

Proyecto Fin de Carrera Ingeniería Aeroespacial

Modelado y estudio fluidomecánico de los actuadores de plasma SDBD

Autor: Pablo Dugo Domínguez

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

**Dpto. Ing. Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2019



Proyecto Fin de Carrera
Ingeniería Aeroespacial

Modelado y estudio fluidomecánico de los actuadores de plasma SDBD

Autor:

Pablo Dugo Domínguez

Tutor:

Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

Profesor titular de Universidad

Dpto. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2019

Proyecto Fin de Carrera: Modelado y estudio fluidomecánico de los actuadores de plasma SDBD

Autor: Pablo Dugo Domínguez

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2019

El Secretario del Tribunal

A mi familia y amigos

Agradecimientos

Hace cuatro años, aproximadamente en esta misma fecha, daba mis primeros pasos en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería, siendo consciente del camino que estaba tomando, de los sacrificios a los que iba a tener que someterme, al esfuerzo que tenía que estar dispuesto a hacer por mis sueños, por mi futuro. Me prometí a mí mismo y a mi familia y amigos que haría todo lo posible por cumplir mis objetivos, que daría el 100%, que todo el esfuerzo, todas las horas de estudio, todas las noches en vela, toda privación... tendrían su recompensa. Dentro del tópico sobre la acción y reacción, la descripción que se hace en *Interstellar*, la película que motivaría mis estudios en Ingeniería Aeroespacial, de la Tercera Ley de Newton es esta: "La única forma que conocen los humanos de avanzar es dejar algo atrás". Jamás imaginé que una frase me acompañaría durante tanto tiempo, a veces estrechando mis perspectivas, a veces ensanchando mis deseos y ambiciones.

Pero, como muchas personas dicen, tras la tormenta siempre viene el Sol y la calma y durante este largo y arduo camino, siempre encuentras personas dispuestas a ayudarte, incluso sin ofrecer nada a cambio. Sin lugar a dudas, he tenido la suerte de conocer personas muy valiosas que siempre llevaré conmigo dentro, no sólo compañeros de clase sino amigos, amigos de verdad. Gracias a ellos y a ellas este camino ha sido mucho más fácil; sin ese ánimo cuando más lo necesitaba, sin esa palmada en la espalda que tanto anhelaba, sin esos mensajes de: "Ánimo, tú puedes con todo", "La suerte es sólo para quién la necesita", "Esto no es nada para ti"... nada habría sido posible o, al menos, no con este resultado. Y, de la misma forma que conoces a nuevas personas que antes no formaban parte de tu vida, conoces realmente a los que ya estaban en ella: a mis amigos y amigas de toda la vida, a mi familia, a mis padres, a mis hermanos..., GRACIAS, de todo corazón, por haber estado ahí siempre. Sin duda, las personas que han aportado algo positivo a mi día a día en estos últimos cuatro años, estén o no en estos momentos siendo parte de mi vida, son el regalo más valioso que me llevo.

Y es que, como el viento, las personas vienen y van, pero algunas, aquellas que están destinadas a estar contigo, nunca te fallan. Gracias a mis mejores amigos Josema, Migue y Andrés, a quienes he conocido durante la carrera, gracias por esa ayuda desinteresada y por todos los grandes momentos vividos durante todo este tiempo, sé que me llevo tres grandes amigos para toda la vida; gracias a mis hermanos, Víctor y Pilar, por darme esos ánimos en los momentos más delicados, por sacar siempre mis virtudes; gracias a mis padres, Toni y Pilar, por ser los cimientos de mi vida; gracias al resto de mi familia y amigos, por siempre confiar en mí.

Gracias, en especial, a mi compañero de clase, compañero de Trabajo de Fin de Grado y amigo, Migue, por este gran equipo que hemos formado durante la realización de este proyecto, por abrirme los brazos con una sonrisa cuando salió la propuesta de hacerlo juntos, codo con codo. Gracias también a nuestro tutor, Miguel Pérez-Saborid, por toda la ayuda prestada y el tiempo dedicado, con el que hemos podido entablar una magnífica relación y seguro que en un futuro no muy lejano, una buena amistad.

Por último, a la Universidad de Sevilla, al personal no docente, a todos los profesores que han aportado su granito de arena, gracias por todo.

Pablo Dugo Domínguez

Sevilla, 2019

Resumen

Los beneficios aerodinámicos que suponen el control del flujo que incide, por ejemplo, sobre la superficie de un perfil aerodinámico son múltiples: retraso de la transición de régimen laminar a turbulento, retraso del punto de separación, reducción de la resistencia aerodinámica, aumento de la sustentación... La obtención de dichos resultados ha sido objeto de estudio en los últimos años por investigadores, quienes encontraron una solución sencilla, barata y ligera para realizar estrategias de control de flujo activo: el uso de actuadores de plasma.

Los actuadores de plasma son dispositivos eléctricos capaces de acelerar un flujo por medio de la creación de un campo eléctrico. En concreto, los actuadores de plasma de Descarga con Barrera Dieléctrica (DBD) han sido los mejores posicionados debido a sus ventajas: una corta respuesta en el tiempo, su bajo consumo de potencia, ausencia de partes móviles (baja complejidad mecánica), bajo peso, fáciles de construir y de adaptar a la superficie que queremos estudiar es la carta de presentación de este dispositivo.

Para poner en evidencia las ventajas de los actuadores DBD, existen en el mercado múltiples códigos comerciales, pero su complejidad, tanto matemática como computacional se escapa de nuestra zona de estudio. Para obtener resultados de una forma más sencilla, sin perder la exactitud y la precisión que se requieren, se ha desarrollado un modelo matemático mediante el sistema de cómputo numérico MATLAB basado en el modelo de Suzen-Huang (SH). Dichos resultados, además, serán correctamente contrastados con publicaciones e investigaciones precedentes para corroborar la validez del estudio.

La ejecución de nuestro modelo se llevará a cabo, además, para distintas configuraciones físicas del actuador, maximizando aquellos parámetros que mejoran el comportamiento de nuestro actuador DBD con el fin de abarcar al máximo el problema en cuestión.

Abstract

The aerodynamic benefits of controlling the Flow that affects, for example, the Surface of an airfoil are multiple: delay of transition from laminar regime to turbulent regime, delay of separation point, reduction of drag, increase of lift... The obtaining of these results has been an object of study in recent years by researchers, who have found a simple, cheap and lightweight solution to perform active flow control strategies: the use of plasma actuators.

Plasma actuators are electrical devices capable of accelerating a flow through the creation of an electric field. Specifically, the Dielectric Barrier Discharge (DBD) actuators have been the best positioned due to their advantages: a short response time, low power consumption, absence of moving parts (low mechanical complexity), low weight, easy to build and adapt to the surface we want to study... is the letter of introduction of this device.

In order to highlight the advantages of DBD actuators, there are multiple commercial codes on the Marketplace, but their complexity, both mathematical and computational, escapes from our study area. To obtain results in a simpler way, without losing the accuracy and the precision that is required, a mathematical model has been developed through the numerical computation system MATLAB based on the Suzen-Huang (SH) model. In addition, these results will be contrasted with previous publications and research to corroborate the validity of the study.

Besides, the execution of our model will be carried out for the different physical configurations of the actuator, maximizing those parameters that improve the behaviour of our DBD in order to cover the problema as much as possible.

Índice

<i>Agradecimientos</i>	<i>vii</i>
<i>Resumen</i>	<i>viii</i>
<i>Abstract</i>	<i>ix</i>
<i>Índice</i>	<i>x</i>
<i>Índice de Tablas</i>	<i>xii</i>
<i>Índice de Figuras</i>	<i>xiii</i>
<i>Notación</i>	<i>xvi</i>
<i>Capítulo 1: Introducción</i>	<i>11</i>
1.1 Antecedentes	11
1.2 Motivación del problema y objetivos	12
1.3 Estructura del trabajo	13
1.4 Principios básicos	14
1.4.1 ¿Qué es el plasma?	14
1.4.1.1 Historia del plasma	14
1.4.1.2 Definición de plasma	15
1.4.1.3 Tipos de plasma	17
1.4.1.4 Parámetros del plasma	18
1.4.1.5 Modelos del plasma	20
1.4.1.6 Ejemplos de plasma	21
1.4.2 El actuador de plasma DBD	22
1.4.2.1 Principio de funcionamiento y antecedentes	22
1.4.2.2 Arquitectura del actuador	24
1.4.2.3 Ventajas y limitaciones	28
<i>Capítulo 2: Modelado del problema</i>	<i>29</i>
2.1 Modelo de Suzen-Huang	29
2.2 Formulación del problema eléctrico	30
2.3 Formulación del problema hidrodinámico	34
<i>Capítulo 3: Simulación del actuador de plasma DBD</i>	<i>38</i>
3.1. Método de colocación	39
3.1.1. El método de colocación 1D	39
3.1.2 El método de colocación 2D: nodos de Chebyshev	41
3.1.3 El Método de colocación 2D: diferencias finitas	43
3.2. Resolución numérica del problema eléctrico	44
3.2.1 Aplicación del método de colocación: Ecuación de Poisson	44
3.2.2 Resolución numérica de la distribución de densidad de carga	45
3.2.3 Resolución numérica de la distribución de potencial eléctrico	46
3.2.4 Programación del problema eléctrico en MATLAB	49
3.3. Resolución numérica del problema hidrodinámico	50

3.3.1	Aplicación del método de colocación: Ecuación Biharmónica	50
3.3.2	Resolución numérica de la distribución de función de corriente	51
3.3.3	Programación del problema hidrodinámico en MATLAB	55
4	<i>Análisis de resultados</i>	61
4.1	<i>Validación del código del problema hidrodinámico</i>	61
4.1.1	Geometría del actuador de plasma DBD	61
4.1.2	Parámetros	62
4.1.3	Efecto del espesor de dieléctrico	62
4.1.4	Efecto de la separación (gap) entre los electrodos	65
4.1.5	Efecto de la frecuencia del voltaje AC aplicado	67
4.1.6	Efecto de la amplitud del voltaje AC aplicado	68
4.1.7	Efecto de la forma de onda voltaje AC aplicado	69
4.2	<i>Influencia del resto de parámetros en el problema hidrodinámico</i>	71
4.2.1	Efecto de la longitud de Debye	71
4.2.2	Efecto de la densidad de carga máxima	72
4.3	<i>Análisis del viento iónico producido</i>	74
4.4	<i>Coste computacional</i>	79
5	<i>Conclusiones, posibles mejoras y líneas de estudio futuras</i>	80
5.1	<i>Conclusiones</i>	80
5.2	<i>Posibles mejoras y líneas de estudio futuras</i>	81
	<i>ANEXO: Programas de matlab</i>	82
	<i>ANEXO 1: Cálculo de la distribución de densidad de carga</i>	82
	<i>ANEXO 2: Cálculo de la distribución de potencial eléctrico</i>	84
	<i>ANEXO 3: Funciones auxiliares</i>	89
	<i>Referencias</i>	91
	<i>Glosario</i>	93

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Ejemplos de plasma según su origen	21
Tabla 2. Parámetros de los diferentes actuadores MEE. Fuente de la imagen: [7]	26
Tabla 3. Tipos de dieléctricos y propiedades.	27
Tabla 4. Tiempos de ejecución del problema fluidomecánico	79

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Estados de agregación de la materia. Fuente de la imagen: [20]	11
Figura 2. Diferencias entre gas y plasma. Fuente de la imagen: [21]	15
Figura 3. Proceso de ionización. Fuente de la imagen: [15]	16
Figura 4. Excitación y Desexcitación de átomos. Fuente de la imagen: [22]	16
Figura 5. Disociación molecular. Fuente de la imagen: [23]	17
Figura 6. Limpieza con plasma. Fuente de la imagen: [24]	17
Figura 7. Tipos de plasmas. Fuente de la imagen: [20]	18
Figura 8. Ejemplos de a) distribución Maxwelliana y b) Distribución no Maxwelliana de velocidad. Fuente de la imagen: [16]	20
Figura 9. El Sol como ejemplo de plasma. Fuente de la imagen: [25]	21
Figura 10. Lámpara de plasma. Fuente de la imagen:[26]	21
Figura 11. Rayo. Fuente de la imagen:[27]	22
Figura 12. Aurora boreal. Fuente de la imagen:[28]	22
Figura 13. Perfil NACA 0015 con cuatro actuadores de plasma. Fuente de la imagen: [9]	23
Figura 14. Estructura de flujo alrededor del perfil aerodinámico NACA 0015 con $Re=15000$ a la izquierda con el actuador apagado (OFF) y a la derecha con el actuador encendido (ON). Fuente de la imagen: [9]	23
Figura 15. Arquitectura de un actuador DBD. Fuente de la imagen: [4]	24
Figura 16. Arquitectura de un único actuador DBD. Fuente de la imagen: [4]	24
Figura 17. Arquitectura de un actuador DBD doble. Fuente de la imagen: [4]	25
Figura 18. Arquitectura de multiactuadores DBD basados en cuatro actuadores DBD únicos. Fuente de la imagen: [4]	25
Figura 19. Arquitectura de diferentes actuadores de plasma MEE a)MEE5, b)MEE6, c)MEE7, d)MEE8. Fuente de la imagen: [7]	26
Figura 20. Efecto de un dieléctrico. Fuente de la imagen:[29]	27
Figura 21. Dominio y condiciones de contorno para resolver el potencial ϕ. Fuente de la imagen: [10]	31
Figura 22. Dominio y condiciones de contorno que nos permiten calcular la densidad de carga ρc. Fuente de la imagen: [10]	32
Figura 23. Dominio y condiciones de contorno para resolver el potencial ϕ * adimensional	33
Figura 24. Dominio y condiciones de contorno que nos permiten calcular la densidad de carga adimensional ρc *	34
Figura 25. Definición de la función de corriente Ψ. Fuente de la imagen: [37]	36
Figura 26. Comparación aproximación polinómica mediante nodos equiespaciados y mediante nodos de Chebyshev. Fuente de la imagen: [39]	41
Figura 27. Mallado del dominio de forma rectangular. Fuente de la imagen: [39]	42
Figura 28. Lógica empleada en MATLAB para resolver el problema eléctrico	49

Figura 29. Lógica empleada en MATLAB para resolver el problema hidrodinámico	55
Figura 30. Geometría del actuador de plasma DBD	61
Figura 31. Efecto del espesor de dieléctrico en la velocidad máxima obtenido con MATLAB	62
Figura 32. Efecto del espesor de dieléctrico en la velocidad máxima obtenido con Oracle3D. de la imagen: [10]	Fuente 63
Figura 33. Efecto del espesor de dieléctrico en la componente x de fuerza electrohidrodinámica obtenido con Oracle3D. Fuente de la imagen: [10]	63
Figura 34. Perfiles de velocidad con variación de espesor de dieléctrico en $x=7$ mm y $t=36$ ms obtenidos con MATLAB	64
Figura 35. Perfiles de velocidad con variación de espesor de dieléctrico en $x=7$ mm y $t=36$ ms obtenidos con Oracle3D. Fuente de la imagen: [10]	64
Figura 36. Efecto del gap entre los electrodos en las velocidades máximas obtenido con MATLAB	65
Figura 37. Efecto del gap entre los electrodos en las velocidades máximas obtenido con Oracle3D. Fuente de la imagen: [10]	Fuente 65
Figura 38. Efecto en la componente x de la fuerza volumétrica del gap entre los electrodos obtenido con Oracle3D. Fuente de la imagen: [10]	66
Figura 39. Efecto del gap en un perfil de velocidades en $x=10$ mm y $t=40$ ms obtenido con MATLAB	66
Figura 40. Efecto del gap en un perfil de velocidades en $x=10$ mm y $t=40$ ms obtenido con Oracle3D. Fuente de la imagen: [10]	67
Figura 41. Efecto de la frecuencia del voltaje aplicado en la velocidad obtenido con MATLAB	67
Figura 42. Efecto de la frecuencia del voltaje aplicado en la velocidad obtenido con Oracle3D. de la imagen: [10]	Fuente 68
Figura 43. Efecto de la amplitud del voltaje aplicado en la velocidad máxima inducida del viento iónico	68
Figura 44. Formas de onda del voltaje aplicado. Fuente de la imagen: [10]	69
Figura 45. Efecto de la forma de onda en la velocidad máxima inducida obtenido con MATLAB	70
Figura 46. Efecto de la forma de onda en la velocidad máxima inducida obtenido con Oracle3D. de la imagen: [10]	Fuente 70
Figura 47. Campo de velocidades para $\lambda_D = 0.00012$ m obtenido con MATLAB	71
Figura 48. Campo de velocidades para $\lambda_D = 0.001$ m obtenido con MATLAB	71
Figura 49. Efecto de la longitud de Debye en la velocidad máxima inducida. Fuente de la imagen: [42]	72
Figura 50. Campo de velocidades inducido para $\rho_c, MAX = 0.00012C/m^3$ obtenido con MATLAB	73
Figura 51. Campo de velocidades inducido para $\rho_c, MAX = 0.001C/m^3$ obtenido con MATLAB	73
Figura 52. Efecto de ρ_c, MAX en la velocidad máxima inducida. Fuente de la imagen: [42]	73
Figura 53. Campo de velocidades para $t=0.4$ ms obtenido con MATLAB	74
Figura 54. Campo de velocidades para $t=1.6$ ms obtenido con MATLAB	74
Figura 55. Campo de velocidades para $t=4.8$ ms obtenido con MATLAB	75
Figura 56. Campo de velocidades para $t=9.6$ ms obtenido con MATLAB	75
Figura 57. Campo de velocidades para $t=19.2$ ms obtenido con MATLAB	75

Figura 58. Campo de velocidades para $t=30$ ms obtenido con MATLAB	76
Figura 59. Campo de velocidades para $t=40$ ms obtenido con MATLAB	76
Figura 60. Campo de velocidades obtenido con Oracle3D. Fuente de la imagen: [18]	77
Figura 61. Campo de velocidades vectorial obtenido con Oracle3D. Fuente de la imagen: [18]	78

Notación

n_e	Densidad de electrones libres
n_i	Densidad de iones positivos
n_0	Densidad de átomos o moléculas neutros
T_e	Temperatura de los electrones o temperatura cinética media
T_i	Temperatura de los iones
λ_D	Longitud de Debye
ϵ_0	Permitividad del vacío
k	Constante de Boltzmann
e	Carga del electrón
α	Grado de ionización
DBD	Dielectric Barrier Discharge
MEE	Multiple Encapsulated Electrode
ρ_c	Densidad de carga neta en el plasma
$\rho_{c,max}$	Densidad de carga máxima en el plasma
ϕ_{MAX}	Amplitud del voltaje aplicado
\vec{E}	Campo eléctrico
E_x	Componente x del campo eléctrico
E_z	Componente z del campo eléctrico
Φ	Potencial eléctrico
ϵ	Permitividad
ϵ_r	Permitividad relativa del medio
ϕ	Potencial debido a campos eléctricos externos
φ	Potencial debido a la densidad de carga en el plasma
G	Distribución semi-Gaussiana
f	Variación temporal del voltaje aplicado
μ	Parámetro de localización del máximo de la campana Gaussiana
σ	Parámetro de ratio de decrecimiento de la distribución Gaussiana
ρ	Densidad del fluido
μ	Viscosidad dinámica del fluido
\vec{V}	Velocidad del fluido
V_x	Componente x de la velocidad del fluido
V_z	Componente z de la velocidad del fluido
p	Presión del fluido
\vec{F}_e	Fuerza electrohidrodinámica

Re	Número de Reynolds
D_c	Fuerza Coulombiana adimensional
T	Período de la frecuencia del voltaje aplicado
f_c	Frecuencia del voltaje aplicado
t	Tiempo real
Ψ	Función de corriente
u	Componente x de la velocidad adimensional
v	Componente z de la velocidad adimensional
u_0	Velocidad de referencia
ξ	Componente x adimensional
η	Componente z adimensional
τ	Tiempo adimensional
E^*	Campo eléctrico adimensional
E_ξ	Componente x del campo eléctrico adimensional
E_η	Componente z del campo eléctrico adimensional
ρ_c^*	Densidad de carga adimensional
ϕ^*	Potencial debido a campos eléctricos externos adimensional

1. INTRODUCCIÓN

En esta sección, primero introducimos los antecedentes que llevan al estudio de los actuadores de plasma como herramientas para el control del flujo. Posteriormente, incluimos una breve síntesis acerca de los objetivos que se desean alcanzar y la motivación que nos lleva al estudio de los actuadores de plasma. Finalmente se realiza una descripción exhaustiva de la estructura del trabajo que en estas líneas se presenta.

1.1 Antecedentes

Es bien conocido en campos como la física o la química que cuando modificamos las condiciones de temperatura y presión de cualquier sustancia, pueden obtenerse distintos estados o fases llamados estados de agregación de la materia. Dichos estados están, como no podía ser de otra forma, íntimamente relacionados con las fuerzas de cohesión de las partículas que constituyen la materia.

También sabemos que estos estados de agregación tienen propiedades y características dispares. De forma natural son conocidos cuatro estados o fases: sólido (por ejemplo, un cubito de hielo), líquido (el agua de los mares y océanos), gaseoso (el vapor de agua utilizado en una central nuclear) y plasmático o de plasma (aurora boreal).



Figura 1. Estados de agregación de la materia. Fuente de la imagen: [20]

Tal y como hemos señalado, el plasma es considerado desde hace años como el único estado cuya existencia no puede darse de forma aislada, como es el caso de los otros tres, pues debe existir ineludiblemente alguna forma de campo que lo ionice, como puede ser la temperatura o la electricidad.

Los usos del plasma son más que cotidianos hoy en día, desde lámparas hasta televisores, pasando por tubos fluorescentes y otros tipos de luces. También es importante remarcar la aparición natural del estado de plasma, como puede ser en algunas capas de la atmósfera, los rayos en una tormenta o el fenómeno de la aurora boreal que frecuentemente se produce en los polos.

La aplicación del plasma ha motivado al desarrollo de tecnologías como la propulsión iónica para vehículos espaciales, concebida desde hace 50 años, aunque no ha sido hasta la fecha actual cuando se ha convertido en una realidad [1]; también se ha utilizado ampliamente en los últimos años en campos como la magnetohidrodinámica (MHD) [2]. Con el tiempo, estas aplicaciones han florecido en el marco de la aerodinámica o la mecánica de fluidos, que son los temas con los que más se relaciona este trabajo.

Dentro de este campo, se llevan estudiando desde hace ya varios años los denominados actuadores de plasma para el control de las superficies de las aeronaves. A diferencia de los actuadores servo-mecánicos típicos de los aviones, los actuadores de plasma son un tipo de actuadores aerodinámicos de control de flujo basados en la formación de plasma. Éstos son también conocidos como actuadores de descarga de barrera dieléctrica o DBD – Dielectric Barrier Discharge Plasma Actuator-. Estos novedosos actuadores se llevan probando eficazmente desde 2005 y los resultados arrojados de los estudios son realmente prometedores, por lo que su incorporación para la mejora de la sustentación de superficies aerodinámicas está cerca de ser una realidad [3].

También han sido probados como generadores de vórtices con el objetivo de retardar la separación del flujo aerodinámico y así mantener durante más tiempo el régimen laminar [4]. Por último, otras posibles aplicaciones de estos actuadores están relacionadas con la reducción de la resistencia aerodinámica [5] o incluso como una alternativa a los alerones o los flaps [6].

1.2 Motivación del problema y objetivos

La manipulación del flujo, por ejemplo, sobre las alas de los aviones, han generado numerosos estudios [7], pues es una solución que resulta muy beneficiosa. Dichos estudios se centran básicamente en el control de la capa límite. El control exitoso de esta región permite sacar un mayor rendimiento a la eficiencia aerodinámica, aumentando la sustentación y disminuyendo la resistencia aerodinámica, permitiendo velocidades de despegue y aterrizaje menores, pistas más cortas, mejor maniobrabilidad en entornos desfavorables y por supuesto, un menor consumo de combustible.

Resulta interesante, por tanto, el estudio de mecanismos que permitan la manipulación del flujo, como pueden ser el uso de actuadores de plasma. Además de las ventajas señaladas con anterioridad, es preciso valorar a los actuadores de plasma como una alternativa viable a los dispositivos mecánicos de control, o incluso el uso junto a éstos con el objetivo de garantizar la seguridad mediante la redundancia de sistemas y que permitirá, además, la reducción de peso y el alivio de la complejidad mecánica que suponen los servos de control.

De esta forma el objetivo es desarrollar un modelo de actuador DBD que sea capaz de simular su actuación, desde el punto de vista hidrodinámico, con el fin de analizar su comportamiento frente a diferentes parámetros y condiciones de contorno. Ello se realizará de una forma sencilla pero compacta desde el entorno del software matemático MATLAB, mediante un modelo simple, transparente y flexible que permita, sin grandes recursos computacionales, obtener resultados fiables y reales del comportamiento del dispositivo.

Resumidamente, la finalidad de este estudio es:

- Descripción de los principios y fundamentos básicos de la física que envuelve a los actuadores DBD.
- Explicación de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los actuadores DBD.
- Presentación de la arquitectura de los actuadores DBD.
- Simulación del comportamiento de un actuador DBD desde el punto de vista hidrodinámico.
- Comparación de los resultados obtenidos de la simulación con investigaciones antecesoras.

Es importante remarcar que, debido a la amplitud del modelado del actuador DBD en cuestión, este estudio se encuentra dividido en dos partes bien diferenciadas, aunque complementarias: el enfoque eléctrico del actuador DBD, realizado por mi compañero y amigo Miguel Ángel Domínguez Jiménez es desarrollado en [43], en el que se estudia la densidad de carga, el potencial eléctrico y las fuerzas electrohidrodinámicas que aparecen y el enfoque hidrodinámico, que es del que trata este estudio, encargado de la implementación del problema fluidomecánico y el estudio del campo de velocidades inducidas por el actuador.

1.3 Estructura del trabajo

El estudio está dividido en cinco capítulos y un anexo:

- **Capítulo 1: Introducción.**

En esta sección se realiza una descripción de los principios básicos del plasma y los fundamentos teóricos de la física que envuelve a los actuadores DBD, mostrando la arquitectura del dispositivo y su aplicación en el proceso de control del flujo, así como las ventajas y las limitaciones de dichos dispositivos.

Se divide en las subsecciones: 1.1 Antecedentes, 1.2 Motivación del problema y objetivos, 1.3 Estructura del trabajo y 1.4 Principios básicos.

- **Capítulo 2: Modelado del problema.**

En esta sección se exponen las ecuaciones que rigen el comportamiento de los actuadores DBD, centrándonos tanto en el problema eléctrico como en el problema hidrodinámico.

Se divide en subsecciones: 2.1 Modelo de Suzen-Huang 2.2. Formulación del problema eléctrico, 2.3 Formulación del problema hidrodinámico

- **Capítulo 3: Simulación del actuador de plasma DBD.**

En esta sección realiza una explicación exhaustiva de los métodos numéricos utilizados para la realización del código numérico en MATLAB que simula la actuación de nuestro actuador DBD.

Se divide en las siguientes subsecciones: 3.1 El método de colocación, 3.2 Resolución numérica del problema eléctrico y 3.3 Resolución numérica del problema hidrodinámico.

- **Capítulo 4: Análisis de resultados.**

Se recogen y analizan en esta sección los resultados obtenidos de las diferentes simulaciones, comparándolas con investigaciones predecesoras que nos permitan, no sólo validar el estudio, sino extender su flexibilidad a futuras investigaciones. En la última parte de este capítulo se analiza el coste computacional necesario para llevar a cabo nuestras simulaciones.

Se divide en las siguientes subsecciones: 4.1 Validación del código del problema hidrodinámico, 4.2 Influencia del resto de parámetros en el problema hidrodinámico, 4.3 Análisis del viento iónico producido y 4.4 Coste computacional.

- **Capítulo 5: Conclusiones, posibles mejoras y líneas de estudio futuras.**

En esta sección se explican las conclusiones alcanzadas. Además, se analizará cualitativamente el estudio teniendo en cuenta los objetivos iniciales propuestos para verificar que, efectivamente, se ha abordado completamente el problema en cuestión.

Posteriormente, se discuten y se presentan posibles mejoras en la metodología utilizada en el estudio que podrían enriquecerlo y hacerlo más completo. Finalmente, se efectúan una serie de propuestas de futuro obtenidas a raíz de las diferentes investigaciones llevadas a cabo, donde se establecen posibles líneas de investigación para profundizar aún más en el campo de los actuadores de plasma, generando nuevas preguntas e ideas que podrían abrir interesantes vías de trabajo.

Se divide en las siguientes subsecciones: 5.1 Conclusiones y 5.2 Posibles mejoras y líneas de estudio futuras.

- **Anexo: programas de MATLAB.**

Por último, en este bloque quedan recogidos los códigos numéricos elaborados en MATLAB.

Se divide en las siguientes subsecciones: Anexo 1: Cálculo de la distribución de densidad de carga, Anexo 2: Cálculo de la distribución de potencial eléctrico y Anexo 3: Funciones auxiliares.

1.4 Principios básicos

1.4.1 ¿Qué es el plasma?

En este apartado se pretende realizar una descripción exhaustiva de lo que conocemos como plasma o estado plasmático con el fin de que el lector se adentre en el fundamento básico que compone a los actuadores de plasma, que es el asunto del que trata el trabajo.

Los siguientes apartados tratarán de explicarnos cómo se descubrió, cómo funciona y en qué condiciones se presenta el estado de plasma. Antes de ellos, es preciso dar una breve definición del tema a tratar: el plasma.

Se conoce al plasma en campos como la química o la física, al estado de la materia en el que la mayoría de los átomos se encuentran ionizados, existiendo una cierta cantidad de electrones que tienen la capacidad de moverse libremente sin encontrarse ligados a ninguno de estos átomos. Es decir, es un fluido formado por iones positivos y por electrones, concentrados en la misma cantidad, además de átomos neutros.

Este es el motivo por el cual el plasma es un gran conductor eléctrico y responde de manera eficaz en presencia de campos electromagnéticos

1.4.1.1 Historia del plasma

El concepto de plasma data aproximadamente de la tercera década del siglo XX de la mano del ingeniero metalúrgico, físico y químico estadounidense Irvin Langmuir (1881-1957). Además, unos años más tarde, en 1932, sería galardonado con el Nobel de Química. Sin embargo, las evidencias de que un nuevo tipo de energía o estado existían eran anteriores [15]:

- **El ámbar y su electrificación (1698):**

En 1698 un científico originario de Inglaterra descubrió la aparición de una chispa cuando estudiaba la electrificación del ámbar. Frotando con asiduidad dicho material, reveló una pequeña descarga eléctrica en el aire, hecho que solo podía producirse mediante la creación de una cierta cantidad de cargas eléctricas libres en el aire como para que éste se convirtiera en un gas conductor: un plasma

- **Benjamín Franklin, el experimento del rayo y la cometa (1752):**

En 1752, el científico e inventor estadounidense Benjamín Franklin (1706-1790) hizo un experimento con el que quería demostrar la naturaleza eléctrica de los rayos. Años atrás había estado trabajando en experimentos cuyo fundamento principal era la electricidad. Aquel día una tormenta azotaba en el lugar en que se encontraba Franklin, por lo que se le ocurrió volar una cometa hecha de varillas metálicas y seda para comprobar que los rayos estaban repletos de carga eléctrica. Sus evidencias no estaban tan equivocadas y cuando echó a volar la cometa ésta comenzó a atraer los rayos.

Dicho experimento le permitió demostrar que los rayos, de naturaleza eléctrica, podían ser atraídos por un material metálico y que esto podía utilizarse para el uso civil: así nació el pararrayos.

- **Michael Faraday: descargas en arco (1830):**

Desde hacía ya una década, allá por 1830, el científico inglés Michael Faraday (1791-1867) había estado estudiando las descargas eléctricas. En uno de sus experimentos descubrió que en las descargas eléctricas en arco había zonas donde se producía una reducción de la presión, y que esto traía consigo la emisión de una luz tenue.

- **William Crookes: descargas eléctricas en gases (1880):**

A finales del siglo XIX, el físico inglés William Crookes (1832-1919) descubrió, mientras experimentaba con descargas eléctricas en gases que la zona del gas en que se producía la descarga se comportaba de forma diferente a un gas normal. Nombró al plasma como 'gas radiante'. También identificó a los electrones, que en esa época eran todavía desconocidos como 'rayos catódicos'.

- **Joseph J. Thompson: desviación de rayos catódicos (1897):**

Casi a principios del siglo XX, Thompson (1856-1940) realizó un conjunto de experimentos en los que midió la desviación de lo que en aquella época se conocía como rayos catódicos cuando se utilizaban campos electromagnéticos. Dichos experimentos le permitieron descubrir a los electrones y proponer el primer modelo atómico. Años más tarde, fue galardonado con el Premio Nobel de Física (1906).

- **Irving Langmuir: descargas eléctricas en gases (1929):**

Las investigaciones de descargas eléctricas en gases iniciadas por Irving Langmuir en 1923 y junto con el conocimiento de que éstas ionizaban a los átomos del gas dieron sus frutos en 1929, cuando el término de plasma se incluía en el informe de un trabajo donde se estudiaba la nube de electrones que se veía en el interior del gas durante una descarga. Esta nube de electrones brillaba y se movía de una forma gelatinosa que a Langmuir le recordaba al plasma de la sangre.

- **Lev Landau: teoría estadística del plasma (1936) y los estudios predecesores:**

No sería hasta finales del primer tercio del siglo XX cuando el físico soviético Lev Landau (1908-1968) desarrollara una teoría estadística que describiera el comportamiento y el origen del plasma. Posterior a Landau, el científico sueco Hannes Alfvén (1908-1995) desarrolló las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido eléctrico al ser sometidos a un campo magnético. Tras Alfvén, de nuevo Landau describió matemáticamente la interacción entre las partículas y las ondas en un plasma. Se considera que la física de plasmas modernas tiene su origen en estos trabajos. De hecho, los trabajos de Alfvén acerca del plasma le valieron para ser galardonado con el premio Nobel en 1970.

De esta forma la física de plasmas ha tenido un enorme impulso en las últimas décadas y aún quedan muchos asuntos que estudiar, constituyendo una de las áreas de mayor dificultad en la física de hoy.

1.4.1.2 Definición de plasma

Un plasma se trata de un gas energizado hasta el punto en que iones positivos de átomos y sus respectivos electrones liberados se encuentran confinados en el mismo espacio. Cuando un material alcanza este estado se dice que está en estado de plasma. De esta forma, el plasma no es otra cosa que un gas ionizado en el que existe un movimiento libre entre iones y electrones.

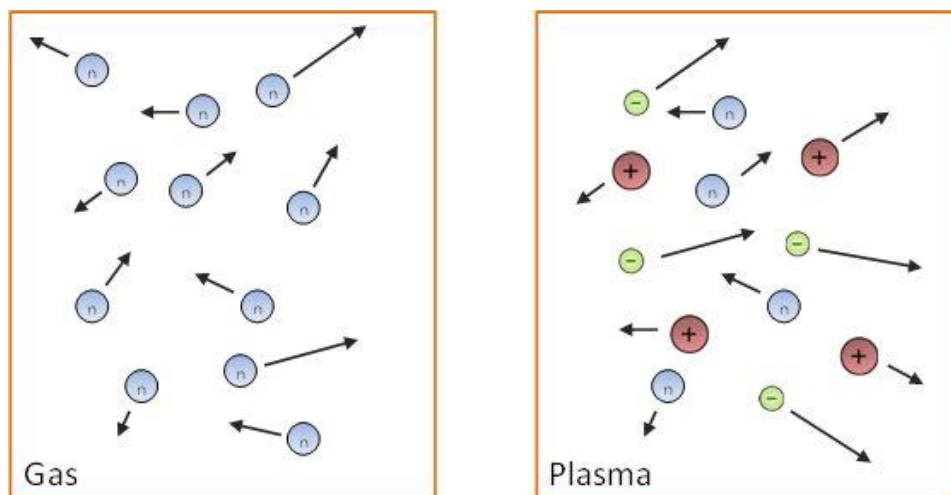


Figura 2. **Diferencias entre gas y plasma.** Fuente de la imagen: [21]

Además, encontramos las siguientes características en los plasmas:

- Carecen de forma y volumen fijos.
- Son menos densos que los sólidos y los líquidos.

- Todos o algunos de los electrones han sido liberados de sus átomos.
- Formados por iones positivos y electrones que poseen libertad de movimiento.
- Poseen carga neta cero (en su totalidad) pero no a nivel de partículas individuales (nivel local).
- Son altamente influenciados por campos electromagnéticos externos.
- Tienen la habilidad de crear campos magnéticos dentro de sí mismos debido a la atracción electrostática entre los iones positivos y los electrones, que influyen en la dinámica de las partículas, creando un comportamiento colectivo entre iones y electrones.
- Son conductores de la electricidad.

Por otro lado, es importante remarcar los procesos más importantes que tienen lugar en un plasma [15]:

- **Ionización**

La ionización es el fenómeno desencadenante del plasma, en el cual se produce la formación de iones (aniones y cationes). Como consecuencia, los electrones liberados en la ionización pueden ser acelerados por campos electromagnéticos, que, a su vez, a través de sucesivos choques, pueden producir una ionización en cadena, estableciendo una corriente eléctrica.

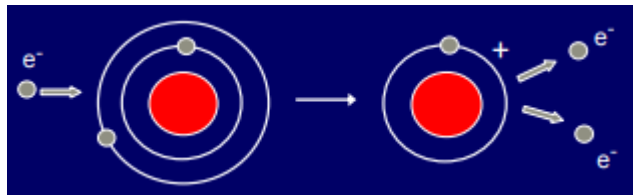


Figura 3. **Proceso de ionización.** Fuente de la imagen: [15]

Otros procesos derivados de la ionización pueden ser, por un lado, la excitación atómica interna por impacto de electrones y, por otro lado, la desexcitación y emisión de fotones, cuyo análisis permite conocer las especies que contiene.

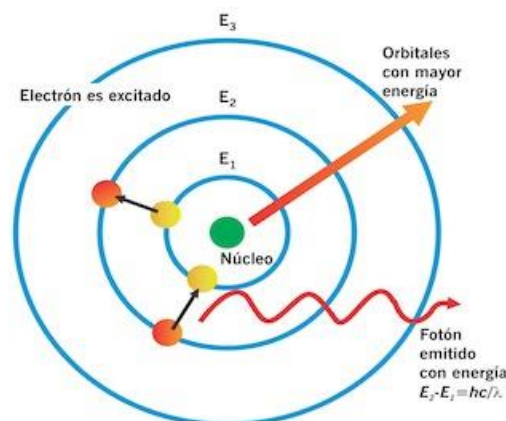


Figura 4. **Excitación y Desexcitación de átomos.** Fuente de la imagen: [22]

- **Disociación molecular:**

Mediante este proceso las moléculas se rompen liberando átomos y radicales libres que reaccionan químicamente y forman a su vez nuevas especies. Es decir, un plasma es un medio muy reactivo químicamente.

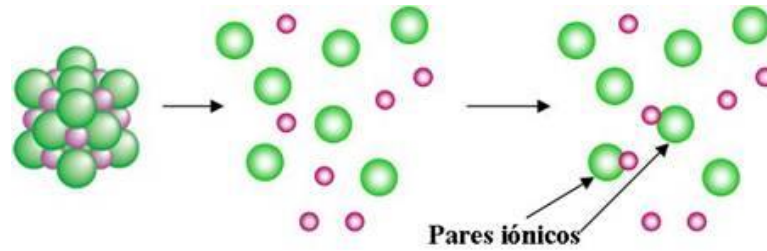


Figura 5. **Disociación molecular.** Fuente de la imagen: [23]

- **Reacciones con las superficies:**

Puesto que las partículas del plasma están cargadas con mucha energía, son capaces de arrancar partículas de las superficies cercanas y que se incorporan al plasma. Al mismo tiempo, partículas del plasma pasan a depositarse en las superficies. Aprovechando esta idea se están haciendo investigaciones para el uso del plasma en la limpieza de superficies.



Figura 6. **Limpieza con plasma.** Fuente de la imagen: [24]

1.4.1.3 Tipos de plasma

Los diferentes tipos de plasma suelen clasificarse en función de dos parámetros fundamentales [14]:

- **Densidad de electrones:** mide la cantidad de electrones y de iones positivos que hay en un volumen de plasma. En sí es una medida del grado de ionización del plasma.
- **Temperatura:** mide el grado de agitación térmica de las partículas. Está relacionada con la energía cinética de éstas.

Debido a la temperatura distinguimos entre plasmas no térmicos o fríos, que sólo tienen una pequeña fracción de sus átomos ionizados (bajo grado de ionización) y plasmas calientes, que son creados debido al aumento de temperatura de un gas hasta que los electrones están tan energizados que pueden liberarse de sus átomos.

Podemos observar en la siguiente imagen una clasificación de los diferentes tipos de plasma en función de la temperatura y la densidad de electrones.

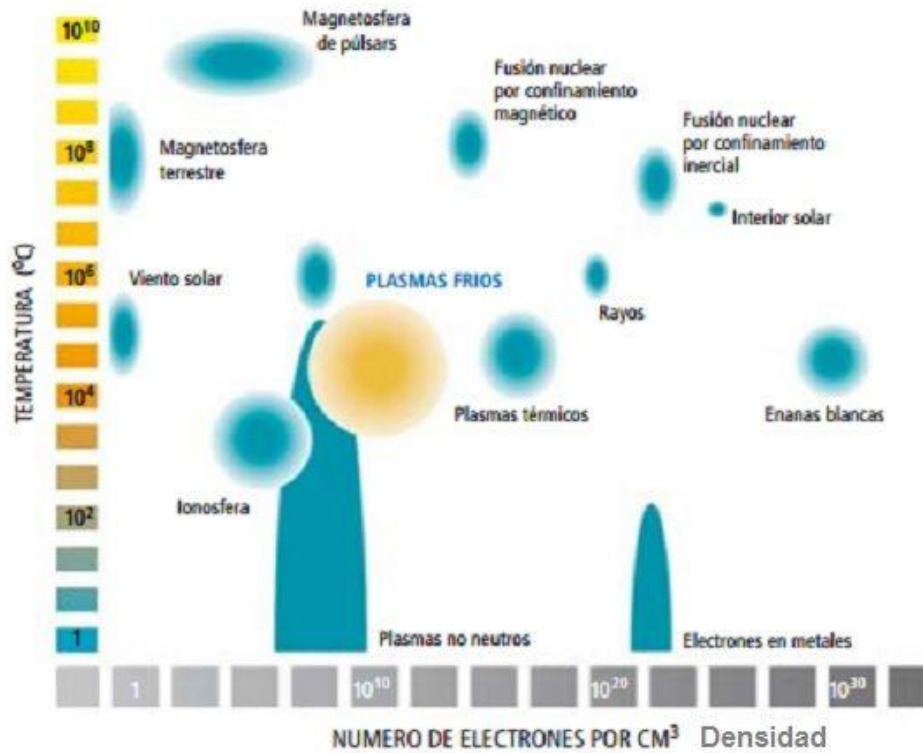


Figura 7. Tipos de plasmas. Fuente de la imagen: [20]

1.4.1.4 Parámetros del plasma

Las magnitudes características del plasma que fundamentalmente interesan son principalmente cinco [13]:

- **Densidades de especies:**

Las densidades de las diferentes especies miden el número de electrones, iones positivos y átomos/moléculas neutras existentes en un determinado volumen de plasma. De esta forma, n_e es la densidad de electrones libres, n_0 es la densidad de átomos/moléculas neutras y n_i es la densidad de iones positivos.

- **Temperaturas de especies:**

La temperatura es una medida indirecta de la energía cinética térmica que tiene cada partícula. Normalmente los electrones están lo suficientemente cerca del equilibrio térmico. Debido a que existe una gran diferencia de masa entre los iones y los electrones, éstos últimos llegan al equilibrio termodinámico mucho más rápido. Es por esta razón por lo que la temperatura de los iones es diferente para cada partícula, normalmente más baja que la de los electrones.

Un ejemplo donde puede observarse esto es en plasmas utilizados en aplicaciones tecnológicas, que están poco ionizados y cuyos iones se encuentran prácticamente a temperatura ambiente.

La temperatura relativa de las especies a menudo marca una nueva clasificación, en la que distinguimos entre plasmas térmicos y no térmicos. En los plasmas térmicos los electrones y los iones están en equilibrio termodinámico (misma temperatura). En los no térmicos, los iones y los átomos neutros se encuentran a la misma temperatura, pero más baja que los electrones.

Un aspecto importante que señalar es que la temperatura marca el grado de ionización del plasma, que está determinada por la temperatura de los electrones. A partir del grado de ionización, que se define mediante la siguiente ecuación:

$$\alpha = \frac{n_e}{n_e + n_0}$$

donde α es el grado de ionización, podemos distinguir entre plasmas completamente ionizados, débilmente ionizados y parcialmente ionizados.

- **Longitud de Debye (λ_D):**

La longitud de Debye – también llamada radio de Debye - se define en un plasma u en cualquier otro medio ionizado como la distancia a partir de la cual el campo colombiano de una partícula cargada es contrarrestado por el creado por las partículas de carga contraria que la rodean. Así, en la escala de la longitud de Debye, los portadores de carga móviles generan un apantallamiento de los campos eléctricos generados por plasmas y otros tipos de conductores.

Del mismo modo, se define la esfera de Debye como el volumen cuyo radio es la propia longitud de Debye, dentro de la cuál existe una esfera de influencia, mientras que exteriormente las cargas son apantalladas (neutralizadas).

- **Potenciales, campos y corrientes:**

Como ya se ha indicado, los plasmas son buenos conductores, por lo que los potenciales eléctricos son de gran importancia. La existencia del potencial se da en promedio en el espacio entre las partículas cargadas e independientemente de su medida, se denomina potencial de plasma.

Cuando se introduce un electrodo en un plasma, su potencial normalmente será inferior al potencial del plasma. Por otro lado, la buena conductividad eléctrica de los plasmas provoca que sus campos eléctricos sean muy pequeños.

Un concepto importante es el de la ‘‘quasineutralidad’’, el cual explica que la densidad de electrones y de iones positivos es prácticamente neutra si el recinto de estudio es un volumen grande de plasma, pero en la escala de la longitud de Debye, puede haber desequilibrios de cargas.

Así, el apantallamiento eléctrico de Debye impide que los campos eléctricos tengan influencia a distancias mayores de la longitud de Debye. Sin embargo, la existencia de partículas cargadas hace que el plasma sea afectado por campos magnéticos.

De esta forma se pueden producir comportamientos complejos como la generación de dobles capas de plasma, que provoca la separación de las cargas varias decenas de longitudes de Debye.

- **Inestabilidades:**

Globalmente, el comportamiento del plasma en contadas ocasiones es estable. De hecho, puede considerarse como un sistema altamente inestable.

Normalmente, cuando un sistema es analizado, si en un momento determinado se produce una alteración local, es bastante probable que, si ésta es sólo una fluctuación, no se extenderá y desaparecerá rápidamente. En este caso se dice que el sistema está en equilibrio estable. Sin embargo, en los plasmas es bastante común que una fluctuación, por muy pequeña que sea, haga que el comportamiento desordenado se extienda, aumente y destruya cualquier zona local organizada.

Este concepto de inestabilidad es bastante conocido por los científicos y existen numerosas investigaciones centradas en entender dichas inestabilidades con el objetivo de encontrar la manera de controlarlas mediante la utilización de campos magnéticos.

1.4.1.5 Modelos del plasma

Hoy en día, para el análisis y la simulación del comportamiento del plasma, se hace uso principalmente de dos modelos [16]:

- **Modelo fluido:**

Los modelos fluidos existentes describen los plasmas como cantidades continuas en cada posición del espacio, al igual que se hace para variables como la densidad o la velocidad media.

Una descripción general del plasma se realiza con un modelo denominado ‘modelo de plasma de dos fluidos’. En este modelo se consideran por separado tanto iones como electrones. De esta forma, la ecuación de continuidad se aplica por separado para cada una de las diferentes especies, mientras que en la ecuación de balance de momentos se debe tener en cuenta el hecho de que las partículas de una especie pueden chocar con partículas de otra especie, existiendo diferentes impulsos entre ambas.

Actualmente, es común hacer uso de un modelo más simple, denominado modelo magnetohidrodinámico (MHD), que trata el plasma como un fluido único cuya cinemática es explicada mediante las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de Navier-Stokes.

Es importante tener en cuenta que, en los modelos fluidos, se hace exhaustivo hincapié en la frecuencia de las colisiones, que debe ser lo suficientemente alta como para que el campo de velocidades del plasma sea parecido a una distribución de Maxwell-Boltzmann.

- **Modelo cinético:**

El modelo fluido es suficientemente preciso como para describir la mayoría de los fenómenos macroscópicos del plasma. Sin embargo, hay fenómenos en los que el tratamiento fluido es inadecuado. Para estos casos se utiliza lo que se denomina como ‘teoría cinética’ o modelo cinético, donde se trabaja con la ‘función de distribución de velocidad’. Dicha función es dependiente de la posición, la velocidad y el tiempo.

En la teoría fluida, las variables relevantes como la densidad, la velocidad del fluido y la presión son funciones de la posición y el tiempo. Esto es posible porque la distribución de velocidad de cada especie sobre la velocidad media es asumida como Maxwelliana en cualquier lugar. Por otro lado, en la hidrodinámica ordinaria de fluidos y gases las colisiones entre partículas son suficientemente frecuentes como para mantener una distribución Maxwelliana. Sin embargo, en plasmas de alta temperatura, las colisiones entre partículas son relativamente poco frecuentes y las desviaciones del equilibrio termodinámico local se mantienen durante largos periodos, por lo que hace falta una nueva teoría.

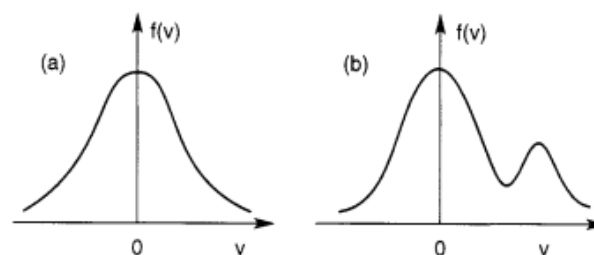


Figura 8. Ejemplos de a) distribución Maxwelliana y b) Distribución no Maxwelliana de velocidad.

Fuente de la imagen: [16]

Es importante destacar que los modelos cinéticos destacan por tener mayor coste computacional que los fluidos.

1.4.1.6 Ejemplos de plasma

Podemos distinguir una amplia variedad de ejemplos en los que la presencia del plasma se hace visible. Principalmente pueden clasificarse en función de su origen: natural o artificial (creado por el hombre). En la siguiente tabla se muestran los más comunes [15]:

Origen Natural	Origen artificial
Rayos	Señales de neón y tubos fluorescentes
Aurora boreal	Arcos de soldadura
Viento solar	Explosiones nucleares
Ionosfera de la tierra	Televisores de plasma
Estrellas, como el Sol	Lámparas
Cola de un cometa	Microelectrónica
Nebulosas interestelares	Motores para propulsión espacial

Tabla 1. Ejemplos de plasma según su origen

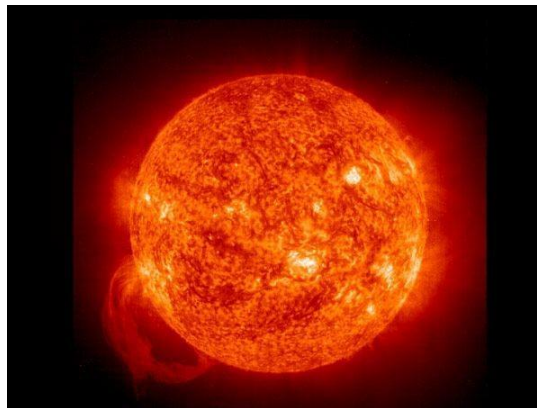


Figura 9. El Sol como ejemplo de plasma. Fuente de la imagen: [25]

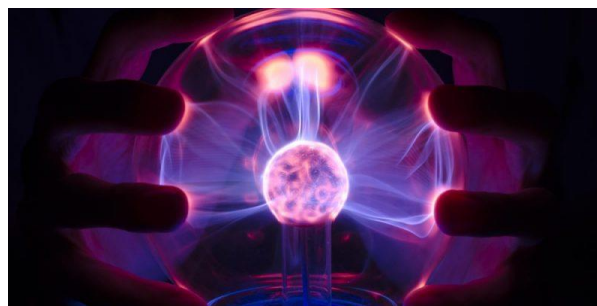


Figura 10. Lámpara de plasma. Fuente de la imagen:[26]



Figura 11. **Rayo.** Fuente de la imagen:[27]



Figura 12. **Aurora boreal.** Fuente de la imagen:[28]

1.4.2 El actuador de plasma DBD

En esta sección se describirán los principios básicos en los que están basados los actuadores DBD, su respuesta, su arquitectura y se discutirán las ventajas y limitaciones que éstos tienen respecto a otros actuadores.

1.4.2.1 Principio de funcionamiento y antecedentes

Los primeros estudios se realizaron utilizando descargas de corona de corriente continua (CC)[3], pero su baja flexibilidad en la configuración de los electrodos y el sistema de suministro hizo que quedaran obsoletos.

Hoy en día, la mayor parte de los actuadores aerodinámicos se basan en los actuadores de descarga de barrera dieléctrica DBD. Tal y como señalaremos posteriormente, este tipo de actuadores permite utilizar la geometría de varios electrodos, diferentes formas de onda de tensión de alimentación y evita la transición al régimen de arco debido a la presencia de un dieléctrico.

Los actuadores aerodinámicos de plasma están basados en la generación de una fuerza electrohidrodinámica (EHD) [8] debido a lo que conocemos como viento iónico. El plasma se genera entre un par de electrodos asimétricos cuando se aplica un voltaje muy alto de corriente alterna entre dichos electrodos. Así, las moléculas de aire se ionizan en las proximidades de lo que denominamos electrodo encapsulado y se aceleran a través del campo eléctrico. El momento se comunica al resto del flujo a través de la colisión de los iones acelerados con partículas neutras de la región [17].

Un ejemplo que muestra con claridad los resultados obtenidos mediante el uso de este tipo de actuadores puede observarse en la investigación realizada en [9]:

Se hace uso de un perfil NACA 0015 equipado con cuatro actuadores de plasma DBD. Dicho perfil puede observarse en la figura 13, donde las cuatro regiones plasmáticas son claramente visibles en la figura mediante las franjas moradas.

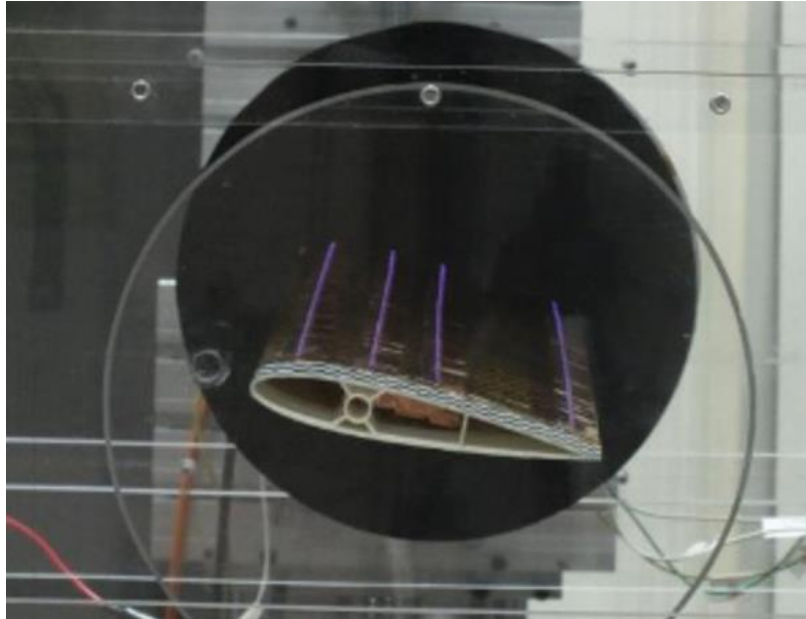


Figura 13. Perfil NACA 0015 con cuatro actuadores de plasma. Fuente de la imagen: [9]

Mediante esta configuración, los actuadores producen un chorro de pared tangencial dirigido aguas abajo, que produce la recuperación del flujo, evitando el desprendimiento prematuro de la corriente. Además, el experimento muestra cómo el actuador más efectivo es el que se coloca en el borde de ataque del perfil, justo antes de la región donde se produce la separación.

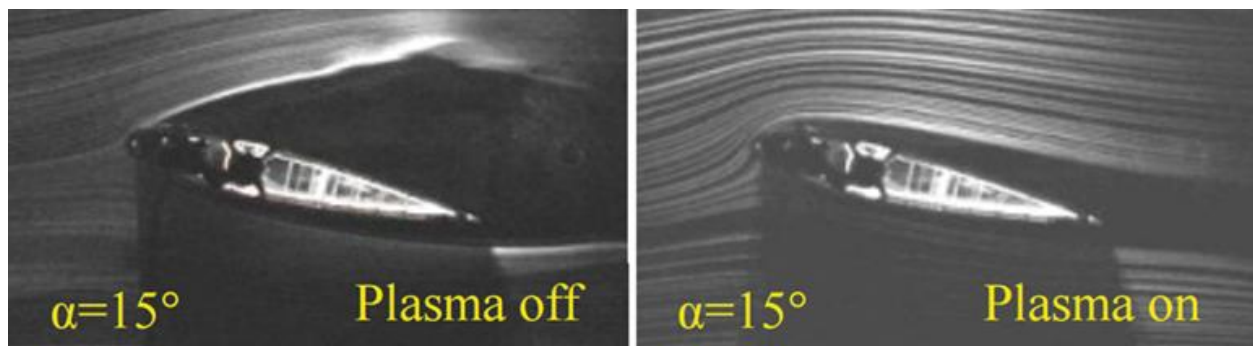


Figura 14. Estructura de flujo alrededor del perfil aerodinámico NACA 0015 con $Re=15000$ a la izquierda con el actuador apagado (OFF) y a la derecha con el actuador encendido (ON). Fuente de la imagen: [9]

Este y otros muchos experimentos han tenido resultados exitosos en el control del flujo y por tanto validan perfectamente su funcionamiento. La arquitectura que envuelve el actuador será el siguiente tema por tratar.

1.4.2.2 Arquitectura del actuador

La configuración mecánica del actuador aerodinámico de plasma se muestra en la siguiente imagen:

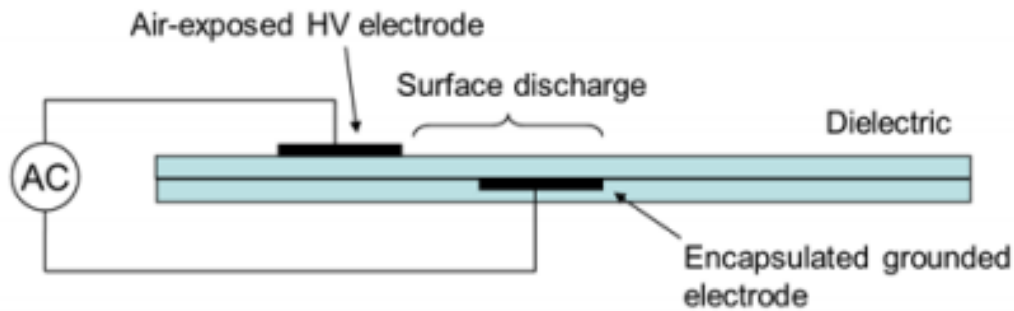


Figura 15. **Arquitectura de un actuador DBD.** Fuente de la imagen: [4]

El actuador de plasma DBD [4] consiste en un conjunto de electrodos finos (en nuestro caso son dos electrodos hechos de cinta de lámina de cobre) dispuestos a lo largo de una superficie. Uno de los electrodos está expuesto al aire, mientras que otro está encapsulado en dieléctrico, en este caso Kapton. Los electrodos están además desplazados uno sobre el otro en la dirección del flujo. Entre dichos electrodos se aplica una diferencia de potencial mediante corriente alterna que varía con el tiempo. El hecho de que se utilicen voltajes de corriente alterna es debido a que una corriente continua no es capaz de atravesar el dieléctrico. Por otro lado, el uso de material dieléctrico se debe a que producen limitaciones al paso de la corriente y evitan que se produzcan arcos eléctricos.

Los parámetros más importantes que intervienen en la disposición de los actuadores DBD son:

- Longitud y espesor de los electrodos
- Espesor de dieléctrico
- Desplazamiento entre los electrodos (gap)
- Tipo de dieléctrico
- Voltaje y frecuencia de la fuente de alimentación

La optimización de dichas variables ha sido extensamente estudiada por investigadores [10]. Por otro lado, además de los diferentes valores que pueden darse a los parámetros anteriores, multitud de configuraciones físicas pueden darse, tal y como se observa en las figuras 16, 17 y 18:

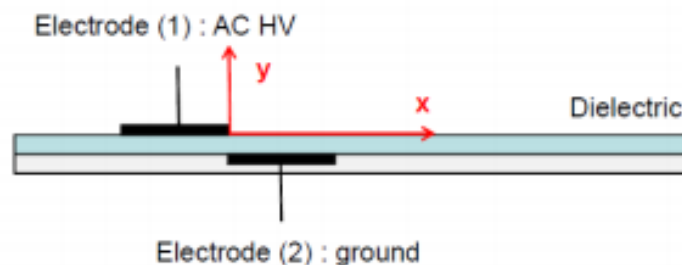


Figura 16. **Arquitectura de un único actuador DBD.** Fuente de la imagen: [4]

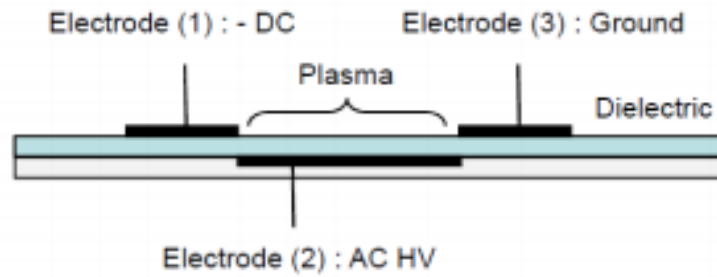


Figura 17. **Arquitectura de un actuador DBD doble.** Fuente de la imagen: [4]

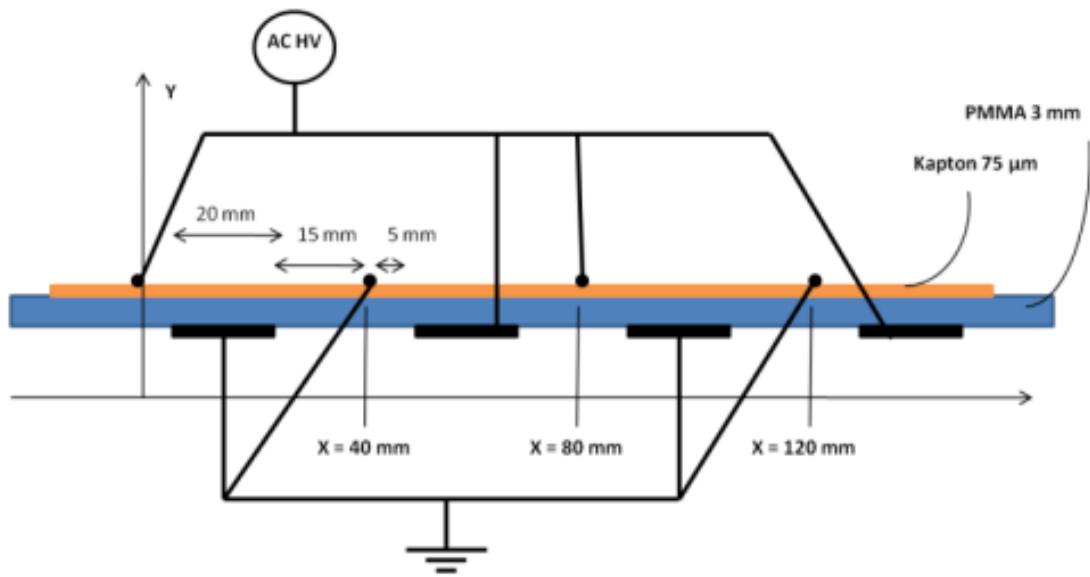


Figura 18. **Arquitectura de multiactuadores DBD basados en cuatro actuadores DBD únicos.** Fuente de la imagen: [4]

Por otro lado, también es interesante destacar lo que se denomina Actuador de plasma de electrodo encapsulado múltiple (MEE) [7]:

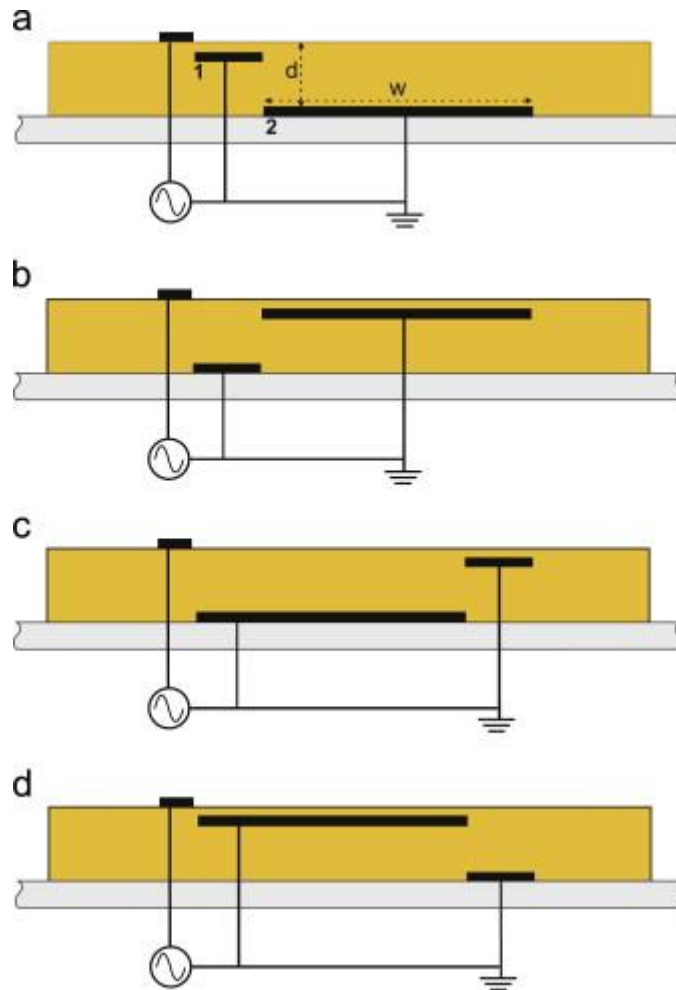


Figura 19. Arquitectura de diferentes actuadores de plasma MEE a)MEE5, b)MEE6, c)MEE7, d)MEE8. Fuente de la imagen: [7]

La diferencia de este actuador respecto a los anteriores es que, en lugar de tener un único electrodo encapsulado uniforme, tiene múltiples electrodos encapsulados que se distribuyen a lo largo de la capa dieléctrica. La profundidad máxima, el ancho total y la polaridad del electrodo encapsulado permanecen iguales en todas las configuraciones. En concreto, las configuraciones MEE constan de dos electrodos encapsulados. En la siguiente tabla se pueden observar los datos de las siguientes configuraciones:

Caso	d_1 (μm)	w_1 (mm)	d_2 (μm)	w_2 (mm)	Expuesto (w) (mm)
MEE5	180	10	540	40	5
MEE6	540	10	180	40	5
MEE7	540	40	180	10	5
MEE8	180	40	540	10	5

Tabla 2. Parámetros de los diferentes actuadores MEE. Fuente de la imagen: [7]

Por último, es importante hablar de la función que cumplen los dieléctricos en el actuador de plasma. El material dieléctrico utilizado en la fabricación de actuadores de plasma presenta un rol importante en la eficiencia del dispositivo y también en su durabilidad. Además, juega un papel fundamental en la actuación del propio actuador.

Se denomina dieléctrico a un material que tiene una baja conductividad eléctrica y que se caracteriza por formar dipolos eléctricos cuando es excitado mediante la acción de un campo eléctrico. Dicha propiedad puede cuantificarse mediante lo que se denomina permitividad relativa o constante dieléctrica del material.

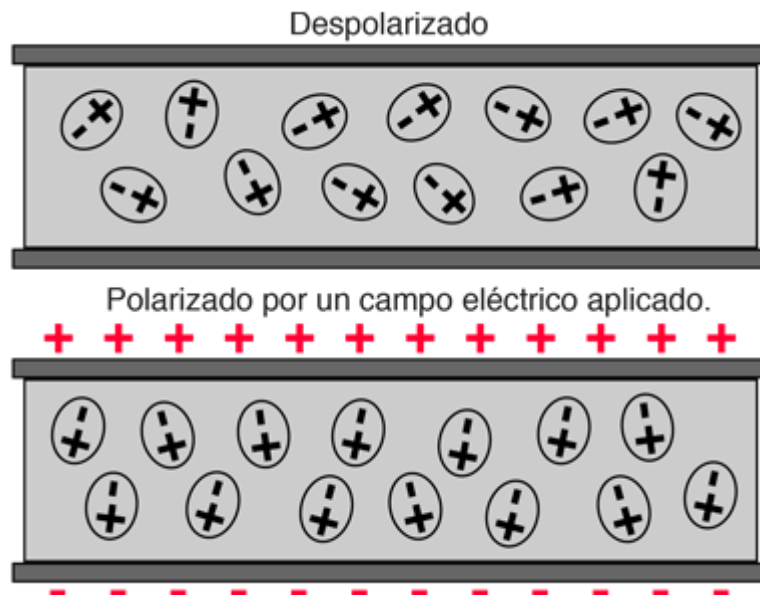


Figura 20. Efecto de un dieléctrico. Fuente de la imagen:[29]

Todos los materiales dieléctricos se pueden considerar aislantes, pero se vuelven conductores cuando se sobrepasa el campo de ruptura del dieléctrico, es decir, cuando la tensión supera la tensión máxima o rigidez dieléctrica. Además, es importante remarcar que todos los dieléctricos son aislantes, pero no todos los aislantes son dieléctricos.

La importancia de la presencia del dieléctrico es incuestionable. Como hemos comentado, el dieléctrico produce una oposición al paso de la corriente, y su principal objetivo es la de evitar la aparición de arcos eléctricos. En recientes investigaciones [12] se están estudiando los materiales utilizados como dieléctrico con el objetivo de minimizar la degradación de dichos materiales cuando son utilizados en actuadores de plasma

Se presenta en la siguiente tabla los principales dieléctricos utilizados en los actuadores de plasma junto con los valores, tanto de la constante dieléctrica como de la tensión máxima o rigidez dieléctrica.

Tipo de Dieléctrico	Constante de rigidez	Rigidez dieléctrica (KV/mm)
PLA (poly-lactic acid)	3.2	50-64
PIB (polyisobutylene) rubber	2.82	40
Kapton	2.5-3.5	154-303
Acetoxy silicone	3.6	20

Tabla 3. Tipos de dieléctricos y propiedades.

1.4.2.3 Ventajas y limitaciones

Los estudios realizados durante las últimas décadas, de los cuales sólo hemos señalado algunos, han demostrado la posibilidad de utilizar éstos como estrategias de control activo. Se resumirán en esta sección las ventajas y limitaciones que suponen el uso de estos dispositivos de plasma [8].

Ventajas:

- Posibilidad de ubicar estos actuadores en diferentes configuraciones y superficies, como cuerpos aerodinámicos.
- Interferencias aerodinámicas insignificantes cuando los dispositivos están inactivos.
- Tiempos de actuación altos (bajo delay).
- Bajo consumo energético.
- Bajo peso.
- Fáciles de construir.
- Baja complejidad mecánica
- Posibilidad de ajustar la estrategia de activación/desactivación en función de la condición dinámica del fluido en particular.

Limitaciones:

- Velocidad inducida por debajo de los 10 m/s, lo que obliga a utilizar varios actuadores con el objetivo de satisfacer las necesidades aeronáuticas
- Baja eficiencia de conversión eléctrica en cinética.
- Uso de alta tensión potencialmente peligrosa y generación de ruido electromagnético.
- Eficacia en el control de flujo para Reynolds por debajo de aproximadamente 3000-5000.

2. MODELADO DEL PROBLEMA

Se exponen en este capítulo las ecuaciones que gobiernan la física del actuador de plasma DBD. Se desarrollarán, por tanto, las formulaciones matemáticas que envuelven el problema eléctrico y el problema fluido. Previamente a ello es necesario poner en relevancia el modelo de Suzen-Huang, que es el que utilizaremos para realizar el modelado del problema.

2.1 Modelo de Suzen-Huang

En el caso de los actuadores de plasma [10], existen modelos de plasma autoconsistentes y modelos fenomenológicos para estimar la fuerza electrostática y la física del plasma subyacente. Durante un tiempo se trabajó una, dos o múltiples especies de plasma; trabajos más recientes durante la última década se han centrado en modelos de plasma de transporte de tres especies del plasma: electrones, iones positivos y negativos. La dinámica y la evolución de las especies de plasma con ciclos de voltaje positivo y negativo se han explorado con estos modelos de plasma autosuficientes, discutiendo las observaciones con las investigaciones experimentales sobre el flujo inducido debido al movimiento de las especies de plasma en el interior de un campo eléctrico externo.

El desarrollo del Modelo de Suzen-Huang (SH) en 2005, permitió resolver los modelos del plasma de una forma más ingenieril y no mediante una física del plasma detallada, con el fin de explorar diferentes aplicaciones prácticas de los actuadores DBD con menor capacidad computacional que los modelos de plasma autoconsistentes completos.

Es importante remarcar que el modelo SH no tiene en cuenta la dinámica de descarga, pues maneja modelos multiespecíficos más sofisticados. Su dependencia con la distribución experimental de carga hace que este modelo sea inadecuado para muchos investigadores que desean estudiar la dinámica de descarga asociada a los actuadores DBD; sin embargo, dicho modelo no pierde validez pues fue desarrollado principalmente para estudiar aplicaciones de control de flujo.

Desde entonces, han sido muchas las publicaciones realizadas en todo el mundo estudiando los diferentes aspectos del modelo SH y sus diferentes aplicaciones ingenieriles:

- Suzen et al. (2005) [30] demostró el modelo como un método fenomenológico efectivo al estudiar numéricamente la reducción de la separación del flujo a lo largo de una pala de turbina a baja presión. Luego mejoró el modelo para extender su aplicación a geometrías de actuador más complicadas.
- Belson et al (2012) [31] presentaron un estudio de DNS sobre control de la transición del flujo.
- Sato y cols.m [32] realizaron estudios LES de alta fidelidad sobre el control del flujo en un perfil NACA 0015 con un actuador de plasma DBD.
- Un estudio paramétrico detallado para investigar los impactos de los dos parámetros escalares del modelo escalar de SH, la longitud de Debye y la densidad de carga máxima, fue realizado por Skote e Ibrahim. Ibrahim et al. (2012) [33] realizaron un estudio de control de flujo con un actuador de chorro sintético de plasma lineal (L-PSJA) y encontró que su modelo de SH modificado proporcionó unos mejores valores de velocidad que la forma estándar del modelo SH de 2005.
- Skote et al. (2016) [34] publicaron un estudio con su modelo de SH modificado, que utiliza una L-PSJA para controlar los flujos de estela cilíndricos, que es un problema fundamental en la aerodinámica.
- El rendimiento de los actuadores de plasma también se ha probado numéricamente con el modelo SH en flujos de canal: Mahfoze et al. (2017) [35] presentan simulaciones del modelo de SH de la reducción de la resistencia aerodinámica de flujos en canales, al alinear los actuadores de plasma cerca de las paredes de los canales para proporcionar chorros orientados en sentido transversal.
- T. Brauner et al. (2016) [36] compararon los resultados de sus simulaciones en el actuador DBD realizados con los modelos SH y DNS de alto orden, con otro conjunto de resultados de simulación.

Así, la mayoría de las investigaciones validaron el modelo SH en sus respectivas aplicaciones, imponiendo al modelo SH como una herramienta potente, de bajo coste computacional y que evita el uso de modelos de sistemas complejos, alejados de las ecuaciones fluidas simples, como puede ser la formación de filamentación durante descargas.

El funcionamiento de los actuadores DBD, se puede explicar con una breve descripción de la velocidad inducida del viento iónico. La diferencia de potencial entre los dos electrodos induce un fuerte campo eléctrico entre ambos, haciendo que las partículas cargadas se muevan bajo la influencia de dicho campo eléctrico. El impulso de las partículas cargadas se transfiere a las moléculas neutras del fluido, transmitiendo el movimiento según la fuerza de Coulomb inducida. Este movimiento fluido se denomina viento iónico.

La zona de separación entre ambos electrodos (gap) es la región de máximo campo eléctrico, y como consecuencia, la región donde se produce la fuerza máxima de Coulomb. La componente vertical de esta fuerza hace que el fluido se dirija hacia la pared dieléctrica. Por otro lado, la componente horizontal de la fuerza empuja el fluido a lo largo de la pared dieléctrica, aguas abajo. El efecto combinado de ambas componentes produce un efecto de succión sobre la superficie de descarga, conectando de nuevo el flujo separado a la superficie del actuador.

De esta forma, el modelo SH imita una descarga de plasma inducida por el actuador DBD. Con la distribución de carga obtenida mediante dicho modelo, se calcula la fuerza electrohidrodinámica EHD por unidad de volumen, que posteriormente se incorpora como término dominante o fuente en las ecuaciones de Navier-Stokes.

2.2 Formulación del problema eléctrico

Una descripción matemática del modelo de Suzen-Huang es proporcionada en las referencias [30, 33, 44, 45]. Se presenta brevemente el modelo en este apartado. El objetivo es, como hemos comentado, la obtención de la fuerza electrohidrodinámica EHD por unidad de volumen. Dicha fuerza, despreciando fuerzas magnéticas, se puede expresar como:

$$\vec{F}_e = \rho_c \vec{E} \quad (1)$$

donde ρ_c representa la densidad de carga neta y \vec{E} el campo eléctrico. Por tanto, el cálculo de ρ_c y \vec{E} es el siguiente paso.

Por un lado, si las variaciones temporales del campo magnético resultan despreciables (hecho ocurre normalmente en el caso de plasmas), las ecuaciones de Maxwell determinan:

$$\nabla \times \vec{E} \approx 0 \quad (2)$$

lo que implica que el campo eléctrico deriva de un potencial, que se puede expresar como:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi \quad (3)$$

Según la ley de Gauss:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) = \rho_c \quad (4)$$

que también puede expresarse en función del potencial

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla\Phi) = -\rho_c \quad (5)$$

donde ε es la permitividad, que viene dada por $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, siendo ε_r la permisividad relativa del medio y ε_0 es la permitividad del vacío.

Por otro lado, puesto que las partículas de gas están débilmente ionizadas, podemos asumir que el potencial Φ se puede descomponer en dos partes: una debido al campo eléctrico externo, φ y la otra es debida a un potencial

debido a la densidad de carga neta en el plasma, ϕ . Por tanto:

$$\Phi = \phi + \varphi \quad (6)$$

Además, si asumimos que la longitud de Debye es pequeña y que la carga localmente en la pared no es grande, es posible considerar que:

- La distribución de partículas cargadas en el dominio se rigen por el potencial en la pared debido a la carga eléctrica en la pared, φ .
- El potencial asociado a campos eléctricos externos, ϕ , tiene poca influencia en la distribución de dichas partículas cargadas.

Por tanto, podemos escribir dos ecuaciones separadas en términos de estos dos potenciales, uno para el campo eléctrico externo debido al voltaje aplicado entre los dos electrodos:

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \nabla \phi) = 0 \quad (7)$$

y otra que representa el potencial debido a las partículas cargadas

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \nabla \varphi) = -\frac{\rho_c}{\epsilon_0} \quad (8)$$

El objetivo será por tanto, resolver ambas ecuaciones.

La ecuación (7) se resuelve para obtener el potencial eléctrico ϕ , usando el voltaje aplicado en los electrodos como condiciones de contorno. Las condiciones de contorno y el dominio computacional utilizados para resolver dicha ecuación pueden observarse en la figura 21:

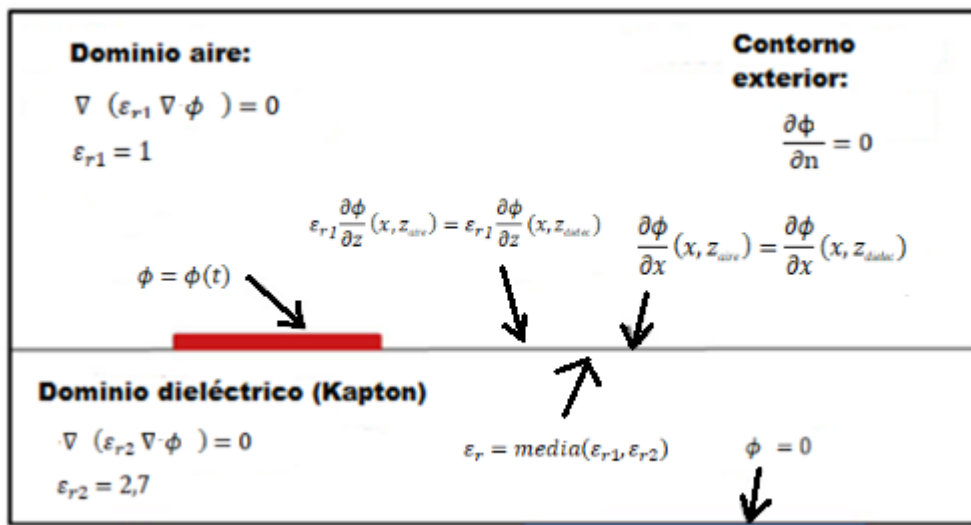


Figura 21. Dominio y condiciones de contorno para resolver el potencial ϕ . Fuente de la imagen: [10]

En dicha imagen puede observarse que la ecuación (7) se resuelve para los valores correctos de ϵ_r . En el caso del dominio fluido se ha tomado el valor del aire $\epsilon_r = 1$ y en el caso del dieléctrico se ha utilizado Kapton, con $\epsilon_r = 2.7$. Por otro lado, en la región de separación dieléctrico-aire, la media entre ϵ_{r1} y ϵ_{r2} debe ser usada con el objetivo de conservar el campo eléctrico.

Además, es necesario también considerar el potencial eléctrico debido a la carga neta en el plasma, por lo que

tenemos que resolver la ecuación (8).

La densidad de carga dentro del plasma en cualquier punto es:

$$\frac{\rho_c}{\varepsilon_0} = \frac{e(n_i - n_e)}{\varepsilon_0} = -\frac{en_0}{\varepsilon_0} \left[\exp\left(-\frac{e\varphi}{kT_i}\right) - \exp\left(\frac{e\varphi}{kT_e}\right) \right] \quad (9)$$

Donde n_i es la densidad de iones positivos, n_e , la densidad de electrones y n_0 la densidad de plasma neutro. T es la temperatura de las especies. Las densidades de las especies se obtienen mediante las siguientes ecuaciones:

$$n_e = n_0 \cdot \exp\left(\frac{e\varphi}{kT_e}\right) \quad (10)$$

$$n_i = n_0 \cdot \exp\left(\frac{-e\varphi}{kT_i}\right) \quad (11)$$

Haciendo un desarrollo en series de Taylor para la función exponencial e introduciendo la definición de longitud de Debye:

$$\frac{1}{\lambda_D} = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0} \left[\frac{1}{kT_i} + \frac{1}{kT_e} \right] \quad (12)$$

la ecuación (8) pasa a ser

$$\nabla \cdot (\varepsilon_r \nabla \rho_c) = \frac{\rho_c}{\lambda_D^2} \quad (13)$$

La ecuación (15) se resuelve para obtener la densidad neta de carga, ρ_c , sólo en el dominio del aire usando las condiciones de contorno, tal y como se observa en la figura 22.

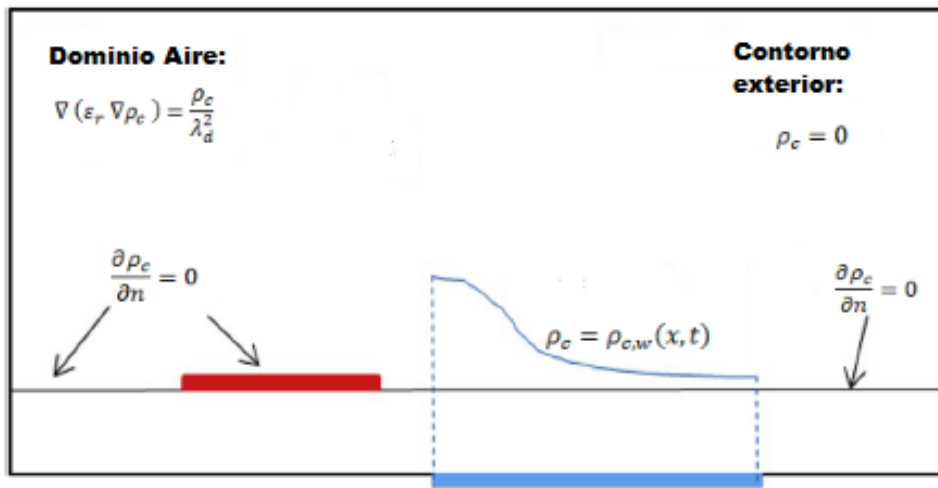


Figura 22. Dominio y condiciones de contorno que nos permiten calcular la densidad de carga ρ_c .

Fuente de la imagen: [10]

Como se puede observar, un gradiente normal e igual a cero es impuesto para la densidad de carga en las paredes excepto en la región que cubre el electrodo encapsulado y en las paredes exteriores. Sobre la superficie de dieléctrico que cubre el electrodo encapsulado, se establece una distribución de densidad de carga que varía a lo largo del electrodo y con el tiempo, tal y como se expresa en la siguiente ecuación:

$$\rho_{c,w}(x, t) = \rho_c^{max} G(x) f(t) \quad (14)$$

donde ρ_c^{max} es el máximo valor de densidad de, $G(x)$ es una distribución semi-Gaussiana que modela la distribución del plasma a lo largo del electrodo encapsulado y $f(t)$ representa la variación temporal del voltaje aplicado sobre los electrodos.

Resultados experimentales sugieren que la distribución semi-Gaussiana es:

$$G(x) = e^{\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} \quad (15)$$

con $x \geq 0$, donde μ es el parámetro de localización que indica el máximo en x , y σ es el parámetro de escala que determina el ratio de decrecimiento.

Tenemos, por tanto, todo lo necesario para calcular la fuerza electrohidrodinámica (EHD):

$$\vec{F}_e = \rho_c \vec{E} = -\rho_c \nabla \phi \quad (16)$$

Es importante remarcar que la ecuación (7) puede resolverse de forma adimensional. Igualmente, la ecuación (13) puede resolverse computacionalmente obteniendo la distribución de densidad de carga adimensional. Introduciendo las siguientes variables adimensionales:

$$x = \xi * L ; \quad z = \eta * L ; \quad \rho_c = \rho_c^* \rho_c^{MAX} f(t) ; \quad \phi = \phi^* \phi_{MAX} f(t) \quad (17)$$

donde ϕ_{max} es la amplitud del voltaje aplicado y ρ_c^{MAX} es la máxima densidad de carga, que se ha obtenido experimentalmente. Por otro lado, $f(t) = \text{Sen}(2\pi f_b * t)$ es la variación temporal del voltaje, que dependerá del tipo de onda que apliquemos, con f_b la frecuencia del voltaje aplicado, ρ_c^* es la distribución de densidad de carga adimensional y ϕ^* es la distribución de potencial eléctrico adimensional. Por último, L es un parámetro adimensional, que coincide con el valor del gap entre los electrodos. Definiendo el operador adimensional $\nabla = \frac{1}{L} \nabla^*$ las ecuaciones (7) y (13) se transforman en:

$$\nabla^* \cdot (\epsilon_r \nabla^* \phi^*) = 0 \quad (18)$$

$$\nabla^* \cdot (\epsilon_r \nabla^* \rho_c^*) = \rho_c^* \left(\frac{L}{\lambda_D}\right)^2 \quad (19)$$

Por tanto, los problemas que hay que resolver son:

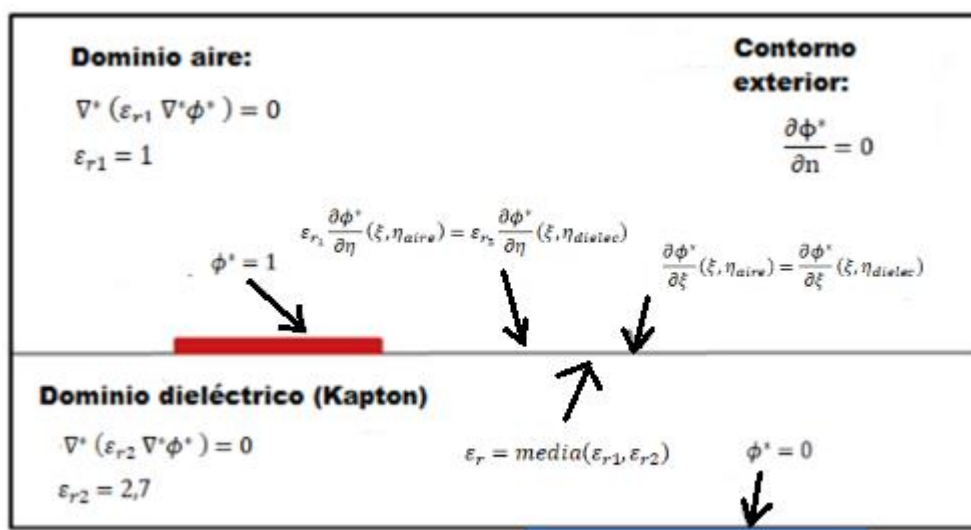


Figura 23. Dominio y condiciones de contorno para resolver el potencial ϕ^* adimensional

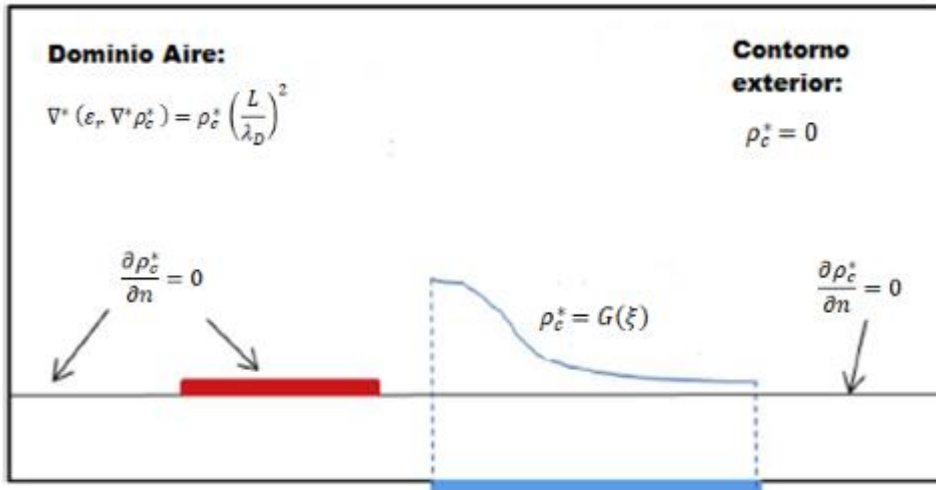


Figura 24. Dominio y condiciones de contorno que nos permiten calcular la densidad de carga adimensional ρ_c^*

Una vez que tengamos la distribución de potencial ϕ adimensional, el valor dimensional puede ser obtenido sin más que multiplicar por $\phi_{MAX} f(t)$. Análogamente, una vez que tengamos la distribución de densidad de carga adimensional, sólo será necesario multiplicar por el factor $\rho_c^{MAX} f(t)$.

2.3 Formulación del problema hidrodinámico

Resolvemos las ecuaciones de Navier Stokes en régimen incompresible utilizando el término $\vec{F}_e = \rho_c \vec{E}$ como motor del movimiento. El sistema de ecuaciones es:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (20)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V} + \rho_c \vec{E} \quad (21)$$

donde \vec{V} la velocidad del fluido, ρ es la densidad del fluido, P es la presión y μ la viscosidad dinámica. Si desarrollamos las ecuaciones, se obtiene

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (22)$$

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial t} + \rho V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \rho V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) + \rho_c E_x \quad (23)$$

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} + \rho V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + \rho V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \rho_c E_z \quad (24)$$

Las condiciones iniciales y las condiciones de contorno son:

- Condiciones iniciales:

Consideramos inicialmente el fluido en reposo

$$t = 0, \forall x \forall z \rightarrow V_x = V_z = 0$$

- Condiciones de contorno:

Las paredes son rígidas e inmóviles de anchura L y altura H

$$x = 0 \rightarrow V_x = V_z = 0$$

$$x = L \rightarrow V_x = V_z = 0$$

$$z = 0 \rightarrow V_x = V_z = 0$$

$$z = H \rightarrow V_x = V_z = 0$$

Tenemos en cuenta la siguiente adimensionalización:

$$V_x = u_0 * u ; V_z = u_0 * v ; x = \xi * L ; z = \eta * L ; t = \tau * \frac{L}{u_0} ; P = p * \rho u_0^2$$

$$E = E^* * \phi_{max} \frac{f(t)}{L} ; \rho_c = \rho_c^* * \rho_c^{MAX} f(t)$$

Sustituyendo las variables por las adimensionales y definiendo:

$$Re = \frac{\rho u_0 L}{\mu} ; D_c = \frac{\rho_c^{MAX} \phi_{max}}{\rho u_0^2} \quad (25)$$

las ecuaciones (22), (23) y (24) se convierten en:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + D_c f(\tau)^2 \rho_c^* E_x^* \quad (27)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial \xi} + v \frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right) + D_c f(\tau)^2 \rho_c^* E_z^* \quad (28)$$

El sistema de ecuaciones adimensional es, por tanto:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 u + D_c \rho_c^* \vec{E}^* f^2(\tau) \quad (30)$$

Por otro lado, es importante señalar cuáles son las condiciones iniciales y las condiciones de contorno en variables adimensionales. Por otro lado, es importante remarcar que, como es obvio, las ecuaciones (29) y (30) sólo se resuelven en el dominio fluido.

- Condiciones iniciales:

$$\tau = 0, \forall x \forall z \rightarrow u = v = 0$$

- Condiciones de contorno:

$$\xi = 0 \rightarrow u = v = 0$$

$$\xi = L/L_c \rightarrow u = v = 0$$

$$\eta = 0 \rightarrow u = v = 0$$

$$\eta = H/L_c \rightarrow u = v = 0$$

Es necesario calcular los valores de u_0 , D_c y Re . Para ello, comparamos el término de la fuerza electrohidrodinámica (motor del movimiento) con los términos convectivos de la ecuación de la cantidad de movimiento. Además, para ello sólo es necesario utilizar cualquiera de las dos ecuaciones de cantidad de movimiento. Así, teniendo en cuenta que:

$$\rho(\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) \sim \rho_c \vec{E} \quad (31)$$

Teniendo en cuenta que, por ejemplo, en la ecuación de cantidad de movimiento en x se cumple que:

$$\rho(\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) \sim \rho V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} \sim \rho \frac{u_0 \Delta V_x}{L} \sim \rho \frac{u_0^2}{L} \quad (32)$$

$$\rho_c \vec{E} \sim \rho_c^{MAX} f(t) \phi_{MAX} \frac{f(t)}{L} \sim \rho_c^{MAX} \phi_{max} \frac{f(t)^2}{L} \sim \rho_c^{MAX} \frac{\phi_{max}}{L} \quad (33)$$

De esta forma, combinando las expresiones (31), (32) y (33):

$$u_0 \sim \sqrt{\frac{\rho_c^{MAX}}{\rho} \phi_{max}} \quad (34)$$

Teniendo en cuenta las definiciones de Re y D_c , llegamos a:

$$Re = \frac{\rho u_0 L}{\mu} = \frac{\rho}{\mu} L \sqrt{\frac{\rho_c^{MAX}}{\rho} \phi_{max}} \quad (35)$$

$$D_c = \frac{\rho_c^{MAX} \phi_{max}}{\rho u_0^2} = 1 \quad (36)$$

Es el momento de resolver el problema hidrodinámico. Las ecuaciones (26), (27) y (28) forman un sistema de ecuaciones adimensional formado por 3 ecuaciones con 3 incógnitas: u, v, p . Estas ecuaciones se pueden simplificar en el caso 2D con la función de corriente Ψ .

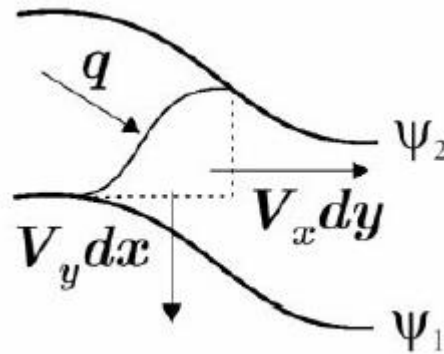


Figura 25. Definición de la función de corriente Ψ . Fuente de la imagen: [37]

Es importante tener en cuenta que el gradiente de esta función es normal a las líneas de corriente, es decir a las velocidades. Se cumple que:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = -v \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = u \quad (37)$$

Nótese que, con esta transformación, dos de las incógnitas del problema se expresan en función de la función de corriente Ψ .

Además, nótese que la ecuación de continuidad se satisface automáticamente, pues:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} - \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = 0 \quad (38)$$

Derivando la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en el eje η respecto a la coordenada ξ , y la del eje ξ respecto a la coordenada η , restándolas entre sí y aplicando la definición de la función Ψ obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\nabla^2 \Psi) + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla^2 \Psi) - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\nabla^2 \Psi) = \frac{1}{Re} \nabla^4 \Psi + D_c f(\tau)^2 \left(\frac{\partial \rho_c^*}{\partial \eta} E_\xi^* - \frac{\partial \rho_c^*}{\partial \xi} E_\eta^* \right) \quad (39)$$

Así, por tanto, tenemos una ecuación con una sola incógnita, que es Ψ .

Las condiciones iniciales y de contorno en variables adimensionales son:

$$\begin{aligned} \tau = 0 &\rightarrow \Psi = \Psi_0 \\ \xi = 0 &\rightarrow \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = 0 \\ \xi = L/L_c &\rightarrow \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = 0 \\ \eta = 0 &\rightarrow \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = 0 \\ \eta = H/L_c &\rightarrow \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

donde L_c es la longitud característica del fluido.

3. SIMULACIÓN DEL ACTUADOR DE PLASMA DBD

Se exponen en este capítulo, en primer lugar, los métodos numéricos utilizados. Posteriormente se aplicarán estos con el objetivo de resolver numéricamente tanto el problema eléctrico como el problema hidrodinámico, de forma que sea posible simular las actuaciones de nuestro dispositivo, el actuador de plasma DBD.

3.1. Metodo de colocación

En este capítulo se explicará el método numérico conocido como el método de colocación [38]. Se desarrollarán los fundamentos teóricos de dicho método para resolver distintos tipos de ecuaciones. Como ejemplos de aplicación se expondrá el método de colocación para resolver dos tipos de ecuaciones diferenciales que aparecen en nuestros problemas eléctrico e hidrodinámico: la ecuación de Poisson y la ecuación biarmónica.

De forma general, el método de colocación consiste en expresar las diferentes funciones incógnitas de un problema como combinaciones lineales de funciones conocidas. Los coeficientes desconocidos de dichas funciones se determinan sustituyendo las funciones y sus derivadas en las ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno que gobiernan el problema, imponiendo que éstas se verifiquen en un conjunto determinado de puntos del dominio de integración, los denominados puntos de colocación. De esta forma, llegamos a un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas que permite calcular los coeficientes y resolver, por tanto, el problema.

3.1.1. El método de colocación 1D

Consideremos un problema diferencial en una variable independiente cuya solución se desea conocer en un determinado intervalo $[a, b]$ y sean f_1, f_2, \dots, f_N los valores de la función incógnitas en los N puntos del intervalo, con $a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$. El objetivo es obtener una aproximación mediante la siguiente expansión:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N L_i(x) \cdot f_i \quad (41)$$

donde $L_i(x)$ son los polinomios interpolantes de Lagrange en cada $i \in \{1, \dots, N\}$, cumpliéndose:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad i = 1, \dots, N \quad (42)$$

siendo $L_i(x_j) = \delta_{ij} \forall i, j = 1, \dots, N$ y δ_{ij} la delta de Kronecker. Además, puede obtenerse de forma directa la expresión para la derivada de $L_i(x)$,

$$L'_i(x) = \sum_{k=1}^N \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_N)}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x - x_N)} \quad (43)$$

que permitirá calcular el valor de la derivada de $f(x)$

$$f'_i = \sum_{j=1}^N \left. \frac{dL_j(x)}{dx} \right|_{x=x_i} \quad f'_j = \sum_{j=1}^N L'_j(x_i) f_j \quad i = 1 \dots N \quad (44)$$

Llamando $g(x)$ al polinomio interpolador de Lagrange para la derivada y haciendo un proceso análogo:

$$g(x) = \sum_{j=1}^N L_j(x) \cdot f_j' \quad (45)$$

$$f_i'' = g(x_i)' = \sum_{j=1}^N L_j'(x_i) \cdot f_j' = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^N L_k'(x_j) \cdot f_j \right) L_j'(x_i) \quad (46)$$

Así, la función y sus derivadas pueden escribirse de una forma más sencilla en forma vectorial y matricial como:

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_N \end{bmatrix}, \quad \vec{f}' = \begin{bmatrix} f_1' \\ f_2' \\ \dots \\ f_N' \end{bmatrix}, \quad \vec{f}'' = \begin{bmatrix} f_1'' \\ f_2'' \\ \dots \\ f_N'' \end{bmatrix} \quad (47)$$

De forma compacta:

$$\vec{f}' = L_{px} \vec{f} \quad (48)$$

$$\vec{f}'' = L_{px} \vec{f}' = L_{px}^2 \vec{f}$$

Siendo

$$L_{px} = \begin{pmatrix} L_1'(x_1) & \dots & L_N'(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1'(x_N) & \dots & L_N'(x_N) \end{pmatrix} \quad (49)$$

Aplicando el mismo procedimiento, pueden obtenerse valores para aproximar las derivadas de cualquier orden n de $f(x)$ como

$$\vec{f}^n = L_{px}^n \cdot \vec{f} \quad (50)$$

Por otro lado, es importante elegir correctamente los N nodos x_1, x_2, \dots, x_N en el interior del dominio $[a, b]$, pudiendo ser éstos arbitrarios. Una buena elección de dichos nodos es crucial para que la función $f(x)$ sea una buena aproximación en el intervalo $[a, b]$ a la función incógnita. La mejor elección de los nodos se basa en utilizar los denominados nodos de Chebyshev, descubiertos por el matemático ruso Chebyshev, quien encontró que el polinomio de grado N debe ser elegido mediante la siguiente fórmula:

$$T_N(x) = 2xT_{N-1}(x) - T_{N-2}(x) \quad (51)$$

con $T_1(x) = 1$ y $T_2(x) = x$. Así, los puntos x_1, x_2, \dots, x_N deben coincidir con las raíces del polinomio $T_N(x)$ y cumplen:

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot \cos \left[\frac{\pi (i-1)}{N-1} \right] \quad i = 1 \dots N \quad (52)$$

Resulta interesante, además, comentar algunos aspectos acerca de los nodos de Chebyshev. Por un lado, los nodos de Chebyshev son aquellos que permiten obtener la mejor aproximación mediante polinomios de la solución. Tal y como se puede observar en la siguiente figura, la aproximación obtenida es mucho mejor que mediante nodos equiespaciados

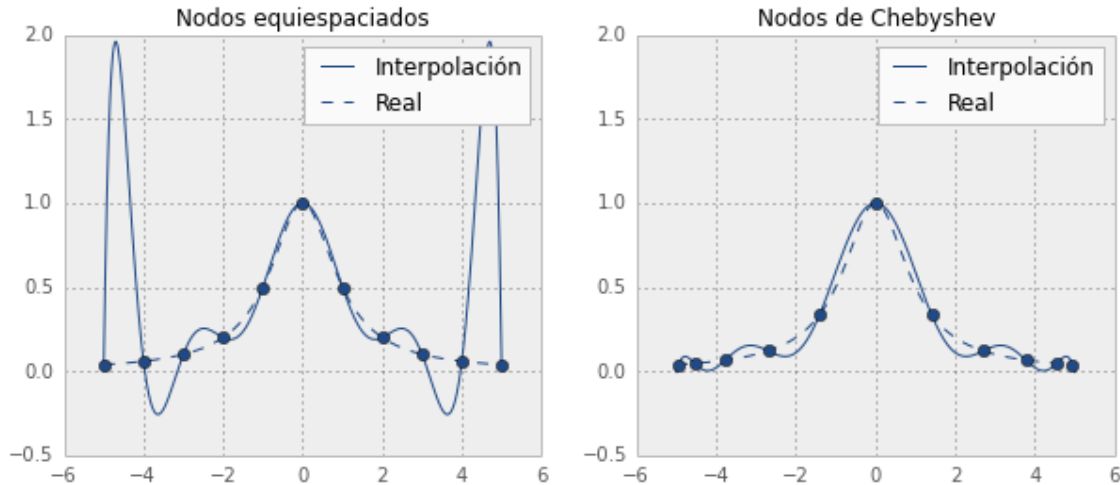


Figura 26. Comparación aproximación polinómica mediante nodos equiespaciados y mediante nodos de Chebyshev. Fuente de la imagen: [39]

Por otro lado, los nodos de Chebyshev no distan la misma distancia unos de otros, concentrándose en los extremos del intervalo. Esto es interesante, por ejemplo, cuando se estudia un fluido en las inmediaciones de una pared.

3.1.2 El método de colocación 2D: nodos de Chebyshev

Extenderemos en esta sección lo expuesto anteriormente para el caso de problemas bidimensionales.

Teniendo en cuenta una función cuyas variables naturales son x y z , $\Phi = \Phi(x, z)$, definida en un dominio con forma rectangular definido por $0 \leq x \leq L$ y $0 \leq z \leq H$ y con un total de $N_x \cdot N_z$ nodos, cumpliéndose $\{(x_m, z_n) : m=1, \dots, N_x, n = 1, \dots, N_z\}$ y que para cualquier valor de x se puede realizar una interpolación de Lagrange para la dependencia con z , de la forma:

$$\Phi(x, z) = \sum_{n=1}^{N_z} L_{z,n}(z) \cdot \Phi(x, z_n) \quad (53)$$

Haciendo uso de la fórmula de interpolación de Lagrange para cada una de las funciones de la coordenada x , $\Phi(x, z_n)$, llegamos a:

$$\Phi(x, z) = \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_z} [L_{x,m}(x)L_{z,n}(z)\Phi(x_m, z_n)] \quad (54)$$

siendo $\Phi(x_m, z_n)$ el valor que toma la función en el nodo (x_m, z_n) y $L_{z,n}$, $L_{x,m}$ los polinomios interpolantes de Lagrange para las variables x y z ,

$$L_{x,m}(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{N_x} \frac{x - x_j}{x_m - x_j} \quad L_{z,n}(z) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{N_z} \frac{z - z_j}{z_n - z_j} \quad (55)$$

Análogamente a como se hizo en problemas unidimensionales, se calculan las derivadas parciales de la función $\Phi(x, z)$ como:

$$\Phi_x(x, z) \equiv \frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial x} = \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_z} L'_{x,m}(x) \cdot L_{z,n}(z) \cdot \Phi(x_m, z_n) \quad (56)$$

$$\Phi_z(x, z) \equiv \frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial z} = \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_z} L_{x,m}(x) \cdot L'_{z,n}(z) \cdot \Phi(x_m, z_n) \quad (57)$$

Además, elegimos nodos de Chebyshev tanto en x como en z , por lo que los puntos en el interior de nuestro dominio serán de la forma:

$$x_i = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2} + \frac{x_{\min} - x_{\max}}{2} \cdot \cos \left[\frac{\pi (i - 1)}{N_x - 1} \right] \quad \text{donde } i = 1 \dots N_x \quad (58)$$

$$z_j = \frac{z_{\min} + z_{\max}}{2} + \frac{z_{\min} - z_{\max}}{2} \cdot \cos \left[\frac{\pi (j - 1)}{N_z - 1} \right] \quad \text{donde } j = 1 \dots N_z \quad (59)$$

Una vez que se realiza el mallado del dominio en el conjunto de $N_x \cdot N_z$ puntos (x_i, z_j) tal y como se muestra en la siguiente figura

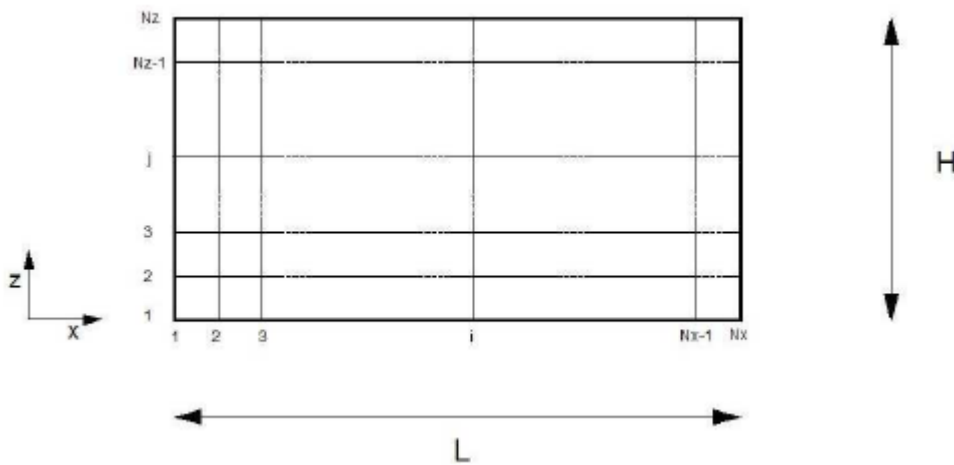


Figura 27. **Mallado del dominio de forma rectangular.** Fuente de la imagen: [39]

es conveniente, al igual que se hace en el método de los elementos finitos, hacer una asignación biunívoca mediante un único índice, de la forma:

$$(x_i, z_j) \leftrightarrow I = (i - 1) \cdot Nz + j \quad (60)$$

Obsérvese que mediante el uso de un único índice se pueden considerar los productos entre los interpolantes de Lagrange y sus derivadas como elementos de matrices D_x y D_z definidas como:

$$D_x(I, K) = L'_{x,m}(x_i)L_{z,n}(z_j) \quad y \quad D_z(I, K) = L_{x,m}(x_i)L'_{z,n}(z_j) \quad I, K = 1, \dots, N_t \quad (61)$$

con $I = (i - 1) \cdot Nz + j$, $K = (m - 1) \cdot Nz + n$ y $N_t = N_x \cdot Nz$ el número total de puntos. Simplificando, las expresiones de las derivadas parciales de $\Phi(x, z)$:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_I = \sum_{K=1}^{N_t} D_x(I, K) \cdot \Phi_K \quad (62)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_I = \sum_{K=1}^{N_t} D_z(I, K) \cdot \Phi_K \quad (63)$$

donde se han definidos los valores de la función en los nodos como $\Phi_K = \Phi(x_m, z_n)$. Utilizando notación vectorial y matricial

$$\vec{\Phi} \equiv \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \dots \\ \Phi_{N_t} \end{bmatrix}; \quad \vec{\Phi}_x \equiv \begin{bmatrix} \Phi'_{x1} \\ \Phi'_{x2} \\ \dots \\ \Phi'_{xN_t} \end{bmatrix}; \quad \vec{\Phi}_z \equiv \begin{bmatrix} \Phi'_{z1} \\ \Phi'_{z2} \\ \dots \\ \Phi'_{zN_t} \end{bmatrix} \quad (64)$$

y haciendo uso de las matrices D_x y D_z :

$$\vec{\Phi}_x = D_x \cdot \vec{\Phi} \quad \vec{\Phi}_z = D_z \cdot \vec{\Phi} \quad (65)$$

Análogamente al problema unidimensional, las derivadas sucesivas se pueden calcular como

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_{xx} &= D_x \cdot \vec{\Phi}_x = D_x^2 \vec{\Phi} \\ \vec{\Phi}_{zz} &= D_z \cdot \vec{\Phi}_z = D_z^2 \vec{\Phi} \\ \vec{\Phi}_{xz} &= D_x \cdot D_z \cdot \vec{\Phi} = D_z \cdot D_x \cdot \vec{\Phi} = \vec{\Phi}_{zx} \end{aligned} \quad (66)$$

3.1.3 El Método de colocación 2D: diferencias finitas

Análogamente al caso del Método de colocación 2D: nodos de Chebyshev, es posible también calcular las matrices de derivadas para el caso denominado como "diferencias finitas", haciendo uso de los polinomios de Lagrange según se ha implementado en las funciones auxiliares que aparecen en el Anexo 3: Funciones auxiliares. Se entenderá por el término "diferencias finitas" el considerar un entorno en cada punto de la malla que, distinto a Chebyshev, contiene un número de puntos menor que el de la malla, en nuestro caso 7, lo que permite hallar derivadas de cuarto orden con precisión de h^3 y matrices mucho más dispersas, lo que es especialmente conveniente cuando la malla en alguna dirección es grande.

En el caso de requerir más información, acudir a [46].

3.2. Resolución numérica del problema eléctrico

Se expone en este apartado la resolución numérica de la distribución de densidad de carga y de la distribución de potencial eléctrico. Un desarrollo más extenso se lleva a cabo en el Trabajo de Fin de Grado de M. A. Domínguez [43]. Presentamos aquí un breve resumen.

3.2.1 Aplicación del método de colocación: Ecuación de Poisson

La ecuación que controla la distribución de densidad de carga en el interior del dominio fluido y la distribución de potencial eléctrico en todo el actuador DBD es una ecuación de tipo Poisson. Previo a su resolución será necesario, por tanto, resolver una ecuación de Poisson de carácter general, hecho que se realiza a continuación.

Consideremos la ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = f(x, z) \quad (67)$$

y un dominio de longitud L y altura H (rectangular) donde el término fuente $f(x, z)$ es conocido. Supongamos que las condiciones de contorno que deben cumplirse en este dominio son las siguientes:

$$\Phi(0, z) = 0, \quad \Phi(x, 0) = 0, \quad \Phi(L, z) = 0, \quad \Phi(x, H) = 0 \quad (68)$$

Adimensionalizando:

$$\hat{x} = \frac{x}{H}, \quad \hat{z} = \frac{z}{H}, \quad \hat{\Phi} = \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (69)$$

siendo Φ_0 un valor de referencia de Φ y sustituyendo, llegamos a la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial \hat{z}^2} = \hat{f}(\hat{x}, \hat{z}) \quad (70)$$

donde $\hat{f} = \frac{fH^2}{\Phi_0}$. Por otro lado, las condiciones de contorno serán ahora:

$$\hat{\Phi}(0, \hat{z}) = 0, \quad \hat{\Phi}(\hat{x}, 0) = 0, \quad \hat{\Phi}\left(\frac{L}{H}, \hat{z}\right) = 0, \quad \hat{\Phi}(\hat{x}, 1) = 0 \quad (71)$$

Haciendo uso de una malla de N_t puntos siendo $N_t = N_x \times N_z$ y aplicando lo expuesto anteriormente en el apartado 3.1, se llega a:

$$(D_x^2 + D_z^2)\vec{\Phi} \equiv D_L \cdot \vec{\Phi} = \vec{f} \quad (72)$$

donde los vectores $\vec{\Phi}$ y \vec{f} contienen los valores de las funciones $\hat{\Phi}(\hat{x}, \hat{z})$ y $\hat{f}(\hat{x}, \hat{z})$ en los diferentes nodos de la malla $I=(i-1)N_z + j$.

Por último, antes de resolver el sistema algebraico al que hemos llegado, se deben introducir las condiciones de contorno del problema. Para ello, se modifica la matriz del sistema D_L y el vector \vec{f} , de forma que si el valor en un nodo I coincide con el de un nodo situado en algún lado de la cavidad, entonces todos los elementos de la fila I de la matriz D_L se anulan excepto el correspondiente a la diagonal, que toma el valor unidad, $D_L(I, I) = 1$ y se anula también la componente $\vec{f}(I)$ puesto que en este caso se ha impuesto que $\hat{\Phi}$ se anule en todo el contorno.

3.2.2 Resolución numérica de la distribución de densidad de carga

En este apartado se va a implementar un programa de MATLAB para la resolución numérica, utilizando el método de colocación explicado anteriormente, de la ecuación (19) y condiciones de contorno que se tienen en la figura 24, que gobiernan la distribución de densidad de carga adimensional en el actuador DBD, cuyo dominio es un dominio rectangular de altura H y longitud L. En nuestro caso, la distribución de densidad de carga adimensional se obtiene en el dominio fluido, pues en el dominio del dieléctrico ésta es nula. Por este motivo, se utilizará en lo que sigue el subíndice a (más adelante se utilizará el subíndice b para el dieléctrico).

La discretización del problema se lleva a cabo introduciendo un mallado mediante nodos de Chebyshev en la dirección z y mediante diferencias finitas en la dirección x:

$$\eta_j = \frac{\eta_{min,a} + \eta_{max,a}}{2} + \frac{\eta_{min,a} - \eta_{max,a}}{2} \cdot \cos \left[\frac{\pi (j - 1)}{N_z - 1} \right] \quad \text{donde } j = 1 \dots N_z \quad (73)$$

$$\xi_i = \xi_{min} + \frac{i - 1}{N - 1} (\xi_{max} - \xi_{min}) \quad \text{donde } i = 1 \dots N$$

donde ξ_{min} , ξ_{max} , $\eta_{min,a}$ y $\eta_{max,a}$ son valores conocidos. En nuestro caso, N no coincide exactamente con N_x , pues tenemos dividido el dominio en ξ en tres intervalos, cada uno con un número total de puntos igual a N_1 , N_2 y N_3 , respectivamente, cumpliéndose que $N_x = N_1 + N_2 + N_3$. Este espaciado en ξ será común tanto para el cálculo de la densidad de carga como del potencial eléctrico y el campo de velocidades. Tal y como se explicó en el apartado del método de colocación será necesario enumerar los nodos mediante índices simples, lo que puede hacerse mediante la expresión:

$$(\xi_i, \eta_{j_a}) \leftrightarrow I_a = (i - 1) \cdot N_{z_a} + j \quad (74)$$

lo que permite expresar el producto entre polinomios interpolantes y sus derivadas como elementos de matrices, y con ello poder escribir el problema en forma vectorial. Una vez se ha definido la malla para la discretización especial, se explica cómo se aplica el método de colocación visto en el apartado 3.1 y su posterior aplicación en el apartado 3.2.1.

Como sabemos, la expresión que gobierna la distribución de densidad de carga es la siguiente:

$$\nabla^* \cdot (\epsilon_r \nabla^* \rho_c^*) = \rho_c^* \left(\frac{\lambda_D}{L} \right)^2 \quad (75)$$

Ésta se puede reescribir como:

$$\epsilon_r \nabla^{*2} \rho_c^* = \epsilon_r \left(\frac{\partial^2 \rho_c^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \rho_c^*}{\partial \eta^2} \right) = \rho_c^* \left(\frac{\lambda_D}{L} \right)^2 \quad (76)$$

Para discretizar la ecuación de Poisson, definimos la distribución de densidad de carga adimensional en los $N_{ta} = N_{xa} * N_{za}$ nodos como:

$$\rho_c^*(\xi, \eta_a) \equiv \rho_c^*(I) \equiv \overrightarrow{\rho_c^*} \quad (77)$$

donde $\overrightarrow{\rho_c^*}$ designa, en la notación usada en el Código de MATLAB, el vector de dimension $N_{ta} \times 1$, cuyas componentes I albergarán los valores de $\rho_c(\xi, \eta_a)$ en el nodo I. Teniendo en cuenta lo expuesto en la aplicación del método de colocación para la ecuación de Poisson, la discretización correspondiente al operador laplaciano adimensional es:

$$D_{L_a}^* = (D_{\xi}^2 + D_{\eta_a}^2) \quad (78)$$

Por tanto, tenemos la siguiente expresión:

$$\nabla^{*2} \rho_c^*|_I = \sum_{K_a=1}^{N_t} D_{L_a}^*(I_a, K_a) \rho_c^*(K_a) \equiv (D_{L_a} \vec{\rho}_c^*)_{I_a} \quad (79)$$

Así, llegamos a:

$$\varepsilon_r D_{L_a}^* \vec{\rho}_c^* = \vec{\rho}_c^* \left(\frac{\lambda_D}{L} \right)^2 \quad (80)$$

que se puede reescribir como:

$$(\varepsilon_r D_{L_a}^* - Eyye(N_{ta}) \left(\frac{\lambda_D}{L} \right)^2) \vec{\rho}_c^* = 0 \quad (81)$$

donde $Eyye(N_{ta})$ es la matriz identidad de orden N_{ta} . Por tanto, el sistema a resolver es:

$$A \vec{\rho}_c^* = \vec{b} \quad (82)$$

donde obviamente, $A = (\varepsilon_r D_{L_a}^* - Eyye(N_{ta}) \left(\frac{\lambda_D}{L} \right)^2)$ y $\vec{b} = \vec{0}$.

El último paso será, antes de resolver el sistema de ecuaciones algebraico que nos permitirá obtener la solución, introducir las condiciones de contorno de la figura 24 tanto para la matriz del sistema A como en el término fuente \vec{b} . Las modificaciones que deben realizarse para poder implementar las condiciones de contorno son:

- Si el índice I_a coincide con el de un nodo perteneciente a una de las paredes verticales o a la pared horizontal superior del dominio, todos los elementos de la fila I_a en la matriz A se anulan, excepto el componente correspondiente a la diagonal, que toma 1. También se anula la componente I_a del vector \vec{b} debido a que se impone que la densidad de carga se anule en los extremos del dominio.
- Si el índice I_a coincide con el de un nodo perteneciente a la pared horizontal inferior, que se corresponde con la interfase dieléctrico-fluido, se debe cumplir que la derivada de la densidad de carga adimensional respecto a la dirección normal a la pared sea nula en toda la superficie excepto en la superficie correspondiente a la proyección del electrodo embebido, donde se impone que la densidad de carga adimensional se distribuye como una distribución semi-gaussiana. Así, se impone que toda la fila I_a de la matriz A sea igual que la fila I_a de la matriz D_{η_a} y que el término fuente en la componente I_a sea igual al valor de la derivada, en este caso 0.
- Por último, si I_a coincide con el de un nodo perteneciente a la superficie correspondiente al electrodo embebido, se impone que la fila I de la matriz A sea nula excepto en la diagonal, donde valdrá 1. La fila I_a del término fuente valdrá $G(\xi)$.

3.2.3 Resolución numérica de la distribución de potencial eléctrico

En este apartado se va a implementar un programa de MATLAB para la resolución numérica, utilizando el método de colocación explicado anteriormente, de la ecuación (18) y condiciones de contorno que se tienen en la figura 23, que gobiernan la distribución de potencial eléctrico adimensional en el actuador DBD. A diferencia de la distribución adimensional de densidad de carga que únicamente se calculaba en el dominio fluido, el potencial eléctrico deberá calcularse tanto en la región fluida como en la dieléctrica, pues presentan diferente permitividad relativa. En nuestro caso, el dominio será un dominio rectangular que acopla la región fluida,

comprendida entre $\xi_{min}, \xi_{max}, \eta_{min,a}$ y $\eta_{max,a}$ y la región dieléctrica, delimitada por $\xi_{min}, \xi_{max}, \eta_{min,b}$ y $\eta_{max,b}$

Al igual que antes, la discretización del problema se lleva a cabo introduciendo un mallado mediante nodos de Chebyshev en la dirección z y mediante diferencias finitas en la dirección x tanto en la región fluida (subíndice a) como en la región dieléctrica (subíndice b):

$$\eta_{j,a,b} = \frac{\eta_{min,(a,b)} + \eta_{max,(a,b)}}{2} + \frac{\eta_{min,(a,b)} - \eta_{max,(a,b)}}{2} \cdot \cos \left[\frac{\pi (j-1)}{N_z - 1} \right] \quad \text{donde } j = 1 \dots N_{z,a,b} \quad (83)$$

$$\xi_i = \xi_{min} + \frac{i-1}{N-1} (\xi_{max} - \xi_{min}) \quad \text{donde } i = 1 \dots N$$

donde $\xi_{min}, \xi_{max}, \eta_{min,(a,b)}$ y $\eta_{max,(a,b)}$ son, de nuevo, valores conocidos. Tal y como se explicó en el apartado del método de colocación será necesario enumerar los nodos mediante la relación biunívoca, que se hace mediante la expresión:

$$(\xi_{i,a,b}, \eta_{j,a,b}) \leftrightarrow I_{a,b} = (i-1) \cdot N_{z,a,b} + j \quad (84)$$

lo que permite escribir el problema en forma vectorial. Una vez se ha definido la malla para la discretización especial, se explica cómo se aplica el método de colocación.

La expresión que gobierna la distribución adimensional de potencial eléctrico es, como sabemos, la siguiente:

$$\nabla^* \cdot (\epsilon_r \nabla^* \phi_{a,b}^*) = 0 \quad (85)$$

Dicha expresión, se puede reescribir como:

$$\nabla^{*2}(\phi^*) = \frac{\partial^2 \phi_{a,b}^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi_{a,b}^*}{\partial \eta^2} = 0 \quad (86)$$

Para discretizar dicha ecuación, definimos la distribución de potencial eléctrico adimensional en los $N_{t,a,b} = N_x * N_{z,a,b}$ nodos como:

$$\phi_{a,b}^*(\xi, \eta_{a,b}) \equiv \phi^*(I_{a,b}) \equiv \overrightarrow{\phi_{a,b}} \quad (87)$$

donde $\overrightarrow{\phi_{a,b}}$ designa, en la notación usada en el Código de MATLAB, el vector de dimension $N_{t,a,b} \times 1$, cuyas componentes I albergarán los valores de $\phi_{a,b}^*(\xi, \eta_{a,b})$. De nuevo, la discretización correspondiente al operador laplaciano adimensional es:

$$D_{L,a,b}^* = (D_\xi^2 + D_{\eta_{a,b}}^2) \quad (88)$$

Por lo que

$$\nabla^{*2} \phi_{a,b}^*|_I = \sum_{K_{a,b}=1}^{N_{t,a,b}} D_L^*(I_{a,b}, K_{a,b}) \phi_{a,b}^*(K_{a,b}) \equiv (D_{L,a,b}^* \overrightarrow{\phi_{a,b}^*})_{I_{a,b}} \quad (89)$$

Así, llegamos a

$$D_{L,a,b}^* \overrightarrow{\phi_{a,b}^*} = 0 \quad (90)$$

Por tanto, el sistema a resolver es

$$A_{a,b} \overrightarrow{\phi_{a,b}^*} = \overrightarrow{b_{a,b}} \quad (91)$$

donde $A_{a,b} = D_{L_{a,b}}^*$ y $\overrightarrow{b_{a,b}} = \vec{0}$

De esta forma, la resolución del problema podrá realizarse por dos vías:

- Imponer las condiciones de contorno en el dominio fluido, en el dominio del dieléctrico y en la interfase, resolviendo ambos sistemas de ecuaciones por separado.

$$\begin{aligned} A_a \overrightarrow{\phi_a^*} &= \overrightarrow{b_a} \\ A_b \overrightarrow{\phi_b^*} &= \overrightarrow{b_b} \end{aligned} \quad (92)$$

- Imponer las condiciones de contorno en el dominio fluido, en el dominio del dieléctrico y en la interfase, acoplando las dos regiones para resolver el problema completo con un solo sistema, mediante matrices que a su vez tengan en cuenta los aspectos asociados a la región fluida (A_a), aquellos asociados a la región dieléctrica (A_b) y además la interacción entre ambos medios a través de la interfase común (B_a y B_b), esto es, un sistema del tipo:

$$\begin{bmatrix} A_a & B_a \\ B_b & A_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{\phi_a^*} \\ \overrightarrow{\phi_b^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{b_a} \\ \overrightarrow{b_b} \end{bmatrix} \quad (93)$$

En nuestro caso, la última opción ha sido la desarrollada en este estudio.

Por último, será necesario imponer las condiciones de contorno de la figura 23. Las modificaciones que deben realizarse para poder implementar las condiciones de contorno son:

- Si $I_{a,b}$ coincide con un nodo perteneciente a las paredes horizontales o verticales excepto en la interfase entre ambos dominios, se debe cumplir que la derivada del potencial eléctrico adimensional respecto a la dirección normal a la pared sea nulo en toda la superficie. Para ello la fila $I_{a,b}$ de las matrices $A_{a,b}$ se impone que sea igual a la fila I de las matrices $D_{\xi_{a,b}}$ (en las paredes verticales) y $D_{\xi_{a,b}}$ (en las paredes horizontales), mientras que la componente $I_{a,b}$ del término fuente $b_{a,b}$ se impone que sea igual al valor de la derivada, en este caso 0.
- Si $I_{a,b}$ coincide con un nodo perteneciente al electrodo expuesto, se anula la fila $I_{a,b}$ de la matriz $A_{a,b}$ excepto en la diagonal, que vale 1. Por otro lado, la componente $I_{a,b}$ del término fuente $b_{a,b}$ se hace idénticamente 1.
- Si $I_{a,b}$ coincide con un nodo perteneciente al electrodo embebido, se anula la fila $I_{a,b}$ de la matriz $A_{a,b}$ excepto en la diagonal, que vale 1. Por otro lado, la componente $I_{a,b}$ del término fuente $b_{a,b}$ se hace 0.
- Por último, en la interfase será necesario imponer dos condiciones: la continuidad del campo eléctrico en la dirección ξ y la continuidad en la dirección η del producto $\varepsilon_{a,b} E_\eta$ siendo $\varepsilon_{a,b}$ la permitividad de cada uno de los dominios. Para ello, se hace lo siguiente: la fila I_a de la matriz A_a se hace igual a la fila I_a de la matriz D_{ξ_a} , la fila I_b de la matriz B_a se hace igual a la fila I_b de la matriz $-D_{\eta_a}$ y por último, se anula la componente I_a del término b_a . Posteriormente, se hace lo siguiente: la fila I_b de la matriz A_b se hace igual a la fila I_a de la matriz $\varepsilon_b D_{\eta_b}$, la fila I_b de la matriz B_b se hace igual a la fila I_b de la matriz $-\varepsilon_a D_{\eta_a}$ y por último, se anula la componente I_b del término b_b .

3.2.4 Programación del problema eléctrico en MATLAB

La lógica empleada en la simulación del problema eléctrico con el objetivo de calcular la distribución de densidad de carga, la distribución de potencial eléctrico y la fuerza electrohidrodinámica es la siguiente:

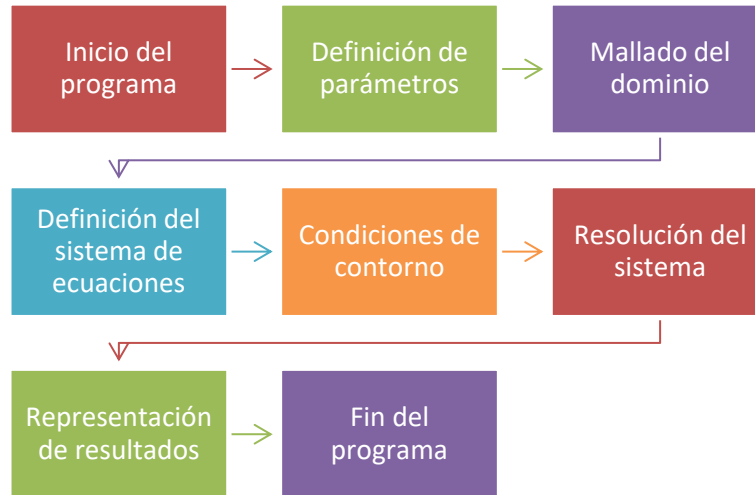


Figura 28. Lógica empleada en MATLAB para resolver el problema eléctrico

Puesto que este estudio se ha centrado en los aspectos hidrodinámicos del Actuador DBD, se adjuntan en el Anexo de programas de MATLAB los programas utilizados para el cálculo de la distribución de densidad de carga, la distribución de potencial eléctrico y la fuerza electrohidrodinámica. En la sección 3.3.3 se explicará de una forma exhaustiva la lógica empleada en la simulación del problema hidrodinámico, con el fin de dejar constancia de la transparencia del Código utilizado, a diferencia de los softwares comerciales utilizados en las diferentes bibliografías aportadas.

3.3. Resolución numérica del problema hidrodinámico

3.3.1 Aplicación del método de colocación: Ecuación Biharmónica

La ecuación que rige la distribución de la función de corriente que nos permite calcular el campo de velocidades en el dominio fluido es una ecuación biarmónica. Previo a su resolución será necesario, por tanto, resolver una ecuación biarmónica de carácter general, hecho que se recoge a continuación.

Consideremos la siguiente ecuación biarmónica:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} = f(x, z) \quad (94)$$

y un dominio de longitud L y altura H . De nuevo, el término fuente $f(x, z)$ es conocido, y las condiciones de contorno genéricas a resolver son:

$$\begin{aligned} \Phi(0, z) &= \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right), & \Phi(L, z) &= -\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \\ \Phi(x, 0) &= \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), & \Phi(x, H) &= -\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ \Phi_x(0, z) &= 0, & \Phi_x(L, z) &= 0, & \Phi_z(x, 0) &= 0, & \Phi_z(x, H) &= 0 \end{aligned} \quad (95)$$

Mediante un proceso análogo, adimensionalizamos con las siguientes variables:

$$\hat{x} = \frac{x}{H}, \quad \hat{z} = \frac{z}{H}, \quad \hat{\Phi} = \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (96)$$

Por tanto, llegamos a:

$$\frac{\partial^4 \hat{\Phi}}{\partial \hat{x}^4} + \frac{\partial^4 \hat{\Phi}}{\partial \hat{x}^2 \partial \hat{z}^2} + \frac{\partial^4 \hat{\Phi}}{\partial \hat{z}^4} = \hat{f}(\hat{x}, \hat{z}) \quad (97)$$

donde $\hat{f} = f \frac{H^4}{\Phi_0}$. Por otro lado, las condiciones de contorno son ahora:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(0, \hat{z}) &= \cos(\pi \hat{z}), & \hat{\Phi}\left(\frac{L}{H}, \hat{z}\right) &= -\cos(\pi \hat{z}) \\ \hat{\Phi}(\hat{x}, 0) &= \cos\left(\frac{\pi H \hat{x}}{L}\right), & \hat{\Phi}(\hat{x}, 1) &= -\cos\left(\frac{\pi H \hat{x}}{L}\right) \\ \hat{\Phi}_x(0, \hat{z}) &= 0, & \hat{\Phi}_x\left(\frac{L}{H}, \hat{z}\right) &= 0, & \hat{\Phi}_z(\hat{x}, 0) &= 0, & \hat{\Phi}_z(\hat{x}, 1) &= 0 \end{aligned} \quad (98)$$

De nuevo, introducimos un mallado de N_t puntos, $N_t = N_x \cdot N_z$ y, aplicando lo expuesto en el apartado 3.1, nuestra ecuación se discretiza como:

$$\nabla^4 \vec{\Phi} = \nabla^2 (\nabla^2 \vec{\Phi}) = D_L^2 \vec{\Phi} = \vec{f} \quad (99)$$

donde los vectores $\vec{\Phi}$ y \vec{f} contienen los valores de $\hat{\Phi}(\hat{x}, \hat{z})$ y $f(\hat{x}, \hat{z})$ en los nodos I de la malla y D_L^2 es la matriz del operador biarmónico $D_L^2 = (D_x^2 + D_z^2) \cdot (D_x^2 + D_z^2) = (D_x^4 + D_x^2 D_z^2 + D_x^2 D_z^2 + D_z^4)$

Análogamente al apartado 3.2.1, antes de resolver nuestro sistema algebraico se deberán introducir las condiciones de contorno del problema que debe cumplir la función $\hat{\Phi}$:

- Las condiciones de contorno correspondientes a valores que se imponen sobre el contorno, se imponen de la misma forma que en el apartado 3.2.1: se modifica la matriz de nuestro sistema D_L^2 y el término fuente \vec{f} de forma que, si el valor en I coincide con el de un nodo situado en el contorno, entonces todos los elementos de la fila I de la matriz D_L^2 son 0 excepto el correspondiente a la diagonal, que toma valor 1, $D_L^2(I, I)=1$; por otro lado, se impone $\vec{f}(I) = \pm \cos(\pi \hat{z})$ si el nodo pertenece al contorno vertical, o $\vec{f}(I) = \pm \cos\left(\frac{\pi H \hat{x}}{L}\right)$ si el nodo pertenece al contorno horizontal.
- Para imponer las condiciones de contorno donde se anula la derivada, se hace uso del subcontorno adyacente a las diferentes paredes del dominio:
 - (a) Si I coincide con un nodo perteneciente al subcontorno adyacente a la pared vertical izquierda, se anula primero toda la fila I en la matriz del sistema D_L^2 y luego se sustituye la fila I de D_L^2 por la fila de la matriz D_x correspondiente al nodo $K=I-Nz$ de la pared vertical izquierda, es decir, se hace $D_L^2(I, 1:N_t) = D_x(I - Nz, 1:N_t)$. Para el margen vertical derecho, el cambio sería $D_L^2(I, 1:N_t) = D_x(I + Nz, 1:N_t)$. Además, se impone el valor del término independiente en la componente I según la condición de contorno elegida, tanto en el margen vertical izquierdo como en el derecho, en este caso, $\vec{f}(I) = 0$.
 - (b) Si I coincide con un nodo perteneciente al subcontorno adyacente a la pared horizontal inferior, se anula primero toda la fila I en la matriz del sistema D_L^2 y luego se sustituye la fila I de D_L^2 por la fila de la matriz D_z correspondiente al nodo $K=I-1$ de la pared horizontal inferior, es decir, se hace $D_L^2(I, 1:N_t) = D_z(I - 1, 1:N_t)$. Se procede de forma análoga para la pared horizontal superior, con el cambio $D_L^2(I, 1:N_t) = D_z(I + 1, 1:N_t)$. Finalmente, se impone el valor de la componente I en el término independiente en función de la condición de contorno impuesta, en este caso $\vec{f}(I) = 0$

3.3.2 Resolución numérica de la distribución de función de corriente

En este apartado se va a implementar un programa en MATLAB para la resolución numérica, mediante el método de colocación, de la ecuación (37) y las condiciones de contorno (38), que gobiernan el flujo 2D de un fluido alojado en una cavidad de anchura L y altura H.

La discretización del problema se realiza mallando mediante nodos de Chebyshev en la dirección z y mediante diferencias finitas en la dirección x:

$$\eta_j = \frac{\eta_{min,a} + \eta_{max,a}}{2} + \frac{\eta_{min,a} - \eta_{max,a}}{2} \cdot \cos\left[\frac{\pi(j-1)}{N_z - 1}\right] \quad \text{donde } j = 1 \dots N_{z_a} \quad (100)$$

$$\xi_i = \xi_{min} + \frac{i-1}{N-1} (\xi_{max} - \xi_{min}) \quad \text{donde } i = 1 \dots N$$

donde ξ_{min} , ξ_{max} , $\eta_{min,a}$ y $\eta_{max,a}$ son valores conocidos. Tal y como se explicó en el apartado del método de colocación será necesario enumerar los nodos mediante índices simples, lo que puede hacerse mediante la expresión:

$$(\xi_i, \eta_{j_a}) \leftrightarrow I_a = (i-1) \cdot N_{z_a} + j \quad (101)$$

Una vez se ha definido la malla para la discretización especial, se explica cómo se aplica el método de colocación visto en el apartado 3.1 y su posterior aplicación en el apartado 3.3.1. Para ello, los valores en los N_{t_a} nodos, $N_{t_a} = N_x \cdot N_{z_a}$, de la función de corriente adimensional, se expresa como:

$$\Psi(\xi, \eta_a, \tau) \equiv \Psi(I_a, \tau) \equiv \overline{\Psi}^* \quad (102)$$

donde $\overline{\Psi^*}$ designa, en la notación usada en el Código de MATLAB, el vector de dimension $N_i \times 1$, cuyas componentes I_a albergarán los valores de $\Psi(\xi, \eta_a, \tau)$ en el nodo I_a para un instante de tiempo adimensional determinado τ . Además, hacienda uso de la misma notación, se discretizan las derivadas parciales presentes en la ecuación como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} |_{I_a} &= \sum_{K_a=1}^{N_{t_a}} D_{\xi}(I_a, K_a) \Psi^*(K_a, \tau) \equiv (D_{\xi} \overline{\Psi^*})_{I_a} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} |_I &= \sum_{K_a=1}^{N_{t_a}} D_{\eta_a}(I_a, K_a) \Psi^*(K_a, \tau) \equiv (D_{\eta_a} \overline{\Psi^*})_{I_a} \end{aligned} \quad (103)$$

donde las matrices D_{ξ} y D_{η_a} ya han sido definidas. Faltan aún por discretizar los operadores laplaciano (∇^2) y biarmónico (∇^4), además de la derivada temporal. Teniendo en cuenta lo expuesto en la aplicación del método de colocación para la ecuación Biharmónica, las discretizaciones correspondientes al operador laplaciano y biarmónico son:

$$D_{L_a}^* = (D_{\xi}^2 + D_{\eta_a}^2) \quad D_{L_a}^{*2} = D_{L_a}^* D_{L_a}^* = (D_{\xi}^4 + D_{\eta_a}^4 + D_x^2 D_{\eta_a}^2) \quad (104)$$

Por tanto, tenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi |_{I_a} &= \sum_{K=1}^{N_{t_a}} D_{L_a}^*(I_a, K_a) \Psi^*(K_a, \tau) \equiv (D_{L_a}^* \overline{\Psi^*})_{I_a} \\ \nabla^4 \Psi |_{I_a} &= \sum_{K_a=1}^{N_{t_a}} D_{L_a}^{*2}(I_a, K_a) \Psi^*(K_a, \tau) \equiv (D_{L_a}^{*2} \overline{\Psi^*})_{I_a} \end{aligned} \quad (105)$$

Por otro lado, los términos $\frac{1}{\partial \xi} (\nabla^2 \Psi)$ y $\frac{1}{\partial \eta} (\nabla^2 \Psi)$ se discretizan como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\partial \xi} (\nabla^2 \Psi) |_I &= (D_{\xi} \nabla^2 \Psi)_I = (D_{\xi} D_L \overline{\Psi^*})_I \equiv (D_{\xi L} \overline{\Psi^*})_{I_a} \\ \frac{1}{\partial \eta} (\nabla^2 \Psi) |_I &= (D_{\eta_a} \nabla^2 \Psi)_I = (D_{\eta_a} D_L \overline{\Psi^*})_I \equiv (D_{\eta L} \overline{\Psi^*})_{I_a} \end{aligned} \quad (106)$$

donde $D_{\xi L} = D_{\xi} * D_{L_a}^*$ y $D_{\eta L} = D_{\eta_a} * D_{L_a}^*$.

Por último, discretizamos los parámetros pertenecientes al término eléctrico $D_c f(\tau)^2 (\frac{\partial \rho_c^*}{\partial \eta} E_{\xi}^* - \frac{\partial \rho_c^*}{\partial \xi} E_{\eta}^*)$. Las derivadas de la densidad de carga adimensional se discretizan como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_c^*}{\partial \eta_a} |_{I_a} &= \sum_{K_a=1}^{N_{t_a}} D_{\eta_a}(I_a, K_a) \rho_c^*(K_a) \equiv (D_{\eta_a} \overline{\rho_c^*})_{I_a} \\ \frac{\partial \rho_c^*}{\partial \xi} |_{I_a} &= \sum_{K_a=1}^{N_{t_a}} D_{\xi}(I_a, K_a) \rho_c^*(K_a) \equiv (D_{\xi} \overline{\rho_c^*})_{I_a} \end{aligned} \quad (107)$$

y los términos correspondientes al campo eléctrico como:

$$E_{\xi}^* = -\frac{\partial \phi_a^*}{\partial \xi} = -\sum_{K_a=1}^{N_{t_a}} D_{\xi}(I_a, K_a) \phi_a^*(K_a) \equiv (D_{\xi} \overline{\phi_a^*})_{I_a}$$

$$E_{\eta}^* = -\frac{\partial \phi_a^*}{\partial \eta_a} = -\sum_{K_a=1}^{N_{t_a}} D_{\eta_a}(I_a, K_a) \phi_a^*(K_a) \equiv (D_{\eta_a} \overline{\phi_a^*})_{I_a} \quad (108)$$

Aplicando lo que hemos explicado con anterioridad, se llega a:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (D_{L_a}^* \overline{\Psi^*}) + (D_{\eta_a} \overline{\Psi^*} D_{\xi L} \overline{\Psi^*} - D_{\xi} \overline{\Psi^*} D_{\eta L} \overline{\Psi^*}) = \frac{1}{Re} (D_{L_a}^{*2} \overline{\Psi^*}) + D_{cf}(\tau)^2 (D_{\eta_a} \overline{\rho_c^*} E_{\xi}^* - D_{\xi} \overline{\rho_c^*} E_{\eta}^*) \quad (109)$$

Denominando $NLP = (D_{\eta_a} \overline{\Psi^*} D_{\xi L} \overline{\Psi^*} - D_{\xi} \overline{\Psi^*} D_{\eta L} \overline{\Psi^*})$, donde NLP hace referencia a los términos no lineales, llegamos a:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (D_{L_a}^* \overline{\Psi^*}) + NLP = \frac{1}{Re} (D_{L_a}^{*2} \overline{\Psi^*}) + D_{cf}(\tau)^2 (D_{\eta_a} \overline{\rho_c^*} E_{\xi}^* - D_{\xi} \overline{\rho_c^*} E_{\eta}^*) \quad (110)$$

Por otro lado, discretizando las derivadas temporales:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (D_{L_a}^* \overline{\Psi^*}) = \frac{D_{L_a}^* \overline{\Psi^*}_n - D_{L_a}^* \overline{\Psi^*}_{n-1}}{d\tau} \quad (112)$$

Llegamos a:

$$D_{L_a}^* \overline{\Psi^*}_n - D_{L_a}^* \overline{\Psi^*}_{n-1} + NLP d\tau = \frac{1}{Re} (D_{L_a}^{*2} \overline{\Psi^*}_n) d\tau + D_{cf}(\tau)^2 (D_{\eta_a} \overline{\rho_c^*} E_{\xi}^* - D_{\xi} \overline{\rho_c^*} E_{\eta}^*) d\tau \quad (113)$$

Reordenando, se obtiene:

$$\left(D_{L_a}^* - \frac{1}{Re} D_{L_a}^{*2} d\tau \right) \overline{\Psi^*}_n = D_{L_a}^* \overline{\Psi^*}_{n-1} - NLP_{n-1} d\tau + D_{cf}(\tau)^2 (D_{\eta_a} \overline{\rho_c^*} E_{\xi}^* - D_{\xi} \overline{\rho_c^*} E_{\eta}^*) d\tau \quad (114)$$

donde los términos no lineales se han aproximado sustituyéndolos por el valor de la estación anterior

$$NLP = NLP_{n-1} \quad (115)$$

Llamando:

$$A_{\psi} = \left(D_{L_a}^* - \frac{1}{Re} D_{L_a}^{*2} d\tau \right)$$

$$\overline{b}_{\psi} = D_{L_a}^* \overline{\Psi^*}_{n-1} - NLP_{n-1} d\tau + D_{cf}(\tau)^2 (D_{\eta_a} \overline{\rho_c^*} E_{\xi}^* - D_{\xi} \overline{\rho_c^*} E_{\eta}^*) d\tau \quad (116)$$

con

$$NLP_{n-1} = (D_{\eta_a} \overline{\Psi^*}_n D_{\xi L} \overline{\Psi^*}_n - D_{\xi} \overline{\Psi^*}_n D_{\eta L} \overline{\Psi^*}_n) d\tau \quad (117)$$

el sistema por resolver es:

$$A_{\psi} \overline{\Psi^*}_n = \overline{b}_{\psi} \quad (118)$$

Se describirán a continuación las modificaciones que deben realizarse para poder implementar las condiciones de contorno que debe cumplir la función de corriente:

- Las condiciones de contorno en las que la función de corriente es nula en el contorno se implementa de la siguiente forma: para todo valor del índice unívoco I_a correspondiente a un nodo del contorno, se anula la fila I_a en la matriz A_ψ y en el término independiente \vec{b}_ψ y finalmente se hace $A_\psi(I_a, I_a) = 1$.
- Las condiciones de contorno en las que las derivadas de la función de corriente son nulas se aplicarán en los nodos del subcontorno (puesto que anteriormente se han utilizado los nodos del contorno) y se procederá de forma análoga a como se hizo en el caso de la ecuación biarmónica del apartado 3.3.1:
 - (a) Si I_a se corresponde con un nodo perteneciente al subcontorno adyacente al contorno vertical izquierdo, se anula primero toda la fila I_a en la matriz A_ψ y en el término independiente b_ψ y posteriormente, se sustituye la fila $A_\psi(I_a, 1:N_t)$ por la fila de la matriz D_ξ correspondiente al nodo $K_a = I_a - N_{z_a}$ del contorno izquierdo, es decir, se hace $A_\psi(I, 1:N_{t_a}) = D_\xi(I_a - N_{z_a}, 1:N_{t_a}), 1$. Análogamente, se hace lo mismo con el nodo I que pertenezca al subcontorno adyacente al contorno vertical derecho, imponiendo finalmente $A_\psi(I_a, 1:N_{t_a}) = D_\xi(I_a + N_{z_a}, 1:N_{t_a})$
 - (b) Si I_a se corresponde con un nodo perteneciente al tramo del subcontorno adyacente al contorno horizontal inferior, anulamos primero la fila I_a en la matriz A_ψ y en el término independiente \vec{b}_ψ y posteriormente se sustituye la fila $A_\psi(I_a, 1:N_{t_a})$ por la fila de la matriz D_{η_a} correspondiente al nodo $K_a = I_a - 1$ del contorno horizontal inferior, es decir, $A_\psi(I_a, 1:N_t) = D_{\eta_a}(I_a - 1, 1:N_{t_a})$. Análogamente, se hace lo mismo con el nodo I que pertenezca al subcontorno adyacente al contorno horizontal superior, imponiendo finalmente $A_\psi(I_a, 1:N_t) = D_{\eta_a}(I_a + 1, 1:N_{t_a})$.

Es importante remarcar que los nodos coincidentes con las esquinas del subcontorno pueden considerarse como pertenecientes a un tramo vertical o a un tramo horizontal. En concreto en este trabajo se han considerado pertenecientes a los tramos verticales.

Por otro lado, puesto que el entorno de MATLAB trabaja más rápido mediante un indexado por columnas y no por filas, las condiciones de contorno se han programado mediante las matrices traspuestas.

Por ultimo, tal y como se expone en la sección 3.3.3, una vez que se calcula el término independiente \vec{b}_ψ , éste se multiplica por un factor al que llamamos FBC_ψ (Factor de boundary conditions). Se trata de un vector de ceros y unos, cero en la fila I_a donde aplicamos las condiciones de contorno. De esta forma, para que no afecte al valor de la función en un nodo donde hay aplicada una condición de contorno, se modifica la fila de la matriz del sistema y se multiplica por cero el término independiente correspondiente a dicha fila.

3.3.3 Programación del problema hidrodinámico en MATLAB

Se presenta en las siguientes líneas la lógica empleada en la simulación del problema hidrodinámico en MATLAB.



Figura 29. Lógica empleada en MATLAB para resolver el problema hidrodinámico

El programa de MATLAB, tal y como muestra la figura anterior, está compuesto por una serie de bloques con diferentes objetivos:

- **Inicio del programa:** Se trata de las primeras líneas del programa; en este bloque se eliminan todas las variables existentes, se cierran todas las figuras abiertas y se limpia el Command Window.

```
%%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%% CLEAR AND CLOSE ALL %%%%%%%%%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
clc; clear all; close all;
```

- **Definición de los parámetros:** en este bloque se definen las variables que controlan el problema hidrodinámico:

```
%%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%% PARÁMETROS DE ENTRADA %%%%%%%%%  
%% DOMINIO FLUIDO %%%%%%%%%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
  
rhoc_max=0.001; %Densidad de carga máxima  
phi_max=20e3; %Potencial máximo  
rho=1.225; %Densidad del aire  
mu=1.85e-5; %Viscosidad dinámica del aire  
u0=sqrt(rhoc_max*phi_max/rho); % Parámetro para adimensionalizar  
Re=rho*u0*L/mu; %Número de Reynolds  
Dc=rhoc_max*phi_max/u0^2/rho; %Parámetro para adimensionalizar  
dt=0.01; %Diferencial de tiempo
```

- **Mallado del dominio:** se realiza el mallado del dominio que nos permite discretizar las ecuaciones. Éste se realiza tanto mediante nodos de Chebyshev como con diferencias finitas.

```

%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% CARACTERÍSTICAS %%%%%%%%%
%% MALLADO %%%%%%%%%
%%
% 1) Mallado medio superior
Nz=40;
Nx=300;
N1=50; N2=175; N3=75; %La suma de N1+N2+N3=Nx
% 2) Mallado medio inferior
Nza=Nz; Nzb=40;
Nxa=Nx;

```

```

%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% MALLADO DEL DOMINIO %%%%%%%%%
%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Nodos de Chebyshev en z %%%%%%%%%
zmin=0/L; zmax=0.02/L;
zch(1:Nz)=(zmax+zmin)/2-(zmax-zmin)/2*cos((1:Nz)-1)*pi/(Nz-1);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Nodos en diferencias finitas en x %%%%%%%%%
xmin=-0.03/L; xmax=0.06/L; x1=-0.02/L; x2=0.03/L;
xch(1:N1)=linspace(xmin,x1,N1);
xch(N1:(N2+N1))=linspace(x1,x2,N2+1);
xch((N1+N2):Nx)=linspace(x2,xmax,N3+1);

Nt=Nz*Nx;

```

- **Cálculo de matrices:** en este bloque se realiza el cálculo de las matrices D_x , D_z , D_L , D_L^2 , D_{xL} , D_{zL} necesarias para aplicar la discretización basada en el método de colocación. Este bloque hace uso de funciones auxiliares que se muestran en el Anexo: Programas de MATLAB

```

%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% OBTENCIÓN DE LAS MATRICES %%%%%%%%%
%% Dx, Dz, DL, DL2, DxDL, DzDL %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[dx, dx2, dx3, dx4]=Derivs(xch,Nx);
[dz]=dCheby(zch,Nz);

Dx=kron(dx, speye(Nz)) ;
Dx2=kron(dx2, speye(Nz)) ;
Dx3=kron(dx3, speye(Nz)) ;
Dx4=kron(dx4, speye(Nz)) ;

Dz=kron(speye(Nx), dz) ;
Dz2=Dz*Dz;

DL=Dx2+Dz2 ; %Operador Laplaciano
DL2=Dx4+Dz2*Dz2+2*Dx2*Dz2; % Operador laplaciano^2
DxDL=Dx3+Dx*Dz2;
DzDL=Dz*Dx2+Dz*Dz2;

```


- **Carga de datos del problema eléctrico:** en este bloque se ejecuta el problema eléctrico, de forma que se obtienen tanto la distribución de densidad de carga como el campo eléctrico. Éstos, como ya se ha comentado con anterioridad, son introducidos en las ecuaciones de Navier-Stokes para obtener el campo de velocidades.

```

%%
%%
%%
%%
%% CARGAMOS DATOS %%
%% PROBLEMA ELÉCTRICO %%
%%
Nza=Nz;
Nxa=Nx;
[phi,rhoc]=PoissonPhi_2Domains_mallado(L,Nza,Nzb,Nxa,N1,N2,N3,epsr,ldebye,muad,sigmaad);
Ex=-Dx*phi;
Ez=-Dz*phi;
rhoc=rhoc;

```

- **Definición del sistema de ecuaciones y condiciones de contorno:** En este bloque se definen las matrices y vectores necesarios para la resolución del sistema y se imponen las condiciones de contorno que deben cumplirse para satisfacer el problema de acuerdo con lo expuesto en el apartado 3.3.2

```

%%
%%
%% DEFINICIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES %%
%% Y CONDICIONES DE CONTORNO %%
%%
%%Matriz Lap-1/Re*Lap2*dt del sistema A_psi*psi_n=b_psi
APSI=sparse(Nx*Nz,Nx*Nz);
APSI=DL-dt*DL2/Re; %%A_psi

tic
%%Factor de condiciones de contorno
FBC_PSI=ones(Nt,1);

%% Condiciones que hacen Psi igual a cero en contornos horizontales:
APSI_tr=APSI';
for i=2:(Nx-1)
    %%Contorno inferior
    I=(i-1)*Nz+1;
    %psi=0
    APSI_tr(:,I)=0; APSI_tr(I,I)=1; FBC_PSI(I,1)=0;

    %%Contorno superior
    I=(i-1)*Nz+Nz;
    %psi=0
    APSI_tr(:,I)=0; APSI_tr(I,I)=1; FBC_PSI(I,1)=0;
end

%% Condiciones que hacen psi igual a cero en contornos verticales:
for j=1:Nz
    %%Contorno izquierdo
    I=j;
    %psi=0
    APSI_tr(:,I)=0; APSI_tr(I,I)=1; FBC_PSI(I,1)=0;
end

```

```

    %Contornos derecho
    I=(Nx-1)*Nz+j;
    %psi=0
    APSI_tr(:,I)=0;   APSI_tr(I,I)=1;   FBC_PSI(I,1)=0;
end

%Falta por aplicar velocidades nulas en las paredes. Para ello, se usan las
%filas correspondientes a los subcontornos de abajo.

%Contornos horizontales dpsi/dz=0
for i=3:(Nx-2)
    K=(i-1)*Nz+2;
    APSI_tr(:,K)=Dz(:,K-1);   FBC_PSI(K,1)=0;
    K=(i-1)*Nz+Nz-1;
    APSI_tr(:,K)=Dz(:,K+1);   FBC_PSI(K,1)=0;
end

%Contornos verticales dpsi/dx=0
for j=2:(Nz-1)
    K=(2-1)*Nz+j;
    APSI_tr(:,K)=Dx(:,K-Nz);   FBC_PSI(K,1)=0;
    K=(Nx-2)*Nz+j;
    APSI_tr(:,K)=Dx(:,K+Nz);   FBC_PSI(K,1)=0;
end
APSI=APSI_tr';

```

- **Resolución del sistema y representación de resultados.** Mediante una simulación a lo largo del tiempo se resuelve el sistema de ecuaciones descrito y se grafican los resultados que se deseen. En concreto, se calcula la distribución de la función de corriente en el dominio; posteriormente se calcula el campo de velocidades y, finalmente, se grafican a lo largo del tiempo.

```

%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
***** RESOLUCIÓN DEL SISTEMA: *****
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[L,U,P]=lu(APSI); % Descomposición LU para calcular la inversa
PpL=P'*L;

] for i=1:Nx,
]   for j=1:Nz,
]     I=(i-1)*Nz+j;
]     Psinml(I,1)=0;
]   end
] end

figure(99)
Ntiempo=10000;
] for n=1:Ntiempo
]   disp(n)
]   t=n*dt;
]   %   ft=1;
]   ft=sin(2*pi*4500*L*t/u0); disp(ft)
]   bLinPsi(1:Nt,1)=DL*Psinml; %% Término lineal
]   bNLPsi(1:Nt,1)=(+(Dz*Psinml).*(DxDL*Psinml)-(Dx*Psinml).*(DzDL*Psinml))*dt; %Término no lineal
]   bElectPsi=(Dc*(Ex.*(Dz*rhoc)-Ez.*(Dx*rhoc)))*ft.^2*dt; %%
]   bPSI=bLinPsi-bNLPsi+bElectPsi;
]   bsyst(1:Nt,1)=FBC_PSI.*bPSI;
]   aux=PpL\bsyst;
]   Psi=U\aux; %% Función de corriente Psi

```

```

%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%% REPRESENTACIÓN DE RESULTADOS %%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%% PINTA PSI Y EL CAMPO DE VELOCIDADES %%

xmat=zeros(Nx,Nz);zmat=xmat; psimat=xmat; vxmat=xmat; vzmat=xmat; Vmat=xmat; %Preasignamos
for j=1:Nz,
    xmat(1:Nx,j)=xch(1:Nx)'; zmat(1:Nx,j)=zch(j);
    psimat(1:Nx,j)=Psi(((1:Nx)-1)*Nz+j,1);
    vxmat(1:Nx,j)=vx(((1:Nx)-1)*Nz+j,1); vzmat(1:Nx,j)=vz(((1:Nx)-1)*Nz+j,1);
    Vmat(1:Nx,j)=V(((1:Nx)-1)*Nz+j,1);
end

if n==50*round(n/50)
%Graficamos las líneas de corriente
subplot(1,3,1), contour(xmat, zmat, psimat),colorbar
title('Distribución líneas de corriente')
xlabel('x (mm)')
ylabel('z (mm)')
axis([-20 20 0 8])
%%% Graficamos los electrodos
%1)Electrodo expuesto
    eexp_x=[-10 0];
    eexp_y=[0 0];
%2)Electrodo embebido
    eemb_x=[1 21];
    eemb_y=[-3 -3];
    hold on
    plot(eexp_x,eexp_y,'r','LineWidth',3)
    plot(eemb_x,eemb_y,'b','Linewidth',3)

```

```

%Graficamos el campo de velocidades
subplot(1,3,2), quiver(xmat,zmat,vxmat,vzmat)
title('Representación campo vectorial de velocidades')
xlabel('x (mm)')
ylabel('z (mm)')
axis([-20 20 0 8])
%%% Graficamos los electrodos
%1)Electrodo expuesto
    eexp_x=[-10 0];
    eexp_y=[0 0];
%2)Electrodo embebido
    eemb_x=[1 21];
    eemb_y=[-3 -3];
    hold on
    plot(eexp_x,eexp_y,'r','LineWidth',3)
    plot(eemb_x,eemb_y,'b','Linewidth',3)

subplot(1,3,3), contourf(xmat, zmat, Vmat), colorbar
title('Distribución Velocidades (módulo)')
xlabel('x (mm)')
ylabel('z (mm)')
axis([-20 20 0 8])
%%% Graficamos los electrodos
%1)Electrodo expuesto
    eexp_x=[-10 0];
    eexp_y=[0 0];
%2)Electrodo embebido
    eemb_x=[1 21];
    eemb_y=[-3 -3];
    hold on
    plot(eexp_x,eexp_y,'r','LineWidth',3)
    plot(eemb_x,eemb_y,'b','Linewidth',3)

pause(0.01)
hold off
end

%Actualización
Psiinml=Psi;
end

```

- Fin del programa

4 ANÁLISIS DE RESULTADOS

El código numérico presentado en la sección 3.3.3 nos permite obtener, mediante pequeñas modificaciones, resultados que pueden ser comparados con otras investigaciones. En primer lugar, se llevará a cabo la validación del código correspondiente al problema hidrodinámico, que se realiza en la sección 4.1, justificando los resultados obtenidos con los de la literatura en [10]. Posteriormente, en la sección 4.2, se estudia el comportamiento del actuador DBD frente a la variación de parámetros como la densidad de carga máxima o la longitud de Debye, que no son estudiados en [10], pero que tienen una relevancia importante en estudios como el de [42]. En la sección 4.3, se analiza el campo de velocidades del viento iónico producido mediante una simulación temporal, de acuerdo con [18]. Por último, en la sección 4.4, se estudia el coste computacional necesario para llevar a cabo las simulaciones.

4.1 Validación del código del problema hidrodinámico

4.1.1 Geometría del actuador de plasma DBD

Se presenta en la figura 30 la configuración geométrica del actuador de plasma utilizada en la validación del código fluidodinámico con la literatura en [10]

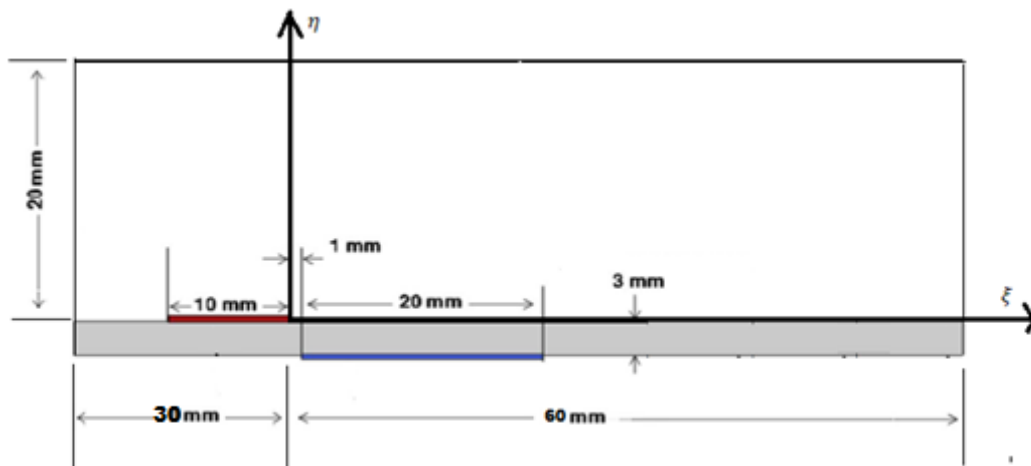


Figura 30. Geometría del actuador de plasma DBD

- Espesor de dieléctrico: 3 mm
- Longitud del electrodo expuesto: 10 mm
- Longitud del electrodo embebido: 20 mm
- Distancia de separación (gap) entre electrodos: 1 mm
- Dominio fluido: 90 mm x 20 mm
- Dominio dieléctrico: 90 mm x 3 mm

4.1.2 Parámetros

Los parámetros utilizados en las siguientes simulaciones son, de acuerdo con [10]:

- Amplitud del voltaje AC aplicado: $\phi_{MAX} = 20 \text{ kV}$
- Densidad de carga máxima: $\rho_{c,MAX} = 0.001 \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$
- Frecuencia de la señal AC: $f_b = 1 \text{ kHz}$
- Densidad del aire: $\rho = 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- Viscosidad dinámica del aire: $\mu = 1.85 * 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m s}}$
- Longitud de Debye: $\lambda_D = 0.001 \text{ m}$
- Longitud de referencia: $L = 0.001 \text{ m}$
- Velocidad de referencia: $u_0 = \sqrt{\frac{\rho_{c,MAX}}{\rho} \phi_{MAX}} = 4.04 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- Número de Reynolds: $Re = \frac{\rho u_0 L}{\mu} = 267.65$
- Número adimensional correspondiente a la fuerza de Coulomb: $D_c = \frac{\rho_{c,MAX} \phi_{MAX}}{\rho u_0^2} = 1$

En los siguientes apartados se estudiarán el efecto de diferentes parámetros en la velocidad máxima inducida del viento iónico, manteniéndose el resto constantes.

4.1.3 Efecto del espesor de dieléctrico

Como se demuestra en estudios experimentales como los de [19], el espesor de dieléctrico influye sustancialmente tanto en la fuerza inducida como en la velocidad inducida del viento iónico. La evolución a lo largo del tiempo de la velocidad inducida máxima del viento iónico en función del espesor de dieléctrico queda recogida en la siguiente gráfica:

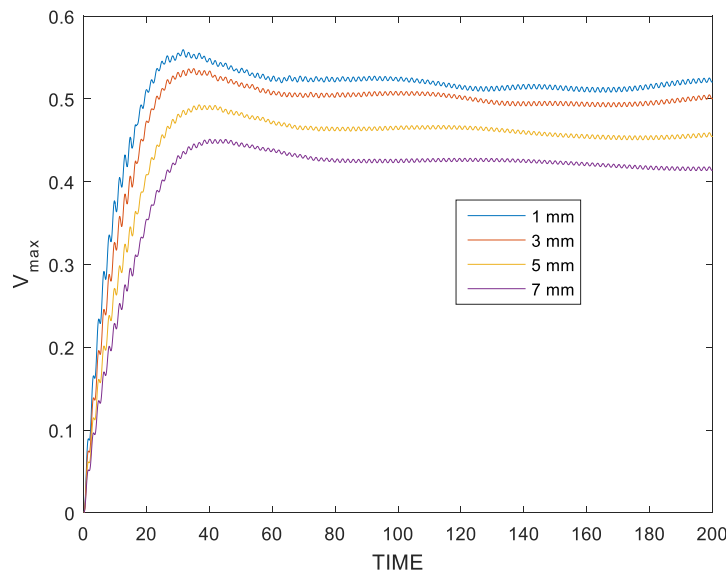


Figura 31. Efecto del espesor de dieléctrico en la velocidad máxima obtenido con MATLAB

Este resultado es acorde con la optimización llevada a cabo en [43], donde el espesor óptimo de dieléctrico es 1 mm, lo cual hace que la fuerza media generada sea máxima. Se puede observar cómo, a excepción del caso en el que el espesor del dieléctrico es 1 mm, la gráfica se adecua bastante bien a los resultados obtenidos en [10]:

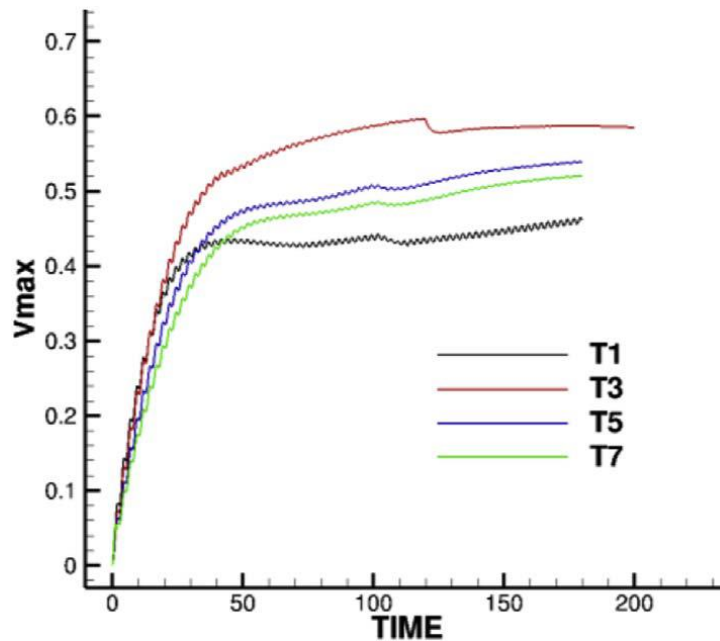


Figura 32. Efecto del espesor de dieléctrico en la velocidad máxima obtenido con Oracle3D. Fuente de la imagen: [10]

Esta última gráfica sugiere, además, que el espesor de dieléctrico óptimo es el de 3 mm, tal y como se puede observar en la figura 33:

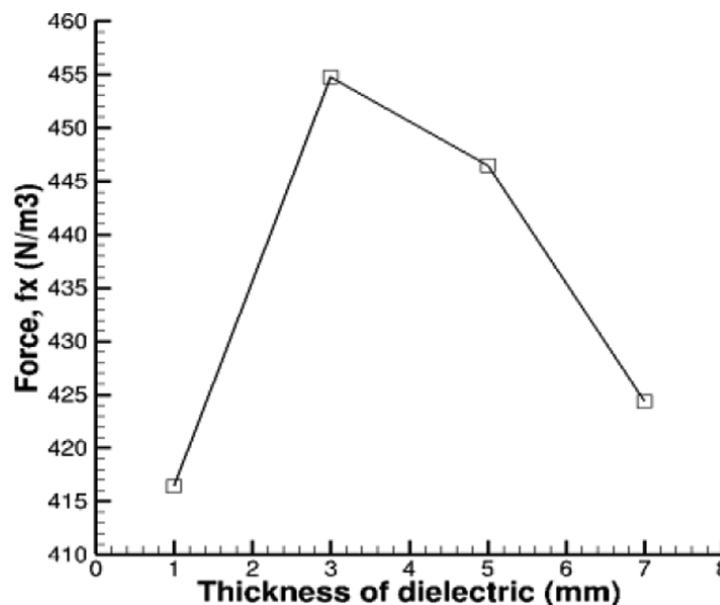


Figura 33. Efecto del espesor de dieléctrico en la componente x de fuerza electrohidrodinámica obtenido con Oracle3D. Fuente de la imagen: [10]

Tal y como se expone en [10], la caída de esta fuerza electrohidrodinámica y también de la velocidad inducida del viento iónico para el espesor de dieléctrico de 1 mm, puede ser atribuida a la influencia del dominio del campo eléctrico: con un espesor de 1 mm, los electrodos están muy cerca, y a pesar de que se incrementa el campo eléctrico localmente, esta cercanía reduce el dominio o área de influencia de la fuerza total de Coulomb.

Este efecto, como queda expuesto en la figura 30, no somos capaces de recogerlo con nuestro código en MATLAB.

Por otro lado, es interesante graficar la variación de los perfiles de velocidad con el espesor de dieléctrico. En la siguiente figura se presentan los perfiles de velocidad en función del espesor de dieléctrico en $x=7$ mm y $t=36$ ms.

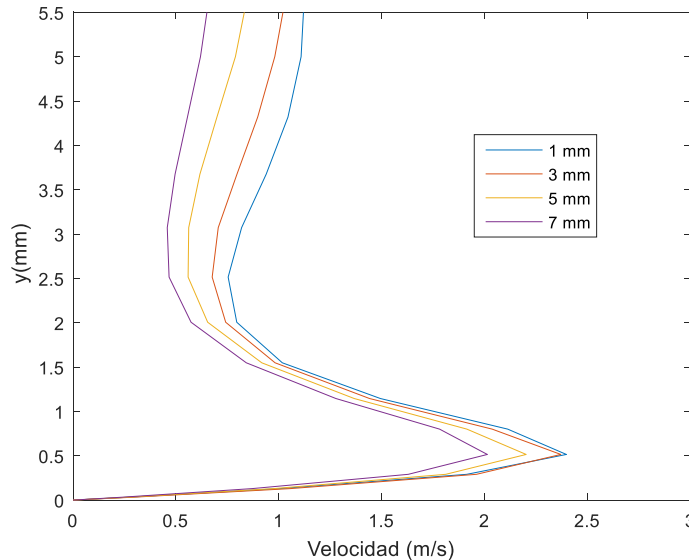


Figura 34. Perfiles de velocidad con variación de espesor de dieléctrico en $x=7$ mm y $t=36$ ms obtenidos con MATLAB

En comparación con los obtenidos en [10], en la figura 35:

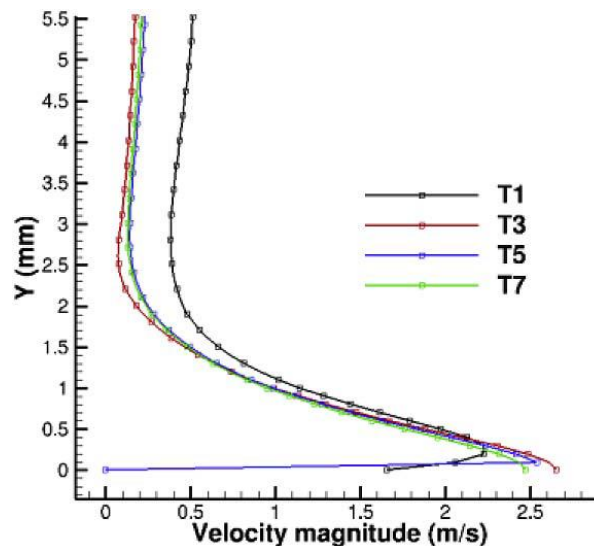


Figura 35. Perfiles de velocidad con variación de espesor de dieléctrico en $x=7$ mm y $t=36$ ms obtenidos con Oracle3D. Fuente de la imagen: [10]

Se puede observar que, cualitativamente, los perfiles de velocidad son similares que los obtenidos en [10]. De esta forma, a medida que disminuye el espesor de dieléctrico, el campo de velocidades (en una determinada sección x de nuestro actuador) aumenta.

4.1.4 Efecto de la separación (gap) entre los electrodos

La separación entre los electrodos es otro parámetro geométrico que participa activamente en el comportamiento del actuador de plasma DBD. Considerando diferentes gaps (0 mm, 1 mm, 3mm y 5mm), se pueden obtener diferentes valores de la velocidad máxima inducida del viento iónico a lo largo del tiempo. Haciendo las modificaciones necesarias en nuestro programa de MATLAB, se muestra en la figura 36 la evolución de la velocidad máxima frente al gap entre los electrodos:

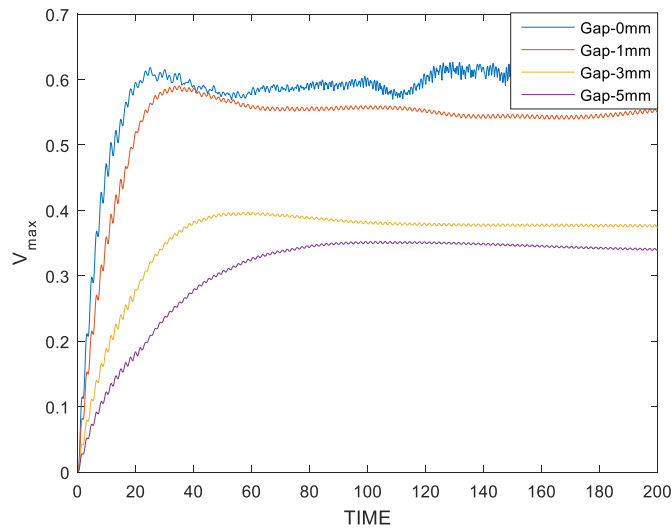


Figura 36. Efecto del gap entre los electrodos en las velocidades máximas obtenido con MATLAB

Comparando con [10] en la figura 37:

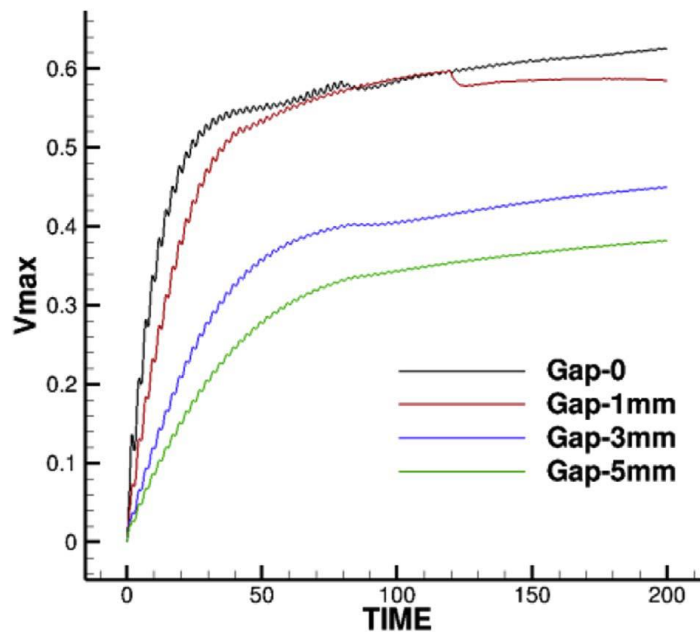


Figura 37. Efecto del gap entre los electrodos en las velocidades máximas obtenido con Oracle3D. Fuente de la imagen: [10]

En efecto, tal y como se observa en la figura 38, la fuerza componente x de la fuerza volumétrica aumenta a

medida que disminuye la distancia (gap) entre los electrodos. Puesto que esta componente es la dominante debido a que la componente vertical está limitada únicamente en la región justo por encima del borde del electrodo visto, al aumentar dicha fuerza aumenta las velocidades máximas del viento inducido.

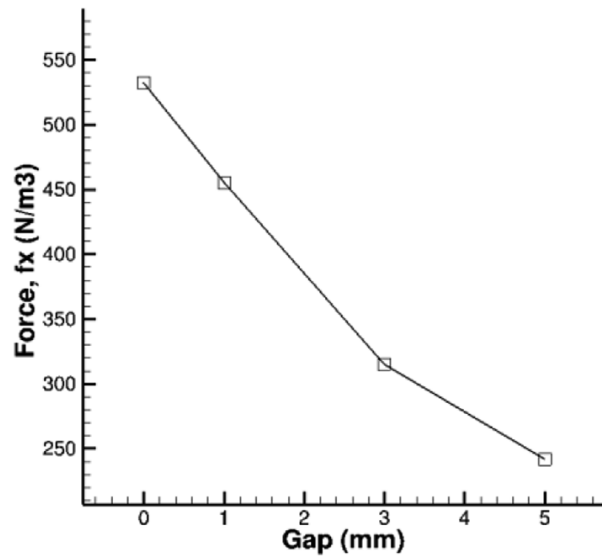


Figura 38. Efecto en la componente x de la fuerza volumétrica del gap entre los electrodos obtenido con Oracle3D. Fuente de la imagen: [10]

Al igual que se ha realizado para el caso del efecto del espesor de dieléctrico, resulta interesante estudiar el campo de velocidades en una sección concreta del actuador DBD y en un instante determinado para distintos valores de separación (gap) entre los electrodos. En la figura 39 se muestra dicho resultado para $t=40$ ms de instante real de tiempo en $x=10$ mm

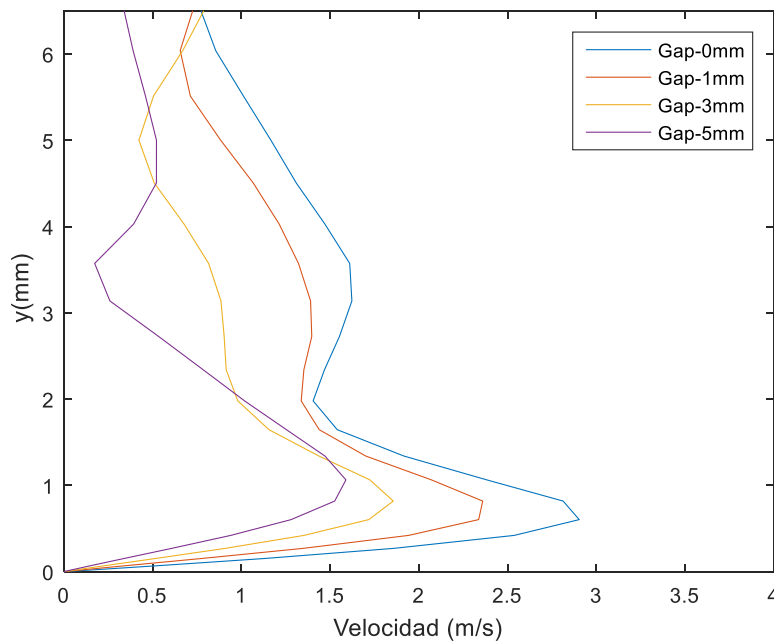


Figura 39. Efecto del gap en un perfil de velocidades en $x=10$ mm y $t=40$ ms obtenido con MATLAB

A simple vista el resultado parece bastante menos preciso que el obtenido en la figura 34, sin embargo, al comparar con los de la literatura, se observa que cerca de la pared la magnitud y la forma cualitativa del perfil de velocidades es bastante satisfactoria:

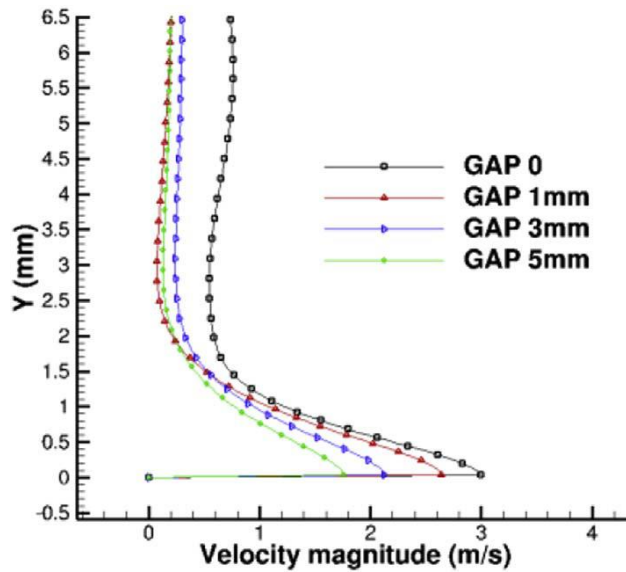


Figura 40. Efecto del gap en un perfil de velocidades en $x=10$ mm y $t=40$ ms obtenido con Oracle3D.
Fuente de la imagen: [10]

A pesar de mejorar la malla añadiendo más puntos tanto en ξ como en η , los resultados no cambian sustancialmente, por lo que dicha gráfica sólo es válida muy cerca de la pared, para valores de $y < 2$ mm. Sin embargo, cualitativamente ambas gráficas muestran el mismo comportamiento: a medida que se disminuye el gap entre los electrodos, tal y como se observa en la figura 38, la fuerza electrohidrodinámica es mayor, por lo que la velocidad máxima aumenta.

4.1.5 Efecto de la frecuencia del voltaje AC aplicado

Otro de los parámetros que podemos estudiar, para determinar su influencia en las velocidades inducidas máximas del viento iónico, es la frecuencia del voltaje AC aplicado. Hasta este momento el término $f(t)$ que aparece en las ecuaciones de Navier-Stokes era una onda sinusoidal de frecuencia igual a 1000 Hz. Sin embargo, tal y como se observa en la figura 40, el valor de la frecuencia interviene en el valor de V_{MAX} que se alcanza en régimen permanente:

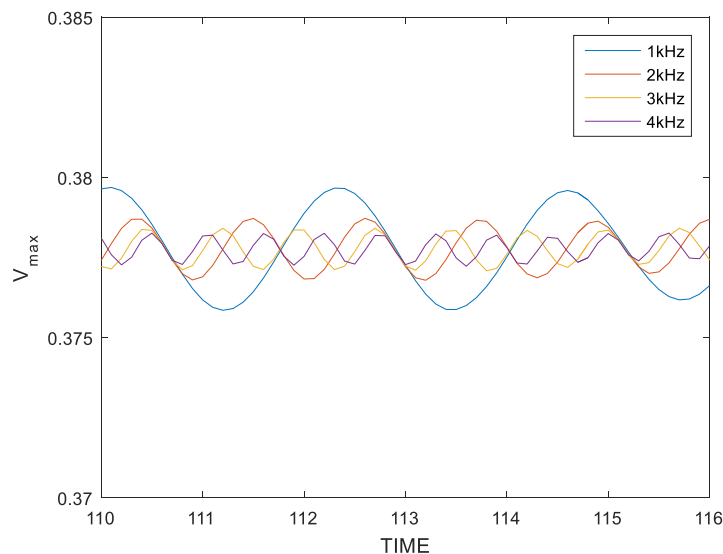


Figura 41. Efecto de la frecuencia del voltaje aplicado en la velocidad obtenido con MATLAB

Comparando con la figura 42:

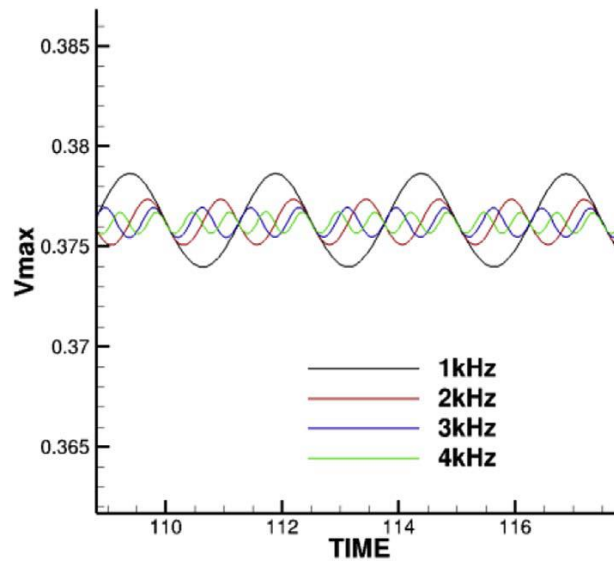


Figura 42. Efecto de la frecuencia del voltaje aplicado en la velocidad obtenido con Oracle3D.
Fuente de la imagen: [10]

Sin embargo, como se confirma en ambas gráficas, la frecuencia del voltaje aplicado no tiene una influencia significativa en las velocidades inducidas, siendo el caso de frecuencia igual a 1 kHz donde se obtiene un mayor valor de la velocidad inducida.

4.1.6 Efecto de la amplitud del voltaje AC aplicado

Tal y como se ha quedado constatado en el apartado anterior, cambios en la frecuencia del voltaje aplicado no producen cambios sustanciales en la velocidad máxima inducida. Sin embargo, tal y como se observará a continuación, la amplitud del voltaje AC aplicado (ϕ_{MAX}) sí que tiene una influencia importante.

Graficando la evolución de la velocidad máxima inducida dimensional (en m/s) frente a la amplitud del voltaje aplicado (se han utilizado cinco valores: 5, 12, 16, 20 y 24 kV) y comparándola con la obtenida en [10]:

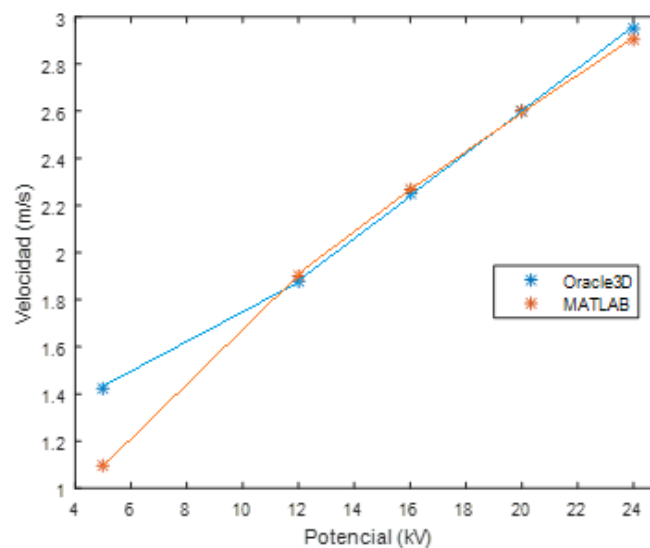


Figura 43. Efecto de la amplitud del voltaje aplicado en la velocidad máxima inducida del viento iónico

Se puede observar que, salvo el caso en el que el potencial es de 5 kV, los resultados son consistentes con la literatura. De esta forma, se concluye que, para dichos casos, es más efectivo incrementar la amplitud del voltaje aplicado que cambiar la frecuencia de ésta.

4.1.7 Efecto de la forma de onda voltaje AC aplicado

Estudiamos en este último apartado de validación el efecto que tiene la forma de onda del voltaje aplicado. Se estudiará la influencia de tres formas diferentes de onda (sinusoidal, triangular y cuadrada) para 20 kV y 1 kHz.

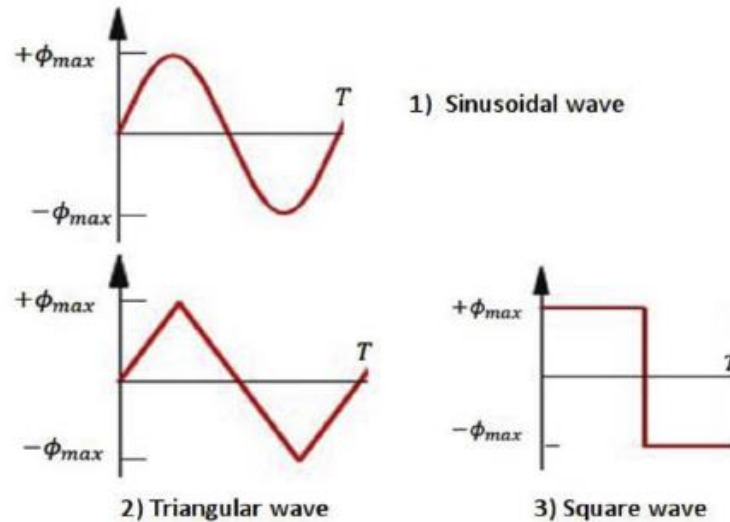


Figura 44. Formas de onda del voltaje aplicado. Fuente de la imagen: [10]

Las características de dichas ondas son:

- Sinusoidal:

$$\phi_{MAX}(t) = \phi_{MAX} \text{Sen}(2\pi f_b t)$$

- Triangular:

$$\phi_{MAX}(t) = 4 \phi_{MAX} \left(\frac{t}{T} \right) \text{ para } t \in [0, \frac{T}{4}]$$

$$\phi_{MAX}(t) = 2 \phi_{MAX} \left(1 - \frac{2t}{T} \right) \text{ para } t \in [\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}]$$

$$\phi_{MAX}(t) = 4 \phi_{MAX} \left(\frac{t}{T} - 1 \right) \text{ para } t \in [\frac{3T}{4}, T]$$

- Cuadrada:

$$\phi_{MAX}(t) = \phi_{MAX} \text{ para } t \in [0, \frac{T}{2}]$$

$$\phi_{MAX}(t) = -\phi_{MAX} \text{ para } t \in [\frac{T}{2}, T]$$

donde f_b es la frecuencia de la onda sinusoidal y T es el periodo de las formas de onda.

Estudiando la evolución de las velocidades máximas en función de la forma de onda, obtenemos:

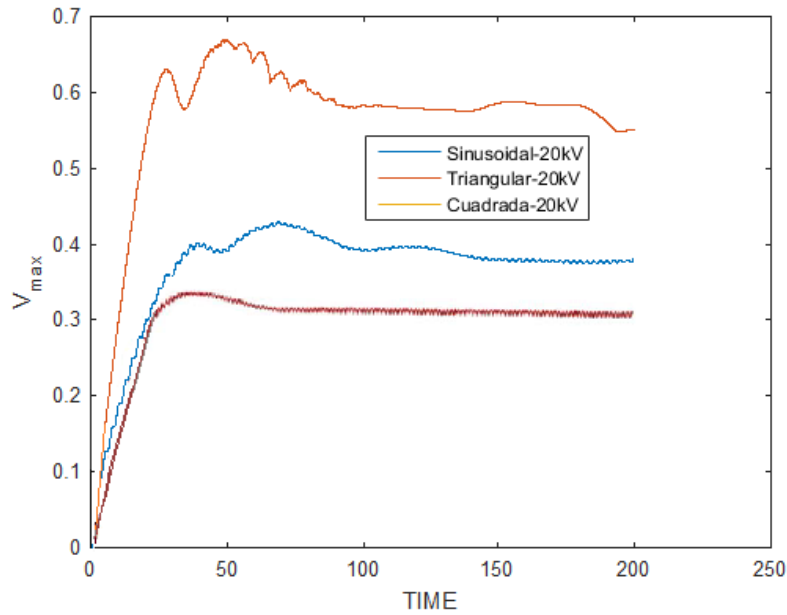


Figura 45. Efecto de la forma de onda en la velocidad máxima inducida obtenido con MATLAB

Comparando con [10]:

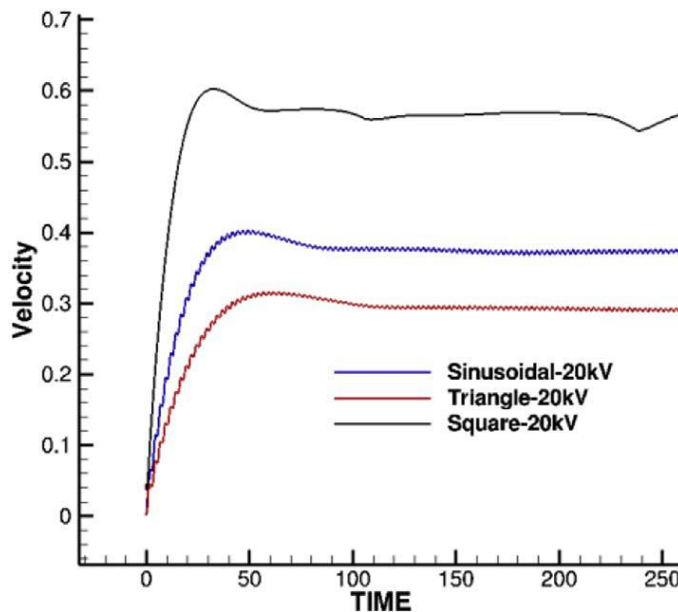


Figura 46. Efecto de la forma de onda en la velocidad máxima inducida obtenido con Oracle3D.

Fuente de la imagen: [10]

Como se puede observar, la forma de onda cuadrada proporciona la máxima velocidad inducida y la máxima fuerza electrohidrodinámica. Sin embargo, tal y como se señala en [10], el consumo de energía eléctrica es también mayor en la forma de onda cuadrada. En muchos casos, la forma de onda cuadrada es la óptima, pero las fluctuaciones en las velocidades inducidas juegan un rol importante en las aplicaciones de control de flujo. De esta forma, si las oscilaciones periódicas de las velocidades inducidas coinciden con las frecuencias naturales del flujo, entonces estas velocidades fluctuantes son más efectivas. Por lo tanto, en términos de fuerza electrohidrodinámica por consumo de energía eléctrica, la onda sinusoidal es la mejor, tal y como se señala Benard et al. (2012) en [40]. Además, resultados experimentales muestran que las mejores actuaciones del dispositivo son obtenidas por formas de onda sinusoidales cuando mantenemos constante la potencia eléctrica consumida [40]. Por último, en cuanto a la forma de onda triangular, ésta ha sido estudiada en detalle con el modelo de tres especies de plasma por Sato et al. (2017) [41].

4.2 Influencia del resto de parámetros en el problema hidrodinámico

4.2.1 Efecto de la longitud de Debye

Tal y como señalábamos en el apartado 1.4.1.4 Parámetros del plasma, la longitud de Debye juega un papel importante en la actuación de nuestro dispositivo. Ajustando los siguientes parámetros en nuestro programa, de acuerdo con [42]:

- Espesor de dieléctrico: 0.127 mm
- Distancia de separación (gap) entre electrodos: 0.5 mm
- Densidad de carga máxima: $\rho_{c,MAX} = 0.0008 \frac{C}{m^3}$
- Amplitud del voltaje AC aplicado: $\phi_{MAX} = 5 kV$
- Longitud del electrodo expuesto: 10 mm
- Longitud del electrodo embebido: 20 mm

Podemos graficar la influencia que tiene la longitud de Debye en el campo de velocidades inducido:

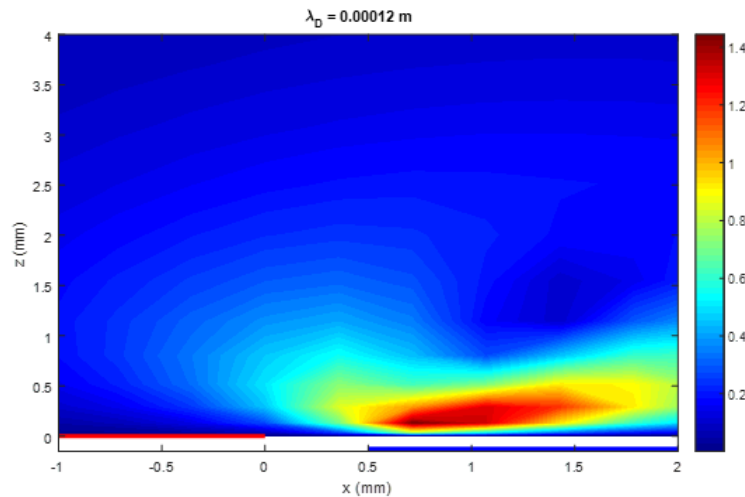


Figura 47. Campo de velocidades para $\lambda_D = 0.00012 \text{ m}$ obtenido con MATLAB

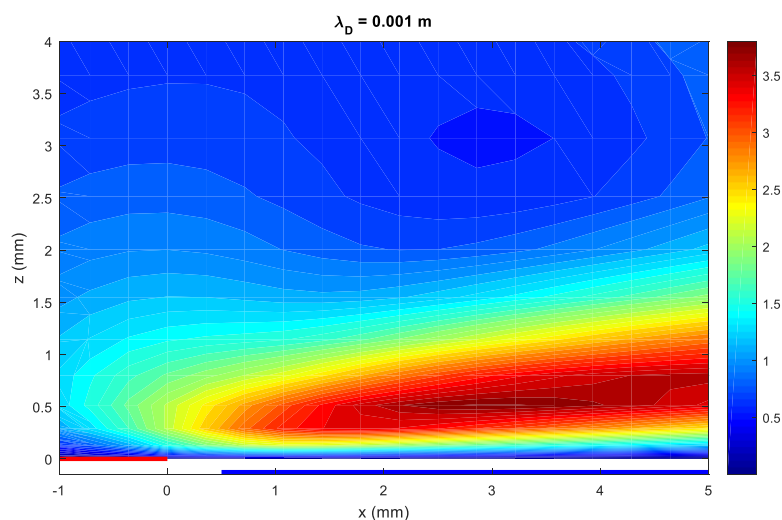


Figura 48. Campo de velocidades para $\lambda_D = 0.001 \text{ m}$ obtenido con MATLAB

Si comparamos con la literatura en [42]

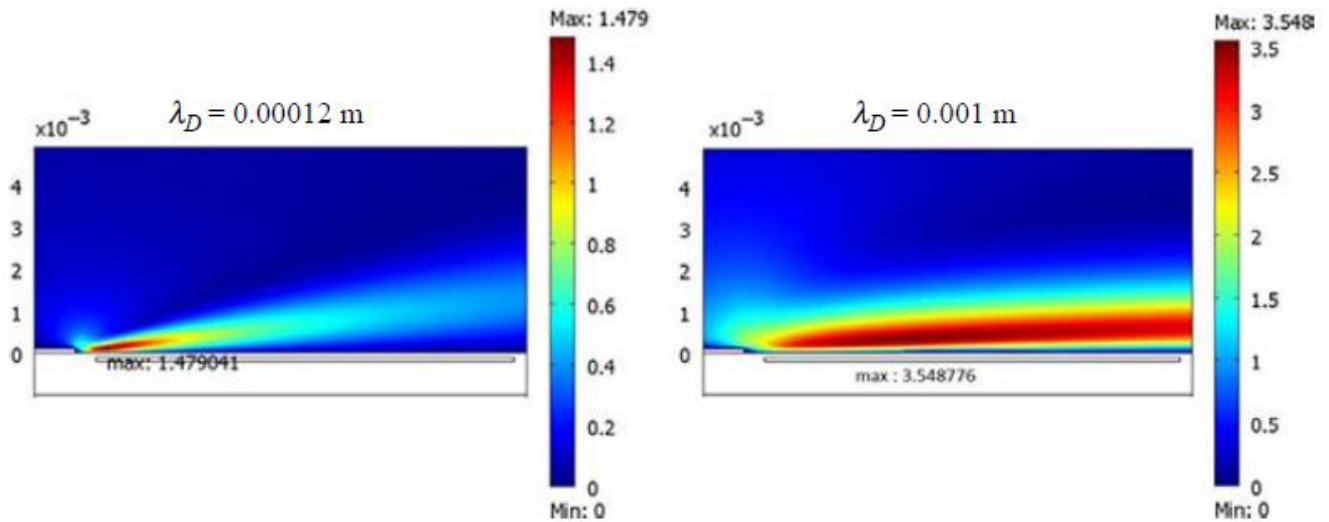


Figura 49. Efecto de la longitud de Debye en la velocidad máxima inducida. Fuente de la imagen: [42]

Se puede observar que los efectos en la velocidad inducida son sustancialmente mayores cuando incrementamos la longitud de Debye. De esta forma, cuando la longitud de Debye es $\lambda_D = 0.00012 \text{ m}$ las velocidades máximas que se alcanzan son del orden de 1.4 m/s , mientras que, cuando la longitud de Debye aumenta hasta $\lambda_D = 0.001 \text{ m}$, las velocidades máximas son aproximadamente de 3.5 m/s . Además, hay un movimiento del fluido desde el electrodo expuesto hacia el electrodo embebido, debido a que la fuerza actúa hacia esa dirección, lo que provoca que el punto de máxima velocidad inducida se desplace aguas abajo.

4.2.2 Efecto de la densidad de carga máxima

El siguiente parámetro que analizamos es el del valor de la densidad de carga máxima, que la denotamos como $\rho_{c,MAX}$. Los parámetros que se toman para este estudio son, de acuerdo con [42]:

- Espesor de dieléctrico: 0.127 mm
- Distancia de separación (gap) entre electrodos: 0.5 mm
- Longitud de Debye: $\lambda_D = 0.17 \text{ mm}$
- Amplitud del voltaje AC aplicado: $\phi_{MAX} = 5 \text{ kV}$
- Longitud del electrodo expuesto: 10 mm
- Longitud del electrodo embebido: 20 mm

Graficando las velocidades máximas inducidas en función de la densidad de carga máxima y comparando con [42], se puede observar que, teniendo en cuenta que la fuerza electrohidrodinámica varía linealmente con el valor de la densidad de carga máxima, pues $F_b = \rho_c(-\nabla\phi)$, la velocidad máxima inducida también lo hará aproximadamente; por ello, para $\rho_{c,MAX} = 0.00012 \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$, se alcanzan velocidades máximas de aproximadamente 0.08 m/s , mientras que para $\rho_{c,MAX} = 0.001 \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$, es de unos 0.5 m/s . Además, es importante hacer notar que el punto de máxima velocidad inducida permanece prácticamente estático e invariable con $\rho_{c,MAX}$, al contrario que ocurría cuando la longitud de Debye se incrementaba, donde sí que existía un desplazamiento.

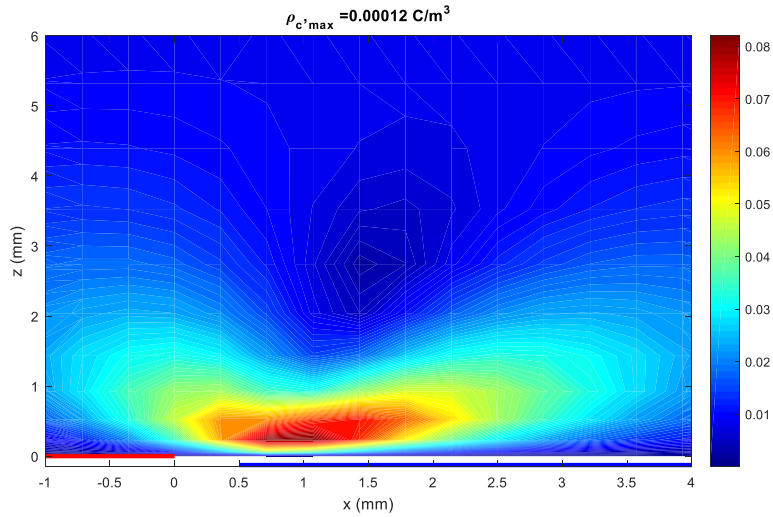


Figura 50. Campo de velocidades inducido para $\rho_{c,MAX} = 0.00012 \frac{C}{m^3}$ obtenido con MATLAB

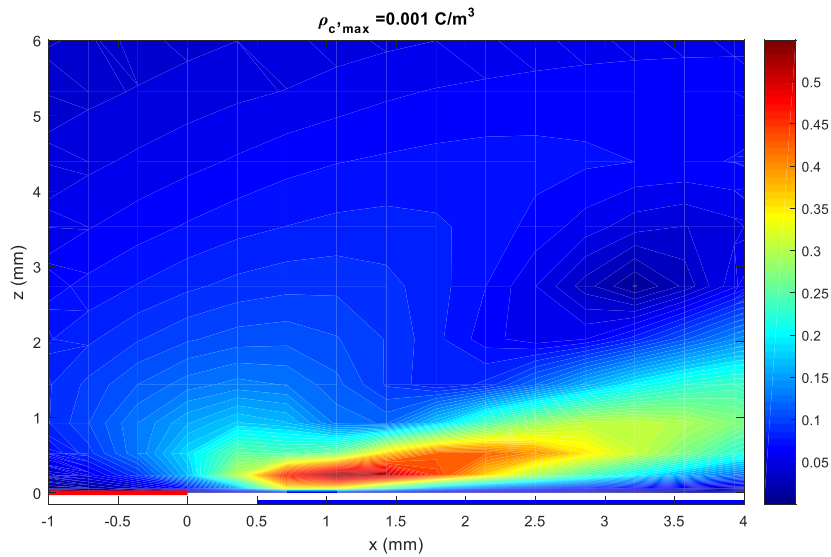


Figura 51. Campo de velocidades inducido para $\rho_{c,MAX} = 0.001 \frac{C}{m^3}$ obtenido con MATLAB

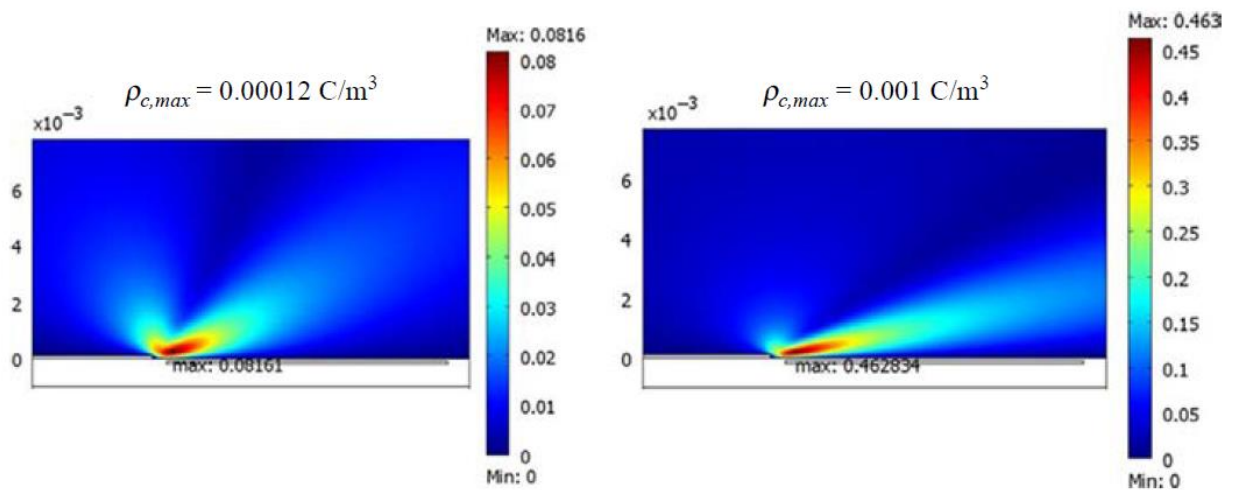


Figura 52. Efecto de $\rho_{c,MAX}$ en la velocidad máxima inducida. Fuente de la imagen: [42]

4.3 Análisis del viento iónico producido

Una vez que hemos estudiado la influencia de los diferentes parámetros en el funcionamiento de nuestro actuador de plasma DBD, es interesante, por último, estudiar la evolución temporal del campo de velocidades. En concordancia con [18], estudiaremos el campo de velocidades inducidas en diferentes instantes de tiempo real de la simulación: en 0.4 ms, en 1.6 ms, en 4.8 ms, en 9.6 ms, en 19.2 ms, en 30 ms y en 40 ms.

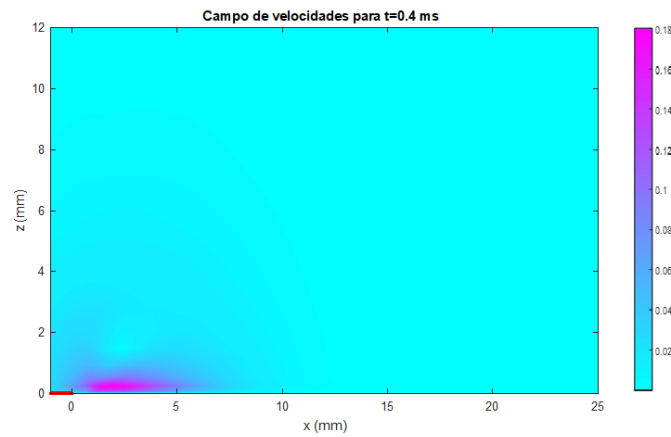


Figura 53. Campo de velocidades para $t=0.4$ ms obtenido con MATLAB

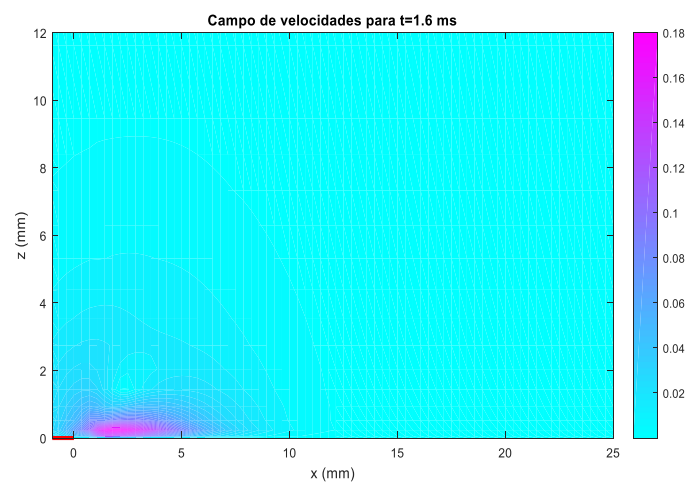


Figura 54. Campo de velocidades para $t=1.6$ ms obtenido con MATLAB

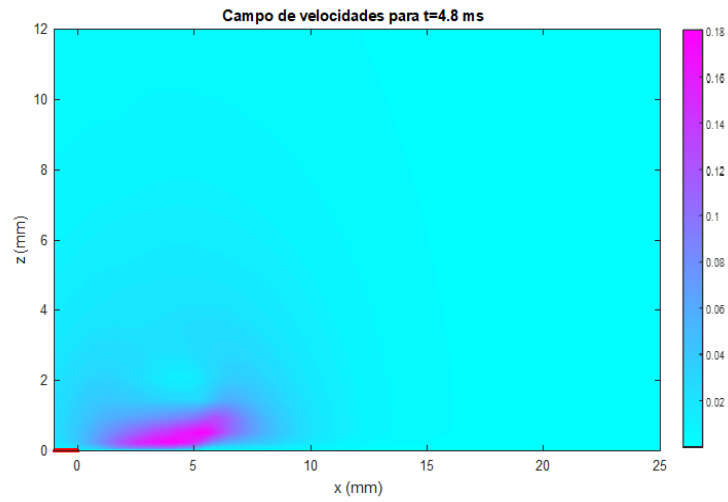


Figura 55. Campo de velocidades para $t=4.8$ ms obtenido con MATLAB

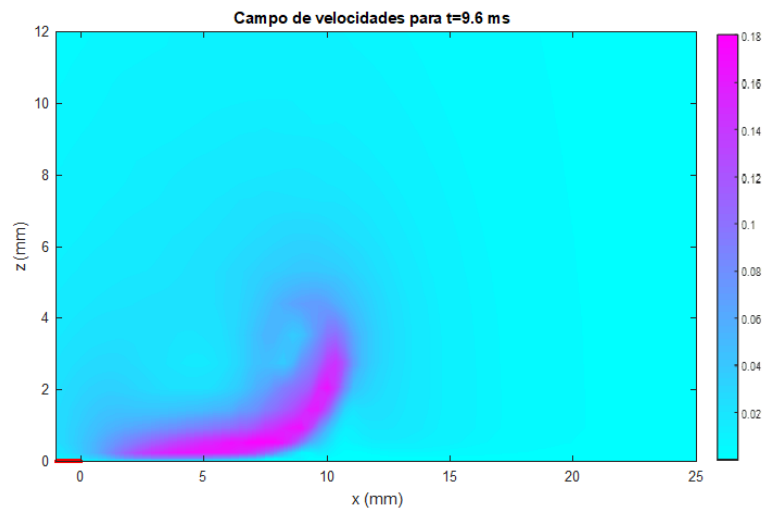


Figura 56. Campo de velocidades para $t=9.6$ ms obtenido con MATLAB

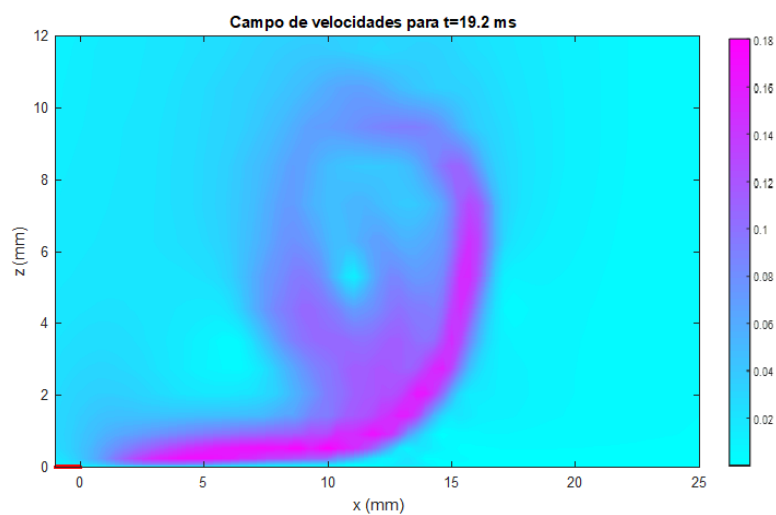


Figura 57. Campo de velocidades para $t=19.2$ ms obtenido con MATLAB

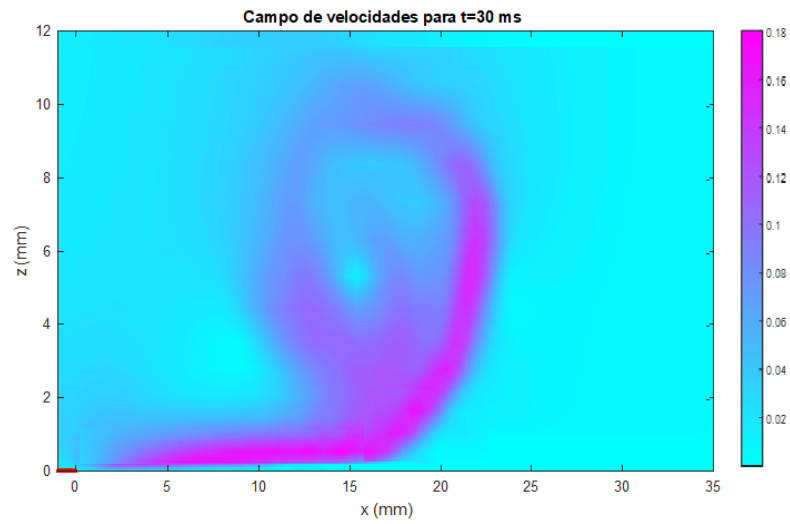


Figura 58. Campo de velocidades para $t=30$ ms obtenido con MATLAB

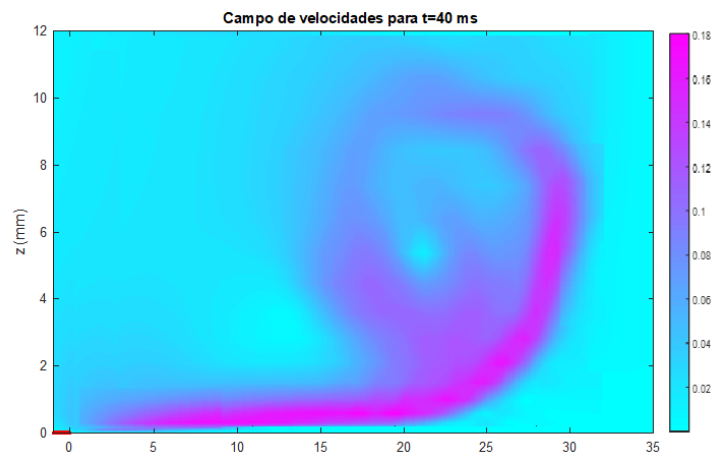


Figura 59. Campo de velocidades para $t=40$ ms obtenido con MATLAB

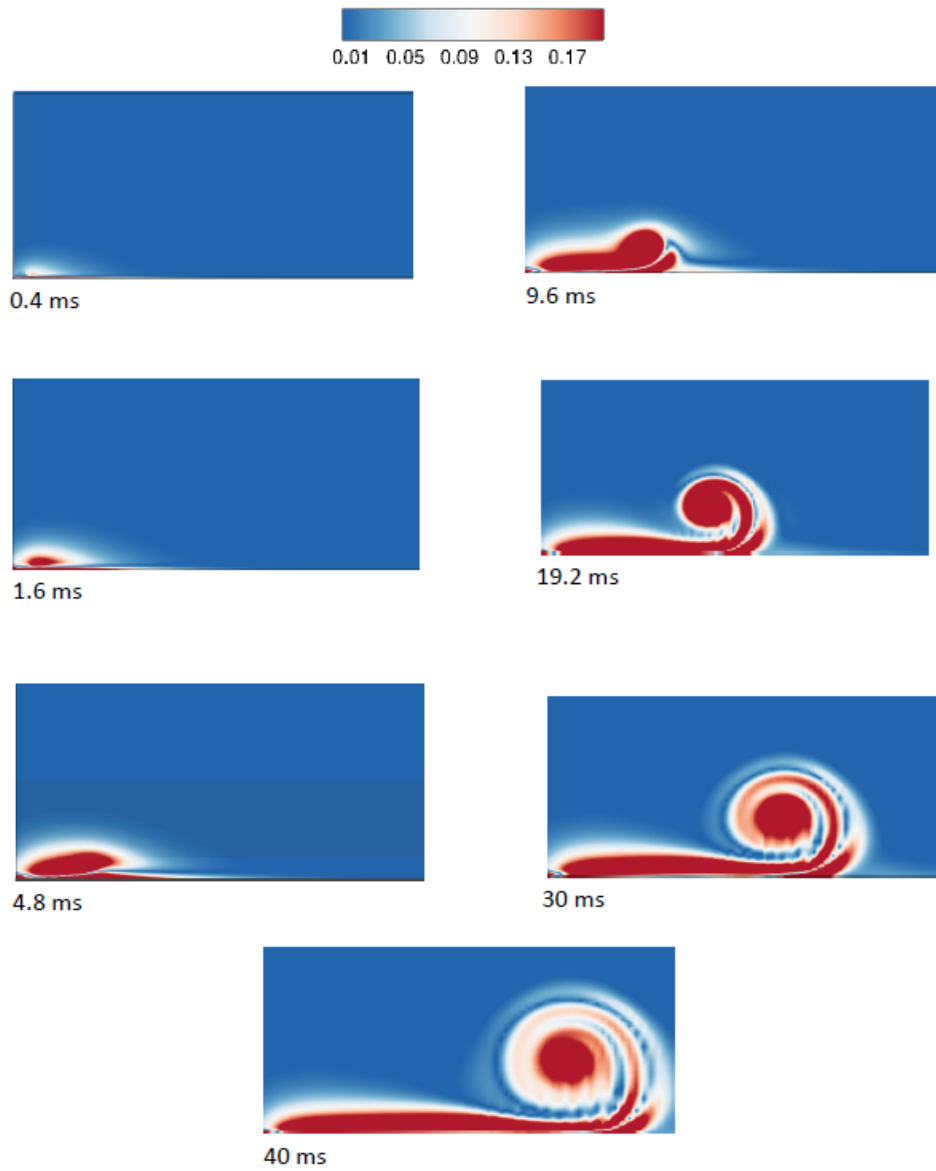


Figura 60. Campo de velocidades obtenido con Oracle3D. Fuente de la imagen: [18]

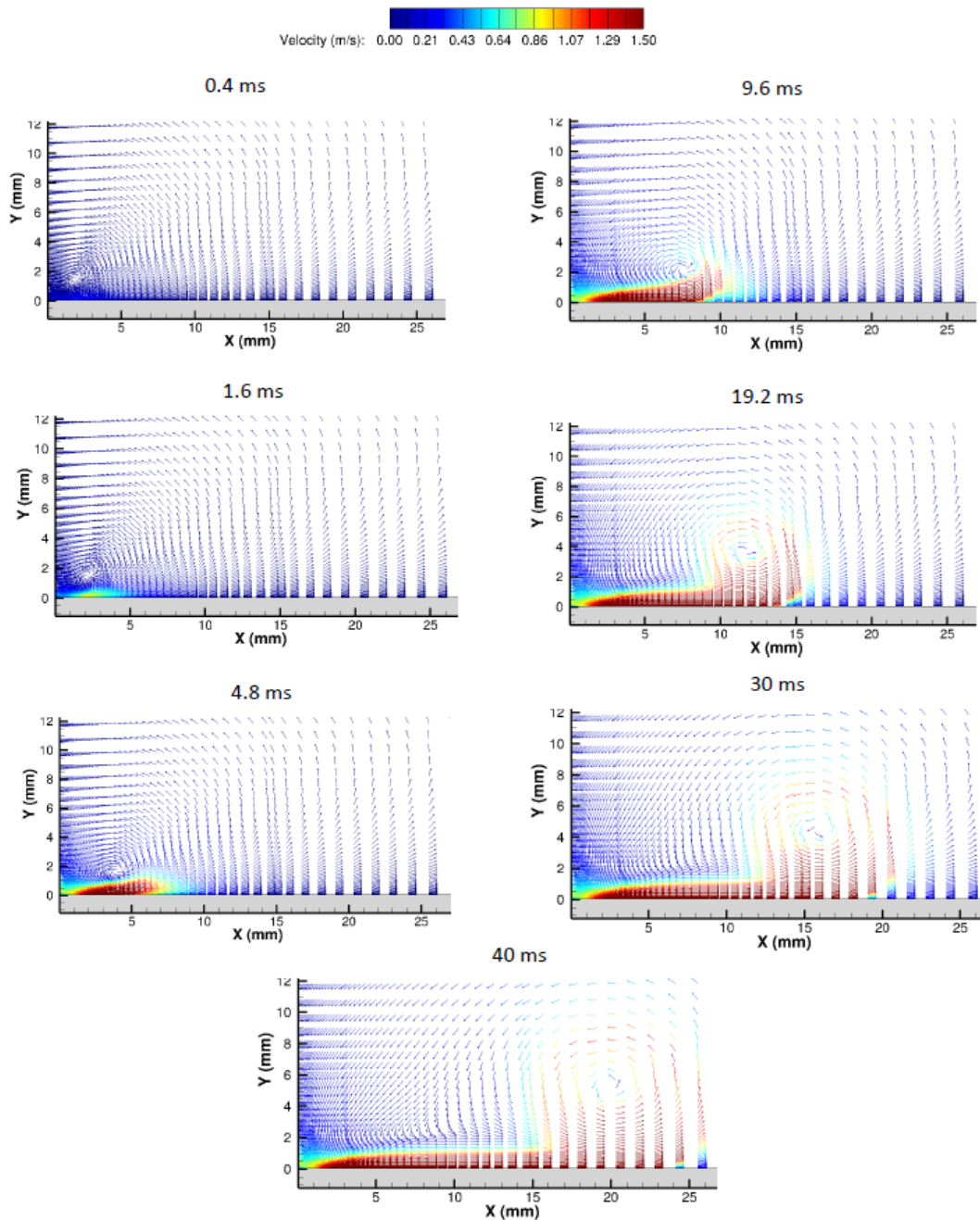


Figura 61. Campo de velocidades vectorial obtenido con Oracle3D. Fuente de la imagen: [18]

De acuerdo con las anteriores gráficas, el proceso es el siguiente: un campo eléctrico en el dominio es aplicado mediante una diferencia de potencial o voltaje entre los electrodos. Este campo eléctrico actúa sobre las especies cargadas y un viento iónico es inducido en el dominio. Tras esto, un vórtice debido a este viento iónico aparece, el cual es algo característico de este tipo de descargas, como puede observarse no sólo en [18], sino también en [19] y [36], que se extiende aguas abajo. Como queda constatado, el centro del vórtice se extiende lentamente en la dirección x , al igual que ocurría con el máximo valor de la velocidad inducida al variar el valor de la longitud de debye.

Como se puede observar, la dinámica del fluido ocurre en la escala de milisegundos. En 0.4 ms se observa que no se adecua a la perfección con [18], sin embargo, en ese valor de tiempo puede considerarse que el actuador

aún se encuentra en el proceso de arranque. Entre 1.6 ms y 4.8 ms se muestra cómo el flujo (jet) se va extendiendo aguas abajo hasta que, en 9.6 ms, se comienza a visualizar la formación del vórtice. Una vez que se ha formado el vórtice, el centro de éste avanza a lo largo del tiempo (aproximadamente en $x=12$ mm en 19.2 ms, $x=15$ mm en 30 ms y finalmente $x=20$ mm en 40 ms), siendo éste rodeado únicamente tanto por fluido en reposo como por el propio viento iónico producido, pues no existe ningún otro flujo externo.

4.4 Coste computacional

Resulta interesante, previo a las conclusiones, el estudio del coste computacional necesario para llevar a cabo las simulaciones del problema fluidomecánico. La simulación se lleva a cabo con un HP Pavilion con procesador Intel Core i5-5200U de dos núcleos a 2.20 GHz con 6,00 GB de RAM, siendo el tiempo total de simulación de 200 ms. Los resultados obtenidos quedan expuestos en la siguiente tabla:

Número de nodos de Chebyshev en z	15	20	30	40	50
Tiempo total	29.421 s	60.311 s	136.586 s	266.142 s	397.104 s

Tabla 4. **Tiempos de ejecución del problema fluidomecánico**

Para las simulaciones recogidas en la tabla 4 se han utilizado 300 nodos en la dirección x en diferencias finitas. Se puede observar cómo, el aumento del número de nodos de Chebyshev en z supone un enorme coste computacional. Por ello, todas las simulaciones realizadas han sido llevadas a cabo con 30-40 nodos en z y entre 200 y 300 nodos en x.

5 CONCLUSIONES, POSIBLES MEJORAS Y LÍNEAS DE ESTUDIO FUTURAS

5.1 Conclusiones

Una vez llegados a este punto, es el momento de realizar un balance acerca de los objetivos y conclusiones alcanzados.

El objetivo principal de este Proyecto de fin de grado ha sido poner de manifiesto que, es posible caracterizar y desarrollar un método numérico sencillo y transparente que permite simular el comportamiento de un actuador DBD con una amplia flexibilidad en cuanto al valor de los parámetros del problema y las condiciones de contorno, haciendo uso de conocimientos básicos de programación y cálculo. La implementación en la herramienta MATLAB de dicho método numérico proporciona un mejor entendimiento del problema y del funcionamiento del dispositivo, creando un entorno abierto a las modificaciones de parámetros, condiciones de contorno e incluso de la forma en que los resultados son expuestos, lejos de los códigos comerciales de tipo "caja negra", en los que el usuario no entiende qué se está haciendo en cada paso del proceso.

Para llevar a cabo lo descrito, se ha utilizado el modelo de Suzen-Huang para calcular la distribución de densidad de carga y la distribución de potencial eléctrico, para luego incorporarlas a las ecuaciones de Navier Stokes y resolver el campo de velocidades, haciendo uso del método de colocación y la definición de la función de corriente.

En el capítulo 1 se han expuesto los fundamentos básicos que rodean a los actuadores de plasma, así como su funcionamiento y su arquitectura, sus ventajas y sus limitaciones.

En el capítulo 2 se han desarrollado las ecuaciones que gobiernan la física de los actuadores de plasma, desde el enfoque eléctrico hasta el enfoque fluidomecánico haciendo uso del modelo de Suzen-Huang y se han expuesto las condiciones de contorno que más tarde deberán cumplirse en la simulación del dispositivo.

En el capítulo 3 se ha expuesto y desarrollado el método de colocación basado tanto en polinomios de Lagrange en nodos de Chebyshev como en diferencias finitas y la discretización utilizada para resolver tanto el problema eléctrico como el problema hidrodinámico.

En el capítulo 4 se ha resuelto numéricamente el problema expuesto en el capítulo 2 y se ha simulado la actuación del dispositivo teniendo en cuenta la influencia de parámetros como el espesor de dieléctrico, el gap entre los electrodos, la amplitud, la frecuencia y la forma de onda utilizada, la densidad de carga máxima o la longitud de Debye, con el fin de validar el funcionamiento de nuestro actuador con investigaciones precedentes. En la última parte de dicho capítulo se analiza el coste computacional de la simulación en función del mallado realizado, con el fin de evidenciar la accesibilidad a los resultados que tiene el Código desarrollado desde cualquier ordenador personal.

De esta forma, y en base a los resultados obtenidos, puede concluirse que:

- Tanto el espesor de dieléctrico como el gap entre los electrodos son parámetros que juegan un rol importantísimo en el comportamiento de nuestro actuador. Así, se determine que el óptimo para el espesor de dieléctrico era de 3 mm, mientras que no existe limitación para el gap, siendo de 1 mm el óptimo alcanzado en este Proyecto.
- A pesar de que que la frecuencia del voltaje aplicado no tiene una influencia significativa en el campo de velocidades inducido, la forma de onda y la amplitud del voltaje aplicado sí que protagonizan un papel imprescindible, determinando la forma de onda cuadrada y un voltaje de unos 20-24 kV como los óptimos para maximizar el campo de velocidades inducido. Sin embargo, tal y como explicábamos en la sección 4.1.7 en base a investigaciones precedentes, por sus fluctuaciones y su alto consumo de energía eléctrica, la forma de onda cuadrada es reemplazada por la forma de onda sinusoidal.
- También veíamos en la sección 4.2 cómo, tanto la densidad de carga máxima como el valor de la

longitud de Debye, influenciaban en gran medida el valor de las velocidades máximas inducidas del viento iónico, tomándose $\lambda_D = 0.001 \text{ m}$ y $\rho_{c,MAX} = 0.001 \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$ como valores estándar.

- Por último, en la sección 4.4 ha quedado constatado cómo, a partir de 30-40 nodos de chebychev en z el coste computacional se dispara, utilizando un total de 40 para todas las simulaciones realizadas.

Por tanto, podemos confirmar el cumplimiento de los objetivos iniciales propuestos, premisa fundamental al inicio del trabajo.

5.2 Posibles mejoras y líneas de estudio futuras

Una vez que quedan expuestas las conclusiones alcanzadas y los objetivos iniciales propuestos han sido cumplidos y abordados, resulta de interés, de cara a futuros proyectos de investigación enumerar las posibles mejoras que podrían beneficiar, completar y mejorar este en cuestión:

- Estudio del efecto del espesor de los electrodos en el campo de velocidades del actuador DBD, que aunque, teniendo en cuenta el estudio realizado en [43], en el que se constata que la influencia del espesor es ínfima en cuanto a la distribución de la densidad de carga y la distribución de potencial eléctrico, resultaría interesante confirmarlo también en el campo de velocidades inducido.
- Estudiar alternativas a las condiciones de contorno estáticas impuestas (donde se ha tenido en cuenta que inicialmente el fluido está en reposo) en el problema fluidodinámico, como podría ser la aplicación de un caudal inicial al flujo.
- De forma complementaria a las condiciones periódicas estudiadas en [43], que no son de interés en el problema hidrodinámico, sería relevante desarrollar la implementación y simulación de multiactuadores DBD en serie (figura 18), con el fin de estudiar la influencia que tiene cada actuador DBD único sobre el flujo total.
- Estudio de la influencia que tendrían el uso de diferentes condiciones de contorno del problema eléctrico sobre el campo de velocidades inducido.
- Simulación del actuador DBD sobre dominios que no sean rectangulares, por ejemplo una geometría roma como podría ser un cilindro o sobre una geometría propia de un cuerpo fuselado, como podría ser un perfil NACA, con el fin de estudiar el campo de presiones, la sustentación, la resistencia aerodinámica, el punto de desprendimiento... para extender los resultados alcanzados.
- Estudio del efecto de la humedad y la temperatura en la actuación del dispositivo.
- Estudio del comportamiento del actuador DBD mediante el uso de otros materiales dieléctricos.
- Construcción de un actuador de plasma DBD para validar los resultados de las simulaciones mediante la medida de la fuerza electrohidrodinámica y la velocidad del viento iónico inducido.

ANEXO: PROGRAMAS DE MATLAB

ANEXO 1: Cálculo de la distribución de densidad de carga

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%% PARÁMETROS DE ENTRADA %%%%%%%%%
%%%%%%%% PROBLEMA ELÉCTRICO %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
epsr=2.7; %permitividad dielectrico (Kapton)
epsa=1; %permitividad aire
ldebye=0.001; %Longitud de Debye [m]; La distribución de densidad de carga es
bastante sensible con esta longitud
mu_gauss=0.001; %factor posicionamiento distribución Gauss
L=0.001; %Longitud característica (gap entre los dos electrodos)
muad=mu_gauss/L; %factor posicionamiento distribución Gauss adimensional
sigmaad=3; %factor de escala distribución Gauss adimensional

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%% INICIO PROGRAMA: CÁLCULO DISTRIBUCIÓN DENSIDAD DE CARGA
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [rhocad]=DensidadCarga(epsa,ldebye,muad,sigmaad,L,Nz,Nx,N1,N2,N3)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%% MALLADO DEL DOMINIO %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%% Nodos de Chebyshev en z %%%%%%%%%
zminad=0/L; zmaxad=0.02/L;
zchad(1:Nz)=(zmaxad+zminad)/2-(zmaxad-zminad)/2*cos(((1:Nz)-1)*pi/(Nz-1));

%%%%%%%% Nodos en diferencias finitas en x %%%%%%%%%
xminad=-0.03/L; xmaxad=0.06/L; x1=-0.01/L; x2=0.04/L;
xchad(1:N1)=linspace(xminad,x1,N1);
xchad((N1):(N2+N1))=linspace(x1,x2,N2+1);
xchad((N1+N2):Nx)=linspace(x2,xmaxad,N3+1);

Nt=Nx*Nz;%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%% OBTENCIÓN DE LAS MATRICES %%%%%%%%%
%%%%%%%% Dxa, Dza, DLa %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[dx,~,~,~]=Derivs(xchad,Nx);
[dz]=dCheby(zchad,Nz);

Dx=kron(dx,speye(Nz));
Dz=kron(speye(Nx),dz);

DL=Dx*Dx+Dz*Dz ;

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%% CONDICIONES DE CONTORNO %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% MATRIZ DE LA ECUACIÓN  $\epsilon_s \nabla^2(\rho_c) - \rho_c / (\lambda_{debye}/L)^2 = 0$ ;
A=epsa*DL-eye(Nt) * (L/ $\lambda_{debye}$ )^2;

% TERMINO INDEPENDIENTE DEL SISTEMA  $A \cdot \rho_c = b$ 
b(1:Nt,1)=0;

% 1) Contornos verticales:  $\rho_c=0$ ;
for j=1:Nz,
    I=j;          A(I,:)=0;  A(I,I)=1;  b(I,1)=0;
    I=(Nx-1)*Nz+j; A(I,:)=0;  A(I,I)=1;  b(I,1)=0;
end

% 2) Contornos horizontales:
for i=2:(Nx-1),
    % a) Inferior
    I=(i-1)*Nz+1;
    if (xchad(i)-0.001/L)*(0.021/L-xchad(i)) >= 0
        G=exp(-(xchad(i)- $\mu_{ad}$ )^2/(2*( $\sigma_{ad}$ )^2));
        A(I,:)=0; A(I,I)=1; b(I,1)=G;
    else
        G=0;
        A(I,:)=Dz(I,:); b(I,1)=0;
    end

    % b) Superior:  $\rho_c=0$ :
    I=(i-1)*Nz+Nz;
    A(I,:)=0; A(I,I)=1; b(I,1)=0;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%% RESOLUCIÓN DEL SISTEMA: CÁLCULO DE DENSIDAD DE CARGA %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% SOLUCIÓN:
[Lu,U,P]=lu(A);
y=Lu\(P*b);
rhocad=U\y;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%% GRÁFICOS %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% PINTA rhoc (contorno o valores)
for j=1:Nz,
    xmat(1:Nx,j)=xchad(1:Nx)'; zmat(1:Nx,j)=zchad(j);
    rhocmat(1:Nx,j)=rhocad(((1:Nx)-1)*Nz+j,1);
end

% %%% Graficamos la distribución de densidad de carga
% figure(1);contourf(xmat, zmat, rhocmat,10); colorbar
% title('Distribución de  $\rho_c/\rho_{c\_m\_a\_x}$ ')
% xlabel('x (mm)')
% ylabel('z (mm)')
% axis([0 10 0 1.6])

```

```

%
% %%% Graficamos los electrodos
% %1)Electrodo expuesto
% eexp_x=[-10 0];
% eexp_y=[0 0];
% %2)Electrodo embebido
% eemb_x=[1 21];
% eemb_y=[-3 -3];
%
% hold on
% plot(eexp_x,eexp_y,'r','LineWidth',3)
% plot(eemb_x,eemb_y,'b','Linewidth',3)

% %%% Graficamos la distribución de densidad de carga
% figure(25);contourf (xmat, zmat, rhocmat,10); colorbar
% title('Distribución de rho_c/rho_c_m_a_x')
% xlabel('x (mm)')
% ylabel('z (mm)')
% axis([0 15 0 0.2])
end

```

ANEXO 2: Cálculo de la distribución de potencial eléctrico

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%% PARÁMETROS DE ENTRADA %%%%%%%%%
%%%%%%%% PROBLEMA ELÉCTRICO %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
epsr=2.7; %permitividad dielectrico (Kapton)
epsa=1; %permitividad aire
ldebye=0.001; %Longitud de Debye [m]; La distribución de densidad de carga es
bastante sensible con esta longitud
mu_gauss=0.001; %factor posicionamiento distribución Gauss
L=0.001; %Longitud característica (gap entre los dos electrodos)
muad=mu_gauss/L; %factor posicionamiento distribución Gauss adimensional
sigmaad=3; %factor de escala distribución Gauss adimensional

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%% INICIO PROGRAMA: CÁLCULO POTENCIAL Y FUERZA
ELECTROHIDRODINÁMICA %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Function
[phia,rhoca]=PoissonPhi_2Domains_mallado(L,Nza,Nzb,Nxa,N1,N2,N3,epsr,ldebye,muad,sigma
ad)
Nz=Nza; Nx=Nxa;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%% DOMINIO SUPERIOR: FLUIDO %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

%%%%%%%%%% Nodos de Chebyshev en z %%%%%%%%%
zaminad=0/L; zamaxad=0.02/L;
zachad(1:Nza)=(zamaxad+zaminad)/2-(zamaxad-zaminad)/2*cos(((1:Nza)-1)*pi/(Nza-1));

%%%%%%%%%% Nodos en diferencias finitas en x %%%%%%%%%
xaminad=-0.03/L; xamaxad=0.06/L; x1=-0.01/L; x2=0.04/L;
xachad(1:N1)=linspace(xaminad,x1,N1);
xachad(N1:(N2+N1))=linspace(x1,x2,N2+1);
xachad((N1+N2):Nxa)=linspace(x2,xamaxad,N3+1);

Na=Nxa*Nza;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%% OBTENCIÓN DE LAS MATRICES %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Dxa,Dza,DLa %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[dxa,~,~,~]=Derivs(xachad,Nxa);
[dza]=dCheby(zachad,Nza);
Dxa=kron(dxa,speye(Nza));
Dza=kron(speye(Nxa),dza);
DLa=Dxa*Dxa+Dza*Dza;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%% CONDICIONES DE CONTORNO %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% MATRIZ DE LA ECUACIÓN nabla^2 rho_c- rho_c=0;
Aa=DLa;
% TERMINO INDEPENDIENTE DEL SISTEMA A*rho_c = b
ba(1:Na,1)=0;

% 1) Contornos verticales: dphidxa=0;
for j=2:Nza-1,
    I=j;          Aa(I,:)=Dxa(I,:);  ba(I,1)=0;
    I=(Nxa-1)*Nza+j;  Aa(I,:)=Dxa(I,:);  ba(I,1)=0;
end

% 2) Contorno horizontal superior dphidza=0;
for i=1:Nxa,
    I=(i-1)*Nza+Nza;
    Aa(I,:)=Dza(I,:);  ba(I,1)=0;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%% DOMINIO INFERIOR: DIELECTRICO %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%% Nodos de Chebyshev en z %%%%%%%%%
zbminad=-0.003/L; zbmaxad=0/L;
zbchad(1:Nzb)=(zbmaxad+zbminad)/2-(zbmaxad-zbminad)/2*cos(((1:Nzb)-1)*pi/(Nzb-1));

%%%%%%%%%% Nodos en diferencias finitas en x %%%%%%%%%
xbminad=xaminad; xbmaxad=xamaxad; Nxb=Nxa;
xbchad(1:N1)=linspace(xbminad,x1,N1);
xbchad(N1:(N2+N1))=linspace(x1,x2,N2+1);

```

```

xbchad ( (N1+N2) :Nxb)=linspace (x2,xbmaxad,N3+1) ;

Nb=Nxb*Nzb;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%% OBTENCIÓN DE LAS MATRICES %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%% Dxb, Dzb, DLb %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[dx,~,~,~]=Derivs (xbchad,Nxb) ;
[dz]=dCheby (zbchad,Nzb) ;
Dxb=kron (dx, speye (Nzb)) ;
Dzb=kron (speye (Nxb) , dz) ;

DLb=Dxb*Dxb+Dzb*Dzb ;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%% CONDICIONES DE CONTORNO %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% MATRIZ DE LA ECUACIÓN nabla^2 rho_c- rho_c=0;
Ab=DLb;
% TERMINO INDEPENDIENTE DEL SISTEMAb b*rho_c = b
bb (1:Nb, 1)=0;

% 1) Contornos verticales: dphidxb=0
for j=2:Nzb-1,
    I=j;          Ab (I, :) =Dxb (I, :);          bb (I, 1)=0;
    I=(Nxb-1)*Nzb+j;  Ab (I, :) =Dxb (I, :);          bb (I, 1)=0;
end

% 2) Contorno horizontal inferior;
for i=1:Nxb,
    I=(i-1)*Nzb+1;
    if (xbchad (i)-0.001/L)*(0.021/L-xbchad (i))>=0,
        Ab (I, :)=0; Ab (I, I)=1; bb (I, 1)=0;
    else
        Ab (I, :)=Dzb (I, :); bb (I, 1)=0;
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%% DOMINIO INTERMEDIO %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Entrefase phia=1 phib=1 if xcha(i)<=1/4, else phia=phib and epsa dphia/dz
=epsb dphib/dz
Bb=zeros (Nb,Na) ; Ba=zeros (Na,Nb) ;
epsa=1; epsb=2.7;
for i=1:Nxa,
    Ia=(i-1)*Nza+1; Ib=(i-1)*Nzb+Nzb;
    if (xbchad (i)+0.01/L)*(0/L-xbchad (i))>=0,
        Aa (Ia, :)=0; Aa (Ia, Ia)=1; ba (Ia, 1)=1;
        Ab (Ib, :)=0; Ab (Ib, Ib)=1; bb (Ib, 1)=1;
    else
        Aa (Ia, :)=Dxa (Ia, :); Ba (Ia, :)= -Dxb (Ib, :); ba (Ia, 1)=0;
        Ab (Ib, :)=epsb*Dzb (Ib, :); Bb (Ib, :)= -epsa*Dza (Ia, :); bb (Ib, 1)=0;
    end
end

```



```

%%%%%%%%% GRÁFICOS %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% figure(2);contourf(xmat, zmat, phimat,10); colorbar;
% title('Distribución del potencial eléctrico \phi^*')
% xlabel('x (mm)')
% ylabel('z (mm)')
% axis([-30 60 -3 20])
% %%% Graficamos los electrodos
%     %1)Electrodo expuesto
%         eexp_x=[-10 0];
%         eexp_y=[0 0];
%     %2)Electrodo embebido
%         eemb_x=[1 21];
%         eemb_y=[-3 -3];
%     hold on
%     plot(eexp_x,eexp_y,'r','LineWidth',3)
%     plot(eemb_x,eemb_y,'b','Linewidth',3)

% figure(3)
% contourf(xmat, zmat, forcexmat,10);colorbar;
% title('Distribución de Fe_x')
% xlabel('x (mm)')
% ylabel('z (mm)')
% %%% Graficamos los electrodos
%     %1)Electrodo expuesto
%         eexp_x=[-10 0];
%         eexp_y=[0 0];
%     %2)Electrodo embebido
%         eemb_x=[1 21];
%         eemb_y=[-3 -3];
%     plot(eexp_x,eexp_y,'r','LineWidth',3)
%     plot(eemb_x,eemb_y,'b','Linewidth',3)

% figure(4)
% contourf(xmat, zmat, forcezmat,10);colorbar;
% title('Distribución de Fe_z')
% xlabel('x (mm)')
% ylabel('z (mm)')
% %%% Graficamos los electrodos
%     %1)Electrodo expuesto
%         eexp_x=[-10 0];
%         eexp_y=[0 0];
%     %2)Electrodo embebido
%         eemb_x=[1 21];
%         eemb_y=[-3 -3];
%     plot(eexp_x,eexp_y,'r','LineWidth',3)
%     plot(eemb_x,eemb_y,'b','Linewidth',3)

% figure(5)
% contourf(xmat, zmat, forcemat,15);colorbar;
% title('Distribución de F (módulo)')
% xlabel('x (mm)')
% ylabel('z (mm)')
% axis([-2 8 0 2])

```



```

% %%% Graficamos los electrodos
%     %1)Electrodo expuesto
%         eexp_x=[-10 0];
%         eexp_y=[0 0];
%     %2)Electrodo embebido
%         eemb_x=[1 21];
%         eemb_y=[-3 -3];
%         hold on
%     plot(eexp_x,eexp_y,'r','LineWidth',3)
%     plot(eemb_x,eemb_y,'g','Linewidth',3)

```

ANEXO 3: Funciones auxiliares

```

function [lp]=dCheby( vp, Np)
for m=1:Np,
    Denp(m)=1;
    for j=1:Np,
        if j==m,
            else
                Denp(m)=Denp(m)*(vp(m)-vp(j));
            end
        end
    for k=1:Np,
        sumk=0;
        for i=1:Np,
            if i==m,
                else
                    prod=1;
                    for l=1:Np,
                        if (l-i)*(l-m)==0,
                            else
                                prod=prod*(vp(k)-vp(l));
                            end
                        end
                    sumk=sumk+prod;
                end
            end
        lp(k,m)=sumk/Denp(m);
        end
    end
end

```

```

function[df d2f d3f d4f]=Derivs(x, N)
df=sparse(N,N);
d2f=sparse(N,N);

```

```

d3f=sparse(N,N);
d4f=sparse(N,N);
Nst=9; Nhst=(Nst-1)/2;
k=1;
[df]=Dmatrix(k, Nst, Nhst, N, x);
k=2;
[d2f]=Dmatrix(k, Nst, Nhst, N, x);
k=3;
[d3f]=Dmatrix(k, Nst, Nhst, N, x);
k=4;
[d4f]=Dmatrix(k, Nst, Nhst, N, x);

```

```

function D=Dmatrix(k, Nst, Nhst, N, x)
D=sparse(N,N);
for i=1:N,
    xbar=x(i);
    if i <= Nhst,
        xst(1:Nst)=x(1:Nst);
        [c]=fdcoeffV(Nst,k,xbar,xst);
        D(i,1:Nst)=c;
    end
    if i > Nhst && i<= N-Nhst,
        xst(1:Nst)=x((i-Nhst):(i+Nhst));
        [c]=fdcoeffV(Nst,k,xbar,xst);
        D(i,(i-Nhst):(i+Nhst))=c;
    end
    if i > N-Nhst,
        xst(1:Nst)=x((N-Nst+1):N);
        [c]=fdcoeffV(Nst,k,xbar,xst);
        D(i,(N-Nst+1):N)=c;
    end
end
end

```

```

function c = fdcoeffV(n,k,xbar,x)
A = ones(n,n);
xrow = (x(:)-xbar); % displacements as a row vector.
hmax=abs(x(n)-x(1));
for i=2:n
A(i,:) = ((xrow/hmax) .^(i-1)) ./ factorial(i-1);
end
b = zeros(n,1); % b is right hand side,
b(k+1) = 1/hmax^k; % so k'th derivative term remains%
Ainv=inv(A);
c = (A\b)'; % solve system for coefficients

```

REFERENCIAS

- [1] BREWER, G. R.; CURRIE, M. R.; KNECHTLI, R. C. Ionic and plasma propulsion for space vehicles. *Proceedings of the IRE*, 1961, vol. 49, no 12, p. 1789-1821.
- [2] JANG, Jaesung; LEE, Seung S. Theoretical and experimental study of MHD (magnetohydrodynamic) micropump. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2000, vol. 80, no 1, p. 84-89.
- [3] MOREAU, Eric. Airflow control by non-thermal plasma actuators. *Journal of physics D: applied physics*, 2007, vol. 40, no 3, p. 605.
- [4] MOREAU, E., et al. Surface dielectric barrier discharge plasma actuators. *ERCOFTAC Bulletin*, 2013, vol. 94, p. 5-10
- [5] JUKES, Tim, et al. Turbulent boundary-layer control for drag reduction using surface plasma. En *2nd AIAA flow control conference*. 2004. p. 2216.
- [6] HE, Chuan; CORKE, Thomas C.; PATEL, Mehul P. Plasma flaps and slats: an application of weakly ionized plasma actuators. *Journal of Aircraft*, 2009, vol. 46, no 3, p. 864-873.
- [7] ERFANI, Rasool, et al. Development of DBD plasma actuators: the double encapsulated electrode. *Acta Astronautica*, 2015, vol. 109, p. 132-143.
- [8] NERETTI, Gabriele. Active flow control by using plasma actuators. *Recent Progress in Some Aircraft Technologies*, 2016, p. 57-76.
- [9] AKANSU, Y. E.; KARAKAYA, F.; ŞANLISOY, A. Active control of flow around NACA 0015 airfoil by using DBD plasma actuator. En *EPJ web of conferences*. EDP Sciences, 2013. p. 01008.
- [10] SETH, U. K., et al. Parametric study of a DBD plasma actuation based on the Suzen-Huang model. *Journal of Electrostatics*, 2018, vol. 93, p. 1-9.
- [11] SUNG, Y., et al. Aerodynamic modification of flow over bluff objects by plasma actuation. *Experiments in Fluids*, 2006, vol. 41, no 3, p. 479-486.
- [12] RODRIGUES, F. F.; PASCOA, J. C.; TRANCOSI, Michele. Experimental analysis of alternative dielectric materials for DBD plasma actuators. En *ASME 2018 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, 2018.
- [13] MCKARTHY, Kieran J., et al. Desarrollo de diagnósticos para plasmas: Catalizador de nueva física. *Revista Española de Física*, 27, 25-39., 2013.
- [14] DONKO, Z.; HARTMANN, P.; KALMAN, G. J. Strongly coupled plasma liquids. *arXiv preprint arXiv:0710.5229*, 2007.
- [15] TANARRO, Isabel. *PLASMA, El Cuarto Estado de la Materia*. 2011.
- [16] GOLDSTON, Robert J.; RUTHERFORD, Paul Harding. *Introduction to plasma physics*. CRC Press, 1995.
- [17] ORLOV, Dmitriy M. *Modelling and simulation of single dielectric barrier discharge plasma actuators*. 2006.
- [18] U.K Seth. *Application to the numerical simulation of various typical Electro-hydro-dynamic flows*. PhD tesis. University of Poitiers, 2018
- [19] BENARD, Nicolas; MOREAU, Eric. Electrical and mechanical characteristics of surface AC dielectric barrier discharge plasma actuators applied to airflow control. *Experiments in Fluids*, 2014, vol. 55, no 11, p. 1846.
- [20] <https://www.areaciencias.com/fisica/plasma.html>
- [21] <http://www.gaiaciencia.com/2017/09/el-plasma-ese-gran-desconocido/>
- [22] <http://saberesciencias.com.mx/2015/01/07/como-se-produce-la-luz/>

- [23] http://ocw.uc3m.es/ciencia-e-oin/quimica-de-los-materiales/Material-de-clase/tema-4.-solidos-liquidos-y-disoluciones-ii/skinless_view
- [24] https://www.plasmatreat.es/tecnologia_del_plasma/tecnologia_openair_plasma.html
- [25] <https://www.nationalgeographic.es/espacio/el-sol-0>
- [26] <https://concepto.de/estado-plasmatico/>
- [27] <https://www.meteorologiaenred.com>
- [28] <https://www.elpais.com.uy>
- [29] <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/electric/dielec.html>
- [30] SUZEN, Yildirim, et al. Numerical simulations of plasma based flow control applications. En 35th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit. 2005. p. 4633.
- [31] BELSON, Brandt, et al. Comparison of plasma actuators in simulations and experiments for control of bypass transition. En 50th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. 2012. p. 1141.
- [32] SATO, Makoto, et al. LES of Separated-flow Controlled by DBD Plasma Actuator around NACA 0015 over Reynolds Number Range of 10^4 - 10^6 . En 53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting. 2015. p. 0308.
- [33] IBRAHIM, I. H.; SKOTE, M. Simulations of the linear plasma synthetic jet actuator utilizing a modified Suzen-Huang model. *Physics of Fluids*, 2012, vol. 24, no 11, p. 113602.
- [34] SKOTE, Martin; IBRAHIM, Imran Halimi. Utilizing the L-PSJA for controlling cylindrical wake flow. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2016, vol. 26, no 5, p. 1593-1616.
- [35] MAHFOZE, O.; LAIZET, S. Skin-friction drag reduction in a channel flow with streamwise-aligned plasma actuators. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2017, vol. 66, p. 83-94.
- [36] BRAUNER, Timothy, et al. Modelling of dielectric barrier discharge plasma actuators for direct numerical simulations. En 8th AIAA Flow Control Conference. 2016. p. 3774.
- [37] MORALES, Carlos. Convección natural de Rayleigh-Bénard en recintos rectangulares (Proyecto Mecánica de Fluidos Avanzada). Trabajo de Fin de Grado. Universidad de Sevilla, Sevilla, 2016.
- [38] RUIZ, Pablo. El método de colocación para el problema de convección de Rayleigh-Bénard, Proyecto de fin de Carrera, Universidad de Sevilla, Sevilla, 2016
- [39] <https://www.pybonacci.org/2013/08/15/ajuste-e-interpolacion-unidimensionales-basicos-en-python-con-scipy/>
- [40] BENARD, N.; MOREAU, E. Role of the electric waveform supplying a dielectric barrier discharge plasma actuator. *Applied Physics Letters*, 2012, vol. 100, no 19, p. 193503.
- [41] SATO, Shintaro; OHNISHI, Naofumi. Influence of voltage waveform on electrohydrodynamic force in a dielectric-barrier-discharge plasma actuator. En 55th AIAA Aerospace Sciences Meeting. 2017. p. 1804.
- [42] HALIMI BIN IBRAHIM, Imran; SKOTE, Martin. Effects of the scalar parameters in the Suzen-Huang model on plasma actuator characteristics. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2013, vol. 23, no 6, p. 1076-1103.
- [43] DOMIGUEZ, Miguel A. Modelado y estudio de un actuador SDBD para el control de flujo. Caracterización de la fuerza hidrodinámica generada, Trabajo de fin de grado, Universidad de Sevilla, Sevilla, 2019.
- [44] CORKE, Thomas C.; ENLOE, C. Lon; WILKINSON, Stephen P. Dielectric barrier discharge plasma actuators for flow control. *Annual review of fluid mechanics*, 2010, vol. 42, p. 505-529.
- [45] LATEN, Jeff B.; LEBEAU, Raymond P. Improving the Performance of a Plasma Actuator Model for DBD and Multi-Encapsulated Electrode Actuators. En 55th AIAA Aerospace Sciences Meeting. 2017. p. 1808.
- [46] PÉREZ-SABORID, M. Notas sobre el cálculo general y eficiente de matrices de derivadas mediante los polinomios de Lagrange y sus aplicaciones, ETSI. Sin publicar, 2019.

GLOSARIO

DBD: Dielectric Barrier Discharge

AC: Corriente alterna

SH: Suzen-Huang

NLP: Término no lineal

