

Proyecto Fin de Grado  
Grado en Ingeniería de las Tecnologías  
Industriales

Aplicaciones de juegos cooperativos en grafos de  
colores

Autor: Juan Borrero Viguera

Tutor: Andrés Jiménez Losada

Manuel Ordoñez Sánchez





Proyecto Fin de Grado  
Grado en Ingeniería de las Tecnologías Industriales

# **Aplicaciones de juegos cooperativos en grafos de colores**

Autor:

Juan Borrero Viguera

Tutor:

Andrés Jiménez Losada

Manuel Ordoñez Sánchez

Dpto. de Matemática Aplicada II  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2019



Proyecto Fin de Grado: Aplicaciones de juegos cooperativos en grafos de colores

Autor: Juan Borrero Viguera

Tutor:

Andrés Jiménez Losada

Manuel Ordoñez Sánchez

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2019

El Secretario del Tribunal

*A Dios*  
*A mi familia y mis amigos*  
*A mis profesores*



# Agradecimientos

---

# Resumen

---

En este trabajo estudiamos dos situaciones distintas, pero a la vez muy parecidas.

En el primer problema nos encontraremos con tres satélites que deben alcanzar seis zonas diferentes. Todos los satélites son análogos en costes y beneficios, pero saturan la capacidad de satélites que caben en una órbita. Creamos por tanto un grafo de colores, un color por cada satélite, que se une a las distintas zonas que son capaces de alcanzar. Creamos a su vez un valor basado en Myerson y en los grafos de colores para medir la importancia de cada satélite en función de las zonas que alcanza en el grafo de colores.

En este caso no hay resultados sorprendentes ya que eliminamos un satélite que alcanza menos zonas que los otros dos. Debemos saber que el valor de Myerson también depende de la distribución de las zonas en el grafo.

En el segundo problema nos encontraremos en una galería de arte la cual debe ser vigilada durante las veinticuatro horas que tiene el día. Para ello dispondremos de tres sistemas de cámaras de seguridad distintos. Todos los sistemas, como en el caso anterior, los consideraremos análogos en costes y beneficios. La galería dispone de un presupuesto limitado, con el cual solo se pueden adquirir dos de los tres sistemas que se disponen. Creamos por tanto un grafo de colores, un color por cada sistema, que se une a las paredes que vigilan. Nuevamente se define un valor basado en Myerson y en los grafos de colores para medir la importancia de cada sistema de cámara de seguridad en función de las paredes que vigila en el grafo de colores.

Aunque de nuevo los resultados no son sorprendentes, ya que eliminamos el sistema azul, el sistema que menos paredes es capaz de vigilar, debemos saber que el valor de Myerson también depende de la distribución de las paredes en la habitación, es decir, en el grafo.

# Abstract

---

In this thesis we study two different situations, but at the same time they are quite similar. In the first case, we will find the next problem, three satellites which must reach six different areas. All satellites are analogous in costs and benefits, but they saturate the capacity of the orbit. We create a graph of colors, a color for each satellite, which links the different areas they can reach. We also create a value based on Myerson and the color graphs to measure the importance of each satellite based on the number of areas that they can reach in the color graph.

In our case there are no surprising results since we eliminate a satellite that reaches the least number of areas. We must know that the value also depends on the position of the areas in the color graph.

In the second case we face the art gallery problem, where all the walls must be secure, for this we will dispose of three security camera systems, all of them are analogous in costs and benefits, but the art gallery has limited budget, the main reason why they must choose two of the three different systems. We create a graph of colors, a color for each camera system, which secure the different walls of art gallery. We also create a value based on Myerson and the color graphs to measure the importance of each security camera system based on the number of walls that they can secure in the color graph

Again, the result is not surprising due to the system that is eliminated is the blue one which secure the least number of walls. We must know that the Myerson's value apart of the number of walls it secures, it also depends of the position of the walls in the graph

<b>Resumen</b>	<b>ix</b>
<b>Abstract</b>	<b>x</b>
<b>Índice</b>	<b>xi</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>xiii</b>
<b>Índice de Ilustraciones</b>	<b>xv</b>
<b>Notación</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Teoría de Juegos y grafos de colores</b>	<b>4</b>
2.1 <i>Juegos cooperativos.</i>	4
2.2 <i>Estructuras de comunicación.</i>	4
2.3 <i>Juegos en estructuras de comunicación coloreadas.</i>	5
2.4 <i>Descripción del valor y solución a nuestro problema</i>	10
<b>3 El problema gps</b>	<b>11</b>
3.1 <i>Introducción GPS.</i>	11
3.2 <i>Motivación del problema GPS</i>	13
3.3 <i>Descripción del problema GPS</i>	15
<b>4 Resolución del problema GPS</b>	<b>18</b>
4.1 <i>Tablas</i>	18
4.2 <i>Cálculos GPS</i>	31
<b>5 El problema de las cámaras</b>	<b>33</b>
5.1 <i>Introducción cámaras.</i>	33
5.2 <i>Motivación del problema cámaras</i>	34
5.3 <i>Descripción del problema cámaras.</i>	34
<b>6 Resolución del problema cámaras</b>	<b>43</b>
6.1 <i>Tablas</i>	44
6.2 <i>Cálculo cámaras</i>	59
<b>7 Conclusiones</b>	<b>61</b>
<b>8 Anexo</b>	<b>62</b>
8.1 <i>Programas para el cálculo de combinaciones</i>	62
8.2 <i>PROGRAMAS PARA EL CÁLCULO DE LOS VALORES.</i>	63
<b>9 Bibliografía</b>	<b>66</b>



# Índice de Tablas

---

## Tablas GPS

Tabla 1. Cálculo de $v(S)$ para el grafo general $L$	18
Tabla 2. Cálculo de $vL_{23}$	22
Tabla 3. Cálculo de $vL_{13}$	25
Tabla 4. Cálculo de $vL_{12}$	29

## Tablas Cámaras

Tabla 5. Cálculo de $v(S)$ para el grafo general $L$	45
Tabla 6. Cálculo de $vL_{23}$	49
Tabla 7. Cálculo de $vL_{13}$	53
Tabla 8. Cálculo de $vL_{12}$	57



# Índice de Ilustraciones

---

Ilustración 1 . Grafo rojo	6
Ilustración 2. Grafo azul	7
Ilustración 3. Grafo verde	7
Ilustración 4. Suma grafo azul y verde	8
Ilustración 5. Suma grafo rojo y azul	8
Ilustración 6. Suma grafo rojo y verde	9
Ilustración 7. Suma grafo rojo, verde y azul	9
Ilustración 8. Trilateración. (método matemático para determinar las posiciones relativas de objetos usando la geometría de triángulos de forma análoga a la triangulación)	11
Ilustración 9. Satélite de la U.S Air Force	12
Ilustración 10. Seis planos orbitales equiespaciados que rodean la tierra	12
Ilustración 11. Agricultor utilizando el GPS para sembrar.	13
Ilustración 12. Avión aterrizando en condiciones de poca visibilidad	14
Ilustración 13. El derrame del Golfo de México en 2010.	15
Ilustración 14. Grafo con satélites y las zonas que alcanzan.	17
Ilustración 15. Grafo de colores de nuestro problema general L	21
Ilustración 16. Grafo de colores $L_{23}$	22
Ilustración 17. Grafo de colores $L_{13}$	25
Ilustración 18. Grafo de colores $L_{12}$	28
Ilustración 19. Primeras Cámaras CCTV	33
Ilustración 20. Cámara cualquiera instalada en el jardín de una casa.	34
Ilustración 21. Ejemplo de varias cámaras vigilando las paredes de una galería.	35
Ilustración 22. Ejemplo de Polígono	36
Ilustración 23. Triangulación de Polígono	36
Ilustración 24. Coloración del polígono triangulado	37
Ilustración 25. Sistema de cámaras del museo.	38
Ilustración 26. Paredes controladas por cámaras azules	38
Ilustración 27. Paredes controladas por cámaras rojas	39
Ilustración 28. Paredes controladas por cámaras verdes	39
Ilustración 29. Problema a resolver	40
Ilustración 30. Grafo con sistemas de cámaras y las paredes que vigilan.	42
Ilustración 31. Problema a resolver.	43
Ilustración 32. Grafo de colores de nuestro problema general L.	44
Ilustración 33. Paredes controladas por sistema de cámaras azules nuestro problema.	48
Ilustración 34. Grafo de colores $L_{23}$	48

Ilustración 35. Paredes controladas por sistema de cámaras rojas. en nuestro problema	52
Ilustración 36. Grafo de colores $L13$	52
Ilustración 37. Paredes controladas por sistema de cámaras verdes en nuestro problema.	56
Ilustración 38. Grafo de colores $L^{12}$ .	56

# Notación

---

$A^*$	Conjugado
c.t.p.	En casi todos los puntos
c.q.d.	Como queríamos demostrar
■	Como queríamos demostrar
e.o.c.	En cualquier otro caso
$E$	número e
$\text{Re}$	Parte real
$\text{Im}$	Parte imaginaria
$\text{Sen}$	Función seno
$\text{Tg}$	Función tangente
$\text{Arctg}$	Función arco tangente
$\text{Sen}$	Función seno
$\sin^x y$	Función seno de $x$ elevado a $y$
$\cos^x y$	Función coseno de $x$ elevado a $y$
$S_a$	Función sampling
$\text{Sgn}$	Función signo
$\text{Rect}$	Función rectángulo
$\text{Sinc}$	Función sinc
$\partial y \partial x$	Derivada parcial de $y$ respecto
$x^\circ$	Notación de grado, $x$ grados.
$\text{Pr}(A)$	Probabilidad del suceso $A$
SNR	Signal-to-noise ratio
MSE	Minimum square error
:	Tal que
$<$	Menor o igual
$>$	Mayor o igual
$\backslash$	Backslash
$\Leftrightarrow$	Si y sólo si

# 1 INTRODUCCIÓN

---

El grafo de colores es uno de los conceptos más importantes en la teoría de grafos y ha sido utilizado en muchas aplicaciones reales en la ingeniería y en la ciencia. El coloreado apropiado de un grafo es el coloreado de los vértices y de las aristas con el mínimo número de colores de modo que no haya dos vértices adyacentes con el mismo color. El mínimo número de colores es conocido como número cromático y la gráfica denominada como grafo de colores.

El origen de la teoría de grafos comenzó con el problema del puente de Königsberg, en 1735. Este problema condujo al concepto del grafo Euleriano. Euler estudio el problema del puente de Königsberg y construyó una estructura para resolver el problema llamado el grafo Euleriano. En 1840, A.F Mobius dio con la idea de un grafo completo y un grafo bipartito y Kuratowski demostró que son planas por medio de problemas recreativos. El concepto de árbol (un grafo conectado sin ciclos) fue implementado por Gustav Kirchoff en 1845, y empleó ideas teóricas de grafos en el cálculo de corrientes en redes o circuitos eléctricos. En 1852 Thomas Guthrie se encontró con el famoso problema de los cuatro colores. Después en 1856, Thomas. P. Kirkman y William R.Hamilton estudiaron los ciclos de polihedra e inventó el concepto llamado grafo Hamiltoniano para estudiar los trayectos los cuales se visitan una sola vez. En 1913, H.Dudeney mencionó un problema cercano, el del rompecabezas. Kenneth Appel y Wolfgang Haken lograrán resolver el problema de los cuatro colores un siglo después de plantearse. Es cuando se considera el nacimiento de la teoría de grafos. Caley estudió formas analíticas particulares de cálculo diferencial para estudiar los árboles. Esto tuvo muchas implicaciones en la química teórica, condujo a la invención de la teoría de grafos enumerativos. De todos modos, el término “Grafo” no fue introducido hasta 1878 cuando Sylvester dibujó una analogía entre invariantes de algebra y diagramas moleculares. En 1941, Ramsey trabajó en coloraciones las cuales condujeron a la identificación de otra rama de la teoría de grafos llamada teoría de grafos extrema. En 1969, Heinrich resolvió el problema de los cuatro colores usando computadoras. El estudio de la conectividad de grafos asintóticos dio lugar a la teoría de grafos aleatorios. Hasta aquí una breve introducción de la historia de la teoría de grafos.

Pasamos a exponer el uso de la coloración de grafos. La coloración de grafos se utiliza especialmente en diversas áreas de investigación de la informática, como la extracción de datos, la segmentación de imágenes, la agrupación de imágenes, la captura de imágenes, la creación de redes, etc. De manera similar, el modelado de las topologías de red se puede hacer usando conceptos grafos. Las aplicaciones más importantes de la coloración de grafos son la asignación de recursos o la programación. Además, las rutas, los paseos y los circuitos en la teoría de grafos se utilizan en numerosas aplicaciones, como el problema de los vendedores ambulantes, el diseño de bases de datos y las redes de recursos. Esto lleva al desarrollo de nuevos algoritmos y teoremas que se pueden usar en muchas otras aplicaciones. Existen varios métodos de coloración disponibles y se pueden utilizar según los requisitos. La coloración adecuada de un grafo es la coloración de los vértices y aristas adyacentes con un número mínimo de colores, de modo que no haya dos vértices adyacentes que tengan el mismo color. El número mínimo de colores se denomina número cromático y el grafo se denomina grafo de color adecuado.

Hay otros ejemplos que podrían ser estudiados como los siguientes.

1. El problema de horarios:  
 En un colegio donde hay  $m$  profesores y  $n$  clases. Un profesor cualquiera  $m_i$  es requerido para enseñar en cada clase  $n_j$  durante un periodo  $p_{ij}$  determinado. Organizar un horario completo con el mínimo número de periodos posibles. Esto es conocido como el problema de los horarios. Sabemos que, en cada periodo, cada profesor puede enseñar en una sola clase, y que en cada clase solo puede haber un solo profesor. Por lo tanto, un horario de enseñanza para un periodo corresponde a una coincidencia en el grafo y, por el contrario, cada coincidencia corresponde a una posible asignación de profesores a las clases durante un periodo.
2. Programación del trabajo:  
 Aquí los trabajos son representados como vértices del grafo y habrá una ventaja entre dos trabajos si estos no pueden ser realizados al mismo tiempo. Ya que existe una correspondencia 1-1 entre una programación factible de los trabajos y el grafo de colores.
3. Programación de aeronaves:  
 Suponiendo que hay  $k$  aeronaves y que deben asignarse  $n$  vuelos. El  $i$ -ésimo vuelo debe ser durante el intervalo de tiempo  $(a_i, b_i)$ . Si se superponen dos vuelos, no se puede asignar el mismo avión a ambos vuelos. Este problema se modela como un grafo de la siguiente manera. Los vértices del gráfico corresponden a los vuelos. Se conectarán dos vértices, si los intervalos de tiempo correspondientes se superponen. Por lo tanto, el grafo es un grafo de intervalo que puede colorearse de manera óptima en el tiempo polinomial. Así podemos decidir qué vuelo es más importante en ese momento.
4. Tarea de un biprocesador: Suponga que hay un conjunto de procesadores y un conjunto de tareas. Cada tarea debe ejecutarse en dos procesadores simultáneamente y estos dos procesadores deben asignarse previamente a la tarea. Un procesador no puede trabajar en dos trabajos simultáneamente. Este tipo de tareas surgirán en la programación de transferencia de archivos entre procesadores. Considere el grafo cuyos vértices corresponden a los procesadores, y si hay una tarea que debe ejecutarse en los procesadores  $i$  y  $j$ , entonces agregamos un borde entre los dos vértices correspondientes. Ahora, el problema de programación se puede modelar como una coloración de bordes de este grafo: no podemos tener dos bordes del mismo color incidente en el mismo vértice. De esta forma ser capaz de discernir los procesadores más importantes.
5. Coloración de mapas y Redes de telefonía móvil GSM:  
 GSM es una red de telefonía móvil donde el área geográfica de la red se divide en regiones o células hexagonales. Cada célula tiene una torre de comunicación que se conecta con los teléfonos móviles dentro de la célula. Todos los teléfonos móviles se conectan a la red GSM buscando células en los vecinos. Dado que GSM funciona solo en cuatro rangos de frecuencia diferentes, está claro por la teoría de grafos que solo se pueden usar cuatro colores para colorear las regiones celulares. Estos cuatro colores diferentes se utilizan para colorear adecuadamente las regiones. Por lo tanto, el algoritmo de coloración de vértices puede usarse para asignar como máximo cuatro frecuencias diferentes para cualquier red de telefonía móvil GSM.

El objetivo de esta breve introducción ha sido presentar la importancia de las ideas teóricas de grafos en diversas áreas de aplicaciones informáticas para investigaciones que pueden usar conceptos teóricos gráficos. Se presenta una visión general especialmente para proyectar la idea de la teoría de grafos.

Respecto al trabajo, en el Capítulo 1 haremos una introducción de la teoría de grafos seguidamente pasaremos al Capítulo 2 donde introducimos la Teoría de juegos y grafos de colores como herramienta de modelización y solución de este tipo de problemas. Después, en el Capítulo 3, se mostrará una breve introducción al GPS, además motivamos y planteamos un caso que es real, el de los satélites, que conectan diferentes zonas con la finalidad de garantizar un funcionamiento correcto del GPS. En el Capítulo 4 aplicamos estas herramientas a nuestro problema en concreto dando una solución plausible a la situación planteada. En el Capítulo 5 volvemos a empezar y desarrollaremos un nuevo caso, el de las cámaras de seguridad, la estructura a seguir será la misma que la acometida anteriormente. Por tanto, en el Capítulo 5, haremos una introducción a las cámaras, además de motivar y plantear el caso. En el 6 aplicaremos las herramientas necesarias para encontrar una solución que resuelva la situación planteada. Por último, en el Capítulo 7 establecemos las conclusiones de ambos casos.

# 2 TEORÍA DE JUEGOS Y GRAFOS DE COLORES

---

**A** Continuación desarrollaremos brevemente la teoría que más adelante aplicaremos a nuestro problema, Para ello desarrollaremos las ideas básicas de juegos cooperativos y las estructuras de comunicación. Terminaremos con una descripción teórica del valor que aplicaremos al problema.

## 2.1 Juegos cooperativos.

Un juego cooperativo con utilidad transferible, juego desde ahora, es un par  $(N, v)$  donde  $N = \{1, n\}$  es un conjunto de elementos finito y es una aplicación en las partes de  $N$  que satisfacen  $v(\emptyset) = 0$ . Los elementos de  $N$  se denominan jugadores, los subconjuntos de jugadores se denominan coaliciones y la aplicación  $v$  es la función característica del juego. Si  $(N, v)$  es un juego y  $S \subset N$ , entonces  $(S, v)$  es un juego nuevo donde  $v$  ahora es la restricción de la función característica a  $2^S$

Un valor para juegos es una función sobre juegos que determina para cada  $(N, v)$  un vector  $\phi: (N, v) \rightarrow R^N$ . El vector asignado a cada juego generalmente se interpreta como un vector de pago, una asignación de los beneficios de cooperación entre todos los jugadores.

El valor Shapley es el valor más conocido para juegos. Está definido para todo el juego  $(N, v)$  y todo jugador  $i$  como

$$Sh_i(N, v) = \sum_{\{S \subset N: i \in S\}} \frac{1}{s} \binom{n}{s}^{-1} (v(S) - v(S \setminus \{i\}))$$

## 2.2 Estructuras de comunicación.

Sea  $N$  un conjunto finito de jugadores y  $LN = \{\{i, j\} \in N \times N: i \neq j\}$  el conjunto de pares de elementos no ordenados  $s$  en  $N$ . Usamos  $ij = \{i, j\}$  de ahora en adelante. Una estructura de comunicación para  $N$  es un grafo  $(N, L)$  donde el conjunto de nodos es  $N$  y el conjunto de aristas  $L \subset LN$  es el conjunto de enlaces factibles (comunicaciones) entre los jugadores en  $N$ . Por lo tanto, identificamos una estructura de comunicación para un conjunto fijo  $N$  con el conjunto de enlaces  $L$ . Si  $L = \emptyset$ , obtenemos un grafo solo con nodos aislados (sin enlaces).

Un juego con estructura de comunicación es una tripleta  $(N, v, L)$  donde  $(N, v)$  es un juego cooperativo y  $L$  es una estructura de comunicación para  $N$ . Un juego cooperativo habitual  $(N, v)$  se identifica con el juego con comunicación estructura  $(N, v, LN)$ .

Sea  $(N, v, L)$  un juego con estructura de comunicación. Dos jugadores  $i, j \in N$  están conectados por  $L$  si hay un camino en  $L$  desde  $i$  hasta  $j$ , es decir, existe  $\{i_1, \dots, i_h\} \in N$  con  $i_1=i$  e  $i_h=j$ .

Una coalición  $S \subseteq N$  cuyos nodos están conectados por las aristas de  $L$  se llama conexa. Las coaliciones conexas maximales corresponden a los conjuntos de nodos de las componentes conectadas del grafo  $(N, L)$  y los denominamos  $N/L$ . Esta familia  $N/L$  es en realidad una partición de  $N$ .

Si  $S \subseteq N$  es una coalición, entonces  $LS = \{ij \in L: i, j \in S\}$  es una nueva estructura de comunicación sobre  $N$  que usa solo las aristas de  $L$  entre jugadores de  $S$ . En particular  $(S, v, LS)$  representa la restricción a  $S$  del juego y la estructura de comunicación tomando solo los nodos en  $S$ . Usaremos la notación  $S/L = S/LS$ .

El modelo de Myerson [9] asume que las coaliciones conectadas son las únicas coaliciones factibles en el juego en el sentido de que las otras cambian sus ganancias dependiendo de las coaliciones conectadas que contienen. Por lo tanto, un valor para juegos con estructuras de comunicación es una aplicación sobre esta familia de juegos que obtiene un vector de pago para cada juego con estructura de comunicación. El valor de Myerson es un valor para juegos con estructura de comunicación basada en el valor de Shapley.

Dado  $(N, v, L)$ , Myerson [9] define un nuevo juego  $(N, v^L)$ , el juego grafo, que incorpora la información de la estructura de comunicación,  $v^L(S) = \sum_{T \in S/L} v(T)$  para todo  $S \subseteq N$ . Entonces, el valor de Myerson es

$$\mu(N, v, L) = Sh(N, v^L).$$

Las propiedades más interesantes del valor de Myerson, que maximizan este valor, son la eficiencia por componentes, y la justicia, para cada  $ij \in L$  tenemos:

$$\mu_i(N, v, L) - \mu_i(N, v, L \setminus \{ij\}) = \mu_j(N, v, L) - \mu_j(N, v, L \setminus \{ij\}).$$

### 2.3 Juegos en estructuras de comunicación coloreadas.

En esta sección presentamos la notación sobre gráficos de colores que necesitaremos para describir nuestro problema general para juegos en estructuras de comunicación de colores.

Un grafo de colores (por enlaces) sobre  $N$  es un conjunto finito  $L = \{L_1, \dots, L_m\}$  de grafos sobre  $N$ . Identificamos cada gráfica  $L_k$  con un color  $k$ . Por lo tanto, diremos que  $M = \{1, \dots, m\}$  la paleta del grafo de colores.

Sea  $L = \{L_1, \dots, L_m\}$  un grafo de color sobre  $N$  y  $M = \{1, \dots, m\}$ . Si  $A \subset M$  definimos  $L_A$  como  $L_A = \{L_p\}_{p \in A}$ , es decir, un nuevo grafo de colores que reduce la paleta a  $A$ .

Denotamos

$$L_A = \bigcup_{p \in A} L_p$$

que es la unión de todos los gráficos pintados con colores en  $A$ .

A continuación, se muestra un ejemplo para aclarar el concepto de suma de grafos. El ejemplo tiene un grafo de tres colores, uno azul, otro rojo y otro verde.  $M = \{r, b, g\}$ . Los grafos son:

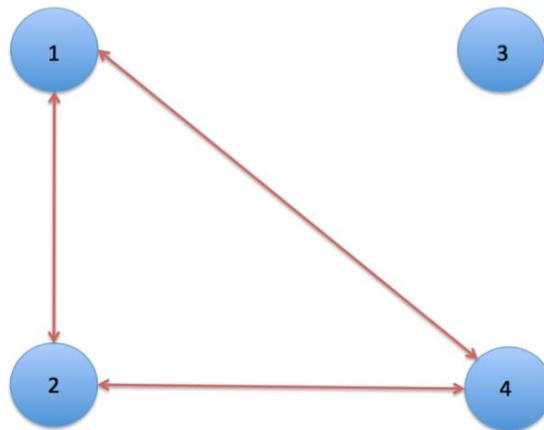


Ilustración 1 . Grafo rojo

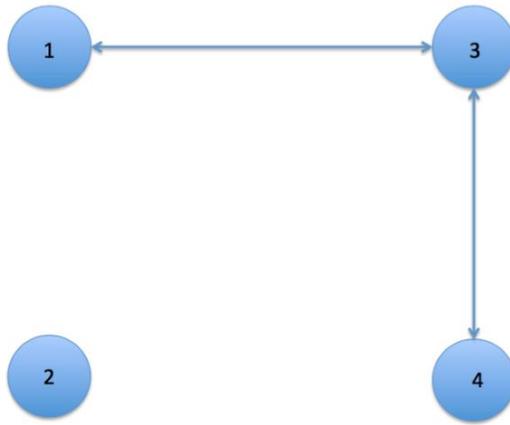


Ilustración 2. Grafo azul

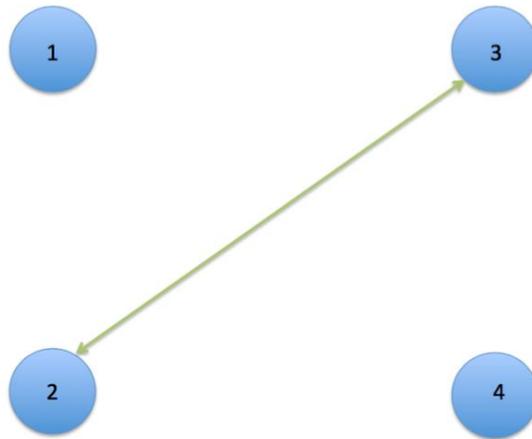


Ilustración 3. Grafo verde

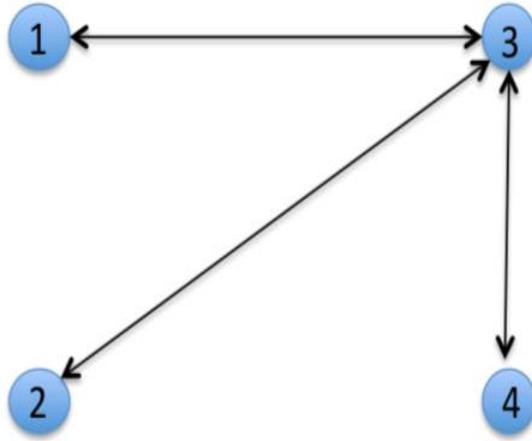


Ilustración 4. Suma grafo azul y verde

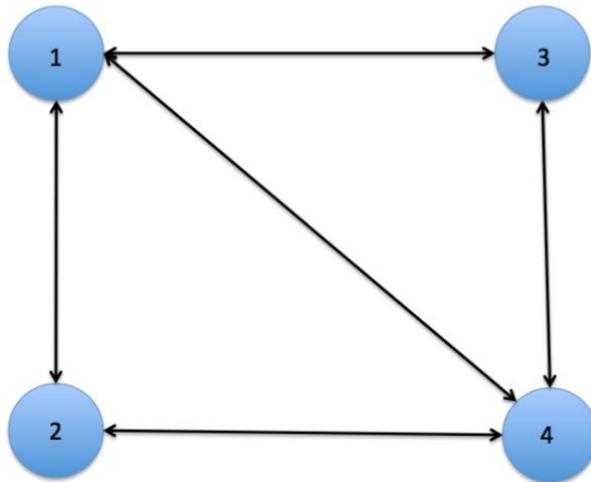


Ilustración 5. Suma grafo rojo y azul

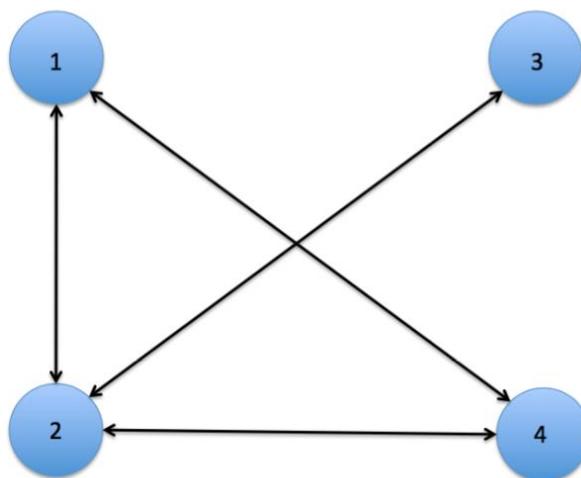


Ilustración 6. Suma grafo rojo y verde

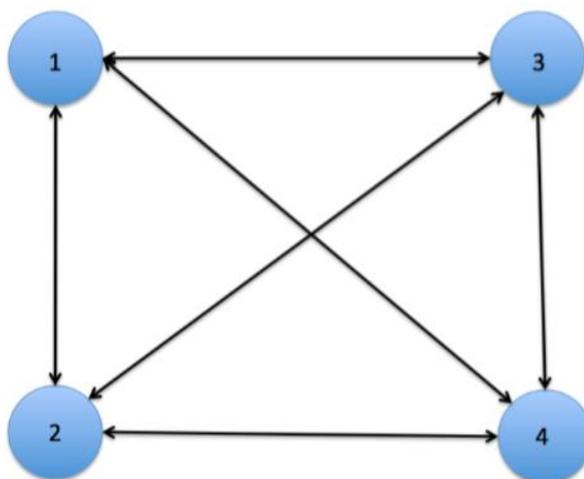


Ilustración 7. Suma grafo rojo, verde y azul

Podemos considerarlo como otro grafo de un nuevo color.

Decimos que un gráfico de color  $L$  está conectado a nivel  $k$ , si al eliminar los enlaces de cualesquiera  $k$  colores de la paleta, la suma de los  $n - k$  colores restantes está conectada, y si eliminamos  $k + 1$  colores, el gráfico restante no está siempre conectado.

Por lo tanto, si  $L$  está conectado a  $k$ , entonces  $k$  es el número máximo de colores que podemos eliminar de la paleta para que la suma de todos los gráficos de colores restantes permanezca conectada. Particularmente,  $L$  está conectado a nivel 0 si  $L$  es conexo, pero  $L \setminus \{p\}$  no está conectado para todas las  $p \in M$ . El número  $k$  se denomina nivel de conexión de  $L$ .

## 2.4 Descripción del valor y solución a nuestro problema

Para describir nuestro problema, seleccionamos un conjunto de agentes  $N$ . Tenemos un juego sobre  $N$  con una función característica que establece el valor de cada grupo de agentes según nuestros criterios.

Un grafo de color  $L$  sobre  $N$  representa diferentes sistemas de comunicación cuya suma garantiza la conexión, aunque hasta cierto número  $k$  (el nivel de conexión) a partir del cual la conexión de los sistemas falla.

Finalmente, definimos una distribución de probabilidad decreciente  $\sigma$  sobre  $\{0, 1, \dots, k\}$ , es decir, con  $\sigma(0) \geq \sigma(1) \dots \geq \sigma(k)$  que muestra la robustez del sistema. Obviamente suponemos que  $\sigma(r) = 0$  o insignificante para todo  $r > k$ .

Definimos un juego sobre una estructura de comunicación coloreada como una quintupla  $(N, v, L, k, \sigma)$  donde  $(N, v)$  es un juego,  $L = \{L_1, \dots, L_m\}$  es un grafo de con nivel de conexión  $k \leq m - 1$  y siendo  $\sigma$  es una distribución de probabilidad decreciente sobre  $\{0, \dots, k\}$ .

Denotamos como  $\wp$  a la familia de juegos en una estructura de comunicación de color.

Un valor para juegos en una estructura de comunicación coloreada es una aplicación sobre  $\wp$  en  $\mathbb{R}^N$ . Este valor permite conseguir un vector de pago para los agentes en  $N$  para cada  $(N, v, L, k, \sigma) \in \wp$ .

Definición del valor: Sea  $(N, v, L, k, \sigma) \in \wp$  un juego en una estructura de comunicación de colores. El valor de Myerson en la estructura de colores se define para un jugador  $i$  como:

$$\mu_i(N, v, L, k, \sigma) = \frac{1}{C(m, k, \sigma)} \sum_{r=0}^k \sigma(r) \sum_{\{A \subset M; |A|=r\}} \mu_i(N, v, L_{M \setminus A})$$

donde  $C(m, k, \sigma) = \sum_{r=0}^k \sigma(r) \binom{m}{r}$ .

Observar que el recíproco de la última expresión es la probabilidad de que, borrando cualquier conjunto de colores de la suma, el resto de los colores formen un grafo conexo.

# 3 EL PROBLEMA GPS

---

## 3.1 Introducción GPS.

El Sistema de posicionamiento global (GPS; Global Positioning System), es un sistema que permite determinar con alta precisión la posición de un objeto cualquiera, ya sea una persona, un vehículo, etc. Dicho sistema fue desarrollado, instalado e implementado por el Departamento de Defensa de los EE. UU, con la finalidad de ser capaz determinar la posición a tiempo real en el globo. Es una utilidad propiedad de los EE. UU, que permite a los usuarios servicios de posicionamiento, navegación y sincronización (PNT).

La composición del sistema GPS consta de tres partes principales:

El segmento espacial, el segmento de control y el segmento de usuario. La Fuerza Aérea de los Estados Unidos desarrolla, mantiene y opera los segmentos de espacio y control. Para determinar las posiciones, el sistema se sirve de tres o más satélites y utiliza la trilateración (método matemático para determinar las posiciones relativas de objetos usando la geometría de triángulos de forma análoga a la triangulación.) para determinar la posición con cierta exactitud. En la práctica se suelen utilizar 4 o más satélites.

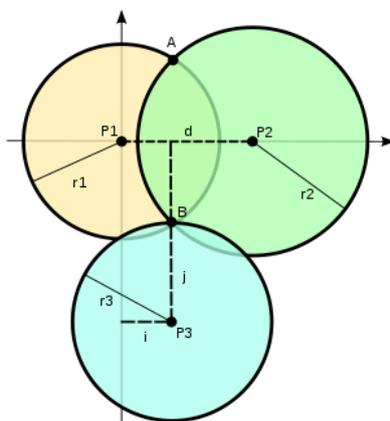


Ilustración 8. Trilateración. (método matemático para determinar las posiciones relativas de objetos usando la geometría de triángulos de forma análoga a la triangulación)

El segmento espacial del GPS consiste en una constelación de satélites que transmiten señales de radio a los usuarios, estas señales son emitidas gracias a la disponibilidad de 24 satélites GPS que están operativos el 95% del tiempo. Para ser capaz de garantizar esta disponibilidad, los Estados Unidos, han estado volando en los últimos años unos 31 satélites GPS.



Ilustración 9. Satélite de la U.S Air Force

Los satélites GPS vuelan en órbita terrestre media (MEO por el inglés *Medium Earth orbit*) a una altitud de aproximadamente 20,200 km (12,550 millas). Cada satélite rodea la Tierra dos veces al día. Los satélites están organizados en seis planos orbitales los cuales están igualmente espaciados y rodean la Tierra. Cada plano contiene cuatro "ranuras" ocupadas por satélites de línea de base. Esta disposición de 24 ranuras (6 planos por 4 ranuras que tiene cada una) garantiza que los usuarios puedan ver como mínimo cuatro satélites desde prácticamente cualquier localización del planeta.



Ilustración 10. Seis planos orbitales equiespaciados que rodean la tierra

La Fuerza Aérea normalmente vuela con más de 24 satélites GPS para mantener la cobertura cada vez que los satélites de línea de base reciben servicio o se retiran del servicio. Los satélites adicionales pueden aumentar el rendimiento del GPS, pero no se consideran parte de la constelación central. En junio de 2011, la Fuerza Aérea completó con éxito una expansión de la constelación de GPS conocida como la configuración "Expandible 24". Tres de las 24 ranuras se expandieron y seis satélites se repositionaron, de modo que tres de los satélites adicionales se convirtieron en parte de la línea de base de la constelación. Como resultado, el GPS ahora

funciona efectivamente como una constelación de 27 ranuras con cobertura mejorada en la mayor parte del mundo.

### 3.2 Motivación del problema GPS

En lo que sigue vamos a desarrollar los fundamentos que han motivado la realización de este trabajo de fin de grado y los argumentos que avalan el tema escogido de investigación. En la actualidad el GPS es una realidad con la que convivimos diariamente, hoy en día es indispensable imaginarse un mundo en el cual no existiese este sistema. Enumeramos algunos de esos fundamentos.

1. El GPS es un elemento esencial de la infraestructura de información global. La naturaleza libre, abierta y confiable del GPS ha llevado al desarrollo de cientos de aplicaciones que afectan directamente todos los aspectos de la vida moderna. La tecnología GPS se encuentra ahora en todo, desde teléfonos móviles, relojes de pulsera, coches hasta contenedores de envío y cajeros automáticos.
2. El GPS ha conseguido aumentar la productividad en una amplia franja de la economía, donde se incluyen la agricultura, la construcción, la minería, la topografía, la entrega de paquetes y la gestión logística de la cadena de suministro. Las principales redes de comunicaciones, los sistemas bancarios, los mercados financieros y las redes eléctricas dependen en gran medida del GPS para la sincronización precisa del tiempo. Algunos servicios inalámbricos no pueden funcionar sin él.



Ilustración 11. Agricultor utilizando el GPS para sembrar.

3. El GPS salva vidas al prevenir accidentes de transporte, ayudando a los esfuerzos de búsqueda y rescate, y acelerando la prestación de servicios de emergencia y socorro en casos de desastre. Además, es vital para el Sistema de Transporte Aéreo de Nueva Generación (NextGen) que mejorará la seguridad del vuelo al tiempo que aumenta la capacidad del espacio aéreo. También permite mejorar objetivos científicos tales como el pronóstico del tiempo, el monitoreo de terremotos y la protección ambiental.
4. Gracias al GPS se han conseguido hacer rutas aéreas nuevas y más eficientes, se realizan grandes ahorros en tiempo, gasoil y por tanto en dinero, también permite reducir la separación entre aeronaves, manteniendo una separación idónea, lo que permite mayor afluencia de aviones viajando al mismo tiempo sin que haya el menor riesgo de accidente. Al mismo tiempo, en los aeropuertos, aumenta significativamente los beneficios operativos y de seguridad, permite aterrizajes en condiciones meteorológicas de poca visibilidad. En el Sistema de Advertencia de Proximidad a Tierra Mejorada (EGPWS) ha demostrado ser exitoso en la reducción del riesgo de vuelo controlado en terreno, una causa importante de muchos accidentes de aviación.



Ilustración 12. Avión aterrizando en condiciones de poca visibilidad

Además de los beneficios ya mencionados anteriormente el GPS ayuda a pronosticar cambios en el entorno. Al integrar el GPS en métodos operacionales utilizados por meteorólogos se puede determinar el contenido de agua en atmósfera, lo que mejora la precisión de los pronósticos meteorológicos. Además, la proliferación de sitios de rastreo y mareas por GPS junto a la mejora en la estimación de componente vertical de la posición de un sitio a partir de las mediciones por GPS, brindan una oportunidad única de observar directamente los efectos de las mareas oceánicas. Sin ir más lejos, en el desastre del derrame de petróleo de 2010 en el Golfo de México, el GPS jugó un papel decisivo en el cual todos los equipos de limpieza se apoyaron.



Ilustración 13.El derrame del Golfo de México en 2010.

Los nuevos usos del GPS se inventan todos los días y están limitados únicamente por la imaginación humana.

### 3.3 Descripción del problema GPS

El objetivo de nuestro estudio es la resolución mediante las matemáticas de un problema muy actual. Más concretamente, estudiaremos este problema y trataremos de resolverlo desde la rama de la matemática que es la teoría de juegos. Abordaremos una problemática de carácter general. Dicha problemática, consiste en poder diferenciar el orden de importancia que debemos de seguir para la toma de decisiones en función de multitud de factores, donde a priori no hay ningún orden claro. Para resolverlo, crearemos un modelo basado en grafos de color siguiendo el anterior capítulo, que nos permitirá a través de la generalización del valor de Myerson determinar una medida de la importancia de las diferentes posibilidades que se nos presentan y así decidir de cual podemos prescindir.

El Departamento de Defensa de los EE. UU, con la finalidad de ser capaz determinar la posición a tiempo real en el globo lanzará tres satélites diferentes que se colocaran en tres orbitas distintas, por tanto, cada satélite tendrá unas coordenadas diferentes, en función de las coordenadas que tenga el satélite, es decir, donde esté colocado, el satélite será capaz de alcanzar ciertas zonas geográficas o no. Lo más conveniente es que alcance el mayor número de zonas para así garantizar el funcionamiento a la perfección del sistema GPS. De esta forma el Departamento de Defensa de los EE. UU estudia que satélites debe enviar, teniendo en cuenta que el satélite que más zonas alcanza será más costoso y por tanto

reducirá los beneficios del proyecto. Una vez realizados los estudios y propuestas, el Departamento de Defensa debe acometer una decisión final, y decidir que tres satélites enviarán teniendo en cuenta el siguiente requisito, si se prescinde de uno de los tres satélites, ya colocados en sus orbitas, los otros dos deben garantizar el funcionamiento del GPS, es decir, deben alcanzar todas las zonas.

Ante esta situación los altos directivos del Departamento de Defensa de los EE. UU se reúnen para simplificar la situación. Llegan a la conclusión de que solo se pueden costear dos de los tres satélites, esto no será un problema ya que dos satélites pueden garantizar el funcionamiento del GPS, porque son capaces de alcanzar todas las zonas.

La pregunta que les queda por resolver a los altos directivos es decidir qué satélites de los 3 dejan fuera, a priori no hay diferencia entre los 3 satélites. Por tanto, la problemática es cómo decidir esto. Ante esta situación daremos prioridad a los satélites que son capaces de alcanzar más zonas. Es entonces donde entra en juego el modelo que crearemos basado en los grafos coloreados que como hemos mencionado anteriormente, a través de la generalización del valor de Myerson nos permitirá discernir cual es el menos importante y por tanto el satélite del cual prescindiremos.

Procedemos a exponer el ejemplo más detallado en el que podamos ver esta situación de una forma más clara.

En este ejemplo analizaremos la situación de 3 satélites

- *Satélite 1 (S1)*
- *Satélite 2 (S2)*
- *Satélite 3 (S3)*

Y 6 posibles destinos:

- *Zona 1 (Z1)*
- *Zona 2 (Z2)*
- *Zona 3 (Z3)*
- *Zona 4 (Z4)*
- *Zona 5 (Z5)*
- *Zona 6 (Z6)*

De las 6 posibles zonas:

- *S1 alcanzará Z1, Z2, Z3, Z5 y Z6.*
- *S2 alcanzará Z1, Z2 y Z4.*
- *S3 alcanzará Z2, Z3, Z4, Z5 y Z6*

Para visualizar mejor esto, se expone a continuación un gráfico con las zonas que alcanza cada satélite.

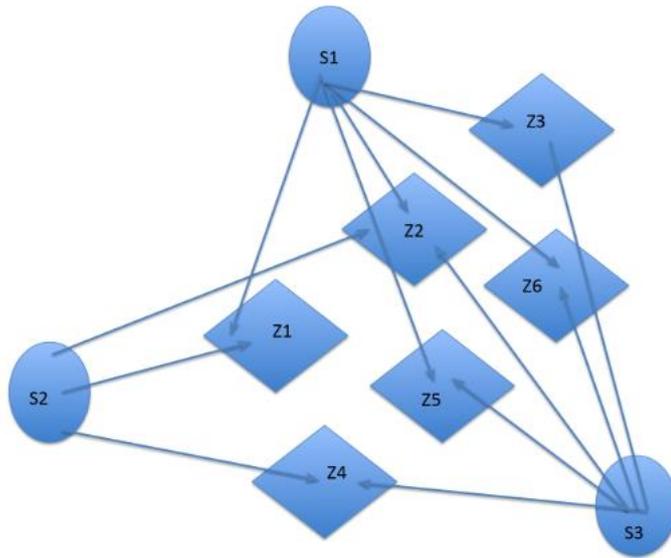


Ilustración 14. Grafo con satélites y las zonas que alcanzan.

# 4 RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA GPS

---

Dividiremos el problema planteado en la sección anterior en dos partes. En primer lugar, calcularemos el valor para grafos de colores en cada zona que en la primera fase estas actúan de nodos.

Normalmente un juego suele expresar el coste o el beneficio de la cooperación de un conjunto de jugadores. Como el comité de expertos han llegado a la conclusión de que en este caso estos no son factores determinantes hemos decidido tomar un juego donde el valor de una coalición de zonas, es decir  $v(s)$ , es igual al número de zonas alcanzadas por los satélites según el grafo. Aquí una arista de una zona a otra se cuenta solo una vez.

En segundo lugar, calcularemos el valor de Myerson, una vez hecho esto, Calculamos el valor asignado a los satélites como la suma de los valores en colores de las zonas y decidimos que sistemas eliminar.

## 4.1 Tablas

El juego sería en nuestro caso:  $v(S)$

Tabla 1. Cálculo de  $v(S)$  para el grafo general L

<b>S</b>	<b>v(S)</b>
$\emptyset$	0
Z6	2
Z5	3
Z5-Z6	3
Z4	4
Z4-Z6	7
Z4-Z5	6
Z4-Z5-Z6	8
Z3	5

Z3-Z6	8
Z3-Z5	7
Z3-Z5-Z6	8
Z3-Z4	8
Z3-Z4-Z6	11
Z3-Z4-Z5	9
Z3-Z4-Z5-Z6	11
Z2	6
Z2-Z6	8
Z2-Z5	9
Z2-Z5-Z6	10
Z2-Z4	9
Z2-Z4-Z6	11
Z2-Z4-Z5	11
Z2-Z4-Z5-Z6	12
Z2-Z3	9
Z2-Z3-Z6	11
Z2-Z3-Z5	11
Z2-Z3-Z5-Z6	12
Z2-Z3-Z4	11
Z2-Z3-Z4-Z6	13
Z2-Z3-Z4-Z5	12
Z2-Z3-Z4-Z5-Z6	13
Z1	4
Z1-Z6	7
Z1-Z5	6
Z1-Z5-Z6	9

Z1-Z4	7
Z1-Z4-Z6	10
Z1-Z4-Z5	9
Z1-Z4-Z5-Z6	11
Z1-Z3	8
Z1-Z3-Z6	11
Z1-Z3-Z5	10
Z1-Z3-Z5-Z6	12
Z1-Z3-Z4	10
Z1-Z3-Z4-Z6	13
Z1-Z3-Z4-Z5	11
Z1-Z3-Z4-Z5-Z6	13
Z1-Z2	8
Z1-Z2-Z6	10
Z1-Z2-Z5	11
Z1-Z2-Z5-Z6	12
Z1-Z2-Z4	10
Z1-Z2-Z4-Z6	12
Z1-Z2-Z4-Z5	12
Z1-Z2-Z4-Z5-Z6	13
Z1-Z2-Z3	10
Z1-Z2-Z3-Z6	12
Z1-Z2-Z3-Z5	12
Z1-Z2-Z3-Z5-Z6	13
Z1-Z2-Z3-Z4	11
Z1-Z2-Z3-Z4-Z6	13
Z1-Z2-Z3-Z4-Z5	12

Z1-Z2-Z3-Z4-Z5-Z6	13
-------------------	----

Nuestro grafo de colores puede ser representado como:

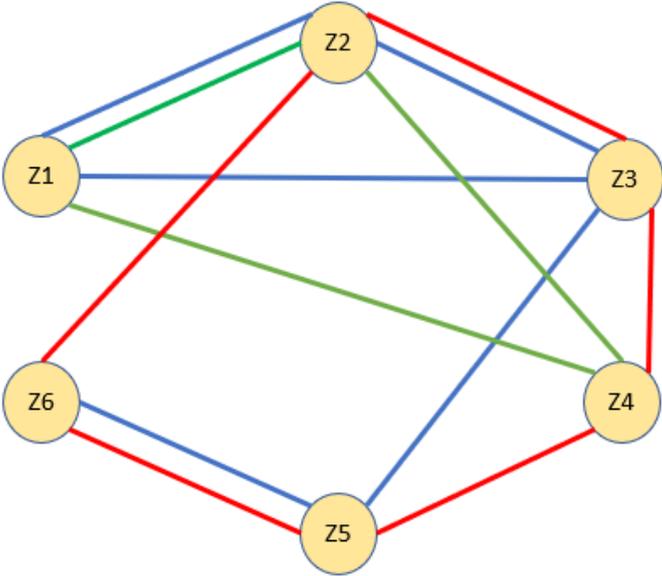


Ilustración 15. Grafo de colores de nuestro problema general L

En esta representación el grafo azul indica las zonas que son alcanzadas por el satélite 1, el verde el satélite 2 y el rojo el 3. Hemos representado el grafo por bloques completos de color indicando que zonas están relacionadas por un satélite si este es capaz de alcanzar ambas

Nuestra paleta entonces es  $L = \{L_1, L_2, L_3\}$  de donde  $M = \{1,2,3\}$

Eliminación del color azul: Grafo  $L_{23}$

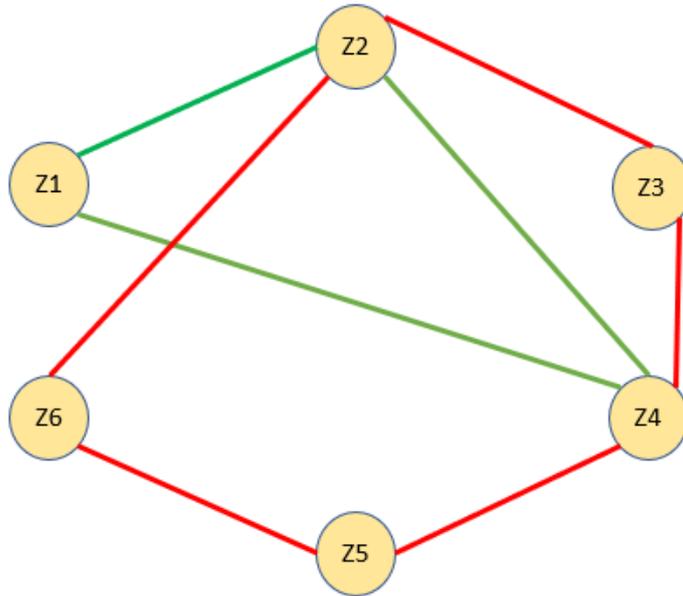


Ilustración 16. Grafo de colores  $L_{23}$

El juego  $v^{L_{23}}$  será: el juego grafo de Myerson asociado al grafo  $L_{23}$ .

Por ejemplo  $v^{L_{23}}(Z1-Z6-Z5) = v(Z1)+v(Z5-Z6)$  debido a que Z5 y Z6 están conectados en el grafo y Z1 no.

Tabla 2. Cálculo de  $v^{L_{23}}$

<b>s</b>		<b>v(s)</b>
$\emptyset$		0
Z6		2
Z5		2
Z5-Z6		3
Z4		6
Z4-Z6	$v(Z4)+v(Z6)$	6
Z4-Z5		5
Z4-Z5-Z6		6
Z3		2
Z3- Z6	$v(Z3)+v(Z6)$	4

Z3-Z5	$v(Z3)+v(Z5)$	4
Z3-Z5-Z6	$v(Z3)+v(Z5-Z6)$	5
Z3-Z4		5
Z3-Z4-Z6	$v(Z3-Z4)+v(Z6)$	7
Z3-Z4-Z5		6
Z3-Z4-Z5-Z6		7
Z2		4
Z2-Z6		5
Z2-Z5	$v(Z2)+v(Z5)$	6
Z2-Z5-Z6		6
Z2-Z4		7
Z2-Z4-Z6		8
Z2-Z4-Z5		8
Z2-Z4-Z5-Z6		8
Z2-Z3		5
Z2-Z3-Z6		6
Z2-Z3-Z5	$v(Z2-Z3)+v(Z5)$	7
Z2-Z3-Z5-Z6		7
Z2-Z3-Z4		7
Z2-Z3-Z4-Z6		8
Z2-Z3-Z4-Z5		8
Z2-Z3-Z4-Z5-Z6		8
Z1		2
Z1-Z6	$v(Z1)+v(Z6)$	4
Z1-Z5	$v(Z1)+v(Z5)$	4
Z1-Z5-Z6	$v(Z1)+v(Z5-Z6)$	5
Z1-Z4		5

Z1-Z4-Z6	$v(Z1-Z4)+v(Z6)$	7
Z1-Z4-Z5		6
Z1-Z4-Z5-Z6		7
Z1-Z3	$v(Z1)+v(Z3)$	4
Z1-Z3-Z6	$v(Z1)+v(Z3)+v(Z6)$	6
Z1-Z3-Z5	$v(Z1)+v(Z3)+v(Z5)$	6
Z1-Z3-Z5-Z6	$v(Z1)+v(Z3)+v(Z5-Z6)$	7
Z1- Z3-Z4		6
Z1-Z3-Z4-Z6	$v(Z1-Z3-Z4)+v(Z6)$	8
Z1-Z3-Z4-Z5		7
Z1-Z3-Z4-Z5-Z6		8
Z1-Z2		5
Z1-Z2-Z6		6
Z1-Z2-Z5	$v(Z1-Z2)+v(Z5)$	7
Z1-Z2 -Z5-Z6		7
Z1-Z2-Z4		7
Z1-Z2-Z4-Z6		8
Z1-Z2-Z4-Z5		8
Z1-Z2 -Z4-Z5-Z6		8
Z1-Z2-Z3		6
Z1-Z2-Z3-Z6		7
Z1-Z2-Z3-Z5	$v(Z1-Z2-Z3)+v(Z5)$	8
Z1-Z2-Z3-Z5-Z6		8
Z1-Z2-Z3-Z4		8
Z1-Z2-Z3-Z4-Z6		8
Z1-Z2-Z3-Z4-Z5		8
Z1-Z2-Z3-Z4-Z5-Z6		8

Eliminación del color verde: Grafo  $L_{13}$

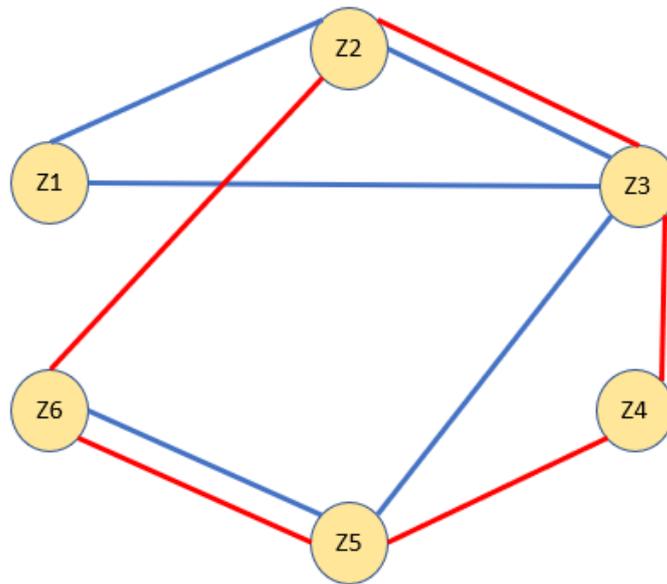


Ilustración 17. Grafo de colores  $L_{13}$

El juego  $v^{L_{13}}$  será: el juego grafo de Myerson asociado al grafo  $L_{13}$ .

Por ejemplo  $v^{L_{13}}(Z4-Z6) = v(Z4)+v(Z6)$  debido a que Z4 y Z6 no están conectados en el grafo.

Tabla 3. Cálculo de  $v^{L_{13}}$

<b>s</b>		<b>v(s)</b>
$\emptyset$		0
Z6		3
Z5		3

Z5-Z6		3
Z4		2
Z4-Z6	$v(Z4) + v(Z6)$	5
Z4-Z5		4
Z4-Z5-Z6		6
Z3		5
Z3- Z6	$v(Z3)+v(Z6)$	8
Z3-Z5		7
Z3-Z5-Z6		9
Z3-Z4		6
Z3-Z4-Z6	$v(Z3-Z4)+v(Z6)$	9
Z3-Z4-Z5		7
Z3-Z4-Z5-Z6		9
Z2		4
Z2-Z6		6
Z2-Z5	$v(Z2)+v(Z5)$	7
Z2-Z5-Z6		8
Z2-Z4	$v(Z2)+v(Z4)$	6
Z2-Z4-Z6	$v(Z2-Z6)+v(Z4)$	8
Z2-Z4-Z5	$v(Z2)+v(Z4-Z5)$	8
Z2-Z4-Z5-Z6		9
Z2-Z3		7
Z2-Z3-Z6		9
Z2-Z3-Z5		9
Z2-Z3-Z5-Z6		10
Z2-Z3-Z4		8
Z2-Z3-Z4-Z6		10

Z2-Z3-Z4-Z5		9
Z2-Z3-Z4-Z5-Z6		10
Z1		2
Z1-Z6	$v(Z1)+v(Z6)$	5
Z1-Z5	$v(Z1)+v(Z5)$	5
Z1-Z5-Z6	$v(Z1)+v(Z5-Z6)$	7
Z1- Z4	$v(Z1)+v(Z4)$	4
Z1-Z4-Z6	$v(Z1)+v(Z4)+V(Z6)$	7
Z1-Z4-Z5	$v(Z1)+v(Z4-Z5)$	6
Z1-Z4-Z5-Z6	$v(Z1)+v(Z4-Z5-Z6)$	8
Z1-Z3		6
Z1-Z3-Z6	$v(Z1-Z3)+v(Z6)$	9
Z1-Z3-Z5		8
Z1-Z3-Z5-Z6		10
Z1- Z3-Z4		7
Z1-Z3-Z4-Z6	$v(Z1-Z3-Z4)+v(Z6)$	10
Z1-Z3-Z4-Z5		9
Z1-Z3-Z4-Z5-Z6		10
Z1-Z2		5
Z1-Z2-Z6		7
Z1-Z2-Z5	$v(Z1-Z2)+v(Z5)$	8
Z1-Z2 -Z5-Z6		9
Z1-Z2-Z4	$v(Z1-Z2)+v(Z4)$	7
Z1-Z2-Z4-Z6	$v(Z1-Z2-Z6)+v(Z4)$	9
Z1-Z2-Z4-Z5	$v(Z1-Z2)+v(Z4-Z5)$	9
Z1-Z2 -Z4-Z5-Z6		10
Z1-Z2-Z3		7

Z1-Z2-Z3-Z6		9
Z1-Z2-Z3-Z5		9
Z1-Z2-Z3-Z5-Z6		10
Z1-Z2-Z3-Z4		8
Z1-Z2-Z3-Z4-Z6		10
Z1-Z2-Z3-Z4-Z5		9
Z1-Z2-Z3-Z4-Z5-Z6		10

Por otro lado, la eliminación del color rojo:

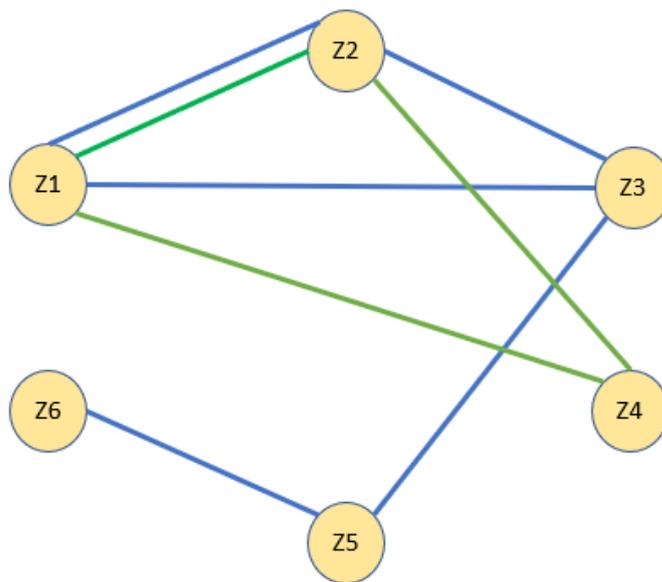


Ilustración 18. Grafo de colores  $L_{12}$

El juego  $v^{L_{12}}$  será: el juego grafo de Myerson asociado al grafo  $L_{12}$ .

Por ejemplo  $v^{L_{12}}(Z4-Z5-Z6) = v(Z4) + v(Z5-Z6)$  debido a que Z5 Y Z6 están conectados en el grafo y Z4 no.

Tabla 4. Cálculo de  $v^{L_{12}}$

<b>S</b>		<b>v(s)</b>
$\emptyset$		0
Z6		1
Z5		1
Z5-Z6	$v(Z5-Z6)$	2
Z4		2
Z4-Z6	$v(Z4)+v(Z6)$	3
Z4-Z5	$v(Z4)+v(Z5)$	3
Z4-Z5-Z6	$v(Z4)+v(Z5-Z6)$	4
Z3		3
Z3- Z6	$v(Z3)+v(Z6)$	4
Z3-Z5		3
Z3-Z5-Z6	$v(Z3-Z5-Z6)$	4
Z3-Z4	$v(Z3)+v(Z4)$	5
Z3-Z4-Z6	$v(Z3)+v(Z4)+v(Z6)$	6
Z3-Z4-Z5	$v(Z3-Z5)+v(Z4)$	5
Z3-Z4-Z5-Z6	$v(Z3-Z5-Z6)+v(Z4)$	6
Z2		4
Z2-Z6	$v(Z2)+v(Z6)$	5
Z2-Z5	$v(Z2)+v(Z5)$	5
Z2-Z5-Z6	$v(Z2)+v(Z5-Z6)$	6
Z2-Z4		5
Z2-Z4-Z6	$v(Z2-Z4)+v(Z6)$	6
Z2-Z4-Z5	$v(Z2-Z4)+v(Z5)$	6
Z2-Z4-Z5-Z6	$v(Z2-Z4)+v(Z5-Z6)$	7

Z2-Z3		6
Z2-Z3-Z6	$v(Z2-Z3)+v(Z6)$	7
Z2-Z3-Z5		6
Z2-Z3-Z5-Z6	$v(Z2-Z3-Z4)+v(Z6)$	7
Z2-Z3-Z4	$v(Z2-Z3)+v(Z4)$	7
Z2-Z3-Z4-Z6	$v(Z2-Z3)+v(Z4)+v(Z6)$	8
Z2-Z3-Z4-Z5	$v(Z2-Z3-Z5)+v(Z4)$	7
Z2-Z3-Z4-Z5-Z6	$v(Z2-Z3-Z5-Z6)+v(Z4)$	8
Z1		4
Z1-Z6	$v(Z1)+v(Z6)$	5
Z1-Z5	$v(Z1)+v(Z5)$	5
Z1-Z5-Z6	$v(Z1)+v(Z5-Z6)$	6
Z1-Z4		5
Z1-Z4-Z6	$v(Z1-Z4)+v(Z6)$	6
Z1-Z4-Z5	$v(Z1-Z4)+v(Z5)$	6
Z1-Z4-Z5-Z6	$v(Z1-Z4)+v(Z5-Z6)$	7
Z1-Z3		6
Z1-Z3-Z6	$v(Z1-Z3)+v(Z6)$	7
Z1-Z3-Z5		6
Z1-Z3-Z5-Z6	$v(Z1-Z3)+v(Z5-Z6)$	7
Z1-Z3-Z4		7
Z1-Z3-Z4-Z6	$v(Z1-Z3-Z4)+v(Z6)$	8
Z1-Z3-Z4-Z5		7
Z1-Z3-Z4-Z5-Z6	$v(Z1-Z3-Z4-Z5-Z6)$	8
Z1-Z2		6
Z1-Z2-Z6	$v(Z1-Z2)+v(Z6)$	7
Z1-Z2-Z5	$v(Z1-Z2)+v(Z5)$	7

Z1-Z2 -Z5-Z6	$v(Z1-Z2)+v(Z5-Z6)$	8
Z1-Z2-Z4		6
Z1-Z2-Z4-Z6	$v(Z1-Z2-Z4)+v(Z6)$	7
Z1-Z2-Z4-Z5	$v(Z1-Z2-Z4)+v(Z5)$	7
Z1-Z2 -Z4-Z5-Z6	$v(Z1-Z2-Z4)+v(Z5-Z6)$	8
Z1-Z2-Z3		7
Z1-Z2-Z3-Z6	$v(Z1-Z2-Z3)+v(Z6)$	8
Z1-Z2-Z3-Z5		7
Z1-Z2-Z3-Z5-Z6	$v(Z1-Z2-Z3-Z5-Z6)$	8
Z1-Z2-Z3-Z4		7
Z1-Z2-Z3-Z4-Z6	$v(Z1-Z2-Z3-Z4)+v(Z6)$	8
Z1-Z2-Z3-Z4-Z5		7
Z1-Z2-Z3-Z4-Z5-Z6		8

## 4.2 Cálculos GPS

En este caso supondremos que la probabilidad de que funcionen todos los sistemas GPS es 0.93 y de que uno cualquiera falle es 0.07.

Estrategia

1. Calculamos el valor por colores de cada zona.
  - 1.1 Los valores de Myerson en cada caso son
    - 1.1.1 Para el grafo completo:  $MCZ1= 0.9833$ ,  $MCZ2= 2.2833$ ,  $MCZ3=2.5167$ ,  $MCZ4= 2.4500$ ,  $MCZ5= 2.1000$ ,  $MCZ6=1.6667$
    - 1.1.2 Quitando el grafo azul:  $MAZ1= 0.4833$ ,  $MAZ2= 1.2167$ ,  $MAZ3=1.4500$ ,  $MAZ4= 0.9333$ ,  $MAZ5= 2.2000$ ,  $MAZ6=1.7167$
    - 1.1.3 Quitando el grafo verde:  $MVZ1= 0.200$ ,  $MVZ2= 0.8500$ ,  $MVZ3=1.7833$ ,  $MVZ4= 1.7333$ ,  $MVZ5= 0.9000$ ,  $MVZ6=1.5333$
    - 1.1.4 Quitando el grafo rojo:  $MRZ1= 0.7667$ ,  $MVZ2= 1.8833$ ,  $MVZ3=1.4333$ ,  $MVZ4= 1.2000$ ,  $MVZ5= 1.0500$ ,  $MVZ6=1.1667$ .
  - 1.2 El valor sobre el grafo de colores es para cada zona

- 1.2.1  $I Z_1 = [0.93 \cdot 0.9833 + 0.07(0.4833 + 0.2000 + 0.7667)] / [0.93 + 3 \cdot 0.07] = 0.8912$
- 1.2.2  $I Z_2 = [0.93 \cdot 2.2833 + 0.07(1.2167 + 0.8500 + 1.8833)] / [0.93 + 3 \cdot 0.07] = 2.1052$
- 1.2.3  $I Z_3 = [0.93 \cdot 2.5167 + 0.07(1.4500 + 1.7833 + 1.4333)] / [0.93 + 3 \cdot 0.07] = 2.3396$
- 1.2.4  $I Z_4 = [0.93 \cdot 2.4500 + 0.07(0.9333 + 1.7333 + 1.2000)] / [0.93 + 3 \cdot 0.07] = 2.2361$
- 1.2.5  $I Z_5 = [0.93 \cdot 2.1000 + 0.07(2.2000 + 0.9000 + 1.0500)] / [0.93 + 3 \cdot 0.07] = 1.9680$
- 1.2.6  $I Z_6 = [0.93 \cdot 1.6667 + 0.07(1.7167 + 1.5333 + 1.1677)] / [0.93 + 3 \cdot 0.07] = 1.6309$

2. Calculamos el valor asignado a los satélites como la suma de los valores en colores de las zonas.

2.1  $v_z(S)$

SATELITES	VALOR FINAL
S1	$0.8912 + 2.1052 + 2.2361 + 1.9680 = 7.2005$
S2	$0.8912 + 2.3396 + 2.2361 = 5.4669$
S3	$2.3396 + 2.2361 + 1.9680 + 1.6309 = 8.1746$

Nuestro método asigna el menor valor, de forma significativa al satélite número 2. Luego este es el que eliminamos.

# 5 EL PROBLEMA DE LAS CÁMARAS

---

## 5.1 Introducción cámaras.

El uso de las cámaras de seguridad comenzó como un elemento de seguridad de la preparación militar. El primer documento de circuito cerrado de televisión CCTV tuvo lugar en 1942 por parte del ejército alemán. Estas primeras grabaciones, eran en blanco y negro y estaban conectadas a monitores y fueron muy importantes para la observación de ensayos de misiles V2 en la preparación de ataques militares a larga distancia.



Ilustración 19. Primeras Cámaras CCTV

Más adelante, aparecieron generadores de cuadrantes con el fin de ser capaces de poder visualizar al mismo tiempo varias cámaras en un solo monitor. A los primer grabaciones en cinta le siguieron las grabaciones en discos digitales. A la misma vez, las cámaras también evolucionar dejando atrás las de b/w y centrándose en las de color, mejorando sensiblemente la su resolución.

Respecto a los sistemas de visionado, la realidad que conocemos hoy dista mucho de los primeros sistemas instalados. En sus inicios estos sistemas se conocían como CCTV como sus propias siglas indican, se trataban de circuitos cerrados de televisión, sin posibilidad de poder acceder desde ningún monitor ni dispositivo fuera de dicho dispositivo. Con los avances tecnológicos producidos años más tarde, empezaron a aparecer los primeros grabadores con tarjeta red, los cuales permitían a través de ciertas aplicaciones visualizar las cámaras desde ordenadores externos a la instalación.

## 5.2 Motivación del problema cámaras

Vamos a desarrollar los fundamentos que han motivado la realización de este trabajo de fin de grado y los argumentos que avalan el tema escogido de investigación.

Todos conocemos a alguien que tiene cámaras de seguridad en su casa, pero ¿por qué? Es realmente eficiente, evita ¿robos?, la respuesta es no, desgraciadamente no los evita, pero si es verdad que reducen la probabilidad del delito y gamberrismo por su efecto disuasorio. Cómo es lógico, el delincuente nunca querrá ser reconocido, ni identificado.



Ilustración 20. Cámara cualquiera instalada en el jardín de una casa.

Entonces cual es la ventaja de tener cámaras de vigilancia en casa, si según los expertos no nos ayudan a evitar robos. Desde luego todo suma y nada resta, pero, si de verdad queremos evitar un robo lo que realmente se necesita es vigilancia activa, es decir, puertas de seguridad, vigilancia las 24 horas del día, entonces y solo entonces las cámaras de seguridad tendrán sentido. El sistema de cámaras de vigilancia genera una vigilancia pasiva y por tanto necesitará de vigilancia activa (vigilantes de seguridad) para que realmente sean útiles. De poco sirve tener cámaras instaladas, si nadie actúa en caso de urgencia. Aunque lo contado anteriormente, no diga mucho a favor de las cámaras, está claro que juegan un papel importante a la hora de prevenir o alertar, es tan así, que las cámaras de seguridad se multiplican cada año por todo el mundo. Según el periódico “El Mundo”, Reino Unido es el lugar más vigilado del mundo, aunque nadie sabe con exactitud la cifra de cámaras exactas, la más repetida es la 4.2 millones de cámaras de circuito cerrado (datos de 2010), por tanto, en la actualidad es seguro que la cifra ha crecido con creces.

## 5.3 Descripción del problema cámaras.

Sabido esto, para este trabajo de fin de grado, las cámaras serán instaladas en una galería de arte la cual debe proteger sus colecciones con cuidado. Durante el día, los asistentes pueden vigilar, pero por la noche esto debe hacerse con cámaras de video. Estas cámaras generalmente se cuelgan del techo y giran alrededor de un eje vertical. Las imágenes de las cámaras se envían a las pantallas de televisión en la oficina de la guardia nocturna. Porque es más sencillo vigilar pocas pantallas en lugar de muchas, la cantidad de cámaras debe ser la menor posible. Una ventaja adicional de una pequeña cantidad de cámaras es que el costo del sistema de seguridad que será menor. Por otro lado, no podemos tener muy pocas cámaras, porque cada parte de la galería debe ser visible al menos para una de ellas. Por lo tanto, debemos colocar las cámaras en posiciones estratégicas, de modo que con total seguridad el sistema de cámaras de vigilancia sea capaz de controlar toda la galería.

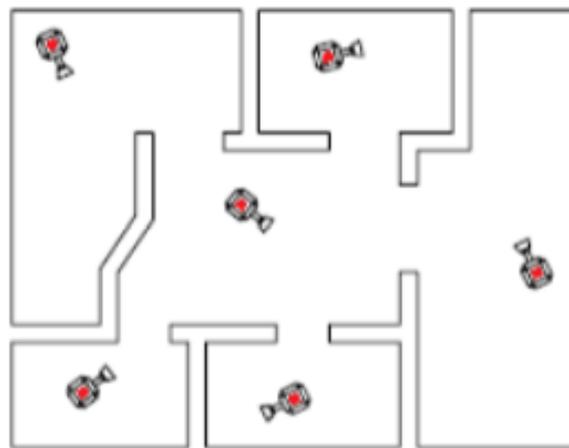


Ilustración 21. Ejemplo de varias cámaras vigilando las paredes de una galería.

Si queremos definir el problema de la galería de arte con mayor precisión, primero debemos formalizar la noción de galería. Una galería es, por supuesto, un espacio tridimensional, además sabemos que un plano de planta nos da suficiente información para colocar las cámaras. Por lo tanto, modelamos una galería como una región poligonal en el plano. Nos restringimos aún más a regiones que son polígonos simples, es decir, regiones encerradas por una sola cadena poligonal cerrada que no se interseca. Por lo tanto, no permitimos regiones con agujeros. La posición de una cámara en la galería corresponde a un punto en el polígono. Una cámara ve esos puntos en el polígono a los que se puede conectar con un segmento abierto que se encuentra en el interior del polígono.



Ilustración 22. Ejemplo de Polígono

Un polígono simple triangulado siempre puede ser de 3 colores. Como resultado, cualquier polígono simple puede protegerse con cámaras  $\lceil n/3 \rceil$ . Pero quizás podamos hacerlo aún mejor. Después de todo, una cámara colocada en un vértice puede proteger más que solo los triángulos incidentes. Desafortunadamente, para cualquier  $n$  hay polígonos simples que requieren cámaras  $\lceil n/3 \rceil$ .

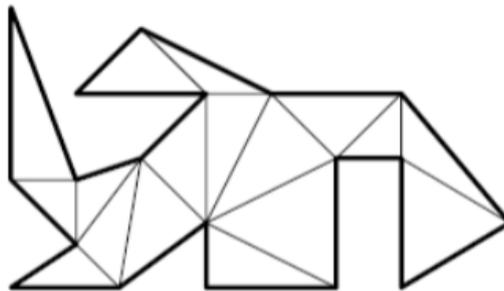


Ilustración 23. Triangulación de Polígono

Para un polígono simple con  $n$  vértices, ocasionalmente  $\lceil n/3 \rceil$  cámaras son ocasionalmente necesarias y siempre suficientes para tener todos los puntos del polígono visibles desde al menos una de las cámaras.

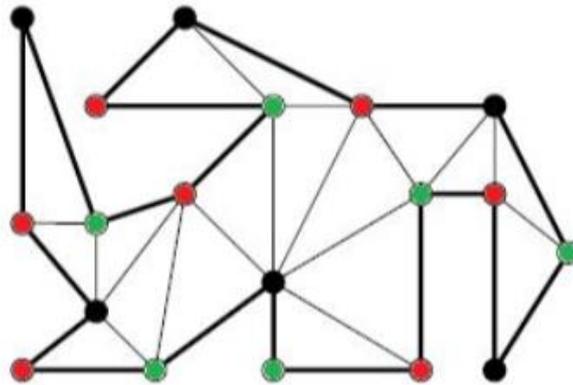


Ilustración 24. Coloración del polígono triangulado

Ahora sabemos que  $\lfloor n/3 \rfloor$  cámaras son siempre suficientes. Pero todavía no tenemos un algoritmo eficiente para calcular las posiciones de las cámaras. Lo que necesitamos es un algoritmo rápido para triangular un polígono simple. El algoritmo debe entregar una representación adecuada de la triangulación en una lista de bordes doblemente conectada, por ejemplo, para que podamos pasar en un tiempo constante de un triángulo a sus vecinos. Dada tal representación, podemos calcular un conjunto de a lo sumo  $\lfloor n/3 \rfloor$  posiciones de cámara en tiempo lineal con el método descrito anteriormente: use la búsqueda en profundidad primero en el gráfico dual para calcular un color 3 y tome la clase de color más pequeña para colocar las cámaras. En las siguientes secciones describimos cómo calcular una triangulación en el tiempo  $O(n \log n)$ . Anticipando esto, ya declaramos el resultado final sobre la protección de un polígono.

Nuestra idea es a partir de la figura ver si hay algún sistema de cámaras que pueda ser eliminado usando el valor sobre grafo de colores.

Consideremos el siguiente sistema de cámaras

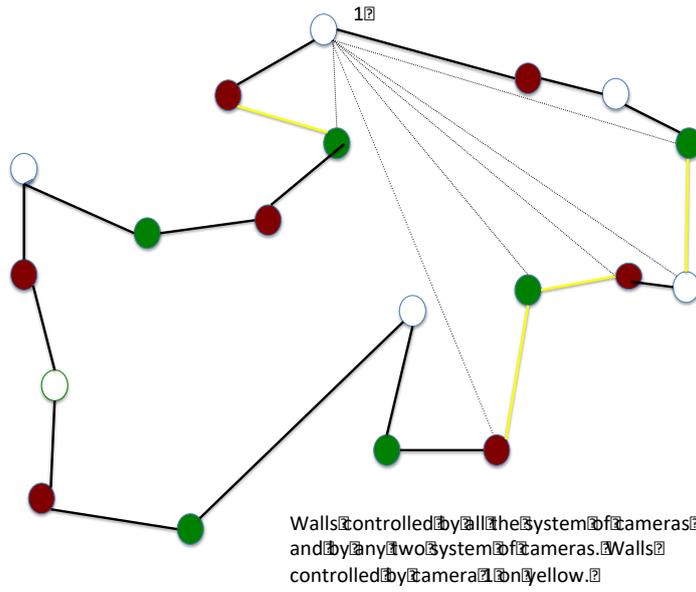


Ilustración 25. Sistema de cámaras del museo.

A continuación, mostramos las paredes del museo cubiertas por cada sistema de cámaras

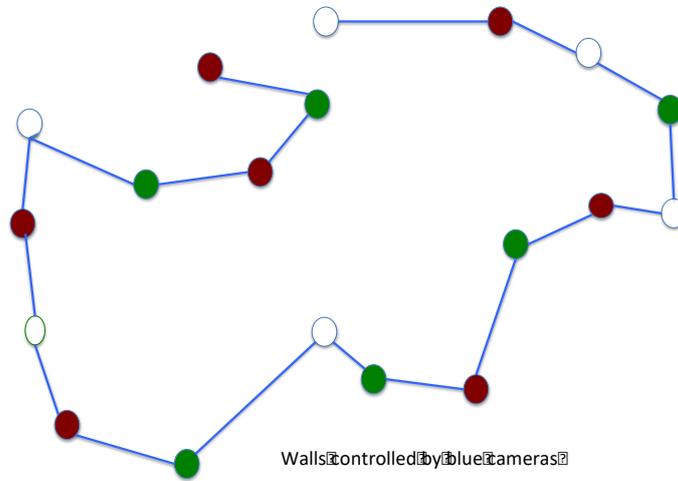


Ilustración 26. Paredes controladas por cámaras azules

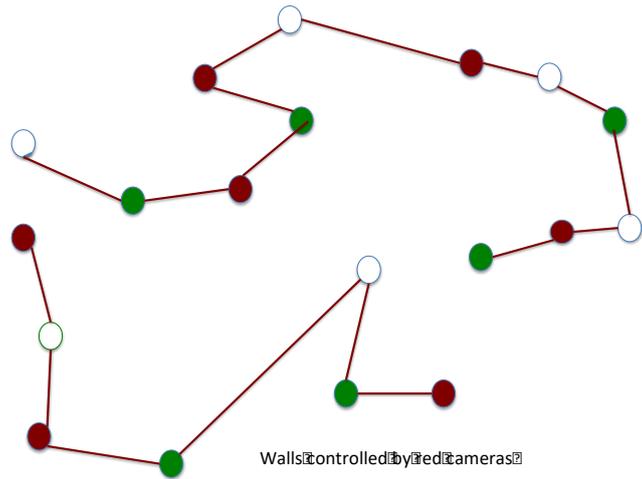


Ilustración 27. Paredes controladas por cámaras rojas

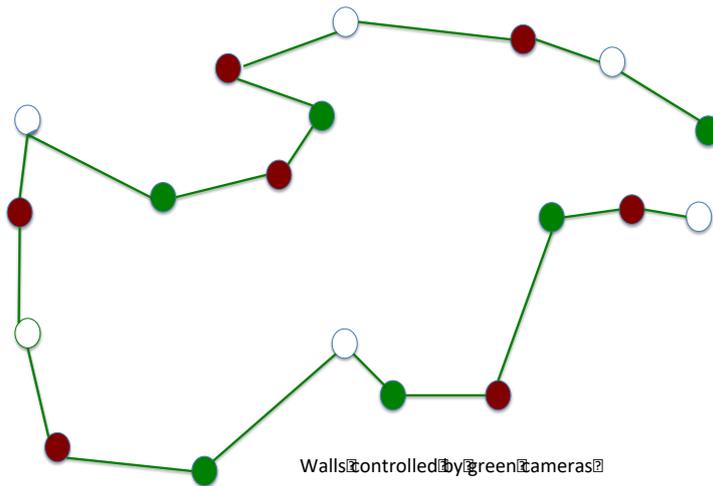


Ilustración 28. Paredes controladas por cámaras verdes

Este problema es 1-conexo ya que podemos eliminar cualquier sistema de cámaras y todas las paredes seguirían cubiertas, sin embargo, si eliminamos 2 quedarían paredes sin cubrir.

En primer lugar, numeramos las cámaras sea cual sea su color en orden consecutivo. Tenemos un total de 19 cámaras.

Así, definimos  $v(S)$ =número de cámaras que cubre las paredes de  $S$ , es decir, la suma por paredes de las cámaras que apuntan a ella

Debido a la gran cantidad de cámaras vamos a resolver el problema en un museo con 6 cámaras.

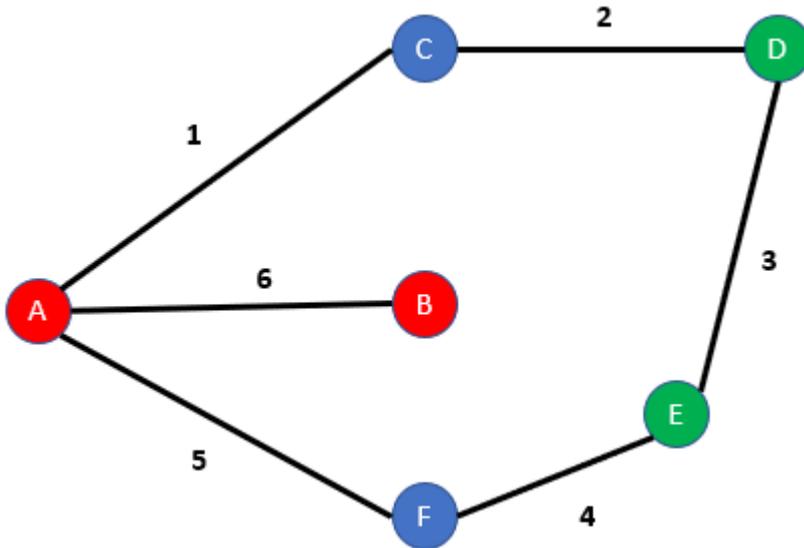


Ilustración 29. Problema a resolver

Nos encontraremos en el siguiente ejemplo.

El Museo Del Prado (Madrid), con la finalidad de garantizar la seguridad que requieren sus cuadros, concretamente los de la habitación 057, donde se encuentra “La Crucifixión” (dibujado por Juan de Flandes), uno de los cuadros más destacados del museo, se colocarán 3 distintos sistemas de cámaras de seguridad distribuidas por toda la habitación.

Así el Museo estudia todas sus propuestas asegurándose de que todas las paredes de la habitación 057 estén bien vigiladas.

Una vez que el Museo ha elaborado todas sus propuestas, las envían al departamento de organización que trabaja para el Museo. El departamento de organización debe asegurarse de obtener la propuesta más eficiente, es decir, aquella propuesta que, siendo capaz de vigilar todas las paredes con total seguridad, consiga al mismo tiempo abaratar la instalación y mantenimiento de dichos sistemas de cámaras.

Además, a la hora de escoger la propuesta deben de tener en cuenta que, si se prescinde de uno de los tres sistemas, tienen que asegurar que los dos sistemas restantes sean capaces de vigilar el museo a la perfección.

Ante dicha problemática, aparece de por medio el departamento de contabilidad y finanzas, quienes comunican al departamento de organización la inesperada noticia que, ante la actual crisis, el Museo no puede hacer frente a la instalación de 3 sistemas de cámaras de seguridad distintos, por tanto, deberán conformarse solo con dos.

He ahí el problema, el departamento de organización ya había elegido una propuesta, pero esta contaba con la instalación de 3 sistemas de cámaras distintos. Pero ahora, debían ser capaces de dentro de la propuesta escogida, deshacerse de uno de los 3 sistemas.

El problema es cómo decidir esto. Ante esta circunstancia vamos a dar una medida de la importancia de los distintos sistemas en función de cuantas cámaras son capaces de vigilar una sola pared, es decir estudiaremos las distintas combinaciones de paredes y responderemos a la pregunta de cuantas paredes son capaces de vigilar las cámaras que quedan funcionando.

Es entonces cuando crearemos el modelo basado en grafos de colores que como hemos dicho nos permitirá a través de la generalización del valor de Myerson determinar una medida de la importancia, en este caso, de las cámaras de seguridad, así sabremos de cual eliminar.

Expongo ahora un ejemplo más extenso, para ver esto con más claridad.

En este ejemplo analizaremos la situación de 3 sistemas de cámaras de seguridad:

- Sistema azul (Az)
- Sistema rojo (Ro)
- Sistema verde (Ve)

Y 6 paredes distintas a vigilar

- Pared 1 (A)
- Pared 2 (B)
- Pared 3 (C)
- Pared 4 (D)
- Pared 5 (E)
- Pared 6 (F)

De las 6 paredes:

- Az vigilará B, D, E Y F
- Ro vigilará A, B, D, E, F
- Ve vigilará TODAS

Para mejor visualización, muestro a continuación una ilustración con los distintos sistemas y las paredes que cubren.

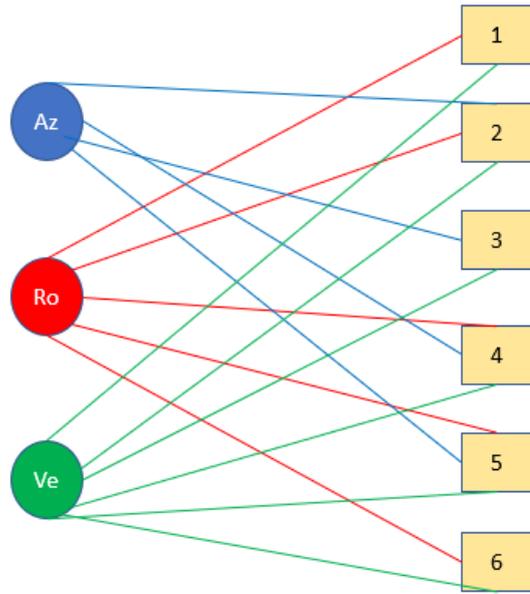


Ilustración 30. Grafo con sistemas de cámaras y las paredes que vigilan.

## 6 RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA CÁMARAS

---

Al igual que en el caso anterior, dividiremos este problema planteado en la sección anterior en dos partes. En primer lugar, calcularemos el valor para grafos de colores para cada coalición de paredes, de aquí saldrán cuatro tablas. Una con todos los sistemas funcionando a la vez, y las otras tres quitando uno de los sistemas y dejando los otros dos funcionando.

En segundo lugar, calcularemos el valor de Myerson, una vez hecho esto, calculamos el valor asignado a los sistemas de cámaras como la suma de los valores en colores de las paredes que alcanzan y decidimos que sistemas eliminar.

Consideremos el siguiente sistema de cámaras, donde hay seis paredes y tres sistemas de cámaras de seguridad distintos, para facilitar los cálculos supondremos que la pared 6 por la parte de abajo, tiene bancos pegados a él, por lo que no será necesario vigilar dicha pared.

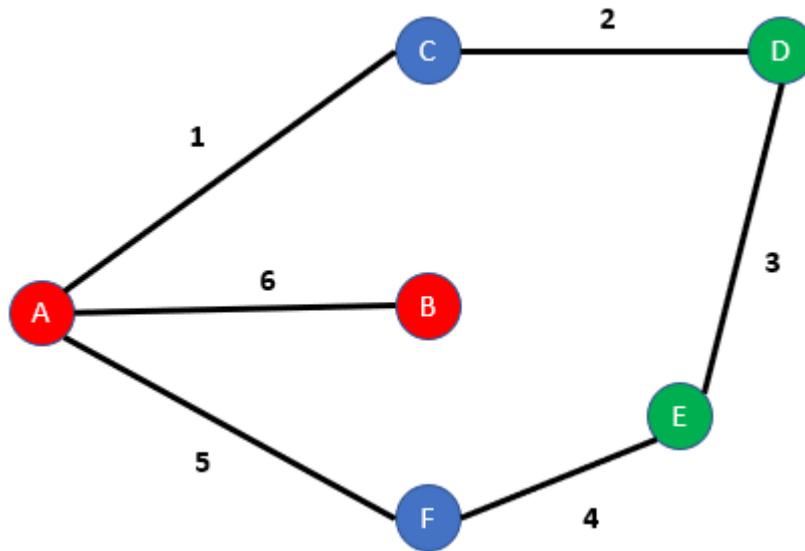


Ilustración 31. Problema a resolver.

## 6.1 Tablas

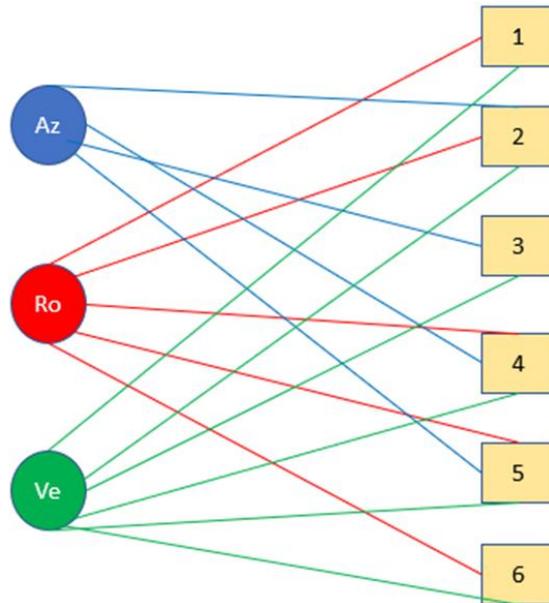


Ilustración 32. Grafo de colores de nuestro problema general L.

Fijémonos que elimine el sistema que elimine, siempre que haya dos de ellos funcionando sea la combinación que sea, estarán todas las paredes bajo control, es decir, estarán siendo vigiladas y la galería no correrá ningún peligro.

En esta representación el grafo azul indica las paredes que son vigiladas por el sistema de cámaras azules que llamaremos también sistema 1, el rojo el sistema de cámaras 2 y el verde el 3. Hemos representado el grafo por bloques completos de color indicando que paredes son vigiladas por cada sistema.

Nuestra paleta entonces es  $L = \{L_1, L_2, L_3\}$  de donde  $M = \{1,2,3\}$

Si consideramos que los tres sistemas de cámaras están funcionando a la vez, la tabla resultante sería:

El juego sería en nuestro caso:  $v(S)$  es el número de cámaras que cubre alguna pared de  $S$ .

Tabla 5. Cálculo de  $v(S)$  para el grafo general  $L$

<b>S</b>	<b>v(S)</b>
<b>∅</b>	<b>0</b>
<b>6</b>	<b>2</b>
<b>5</b>	<b>3</b>
<b>5 6</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>3</b>
<b>4 6</b>	<b>5</b>
<b>4 5</b>	<b>5</b>
<b>4 5 6</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>2</b>
<b>3 6</b>	<b>4</b>
<b>3 5</b>	<b>5</b>
<b>3 5 6</b>	<b>7</b>
<b>3 4</b>	<b>5</b>
<b>3 4 6</b>	<b>7</b>
<b>3 4 5</b>	<b>8</b>
<b>3 4 5 6</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>3</b>
<b>2 6</b>	<b>5</b>

<b>2 5</b>	<b>6</b>
<b>2 5 6</b>	<b>7</b>
<b>2 4</b>	<b>6</b>
<b>2 4 6</b>	<b>8</b>
<b>2 4 5</b>	<b>9</b>
<b>2 4 5 6</b>	<b>11</b>
<b>2 3</b>	<b>5</b>
<b>2 3 6</b>	<b>7</b>
<b>2 3 5</b>	<b>8</b>
<b>2 3 5 6</b>	<b>10</b>
<b>2 3 4</b>	<b>8</b>
<b>2 3 4 6</b>	<b>10</b>
<b>2 3 4 5</b>	<b>11</b>
<b>2 3 4 5 6</b>	<b>13</b>
<b>1</b>	<b>2</b>
<b>1 6</b>	<b>4</b>
<b>1 5</b>	<b>5</b>
<b>1 5 6</b>	<b>7</b>
<b>1 4</b>	<b>5</b>
<b>1 4 6</b>	<b>7</b>
<b>1 4 5</b>	<b>8</b>
<b>1 4 5 6</b>	<b>10</b>
<b>1 3</b>	<b>5</b>
<b>1 3 6</b>	<b>7</b>
<b>1 3 5</b>	<b>8</b>
<b>1 3 5 6</b>	<b>10</b>
<b>1 3 4</b>	<b>7</b>

<b>1 3 4 6</b>	<b>9</b>
<b>1 3 4 5</b>	<b>10</b>
<b>1 3 4 5 6</b>	<b>12</b>
<b>1 2</b>	<b>5</b>
<b>1 2 6</b>	<b>7</b>
<b>1 2 5</b>	<b>8</b>
<b>1 2 5 6</b>	<b>10</b>
<b>1 2 4</b>	<b>7</b>
<b>1 2 4 6</b>	<b>9</b>
<b>1 2 4 5</b>	<b>10</b>
<b>1 2 4 5 6</b>	<b>12</b>
<b>1 2 3</b>	<b>7</b>
<b>1 2 3 6</b>	<b>9</b>
<b>1 2 3 5</b>	<b>10</b>
<b>1 2 3 5 6</b>	<b>12</b>
<b>1 2 3 4</b>	<b>10</b>
<b>1 2 3 4 6</b>	<b>12</b>
<b>1 2 3 4 5</b>	<b>13</b>
<b>1 2 3 4 5 6</b>	<b>15</b>

Además, sabemos que el sistema de cámaras azules controlaría las siguientes paredes

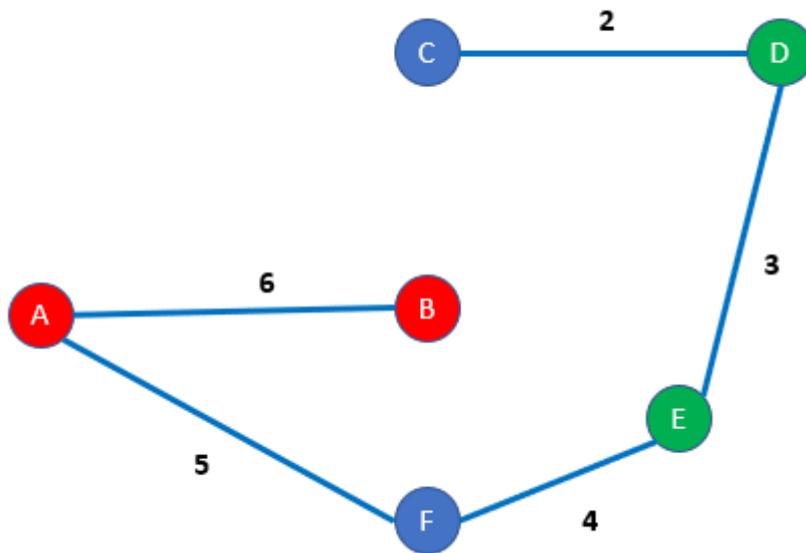


Ilustración 33. Paredes controladas por sistema de cámaras azules nuestro problema.

Entonces si el sistema a **eliminar** fuese el de cámaras **azules**, es decir, estarían funcionando a la vez el sistema rojo y verde, la tabla correspondiente sería:

Eliminación del color azul: Grafo  $L_{23}$

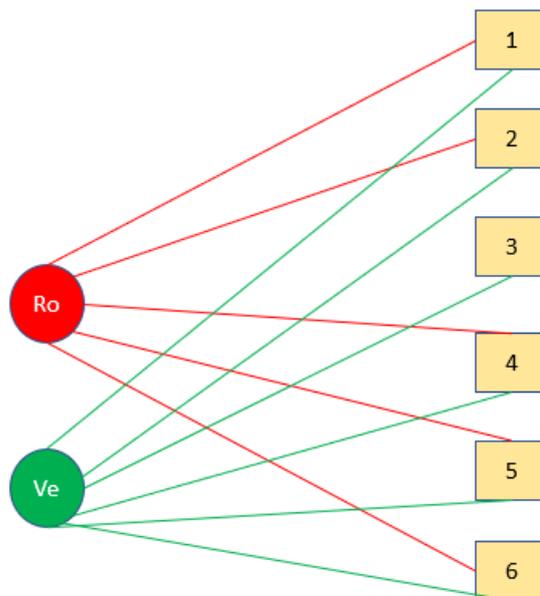


Ilustración 34. Grafo de colores  $L_{23}$

El juego  $v^{L_{23}}$  será:

Tabla 6. Cálculo de  $v^{L_{23}}$

<b>S</b>	<b>v(S)</b>
<b>∅</b>	<b>0</b>
<b>6</b>	<b>2</b>
<b>5</b>	<b>2</b>
<b>5 6</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>2</b>
<b>4 6</b>	<b>4</b>
<b>4 5</b>	<b>4</b>
<b>4 5 6</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>1</b>
<b>3 6</b>	<b>3</b>
<b>3 5</b>	<b>3</b>
<b>3 5 6</b>	<b>5</b>
<b>3 4</b>	<b>3</b>
<b>3 4 6</b>	<b>5</b>
<b>3 4 5</b>	<b>5</b>
<b>3 4 5 6</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>2</b>
<b>2 6</b>	<b>4</b>
<b>2 5</b>	<b>4</b>

<b>2 5 6</b>	<b>6</b>
<b>2 4</b>	<b>4</b>
<b>2 4 6</b>	<b>6</b>
<b>2 4 5</b>	<b>6</b>
<b>2 4 5 6</b>	<b>8</b>
<b>2 3</b>	<b>2</b>
<b>2 3 6</b>	<b>6</b>
<b>2 3 5</b>	<b>6</b>
<b>2 3 5 6</b>	<b>6</b>
<b>2 3 4</b>	<b>6</b>
<b>2 3 4 6</b>	<b>6</b>
<b>2 3 4 5</b>	<b>6</b>
<b>2 3 4 5 6</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>2</b>
<b>1 6</b>	<b>4</b>
<b>1 5</b>	<b>4</b>
<b>1 5 6</b>	<b>6</b>
<b>1 4</b>	<b>4</b>
<b>1 4 6</b>	<b>6</b>
<b>1 4 5</b>	<b>6</b>
<b>1 4 5 6</b>	<b>6</b>
<b>1 3</b>	<b>3</b>
<b>1 3 6</b>	<b>5</b>
<b>1 3 5</b>	<b>5</b>
<b>1 3 5 6</b>	<b>7</b>
<b>1 3 4</b>	<b>5</b>
<b>1 3 4 6</b>	<b>7</b>

<b>1 3 4 5</b>	<b>7</b>
<b>1 3 4 5 6</b>	<b>9</b>
<b>1 2</b>	<b>4</b>
<b>1 2 6</b>	<b>6</b>
<b>1 2 5</b>	<b>6</b>
<b>1 2 5 6</b>	<b>8</b>
<b>1 2 4</b>	<b>6</b>
<b>1 2 4 6</b>	<b>8</b>
<b>1 2 4 5</b>	<b>8</b>
<b>1 2 4 5 6</b>	<b>10</b>
<b>1 2 3</b>	<b>5</b>
<b>1 2 3 6</b>	<b>7</b>
<b>1 2 3 5</b>	<b>7</b>
<b>1 2 3 5 6</b>	<b>9</b>
<b>1 2 3 4</b>	<b>7</b>
<b>1 2 3 4 6</b>	<b>9</b>
<b>1 2 3 4 5</b>	<b>9</b>
<b>1 2 3 4 5 6</b>	<b>11</b>

Por otro lado, sabemos las paredes que controla el sistema rojo.

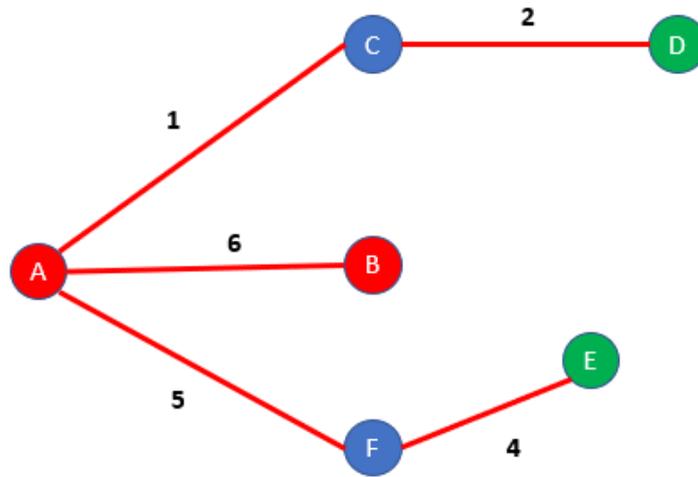


Ilustración 35. Paredes controladas por sistema de cámaras rojas. en nuestro problema

Por tanto, si **eliminamos el sistema rojo**, es decir, estarían funcionando verde y azul, la tabla sería:

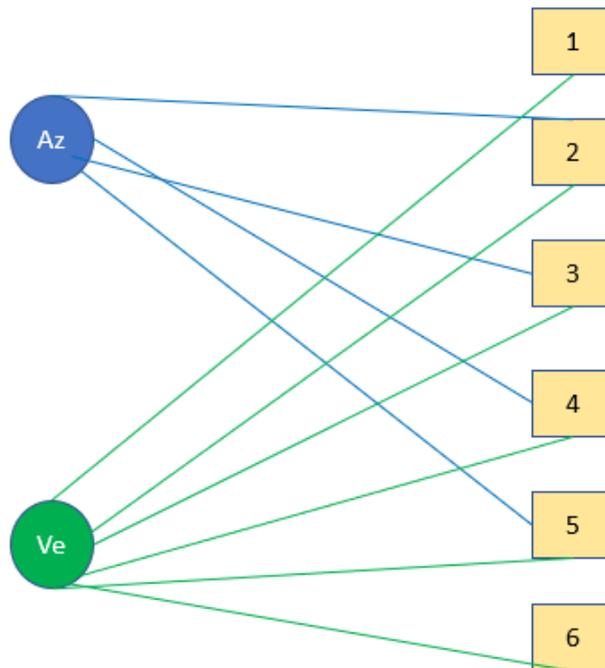


Ilustración 36. Grafo de colores  $L_{13}$

El juego  $v^{L_{13}}$  será:

Tabla 7. Cálculo de  $v^{L_{13}}$

<b>S</b>	<b>V(S)</b>
<b>∅</b>	<b>0</b>
<b>6</b>	<b>1</b>
<b>5</b>	<b>2</b>
<b>5 6</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>2</b>
<b>4 6</b>	<b>3</b>
<b>4 5</b>	<b>4</b>
<b>4 5 6</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>2</b>
<b>3 6</b>	<b>3</b>
<b>3 5</b>	<b>4</b>
<b>3 5 6</b>	<b>5</b>
<b>3 4</b>	<b>4</b>
<b>3 4 6</b>	<b>5</b>
<b>3 4 5</b>	<b>6</b>
<b>3 4 5 6</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>2</b>
<b>2 6</b>	<b>3</b>
<b>2 5</b>	<b>4</b>
<b>2 5 6</b>	<b>5</b>
<b>2 4</b>	<b>4</b>

<b>2 4 6</b>	<b>6</b>
<b>2 4 5</b>	<b>5</b>
<b>2 4 5 6</b>	<b>7</b>
<b>2 3</b>	<b>4</b>
<b>2 3 6</b>	<b>5</b>
<b>2 3 5</b>	<b>6</b>
<b>2 3 5 6</b>	<b>7</b>
<b>2 3 4</b>	<b>6</b>
<b>2 3 4 6</b>	<b>7</b>
<b>2 3 4 5</b>	<b>8</b>
<b>2 3 4 5 6</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>1</b>
<b>1 6</b>	<b>2</b>
<b>1 5</b>	<b>3</b>
<b>1 5 6</b>	<b>4</b>
<b>1 4</b>	<b>3</b>
<b>1 4 6</b>	<b>4</b>
<b>1 4 5</b>	<b>5</b>
<b>1 4 5 6</b>	<b>6</b>
<b>1 3</b>	<b>3</b>
<b>1 3 6</b>	<b>4</b>
<b>1 3 5</b>	<b>5</b>
<b>1 3 5 6</b>	<b>6</b>
<b>1 3 4</b>	<b>5</b>
<b>1 3 4 6</b>	<b>6</b>
<b>1 3 4 5</b>	<b>7</b>

<b>1 3 4 5 6</b>	<b>8</b>
<b>1 2</b>	<b>3</b>
<b>1 2 6</b>	<b>4</b>
<b>1 2 5</b>	<b>5</b>
<b>1 2 5 6</b>	<b>4</b>
<b>1 2 4</b>	<b>5</b>
<b>1 2 4 6</b>	<b>6</b>
<b>1 2 4 5</b>	<b>7</b>
<b>1 2 4 5 6</b>	<b>8</b>
<b>1 2 3</b>	<b>5</b>
<b>1 2 3 6</b>	<b>6</b>
<b>1 2 3 5</b>	<b>7</b>
<b>1 2 3 5 6</b>	<b>8</b>
<b>1 2 3 4</b>	<b>7</b>
<b>1 2 3 4 6</b>	<b>8</b>
<b>1 2 3 4 5</b>	<b>9</b>
<b>1 2 3 4 5 6</b>	<b>10</b>

Por último, sabemos que el sistema verde controlaría todas las paredes.

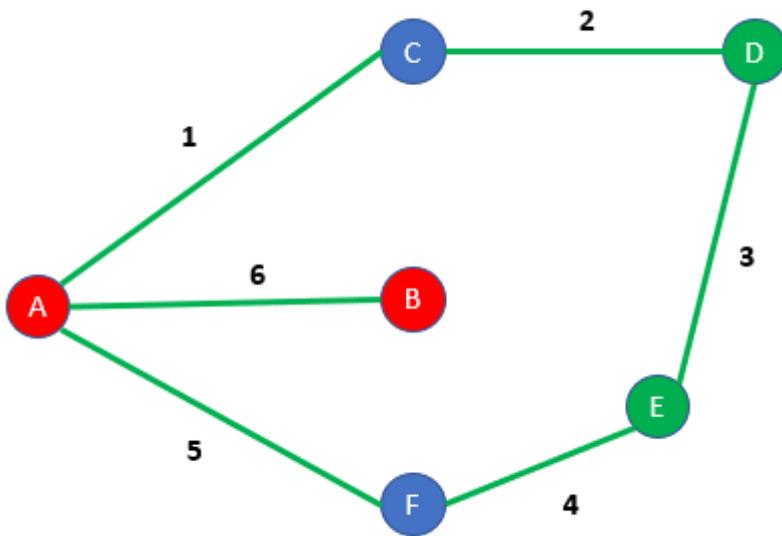


Ilustración 37. Paredes controladas por sistema de cámaras verdes en nuestro problema.

Por tanto, si **eliminamos** el sistema **verde**, estarían funcionando sistema rojo y azul, la tabla sería:

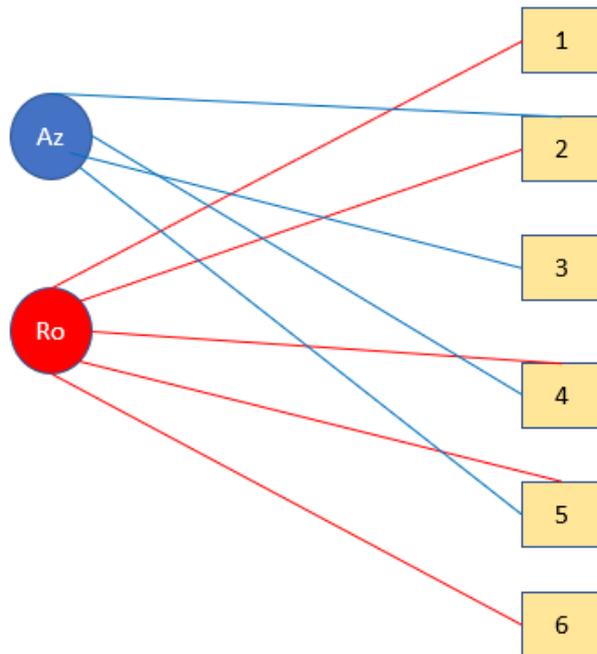


Ilustración 38. Grafo de colores  $L^{12}$ .

El juego  $v^{L_{12}}$  será:

Tabla 8. Cálculo de  $v^{L_{12}}$

<b>S</b>	<b>v(S)</b>
<b>∅</b>	<b>0</b>
<b>6</b>	<b>1</b>
<b>5</b>	<b>2</b>
<b>5 6</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>2</b>
<b>4 6</b>	<b>3</b>
<b>4 5</b>	<b>4</b>
<b>4 5 6</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>1</b>
<b>3 6</b>	<b>2</b>
<b>3 5</b>	<b>3</b>
<b>3 5 6</b>	<b>4</b>
<b>3 4</b>	<b>3</b>
<b>3 4 6</b>	<b>4</b>
<b>3 4 5</b>	<b>5</b>
<b>3 4 5 6</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>2</b>
<b>2 6</b>	<b>2</b>
<b>2 5</b>	<b>4</b>
<b>2 5 6</b>	<b>5</b>
<b>2 4</b>	<b>4</b>
<b>2 4 6</b>	<b>5</b>

<b>2 4 5</b>	<b>6</b>
<b>2 4 5 6</b>	<b>7</b>
<b>2 3</b>	<b>3</b>
<b>2 3 6</b>	<b>4</b>
<b>2 3 5</b>	<b>5</b>
<b>2 3 5 6</b>	<b>6</b>
<b>2 3 4</b>	<b>5</b>
<b>2 3 4 6</b>	<b>6</b>
<b>2 3 4 5</b>	<b>7</b>
<b>2 3 4 5 6</b>	<b>8</b>
<b>1</b>	<b>1</b>
<b>1 6</b>	<b>2</b>
<b>1 5</b>	<b>3</b>
<b>1 5 6</b>	<b>4</b>
<b>1 4</b>	<b>3</b>
<b>1 4 6</b>	<b>4</b>
<b>1 4 5</b>	<b>5</b>
<b>1 4 5 6</b>	<b>6</b>
<b>1 3</b>	<b>3</b>
<b>1 3 6</b>	<b>3</b>
<b>1 3 5</b>	<b>4</b>
<b>1 3 5 6</b>	<b>5</b>
<b>1 3 4</b>	<b>4</b>
<b>1 3 4 6</b>	<b>5</b>
<b>1 3 4 5</b>	<b>6</b>
<b>1 3 4 5 6</b>	<b>7</b>
<b>1 2</b>	<b>3</b>

<b>1 2 6</b>	<b>4</b>
<b>1 2 5</b>	<b>5</b>
<b>1 2 5 6</b>	<b>6</b>
<b>1 2 4</b>	<b>5</b>
<b>1 2 4 6</b>	<b>6</b>
<b>1 2 4 5</b>	<b>7</b>
<b>1 2 4 5 6</b>	<b>8</b>
<b>1 2 3</b>	<b>4</b>
<b>1 2 3 6</b>	<b>5</b>
<b>1 2 3 5</b>	<b>6</b>
<b>1 2 3 5 6</b>	<b>7</b>
<b>1 2 3 4</b>	<b>6</b>
<b>1 2 3 4 6</b>	<b>7</b>
<b>1 2 3 4 5</b>	<b>8</b>
<b>1 2 3 4 5 6</b>	<b>9</b>

## 6.2 Cálculo cámaras

En este caso supondremos que la probabilidad de que funcionen todos sistemas de cámaras es 0.97 y de que uno cualquiera falle es 0.03.

Estrategia

0.5333 1.0333 1.1167 1.6833 1.6000 2.0333

1. Calculamos el valor por colores de cada zona.

1.1 Los valores de Myerson en cada caso son

1.1.1 Para el grafo completo: MCZ1= 1.6633, MCZ2= 2.1633, MCZ3=2.2800, MCZ4= 2.9997, MCZ5= 2.6666, MCZ6=3.5166

1.1.2 Quitando el grafo azul: MAZ1= 0.7499, MAZ2= 1.6167, MAZ3=1.6167, MAZ4= 2.3333, MAZ5= 2.066, MAZ6=2.699

1.1.3 Quitando el grafo verde:  $MVZ1= 0.9833$ ,  $MVZ2= 1.2167$ ,  $MVZ3=1.2500$ ,  $MVZ4=1.7500$   $MVZ5= 1.6167$ ,  $MVZ6=2.1833$

1.1.4 Quitando el grafo rojo:  $MRZ1= 0.6333$ ,  $MVZ2= 1.1333$ ,  $MVZ3=1.7167$ ,  $MVZ4= 1.7833$ ,  $MVZ5= 1.700$ ,  $MVZ6=2.1333$ .

1.2 El valor sobre el grafo de colores es para cada zona

1.2.1  $IZ1=[0.97 \ 1.6633+0.03(0.7499+0.9833+0.6333)]/[0.97+3 \ 0.03] =1.5891$

1.2.2  $IZ2=[0.97 \ 2.1633+0.03(1.6167+1.2167+1.1333)]/[0.97+3 \ 0.03] = 2.0919$

1.2.3  $IZ3=[0.97 \ 2.2800+0.03(1.6167+1.2500 +1.7167)]/[0.97+3 \ 0.03] =2.2161$

1.2.4  $IZ4=[0.97 \ 2.9997+0.03(2.3333+1.2750 + 1.7833)]/[0.97+3 \ 0.03] =2.8976$

1.2.5  $IZ5=[0.97 \ 2.6666+0.03(2.066+1.6167+ 1.7000)]/[0.97+3 \ 0.03] = 2.5925$

1.2.6  $IZ6=[0.97 \ 3.5166+0.03(2.699+2.1833 + 2.1333)]/[0.97+3 \ 0.03] =3.4166$

2. Calculamos el valor asignado a los sistemas de cámaras como la suma de los valores en colores de las paredes que vigilan.

2.1 V(S)

CÁMARAS	VALOR FINAL
AZUL	$11.8-5=6.8$
ROJA	$11.8-2.25=8.83$
VERDE	11.8

Luego hemos de eliminar las cámaras azules.

## 7 CONCLUSIONES

---

En este trabajo hemos expuesto un problema relacionado con el exceso de información repetida y supuesta la existencia de varios canales de información similares cómo eliminar uno de ellos sin perjuicio de que la información llegue a los demás agentes.

El modelo usado en este trabajo para distinguir los diversos canales es el de los grafos de colores, cada color es un agente. Situados en los vértices de dichos grafos los ejes han servido como receptores de la información. La condición impuesta es que sean 1-conexos, es decir, que si un sistema falla los otros dos siguen cubriendo a todos los receptores. Suponemos también que los costos derivados de la implantación de los sistemas es el mismo.

Hemos concretado el trabajo en dos problemas. Uno ha sido el de determinar qué sistema de GPS eliminamos, supuesto que hay tres que cubren un conjunto de 6 zonas. Para ello hemos supuesto que tenemos un sistema de colores rojo, azul y verde, uno por cada sistema. Al final decidimos eliminar el azul, debido a que su valor en comparación con los otros dos es el menor.

Un problema similar tratado es el de un museo vigilado por cámaras de seguridad. Cada sistema de cámaras vigila las paredes del museo y si uno falla las demás cubren las paredes totalmente. Al igual que con los GPS cada sistema de cámaras tiene asignado un color, también rojo, azul y verde y ha resultado que el que debemos eliminar es el azul, por la misma razón que en el caso anterior.

Aunque los sistemas tratados son pequeños, no los hemos tratado mayores por temas de cálculo, si pueden extenderse a sistemas mayores usando algún programa como Matlab, que ha sido usado en este trabajo. Los códigos están incluidos en el texto.

Al principio, en la introducción hemos expuesto algunos problemas tratables con estos métodos que son interesantes para un trabajo futuro.

## 8 ANEXO

---

### 8.1 Programas para el cálculo de combinaciones

Ha sido utilizado para ambos problemas, el del satélite y el de las cámaras.

```
% Programa Combinaciones satélite.
Variables = ['1','2','3','4','5','6'];
V_bin = [0,1];
cont=1;
for i=1:2
    for j=1:2
        for k=1:2
            for l=1:2
                for m=1:2
                    for n=1:2

                        Mat(cont,:) =
[V_bin(i);V_bin(j);V_bin(k);V_bin(l);V_bin(m);V_bin(n)];
                        cont = cont+1;
                    end
                end
            end
        end
    end
end
indice = zeros(cont-1,length(Variables));
Mat_comb = zeros(cont-1,length(Variables));
for i=1:length(Mat(:,1))
    if i~=1
        [indice_1] = find(Mat(i,')==1);
        no_nulo = length(indice_1);
        for p=1:no_nulo
            indice(i,indice_1(p)) = indice_1(p);
            cont_comb = 1;
            for h=1:length(Variables)
                if Mat(i,h)==1
                    Mat_comb(i,cont_comb) = num2str(Variables(h));
                end
                cont_comb = cont_comb+1;
            end
        end
    end
end
Mat_comb = char(Mat_comb);
```

Una vez me saca todas las combinaciones le añado la letra Z a cada número para hacer referencia a la zonas ( Z1= zona 1)

Programas en Matlab para el cálculo de las combinaciones de paredes, es el mismo que anterior.

```

% Programa Combinaciones paredes.
Variables = ['1','2','3','4','5','6'];
V_bin = [0,1];
cont=1;
for i=1:2
    for j=1:2
        for k=1:2
            for l=1:2
                for m=1:2
                    for n=1:2

                        Mat(cont,:) =
[V_bin(i);V_bin(j);V_bin(k);V_bin(l);V_bin(m);V_bin(n)];
                        cont = cont+1;
                    end
                end
            end
        end
    end
end
indice = zeros(cont-1,length(Variables));
Mat_comb = zeros(cont-1,length(Variables));
for i=1:length(Mat(:,1))
    if i~=1
        [indice_1] = find(Mat(i,')==1);
        no_nulo = length(indice_1);
        for p=1:no_nulo
            indice(i,indice_1(p)) = indice_1(p);
            cont_comb = 1;
            for h=1:length(Variables)
                if Mat(i,h)==1
                    Mat_comb(i,cont_comb) = num2str(Variables(h));
                end
                cont_comb = cont_comb+1;
            end
        end
    end
end
Mat_comb = char(Mat_comb);

```

## 8.2 PROGRAMAS PARA EL CÁLCULO DE LOS VALORES.

Ha sido utilizado para ambos problemas, el del satélite y el de las cámaras.

Programas en Matlab para el cálculo del valor de Myerson.

Function coalition

```

function A1=coalition(n);

for i=1:n-1

```

```

        k(i)=nchoosek(n,i);
    end
    A=zeros(2^n-2,n);
    A1=A;
    k1=1:n;
    nn1=1;
    for i=1:n
        x=nchoosek(k1,i);
        [n1 n2]=size(x);
        A(nn1:nn1+n1-1,1:n2)=x;
        nn1=nn1+n1;
    end
    m=sum(k);
    for i=1:m
        for j=1:n
            kk=A(i,j);
            if kk>0
                A1(i,kk)=1;
            else
                end
            end
        end
    end
end

```

#### función shap1

```

function S=shap1(n,v);
m=2^n-1;

A=coalition(n);
ss=ones(1,n);
A=[A' ss]';
    for k=1:n
        k1=zeros(1,m);
        k2=k1;
        A2=0*A;
        for i=1:m
            if A(i,k)>0
                k1(i)=v(i);
                A2(i,:)=A(i,:);
            else
                end
            end
        end
        A3=A2;
        A3(:,k)=0;
        for i=1:m
            for j=1:m
                if A3(i,1:n)==A(j,1:n);
                    k2(i)=v(j);
                else
                    end
                end
            end
        end
        k3=k1-k2;
        k4=sum(A2. ');
        r=zeros(1,m);
        mm=factorial(n-1);
        for i=1:m
            if k4(i)>0

```

```

        r(i)=mm./nchoosek(n-1,k4(i)-1);
    else
    end
end
end
S(k)=sum(k3.*r)/sum(r);
end

```

### función test

```

clear;
clc
n=5;
m=2^n-1;
A=coalition(n);
ss=ones(1,n);
A=[A' ss']';
v1=[1 2 3 4 5]';
r=round(2*rand(m,1));
v=(A*v1)+r;
S=shap1(n,v)

```

## 9 BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] Anindya J.Pal, Samar S.Sarma, Biman Ray, “CCTP, Graph Coloring algorithms – Soft computing Solutions IEEE, 2007
- [2] Daniel Marx, “Graph Coloring problems and their applications in scheduling”,
- [3] Narasingh Deo, “Graph theory with applications to engineering and computer science”, Prentice Hall of India, 1990
- [4] Shariefuddin Pirzada and Ashay Dharwadker, “Journal of the Korean Society for Industrial and applied Mathematics, Volume 11, No.4,2007
- [5] E. K. Burke, J. Newall and R.F. Weare. A Memetic Algorithm for University Exam Timetabling. In: Burke, E.; Ross, P. (eds.): Practice and Theory of Automated Timetabling, First International Conference, Edinburgh, U.K., August/September 1995. Selected Papers. Lecture Notes in Computer Science 1153, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 241- 250, 1996.
- [6] E. G. Coffman, Jr., M. R. Garey, D. S. Johnson, and A. S. LaPaugh. Scheduling file transfers, SIAM J. Comput., 14(3):744-780, 1985.
- [7] R. Diestel. Graph theory, 5th edition. Springer-Verlag, Heidelberg. Graduate texts in Mathematics 173, 2016.
- [8] A. Graf, M. Stumpf, and G. Weïßenfels. On coloring unit disk graphs, Algorithmica, 20(3):277-293, 1998.
- [9] I. Holyer. The NP-completeness of link-coloring, SIAM J. Comput., 10(4):718-720, 1981.
- [10] J. A. Hoogeveen, S. L. van de Velde, and B. Veltman. Complexity of scheduling multiprocessor tasks with prespecified processor allocations, Discrete Appl. Math., 55(3):259-272, 1994.
- [11] F. T. Leighton. A Graph Coloring Algorithm for large Scheduling Problems, Journal of Research of the National Bureau Standard, 84 pp 79-100, 1979.
- [12] R. Mullet. Les documents '\ 'écrits de la num'\ 'erisation à l' 'indexation par le contenu, Editeur : Hermes science Publication, 365 pages, 2006.

- [13] R. B. Myerson. Graphs and cooperation in games. *Mathematics of Operations Research* 2, 225-229, 1977.
- [14] T . Nishizeki and K. Kashiwagi. On the 1:1 link-coloring multigraphs, *SIAM J. Discrete Math.*, 3(3):391-410, 1990.
- [15] L.I. S. Shapley. A Value for n-person Games. In *Contributions to the Theory of Games*, volume II, by H.W. Kuhn and A.W. Tucker, editors. *Annals of Mathematical Studies* v. 28, pp. 307-317. Princeton University Press, 1953.
- [16] H. Terashima-Marn, P. Ross, and M. Valenzuela-Rendon. Clique-Based Crossover for Solving the Timetabling Problem with Gas, *Proc. of the Congress on Evolutionary Computation*, pp. 1200-1206, 1996.
- [17] C. Viard-Gaudin, D Barba. A multi-resolution approach to extract the address block on flat mail pieces, *ICASSP-91, International Conference*, vol.4, Pages: 2701 - 2704, 1991.
- [18] C. H. Wang, P. W. Palumbo, S.N. Srihari. Object recognition in visually complex environments: an architecture for locating address blocks on mail pieces, *Pattern Recognition*, 1988., 9th International Conference, IEEE, vol.1, Pages: 365-367, 1988.

Referencias Electronicas:

<https://es.wikipedia.org/wiki/Trilateraci%C3%B3n>

[http://www.asifunciona.com/electronica/af\\_gps/af\\_gps\\_8.htm](http://www.asifunciona.com/electronica/af_gps/af_gps_8.htm)

<https://es.wikipedia.org/wiki/GPS#Historia>

<https://www.af.mil/>

[https://www.economiadigital.es/tecnologia-y-tendencias/mundo-depende-gps-si-falla-puede-ser-devastador\\_570704\\_102.html](https://www.economiadigital.es/tecnologia-y-tendencias/mundo-depende-gps-si-falla-puede-ser-devastador_570704_102.html)

<https://cnnespanol.cnn.com/2011/09/12/los-hispanos-son-los-que-mas-usan-el-gps-en-sus-telefonos-segun-estudio/>

<https://www.lavanguardia.com/vida/20110406/54136649079/las-videocamaras-reducen-la-delincuencia.html>

<https://www.angelolleros.com/camaras-seguridad-viviendas/>

<https://www.elmundo.es/elmundo/2010/08/04/internacional/1280938576.html>

<https://www.museodelprado.es/coleccion/obra-de-arte/la-crucifixion/43bbf96a-516d-4e75-ab29-7ea521e7afce>