distinta con disipación de energía mínima. Por lo tanto, si se da el caso en que hay una velocidad muy grande que no nos interese disipar y cuya orientación de mínima disipación coincide con la máxima (o al menos no la mínima) de una menor velocidad objetivo que queremos reducir, estamos optimizando la frenada. Lo vemos en el efecto giroscópico del movimiento con deslizamiento cuando queremos frenar la velocidad lineal. Sin embargo, también podemos aplicar esto al revés: reduciendo la velocidad angular a base de introducir una gran velocidad lineal.

Sabemos que las dos situaciones analizadas son ideales. Para complementar este estudio teórico podría plantearse un modelo físico más complejo en el que se contemple que la esfera tiene un deslizamiento parcial o pseudodeslizamiento y se añada el peso. El modelo realista sería una hibridación de los planteados en este trabajo y serviría para saber en qué situaciones se asemeja más a cada uno de los modelos ideales.

Por supuesto, otro posible trabajo debería ser empírico, con experimentación en el laboratorio y tratando de conseguir las situaciones ideales para verificar que se asemejan a los resultados obtenidos de la integración numérica.

Actualmente este fenómeno de disipación de energía por las corrientes de Foucault se usa para frenar rotores. Desde el punto de vista energético resultan poco eficientes porque no sólo desaprovechan la energía cinética que llevan los rotores, sino que también tienen un gasto de electricidad al usar electroimanes. Quizás sea posible sustituir los electroimanes por imanes dejando entre la placa conductora y el imán un aislante, de manera que el actuador del freno retire el aislante permitiendo que se induzcan corrientes sobre la placa.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

- [1] laplace.us.es (Imagen tomada en 2019).
[http://laplace.us.es/wiki/index.php/Ley_de_Faraday_\(GIE\)](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Ley_de_Faraday_(GIE))
- [2] Rodríguez Danta Marcelo, González Fernández Antonio, Bellver Cebreros Consuelo. Campos Electromagnéticos, 1999.
- [3] fisicalab.com (Imagen tomada en 2019).
<https://www.fisicalab.com/apartado/campo-magnetico-creado-corriente-electrica#contenidos>
- [4] Ángel Franco García (Imagen tomada en 2019).
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica_/elecmagnet/faraday/foucault/foucault.html
- [5] laplace.us.es (Consultado en 2019).
http://laplace.us.es/wiki/index.php/Acci%C3%B3n_de_un_campo_magn%C3%A9tico_sobre_un_dipolo_magn%C3%A9tico
- [6] González Fernández Antonio. Comunicación privada.
- [7] Toscano Jiménez Manuel. Mecánica Ingenieros Industriales segundo curso, 2008.
- [8] wikipedia.org (Consultado en 2019).
https://en.wikipedia.org/wiki/Electrical_resistivity_and_conductivity
- [9] Cheng, David K. Fundamentos de Electromagnetismo para Ingeniería, 1998.

En este anexo se muestran los cálculos omitidos para obtener la densidad de corriente inducida. Únicamente se encuentran los casos tomados como ejemplo en el trabajo; es decir, la densidad de corriente inducida por la velocidad angular en sus tres componentes y por la velocidad lineal paralela a OY .

Magnetización paralela al eje OZ con velocidad lineal v_y

$$\vec{\mu}_2 = \mu \vec{k}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mu(-h)) \Delta \vec{r} - |\Delta \vec{r}|^2 \mu \vec{k}}{|\Delta \vec{r}|^5}$$

$$\frac{\partial \vec{B}_2}{\partial \Delta y} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(-3\mu \Delta y h \vec{j} - 2\Delta y \mu \vec{k}) |\Delta \vec{r}|^5 - \frac{5}{2} 2\Delta y |\Delta \vec{r}|^3 (-3\mu h \Delta \vec{r} - |\Delta \vec{r}|^2 \mu \vec{k})}{|\Delta \vec{r}|^{10}}$$

$$\frac{\partial \vec{B}_2}{\partial \Delta y} \cdot \vec{k} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{-2 |\Delta \vec{r}|^5 \Delta y \mu - 15h^2 \Delta y |\Delta \vec{r}|^3 \mu + 5 |\Delta \vec{r}|^5 \Delta y \mu}{|\Delta \vec{r}|^{10}} = \frac{3 \mu_0 \mu}{4 \pi} \left(\frac{\Delta y}{|\Delta \vec{r}|^5} - \frac{5 \Delta y h^2}{|\Delta \vec{r}|^7} \right)$$

$$\frac{\partial \vec{B}_2}{\partial \Delta y} \cdot \vec{k} = \frac{3\mu_0\mu}{4\pi} \rho \text{sen}(\theta) \left(\frac{1}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{5h^2}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}} \right)$$

$$c_2 = \delta \sigma v_y \frac{3\mu_0\mu}{4\pi}$$

$$f_2(\rho) = \rho \left(\frac{1}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{5h^2}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}} \right)$$

$$\left(\frac{\partial(\rho K_{2\rho})}{\partial \rho} + \frac{\partial K_{2\theta}}{\partial \theta} \right) \frac{1}{\rho} = 0$$

$$\left(\frac{\partial(\rho K_{2\theta})}{\partial \rho} - \frac{\partial K_{2\rho}}{\partial \theta} \right) \frac{1}{\rho} = c_2 f_2 \text{sen}(\theta)$$

$$K_{2\rho} = A_{2\rho}(\rho) \cos(\theta)$$

$$K_{2\theta} = A_{2\theta}(\rho) \text{sen}(\theta)$$

$$\frac{\partial(\rho A_{2\rho})}{\partial\rho} + A_{2\theta} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho A_{2\theta})}{\partial\rho} + A_{2\rho} = c_2 \rho f_2$$

$$A_{2s} = A_{2\rho} + A_{2\theta}$$

$$A_{2d} = A_{2\rho} - A_{2\theta}$$

Ecuación suma

$$\frac{\partial(\rho A_{2s})}{\partial\rho} + A_{2s} = \rho A_{2s}' + 2A_{2s} = c_2 \rho f_2$$

$$\rho A_{2sh}' + 2A_{2sh} = 0 \rightarrow A_{2sh} = c_{2Bs} \rho^{-2}$$

$$A_{2sp} = U_{2As} \rho^{-2}$$

$$\rho(U_{2A}' \rho^{-2} - 2U_{2As} \rho^{-3}) + 2U_{2As} \rho^{-2} = U_{2As}' \rho^{-1} = c_2 \rho f_2$$

$$U_{2Bs} = c_2 \int \rho^3 \left(\frac{1}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}} - \frac{5h^2}{(\rho^2 + h^2)^{7/2}} \right) d\rho = -c_2 \frac{\rho^4}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}}$$

$$A_{2sp} = -c_2 \frac{\rho^4}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}}$$

$$A_{2s} = A_{2sh} + A_{2sp} = \frac{1}{\rho^2} \left(c_{Bs} - c_2 \frac{\rho^4}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}} \right)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} A_s(\rho) \neq \infty \rightarrow c_{Bs} - c_2 \frac{8}{15h} = 0 \rightarrow c_{Bs} = 0$$

Ecuación diferencia

$$\frac{\partial(\rho A_{2d})}{\partial\rho} - A_{2d} = \rho A_{2d}' = -c_2 \rho f_2$$

$$A_{2d} = A_{2dh} + A_{2dp}$$

$$\rho A_{2dh}' = 0 \rightarrow A_{2dh} = c_{2Bd}$$

$$\rho A_{2dp}' = -c_2 \rho f_2$$

$$A_{2dp} = -c_2 \int \rho \left(\frac{1}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{5h^2}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}} \right) d\rho = -c_2 \frac{2h^2 - \rho^2}{3(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$A_{2d} = -c_2 \frac{2h^2 - \rho^2}{3(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} + c_{2Bd}$$

$$A_{2\rho} = \frac{1}{2}(A_{2d} + A_{2s}) = \frac{1}{2} \left[c_{2Bd} - c_2 \frac{2h^2 - \rho^2}{3(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} - c_2 \frac{\rho^2}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}} \right]$$

$$A_{2\theta} = \frac{1}{2}(A_{2s} - A_{2d}) = \frac{1}{2} \left[-c_{2Bd} + c_2 \frac{2h^2 - \rho^2}{3(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} - c_2 \frac{\rho^2}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}} \right]$$

Por simetría, existe la condición de que en $\rho = 0$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \vec{K}_2(\rho, \theta) = (0, \theta) \rightarrow A_{2\rho} = A_{2\theta} = 0$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} A_{2\rho} = \frac{1}{2} \left[c_{2Bd} - c_2 \frac{2}{3h^3} \right] \rightarrow c_{2Bd} = c_2 \frac{2}{3h^3}$$

$$K_{2\rho} = \delta\sigma v_y \frac{3\mu_0\mu}{8\pi} \left[\frac{2}{3h^3} - \frac{2h^2 - \rho^2}{3(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{\rho^2}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \right] \cos(\theta)$$

$$K_{2\theta} = \delta\sigma v_y \frac{3\mu_0\mu}{8\pi} \left[\frac{2h^2 - \rho^2}{3(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{3h^3} - \frac{\rho^2}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}} \right] \text{sen}(\theta)$$

Magnetización paralela al movimiento con velocidad lineal v_y

$$\vec{\mu}_3 = \mu \cdot \vec{j}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mu\Delta y\Delta\vec{r} - |\Delta\vec{r}|^2\mu\vec{j}}{|\Delta\vec{r}|^5}$$

$$\frac{\partial \vec{B}_3}{\partial \Delta y} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(3\mu(\Delta x \vec{i} + 2\Delta y \vec{j} - h\vec{k}) - 2\Delta y \mu \vec{j})|\Delta \vec{r}|^5 - \frac{5}{2} 2\Delta y |\Delta \vec{r}|^3 (3\mu \Delta y \Delta \vec{r} - |\Delta \vec{r}|^2 \mu \vec{j})}{|\Delta \vec{r}|^{10}}$$

$$\frac{\partial \vec{B}_3}{\partial \Delta y} \cdot \vec{k} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{-3\mu h |\Delta \vec{r}|^5 + \frac{5}{2} |\Delta \vec{r}|^3 2\Delta y^2 3\mu h}{|\Delta \vec{r}|^{10}}$$

$$\frac{\partial \vec{B}_3}{\partial \Delta y} \cdot \vec{k} = \frac{3\mu_0 \mu h}{4\pi} \left(\frac{5\Delta y^2}{|\Delta \vec{r}|^7} - \frac{1}{|\Delta \vec{r}|^5} \right)$$

$$\frac{\partial \vec{B}_3}{\partial \Delta y} \cdot \vec{k} = \frac{3\mu_0 \mu h}{4\pi} \left(\frac{5\rho^2 \text{sen}(\theta)^2}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}} - \frac{1}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \right)$$

Para resolver la ecuación nos apoyamos en la identidad trigonométrica:

$$\text{sen}(\theta)^2 = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

$$c_3 = \delta \sigma v_y \frac{3\mu_0 \mu h}{4\pi}$$

$$f_3(\rho) = -\frac{5\rho^2}{2(\rho^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}}$$

$$g_1(\rho) = \frac{5\rho^2}{2(\rho^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}} - \frac{1}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\left(\frac{\partial(\rho K_{3\rho})}{\partial \rho} + \frac{\partial K_{3\theta}}{\partial \theta} \right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial(\rho K_{3\theta})}{\partial \rho} - \frac{\partial K_{3\rho}}{\partial \theta} \right) = c_3 \rho (f_3 \cos(2\theta) + g_1)$$

Aplicando superposición de las soluciones:

$$K_{3\theta} = K_{31} + K_{32\theta}$$

$$K_{3\rho} = K_{31\rho} + K_{32}$$

Sistema 1

$$\frac{\partial(\rho K_{31\rho})}{\partial\rho} + \frac{\partial K_{31\theta}}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho K_{31})}{\partial\rho} - \frac{\partial K_{31}}{\partial\theta} = c_3 f_3 \rho \cos(2\theta)$$

$$K_{31} = A_{31\theta}(\rho) \cos(2\theta)$$

$$K_{31} = A_{31}(\rho) \sin(2\theta)$$

$$\frac{\partial(\rho A_{31\rho})}{\partial\rho} - 2A_{31} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho A_{31\theta})}{\partial\rho} - 2A_{31} = c_3 f_3 \rho$$

$$A_{31} = A_{31} + A_{31}$$

$$A_{31} = A_{31} - A_{31\theta}$$

Ecuación suma

$$\frac{\partial(\rho A_{31})}{\partial\rho} - 2A_{31} = \rho A'_{31} - A_{31} = c_3 f_3 \rho$$

$$\rho A'_{31sh} - A_{31sh} = 0 \rightarrow A_{31sh} = \rho \cdot c_{A31s} \rightarrow A_{31sp} = \rho U_{A31s}$$

$$\rho(\rho U'_{A31s} + U_{A31s}) - \rho U_{A31s} = c_3 f_3 \rho \rightarrow U'_{A31s} = \frac{c_3 f_3}{\rho}$$

$$U_{A31s} = c_3 \int -\frac{5\rho}{2(\rho^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}} d\rho = \frac{c_3}{2(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$A_{31} = \rho \left(c_{A31s} + \frac{c_3}{2(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \right)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} A_{31} = 0 \rightarrow c_{A31s} = 0$$

Ecuación diferencia

$$\frac{\partial(\rho A_{31})}{\partial \rho} + 2A_{31} = \rho A'_{31d} + 3A_{31d} = -c_3 f_3 \rho$$

$$\rho A'_{31dh} + 3A_{31dh} = 0 \rightarrow A_{31d} = \rho^{-3} c_{A31d} \rightarrow A_{31dp} = \rho^{-3} U_{A31d}$$

$$\rho(\rho^{-3} U'_{A31d} - 3\rho^{-4} U_{A31d}) + 3\rho^{-3} U_{A31d} = -c_3 f_3 \rho \rightarrow U'_{A31d} = -c_3 f_3 \rho^3$$

$$U_{A31d} = c_3 \int \frac{5\rho^5}{2(\rho^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}} d\rho = -c_3 \frac{8h^4 + 20h^2\rho^2 + 15\rho^4}{6(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$A_{31d} = \rho^{-3} \left(c_{A31d} - c_3 \frac{8h^4 + 20h^2\rho^2 + 15\rho^4}{6(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \right)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} A_{31d} \neq \infty \rightarrow c_{A31d} - c_3 \frac{8}{6h} = 0 \rightarrow c_{A32d} = c_3 \frac{4}{3h}$$

$$A_{31} = \frac{1}{2}(A_{31} - A_{31d}) = c_3 \left[\frac{\rho}{4(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{\rho^3} \left(\frac{8h^4 + 20h^2\rho^2 + 15\rho^4}{12(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{3h} \right) \right]$$

$$A_{31\rho} = \frac{1}{2}(A_{31} + A_{31d}) = c_3 \left[\frac{\rho}{4(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{\rho^3} \left(\frac{2}{3h} - \frac{8h^4 + 20h^2\rho^2 + 15\rho^4}{12(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \right) \right]$$

Sistema 2

$$\frac{\partial(\rho K_{32})}{\partial \rho} + \frac{\partial K_{32\theta}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho K_{32})}{\partial \rho} - \frac{\partial K_{32\rho}}{\partial \theta} = c_3 g_1 \rho$$

$$K_{32} = A_{32}(\rho)$$

$$K_{32} = A_{32}(\rho)$$

$$\rho A'_{32} + A_{32} = 0 \rightarrow A_{32} = \frac{c_{A32\rho}}{\rho}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} A_{32} \neq \infty \rightarrow c_{A32\rho} = 0$$

$$\rho A'_{32} + A_{32\theta} = c_3 g_1 \rho$$

$$A_{32} = A_{32h\theta} + A_{32p\theta}$$

$$\rho A'_{32h\theta} + A_{32h\theta} = 0 \rightarrow A_{32h\theta} = \frac{c_{A32\theta}}{\rho} \rightarrow A_{32h\theta} = \frac{U_{A32}}{\rho}$$

$$\rho \left(-\frac{U_{A32}}{\rho^2} + \frac{U_{A32\theta}'}{\rho} \right) + \frac{U_{A32\theta}}{\rho} = c_3 g_1 \rho \rightarrow U_{A32\theta}' = c_3 g_1 \rho$$

$$U_{A32\theta} = c_3 \int \left(\frac{5\rho^3}{2(\rho^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}} - \frac{\rho}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \right) d\rho = -c_3 \frac{\rho^2}{2(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$A_{32} = \frac{1}{\rho} \left(c_{A32\theta} - c_3 \frac{\rho^2}{2(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \right)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} A_{32\theta} \neq \infty \rightarrow c_{A32\theta} = 0$$

Deshaciendo los cambios de ambos sistemas:

$$K_{3\theta} = \delta\sigma v_y \frac{3\mu_0\mu h}{4\pi} \left[\left[\frac{\rho}{4(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{\rho^3} \left(\frac{8h^4 + 20h^2\rho^2 + 15\rho^4}{12(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{3h} \right) \right] \cos(2\theta) - \frac{\rho}{2(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \right]$$

$$K_{3\rho} = \delta\sigma v_y \frac{3\mu_0\mu h}{4\pi} \left[\frac{\rho}{4(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{\rho^3} \left(\frac{2}{3h} - \frac{8h^4 + 20h^2\rho^2 + 15\rho^4}{12(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \right) \right] \sin(2\theta)$$

Momento dipolar y velocidad angular con todas sus componentes

Sistema 1

$$\frac{\partial(\rho \cdot K_{\omega 1 \rho})}{\partial \rho} + \frac{\partial K_{\omega 1 \theta}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot K_{\omega 1 \theta})}{\partial \rho} - \frac{\partial K_{\omega 1 \rho}}{\partial \theta} = c_{41} \rho f_{41}$$

$$K_{\omega 1 \theta} = A_{\omega 1 \theta}(\rho)$$

$$K_{\omega 1 \rho} = A_{\omega 1 \rho}(\rho)$$

$$\rho A'_{\omega 1 \rho} + A_{\omega 1 \rho} = 0 \rightarrow A_{\omega 1 \rho} = \frac{c_{A \omega 1 \rho}}{\rho}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} A_{\omega 1 \rho} \neq \infty \rightarrow c_{A \omega 1 \rho} = 0$$

$$\rho A'_{\omega 1 \theta} + A_{\omega 1 \theta} = c_{\omega 1} \rho f_{\omega 1}$$

$$A_{\omega 1 \theta} = A_{\omega 1 h \theta} + A_{\omega 1 p \theta}$$

$$\rho A'_{\omega 1 h \theta} + A_{\omega 1 h \theta} = 0 \rightarrow A_{\omega 1 h \theta} = \frac{c_{A \omega 1 \theta}}{\rho} \rightarrow A_{\omega 1 p \theta} = \frac{U_{A \omega 1 \theta}}{\rho}$$

$$\rho \left(-\frac{U_{A \omega 1 \theta}}{\rho^2} + \frac{U'_{A \omega 1 \theta}}{\rho} \right) + \frac{U_{A \omega 1 \theta}}{\rho} = c_{\omega 1} \rho f_{\omega 1} \rightarrow U'_{A \omega 1 \theta} = c_{\omega 1} \rho f_{41}$$

$$U_{A \omega 1 \theta} = c_{\omega 1} \int \frac{\rho(\rho^2 - 2h^2)}{(h^2 + \rho^2)^{5/2}} d\rho = -c_{\omega 1} \frac{\rho^2}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

$$A_{\omega 1 \theta} = \frac{1}{\rho} \left(c_{41} - c_{41} \frac{\rho^2}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \right)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} A_{\omega 1 \theta} \neq \infty \rightarrow c_{A \omega 1 \theta} = 0$$

$$K_{\omega 1 \theta} = -\frac{\delta \sigma \mu_0}{4\pi} (\omega_x \mu_y - \omega_y \mu_x) \frac{\rho}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

$$K_{\omega 1 \rho} = 0$$

Sistema 2

$$\frac{\partial(\rho \cdot K_{\omega 2 \rho})}{\partial \rho} + \frac{\partial K_{\omega 2 \theta}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot K_{\omega 2 \theta})}{\partial \rho} - \frac{\partial K_{\omega 2 \rho}}{\partial \theta} = c_{\omega 2} \rho f_{\omega 2} \cos(\theta)$$

$$K_{\omega 2 \theta} = A_{\omega 2 \theta}(\rho) \cos(\theta)$$

$$K_{\omega 2 \rho} = A_{\omega 2 \rho}(\rho) \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot A_{\omega 2 \rho})}{\partial \rho} - A_{\omega 2 \theta} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot A_{\omega 2\theta})}{\partial \rho} - A_{\omega 2\rho} = c_{\omega 2} \rho f_{\omega 2}$$

$$A_{\omega 2s} = A_{\omega 2\rho} + A_{\omega 2\theta}$$

$$A_{\omega 2d} = A_{\omega 2\theta} - A_{\omega 2\rho}$$

Ecuación suma

$$\frac{\partial(\rho \cdot A_{\omega 2s})}{\partial \rho} - A_{\omega 2s} = \rho A'_{\omega 2s} = c_{\omega 2} \rho f_{\omega 2}$$

$$A_{\omega 2s} = A_{\omega 2sh} + A_{\omega 2sp}$$

$$A'_{\omega 2sh} = 0 \rightarrow A_{\omega 2sh} = c_{A\omega 2s} \rightarrow A_{\omega 2sp} = U_{A\omega 2s}$$

$$U'_{A\omega 2s} = c_{\omega 2} f_{\omega 2} \rightarrow U_{A\omega 1s} = c_{\omega 2} \int \frac{\rho}{(h^2 + \rho^2)^{5/2}} d\rho = -\frac{c_{\omega 2}}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

$$A_{\omega 2s} = c_{A\omega 2s} - \frac{c_{\omega 2}}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} A_{\omega 2s} = 0 \rightarrow c_{A\omega 2s} = 0$$

Ecuación diferencia

$$\frac{\partial(\rho A_{\omega 2d})}{\partial \rho} + A_{\omega 2d} = \rho A'_{\omega 2d} + 2A_{\omega 2d} = c_{\omega 2} \rho f_{\omega 2}$$

$$A_{\omega 2d} = A_{\omega 2dh} + A_{\omega 2dp}$$

$$\rho A'_{\omega 2dh} + 2A_{\omega 2dh} = 0 \rightarrow A_{\omega 2dh} = \rho^{-2} \cdot c_{A\omega 2d} \rightarrow A_{\omega 2dp} = \rho^{-2} \cdot U_{A\omega 2d}$$

$$\rho(\rho^{-2} U'_{A\omega 2d} - 2\rho^{-3} U_{A\omega 2d}) + 2\rho^{-2} U_{A\omega 2d} = c_{\omega 2} \rho f_{\omega 2} \rightarrow U'_{A\omega 2d} = c_{\omega 2} f_{\omega 2} \rho^2$$

$$U_{A\omega 2d} = c_{\omega 2} \int \frac{\rho^3}{(h^2 + \rho^2)^{5/2}} d\rho = -c_{\omega 2} \frac{2h^2 + 3\rho^2}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

$$A_{\omega 2d} = \frac{1}{\rho^2} \left(c_{A\omega 2d} - c_{\omega 2} \frac{2h^2 + 3\rho^2}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \right)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} A_{\omega 2d} \neq \infty \rightarrow c_{A\omega 2d} - c_{\omega 2} \frac{2}{3h} = 0 \rightarrow c_{A\omega 2d} = c_{\omega 2} \frac{2}{3h}$$

$$A_{\omega 2\rho} = \frac{A_{\omega 2s} - A_{\omega 2d}}{2} = \frac{c_{\omega 2}}{2} \left[\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{2h^2 + 3\rho^2}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}} - \frac{2}{3h} \right) - \frac{1}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \right]$$

$$A_{\omega 2\theta} = \frac{A_{\omega 2s} + A_{\omega 2d}}{2} = \frac{c_{\omega 2}}{2} \left[\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{2}{3h} - \frac{2h^2 + 3\rho^2}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \right) - \frac{1}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \right]$$

$$K_{\omega 2\rho} = \frac{3h\delta\sigma\mu_0}{8\pi} (\omega_y\mu_z - \omega_z\mu_y) \left[\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{2h^2 + 3\rho^2}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}} - \frac{2}{3h} \right) - \frac{1}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \right] \text{sen}(\theta)$$

$$K_{\omega 2\theta} = \frac{3h\delta\sigma\mu_0}{8\pi} (\omega_y\mu_z - \omega_z\mu_y) \left[\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{2}{3h} - \frac{2h^2 + 3\rho^2}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \right) - \frac{1}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \right] \text{cos}(\theta)$$

Sistema 3

$$\frac{\partial(\rho \cdot K_{\omega 3\rho})}{\partial\rho} + \frac{\partial K_{\omega 3\theta}}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot K_{\omega 3\theta})}{\partial\rho} - \frac{\partial K_{\omega 3\rho}}{\partial\theta} = c_{\omega 3}\rho f_{\omega 3} \text{sen}(\theta)$$

$$K_{\omega 3\rho} = A_{\omega 3\rho}(\rho) \text{cos}(\theta)$$

$$K_{\omega 3\theta} = A_{\omega 3\theta}(\rho) \text{sen}(\theta)$$

$$\frac{\partial(\rho A_{\omega 3\rho})}{\partial\rho} + A_{\omega 3\theta} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho A_{\omega 3\theta})}{\partial\rho} + A_{\omega 3\rho} = c_{\omega 3}\rho f_{\omega 3}$$

$$A_{\omega 3s} = A_{\omega 3\rho} + A_{\omega 3\theta}$$

$$A_{\omega 3d} = A_{\omega 3\rho} - A_{\omega 3\theta}$$

Ecuación suma

$$\frac{\partial(\rho A_{\omega 3s})}{\partial\rho} + A_{\omega 3s} = \rho A_{\omega 3s}' + 2A_{\omega 3s} = c_{\omega 3}\rho f_{\omega 3}$$

$$\rho A_{\omega 3sh}' + 2A_{\omega 3sh} = 0 \rightarrow A_{\omega 3sh} = c_{\omega 3As}\rho^{-2}$$

$$A_{\omega 3sp} = U_{\omega 3As}\rho^{-2}$$

$$\rho(U_{\omega 3As}'\rho^{-2} - 2U_{\omega 3As}\rho^{-3}) + 2U_{\omega 3As}\rho^{-2} = U_{\omega 3As}'\rho^{-1} = c_{\omega 3}\rho f_{\omega 3}$$

$$U_{\omega 3As} = c_{\omega 3} \int \frac{\rho^3}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}} d\rho = -c_{\omega 3} \frac{2h^2 + 3\rho^2}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

$$A_{\omega 3s} = \frac{1}{\rho^2} \cdot \left(c_{\omega 3As} - c_{\omega 3} \frac{2h^2 + 3\rho^2}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \right)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} A_{\omega 3s} \neq \infty \rightarrow c_{\omega 3As} - c_{\omega 3} \frac{2}{3h} = 0 \rightarrow c_{\omega 3As} = c_{\omega 3} \frac{2}{3h}$$

Ecuación diferencia

$$\frac{\partial(\rho A_{\omega 3d})}{\partial \rho} - A_{\omega 3d} = \rho A'_{43} = -c_{\omega 3} \rho f_{43}$$

$$A_{\omega 3d} = A_{\omega 3dh} + A_{\omega 3dp}$$

$$\rho A'_{\omega 3dh} = 0 \rightarrow A_{\omega 3dh} = c_{\omega 3Ad}$$

$$A'_{\omega 3dp} = -c_{\omega 3} f_{\omega 3}$$

$$A_{\omega 2dp} = -c_{\omega 3} \int \frac{\rho}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}} d\rho = \frac{c_{\omega 3}}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

$$A_{\omega 3d} = c_{\omega 3Ad} + \frac{c_{\omega 3}}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} A_{\omega 3d} = 0 \rightarrow c_{\omega 3Ad} = 0$$

$$A_{\omega 3\rho} = \frac{1}{2}(A_{\omega 3d} + A_{\omega 3s}) = \frac{c_{\omega 3}}{2} \left[\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{2}{3h} - \frac{2h^2 + 3\rho^2}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \right) + \frac{1}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \right]$$

$$A_{\omega 3\theta} = \frac{1}{2}(A_{\omega 3s} - A_{\omega 3d}) = \frac{c_{\omega 3}}{2} \left[\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{2}{3h} - \frac{2h^2 + 3\rho^2}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \right) - \frac{1}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \right]$$

$$K_{\omega 3\rho} = \frac{3\delta\sigma h\mu_0}{8\pi} (\omega_z\mu_x - \omega_x\mu_z) \left[\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{2}{3h} - \frac{2h^2 + 3\rho^2}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \right) + \frac{1}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \right] \text{sen}(\theta)$$

$$K_{\omega 3\theta} = \frac{3\delta\sigma h\mu_0}{8\pi} (\omega_z\mu_x - \omega_x\mu_z) \left[\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{2}{3h} - \frac{2h^2 + 3\rho^2}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \right) - \frac{1}{3(h^2 + \rho^2)^{3/2}} \right] \text{cos}(\theta)$$