

Trabajo Fin de Grado  
Ingeniería de Tecnología Industriales

Cálculo De La Atenuación De Los Ultrasonidos En  
Distintas Soluciones Acuosas

Autor: Pablo Barroso Rodríguez

Tutor: Ramón Risco Delgado

Cotutor: Alberto Olmo Fernández

Dpto. de Física Aplicada III  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2019





21-7-2019

ST-1-5078



# CÁLCULO DE LA ATENUACIÓN DE LOS ULTRASONIDOS EN DISTINTAS SOLUCIONES ACUOSAS

ACUOSAS  
DISTINTAS SOLUCIONES  
DE ULTRASONIDOS EN

Autor: Pablo Barroso Rodríguez

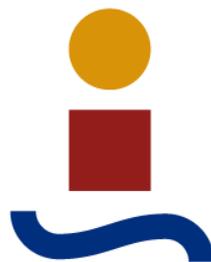
Tutores: Ramón Risco Delgado, Alberto Olmo Fernández

GRADO EN INGENIERÍA DE TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

GRADO EN INGENIERÍA DE TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

Tutores: Ramón Risco Delgado, Alberto Olmo Fernández

Autor: Pablo Barroso Rodríguez



Escuela Técnica Superior de  
**INGENIERÍA DE SEVILLA**

DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA III  
**UNIVERSIDAD DE SEVILLA**

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

## CÁLCULO DE LA ATENUACIÓN DE LOS ULTRASONIDOS EN DISTINTAS SOLUCIONES ACUOSAS.

### RESUMEN

En este trabajo simulamos la velocidad del sonido y el coeficiente de atenuación de hielo a temperaturas por debajo de su punto de fusión y frecuencia ultrasónica, por lo tanto, solo es aplicable a frecuencias superiores a los 20kHz. Para esto, partiremos de varios modelos, uno para hielo poroso policristalino y modificado por Carcione et al [1] y otro modelo viscoelástico no poroso que parte de hielo amorfo altamente denso, desarrollados ambos, en lenguaje de programación Matlab-GNU Octave. El primero está basado en la Teoría de Biot sobre la poroelasticidad en medios porosos fluido-sólido, mientras el otro está basado en un modelo viscoelástico cuyo material es del tipo Kelvin-Voigt (sólido). Las ondas longitudinales se propagan bien por el líquido y el sólido, cuyas velocidades están relacionadas con el módulo de compresión volumétrica y el módulo transversal. La amplitud de la onda cambia por absorción (convierte el sonido en calor [1]) y dispersión. Un ultrasonido es una onda que transporta energía mecánica a través de la vibración local de partículas a frecuencias de 20 kHz o más (siendo las usadas como frecuencias de diagnóstico médico los 1 -20 MHz). La atenuación del medio aumenta con la frecuencia.

### OBJETIVO

El objetivo de este trabajo es la de dar una aproximación del coeficiente de atenuación del sistema agua-hielo poroso y el hielo a modo de sólido viscoelástico a frecuencias ultrasónicas, ya que, tanto para uno como para otro no hay datos suficientes para su uso, por ejemplo, en simulación

del calentamiento con transductores focalizados con programas de elementos finitos como puede ser COMSOL Multiphysics. En este paquete informático el módulo acústico necesita valores de atenuación en compuesto elásticos y con atenuación. También puede servir como un método para el cálculo de atenuación para otros compuestos viscoelásticos o porosos como puede ser el hígado, polímeros, elastómeros, etc. Se han calculado la atenuación para líquidos como el agua, dando una atenuación nula (lo esperable) con el modelo viscoelástico de Maxwell, y otros casos con el modelo de Kelvin - Voigt, como el hígado, poliestireno y sylgard 134 (ver anexos correspondientes), dando resultados simulados en MATLAB-GNU OCTAVE, semejantes al real.

A su vez se da un método de cálculo teórico aproximado para determinar el coeficiente de atenuación para distintos materiales incluido el hielo vitrificado (no poroso). Esto tiene como consecuencia la obtención de valores numéricos aproximados del coeficiente de atenuación a partir de otros parámetros, como pueden ser módulos elásticos y viscosidades, y a falta de datos experimentales.

**ÍNDICE**

Resumen..... 1

Objetivo..... 1

1. Introducción ..... 6

2. Coeficiente de atenuación ..... 7

3. Resumen de los módulos elásticos más importantes.  
Significado [5]..... 8

4. Notas sobre la Teoría de Biot ..... 9

    4.1. Modificaciones usadas por Carcione et al en la  
    Teoría de Biot ..... 11

        4.1.1. Modelo de kelvin ..... 12

        4.1.2. Relación de Kozeny-Carman ..... 12

        4.1.3. Modelo de percolación ..... 13

5. Modelo Matemático [8] y [9]. Código en anexo I-A. .. 13

    5.1. Parámetros ..... 13

        5.1.1. Propiedades Agua y hielo ..... 13

        5.1.2. Radio de curvatura de la partícula congelada . 13

    5.2. Porosidad ..... 14

    5.3. Módulo de compresión volumétrica de la matriz del  
    sólido<sup>14</sup>

    5.4. Densidad del medio poroso congelado ..... 14

    5.5. Modelo matemático de la Teoría de Biot ..... 14

        5.5.1. Para bajas frecuencias ..... 14

        5.5.2. Para altas frecuencias ..... 15

6. Modelo viscoelástico en 3·D ..... 18

    6.1. Modelo viscoelástico 1D [15] ..... 19

    6.2. Modelo matemático. Modelo viscoelástico de Kelvin  
    Voigt. Sólidos [15]. Código en Anexo I-B. .... 22

    6.3. Modelo Matemático. Modelo viscoelástico de pistón  
    viscoso lineal (elaboración propia). Líquidos. .... 26

    6.4. Modelo matemático. Modelo viscoelástico de Maxwell  
    (elaboración propia). Fluidos. .... 28

    6.5. Modelo matemático. Modelo viscoelástico de Jeffrey  
    (elaboración propia). Fluidos. .... 30

    6.6. Otros arreglos y su carácter sólido o líquido ... 33

7.	Resultados .....	35
7.1.	Medios porosos .....	35
7.1.1.	Resultados para el coeficiente de atenuación del hielo	35
7.1.2.	Hielo-agua (200 kHz-50MHz y 77-270K) .....	35
7.1.3.	Validación de la simulación .....	36
7.2.	Sólido viscoelástico de kelvin voigt (T=160-250K)	38
7.2.1.	Entre 200kHz y 400kHz .....	39
7.2.2.	Entre 500kHz y 3MHz .....	40
7.2.3.	Entre 5MHz y 15MHz .....	40
7.3.	Comparación de coeficientes de atenuación con referencia .....	41
8.	Conclusión .....	41
8.1.	Medios porosos .....	41
8.2.	Sólido viscoelástico de kelvin voigt .....	42
Anexo I.	Códigos en Matlab - GNU Octave .....	43
A.	Medios porosos .....	43
B.	algoF .....	48
C.	Modelo de kelvin voigt para solidos [T=160K a 250K]	49
D.	Código de comparación .....	51
8.2.1.	Módulos elásticos. Relación. ....	52
Anexo II.	CARACTERIZACION DEL HIELO - AGUA PARA MEDIOS POROSOS Y VISCOELÁSTICOS .....	53
A.	Módulos elásticos del hielo no poroso. Transición del hielo amorfo al cristalino por aumento de temperatura	53
B.	Hielo LDA .....	56
C.	Viscosidad del agua-hielo .....	57
D.	Viscosidad del agua-hielo desde 160K a 380K. Código Matlab-GNU Octave modificado de [34]. ....	59
Anexo III.	Coefficientes de atenuación. Distintos casos ..	61
A.	Hígado .....	61
	Código modificado para hígado .....	61
	Resultados .....	63

B. Poliestireno..... 64  
    Código poliestireno..... 66  
    Resultados..... 68  
C. PDMS (SYLGARD 184)..... 70  
    Código..... 71  
    Resultados ..... 72  
**Bibliografía..... 73**

## PRIMERA PARTE. INTRODUCCIÓN Y TEORÍA BÁSICA SOBRE ATENUACIÓN Y MECÁNICA

### 1. INTRODUCCIÓN

Un sonido es la sensación percibida en el oído debido a la vibración propagada en un medio elástico en forma de ondas. Es una perturbación en la presión del aire (medio elástico) procedente de una vibración. El ser humano escucha en la frecuencia de 20 a 20000 Hz (ultrasonido > 20 kHz), arriba y abajo es inaudible. La energía que contiene una onda se puede convertir en otra en interfaces de dos medios como en un medio poroso en cuyos poros hay fluido y su matriz en sólido, que posee, por lo tanto, una velocidad y atenuación diferentes. Por ejemplo, hay ondas de compresión longitudinales, donde las partículas se mueven paralelas en la dirección de la onda. También hay transversales. En general, las ondas de compresión longitudinales se producen en líquidos, tejidos blandos y gases, mientras que en sólidos se producen tanto longitudinales como transversales. La amplitud de la onda puede atenuarse por absorción, dispersión o difracción [2], teniendo un comportamiento lineal con la frecuencia en la mayoría de los materiales. La energía del ultrasonido pierde potencia y su intensidad disminuye con la profundidad del medio en el que se encuentra y puede ser secundaria a la absorción y dispersión. Los líquidos se atenúan poco, los sólidos lo hacen por absorción y dispersión y los gases absorben mucho y dispersan la energía en todas las direcciones (9). Este coeficiente de atenuación puede usarse para resolver problemas de calentamiento de tejidos blandos mediante el uso de transductores curvos que focalizan las ondas sonoras en un punto de convergencia a mayor temperatura que el que lo rodea. Es también llamado como HIFU en inglés. Ejemplo

de ello lo encontramos en el siguiente esquema de un transductor que calienta un punto de un órgano:

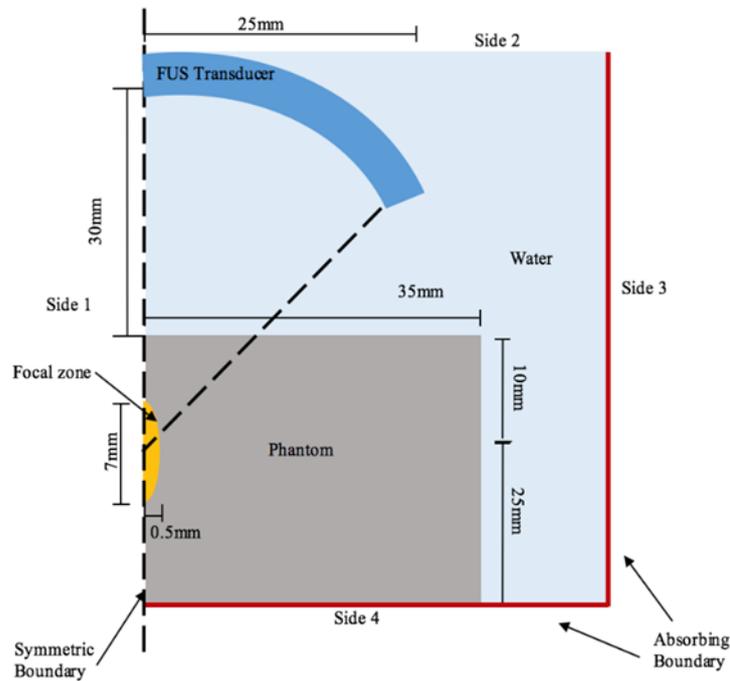


Ilustración 1 Transductor, tomado de [3]

## 2. COEFICIENTE DE ATENUACIÓN

La atenuación es una pérdida de amplitud por parte de una onda por mecanismos de absorción o dispersión, entre otros. El modelo de decaimiento de la onda viene dado de la siguiente forma [4]:

$$A(z) = A_0 \cdot e^{-\mu_A \cdot z}$$

Donde  $\mu_A$  es el factor de amplitud de la atenuación con unidades de  $\text{cm}^{-1}$ .

El coeficiente de atenuación está relacionado con éste de la siguiente manera:

$$\alpha = 20 \cdot \log_{10}(e) \cdot \mu_A \cong 8.7 \mu_A \left[ \frac{\text{dB}}{\text{cm}} \right]$$

Y generalmente depende de la frecuencia (f) por un modelo simple como:

$$\alpha = a \cdot f^b$$

3. RESUMEN DE LOS MÓDULOS ELÁSTICOS MÁS IMPORTANTES. SIGNIFICADO [5]

- Módulo de compresión volumétrica (K o B): La razón entre la presión aplicada sobre un material considerado isotrópico y su deformación elástica. Su recíproco es la compresibilidad.
- Coeficiente de Poisson ( $\nu$ ): Al cociente de la contracción lateral y el alargamiento longitudinal, dentro del rango elástico, el cual es adimensional:
- Módulo de Rigidez ( $\mu$  o G): Cociente entre el esfuerzo de cizallamiento y la correspondiente deformación elástica. Este parámetro es de 2 a 3 veces menor que el módulo de Young.
- Módulo de deformabilidad (M): Cociente entre el esfuerzo y deformación reales.
- Módulo de Young: Para definir un cuerpo elástico, si éste es isótropo, basta con este módulo y el de rigidez.

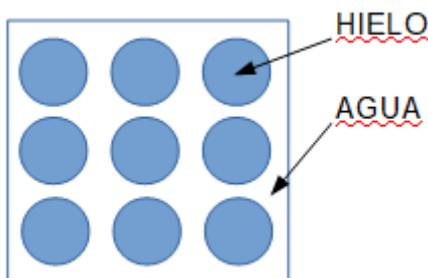
	$(\lambda, \mu)$	$(E, \mu)$	$(K, \lambda)$	$(K, \mu)$	$(\lambda, \nu)$	$(\mu, \nu)$	$(E, \nu)$	$(K, \nu)$	$(K, E)$
$K =$	$\lambda + \frac{2\mu}{3}$	$\frac{E\mu}{3(3\mu - E)}$	-	-	$\lambda \frac{1+\nu}{3\nu}$	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	-	-
$E =$	$\mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$		$9K \frac{K - \lambda}{3K - \lambda}$	$\frac{9K\mu}{3K + \mu}$	$\frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}$	$2\mu(1+\nu)$		$3K(1 - \frac{2\nu}{1+\nu})$	
$\lambda =$		$\mu \frac{E - 2\mu}{3\mu - E}$		$K - \frac{2\mu}{3}$		$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{3K}{1+\nu}$	$\frac{3K(3K - E)}{9K - E}$
$\mu =$			$3 \frac{K - \lambda}{2}$		$\lambda \frac{1-2\nu}{2\nu}$		$\frac{E}{2+2\nu}$	$3K \frac{1}{2}$	$\frac{3KE}{9K - E}$
$\nu =$	$\frac{\lambda}{2(\lambda + 2\mu)}$	$\frac{E}{2\mu} - 1$	$\frac{\lambda}{3K - \lambda}$	$\frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)}$					$\frac{3K - E}{6K}$
$M =$	$\lambda + 2\mu$	$\mu \frac{4\mu - E}{3\mu - E}$	$3K - 2\lambda$	$K + \frac{4\mu}{3}$	$\lambda \frac{1-\nu}{\nu}$	$\mu \frac{2-2\nu}{1-2\nu}$	$E \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$3K \frac{1}{1-\nu}$	$3K \frac{3K + E}{9K - E}$

Ilustración 2 Relación entre módulos elásticos [6]

## SEGUNDA PARTE. TEORÍA DE BIOT PARA HIELO POROSO CON AGUA Y CON PROPIEDADES POLICRISTALINAS. CALCULO DE LA ATENUACIÓN.

### 4. NOTAS SOBRE LA TEORÍA DE BIOT

La teoría de Biot es una teoría de la poroelasticidad dinámica que describe la propagación de ondas en un medio poroso saturado, constituido, por tanto, por un esqueleto o estructura sólida saturada por un fluido viscoso. Se basa en relaciones tensión-deformación en un elemento poroso que aporta información esencial en el estudio del comportamiento mecánico de un medio poroelástico, suponiendo efectos no elásticos entre interacciones sólido-fluido.



**Ilustración 3 Medio Poroso, hielo-agua**

En esta teoría se asume las siguientes características en el sistema (tomado de [7]):

- Los desplazamientos, tensiones y las velocidades de las partículas son muy pequeñas, por lo que las ecuaciones de estado o constitutivas, las fuerzas de disipación y los momentos cinéticos son lineales.
- Los principios de la mecánica de medios continuos son aplicables a valores macroscópicos medibles.
- La longitud de onda es mayor a las dimensiones del volumen de elemento macroscópico (porosidad,

permeabilidad, módulos elásticos). La dispersión es despreciable.

- Condiciones isoterma.
- La distribución de tensiones en el fluido es hidrostática, el fluido es viscoso.
- La fase líquida es continua. La matriz es una fase sólida que no contribuye con la porosidad.
- El material del esqueleto, generalmente, es un sólido lineal elástico e isótropo.
- No existen discontinuidades, el medio es infinito.

Esto es una simplificación, ya que, hay otros factores que pueden hacer variar los resultados de este modelo, como puede ser los efectos de superficie sólido-fluido, que el fluido fuese una solución electrolítica, la existencia de microporos de menor tamaño al de la media o aberturas, tensiones mecánicas (que producen cambios de temperatura), la presencia de burbujas (que afecta a la viscosidad), etc.

Para el uso de esta teoría se necesita caracterizar tanto el sólido como el fluido (que está dentro de los poros) que forma parte del medio poroso. Por parte del sólido, se necesita el módulo de compresión volumétrica, el coeficiente de Poisson y la densidad, mientras, que del fluido, la compresibilidad, la viscosidad y la densidad. Para la estructura porosa necesitaremos además la porosidad (poros o granos de sólidos que forman la estructura) y afines como la tortuosidad, la sinuosidad, etc.

Por otra parte, debemos caracterizar el flujo, mediante su resistencia. Para ello se hace uso de parámetros como la viscosidad del fluido, la forma de los poros y su permeabilidad, etc.

En este trabajo, basado en el modelo aportado por [8] y [9], y que están basados en [7], se pasará dicho modelo a lenguaje

de programación Matlab - GNU Octave, para determinar el coeficiente de atenuación aproximado del hielo poroso (baja porosidad a bajas temperaturas), formado el esqueleto o estructura por hielo a una temperatura por debajo de los  $0^{\circ}\text{C}$  y un fluido formado por agua cercana a los  $0^{\circ}\text{C}$ . Es lo más realista para realizar dicho modelo y asemejarlo a hielo no poroso. Por lo que, a menor temperatura mayor semejanza con la realidad tendrá dicho modelo. Las propiedades de ambos componentes (hielo y agua) se encuentran en el anexo del modelo matemático del mismo. En la simulación con Matlab - GNU Octave se estudia el comportamiento de las ondas compresionales P y la onda de corte S.

En esta teoría se demuestra que existen dos clases de modos compresionales (P), una onda P rápida (El desplazamiento del fluido y del sólido están en fase) y una onda P lenta (no están en fase). A baja frecuencia no existen ondas lentas, llegando a ser de efecto difusivo y, por tanto, de viscosidad dominante. A altas frecuencias la onda lenta atenúa a la rápida en las heterogeneidades [8].

La amplitud de onda varía por fenómenos de absorción y difusión, siendo la primera debida a fenómenos físicos que convierten el ultrasonido en calor, mientras que la difusión se produce en materiales heterogéneos [1].

#### 4.1. MODIFICACIONES USADAS POR CARCIONE ET AL EN LA TEORÍA DE BIOT

En ella se introduce el Modelo de Kelvin [10] para la determinación de la cantidad de agua no congelada en función de la temperatura, la relación de Kozeny-Carman que se relaciona con la permeabilidad del medio y un modelo de percolación que describe la transición de un sistema entre continuidades y discontinuidades [11]. En el modelo propuesto por Carcione, la velocidad del sonido y los

factores de atenuación de las ondas P y S se determinan para una granizada de naranja (zumo de naranja con trozos de hielo). Las ondas P son aquellas en las que los desplazamientos de sólido y fluido están en fase, mientras que las ondas S no lo están (a muy bajas frecuencias no están presentes). Pero para determinar estos valores en hielo debemos tener en cuenta el modelo de Kelvin (no confundir con Kelvin Voigt) [2] (el aumento de la temperatura aumenta la formación de poros con líquido), el módulo de la matriz seca [3] y una corrección por viscosidad del fluido [4].

---

#### 4.1.1. MODELO DE KELVIN

Usaremos el modelo de Kelvin para determinar la cantidad de agua no congelada en función de la temperatura, por debajo de su punto eutéctico que describe la cristalización del hielo en función de la temperatura [8] , [10].

$$r = \frac{r_0}{\ln\left(\frac{T_0}{T}\right)}$$

$$r_0 = \frac{2\sigma V}{\Delta H_F}$$

Donde:

- $\sigma$ : energía libre interfacial entre el sólido y el líquido que le rodea
- $V$ : volumen molar específico del sólido
- $\Delta H_F$ : calor de fusión del líquido

---

#### 4.1.2. RELACIÓN DE KOZENY-CARMAN

$$k = \frac{2 \cdot k_0 \cdot \phi_l^3}{(1 - \phi_l)^2}$$

Donde  $k_0$  es una referencia para el 50 % de líquido.

---

4.1.3. MODELO DE PERCOLACIÓN

$$\mu_m = \mu_s(1 - \phi_l)^{3.8}$$

$$K_m = K_s(1 - \phi_l)^{3.8}$$

5. MODELO MATEMÁTICO [8] Y [9]. CÓDIGO EN ANEXO I-A.

Usamos los módulos de compresión volumétrica (K) y de rigidez ( $\mu$ ) y la densidad del hielo [12] en función de la temperatura.

5.1. PARÁMETROS

---

5.1.1. PROPIEDADES AGUA Y HIELO

$$\rho_{ice} = (-0.0842 \cdot T + 940.42) \frac{kg}{m^3}$$

$$\rho_{water} = 1030 \frac{kg}{m^3}$$

$$K_{ice} = (-1E7 \cdot T + 1E10) Pa$$

$$K_{water} = 2.25E9 Pa$$

$$\mu_{ice} = (-3E6 \cdot T + 4E9) Pa$$

---

5.1.2. RADIO DE CURVATURA DE LA PARTÍCULA CONGELADA

$$r = \frac{r_0}{\ln\left(\frac{T_0}{T}\right)}$$

$$r_0 = \frac{2\sigma V}{\Delta H_F} = 0.228 nm$$

Donde:

- $\sigma$ : energía libre interfacial entre el sólido y el líquido que le rodea
- $V$ : volumen molar específico del sólido

- $\Delta H_F$ : calor de fusión del líquido

## 5.2. POROSIDAD

$$\phi_l = \frac{\text{erf}(a) + \text{erf}(b)}{1 + \text{erf}(b)}$$

$$a = \frac{r}{\sqrt{2\Delta r}}$$

$$b = \frac{\text{mean}(r)}{\sqrt{2\Delta r}}$$

## 5.3. MÓDULO DE COMPRESIÓN VOLUMÉTRICA DE LA MATRIZ DEL SÓLIDO

$$\mu_m = \mu_s(1 - \phi_l)^{3.8}$$

$$K_m = K_s(1 - \phi_l)^{3.8}$$

## 5.4. DENSIDAD DEL MEDIO POROSO CONGELADO

$$\rho = (1 - \phi_l)\rho_s + \phi_l\rho_l$$

## 5.5. MODELO MATEMÁTICO DE LA TEORÍA DE BIOT

### 5.5.1. PARA BAJAS FRECUENCIAS

#### 5.5.1.1. VELOCIDAD PARA ONDAS TRANSVERSALES

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu_m}{\rho}}$$

#### 5.5.1.2. MÓDULO DE GASSMANN

$$K_G = \frac{K_s - K_m + \phi_l K_m \left( \frac{K_s}{K_l} - 1 \right)}{1 - \phi_l - \frac{K_m}{K_s} + \phi_l \cdot \frac{K_s}{K_l}}$$

Donde  $K_l$  es el módulo de compresión volumétrica del líquido.

#### 5.5.1.2.1. VELOCIDAD ONDAS P

$$v_p = \sqrt{\frac{K_G + \frac{4}{3} \cdot \mu_m}{\rho}}$$

---

5.5.2. PARA ALTAS FRECUENCIAS

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \text{frecuencia}$$

---

5.5.2.1.1. ONDAS TRANSVERSALES

5.5.2.1.1.1. VELOCIDAD COMPLEJA

---


$$v_c^s = \sqrt{\frac{\mu_m}{\rho - i \cdot \omega \cdot \frac{\rho_l^2}{Y(\omega)}}$$

---

5.5.2.1.1.2. FASE DE LA VELOCIDAD

$$v_s = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{1}{v_c^s} \right)$$

---

5.5.2.1.1.3. FACTOR DE ATENUACIÓN

$$\alpha_s = \omega \cdot \text{Im} \left( \frac{1}{v_c^s} \right)$$

---

5.5.2.1.2. CORRECCIÓN DE VISCOSIDAD PARA ALTAS FRECUENCIAS

$$Y(\omega) = i \cdot \omega \cdot \left( \frac{\rho \tau}{\phi_l} \right) + \frac{\eta \cdot F(\omega)}{k}$$

Donde  $\eta$  es la viscosidad del líquido.

---

5.5.2.1.3. TORTUOSIDAD DEL MEDIO POROSO

$$\tau = 1 + \beta \cdot \left( \frac{1}{\phi_l} - 1 \right)$$

$\beta = 1/2$  por granos esféricos.

---

5.5.2.1.4. PERMEABILIDAD (RELACIÓN KOZENY - CARMAN)

$$k = \frac{2 \cdot k_0 \cdot \phi_l^3}{(1 - \phi_l)^2}$$

Donde  $k_0$  es una referencia para el 50 % de líquido.

#### 5.5.2.1.5. CORRECCIÓN PARA LA VISCOSIDAD

---

$$F(\omega) = \sqrt{1 - \frac{4i\tau^2 k}{x \Omega^2 \phi_l}}$$

$$x = \frac{\eta \phi_l}{\omega k \rho_l}$$

Donde  $\Omega$  es un parámetro geométrico, siendo  $2/\Omega$  la relación superficie volumen poro de una interfase poro - sólido.

$$\frac{\xi \tau k}{\Omega^2 \phi_l} = 1$$

Tomando  $\xi = 12$  para losas de canto, and  $\xi = 8$  para un conjunto de tubos inclinados no entrecruzados.

---

#### 5.5.2.2. VELOCIDAD ONDAS - P

La velocidad compleja de las ondas P se puede obtener a partir de la siguiente ecuación de cuarto orden:

$$A \cdot v_c^{p4} + B \cdot v_c^{p2} + C = 0$$

$$A = -\left(\rho_l^2 + \frac{i}{\omega} Y(\omega) \rho\right)$$

$$B = \frac{i}{\omega} Y(\omega) E_G + M(2 \cdot \alpha \cdot \rho_l - \rho)$$

$$C = M E_m$$

Los parámetros  $E_m$ ,  $E_G$  y  $\alpha$  son el módulo de onda P de la estructura de hielo, el módulo de onda P de Gasmann y el coeficiente de esfuerzo efectivo de Biot, respectivamente:

$$E_m = K_m + \frac{4}{3} \cdot \mu_m$$

$$E_G = K_G + \frac{4}{3} \cdot \mu_m$$

$$\alpha = 1 - \frac{K_m}{K_s}$$

$$M = \frac{K_s}{1 - \phi_l - \frac{K_m}{K_s} + \phi_l \cdot \frac{K_s}{K_l}}$$

$$v_P = \frac{1}{Re} \left( \frac{1}{v_c^P} \right)$$

$$\alpha_P = \omega \cdot Im \left( \frac{1}{v_c^P} \right)$$

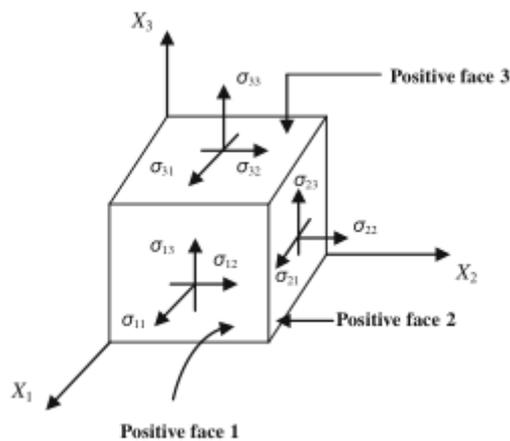
**TERCERA PARTE. MODELO VISCOELÁSTICO (KELVIN VOIGT) PARA HIELO AMORFO A CRISTALINO. CÁLCULO DE LA ATENUACIÓN. CARACTERIZACION DEL HIELO Y DEL AGUA EN ANEXO II.**

**6. MODELO VISCOELÁSTICO EN 3 · D**

La energía total de una onda (energía cinética y de tensión elástica) se conserva al pasar por un medio elástico. Las ondas radiales cambian su amplitud, disminuyendo al paso, del mismo, debido a que la onda tiene un área mayor (Esto no pasa con una onda plana). Sin embargo, un sólido no es totalmente elástico en el régimen transitorio que hace que la energía cinética se transforme en energía interna aumentando su calor (energía disipada).

Las hipótesis de las que se parte son (tomado de [13] ) para las 3 dimensiones, aunque el posterior modelo será 1D:

- La estructura microscópica del material viscoelástico es mecánicamente equivalente a una red de elementos viscosos y elásticos.
- El material ocupado por el material viscoelástico homogéneo no sometido a fuerzas externas puede ser dividido en paralelepípedos de iguales dimensiones, cerrados y empaçados.



**Ilustración 4 Elemento básico [14]**

- La extensión de cada elemento es pequeña.
- La deformación en la ley macroscópica tensión - deformación se puede calcular considerando las propiedades mecánicas de cada elemento.
- Si A y B son un par cualquiera de puntos con coordenadas  $x_i^A$  y  $x_i^B$  en la red de elementos (o "cubos") adyacentes, los desplazamientos de A y B, correspondientes,  $u_i^A$  y  $u_i^B$  serán (deformación macroscópica -  $\epsilon_{ij}$ - y tensor de rotación -  $\xi_{ij}$  -, que son constante en la zona del cubo):

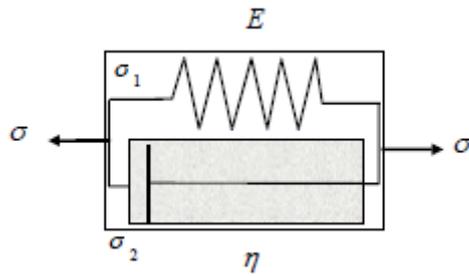
$$\mathbf{u}_i^B = \mathbf{u}_i^A + (\epsilon_{ij} + \xi_{ij}) \cdot (x_j^B - x_j^A)$$

- La energía disipada como calor es en todas partes lo suficientemente pequeña por unidad de volumen como para permitir que cualquier variación en las propiedades mecánicas debido al cambio de temperatura sea ignorada.
- Considerando la ecuación de movimiento de cualquier unión, las fuerzas inerciales y fuerzas de cuerpo son pequeñas e ignoradas.

### 6.1. MODELO VISCOELÁSTICO 1D [15]

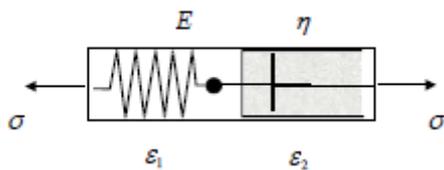
Se usan leyes deformación - tensión unidimensionales.

El modelo de Kelvin Voigt, es un modelo es análogo a un muelle (elemento elástico) en paralelo a un elemento viscoso (pistón), dispuestas de forma paralela. De esta forma las tensiones de ambas se pueden escribir como sigue:



**Ilustración 5 Modelo de Kelvin Voigt [16]**

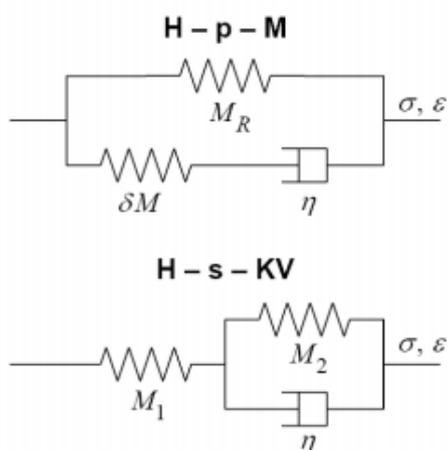
Existe otro modelo, como el de Maxwell, que los pone en serie.



**Ilustración 6 Modelo de Maxwell [16]**

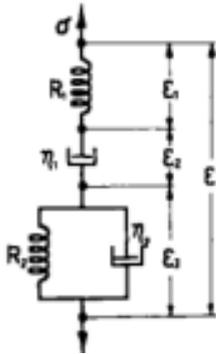
La disposición de Kelvin muestra el comportamiento de un sólido y la de Maxwell se comporta como un fluido. Estos modelos se denominan alternativamente como Kelvin, o sólido Kelvin-Voigt, y Maxwell o fluido Maxwell-Wiechert, respectivamente [14] .

O una combinación de ellos, como puede ser el Zener:



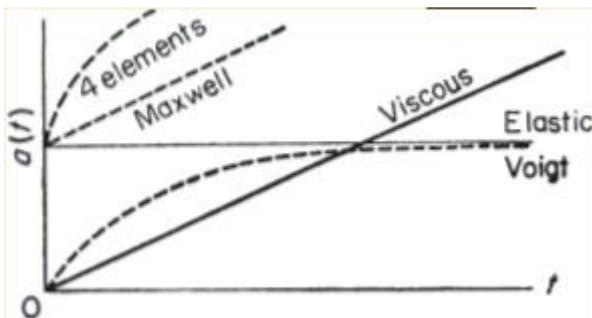
**Ilustración 7 Modelo Zener [17]**

O el modelo Burgers:

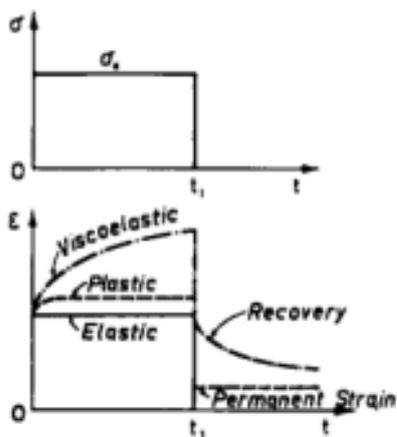


**Ilustración 8 Modelo Burgers [17]**

La respuesta de cada uno de los anteriores modelos es:



**Ilustración 9 Modelos. Respuesta a la tensión [13]**



**Ilustración 10 Respuesta de la deformación a una carga constante [17]**

Aunque hay muchísimas combinaciones dependiendo del arreglo entre muelle y pistón, ya sean en serie o en paralelo:

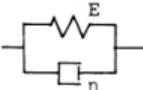
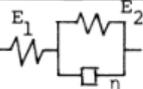
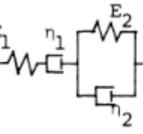
	Name	Differential equation	Creep function	Relaxation function
	Hooke	$\sigma = E \epsilon$	$\frac{1}{E}$	E
	Newton	$\sigma = \eta \dot{\epsilon}$	$\frac{t}{\eta}$	$\eta \delta(t)$
	Maxwell	$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = \dot{\epsilon}$	$\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta}$	$E e^{-t/T}$ ; $T = \eta/E$
	Kelvin	$\sigma = E \epsilon + \eta \dot{\epsilon}$	$\frac{1}{E} (1 - e^{-t/\theta})$ ; $\theta = \eta/E$	$E + \eta \delta(t)$
	Standard	$\sigma (E_1 + E_2) + \dot{\sigma} \eta = E_1 E_2 \epsilon + E_1 \eta \dot{\epsilon}$	$\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} (1 - e^{-t/\theta})$ ; $\theta = \eta/E_2$	$E_1 e^{-t/T} + \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} (1 - e^{-t/T})$ ; $T = \frac{\eta}{E_1 + E_2}$
	Zener	$\frac{\sigma}{E_1 \eta_2} + \frac{\dot{\sigma}}{E_1 E_2} = \frac{\epsilon}{\eta} + \frac{\dot{\epsilon} (E_1 + E_2)}{E_1 E_2}$	$\frac{1}{E_1} (1 - \frac{E_2}{E_1 + E_2} e^{-t/\theta})$ ; $\theta = \frac{(E_1 + E_2) \eta}{E_1 E_2}$	$E_1 + E_2 e^{-t/T}$ ; $T = \eta/E_2$
	Maxwell-Kelvin	$\sigma + \dot{\sigma} (\frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_2}{E_2} + \frac{\eta_1}{E_2}) + \ddot{\sigma} \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} = \dot{\epsilon} \eta_1 + \ddot{\epsilon} \frac{\eta_1 \eta_2}{E_2}$	$\frac{1}{E_1} + \frac{t}{\eta_1} + \frac{1}{E_2} (1 - e^{-t/\theta})$ ; $\theta = \frac{\eta_2}{E_2}$	$(p_1^2 - 4\eta_2)^{-1/2} [(q_1 - \frac{q_2}{T_1}) e^{-t/T_1} - (q_1 - \frac{q_2}{T_2}) e^{-t/T_2}]$ ; $p_1 = \frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_2}{E_2} + \frac{\eta_1}{E_2}$ $p_2 = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2}$ ; $q_1 = \eta_1$ ; $q_2 = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_2}$ $\left. \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2p_2} (p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4p_2})$

Ilustración 11 Resumen de los distintos modelos simples que se pueden realizar [18]

6.2. MODELO MATEMÁTICO. MODELO VISCOELÁSTICO DE KELVIN VOIGT. SÓLIDOS [15]. CÓDIGO EN ANEXO I-B.

$(\tau = \sigma)$

En este modelo se supone que tratamos con un muelle helicoidal, perfectamente lineal y sin masa, representada por la Ley de Hooke (ecuación constitutiva):

$$\epsilon = \frac{1}{E} \tau_1$$

Mientras que para la parte viscosa tratamos con un pistón representado por la Ley de Newton (ecuación constitutiva):

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{\eta} \tau_2$$

$E$  es una constante elástica del muelle, que se corresponde como veremos más adelante a  $M_R$  (o módulo real de masa) y  $\eta$ . De este modo la relación en este modelo de la tensión-deformación del modelo Kelvin - Voigt es (ecuación de equilibrio):

$$\tau = E \cdot \epsilon + \eta \cdot \dot{\epsilon}$$

Por tanto, los desplazamientos son iguales y las fuerzas aditivas. Este material es un sólido.

Si  $\epsilon$  la consideramos como:

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot e^{i\omega t}$$

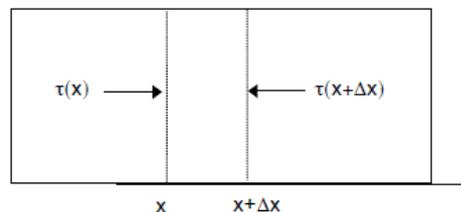
$\tau$ , queda como:

$$\tau = (E + i\omega\eta)\epsilon_0 \cdot e^{i\omega t}$$

$$\tau = (M_R + iM_I) \epsilon$$

De lo que se deduce que  $M_R=E$  y  $M_I$  es  $\omega\eta$ .

La ecuación que explica el proceso es:



**Ilustración 12 Balance de fuerzas en un volumen de sólido**  
[15]

En un balance de fuerzas en un segmento infinitesimal del sólido:

$$[\tau(x, t) - \tau(x + \Delta x, t)] \cdot A = -\rho(A \cdot \Delta x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Que pasadas a derivadas parciales queda:

$$E \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

El desplazamiento está descrito por:

$$u(x, t) = U_0 \cdot e^{i(k_R + ik_I) \cdot x - \omega t}$$

Donde k es el número de onda con partes real e imaginaria que al sustituir en la anterior, queda como:

$$(k_R + ik_I)^2 (E - i\omega\eta) = \rho\omega^2$$

Que tiene como solución:

$$k_R = \sqrt{\frac{\rho E \omega^2}{2(E^2 + \eta^2 \omega^2)} \left( \sqrt{\left( \frac{E^2 + \eta^2 \omega^2}{E^2} \right) + 1} \right)}$$

$$k_I = \sqrt{\frac{\rho E \omega^2}{2(E^2 + \eta^2 \omega^2)} \left( \sqrt{\left( \frac{E^2 + \eta^2 \omega^2}{E^2} \right) - 1} \right)}$$

Siendo aceptadas las soluciones positivas para ambas. La parte imaginaria es la que se llama como coeficiente de atenuación,  $\alpha$ .

Si el término viscoso es pequeño, como en nuestro caso, se puede simplificar las ecuaciones anteriores:

$$k_R = \frac{\omega}{c_0} \left( 1 - \frac{3}{8} \left( \frac{\eta \omega}{E} \right)^2 \right)$$

$$k_I = \frac{\eta \omega^2}{2Ec_0}$$

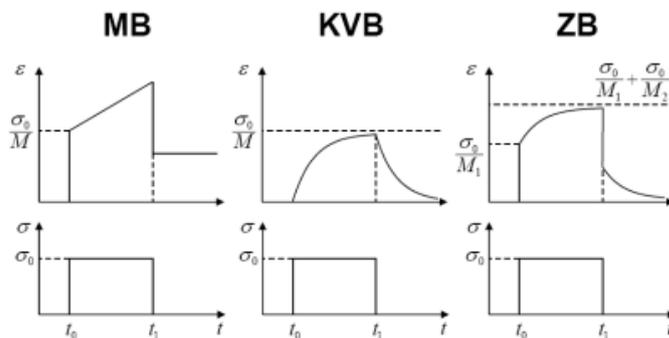
Donde  $c_0$  es:

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Que es la velocidad de la onda elástica en ausencia de pérdidas. Para tener en cuenta las pérdidas se usa la siguiente relación:

$$c = \frac{\omega}{k_R}$$

En general los principios de la mecánica son válidos para todos los materiales y sus propiedades características se especifican por sus ecuaciones constitutivas, es decir, por la relación entre fuerzas y deformaciones



**Ilustración 13** Comportamiento de los modelos de Maxwell (MB), Kelvin Voigt (KVB) y Zener (ZB) ante un esfuerzo constante [19]

6.3. MODELO MATEMÁTICO. MODELO VISCOELÁSTICO DE PISTÓN VISCOSO LINEAL (ELABORACIÓN PROPIA). LÍQUIDOS.

$$(\tau = \sigma)$$

Lo tratamos con un pistón representado por la Ley de Newton (ecuación constitutiva):

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{\eta} \tau$$

$$\tau = \eta \cdot \dot{\epsilon}$$

Si  $\epsilon$  la consideramos como:

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot e^{i\omega t}$$

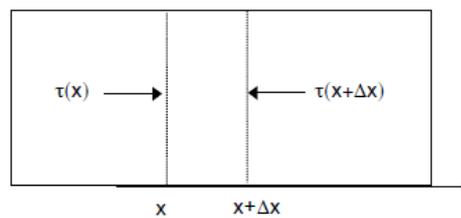
$\tau$ , queda como:

$$\tau = (i\omega\eta)\epsilon_0 \cdot e^{i\omega t}$$

$$\tau = (M_R + iM_I) \epsilon$$

De lo que se deduce que  $M_R=E$  y  $M_I$  es  $\omega\eta$ .

La ecuación que explica el proceso es:



**Ilustración 14 Balance de fuerzas en un volumen de sólido [15]**

En un balance de fuerzas en un segmento infinitesimal del sólido:

$$[\tau(x, t) - \tau(x + \Delta x, t)] \cdot A = -\rho(A \cdot \Delta x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Que pasadas a derivadas parciales queda:

$$\eta \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

El desplazamiento está descrito por:

$$u(x, t) = U_0 \cdot e^{i((k_R + ik_I) \cdot x - \omega t)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = U_0 \cdot \omega^2 \cdot e^{i((k_R + ik_I) \cdot x - \omega t)}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = i \cdot U_0 \cdot (k_R + ik_I)^2 \cdot \omega \cdot e^{i((k_R + ik_I) \cdot x - \omega t)}$$

$$\eta \cdot i \cdot U_0 \cdot (k_R + ik_I)^2 \cdot \omega \cdot e^{i((k_R + ik_I) \cdot x - \omega t)} = \rho \cdot U_0 \cdot \omega^2 \cdot e^{i((k_R + ik_I) \cdot x - \omega t)}$$

$$i \cdot \eta \cdot (k_R + ik_I)^2 = \rho \cdot \omega$$

Donde k es el número de onda con partes real e imaginaria que al sustituir en la anterior, queda como:

$$k_R + ik_I = \sqrt{\frac{\rho \omega}{\eta i}}$$

Que tiene como solución:

$$k_R = \sqrt{\frac{\rho \omega}{2\eta}}$$

$$k_I = 0$$

Siendo aceptadas las soluciones positivas para ambas. La parte imaginaria es la que se llama como coeficiente de atenuación,  $\alpha$ .

Es decir, un líquido "puro" no atenúa, por lo que no se calienta.

6.4. MODELO MATEMÁTICO. MODELO VISCOELÁSTICO DE MAXWELL (ELABORACIÓN PROPIA). FLUIDOS.

En un balance de fuerzas en un segmento infinitesimal del sólido:

$$[\tau(x, t) - \tau(x + \Delta x, t)] \cdot A = -\rho(A \cdot \Delta x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\dot{\tau}}{E} + \frac{\tau}{\eta} = \dot{\epsilon}$$

Como en el caso anterior tomamos:

$$\frac{\partial \tau}{E \partial t} + \frac{\tau}{\eta} = \frac{\partial \epsilon}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \tau}{E \partial t} + \frac{\tau}{\eta} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \epsilon}{\partial t}$$

Si:

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \tau}{E \partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial x \eta} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \epsilon}{\partial t}$$

$$\frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\rho}{\eta} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}$$

El desplazamiento está descrito por:

$$u(x, t) = U_0 \cdot e^{i((k_R + ik_I) \cdot x - \omega t)}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{U}_0 \cdot \omega^2 \cdot e^{i((k_R + ik_I) \cdot x - \omega t)}$$

$$\frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial t^3} = i \cdot \mathbf{U}_0 \cdot \omega^3 \cdot e^{i((k_R + ik_I) \cdot x - \omega t)}$$

$$\frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial x^2 \partial t} = i \cdot \mathbf{U}_0 \cdot (k_R + ik_I)^2 \cdot \omega \cdot e^{i((k_R + ik_I) \cdot x - \omega t)}$$

$$\frac{\rho}{E} \cdot i \cdot \mathbf{U}_0 \cdot \omega^3 \cdot e^{i((k_R + ik_I) \cdot x - \omega t)} + \frac{\rho}{\eta} \cdot \mathbf{U}_0 \cdot \omega^2 \cdot e^{i((k_R + ik_I) \cdot x - \omega t)}$$

$$= i \cdot \mathbf{U}_0 \cdot (k_R + ik_I)^2 \cdot \omega \cdot e^{i((k_R + ik_I) \cdot x - \omega t)}$$

$$i \cdot \frac{\rho}{E} \cdot \omega^2 + \frac{\rho}{\eta} \cdot \omega = i \cdot (k_R + ik_I)^2 \cdot \omega$$

$$(k_R + ik_I)^2 = \rho \omega \left( \frac{\omega}{E} - i \cdot \frac{1}{\eta} \right)$$

$$k_R^2 + (ik_I)^2 + 2 \cdot k_R \cdot ik_I = k_R^2 - k_I^2 + 2 \cdot k_R \cdot ik_I$$

Separando partes real e imaginaria:

$$2 \cdot k_R \cdot k_I = \frac{\rho \omega}{\eta}$$

$$k_I = \frac{\rho \omega}{2\eta k_R}$$

$$k_R^2 - k_I^2 = \frac{\rho \omega^2}{E}$$

$$k_R^2 - \left( \frac{\rho \omega}{2\eta k_R} \right)^2 = \frac{\rho \omega^2}{E}$$

$$k_R^4 - \frac{\rho \omega^2}{E} \cdot k_R^2 - \left( \frac{\rho \omega}{2\eta} \right)^2 = 0$$

Que es una ecuación bicuadrada:

Si llamamos  $k_R^2 = p$ :

$$p^2 - \frac{\rho \omega^2}{E} \cdot p - \left( \frac{\rho \omega}{2\eta} \right)^2 = 0$$

$$p = \frac{\frac{\rho\omega^2}{E} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho\omega^2}{E}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\rho\omega}{2\eta}\right)^2}}{2}$$

Tomamos los valores positivos:

$$k_R = \sqrt{p} = \sqrt{\frac{\frac{\rho\omega^2}{E} + \sqrt{\left(\frac{\rho\omega^2}{E}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\rho\omega}{2\eta}\right)^2}}{2}}$$

$$k_I = \frac{\frac{\rho\omega}{2\eta}}{\sqrt{\frac{\frac{\rho\omega^2}{E} + \sqrt{\left(\frac{\rho\omega^2}{E}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\rho\omega}{2\eta}\right)^2}}{2}}}$$

Si  $E \ll \eta$ , ya que, en este modelo E corresponde al módulo de rigidez o G en fluidos (que es casi o nulo):

$$k_R = \frac{\frac{\rho}{2\eta}}{\sqrt{\frac{\rho}{E}}}$$

$$k_I = \frac{\sqrt{\rho E}}{2\eta} \cong 0$$

6.5. MODELO MATEMÁTICO. MODELO VISCOELÁSTICO DE JEFFREY (ELABORACIÓN PROPIA). FLUIDOS.

En un balance de fuerzas en un segmento infinitesimal del sólido:

$$[\tau(x, t) - \tau(x + \Delta x, t)] \cdot A = -\rho(A \cdot \Delta x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\tau_1 = \eta_1 \cdot \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t}$$

$$\tau_2 = E \cdot \varepsilon_2 + \eta_2 \cdot \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t}$$

La suma de las deformaciones individuales son la deformación total:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t}$$

$$\frac{\eta_1 + \eta_2}{E} \cdot \dot{\tau} + \frac{\tau}{\eta_1} = \dot{\varepsilon} + \frac{\eta_2}{E} \cdot \ddot{\varepsilon}$$

Como en el caso anterior tomamos:

$$\frac{\eta_1 + \eta_2}{E} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\tau}{\eta_1} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\eta_2}{E} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 E} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\tau}{\eta_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\eta_2}{E} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} \right)$$

Si:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 E} \cdot \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \tau}{\eta_1 \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial t} + \frac{\eta_2}{E} \cdot \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial x \partial t^2}$$

$$\rho \cdot \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 E} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\rho}{\eta_1} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\eta_2}{E} \cdot \frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial x^2 \partial t^2}$$

El desplazamiento está descrito por:

$$u(x, t) = U_0 \cdot e^{i((k_R + ik_I) \cdot x - \omega t)}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{U}_0 \cdot \omega^2 \cdot e^{i((k_R + ik_I) \cdot x - \omega t)}$$

$$\frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial t^3} = i \cdot \mathbf{U}_0 \cdot \omega^3 \cdot e^{i((k_R + ik_I) \cdot x - \omega t)}$$

$$\frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial x^2 \partial t} = i \cdot \mathbf{U}_0 \cdot (k_R + ik_I)^2 \cdot \omega \cdot e^{i((k_R + ik_I) \cdot x - \omega t)}$$

$$\frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial x^2 \partial t^2} = \mathbf{U}_0 \cdot (k_R + ik_I)^2 \cdot \omega^2 \cdot e^{i((k_R + ik_I) \cdot x - \omega t)}$$

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 E} \cdot i \cdot \mathbf{U}_0 \cdot \omega^3 \cdot e^{i((k_R + ik_I) \cdot x - \omega t)} + \frac{\rho}{\eta_1} \cdot \mathbf{U}_0 \cdot \omega^2 \cdot e^{i((k_R + ik_I) \cdot x - \omega t)} \\ = \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial x^2 \partial t} i \cdot \mathbf{U}_0 \cdot (k_R + ik_I)^2 \cdot \omega \cdot e^{i((k_R + ik_I) \cdot x - \omega t)} + \frac{\eta_2}{E} \\ \cdot \mathbf{U}_0 \cdot (k_R + ik_I)^2 \cdot \omega^2 \cdot e^{i((k_R + ik_I) \cdot x - \omega t)} \end{aligned}$$

$$\rho \cdot \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 E} \cdot i \cdot \omega^2 + \frac{\rho}{\eta_1} \cdot \omega = i \cdot (k_R + ik_I)^2 + \frac{\eta_2}{E} \cdot (k_R + ik_I)^2 \cdot \omega$$

$$\rho \cdot \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 E} \cdot i \cdot \omega^2 + \frac{\rho}{\eta_1} \cdot \omega = i \cdot (k_R + ik_I)^2 + \frac{\eta_2}{E} \cdot (k_R + ik_I)^2 \cdot \omega$$

$$(k_R + ik_I)^2 \left( i + \frac{\omega \eta_2}{E} \right) = \rho \cdot \omega \cdot \left( \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 E} \cdot i \cdot \omega + \frac{1}{\eta_1} \right)$$

$$(k_R^2 + (ik_I)^2 + 2 \cdot k_R \cdot ik_I) \cdot \left( i + \frac{\omega \eta_2}{E} \right) = \rho \cdot \omega \cdot \left( \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 E} \cdot i \cdot \omega + \frac{1}{\eta_1} \right)$$

$$\begin{aligned} (ik_R^2 - ik_I^2 - 2 \cdot k_R \cdot k_I) + \left( \frac{\omega \eta_2}{E} k_R^2 - \frac{\omega \eta_2}{E} k_I^2 + \frac{\omega \eta_2}{E} 2 \cdot k_R \cdot ik_I \right) \\ = \rho \cdot \omega \cdot \left( \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 E} \cdot i \cdot \omega + \frac{1}{\eta_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_R^2 \left( \frac{\omega \eta_2}{E} + i \right) - k_I^2 \left( \frac{\omega \eta_2}{E} + i \right) + 2 \cdot k_R \cdot ik_I \left( \frac{\omega \eta_2}{E} - 1 \right) \\ = \rho \cdot \omega \cdot \left( \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 E} \cdot i \cdot \omega + \frac{1}{\eta_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( k_R^2 - k_I^2 + 2 \cdot k_R \cdot k_I \left( \frac{\omega \eta_2}{E} - 1 \right) \right) \cdot i + \left( \frac{\omega \eta_2}{E} k_R^2 - \frac{\omega \eta_2}{E} k_I^2 \right) \\ = \rho \cdot \omega \cdot \left( \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 E} \cdot i \cdot \omega + \frac{1}{\eta_1} \right) \end{aligned}$$

Separando partes real e imaginaria:

$$k_R^2 - k_I^2 + 2 \cdot k_R \cdot k_I \left( \frac{\omega \eta_2}{E} - 1 \right) = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 E} \rho \cdot \omega^2$$

$$\frac{\omega \eta_2}{E} k_R^2 - \frac{\omega \eta_2}{E} k_I^2 = \frac{\rho \cdot \omega}{\eta_1}$$

De la página web <https://quickmath.com>, obtenemos las siguientes soluciones (a=vis1, b=vis2, r=rho, w=omega, y=k\_i):

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a x y = b \\ x^2 - y^2 = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \%r_{17} \\ y = \frac{\sqrt{-\frac{\sqrt{(a^2+4)c^2-8bc+4b^2+ac}}{a}}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \%r_{18} \\ y = -\frac{\sqrt{-\frac{\sqrt{(a^2+4)c^2-8bc+4b^2+ac}}{a}}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \%r_{20} \\ y = -\frac{\sqrt{-\frac{ac-\sqrt{(a^2+4)c^2-8bc+4b^2}}{a}}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

## 6.6. OTROS ARREGLOS Y SU CARÁCTER SÓLIDO O LÍQUIDO

En el siguiente cuadro se da la energía almacenada y la velocidad de disipación para distintos modelos de material,

de forma que la ecuación de cada uno de ellos de Kelvin o Maxwell tiene el tipo  $(\tau = \sigma)$  [20]:

$$\tau + p_1 \cdot \dot{\tau} + p_2 \cdot \ddot{\tau} + \dots = q_0 \cdot \varepsilon + q_1 \cdot \dot{\varepsilon} + q_2 \cdot \ddot{\varepsilon} + \dots$$

$$p_0 = 1$$

$$P\tau = Q\varepsilon$$

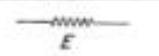
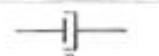
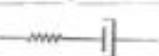
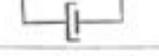
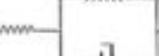
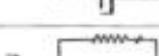
Stress-strain law	Model representation (in general, not unique)	Stored energy, $V$	Rate of dissipation, $\phi$
$\sigma = E\varepsilon$ , elastic		$\frac{1}{2} E\varepsilon^2 = \frac{1}{2E} \sigma^2$	0
$\sigma = \eta D\varepsilon$ , viscous		0	$\eta(D\varepsilon)^2 = \frac{1}{\eta} \sigma^2$
$\frac{1}{E} D\sigma + \frac{1}{\eta} \sigma = D\varepsilon$ , Maxwell		$\frac{1}{2E} \sigma^2$	$\frac{1}{\eta} \sigma^2$
$\sigma = \eta D\varepsilon + E\varepsilon$ , Voigt		$\frac{1}{2} E\varepsilon^2$	$\eta(D\varepsilon)^2$
$p_1 D\sigma + p_0 \sigma = q_1 D\varepsilon + q_0 \varepsilon$ , three-element elastic		$\frac{p_0 p_1 \sigma^2 - 2p_1 q_0 \sigma \varepsilon + q_0^2 \varepsilon^2}{2(p_0 q_1 - p_1 q_0)}$	$\frac{p_0^2 \sigma^2 - 2p_0 q_0 \sigma \varepsilon + q_0^2 \varepsilon^2}{p_0 q_1 - p_1 q_0}$
$p_1 D\sigma + p_0 \sigma = q_2 D^2 \varepsilon + q_1 D\varepsilon$ , three-element viscous		$\frac{p_1^2 \sigma^2 - 2p_1 q_2 \sigma D\varepsilon + q_2^2 (D\varepsilon)^2}{2(p_1 q_1 - p_0 q_2)}$	$\frac{p_0 p_1 \sigma^2 - 2p_0 q_2 \sigma D\varepsilon + q_1 q_2 (D\varepsilon)^2}{p_1 q_1 - p_0 q_2}$
$p_2 D^2 \sigma + p_1 D\sigma + p_0 \sigma = q_2 D^2 \varepsilon + q_1 D\varepsilon$ , four element of first type		$\frac{\{(p_1^2 q_2 - p_0 p_2 q_2 + p_1 p_2 q_1) \sigma^2 + p_2^2 q_2 (D\sigma)^2 + q_2^2 (D\varepsilon)^2 + 2p_1(p_1 q_2 - p_2 q_1) \sigma D\sigma - 2p_2 q_2^2 D\sigma D\varepsilon - 2q_2(p_1 q_2 - p_2 q_1) \sigma D\varepsilon\}}{2(p_1 p_2 q_1 - p_2 q_1^2 - p_0 q_2^2)^{-1}}$	$\frac{\{p_0(p_1 q_2 - p_2 q_1) \sigma^2 + p_2^2 q_2 (D\sigma)^2 + q_1 q_2^2 (D\varepsilon)^2 + 2p_0 p_2 q_2 \sigma D\sigma - 2p_2 q_1 q_2 D\sigma D\varepsilon - 2p_2 q_2^2 \sigma D\varepsilon\}}{\times \{p_1 p_2 q_1 - p_2 q_1^2 - p_0 q_2^2\}^{-1}}$
$p_1 D\sigma + p_0 \sigma = q_2 D^2 \varepsilon + q_1 D\varepsilon + q_0 \varepsilon$ , four element of second type		$\frac{\{p_0 p_1^2 \sigma^2 + p_0 q_2^2 (D\varepsilon)^2 + q_0(p_1 q_1 - p_0 q_2) \varepsilon^2 - 2p_0 p_1 q_2 \sigma D\varepsilon - 2p_1^2 q_0 \sigma \varepsilon + 2p_1 q_0 q_2 \varepsilon D\varepsilon\}}{\times \{2(p_0 p_1 q_1 - p_0^2 q_2 - p_1^2 q_0)\}^{-1}}$	$\frac{\{p_0^2 p_1 \sigma^2 + q_2(p_0 q_1 - p_1 q_0) (D\varepsilon)^2 + p_1 q_0^2 \varepsilon^2 - 2p_0^2 q_2 \sigma D\varepsilon - 2p_0 p_1 q_0 \sigma \varepsilon + 2p_0 q_0 q_2 \varepsilon D\varepsilon\}}{\times \{p_0 p_1 q_1 - p_0^2 q_2 - p_1^2 q_0\}^{-1}}$

Ilustración 15 Energía almacenada y velocidad de disipación para distintos modelos viscoelásticos de material [13]

Para saber si el ordenamiento y distribución de muelles y pistones da un sólido o un líquido tenemos la siguiente tabla:

Kelvin and Maxwell Models

Kelvin model	Maxwell model	Nonzero coefficients of $P$	Nonzero coefficients of $Q$	Number of parameters	$E_0$	Solid or fluid
s	s	$p_0$	$q_0$	1	$E_0$	solid
d	d	$p_0$	$q_1$	1	-	fluid
k	s/d	$p_0$	$q_0 q_1$	2	-	solid
s-d	m	$p_0 p_1$	$q_1$	2	$E_0$	fluid
s-k	s/m	$p_0 p_1$	$q_0 q_1$	3	$E_0$	solid
d-k	d/m	$p_0 p_1$	$q_1 q_2$	3	-	fluid
k-k	s/d/m	$p_0 p_1$	$q_0 q_1 q_2$	4	-	solid
s-d-k	m/m	$p_0 p_1 p_2$	$q_1 q_2$	4	$E_0$	fluid
s-k-k	s/m/m	$p_0 p_1 p_2$	$q_0 q_1 q_2$	5	$E_0$	solid
d-k-k	d/m/m	$p_0 p_1 p_2$	$q_1 q_2 q_3$	5	-	fluid
k-k-k	s/d/m/m	$p_0 p_1 p_2$	$q_0 q_1 q_2 q_3$	6	-	solid
s-d-k-k	m/m/m	$p_0 p_1 p_2 p_3$	$q_1 q_2 q_3$	6	$E_0$	fluid
s-k-k-k	s/m/m/m	$p_0 p_1 p_2 p_3$	$q_0 q_1 q_2 q_3$	7	$E_0$	solid

Ilustración 16 Material sólido o líquido según ordenamiento de elementos elásticos y viscosos (s=muelle, d=pistón) [20]

## 7. RESULTADOS

### 7.1. MEDIOS POROSOS

#### 7.1.1. RESULTADOS PARA EL COEFICIENTE DE ATENUACIÓN DEL HIELO

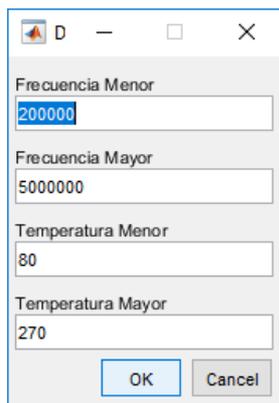
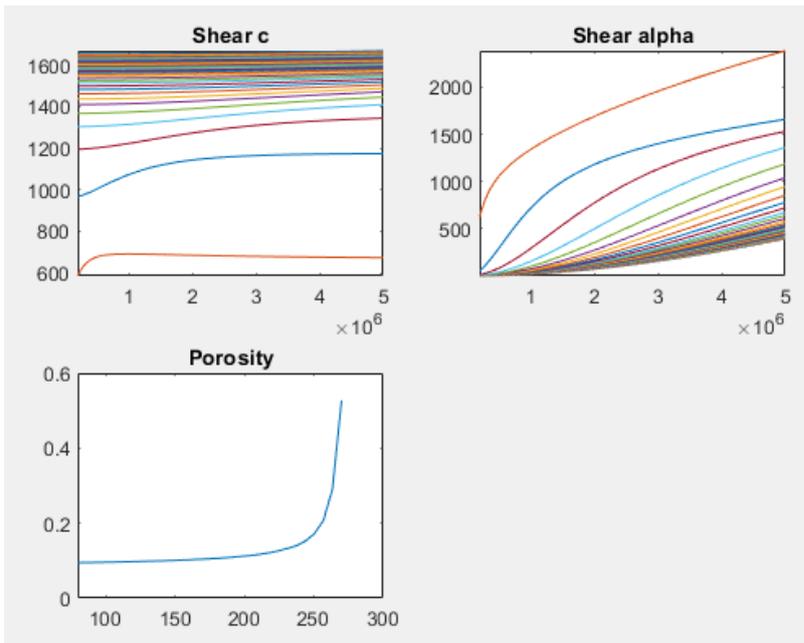
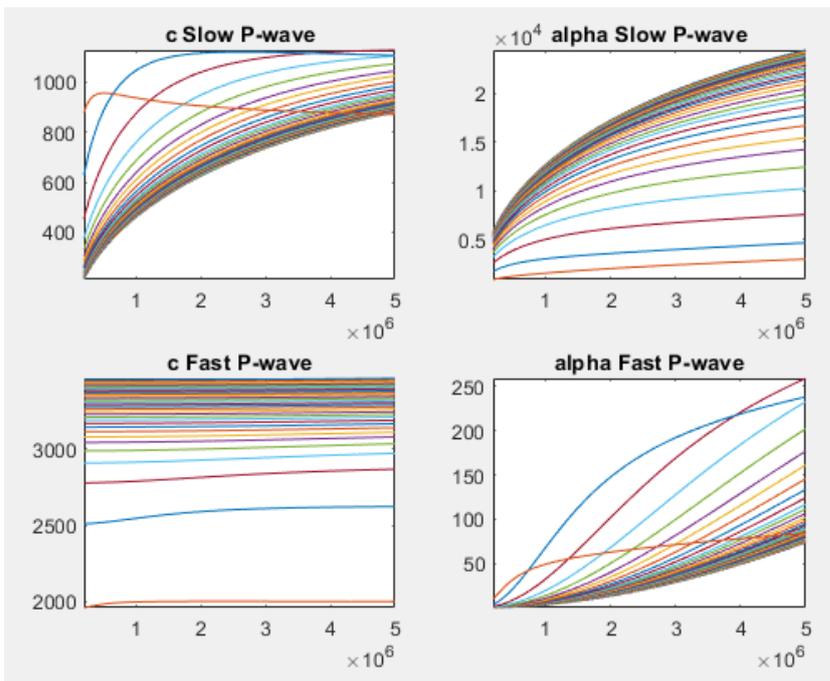


Ilustración 17 Pequeña interfaz en Matlab del programa

#### 7.1.2. HIELO-AGUA (200 KHZ-50MHZ Y 77-270K)



**Ilustración 18** Parámetros a baja frecuencia y porosidad (Temperatura)



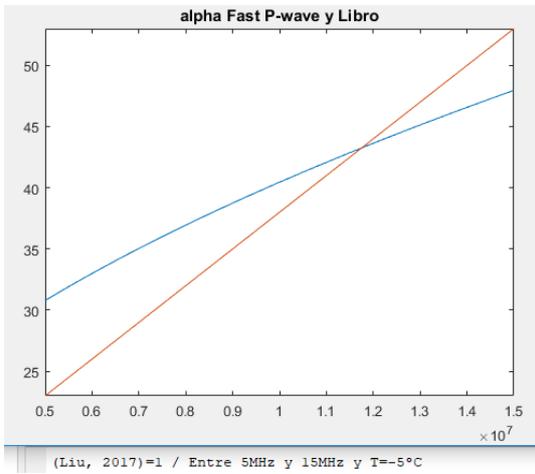
**Ilustración 19** Parámetros a alta frecuencia

---

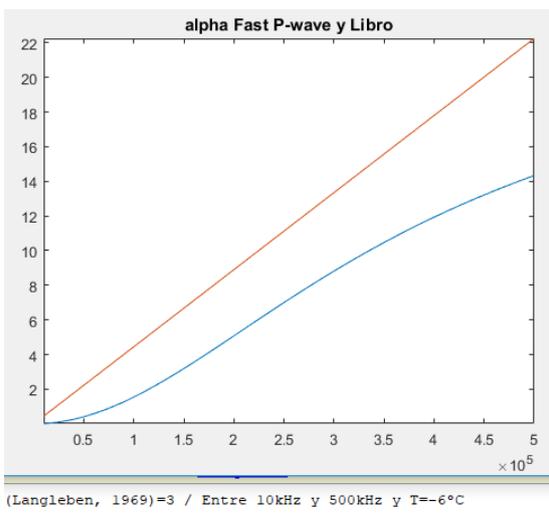
### 7.1.3. VALIDACIÓN DE LA SIMULACIÓN

Con un código algo modificado respecto al anterior comparamos con algunas correlaciones que se aportan en distintas referencias:

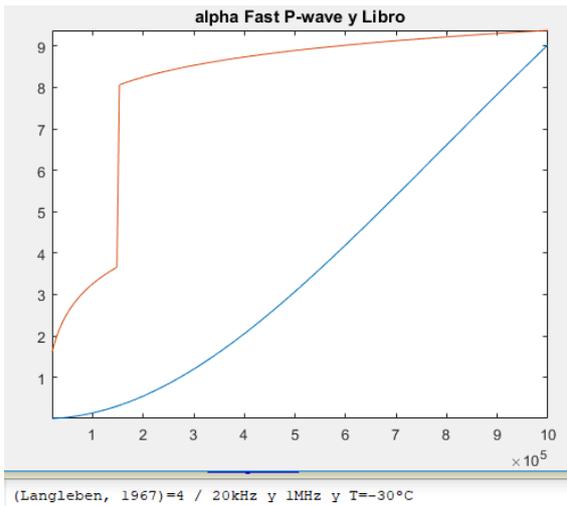
[21] Hielo de agua desgasificada enfriada a  $-5^{\circ}\text{C}$ . No es poroso, pero podemos compararlo. Hay semejanzas



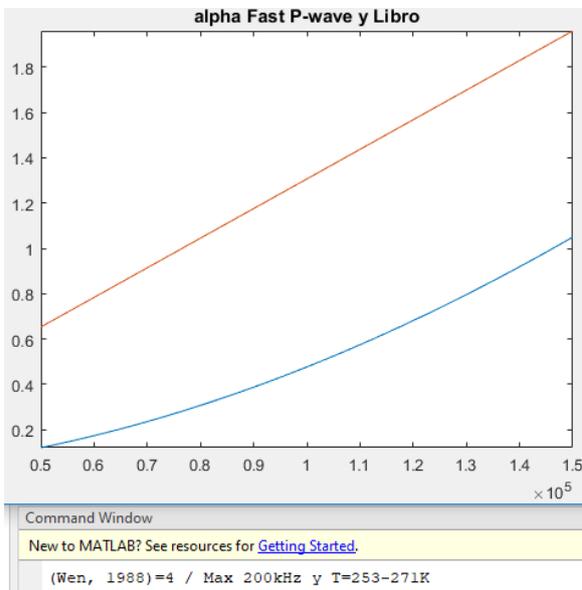
[22]



[23]



[24]



T=263K en este caso.

7.2. SÓLIDO VISCOELÁSTICO DE KELVIN VOIGT (T=160-250K)

El paso de temperaturas es de 20 K.

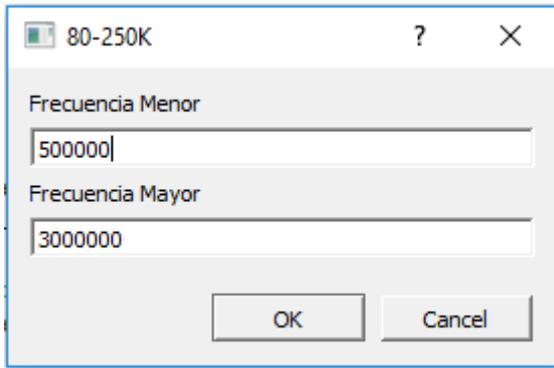


Ilustración 20 Interfaz gráfica que se ve en GNU OCTAVE

---

7.2.1. ENTRE 200KHZ Y 400KHZ

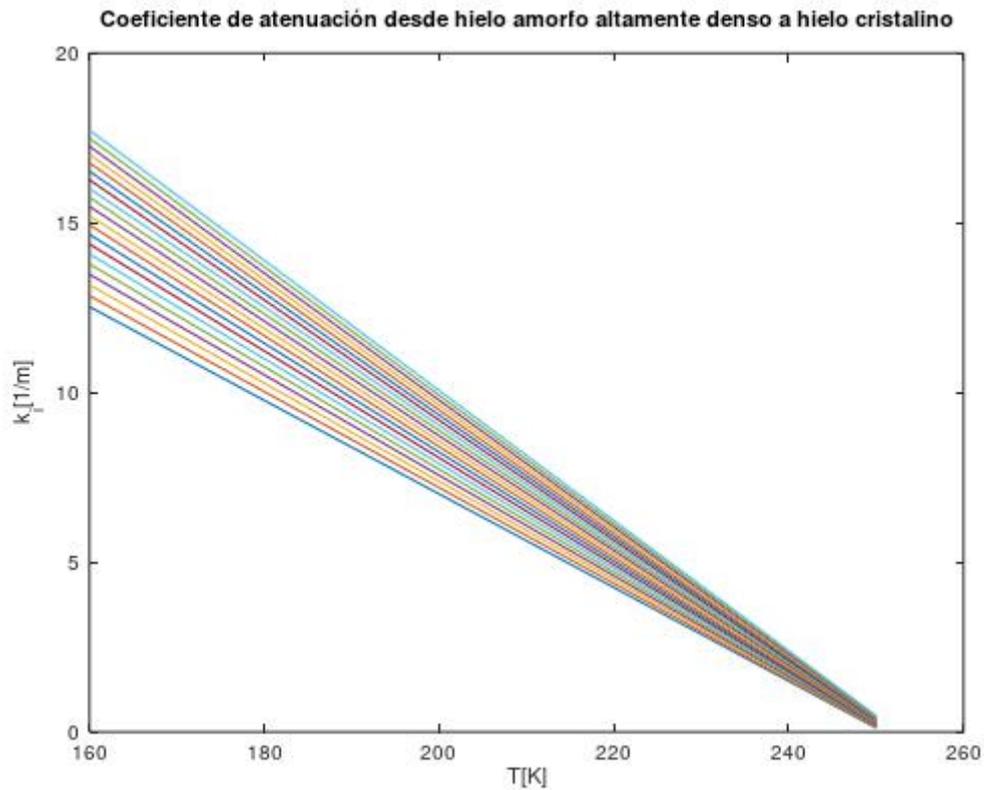
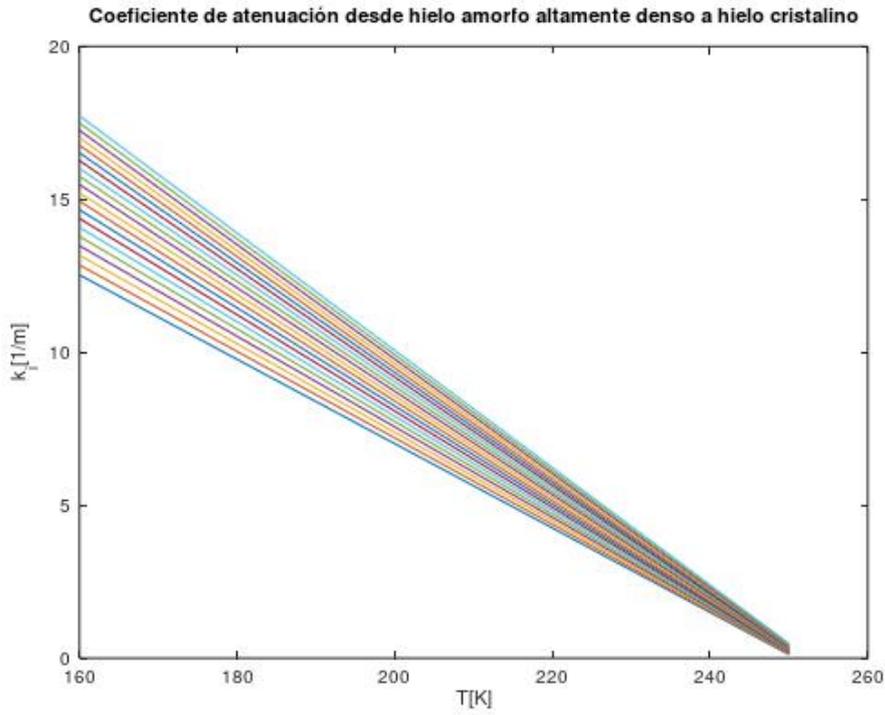


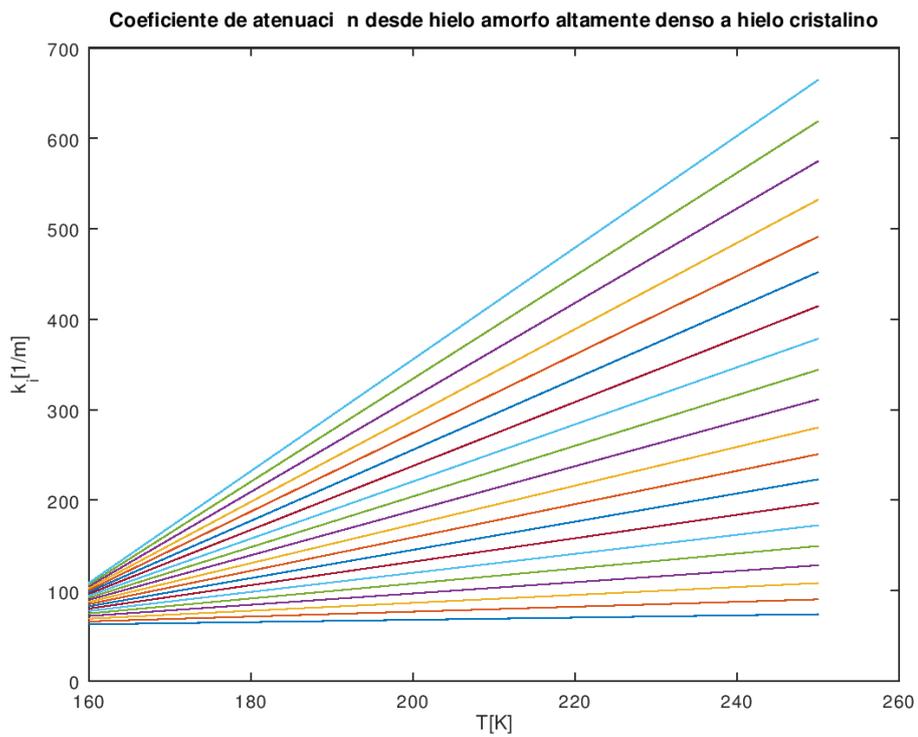
Ilustración 21 Coeficiente de atenuación en distintas transiciones. GNU OCTAVE.

7.2.2. ENTRE 500KHZ Y 3MHZ



**Ilustración 22 Coeficiente de atenuación en distintas transiciones. GNU OCTAVE.**

7.2.3. ENTRE 5MHZ Y 15MHZ



### Ilustración 23 Coeficiente de atenuación entre 5MHz y 15MHz. GNU OCTAVE.

Observando un cambio de pendiente para frecuencias más altas.

#### 7.3. COMPARACIÓN DE COEFICIENTES DE ATENUACIÓN CON REFERENCIA

Según la referencia [21], la atenuación a  $-10^{\circ}\text{C}$  de hielo es:

$$\alpha = 100 \cdot (0.067 \cdot f_0[\text{MHz}] + 0.3) \left[ \frac{1}{\text{m}} \right]$$

Entre 5-15MHz.

Obteniendo los siguientes valores (relacionado de forma lineal), respecto al modelo viscoelástico:

%f0=5MHz y T=-10°C alpha=10.8 [1/m], ref= 63.5 [1/m]

%f0=15MHz y T=-10°C alpha=98.1 [1/m], ref= 130 [1/m]

Que están en el mismo orden de magnitud., aunque de mayor pendiente el del modelo.

## 8. CONCLUSIÓN

### 8.1. MEDIOS POROSOS

Este modelo da una idea del orden de magnitud de la velocidad del sonido y del coeficiente de atenuación del medio poroso por debajo de la temperatura de fusión de la matriz porosa del hielo según la teoría de Biot modificada por Carcione, [8], [7], [9]. Conforme menor sea la porosidad mayor semejanza habrá con un hielo con propiedades policristalinas.

## 8.2. SÓLIDO VISCOELÁSTICO DE KELVIN VOIGT

Se ven que los perfiles de atenuación desde 160K a temperaturas mayores son lineales con pendientes descendentes, es decir, que a mayor temperatura menor coeficiente de atenuación. Se le ve la lógica porque pasamos de un hielo amorfo (con moléculas desordenadas) a un hielo cristalino (ordenado), por lo que en el primero será más fácil el calentamiento (mayor atenuación) que en el segundo. Conforme la frecuencia es mayor esto se invierte. En anexo I, hemos realizado lo mismo para Hígado Bovino a temperatura ambiente observándose que para frecuencias mayores a 0.9MHz no se corresponde el modelo con las referencias, por lo que no valen todas, en este caso muy altas; son moderadas. En el hielo puede pasar lo mismo a falta de datos de frecuencias límites.

## ANEXO I. CÓDIGOS EN MATLAB - GNU OCTAVE

## A. MEDIOS POROSOS

```
%CREADO POR PABLO BARROSO RODRIGUEZ

clearvars

clc

clf

global f0 T2 phi_w phi_w1 L L2 vc_s vcpF vcpS alphapS alphapF
alphas

%numero de frecuencias

L=200;

%Número de Temperaturas

L2=30;

jj3={'Frecuencia Menor','Frecuencia Mayor','Temperatura
Menor','Temperatura Mayor'};

titulo3='Datos';

lineas3 = 1;

valorinicialpantalla3 = {'200000','5000000','80','270'};

salida3 =
inputdlg(jj3,titulo3,lineas3,valorinicialpantalla3);

%Pasamos el vector de string a vector de números tipo double

nn3=str2double(salida3);

f0=linspace(nn3(1),nn3(2),L);
```

```

T2=linspace(nn3(3),nn3(4),L2);

vc_s=zeros(L2,L);
alphas=zeros(L2,L);
vcpF=zeros(L2,L);
alphapF=zeros(L2,L);
vcpS=zeros(L2,L);
alphapS=zeros(L2,L);
phi_w1=zeros(1,L);

for ll=0:L2-1

T=T2(ll+1);

phi_w= algoF(T,L);
phi_w1=algoF(T2,L);

rho_ice=-0.0842*T+940.42;
rho_w=1030;
K_ice=-1E7*T+1E10;
mu_ice=-3E6*T+4E9;
mu_m=mu_ice*(1-phi_w)^3.8;
K_m=K_ice*(1-phi_w)^3.8;
rho=(1-phi_w)*rho_ice+phi_w*rho_w;

%PARA BAJAS FRECUENCIAS TENEMOS ESTO HASTA NUEVO AVISO
v_s=sqrt(mu_m/rho); %velocidad ondas-shear baja frecuencia

```

```

K_w=2.25E9;
K_G=(K_ice-K_m+phi_w*K_m*(K_ice/K_w-1))./(1-phi_w-
K_m./K_ice+phi_w*K_ice/K_w);

v_p=sqrt((K_G+4/3*mu_m)/rho); %velocidad ondas-p baja
frecuencia

%PARA ALTAS FRECUENCIAS TENEMOS LO SIGUIENTE

omega=2*pi*f0;
etha_w=1.792E-3; %viscosidad del agua a -2°C
beta=0.02;
tau=1+beta*(1/phi_w-1);
k_0=1.2;
k=(2*k_0*phi_w^3)/((1-phi_w)^2);

psi=8;
x=etha_w*phi_w./(omega*k*rho_w);%no hay que cambiarlo aquí
cte=1/psi;
F=sqrt(1-4*li*tau*cte./(1E12*x));%Recordar que hay que
cambiar las unidades,

                                %esto sale en darcy/m^2
Y=li*omega.*(rho_w*tau/phi_w)+etha_w*F/(k*1E-12); %aquí
también

v_c=sqrt(mu_m./(rho-(li*omega*rho_w^2)./Y));

vc_s(11+1,:)=1./real(1./v_c); %velocidad onda-shear altas
frecuencias

```

```

alphas(l1+1,:) = -omega.*imag(1./v_c);      %atenuación onda-
shear en Np/m altas frecuencias

E_m = K_m + 4/3*mu_m;
E_G = K_G + 4/3*mu_m;
alpha = 1 - K_m./K_ice;
MMm = K_ice / (1 - phi_w - K_m./K_ice + phi_w*K_ice/K_w);

a = -(rho_w^2 + 1i*Y*rho./omega);
b = 0;
c = 1i*Y*E_G./omega + MMm*(2*alpha*rho_w - rho);
d = 0;
e = MMm.*E_m;

%Es una ecuacion bicuadrada por lo que puedo hacer lo
siguiente
raiz = sqrt(c.^2 - 4*a*e);
x1 = (-c + raiz) ./ (2*a);
x2 = (-c - raiz) ./ (2*a);

vc_pF = sqrt(x1);

alphapF(l1+1,:) = -omega.*imag(1./vc_pF); %atenuación onda-p
en Np/m

vcpF(l1+1,:) = 1./real(1./vc_pF); %velocidad rápida onda-p. la
que buscamos

```

```

vc_pS=sqrt(x2);

alphapS(l1+1,:)= -omega.*imag(1./vc_pS); %atenuación onda-p
en Np/m
vcps(l1+1,:)=1./real(1./vc_pS); %velocidad lenta onda-p
end

mediaalphaF=mean(alphapF);

figure(1)
subplot(2,2,1);
fragf0=f0(1); fgraf=f0(end); %para ver mejor las gráficas
plot(f0,vc_s)
axis([fragf0 fgraf -inf inf])
title('Shear c')
subplot(2,2,2);
fragf0=f0(1); fgraf=f0(end); %para ver mejor las gráficas
plot(f0,alphas)
axis([fragf0 fgraf -inf inf])
title('Shear alpha')
subplot(2,2,3);
plot(T2,phi_w1)
title('Porosity')

figure(2)
subplot(2,2,1);
fragf0=f0(1); fgraf=f0(end); %para ver mejor las gráficas
plot(f0,vcps)
axis([fragf0 fgraf -inf inf])

```

```

title('c Slow P-wave')
subplot(2,2,2);
fragf0=f0(1); fgraf=f0(end); %para ver mejor las gráficas
plot(f0,alphapS)
axis([fragf0 fgraf -inf inf])
title('alpha Slow P-wave')
subplot(2,2,3);
fragf0=f0(1); fgraf=f0(end); %para ver mejor las gráficas
plot(f0,vcpF)
axis([fragf0 fgraf -inf inf])
title('c Fast P-wave')
subplot(2,2,4);
fragf0=f0(1); fgraf=f0(end); %para ver mejor las gráficas
plot(f0,alphapF)
axis([fragf0 fgraf -inf inf])
title('alpha Fast P-wave')

```

## B. ALGOF

```

%CREADO POR PABLO BARROSO RODRIGUEZ
%FUNCION PEQUEÑA PARA SABER QUE PHI_W
function phi = algoF(T, L)
if T>272.8
    error('No puede superar los 272.8K')
return;
end
Tr=linspace(0, 272.8, L);
T_0=273;

```

```

r_0=0.228E-9;
r=r_0./log(T_0./Tr);
sigma=std(r);
mu=mean(r);
jj=erf(r./(sqrt(2)*sigma));
ii=erf(mu./(sqrt(2)*sigma));
phi_w1=(jj+ii)./(1+ii);

%algoritmo para encontrar la phi correspondiente a una
temperatura de las anteriores

indice=fix(length(Tr)*(T-Tr(1))/(Tr(end)-Tr(1)));
diferencia=T-Tr(indice); %tiene que ser cercano a cero, si
no no vale, mirarlo

phi=phi_w1(indice);

end

```

C. MODELO DE KELVIN VOIGT PARA SOLIDOS [T=160K A 250K]

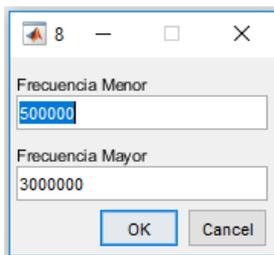


Ilustración 24 Interfaz del programa

```

%CREADO POR PABLO BARROSO RODRIGUEZ

clear global

clc

clf

```

```
global T K_ice mu_ice etha_w f0 omega rho_ice E_ice c0 k_imag
i L

%Número de frecuencias o Paso
L=20;

jj3={'Frecuencia Menor','Frecuencia Mayor'};
titulo3='160-250K';
lineas3 = 1;
valorinicialpantalla3 = {'500000','3000000'};
salida3 =
inputdlg(jj3,titulo3,lineas3,valorinicialpantalla3);

%Pasamos el vector de string a vector de números tipo double
nn3=str2double(salida3);

T=[160 250];

%Son lineales
K_ice=[9 8]*1E9;
mu_ice=[3.4 3]*1E9;

etha_w=6.311976526557475E16*exp(-1.472496273460144E-1*T);

f0=linspace(nn3(1),nn3(2),L);
```

```

omega =2*pi*f0;

rho_ice=-0.0842*T+940.42;

E_ice=K_ice+4/3*mu_ice;

c0=(E_ice./rho_ice).^(1/2);

for i=0:length(f0)-1
omega2=omega(i+1);

%fenómeno viscoso importante
%k_imag(i+1,:)=(etha_w*omega2.^2)./(2*E_ice.*c0);
k_imag(i+1,:)=sqrt(((rho_ice.*E_ice.*omega2.^2)./(2*(E_ice.
^2+(etha_w.^2).*omega2.^2))).*(sqrt((E_ice.^2+(etha_w.^2).*
omega2.^2)./E_ice.^2)-1));
end

plot(T,k_imag)
xlabel('T[K]')
ylabel('k_i[1/m]')
title('Coeficiente de atenuación desde hielo amorfo
altamente denso a hielo cristalino')

```

#### D. CÓDIGO DE COMPARACIÓN

```

%PABLO BARROSO RODRÍGUEZ

T=251;

```

```

f0=15E6;

K_ice=8E9;
mu_ice=3E9;

etha_w=6.311976526557475E16*exp(-1.472496273460144E-1*T)

omega =2*pi*f0;

rho_ice=-0.0842*T+940.42;

E_ice=K_ice+4/3*mu_ice;

c0=(E_ice/rho_ice)^(1/2);

%fenómeno viscoso importante
k_imag=sqrt(((rho_ice*E_ice*omega^2)/(2*(E_ice^2+(etha_w^2)*omega^2)))*sqrt((E_ice^2+(etha_w^2)*omega^2)/E_ice^2)-1))
alpharef=100*(0.067*(f0/1E6)+0.3)

%f0=5MHz y T=-10°C alpha=10.8 [1/m], ref= 100 [1/m]
%f0=15MHz y T=-10°C alpha=98.1 [1/m], ref= 180 [1/m]

```

---

### 8.2.1. MÓDULOS ELÁSTICOS. RELACIÓN.

Sin embargo, en la literatura no hay mucha información sobre  $E=M_R$  (Módulo de masa real) para el hielo amorfo, pero si sobre el módulo de compresión volumétrica (K) y el de

rigidez ( $\mu$ ), que se relacionan con el anterior según la siguiente forma [6]:

$$E = K + \frac{4}{3} \cdot \mu$$

ANEXO II. CARACTERIZACION DEL HIELO - AGUA PARA MEDIOS POROSOS Y VISCOELÁSTICOS.

A. MÓDULOS ELÁSTICOS DEL HIELO NO POROSO. TRANSICIÓN DEL HIELO AMORFO AL CRISTALINO POR AUMENTO DE TEMPERATURA

Existe gran variedad de tipos de hielo dependiendo de su ordenamiento molecular:

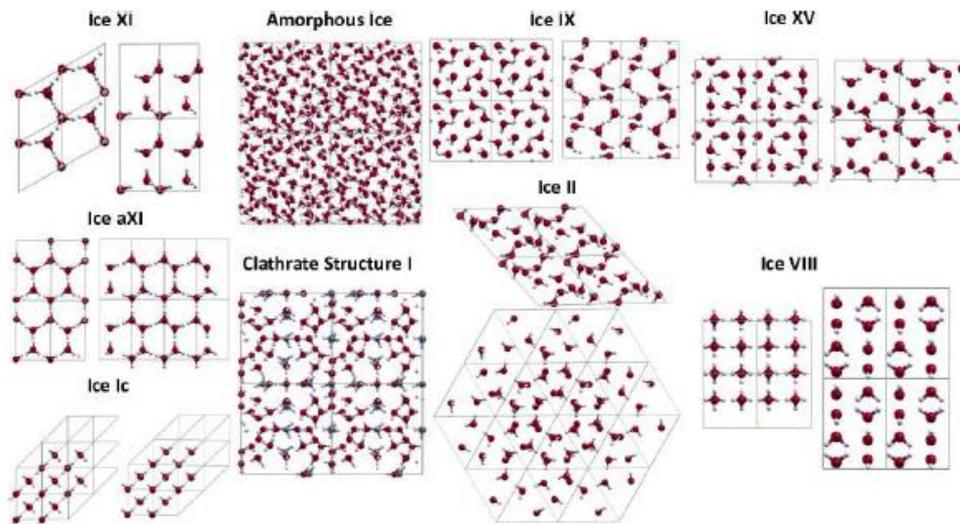
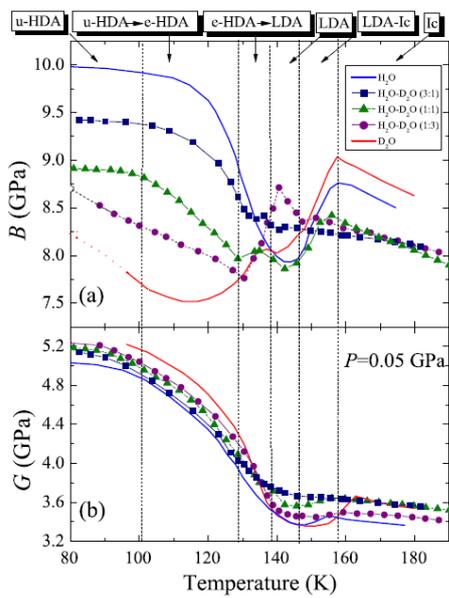


Ilustración 25 Tipos de hielo [25]

Y dependiendo de esta estructura y de la temperatura correspondiente, el hielo tiene unos módulos elásticos con unos valores u otros. Estos módulos elásticos son el módulo de compresión volumétrica (B o K) y el módulo de rigidez (G

o  $\mu$ ) y tienen unidades del orden de los GPa. En la figura siguiente se ve el cambio de sus valores en función de la temperatura. El hielo amorfo o vítreo se corresponde con el HDA y LDA, dependiendo de su densidad, ya sea alta o baja, respectivamente. De la referencia [26] tomamos los valores de los módulos elásticos de compresión volumétrica y transversal. Este parte de 1.8GPa y 77K a aproximadamente hasta presión atmosférica y 190K (Se extrapola linealmente hasta los 250K).



**Ilustración 26 Módulos elásticos del hielo [26]**

Podemos identificar en un diagrama de fases  $P - T$  los distintos hielos que podemos encontrar según a la presión y temperatura a las que están sometidas:

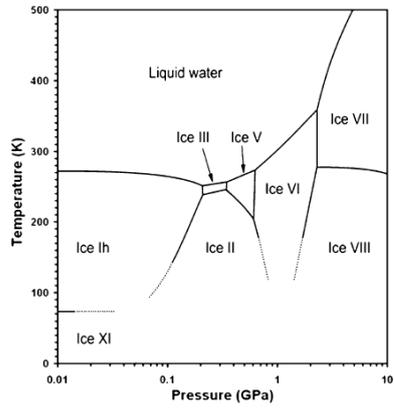


Ilustración 27 Diagrama P-T del hielo [27]

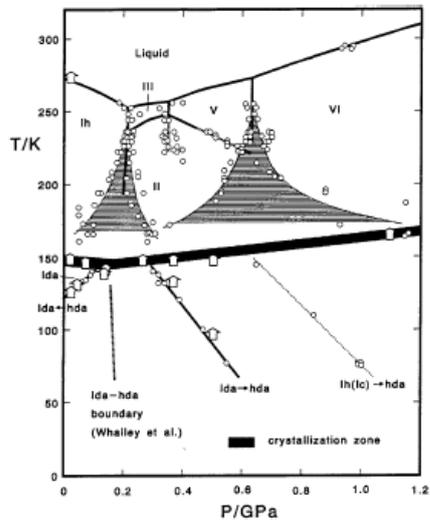
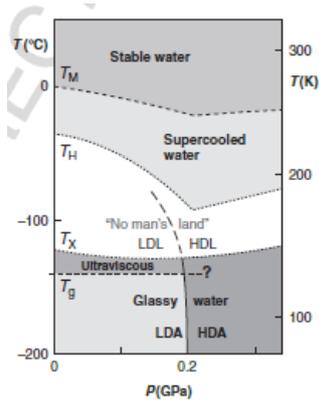


Ilustración 28 Hielo amorfo por debajo de la línea gruesa [28]



**Ilustración 29 Diagrama de fases P-T donde se grafica la zona vítrea [29]**

**B. HIELO LDA**

Si tenemos en cuenta que la temperatura de transición vítrea está en el orden de 120 - 140K y a presión atmosférica le corresponde un hielo amorfo de baja densidad (LDA) como vemos en la siguiente figura tomada de una web de física [30]. En ella se observa los tres hielos amorfos que existen el LDA, HDA y VHDA. Los tres son hielos no cristalinos y se pueden obtener de forma artificial, de forma que se obtiene por calentamiento isobárico del HDA a presión ambiente o por descompresión isotérmica del VHDA a 143K, siendo estable a 77K y presión ambiente durante meses, pero transformándose a hielo cúbico a los 150 - 160K [30].

Structural data on the ice polymorphs								
Ice polymorph	Density, $g \times cm^{-3}$ <sup>a</sup>		Protons <sup>f</sup>	Crystal <sup>h</sup>		Symmetry	Dielectric constant, $\epsilon_s$ <sup>i</sup>	Notes
Ih, Hexagonal ice	0.92	0.926	disordered	Hexagonal	$P6_3/mmc$	one $C_6$	97.5	
Ic, Cubic ice	0.93 <sup>q</sup>	0.933	disordered	Cubic	$Fd\bar{3}m$	four $C_3$		
I <sub>sd</sub> , Stacking disordered ice	0.93	0.933	disordered	Trigonal	$P3m_1$	one $C_3$		
LDA, I <sub>a</sub> <sup>b</sup>	0.925 <sup>q</sup>		disordered	Non-crystalline				As prepared, may be mixtures of several types
HDA <sup>c</sup>	1.17		disordered	Non-crystalline				As prepared, may be mixtures of several types
VHDA <sup>d</sup>	1.25		disordered	Non-crystalline				
II, Ice-two	1.17	1.195	ordered	Rhombohedral	$\bar{R}3$	one $C_3$	3.66	
III, Ice-three	1.14	1.160	disordered	Tetragonal	$P4_12_12$	one $C_4$	117	protons may be partially ordered
IV, Ice-four	1.27	1.275	disordered	Rhombohedral	$\bar{R}3c$	one $C_3$		metastable in ice V phase space, two interpenetrating ice frameworks
V, Ice-five	1.23	1.233	disordered	Monoclinic	$C2/c$	one $C_2$	144	protons may be partially ordered
VI, Ice-six	1.31	1.314	disordered	Tetragonal <sup>e</sup>	$P4_2/nmc$	one $C_4$	193	two interpenetrating frameworks
VII, Ice-seven	1.50	1.591	disordered	Cubic <sup>e</sup>	$Pn\bar{3}m$	four $C_3$	150	two interpenetrating ice Ic frameworks
VIII, Ice-eight	1.46	1.885	ordered	Tetragonal <sup>e</sup>	$I4_1/amd$	one $C_4$	4	low-temperature form of ice VII
IX, Ice-nine	1.16	1.160	ordered	Tetragonal	$P4_12_12$	one $C_4$	3.74	low-temperature form of ice III, metastable in ice II space

Ilustración 30 Características de algunos tipos de hielos que nos podemos encontrar [32]

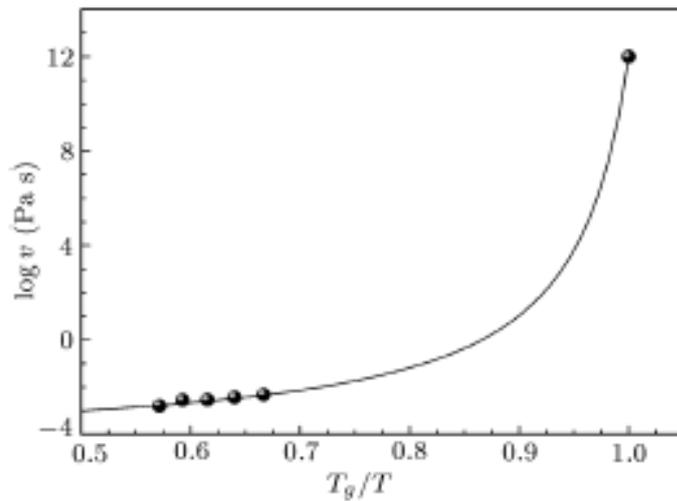
C. VISCOSIDAD DEL AGUA-HIELO

T, °C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-20	4,242	4,022	3,819	3,630	3,455	3,293	3,141	3,000	2,868	2,745
-10	2,629	2,521	2,419	2,324	2,234	2,149	2,070	1,994	1,923	1,856
0	1,793	1,732	1,675	1,621	1,569	1,520	1,474	1,429	1,387	1,346
10	1,308	1,271	1,236	1,202	1,170	1,139	1,110	1,081	1,054	1,028
20	1,0026	0,9785	0,9553	0,9330	0,9115	0,8907	0,8708	0,8515	0,8330	0,8150
30	0,7978	0,7810	0,7649	0,7493	0,7342	0,7196	0,7054	0,6918	0,6785	0,6656
40	0,6532	0,6411	0,6294	0,6180	0,6070	0,5963	0,5859	0,5758	0,5660	0,5564
50	0,5471	0,5381	0,5293	0,5208	0,5124	0,5043	0,4964	0,4887	0,4812	0,4740
60	0,4668	0,4599	0,4531	0,4465	0,4401	0,4338	0,4276	0,4216	0,4158	0,4100
70	0,4045	0,3990	0,3937	0,3884	0,3834	0,3784	0,3735	0,3687	0,3640	0,3595
80	0,3550	0,3506	0,3463	0,3421	0,3380	0,3340	0,3300	0,3262	0,3224	0,3187
90	0,3150	0,3115	0,3080	0,3046	0,3012	0,2979	0,2946	0,2915	0,2884	0,2853
100	0,2823	0,2793	0,2764	0,2736	0,2708	0,2681	0,2654	0,2627	0,2601	0,2576
110	0,2551	0,2526	0,2502	0,2478	0,2454	0,2431	0,2409	0,2386	0,2364	0,2343
120	0,2322	0,2301	0,2280	0,2260	0,2240	0,2221	0,2201	0,2182	0,2164	0,2145
130	0,2127	0,2109	0,2092	0,2074	0,2058	0,2041	0,2024	0,2008	0,1992	0,1976
140	0,1960	0,1945	0,1930	0,1915	0,1900	0,1886	0,1871	0,1857	0,1843	0,1829
150	0,1816									

Ilustración 31 Viscosidad del agua tabulada [31]

Tenemos de la referencia [31] y [32], la viscosidad del agua hasta los 253K. Extrapolamos hasta los 180K (-113°C), punto a partir del cual le damos un valor al hielo de unos 1E10

Pa·s, valor que se le da a la viscosidad del hielo en la referencia [33].



**Ilustración 32 Viscosidad del agua desde 160K hasta 320K. Tomando  $T_g = 160K$  [32]**

En la referencia [32] dan como correlación para viscosidad del agua entre 250K y 380K la siguiente:

$$\mu = \mu_0 \cdot e^{\frac{E_0}{T-T_0}}$$

Siendo:

$$\mu_0 = 1.811E - 4 Pa \cdot s$$

$$E_0 = 279.012 K$$

$$T_0 = -152.295 K$$

Se han agrupado todos los valores desde 380K hasta 160K en este documento, de forma que:

$$\mu = 6.311976526557475E16 \cdot e^{-1.472496273460144E-01 \cdot T}$$

Se ha calculado con el siguiente código. Para realizar la regresión exponencial se ha usado un código Matlab - GNU Octave de [34]:

D. VISCOSIDAD DEL AGUA-HIELO DESDE 160K A 380K.  
CÓDIGO MATLAB-GNU OCTAVE MODIFICADO DE [34].

```
%PABLO BARROSO RODRÍGUEZ con modificación de:
%http://www.matrixlab-examples.com/exponential-
regression.html
%VISCOSIDAD AGUA DESDE TEMPERATURAS CRIOGENICAS HASTA
TEMPERATURA AMBIENTE

Tg=160; %Temperatura de transición vítrea del agua
ethaTg=1E12;

T2=[240 260 300 320 380]
etha2=1.811E-4*exp(279.012./(T2-(-152.295)));

T=[Tg T2];
etha=[ethaTg etha2];

%Tomado de http://www.matrixlab-examples.com/exponential-
regression.html
format compact, format long

% enter data
x = T;
y = etha;

% calculate coefficients a and b
n = length(x);
```

```
y2 = log(y);
j = sum(x);
k = sum(y2);
l = sum(x.^2);
m = sum(y2.^2);
r2 = sum(x .* y2);
b = (n * r2 - k * j) / (n * l - j^2)
a = exp((k-b*j)/n)

% calculate coeff. of determination, coeff. of correlation
% and standard error of estimate
c = b * (r2 - j * k / n);
d = m - k^2 / n;
f = d - c;
cf_dt = c/d
corr = sqrt(cf_dt)
std_err = sqrt(f / (n - 2))

% We can calculate any point along the curve
x = disp('Interpolation: ');
y = a * exp(b * x)
a
b
```

Anexo III. COEFICIENTES DE ATENUACIÓN. DISTINTOS CASOS.

A. HÍGADO

El hígado se puede considerar como un material viscoelástico por el modelo de Kelvin Voigt. Usaremos las mismas ecuaciones anteriores con sus distintos parámetros físicos y la compararemos con varias referencias. De [35] tenemos el módulo de compresión volumétrica y el de rigidez del hígado bovino. De tomamos la densidad [36] y de [37] tomamos el de la viscosidad humana, a falta de datos. Para 298K:

K (GPa)	G (kPa)	Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	Viscosidad (Pa · s)
2.53	10.3	1092	1

Tomamos para comparar las referencias [38] y [39] en Np/m:

$$\alpha_1 = 100 \cdot 0.043 \cdot f_0[\text{MHz}]^{1.27}$$

$$\alpha_2 = 100 \cdot 0.038 \cdot f_0[\text{MHz}]^{1.36}$$

$$\alpha_1 = 100 \cdot 0.047 \cdot f_0[\text{MHz}]^{1.17}$$

---

CÓDIGO MODIFICADO PARA HÍGADO

```
%CREADO POR PABLO BARROSO RODRIGUEZ

clear global

clc

clf

global K_o mu_o etha_o f0 omega rho_o E_o c0 k_imag i L

%Número de frecuencias o Paso
```

```

L=20;

jj3={'Frecuencia Menor','Frecuencia Mayor'};
titulo3='298K';
lineas3 = 1;
valorinicialpantalla3 = {'500000','900000'};

salida3 =
inputdlg(jj3,titulo3,lineas3,valorinicialpantalla3);

%Pasamos el vector de string a vector de números tipo double
nn3=str2double(salida3);

f0=linspace(nn3(1),nn3(2),L);

omega =2*pi*f0;

%Hígado Bovino a 25°C APROX para todo
K_o=2.53E9; %GPa
mu_o=10.3E3; %kPa
rho_o=1092; %kg/m^3
etha_o=1; %Pa·s

%Módulos elásticos
E_o=K_o+4/3*mu_o;

%velocidad del sonido
c0=(E_o/rho_o)^(1/2);

```

```

for i=0:length(f0)-1
omega2=omega(i+1);
%fenómeno viscoso importante
%Coeficiente de atenuación
%k_imag(i+1,:)=(etha_w*omega2.^2)./(2*E_ice.*c0);
k_imag(i+1,:)=sqrt(((rho_o*E_o*omega2^2)/(2*(E_o^2+(etha_o^2)*omega2^2)))*sqrt((E_o^2+(etha_o^2)*omega2^2)/E_o^2)-1));
end

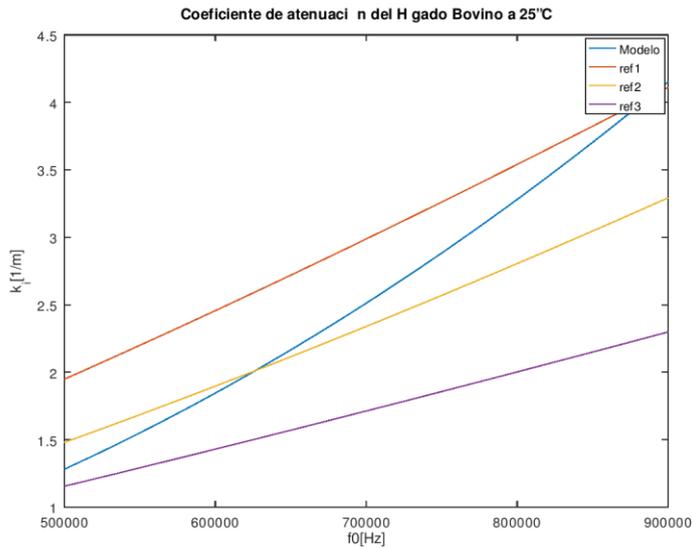
%Referencias [Np/m]=[1/m]
alpha1=100*0.047*(f0/1E6).^1.27;
alpha2=100*0.038*(f0/1E6).^1.36;
alpha3=100*0.026*(f0/1E6).^1.17;

plot(f0,k_imag, f0, alpha1, f0, alpha2, f0, alpha3)
xlabel('f0[Hz]')
ylabel('k_i[1/m]')
title('Coeficiente de atenuación del Hígado Bovino a 25°C')
legend('Modelo','ref1', 'ref2', 'ref3')

```

---

RESULTADOS



**Ilustración 33 Modelo las tres referencias anteriores. GNU OCTAVE.**

Como se observa, es válido para ciertas frecuencias, en este caso para menores a 0.9MHz, a partir del cual se dispara.

### B. POLIESTIRENO

El Poliestireno se puede considerar como un material viscoelástico por el modelo de Maxwell. Usaremos las mismas ecuaciones anteriores con sus distintos parámetros físicos y la compararemos con varias referencias. De [40] tenemos el módulo de compresión volumétrica y el de rigidez. De [41] tomamos la densidad y de [42] tomamos el de la viscosidad:

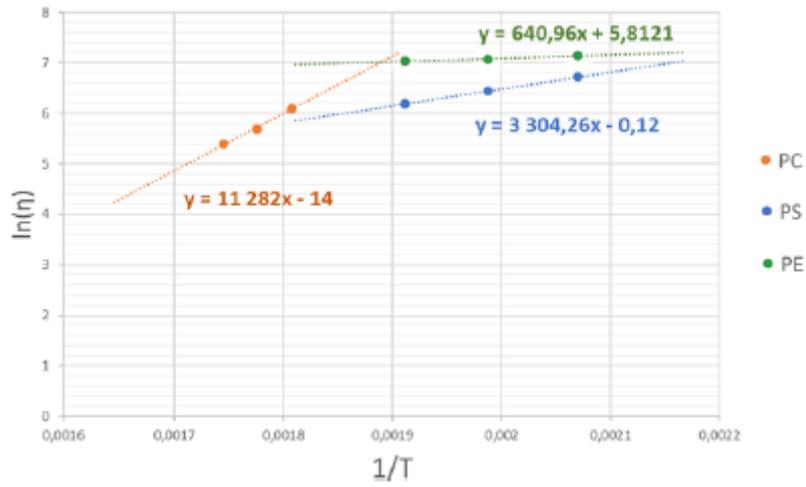


Ilustración 34 Viscosidad del poliestireno (AZUL) [42]

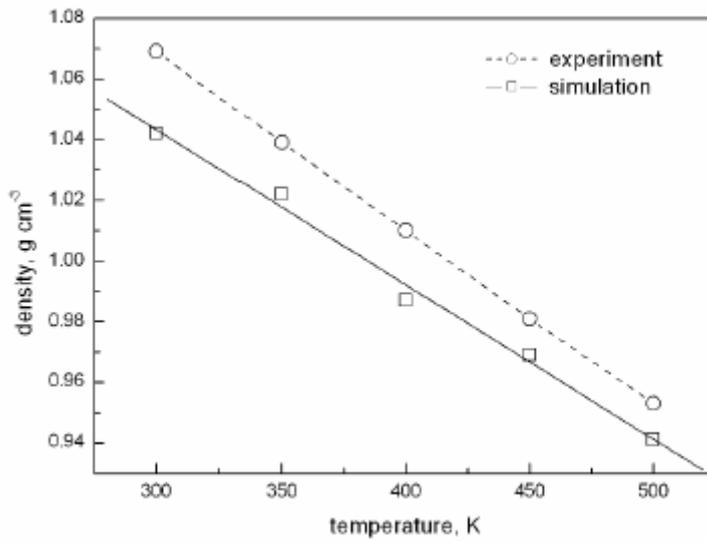
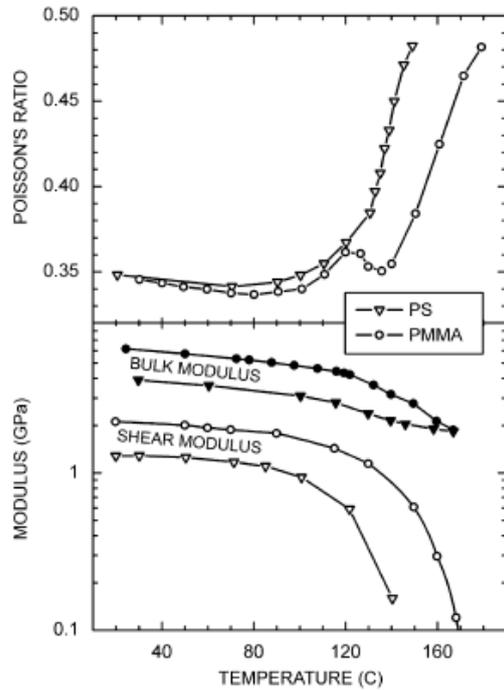


Ilustración 35 Densidad del poliestireno. Tomamos los valores experimentales [41]



**Ilustración 36 Módulos de compresión y rigidez del poliestireno (ps)**

CÓDIGO POLIESTIRENO

```
%CREADO POR PABLO BARROSO RODRIGUEZ

clear global

clc

clf

global T etha_w f0 omega k_imag i L

%Número de frecuencias y temperaturas o Paso

L=20;

jj3={'Frecuencia Menor','Frecuencia Mayor'};

titulo3='298K';
```

```
lineas3 = 1;
valorinicialpantalla3 = {'100000', '3000000'};
salida3 =
inputdlg(jj3, titulo3, lineas3, valorinicialpantalla3);

%Pasamos el vector de string a vector de números tipo double
nn3=str2double(salida3);

T=[300 350 390];

K_w=[4 3.25 2]*1E9;
mu_w=[1.3 1.2 0.6]*1E9;
etha_w=exp(3304.26./T-0.12);

f0=linspace(nn3(1), nn3(2), L);

omega =2*pi*f0;

rho_w=(-6E-4*T+1.0962)*1000;

E_w=mu_w;
E_w2=K_w+4/3*mu_w;

for i=0:length(f0)-1
omega2=omega(i+1);
a=(rho_w.*omega2)/(2*etha_w);
b=(rho_w.*omega2.^2)/E_w;
```

```
k_imag(i+1,:)=a./sqrt((b.^2+sqrt(b.^2+4*a.^2))/2);  
k_imag2(i+1,:)=sqrt(((rho_w.*E_w2.*omega2.^2)./(2*(E_w2.^2+  
(etha_w.^2).*omega2.^2))).*(sqrt((E_w2.^2+(etha_w.^2).*omeg  
a2.^2)./E_w2.^2)-1));  
  
end  
  
plot(f0,k_imag, f0, k_imag2)  
xlabel('f0[Hz]')  
ylabel('k_i[1/m]')  
title('Coeficiente de atenuación del Poliestireno')
```

---

RESULTADOS

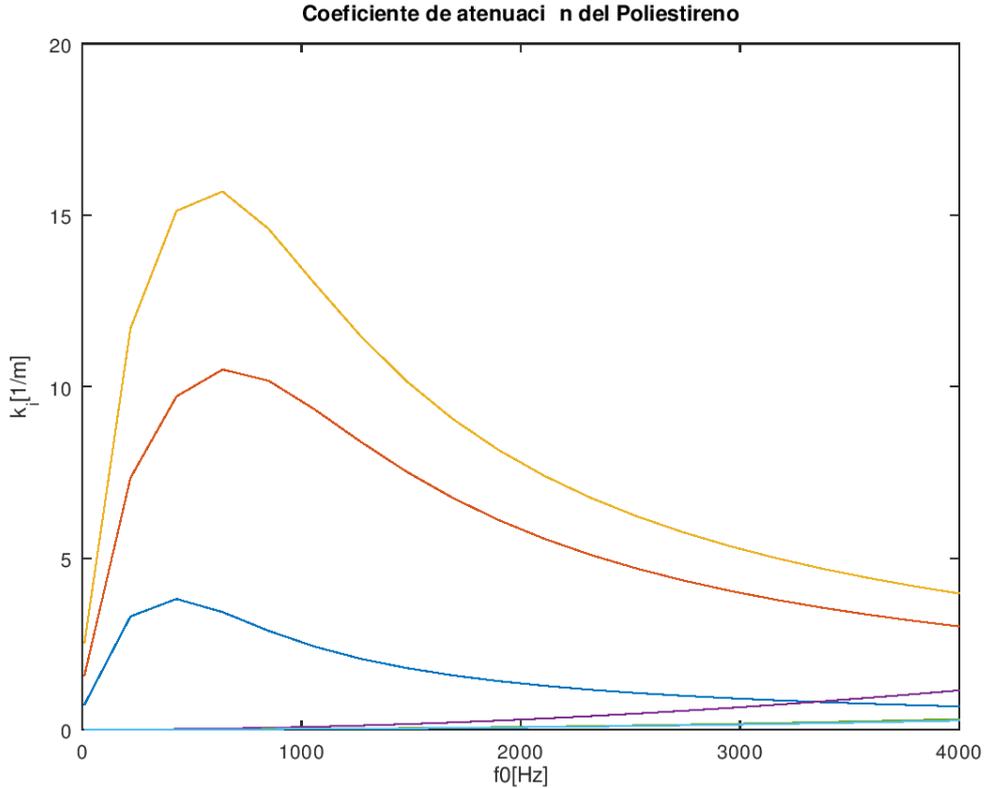


Ilustración 37 coeficiente de atenuación del poliestireno a 300 K (Amarillo, Verde), 350 K (Rojo, Verde) y 390 K (Azul, Violeta). Modelo de maxwell y kelvin voigt, respectivamente.

Que podemos compararla con la siguiente referencia [43] :

Material	Thickness (mm)	Frequency/Hz					
		125	250	500	1000	2000	4000
Acoustic plaster	13	0.15	0.20	0.35	0.60	0.60	0.50
Acoustic tiles (perforated fibreboard)	18	0.10	0.35	0.70	0.75	0.65	0.50
Asbestos (sprayed)	25	0.10	0.30	0.65	0.85	0.85	0.80
Brickwork	—	0.02	0.02	0.03	0.04	0.05	0.07
Carpet (Axminster)	8	—	0.05	0.15	0.30	0.45	0.55
Carpet on underlay	14	—	0.05	0.20	0.40	0.60	0.65
Curtain (velour, draped)	—	0.14	0.35	0.55	0.72	0.70	0.65
Glass fibre (resin-bonded)	25	0.10	0.25	0.55	0.70	0.80	0.85
Glass wool (uncompressed)	25	0.10	0.25	0.45	0.60	0.70	0.70
Mineral wool	25	0.10	0.25	0.50	0.70	0.85	0.85
Polystyrene, expanded (rigid backing)	13	0.05	0.05	0.10	0.15	0.15	0.20
Polystyrene, expanded (on 50 mm battens)	13	0.05	0.15	0.40	0.35	0.20	0.20
Polyurethane foam (flexible)	50	0.25	0.50	0.85	0.95	0.90	0.90
Snow	25	0.15	0.40	0.65	0.75	0.80	0.85
Wood panelling (oak, on 25 mm battens)	13	0.20	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05

Si nos damos cuenta para 4000 Hz, coincide a 300K y existe tanto para el modelo como para la referencia un pico a 500Hz, mayor en el primero. Para materiales homogéneos (lo suponemos así) el coeficiente de absorción y atenuación son el mismo valor [43]. Por lo que se puede decir que para el modelo de Maxwell se aproxima mucho al PS de 50mm (gráfica con máximo),

mientras que el de Kelvin Voigt al rígido (gráfica lineal), ya que este, asciende poco a poco con el mismo orden de magnitud.

C. PDMS (SYLGARD 184)

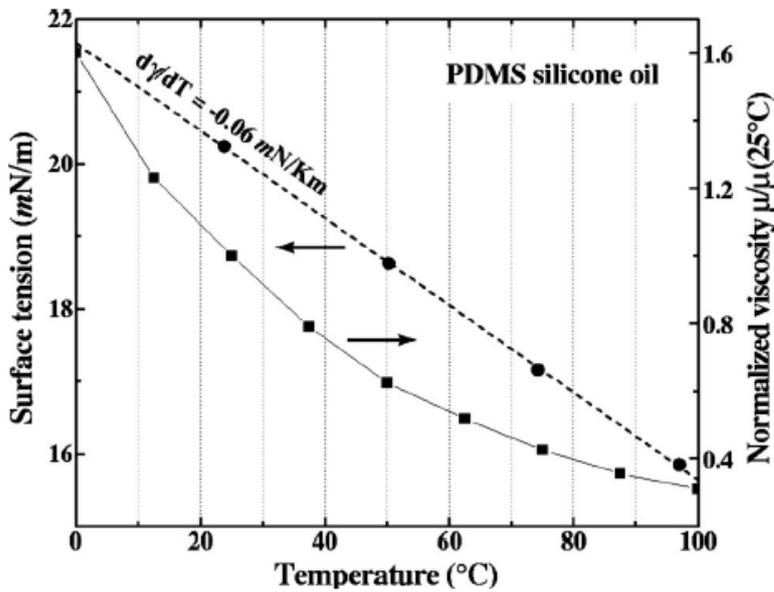
El PDMS es un elastómero, por lo que podemos asimilarlo como un sólido de Maxwell-Voigt. Tomamos la densidad de [44], la viscosidad de [45] y el módulo de compresión y rigidez de [46].

La densidad viene dada por:

Density $\rho$	$\text{g cm}^{-3}$	PDMS (1,000–12,500 cs)	0.970
$\rho$ vs. temperature	–	PDMS ( $M_w = 1 \times 10^5$ ) from 20–207°C	$\rho = 0.9919 - (8.925 \times 10^{-4})t + (2.65 \times 10^{-7})t^2 - (3.0 \times 10^{-11})t^3$

**Ilustración 38 densidad del pdms [44]**

La viscosidad por:



**Ilustración 39 VISCOSIDAD DEL PDMS [45]**

Los módulos elásticos están tabulados:

Temperature (°C)	Shear modulus (MPa)	Bulk modulus (GPa)
25	$0.44 \pm 0.02$	$2.20 \pm 0.11$
100	$0.68 \pm 0.04$	$3.42 \pm 0.17$
125	$0.82 \pm 0.05$	$4.11 \pm 0.20$
150	$0.86 \pm 0.03$	$4.32 \pm 0.22$
200	$0.99 \pm 0.01$	$4.95 \pm 0.25$

#### Ilustración 40 Módulos de compresión y rigidez [46]

##### CÓDIGO

```

%CREADO POR PABLO BARROSO RODRIGUEZ

clear global

clc

clf

global T etha_w f0 omega k_imag i L

%Número de frecuencias y temperaturas o Paso
L=20;

jj3={'Frecuencia Menor','Frecuencia Mayor'};
titulo3='298K-373K';
lineas3 = 1;
valorinicialpantalla3 = {'100000','3000000'};
salida3 =
inputdlg(jj3,titulo3,lineas3,valorinicialpantalla3);

%Pasamos el vector de string a vector de números tipo double
nn3=str2double(salida3);

```

```

T=[298 316.5 335 373];

K_w=[2.2 2.5 2.81 3.42]*1E9;
mu_w=[0.44 0.5 0.56 0.68]*1E6;
etha_w=[1 0.75 0.5 0.2]*3.5;

f0=linspace(nn3(1),nn3(2),L);

omega =2*pi*f0;

rho_w=1000*(0.9919-8.925E-4*T+2.65E-7*T.^2-3E-11*T.^3);

E_w=K_w+4/3*mu_w;

for i=0:length(f0)-1

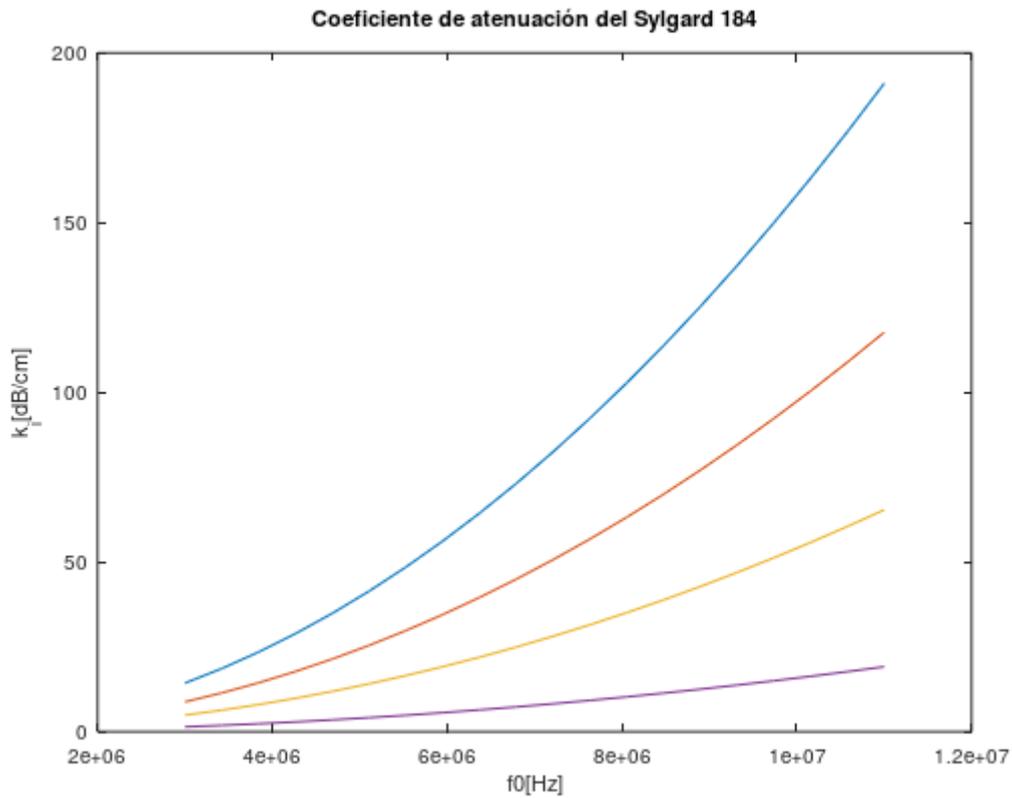
k_imag(i+1,:)=(sqrt(((rho_w.*E_w.*omega2.^2)./(2*(E_w.^2+(etha_w.^2)*omega2.^2))))*(sqrt((E_w.^2+(etha_w.^2)*omega2.^2)./E_w.^2)-1)))*8.686/100

end

plot(f0,k_imag)
xlabel('f0[Hz]')
ylabel('k_i[dB/cm]')
title('Coeficiente de atenuación del Sylgard 184')

```

## RESULTADOS



**Ilustración 41 coeficiente de atenuacion del pdms**

Para comparar usamos los resultados de [47]:

Acoustic properties of PDMS						
	Speed of sound (m/s)	Attenuation coefficient (dB/cm)				
		3 MHz	5 MHz	7 MHz	9 MHz	11 MHz
PDMS (5:1)	1119.1	9.8	14.86	23.38	31.94	39.61
PDMS (7:1)	1089.1	15.79	21.92	29.88	44.88	55.51
PDMS (10:1)	1076.5	10.14	21.30	33.57	47.85	64.33

Observando que son del mismo orden de magnitud cuando aumentamos de frecuencia para la línea amarilla (no se sabe la temperatura de los datos que han dado en la referencia). Existe un pico de coeficiente de atenuación a bajas frecuencias.

## BIBLIOGRAFÍA

[ Laura J Pyrak-Nolte, Paul Cornillon and Osvaldo Campanella  
1 Suyong Lee, "Characterisation of frozen orange juice by  
] ultrasound and wavelet analysis," no. 84, 2004.

[ Timothy G. Leighton, "What is ultrasound?," vol. 93, 2007.  
2  
]

[ Dreiman Gabe, Livermore Grace & Wang, Alice Datta Amitta,  
3 "Focused Ultrasound Induced Heating for Drug Delivery in  
] Cancer Therapies," *Computer Aided Engineering: Applications to Biomedical Processes*, 2017.

[ Paul Kinahan. (2006) Bioengineering 508 Physical Aspects  
4 of Medical Imaging. [Online].  
] <http://courses.washington.edu/bioen508/>

[ Eduardo Castro Montero, *PARÁMETROS MECÁNICOS Y TEXTURA DE*  
5 *LOS ALIMENTOS*. La Habana: UNIVERSIDAD DE CHILE, 2007.  
]

[ M. De Beer and J. W. Maina, "Some fundamental definitions  
6 of the elastic parameters for homogeneous isotropic linear  
] elastic materials in pavement design and analysis," *CSIR*  
, ¿?

[ J. M Carcione, *WAVE FIELDS IN REAL MEDIA: WAVE PROPAGATION*  
7 *IN ANISOTROPIC, ANELASTIC AND POROUS MEDIA.*: Pergamon,  
] 2001.

[ Osvaldo H. Campanella, Juan E. Santos José M. Carcione,  
8 "A poroelastic model for wave propagation in partially  
] frozen orange juice," 2007.

[ Takao Nibe, Makoto Suzuki, Yoshibumi Kato, Shuichi  
9 Rokugawa Jun Matsushima, "A poroelastic model for  
] ultrasonic wave attenuation in partially frozen brines,"  
2011.

[ Frédéric Cohen\_Tenoudji, Jaime Aguirre-Fuente Philippe  
1 Leclaire, "Extension of Biot's theory of wave propagation  
0 to frozen porous media," 2016.

[ S., & Sahimi, M. Arbabi, "Elastic properties of three-  
1 dimensional percolation networks with stretching and  
1 bond-bending forces," no. 38.

[ V.R. Parameswaran, "Orientation Dependence of Elastic  
1 Constants for Ice," vol. 37, no. 3, 1987.

[ D.R.Bland, *The Theory of Linear Viscoelasticity*. Mineola,  
1 Nueva York: Dover Publications, 2016.

[ Danton Gutierrez-Lemini, *Engineering Viscoelasticity*.  
1 Nueva York: Springer, 2014.

[ RW Zimmerman, *Seismic Rock Physics*, Department of Earth  
1 Science and Engineering, Ed.: Imperial College London, ¿?  
5  
]

[ Kelly. (¿?) Solid Mechanics Part I. [Online].  
1 [http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/Sol  
6 idMechanicsBooks/Part I/BookSM Part I/10 Viscoelasticity  
\] /10 Viscoelasticity\\_03 Rheological.pdf](http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/Part%20I/BookSM%20Part%20I/10%20Viscoelasticity/10%20Viscoelasticity_03_Rheological.pdf)

[ JAMES S. LAI and KASIF ONARAN WILLIAM N. FINDLEY, *CREEP  
1 AND RELAXATION OF NONLINEAR VISCOELASTIC MATERIALS with  
7 an Introduction to Linear Viscoelasticity*. Nueva York:  
] DOVER PUBLICATIONS, 1976.

[ G.J. Creus, *Viscoelasticity - Basic Theory and  
1 Applications to Concrete Structures*. Berlin Heidelberg  
8 New York Tokyo: Springer-Verlag, 1986.  
]

[ et al Peter Moczo, *Lecture Notes on Rheological Models.*:  
1 Comenius University, 2006.  
9  
]

[ Wilhelm Flligge, *Viscoelasticity*. Berlin: Springer-  
2 Verlag, 1975.  
0  
]

[ Leonard J. Bond, and Hui Hu Yang Liu, "Ultrasonic-  
2 Attenuation-Based Technique for Ice Characterization  
1 Pertinent to Aircraft Icing Phenomena," vol. 55, no. 5,  
] 2017.

[ M. P. LANGLEBEN, "ATTENUATION OF SOUND IN SEA ICE, 10-  
2 500 kHz," 1969.

2

]

[ E.R. POUNDER and M.P. LANGLEBEN, "ACOUSTIC ATTENUATION IN  
2 SEA ICE," 1967.

3

]

[ G.R. Garrison, R.E. Francois, R.P. Stein, W.J. Felton T.  
2 Wen, *Sound Speed, Reflectivity, and Absorption*  
4 *Measurements in Arctic Ice in 1988*. Washington: University  
] of Washington, 1988.

[ P. B. Allen, and M-V Fernández-Serra Betul Pamuk,  
2 "Insights into the structure of liquid water from nuclear  
5 quantum effects on density and compressibility of ice  
] polymorphs," *arXiv*, p. 17, 2018.

[ A. G. Lyapin, and V. V. Brazhkin E. L. Gromnitskaya I. V.  
2 Danilov, "Influence of isotopic disorder on solid state  
6 amorphization and polyamorphism in solid H<sub>2</sub>O-D<sub>2</sub>O  
] solutions," *PHYSICAL REVIEW B*, vol. 92, no. 134104, p. 9,  
2015.

[ I. G. Wood, M. Alfredsson, L. Vocadlo and K. S. Knight A.  
2 D. Fortes, "The incompressibility and thermal expansivity  
7 of D<sub>2</sub>O ice II determined by powder neutron diffraction,"  
] *Journal of Applied Crystallography*, p. 7, 2005.

[ Thomas Loerting and Nicolas Giovambattista, "Amorphous  
2 ices: experiments and numerical simulations," *JOURNAL OF*  
*PHYSICS: CONDENSED MATTER*, vol. 18, p. 19, 2006.

8

]

[ KATRIN WINKEL, and THOMAS LOERTING<sup>2</sup> NICOLAS  
2 GIOVAMBATTISTA, "AMORPHOUS ICES," *Physics Department,*  
9 *Brooklyn College of the City University of New York and*  
] *Institute of Physical Chemistry, University of Innsbruck,*  
p. 36, ¿?

[ Martin Chaplin. (2018, Octubre) Water Structures and  
3 Science. [Online].

0 [http://www1.lsbu.ac.uk/water/ice\\_phases.html](http://www1.lsbu.ac.uk/water/ice_phases.html)

]

[ A. A. Aleksandrov and M. S. Trakhtengerts, "VISCOSITY OF  
3 WATER AT TEMPERATURES OF -20 TO 150°C," *Springer*, p. 5,

1 ¿?

]

[ et al Jiu La, "Glass Transition Temperature of Water: from  
3 simulations of difusion and excess of entropy,"  
2 *CHIN.PHYS.LETT.*, vol. 24, no. 7, p. 3, 2007.

]

[ David Whipp. (2015) Introduction to Quantitative Geology.  
3 Lecture 9. [Online].

3 [https://matskut.helsinki.fi/bitstream/handle/123456789/7  
\] 03/Rock%20and%20ice%20as%20viscous%20materials.pdf?seque  
nce=1](https://matskut.helsinki.fi/bitstream/handle/123456789/703/Rock%20and%20ice%20as%20viscous%20materials.pdf?sequence=1)

[ ¿? matrixlab-examples.com. [Online].

3 [http://www.matrixlab-examples.com/exponential-  
4 regression.html](http://www.matrixlab-examples.com/exponential-<br/>4 regression.html)

]

[ MSc, Haim Azhari, DSc Tanya Glozman, "A Method for  
3 Characterization of Tissue Elastic Properties Combining  
5 Ultrasonic Computed Tomography With Elastography," 2009.  
]

[ H. J. KRZYWICKI AND. E. ROBERTS T. H. ALLEN, "Density,  
3 fat, water and solids in freshly isolated tissues," *U.S.  
6 Army Medical Research and Nutrition Laboratory*, p. 9,  
] 1959.

[ Gwladys E. Leclerc et al, "Analysis of Liver Viscosity  
3 Behavior as a Function of Multifrequency Magnetic  
7 Resonance Elastography (MMRE) Postprocessing," *JOURNAL OF  
] MAGNETIC RESONANCE IMAGING*, p. 7, 2012.

[ Jr. Laurie A. Segal and W. D. O'Brien, "FREQUENCY  
3 DEPENDENT ULTRASONIC ATTENUATION COEFFICIENT ASSESSMENT  
8 IN FRESH TISSUE," 1983.  
]

[ L. A. FRIZZELL and F. DUNN S. A. Ooss, "ULTRASONIC  
3 ABSORPTION AND ATTENUATION IN MAMMALIAN TISSUES,"  
9 *Ultrasound in Med. & Biol.*, vol. 5, p. 6, 1979.  
]

[ "The bulk modulus and Poisson's ratio of  
4 ``incompressible'' materials," *JOURNAL OF SOUND AND  
0 VIBRATION*, vol. 312, p. 4, 2008.  
]

[ Elena Algaer, *Thermal Conductivity of Polymer Materials*.  
4 Noworsibirsk: Technische Universitat Darmstadt, 2010.  
1  
]

[ Attila Bata and Karoly Belina Gergely Toth, "DETERMINATION  
4 OF POLYMER MELTS FLOW-ACTIVATION ENERGY," *Gradus*, vol. 2,  
2 p. 5, 2017.

]

[ D.R. Bacon. KAYE&LABY. [Online].  
4 [http://www.kayelaby.npl.co.uk/general\\_physics/2\\_4/2\\_4\\_4\\_4.](http://www.kayelaby.npl.co.uk/general_physics/2_4/2_4_4_4.html)  
3 [html](http://www.kayelaby.npl.co.uk/general_physics/2_4/2_4_4_4.html)

]

[ ALEX C. M. KUO, .: Oxford University Press, 1999, p. 25.

4

4

]

[ Jeffrey M. Davis, and Sandra M. Troian Anton A. Darhuber,  
4 "Thermocapillary actuation of liquid flow on chemically  
5 patterned surfaces," *PHYSICS OF FLUIDS*, vol. 15, no. 5,  
] p. 11, 2003.

[ D K McCluskey, C K L Tan and M C Tracey I D Johnston,  
4 "Mechanical characterization of bulk Sylgard 184 for  
6 microfluidics and microengineering," *Journal of*  
] *Micromechanics and Microengineering*, vol. 24, no. 035017,  
p. 8, 2014.

[ Jie Liu, Abdul I. Barakat, and Michael F. Insana Jean K.  
4 Tsou, "Role of ultrasonic shear rate estimation errors in  
7 assessing inflammatory response and vascular risk,"  
] *Ultrasound Med Biol*, vol. 34, no. 6, p. 22, 2008.

[ J. Hudson, "Surface science, an introduction".

4

8

]

[ D. L., Koplik, J., & Dashen, R. Johnson, "Theory of  
4 dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated  
9 porous media," no. 176, 1987.

]

[ b) Thomas Pezeril, Darius H. Torchinsky, Jeppe C. Dyre  
5 and Keith A. Nelson Christoph Klieber a) Tina Hecksher,  
0 "Mechanical spectra of glass-forming liquids. II.  
] Gigahertz-frequency longitudinal and shear acoustic  
dynamics in glycerol and DC704 studied by time-domain  
Brillouin scattering," vol. 138, 2013.

[ Fernando Revilla. (2015) Blog. [Online].  
5 [http://fernandorevilla.es/blog/2015/02/07/raiz-cuadrada-  
1 de-un-numero-complejo/](http://fernandorevilla.es/blog/2015/02/07/raiz-cuadrada-<br/>1 de-un-numero-complejo/)

]

[ Aude Michel and Jérôme Fresnais Carina Sötebier,  
5 "Polydimethylsiloxane (PDMS) Coating onto Magnetic  
2 Nanoparticles Induced by Attractive Electrostatic  
] Interaction," *Applied sciences*, vol. 2, p. 11, 2012.