

Trabajo Fin de Máster

Máster Universitario en Matemáticas

**CONTROL DE VIBRACIONES DE
ESTRUCTURAS BAJO INCERTIDUMBRE**

Autor: Javier Fernando Jiménez Alonso

Tutor: Francisco Manuel Guillen González

Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

Facultad de Matemáticas

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2019

Trabajo Final de Master
Máster Universitario en Matemáticas

Control de Vibraciones de Estructuras
Bajo Incertidumbre

Autor:

Javier Fernando Jiménez Alonso

Tutor:

Francisco Manuel Guillen González

Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

Facultad de Matemáticas

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2019

RESUMEN

Tanto la mejora de las propiedades resistentes de los materiales constructivos como los mayores requerimientos estéticos de las sociedades modernas han originado un claro incremento de la esbeltez de las estructuras de ingeniería civil. Dicha elevada esbeltez es la principal causa tanto de la tendencia que presentan dichas estructuras a sufrir problemas vibratorios inducidos por las acciones exteriores como de que su respuesta sea cada vez más sensible a la variabilidad de los condicionantes operacionales y ambientales. Tal es la influencia de estos factores sobre el comportamiento de dichas estructuras, que sus efectos deben ser considerados como aspecto clave durante el diseño conceptual de las mismas. Una forma habitual de controlar las vibraciones en estructuras de ingeniería civil es instalar en las mismas algún tipo de sistema de disipación de energía (sistemas de control). Dichos sistemas se clasifican en uno de estos tres grupos en función de la fuente de energía exterior que necesiten para garantizar su adecuado funcionamiento: (i) sistemas de control pasivo; (ii) sistemas de control semi-activo; y (iii) sistemas de control activo. De entre los sistemas de control, los denominados sistemas de masa inercial han sido ampliamente utilizados en estructuras de ingeniería civil. Dichos sistemas de masa inercial pueden presentar un comportamiento activo, semi-activo o pasivo mediante una leve modificación de sus parámetros constituyentes. Los algoritmos de diseño existentes para caracterizar los parámetros constituyentes de dichos sistemas inerciales presentan tres grandes problemas: (i) su formulación difiere en función del comportamiento requerido; (ii) su implementación en proyectos reales es difícil debido a su complejidad; y (iii) no se ha analizado en detalle su rendimiento bajo condiciones de incertidumbre asociadas a la variabilidad ambiental y operacional. Al objeto de dar solución a dichas limitaciones se presenta, formula e implementa en este trabajo un algoritmo de diseño basado en el movimiento de la estructura. Según dicho algoritmo, el problema de diseño es transformado en un problema de optimización. Dicho problema de optimización queda definido a partir de: (i) una función multi-objetivo (doble objetivo) cuyo primer término se define en función del coste del sistema de control y cuyo segundo término refleja los requisitos que debe cumplir la estructura; (ii) unas variables de diseño, que son los parámetros constituyentes del sistema de control que debemos definir; y (iii) un dominio de búsqueda, que establece el rango de variación de los parámetros de diseño para garantizar el sentido físico de la solución obtenida. Dicho método de diseño es formulado tanto bajo condiciones deterministas como estocásticas mediante el cambio en la definición de las restricciones del problema. De esta forma, el segundo término de la función objetivo será definido de diferente manera en función de las condiciones consideradas: (i) como una ratio que caracteriza el estado límite de servicio de vibraciones bajo condiciones deterministas; y (ii) un análisis de la fiabilidad de dicho estado límite de servicio bajo condiciones estocásticas. Finalmente, el método ha sido implementado para el diseño de un sistema de control de masa inercial instalado sobre una pasarela peatonal; considerando sus tres posibles comportamientos (pasivo, semi-activo y activo) y las dos condiciones consideradas (deterministas y estocásticas).

ABSTRACT

The improvements of the strength properties of the construction material together with the higher aesthetic requirements of the modern societies have caused a clear increase of the slenderness of the civil engineering structures. This high slenderness is the main cause of both the tendency of these structures to suffer from vibratory problems induced by external actions and that their response is more sensitive to the variability of the operational and environmental conditions. Such is the influence of these factors in the behaviour of these structures that their effects must be considered as key aspect during their conceptual design phase. A usual way to control the vibrations in civil engineering structures is to install on them some type of energy dissipation system (control system). These systems can be classified in one of these groups in terms of the external power source needed to guarantee an adequate performance: (i) passive control systems; (ii) semi-active control systems; and (iii) active control systems. Among these control systems, the so-called inertial mass dampers have been widely used in civil engineering structures. These inertial mass dampers can show an active, semi-active or passive behaviour via a slight variation of their constituent parameters. The existing design algorithms, to characterize the constituent parameters of these inertial systems, present three main limitations: (i) their formulation differ in terms of considered behaviour; (ii) its implementation in real project is difficult due to their complexity; and (iii) their performance have not been analysed in detail under stochastic conditions associated with the operational and environmental variability. In order to shed light to these limitations, a motion-based design algorithm has been presented, formulated and implemented herein. According to this algorithm the design problem is transformed into an optimization problem. This optimization problem may be defined as: (i) a multi-objective function (two objectives) whose first term is expressed in terms of the cost of the control system and whose second terms reflects the requirements that the structure must meet; (ii) design variables, which are the constituent parameters of the control system that we must design; (and iii) a search domain, which establishes the variation range of the design variables to guarantee the physical meaning of the solution obtained. This method has been formulated either under deterministic conditions or under stochastic conditions via the modification of the requirements of the problem. In this manner, the compliance of the vibration serviceability limit state will be used to define the second terms of the objective function under deterministic conditions and a reliability analysis of this serviceability limit state will be considered to define this second term under the stochastic conditions. Finally, the method has been implemented to design an inertial mass damper which has been installed on a footbridge considering the three possible behaviours (passive, semi-active and active) and the two conditioning factors (deterministic and stochastic).

Índice de Contenidos

1. Introducción, Objetivos y Organización del Trabajo.	1
1.1. El Control de Estructuras de Ingeniería Civil.	1
1.1.1. Principios Básicos.	1
1.1.2. Clasificación.	1
1.1.3. Aislamiento.	1
1.1.4. Mitigación de Vibraciones.	1
1.1.4.1. Sistemas de Mitigación Pasivos.	2
1.1.4.2. Sistemas de Mitigación Semi-activos.	3
1.1.4.3. Sistemas de Mitigación Activos.	3
1.2. Objetivos del Trabajo.	4
1.3. Organización del Trabajo.	5
2. Modelo de Interacción Amortiguador de Masa Inercial-Estructura.	6
2.1. Modelización de Sistemas Dinámicos en Coordenadas Nodales.	6
2.2. Modelización de Sistemas Dinámicos en Coordenadas Modales.	8
2.3. Modelización Matemática de la Respuesta Dinámica de la Estructura.	11
2.4. Modelización Matemática de la Interacción entre la Estructura y un Sistema de Control de Masa Inercial.	13
3. Control de Estructuras de Ingeniería Civil en el Espacio de Estado.	16
3.1. Modelización de Sistemas Dinámicos en el Espacio de Estado.	16
3.2. Transformación de Sistemas Dinámicos Nodales a Sistemas Dinámicos en Espacio de Estado.	19
3.3. Análisis de Sistemas Dinámicos en el Espacio de Estado.	20
3.4. Control de Sistemas Dinámicos.	26
3.5. Diseño de un Controlador en el Espacio de Estado.	28
4. Diseño Basado en el Movimiento bajo Condiciones Deterministas.	33
4.1. Formulación del Problema de Diseño.	33
4.2. Resolución del Problema de Optimización.	36
5. Diseño Basado en el Movimiento bajo Condiciones Estocásticas.	39
6. Caso en estudio: Control de Vibraciones de un Pasarela peatonal.	46
6.1. Evaluación del Estado Limite de Servicio de Vibraciones de Pasarelas Peatonales.	46
6.2. Descripción de la estructura y determinación de sus propiedades modales.	48
6.3. Control Pasivo de las Vibraciones en la Pasarela.	54

6.4. Control Semi-activo de las Vibraciones en la Pasarela.	60
6.5. Control Activo de las Vibraciones en la Pasarela.	67
6.6. Discusión de Resultados.	74
7. Conclusiones y Futuras Líneas de Investigación.....	75
7.1. Conclusiones.....	75
7.2. Futuras Líneas de Investigación.....	77
Agradecimientos.....	78
Referencias	79

Índice de Figuras

Figura 1. Clasificación de los Sistemas de Control.

Figura 2. Esquema de funcionamiento de un sistema de control activo.

Figura 3. Modelización de un sistema de un grado de libertad.

Figura 4. Modelización de un sistema de varios grados de libertad.

Figura 5. Elemento barra en el plano (2D).

Figura 6. Sistema de control de masa inercial: a) Detalle general del amortiguador; y b) Colocación bajo tablero de una pasarela (Butz *et al.*, 2007).

Figura 7. Sistema de un grado de libertad controlado por sistema de control de masa inercial.

Figura 8. Modelos de interacción estructural-sistema de control de masa inercial: a) pasiva; b) semi-activa; y c) activa.

Figura 9. Diagrama de bloques del sistema en el espacio de estado.

Figura 10. Estructura de lazo cerrado del control por retro-alimentación.

Figura 11. Estructura del control por avance.

Figura 12. Estructura en lazo abierto del control pasivo.

Figura 13. Diseño de un controlador usando un algoritmo de control óptimo lineal (LQR).

Figura 14. Esquema general del método de diseño basado en el movimiento.

Figura 15. Frente de Pareto y selección de la mejor solución del problema de diseño bajo condiciones deterministas.

Figura 16. a) Óptimo local y global de una función objetivo y b) esquema general de funcionamiento de los algoritmos genéticos.

Figura 17. a) Estado límite mostrando la división del espacio de diseño en dos regiones (segura e insegura) y b) Probabilidad de fallo de dicho estado límite.

Figura 18. Evaluación de la fiabilidad del sistema.

Figura 19. Funciones de densidad de probabilidad del estado límite $g(\{\theta\})$ suponiendo una distribución a) normal y b) normal logarítmica.

Figura 20. Variación de la ratio, $\frac{\beta_{lim}}{\beta}$, con el número de simulaciones al objeto de determinar el tamaño de la simulación de Monte Carlo, n_{MC} .

Figura 21. Frente de Pareto y selección de la mejor solución del problema de diseño bajo condiciones estocásticas.

Figura 22. Diagrama de flujo para evaluar el estado límite de servicio de vibraciones en estructuras de ingeniería civil.

Figura 23. Definición geométrica de la estructura y primer modo de vibración vertical (Setra, 2006).

Figura 24. Elementos finitos utilizados para modelizar la pasarela (Ansys, 2019): a) BEAM188; y b) SHELL181.

Figura 25. Respuesta de la estructura (aceleraciones) bajo un tráfico peatonal de 1 P/m^2 y condiciones deterministas.

Figura 26. Estudio de sensibilidad del ratio β_{lim}/β en función del tamaño de la simulación de Monte Carlo considerada.

Figura 27. Histograma de las variables aleatorias que regulan el comportamiento de la estructura: a) frecuencia natural, f_f ; b) ratio de amortiguamiento, ζ_f ; y c) máxima aceleración de la estructura, a_{max} .

Figura 28. Respuesta de la estructura (aceleraciones) ante un tráfico peatonal de 1 P/m^2 y condiciones estocásticas: a) frecuencia natural, $f_f = 1.92 \text{ Hz}$; b) frecuencia natural, $f_f = 2.14 \text{ Hz}$; y c) frecuencia natural, $f_f = 2.35 \text{ Hz}$ (en los tres casos se ha considerado un ratio de amortiguamiento medio, $\zeta_f = 0.6 \%$).

Figura 29. Esquema del sistema pasarela-sistema de control de masa inercial pasiva.

Figura 30. Frente de Pareto y criterio de toma de decisión para el problema de diseño del sistema de control de masa inercial pasiva bajo condiciones deterministas.

Figura 31. Respuesta de la estructura (aceleraciones) controlada por el sistema de control de masa inercial pasiva bajo un tráfico peatonal de 1 P/m^2 y condiciones deterministas.

Figura 32. Estudio de sensibilidad del ratio, β_{lim}/β , frente al tamaño de la simulación de Monte Carlo.

Figura 33. Frente de Pareto y criterio de toma de decisión para el problema de diseño del sistema de control de masa inercial pasiva bajo condiciones estocásticas.

Figura 34. Histograma de las variables aleatorias que regulan el comportamiento de la estructura controlada por el sistema de control de masa inercial pasiva: a) frecuencia natural, f_f ; b) ratio de amortiguamiento, ζ_f ; y c) máxima aceleración de la estructura controlada, a_{max} .

Figura 35. Respuesta de la estructura controlada (aceleraciones) con el sistema de control de de masa inercial pasiva ante un tráfico peatonal de 1 P/m^2 y condiciones

estocásticas: a) frecuencia natural, $f_f = 1.92$ Hz; b) frecuencia natural, $f_f = 2.14$ Hz; y c) frecuencia natural, $f_f = 2.35$ Hz (en los tres casos se ha considerado una ratio de amortiguamiento media, $\zeta_f = 0.6$ %).

Figura 36. Esquema del sistema pasarela-sistema de control de masa inercial semi-activa.

Figura 37. Frente de Pareto y criterio de toma de decisión para el problema de diseño del sistema de control de masa inercial semi-activa bajo condiciones deterministas.

Figura 38. Respuesta de la estructura (aceleraciones) controlada por el sistema de control de masa inercial semi-activa bajo un tráfico peatonal de 1 P/m^2 y condiciones deterministas.

Figura 39. Fuerza motriz, f_a , ejercida por el sistema de control de masa inercial semi-activa bajo un tráfico peatonal de 1 P/m^2 y condiciones deterministas.

Figura 40. Estudio de sensibilidad del ratio, β_{lim}/β , frente al tamaño de la simulación de Monte Carlo.

Figura 41. Frente de Pareto y criterio de toma de decisión para el problema de diseño del sistema de control de masa inercial semi-activa bajo condiciones estocásticas.

Figura 42. Histograma de las variables aleatorias que regulan el comportamiento de la estructura controlada por el sistema de control de masa inercial semi-activa: a) frecuencia natural, f_f ; b) ratio de amortiguamiento, ζ_f ; y c) máxima aceleración de la estructura controlada, a_{max} .

Figura 43. Respuesta de la estructura controlada (aceleraciones) con el sistema de control de masa inercial semi-activa ante un tráfico peatonal de 1 P/m^2 y condiciones estocásticas: a) frecuencia natural, $f_f = 1.92$ Hz; b) frecuencia natural, $f_f = 2.14$ Hz; y c) frecuencia natural, $f_f = 2.35$ Hz (en los tres casos se ha considerado una ratio de amortiguamiento media, $\zeta_f = 0.6$ %).

Figura 44. Fuerza motriz, f_a , ejercida por el sistema de control de masa inercial semi-activa ante un tráfico peatonal de 1 P/m^2 y condiciones estocásticas: a) frecuencia natural, $f_f = 1.92$ Hz; b) frecuencia natural, $f_f = 2.14$ Hz; y c) frecuencia natural, $f_f = 2.35$ Hz (en los tres casos se ha considerado una ratio de amortiguamiento media, $\zeta_f = 0.6$ %).

Figura 45. Esquema del sistema pasarela-sistema de control de masa inercial activa.

Figura 46. Frente de Pareto y criterio de toma de decisión para el problema de diseño del sistema de control de masa inercial activa bajo condiciones deterministas.

Figura 47. Respuesta de la estructura (aceleraciones) controlada por el sistema de control de masa inercial activa bajo un tráfico peatonal de 1 P/m^2 y condiciones deterministas.

Figura 48. Fuerza motriz, f_a , ejercida por el sistema de control de masa inercial activa bajo un tráfico peatonal de 1 P/m^2 y condiciones deterministas.

Figura 49. Estudio de sensibilidad del ratio, β_{lim}/β , frente al tamaño de la simulación de Monte Carlo.

Figura 50. Frente de Pareto y criterio de toma de decisión para el problema de diseño del sistema de control de masa inercial activa bajo condiciones estocásticas.

Figura 51. Histograma de las variables aleatorias que regulan el comportamiento de la estructura controlada por el sistema de control de masa inercial activa: a) frecuencia natural, f_f ; b) ratio de amortiguamiento, ζ_f ; y c) máxima aceleración de la estructura controlada, a_{max} .

Figura 52. Respuesta de la estructura controlada (aceleraciones) con el sistema de control de masa inercial activa ante un tráfico peatonal de 1 P/m^2 y condiciones estocásticas: a) frecuencia natural, $f_f = 1.92 \text{ Hz}$; b) frecuencia natural, $f_f = 2.14 \text{ Hz}$; y c) frecuencia natural, $f_f = 2.35 \text{ Hz}$ (en los tres casos se ha considerado una ratio de amortiguamiento media, $\zeta_f = 0.6 \%$).

Figura 53. Fuerza motriz, f_a , ejercida por el sistema de control de masa inercial activa ante un tráfico peatonal de 1 P/m^2 y condiciones estocásticas: a) frecuencia natural, $f_f = 1.92 \text{ Hz}$; b) frecuencia natural, $f_f = 2.14 \text{ Hz}$; y c) frecuencia natural, $f_f = 2.35 \text{ Hz}$ (en los tres casos se ha considerado una ratio de amortiguamiento media, $\zeta_f = 0.6 \%$).

Índice de Tablas

Tabla 1. Relación entre las clases de confort y los rangos de aceleración límite.

Tabla 2. Parámetros del sistema de control de masa inercial pasiva en función de las condiciones de diseño (deterministas o estocásticas).

Tabla 3. Parámetros del sistema de control de masa inercial semi-activa en función de las condiciones de diseño (deterministas o estocásticas).

Tabla 4. Parámetros del sistema de control de masa inercial activa en función de las condiciones de diseño (deterministas o estocásticas).

1. Introducción, Objetivos y Organización del Trabajo.

1.1. El Control de Estructuras de Ingeniería Civil.

El control de estructuras de ingeniería civil es una tecnología emergente para mitigar las vibraciones en dichas estructuras inducidas por las acciones exteriores (la sobrecarga de uso, las olas, el viento y los terremotos) que a diferencia de los métodos tradicionales no se basa en modificar la resistencia o rigidez de la estructura para reducir las vibraciones estructurales (Soong y Costantinou, 1994).

1.1.1. Principios Básicos.

Existen dos mecanismos principales, para reducir las vibraciones en estructuras y evitar de esta forma el daño, basados en la instalación de equipos de control (Burns, 2001): (i) el aislamiento de las vibraciones; y (ii) la mitigación las vibraciones.

La ecuación de movimiento de un sistema estructural bajo una carga exterior dinámica se puede expresar genéricamente a partir de la siguiente ecuación diferencial (Xu *et al.*, 2017):

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{P(t)\} + \{F_D(t)\} \quad (1.1)$$

donde $[M]$, $[C]$ y $[K]$ son respectivamente las matrices de rigidez, amortiguamiento y masa del sistema; $\{\ddot{x}(t)\}$, $\{\dot{x}(t)\}$ y $\{x(t)\}$ son respectivamente los vectores de la respuesta en aceleración, velocidad y desplazamiento del sistema, $\{P(t)\}$ es el vector de cargas externas y $\{F_D(t)\}$ es el vector con la fuerza de control que proporciona el sistema de disipación de energía. Para reducir las vibraciones en base a sistemas de mitigación de energía, $\{F_D(t)\}$ es usualmente contraria a $\{P(t)\}$.

1.1.2 Clasificación.

Los sistemas de control de vibraciones en estructuras se pueden dividir en tres grupos dependiendo de la cantidad de energía externa que hay que proporcionar al sistema para garantizar su adecuado funcionamiento (Andradre *et al.*, 1993): (i) sistemas de control pasivo; (ii) sistemas de control semi-activos; y (iii) sistemas de control activos. En esta sección se describen brevemente estos sistemas. En Figura 1 se presenta un esquema con la clasificación de dichos sistemas.

1.1.3. Aislamiento.

Los sistemas para el aislamiento de las vibraciones consisten en la colocación de un aislador entre la parte inferior de la estructura y el terreno de cimentación al objeto de reducir la transmisión de energía vibratoria. Entre los métodos de aislamiento ante la acción de las vibraciones se puede incluir (Soong y Costantinou, 1994): (i) aisladores de goma; (ii) aisladores deslizantes; (iii) aisladores híbridos (en los que dos o más de los aisladores anteriores se son colocados en serie o en paralelo); y (iv) otros tipos de aisladores (aislamiento entre plantas, aislamiento mediante columnas cortas y aislamiento mediante suspensión).

1.1.4. Mitigación de Vibraciones.

En este caso un elemento que consuma energía debe ser instalado en la estructura que pueda disipar una gran parte de la energía introducida en la estructura. Normalmente el mecanismo que libera la energía se debe bien a la deformación relativa entre la estructura y el amortiguador y a la inclusión de un actuador.

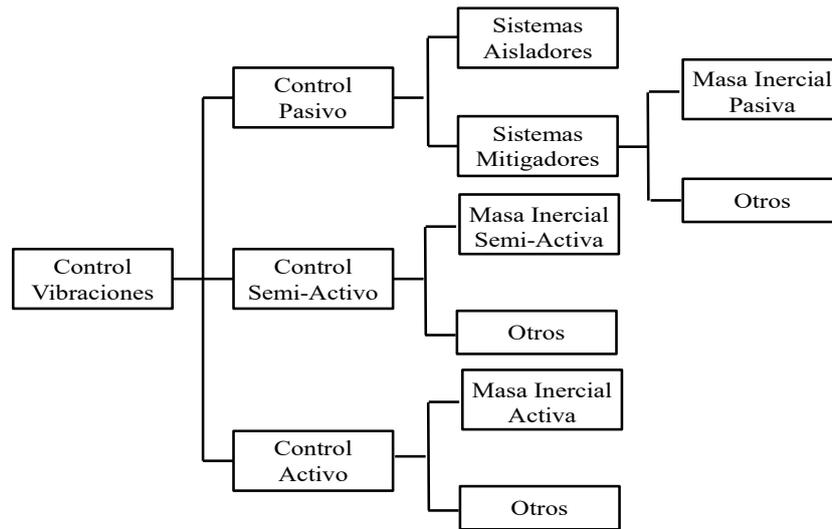


Figura 1. Clasificación de los Sistemas de Control.

1.1.4.1. Sistemas de Mitigación Pasivos.

En el caso de que no haya actuador alguno y la energía se disipe fundamentalmente por el movimiento relativo entre la estructura y el sistema de control, el sistema de mitigación recibe el nombre de sistema de mitigación (control) pasivo. Entre los sistemas de mitigación pasivos destacan (Soong y Costantinou, 1994): (i) los amortiguadores metálicos; (ii) los amortiguadores de fricción; (iii) los amortiguadores viscosos; (iv) los amortiguadores visco-elásticos; y (v) los amortiguadores de masa sincronizada (amortiguadores inerciales pasivos).

Estos últimos consisten en un sistema compuesto por una masa sólida (m_a), un muelle (k_a), y un amortiguador (c_a) que se instala sobre la estructura. La masa, rigidez y amortiguamiento del sistema pueden ser modificados para ajustar la frecuencia natural del amortiguador, f_d , con la frecuencia natural de la estructura, f_f . De esta manera, cuando el sistema principal, la estructura, comienza a moverse, el sistema de control pasivo genera una fuerza opuesta al movimiento de la estructura principal y que actúa sobre la misma. De esta forma el amortiguador inercial pasivo permite reducir la respuesta de la estructura principal y es un objeto fácil de construir e instarla (Xu *et al.*, 2017). El punto débil del sistema es el peligro de de-sintonización del amortiguador debido a las variaciones de la frecuencia natural asociadas a los efectos ambientales y operacionales (Hu *et al.*, 2012; Soria *et al.*, 2016).

Aunque los sistemas de mitigación pasivos presentan muchas ventajas (construcción sencilla, bajo coste, fácil instalación y mantenimiento y no requieren fuente de alimentación externa) presentan, sin embargo, un claro inconveniente, su gran resistencia para adaptarse a los cambios asociados a las condiciones de incertidumbre (Caetano *et al.*, 2009).

Al objeto de mejorar la flexibilidad de los sistemas de control tanto frente a las acciones exteriores como a los estados cambiantes (Ferreira *et al.*, 2019) los denominados sistemas de control inteligentes fueron introducidos (semi-activos y activos). En las siguientes sub-secciones se describen en detalle dichos sistemas de control.

1.1.4.2. Sistemas de Mitigación Semi-activos.

Los sistemas de mitigación semi-activos colocan los parámetros constituyentes de la estructura en un estado óptimo a partir del cual se controla su respuesta vibratoria. La modificación de los parámetros de la estructura se consigue por medio del cambio de las propiedades del sistema de control semi-activo mediante la adición de una pequeña cantidad de energía (Xu *et al.*, 2017).

Los sistemas de control semi-activos más utilizados son: (i) los amortiguadores magneto-reológicos (MR); (ii) los amortiguadores electro-reológicos (ER); (iii) los amortiguadores de fricción piezoeléctricos; (iv) los sistemas de control semi-activo de rigidez variable; y (v) los sistemas de control semi-activo de amortiguamiento variable.

En este trabajo nos vamos a centrar en los denominados amortiguadores de masa inercial semi-activa (Moutinho *et al.*, 2018). Los mismos están compuestos, al igual que los amortiguadores de masa pasiva, de tres elementos: (i) la masa inercial, m_a ; (ii) el elemento de rigidez, k_a ; y (iii) un amortiguador magneto-reológico. El efecto del amortiguador magneto-reológico es equivalente al de un amortiguador viscoso con amortiguamiento variable, es decir $c_a \in [c_{min}, c_{max}]$ (siendo el mínimo, c_{min} , y máximo, c_{max} , amortiguamiento que el amortiguador puede generar en función del nivel de corriente del mismo).

En este trabajo, no obstante, la fuerza del amortiguador magneto-reológico se va a calcular a partir de una ley de control activo y posteriormente se va a corregir para tener en cuenta el verdadero funcionamiento de este tipo de amortiguador.

1.1.4.3. Sistemas de Mitigación Activos.

Los sistemas de mitigación activos consisten en un sistema de sensores, un sistema de control, un sistema actuador y otros componentes (Figura 2). El sistema de sensores mide bien las acciones exteriores o bien la información de la respuesta y transmite dicha información al sistema de control. El sistema de control calcula la fuerza de control requerida en base al algoritmo de control considerado y proporciona una señal de control a un actuador. Con ayuda de energía exterior el sistema actuador proporciona la fuerza de control deseada sobre la estructura al objeto de reducir su nivel de respuesta (Preumont, 2011). De entre los sistemas de control activo, dos son los más utilizados en aplicaciones de ingeniería civil: (i) los amortiguadores de masa inercial activa; y (ii) los sistemas de tendones activos. En este trabajo nos vamos a centrar en el diseño del primer tipo de sistemas.

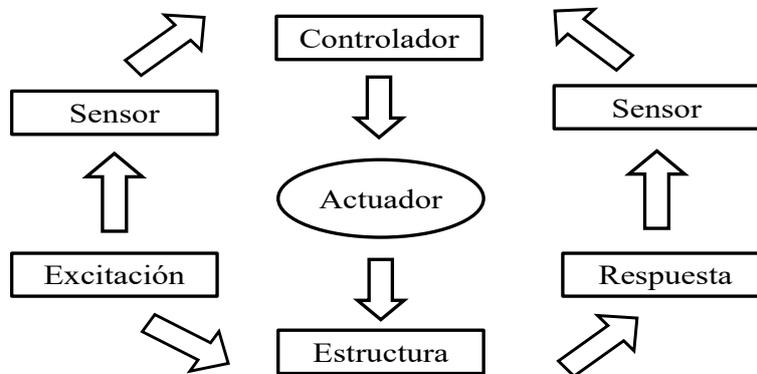


Figura 2. Esquema de funcionamiento de un sistema de control activo.

Los sistemas de control de masa inercial activa son una evolución de los sistemas de masa inercial pasiva que proporcionan fuerzas de control entre la masa inercial y la estructura para ajustar la distribución de energía entre ambos. Dichos sistemas de control consisten en cuatro componentes: (i) la masa inercial, m_a ; (ii) el elemento amortiguador, c_a ; (iii) el elemento de rigidización, k_a ; y (iv) el actuador, f_a . Cuando el sistema de control de masa activa empieza a trabajar bajo las acciones dinámicas exteriores, los sensores colocados en la estructura detectan el estado de su respuesta y lo trasladan al sistema de control. Dicho sistema calcula la fuerza de control requerida y envía una señal de control al actuador. Las fuerzas de control son aplicadas a la estructura a través de actuadores apoyados en las masas inerciales. Dichos actuadores normalmente son aparatos electro-hidráulicos, servo-actuadores o servomotores y es la parte más importante del sistema de control activo para proporcionar este tipo de control. Los actuadores necesitan ser alimentados por fuentes externas con gran consumo energético. Las principales limitaciones de dichos sistemas es que su coste es alto y son sensibles a la rigidez de la estructura. Son especialmente efectos para superar el retardo en la puesta en funcionamiento de los amortiguadores pasivos.

Dentro de los sistemas de control inteligente (semi-activo y activo) un elemento transcendental es el algoritmo de control seleccionado. El mismo es un objeto matemático que debe ser formulado dentro del marco de la teoría de control seleccionada (Wang *et al.*, 2018). El algoritmo se diseña para que un controlador determine bien los parámetros de control de un sistema semi-activo o las fuerzas del actuador de un sistema activo en función de estado de vibración medido o de las fuerzas excitadoras. La selección del algoritmo de control es muy importante en control inteligente de estructuras y es uno de los principales factores que determinan la precisión del control. Dos tipos de estrategias de control son normalmente utilizadas: (i) retro-alimentación (*feedback*); (ii) alimentación en avance (*feedforward*). De entre las diferentes estrategias de control propuestas en la literatura (Weber *et al.*, 2006), este trabajo se va a centrar en el empleo de un algoritmo clásico de control lineal óptimo formulado en el espacio de estado y bajo una estrategia de retro-alimentación (*feedback*).

De esta manera la principal aportación del trabajo es la formulación compacta, implementación y resolución del problema de diseño de sistemas de control de masa inercial para mitigar las vibraciones en estructuras de ingeniería civil bajo condiciones determinísticas y estocásticas. Para la determinación de los parámetros de dichos sistemas de control se va a aplicar un algoritmo de diseño basado en el movimiento cuyo objetivo es reducir el coste del sistema de control asegurando el cumplimiento de los requerimientos de confort de la estructura.

1.2. Objetivos del Trabajo.

Los principales objetivos de este trabajo son:

- (i) realizar una revisión de los principales métodos de control de las vibraciones de estructuras de ingeniería civil.
- (ii) realizar la formulación genérica del modelo de interacción estructura-sistema de control de masa inercial para sus tres posibles comportamientos (pasivo, semi-activo y activo).
- (iii) presentar, formular e implementar un algoritmo de diseño basado en el movimiento para determinar los parámetros constitutivos de sistemas de control para estructuras de ingeniería civil.

(iv) generalizar el uso de dicho algoritmo de diseño para el caso en que los condicionantes del problema sean estocásticos.

(v) comprobar el funcionamiento del método propuesto sobre un caso práctico real, el control de vibraciones de una pasarela peatonal mediante la instalación de tres tipos de sistemas de control de masa inercial.

1.3. Organización del Trabajo.

De esta forma este trabajo se organiza de la siguiente manera:

(i) en la primera sección, se realiza una breve introducción a los sistemas de control de vibraciones de estructuras de ingeniería civil y se establecen los principales objetivos de este trabajo;

(ii) en la segunda sección, se presentan algunas nociones básicas sobre dinámica de estructuras y se describen las ecuaciones características del sistema de interacción estructura-sistema de control de masa inercial;

(iii) en la tercera sección, se presentan algunas nociones sobre el control de estructuras en el espacio de estado y se describe el algoritmo de control básico considerado como base para el desarrollo de este trabajo;

(iv) en la cuarta sección, se presentan la formulación de un algoritmo de diseño de sistemas de control bajo condiciones deterministas;

(v) en la quinta sección, se generaliza el algoritmo anterior para su uso bajo condiciones estocásticas;

(vi) en la sexta sección, se ha analizado el rendimiento del algoritmo anterior cuando el mismo es aplicado para el diseño de tres sistemas de control de masa inercial sobre una pasarela peatonal considerando condiciones deterministas y estocásticas; y

(vii) finalmente, se han señalado las principales conclusiones obtenidas de este trabajo y algunas líneas futuras de trabajo.

2. Modelo de Interacción Amortiguador de Masa Inercial-Estructura.

2.1. Modelización de Sistemas Dinámicos en Coordenadas Nodales.

La implementación práctica de cualquier método de control necesita la generación de un modelo matemático. En este caso la implementación de dicho modelo surge de la aplicación del principio del equilibrio dinámico de d'Alembert a cualquier discretización de las masas de la estructura (Hatch, 2001). Según dicho principio, la suma de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo y las denominadas fuerzas de inercia (la masa por aceleración del sistema de acuerdo con la segunda ley de Newton (Chopra, 2017) forman un sistema de fuerzas en equilibrio. La ecuación (2.1) representa dicha ley:

$$\sum f = ma = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} \tag{2.1}$$

donde f es una fuerza genérica actuando sobre el sistema, m es la masa del sistema, a es la aceleración del sistema, x es el desplazamiento del sistema, t es el tiempo y d denota la derivada respecto al tiempo.

Adicionalmente la tercera ley de Newton (Chopra, 2017) establece que, si dos cuerpos están en contacto, entonces experimentan la misma magnitud de la fuerza de contacto, pero actuando en dirección opuesta.

La tercera ley de Newton junto la ecuación (2.1) permite generar el modelo matemático de cualquier sistema dinámico en coordenadas nodales a partir de su diagrama de cuerpo libre (cada masa es aislada y se aplican sobre ella todas las fuerzas que actúan sobre la misma).

A modo de ejemplo se va a aplicar dichas leyes al objeto de obtener la ecuación del movimiento de una estructura. La modelización de la estructura se va a realizar con dos niveles de precisión: (i) un grado de libertad; y (ii) múltiples grados de libertad. Se ha considerado a tal efecto una viga en voladizo (es decir una viga que tiene coaccionados todos sus movimientos en la base y a la que se aplica una carga en su otro extremo). Se va a estudiar por simplicidad solo el movimiento en el plano de aplicación de la carga (Figura 3).

En la primera aproximación, modelo numérico de un único grado de libertad, se supone que toda la masa de la estructura se encuentra concentrada en un punto. De esta forma a partir de la repuesta en dicho punto se caracteriza el comportamiento de la estructura.

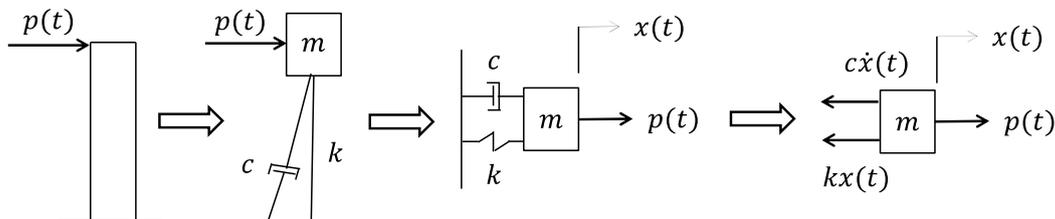


Figura 3. Modelización de un sistema de un grado de libertad.

Del diagrama de cuerpo libre de la Figura 3 se puede observar que sobre la estructura actúan cuatro fuerzas: (i) la fuerza de inercia, que es igual al producto de la

masa, m , por su aceleración, $\ddot{x}(t) = d^2x(t)/dt^2$; (ii) la fuerza de amortiguamiento, que es igual al producto de una constante de amortiguamiento, c , por la velocidad que experimenta la masa, $\dot{x}(t) = dx(t)/dt$; (iii) la fuerza de rigidez, que es proporcional al producto de la rigidez del sistema, k , por el desplazamiento, $x(t)$; y (iv) las fuerzas exteriores, $p(t)$. Las tres primeras fuerzas se oponen al movimiento como se ha reflejado en la Figura 3. Si se aplica la segunda ley de Newton, ecuación (2.1), al diagrama de cuerpo libre representado en la Figura 3 se obtiene la siguiente relación:

$$\sum f_x = p(t) - c\dot{x}(t) - kx(t) = m\ddot{x}(t) \quad (2.2)$$

Reorganizando los términos de esta ecuación se llega a esta otra (2.3) denominada ecuación del movimiento de la estructura.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = p(t) \quad (2.3)$$

Dicha ecuación, ecuación diferencial en segundo orden, caracteriza completamente el estado dinámico del sistema. Su resolución permite obtener la respuesta de la estructura a cualquier acción y estudiar la estabilidad del sistema y su rendimiento como estudiaremos posteriormente.

En el caso de la segunda aproximación, modelos de múltiples grados de libertad (Hatch, 2001), la masa se distribuye de forma proporcional en varios puntos. El comportamiento de la estructura queda caracterizado por la respuesta de cada una de las masas nodales. Esta mayor discretización de la masa nos permite obtener una mayor precisión en la simulación del comportamiento de la estructura, pero por contrapartida exige un mayor coste computacional. En el ejemplo que estamos analizando se va a suponer que la masa se distribuye en dos nodos (Figura 4).

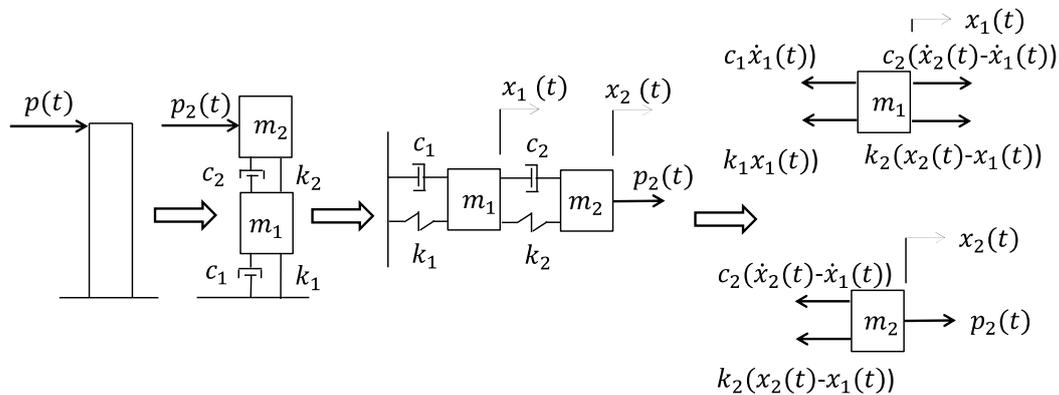


Figura 4. Modelización de un sistema de varios grados de libertad.

De esta forma aplicando la segunda ley de Newton al diagrama de cuerpo libre de cada masa se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$m_1\ddot{x}_1(t) + c_1\dot{x}_1(t) + k_1x_1(t) - (c_2(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t))) - (k_2(x_2(t) - x_1(t))) = 0 \quad (2.4)$$

$$m_2\ddot{x}_2(t) + (c_2(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t))) + (k_2(x_2(t) - x_1(t))) = p(i) \quad (2.5)$$

Dichas ecuaciones se pueden organizar en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p_2(t) \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

De esta forma la ecuación de movimiento de un sistema de múltiples grados de libertad se puede expresar como:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{p(t)\} \quad (2.7)$$

donde $\{\ddot{x}(t)\}$, $\{\dot{x}(t)\}$ y $\{x(t)\}$ son respectivamente el vector de aceleraciones, velocidades y desplazamientos de la estructura; $\{p(t)\}$ es el vector de fuerzas exteriores; $[M]$ es la matriz de masa de la estructura; $[C]$ es la matriz de amortiguamiento de la estructura; y $[K]$ es la matriz de rigidez de la estructura. Los coeficientes de las matrices anteriores son normalmente determinados modelizando la estructura mediante el método de los elementos finitos (Zienkiewicz y Taylor, 2013).

2.2. Modelización de Sistemas Dinámicos en Coordenadas Modales.

En estructuras reales el número de grados de libertad necesarios para caracterizar adecuadamente el comportamiento de la estructura puede ser tan elevado que los costes computacionales asociados hagan el problema inabordable desde un punto de vista práctico (Gawtonski, 2004).

Como solución al problema del coste computacional se puede reformular el sistema de ecuaciones de segundo orden anterior en un nuevo sistema de coordenadas, las denominadas coordenadas modales. Las coordenadas modales se obtienen a partir de los modelos nodales anteriormente descritos mediante una transformación de coordenadas basadas en la matriz modal. La matriz modal puede obtenerse siguiendo el siguiente procedimiento.

Se considera una estructura sin amortiguamiento, $[C] = [0]$, en vibración libre (es decir sin carga exterior aplicada, $\{p(t)\} = \{0\}$, y con desplazamiento $\{x(0)\} = \{x_0\}$ o velocidad iniciales, $\{\dot{x}(0)\} = \{\dot{x}_0\}$). La ecuación de movimiento en este caso se transforma en la siguiente expresión:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{0\} \quad (2.8)$$

La solución de la ecuación anterior se puede obtener suponiendo: (i) $\{x(t)\} = \{\phi\}e^{j\omega t}$ con $j = \sqrt{-1}$; y (ii) $\{\ddot{x}(t)\} = -\omega^2\{\phi\}e^{j\omega t}$. Introduciendo dichos términos en la ecuación (2.8):

$$([K] - \omega^2[M])\{\phi\}e^{j\omega t} = \{0\} \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) constituye un conjunto de ecuaciones homogéneas para las que existen una solución no trivial si y solo si el determinante de $([K] - \omega^2[M])$ es cero.

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad (2.10)$$

La ecuación (2.10) se cumple para una serie de n_f de frecuencias ω . Dichas frecuencias se notan como $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n_f}$. El número de frecuencias no excede el número de grados de libertad de la estructura $n_f \leq n_g$. La frecuencia, ω_i , recibe el nombre de i frecuencia natural.

Sustituyendo w_i en la ecuación (2.10) se obtiene el siguiente conjunto de vectores $\phi_1, \dots, \phi_{n_f}$ que satisfacen dicha ecuación. El vector, ϕ_i , corresponde con la frecuencia natural, w_i , y se denomina modo de vibración. Los modos de vibración no son únicos sino que puede ser arbitrariamente escalados (de esta forma si ϕ_i cumple la ecuación (2.9) entonces $a\phi_i$ también la cumplirá; donde a es un escalar arbitrario).

Se define la matriz de frecuencias naturales, $[\Omega]$, y la matriz de los modos, $[\Phi]$, de vibración (donde ϕ_{ij} es el desplazamiento j del modo de vibración i):

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & w_{n_f} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$[\Phi] = \{\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_{n_f}\} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} & \dots & \phi_{n_f 1} \\ \phi_{12} & \phi_{22} & \dots & \phi_{n_f 2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{1n_g} & \phi_{2n_g} & \dots & \phi_{n_f n_g} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

La matriz modal, $[\Phi]$, tiene una propiedad muy interesante; diagonaliza la matriz de masa, $[M]$, y rigidez, $[K]$, de la estructura (Chopra, 2017). De esta forma se obtiene las matrices de masa $[M_m]$ y rigidez modal $[K_m]$.

$$[M_m] = [\Phi]^T [M] [\Phi] \quad (2.13)$$

$$[K_m] = [\Phi]^T [K] [\Phi] \quad (2.14)$$

La misma transformación puede aplicarse a la matriz de amortiguamiento, $[C]$, obteniéndose la matriz de amortiguamiento modal, $[C_m]$:

$$[C_m] = [\Phi]^T [C] [\Phi] \quad (2.15)$$

Sin embargo, dicha matriz no es siempre diagonal. No obstante, en algunos casos, es posible obtener una matriz de amortiguamiento modal diagonal, $[C_m]$. En dichos casos, dicha matriz se denomina matriz de amortiguamiento proporcional. Dicha proporcionalidad se asume por conveniencia en el análisis. Dicha hipótesis se justifica en el hecho de que la naturaleza del amortiguamiento no se conoce exactamente y en que la colaboración de los términos no diagonales no es importante para aplicaciones prácticas de ingeniería civil. El amortiguamiento proporcional es normalmente logrado asumiendo que la matriz de amortiguamiento, $[C]$, es una combinación lineal de la matriz de rigidez, $[K]$, y la de masa, $[M]$, como queda expresado por la siguiente ecuación (donde α_1 y α_2 son dos escalares no negativos):

$$[C] = \alpha_1 [K] + \alpha_2 [M] \quad (2.16)$$

Los modelos modales de estructuras son modelos matemáticos que refleja su comportamiento en coordenadas modales. Para formular la ecuación del movimiento en coordenadas modales se introduce una nueva variable, $\{x_m(t)\}$, denominada vector de desplazamientos modales.

$$\{x(t)\} = [\Phi]\{x_n(t)\} \quad (2.17)$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento para esta nueva variable, se introduce la ecuación (2.17) en la ecuación (2.7) y se multiplica esta última por la izquierda por $[\Phi]^T$, obteniendo:

$$[\Phi]^T[M][\Phi]\{\ddot{x}_n(t)\} + [\Phi]^T[C][\Phi]\{\dot{x}_n(t)\} + [\Phi]^T[K][\Phi]\{x_n(t)\} = [\Phi]^T\{p(t)\} \quad (2.18)$$

Asumiendo amortiguamiento proporcional y usando las ecuaciones (2.13), (2.14) y (2.15) se obtiene la siguiente ecuación:

$$[M_n]\{\ddot{x}_n(t)\} + [C_n]\{\dot{x}_n(t)\} + [K_n]\{x_n(t)\} = [\Phi]^T\{p(t)\} \quad (2.19)$$

Posteriormente, si multiplicamos ambos términos de esta ecuación por $[M]^{-1}$ se obtiene:

$$\{\ddot{x}_n(t)\} + [M_n]^{-1}[C_n]\{\dot{x}_n(t)\} + [M_n]^{-1}[K_n]\{x_n(t)\} = [M_n]^{-1}[\Phi]^T\{p(t)\} \quad (2.20)$$

Dicha ecuación (2.20) se puede simplificar mediante el siguiente cambio de notación:

$$\{\ddot{x}_n(t)\} + 2[Z][\Omega]\{\dot{x}_n(t)\} + [\Omega]^2\{x_n(t)\} = [M_n]^{-1}[\Phi]^T\{p(t)\} \quad (2.21)$$

donde $[\Omega]$ es la matriz diagonal de frecuencias naturales previamente definida; y $[Z]$ es la matriz diagonal de amortiguamiento modal. Ambas matrices se pueden definir como:

$$[\Omega]^2 = [M_n]^{-1}[K_n] \quad (2.22)$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \zeta_{n_f} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

donde ζ_i es el ratio de amortiguamiento del modo de vibración i . La matriz $[Z]$ es obtenida usando las siguientes relaciones:

$$[M_n]^{-1}[C_n] = 2[Z][\Omega] \quad (2.24)$$

$$[Z] = 0.5[M_n]^{-1}[C_n][\Omega]^{-1} = 0.5[M_n]^{-1}[K_n]^{-1}[C_n] \quad (2.25)$$

De esta forma, la representación modal de una estructura es un conjunto de ecuaciones desacopladas. De hecho, debido a que $[Z]$ y $[\Omega]$ son matrices diagonales, este conjunto de ecuaciones puede escribirse como:

$$\ddot{x}_{ni}(t) + 2\zeta_i w_i \dot{x}_n(t) + w_i^2 x_n(t) = b_{ni} p(t) \text{ con } [B_n] = [M_n]^{-1}[\Phi]^T\{B_0\} \quad (2.26)$$

$i = 1, \dots, n_f$

donde $\{B_0\}$ es un vector que indica la posición de aplicación de la carga.

Una de las ventajas de la resolución de la ecuación de movimiento bajo su formulación modal es que no es necesario obtener la respuesta de la estructura para todos los modos, sino solo para aquellos modos afectados por la acción de la carga.

En el desarrollo de este trabajo se hará uso de dicha propiedad para la elaboración del modelo de interacción entre la estructura y el sistema de control.

2.3. Modelización Matemática de la Respuesta Dinámica de la Estructura.

Durante el análisis dinámico de las estructuras de ingeniería civil, la práctica habitual es caracterizar el comportamiento de la estructura en base a su descomposición modal. No obstante, para llevar a cabo dicha descomposición es necesario determinar las frecuencias naturales, w_i , y los modos de vibración de la estructura, ϕ_i . Dichas magnitudes son obtenidas a partir de la solución del problema de autovalores y autovectores definido por la ecuación (2.10). De esta forma, la principal dificultad es definir las matrices de masa, $[M]$, y rigidez, $[K]$.

Para aplicaciones prácticas de ingeniería civil existen dos formas de llevar a cabo dichos modelos (Vega, 2010): (i) modelos de masa concentrada; y (ii) modelos de masa consistente.

En los modelos de masa concentrada, la masa y rigidez de la estructura se concentran mediante reglas de reparto simplificadas en determinados puntos de la estructura sobre los que se quiere determinar la respuesta. Dichos modelos son habitualmente utilizados para obtener una primera aproximación del problema por su buen equilibrio entre exactitud y coste computacional.

En los modelos de masa consistente, la matriz de masa y rigidez son determinadas de forma más precisa mediante una discretización fina de la estructura con base a algún método de integración numérica. En dicho sentido, es habitual utilizar el método de los elementos finitos (Zienkiewicz y Taylor, 2013).

De acuerdo al método de los elementos finitos, la estructura se divide en dos tipos de componentes: (i) nodos y (ii) elementos. Cada nodo presente una serie de grados de libertad (que son las direcciones en las que queremos determinar los desplazamientos y giros de la estructura). Los elementos que son discretizaciones de la estructura en las se va a resolver la ecuación del movimiento. Los elementos están limitados por nodos. En función de su configuración espacial, los elementos se pueden dividir en elementos en 1D, 2D o 3D. De esta forma, ejemplos de los diferentes tipos de elementos son: (i) elementos 1D, los elementos “muelle” (1 grado de libertad por nodo); (ii) elementos 2D, los elementos “barra/viga” (2 grados de libertad por nodo), los elementos “losa” (3 grados de libertad por nodo) y los elementos “placa” (3 grados de libertad por nodo); y (iii) los elementos 3D, “cubos” o “tetraedros” (3 grados de libertad por nodo).

De esta forma, una vez que se hayan definido, a partir del método de los elementos finitos, la matriz de rigidez y masa del modelo, se procede, mediante un análisis modal (ecuación 2.10), a realizar una simplificación del modelo matemático.

2.4. Modelización Matemática de la Interacción entre la Estructura y un Sistema de Control de Masa Inercial.

La modelización matemática de un sistema de interacción estructura-sistema de control de masa inercial de la aplicación del método descrito en los apartados 2.1 y 2.2 a dos sub-sistemas: (i) la estructura; y (ii) el sistema de control de masa inercial. El modelo matemático del sistema se va a realizar asumiendo las siguientes hipótesis: (i) el comportamiento de la estructura se puede aproximar por un único modo de vibración; (ii) el sistema de control de masa inercial se puede modelizar por un sistema de un solo grado de libertad; y (iii) el sistema de control de masa inercial se instala en el punto de máxima deformación modal del modo de vibración considerado de la estructura.

En la Figura 6 se ilustra la configuración real de un sistema de control de masa inercial y su instalación bajo el tablero de una estructura de ingeniería civil.

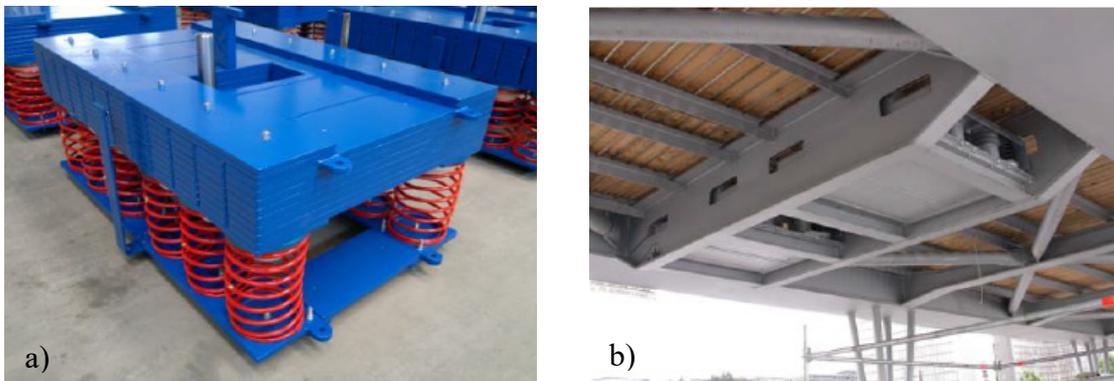


Figura 6. Sistema de control de masa inercial: a) Detalle general del amortiguador; y b) Colocación bajo tablero de una pasarela (Butz *et al.*, 2007).

Se presenta en la Figura 7 un esquema del diseño de un amortiguador de masa inercial sobre un sistema de un grado de libertad (se supone que dicho grado de libertad se corresponde con un modo de vibración de la estructura). La ecuación de movimiento de dicho sistema se puede obtener aplicando las ecuaciones de equilibrio dinámico a cada una de las masas intervinientes (ver Figura 7).

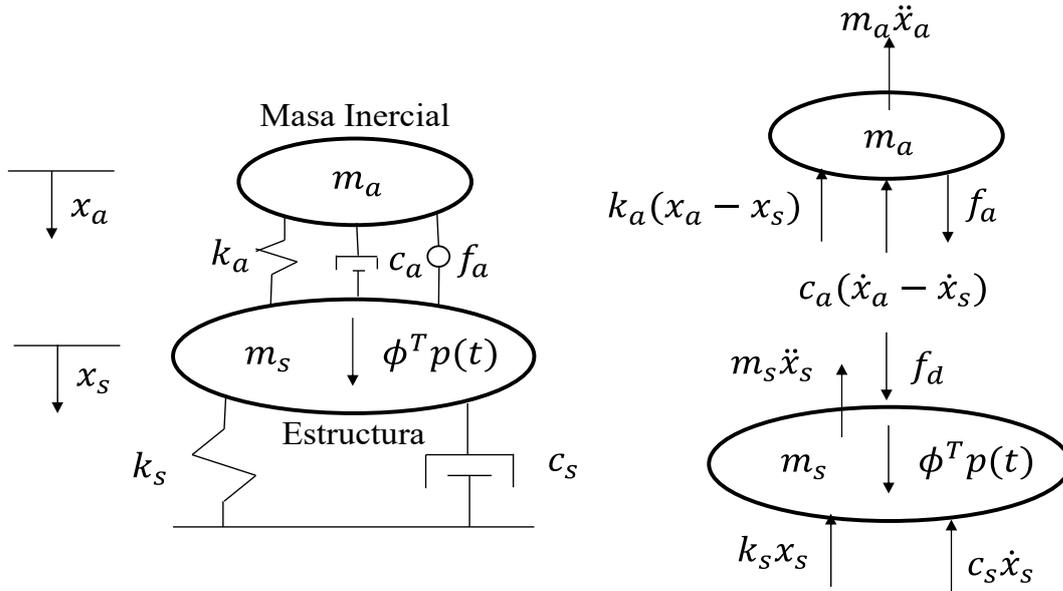


Figura 7. Sistema de un grado de libertad controlado por sistema de control de masa inercial.

De esta manera, las ecuaciones de movimiento de una estructura controlada por un sistema de control de masa inercial se pueden expresar como:

$$m_s \ddot{x}_s(t) + c_s \dot{x}_s(t) + k_s x_s(t) = p^*(t) + f_d(t) \quad (2.29)$$

$$m_a \ddot{x}_a(t) + c_a (\dot{x}_a(t) - \dot{x}_s(t)) + k_a (x_a(t) - x_s(t)) = f_a(t) \quad (2.30)$$

$$f_d(t) = c_a (\dot{x}_a(t) - \dot{x}_s(t)) + k_a (x_a(t) - x_s(t)) - f_a(t) = -m_a \ddot{x}_a(t) \quad (2.31)$$

donde m_s , c_s y k_s son respectivamente la masa, amortiguamiento y rigidez del modo de vibración considerado; $p^*(t)$ es la fuerza exterior proyectada sobre el modo (perturbación); $\ddot{x}_s(t)$, $\dot{x}_s(t)$ y $x_s(t)$ son respectivamente el desplazamiento, velocidad y aceleración de la estructura; m_a , c_a y k_a son respectivamente la masa, amortiguamiento y rigidez del amortiguador de masa inercial; $\ddot{x}_a(t)$, $\dot{x}_a(t)$ y $x_a(t)$ son respectivamente el desplazamiento, velocidad y aceleración del amortiguador de masa inercial; $f_a(t)$ es la fuerza motriz aplicada a la masa inercial por el actuador; y $f_d(t)$ es la fuerza de control activa proporcionada por el sistema de control de masa inercial sobre la estructura controlada.

Dichas ecuaciones se pueden organizar en forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_s(t) \\ \ddot{x}_a(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s + c_a & -c_a \\ -c_a & c_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_a(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s + k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_s(t) \\ x_a(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} p^*(t) + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} f_a(t) \quad (2.32)$$

De esta forma, la ecuación (2.30) se puede re-organizar de forma genérica de la siguiente forma:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{B_0\}p^*(t) + \{B_c\}f_a(t) \quad (2.33)$$

donde $[M] = \begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix}$ es la matriz de masa; $[C] = \begin{bmatrix} c_s + c_a & -c_a \\ -c_a & c_a \end{bmatrix}$ es la matriz de amortiguamiento; $[K] = \begin{bmatrix} k_s + k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix}$ es la matriz de rigidez; $\{B_0\}$ es el vector de entrada de la carga exterior, $\{B_c\}$ es el vector de entrada de la fuerza del actuador; $\{\ddot{x}(t)\}$ es el vector de aceleraciones, $\{\dot{x}(t)\}$ es el vector de velocidades; y $\{x(t)\}$ es el vector de desplazamientos.

Se puede deducir del análisis de la ecuación (2.32) que hay cuatro parámetros de diseño claves para el amortiguador de masa inercial: (i) la fuerza motriz, $f_a(t)$; (ii) la masa inercial, m_a ; (iii) el coeficiente de amortiguamiento, c_a ; y (iv) la rigidez, k_a .

Como se presentará posteriormente (sección 6), dichas ecuaciones generales se podrán adaptar para representar el comportamiento de los tres tipos de sistemas de amortiguación de masa inercial: (i) pasivo (m_a, c_a, k_a); (ii) semi-activo (m_a, k_a, f_a); y (iii) activo (m_a, c_a, k_a, f_a).

Se presenta en la Figura 8 un esquema con los principales parámetros que rigen el comportamiento de los sistemas de control de masa inercial.

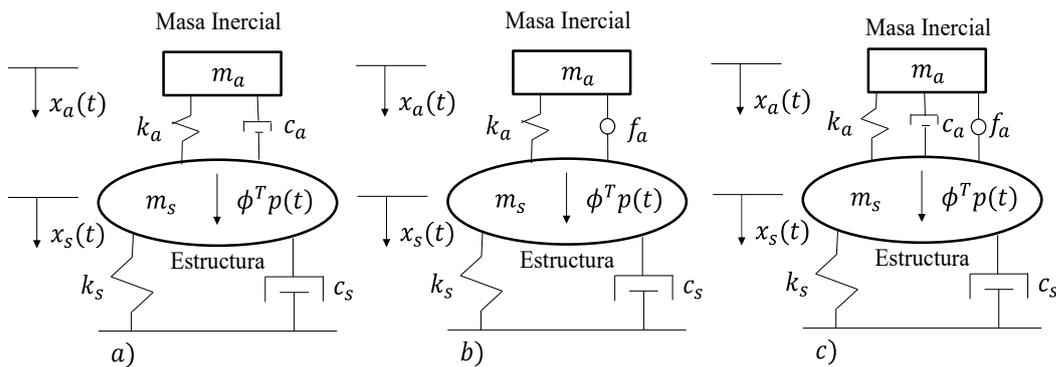


Figura 8. Modelos de interacción estructural-sistema de control de masa inercial: a) pasiva; b) semi-activa; y c) activa.

3. Control de Estructuras de Ingeniería Civil en el Espacio de Estado.

3.1. Modelización de Sistemas Dinámicos en el Espacio de Estado.

Los sistemas dinámicos son sistemas que cambian o evolucionan en el tiempo según una ley concreta (Dominguez, 2002). Para muchos sistemas físicos, dicha regla puede ser establecida como un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\{\dot{z}(t)\} = \frac{d\{z(t)\}}{dt} = f(\{z(t)\}, \{u(t)\}, t) \quad (3.1)$$

donde $\{z(t)\}$ es el vector de estado (conjunto de variables que representan la configuración del sistema en el instante t ; $\{u(t)\}$ es el vector de entradas externas al sistema en el instante t ; y f es una función que refleja la derivada del vector de estado en un instante de tiempo particular.

El estado en cualquier tiempo futuro, $\{z(t_1)\}$, puede ser determinada exactamente a partir del instante inicial, $\{z(t_0)\}$, y el historial de tiempo de las entradas, $\{u(t)\}$, entre t_0 y t_1 integrando la ecuación (3.1). Aunque las variables de estado no son únicas, hay un número mínimo de variables de estado, n_s , requeridas para reflejar adecuadamente el “estado” de un sistema y ser capaces de predecir su comportamiento futuro. Dicho número mínimo de variables, n_s , también es denominado como el orden del sistema y determina la dimensión del espacio de estado. El orden del sistema normalmente se corresponde con el número de elementos independientes del sistema que almacenan energía.

La relación representada por la ecuación (3.1) es muy general y puede ser usada para describir una gran variedad de sistemas, desgraciadamente, puede ser muy difícil de analizar. Hay dos simplificaciones que simplifican el problema.

Primero, si la función f no depende explícitamente del tiempo, es decir, $\{\dot{z}(t)\} = f(\{z(t)\}, \{u(t)\})$, se dice que el sistema es invariante respecto al tiempo. Esto es a menudo una hipótesis muy razonable ya que las leyes físicas que gobiernan el problema dinámico no suelen depender de la variable tiempo. Para sistemas invariantes con el tiempo, los coeficientes de la función f son constantes. Las variables de estado, $\{z(t)\}$, y las entradas al sistema, $\{u(t)\}$, pueden ser aun dependientes del tiempo.

La segunda simplificación está relacionada con la linealidad del sistema. En la realidad, casi cualquier sistema físico es no lineal, es decir, f es una función muy complicada que relaciona las entradas con las salidas. Dichas no-linealidades tiene muchas diferentes fuentes, siendo una de las más habituales en sistemas de control la “saturación del sistema” en la que algún elemento del mismo alcanza un límite físico superior de operación. Afortunadamente, dentro de un rango de funcionamiento suficientemente pequeño (donde la tangente de la función aproxima adecuadamente a la curva), la dinámica de la mayoría de sistemas es aproximadamente lineal. En dicho caso, el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden puede ser representado por una ecuación matricial de la forma:

$$\{\dot{z}(t)\} = [A]\{z(t)\} + [B]\{u(t)\} \quad (3.2)$$

Hasta la llegada de los ordenadores digitales, era solo práctico analizar sistemas lineales invariantes en el tiempo. Consecuentemente, la mayoría de los resultados de la teoría de control se basan en dichas hipótesis. Afortunadamente, dichos resultados son útiles y han permitido resolver múltiples retos de la ingeniería de control. De hecho, el

verdadero poder del control por realimentación de sistemas está en su robustez ante la presencia de incertidumbre en el modelado.

Un sistema invariable lineal de dimensiones finitas se puede describir mediante las siguientes ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} \dot{\{z(t)\}} &= [A]\{z(t)\} + [B]\{u(t)\} \\ \{y(t)\} &= [E]\{z(t)\} + [D]\{u(t)\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

con el estado inicial $\{z(0)\} = \{z_0\}$. En la ecuación anterior, el vector n_s -dimensional, $\{z(t)\}$ se denomina el vector de estado, $\{z_0\}$ es la condición inicial del vector de estado, $\{u(t)\}$ es un vector s -dimensional que define la entrada al sistema, y $\{y(t)\}$ es un vector r -dimensional que define la salida del sistema. Las matrices $[A]$, $[B]$, $[E]$ y $[D]$ son matrices con coeficientes constantes definidos por número reales y de dimensiones apropiadas. De esta forma, $[A]$ es la matriz del sistema con dimensiones $n_s \times n_s$, $[B]$ es la matriz de entrada del sistema con dimensiones $n_s \times s$, $[E]$ es la matriz de salida del sistema con dimensiones $r \times n_s$; y $[D]$ es la matriz de avance con dimensiones $r \times s$. Al conjunto de matrices $[A]$, $[B]$, $[E]$ y $[D]$ se le denomina representación del sistema en el espacio de estado (Figura 9).

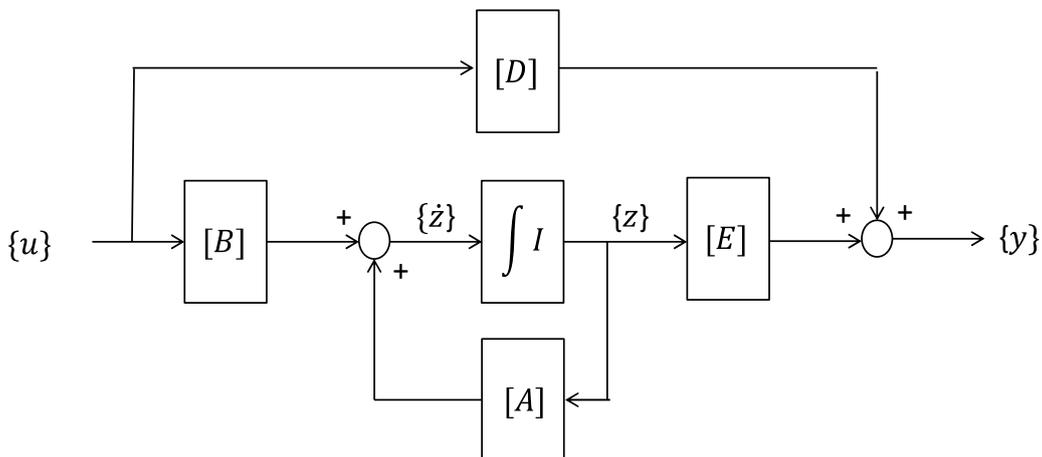


Figura 9. Diagrama de bloques del sistema en el espacio de estado.

La representación en el espacio de estado, también referida como la representación en el dominio del tiempo, puede manejar fácilmente sistemas con múltiples-entradas y múltiples-salidas, sistemas con condiciones iniciales no nulas y sistemas no lineales. Por eso, la representación de sistemas en el espacio de estado ha sido ampliamente utilizada en la teoría de control moderna (Ogata, 2006).

Para el control de vibraciones de estructuras de ingeniería civil, la variable de salida a controlar suele ser la aceleración del sistema. Como las aceleraciones no son variables de estado del sistema (Gawtonski, 2004), las mismas no pueden ser expresadas a partir de combinaciones lineales de los estados, es decir, la salida no puede ser definida por $\{y(t)\} = [E]\{z(t)\}$.

Se considera el modelo de estado con las salidas definidas como una combinación de las aceleraciones de los nodos:

$$\{y(t)\} = [E]\{\ddot{x}(t)\} \quad (3.4)$$

Dicha salida no es parte del vector de estado $\{z(t)\}$. Sin embargo, si es parte de las derivadas del estado, ya que:

$$\{\dot{z}(t)\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Combinando las ecuaciones (3.4) y (3.5) se puede encontrar que la salida en aceleraciones se puede expresar a partir de la derivada del estado.

$$\{y(t)\} = [0 \quad [E_a]]\{\dot{z}(t)\} \quad (3.6)$$

Definiendo $\{\dot{z}(t)\}$ a partir de la ecuación (3.1) se obtiene:

$$\{y(t)\} = [0 \quad [E_a]][A]\{z(t)\} + [0 \quad [E_a]][B]\{u(t)\} \quad (3.7)$$

Y considerando la definición de $[A]$ y $[B]$ a partir de la ecuación (3.7) se obtiene:

$$\{y(t)\} = [-[E_a][M]^{-1}[K] \quad -[E_a][M]^{-1}[C]]\{z(t)\} + [E_a][M]^{-1}[B_0]\{u(t)\} \quad (3.8)$$

Que en notación más compacta se puede expresar como:

$$\{y(t)\} = [E]\{z(t)\} + [D]\{u(t)\} \quad (3.9)$$

con:

$$[E] = -[E_a][M]^{-1}[K] \quad [M]^{-1}[C] \quad (3.10)$$

$$[D] = [E_a][M]^{-1}[B_0] \quad (3.11)$$

De esta forma la ecuación (3.9) junto con las ecuaciones (3.10) y (3.11) representa la ecuación de salida de un sistema en aceleraciones.

Finalmente se presenta como ejemplo la representación en el espacio de estado del sistema masa-muelle-amortiguador que estudiamos anteriormente (Figura 3). Se procede de la siguiente manera.

Primero, se selecciona la posición, $x(t)$, y la velocidad, $\dot{x}(t)$, del sistema como variables de estado:

$$\{z(t)\} = \begin{Bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

La variable posición, $x(t)$, representa la energía potencial almacenada en el muelle, mientras que la variable velocidad, $\dot{x}(t)$, representa la energía cinética almacenada en la masa. El amortiguador solo disipa energía, no la almacena.

La ecuación de estado en este caso sería:

$$\{\dot{z}(t)\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{Bmatrix} p(t) \quad (3.13)$$

Si, por ejemplo, estuviéramos interesados en controlar la posición de la masa la ecuación de salida sería:

$$\{y(t)\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

De esta forma las matrices del sistema, entrada, salida y avance serían:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} [B] = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} [E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} [D] = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

3.2. Transformación de Sistemas Dinámicos Nodales a Sistemas Dinámicos en Espacio de Estado.

En aplicaciones prácticas de ingeniería estructural lo más habitual es elaborar un modelo matemático del sistema dinámico en base a un modelo nodal (previamente elaborado a partir de un modelo de elementos finitos y de la proyección modal del mismo). En el presente trabajo dicho modelo será realizado con el software comercial Ansys (Ansys, 2019).

Para forma general (sistemas con n_g grados de libertad) para poder transformar un sistema dinámico nodal (según queda definido por la ecuación 2.7) en un sistema equivalente en el espacio de estado basta con realizar la siguiente transformación (suponiendo que las matrices son no-singulares):

$$\begin{aligned} \{\ddot{x}(t)\} + [M]^{-1}[C]\{\dot{x}(t)\} + [M]^{-1}[K]\{x(t)\} &= [M]^{-1}[B_0]\{u(t)\} \\ \{y(t)\} &= [E_d]\{x(t)\} + [E_v]\{\dot{x}(t)\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Un estado es un vector que contiene el mínimo número de variables físicas que permiten calcular unívocamente la salida a partir de la entrada aplicada. En una estructura, los desplazamientos y velocidades nodales permiten dicha determinación de la salida. De esta forma se puede definir el vector de estado, $\{z(t)\}$, como una combinación del desplazamiento, $\{x(t)\}$, y velocidades, $\{\dot{x}(t)\}$, estructurales.

$$\{z(t)\} = \begin{Bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Bajo dicha consideración la ecuación (3.16) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= -[M]^{-1}[K]z_1(t) - [M]^{-1}[C]z_2(t) + [M]^{-1}[B_0]u(t) \\ \{y(t)\} &= [C_{0d}]z_1(t) + [C_{0v}]z_2(t) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Combinando las ecuaciones anteriores en una, se obtienen las ecuaciones de estado (como en 3.3) con la siguiente representación en el espacio de estado:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 \\ -[M]^{-1}[B_0] \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$[E] = [E_{0d} \quad E_{0v}]$$

donde $[A]$ es una matriz $n_s \times n_s$, $[B]$ es una matriz $n_s \times s$ y $[E]$ es una matriz $r \times n_s$. La dimensión del modelo de estado, n_s , es dos veces el número de grados de libertad del sistema, n_g ($n_s = 2 \cdot n_g$).

3.3. Análisis de Sistemas Dinámicos en el Espacio de Estado.

En esta sección se obtendrá la solución general de la ecuación de espacio de estado lineal e invariante en el tiempo. Dicha solución se obtendrá en dos pasos: (i) primero el homogéneo; y (ii) segundo el no-homogéneo.

Para abordar la solución del caso homogéneo se parte de la solución de la ecuación diferencial escalar.

$$\dot{z}(t) = az(t) \quad (3.20)$$

Al resolver esta ecuación se supone una solución del tipo:

$$z(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots \quad (3.21)$$

Sustituyendo la ecuación (3.21) en la ecuación (3.20) se obtiene:

$$b_1 + 2b_2 t + \dots + kb_k t^{k-1} + \dots = a(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots) \quad (3.22)$$

La ecuación (3.22) debe ser validada para cualquier instante de tiempo t luego los coeficientes de igual potencia puede ser igualados:

$$\begin{aligned} b_1 &= ab_0 \\ b_2 &= \frac{1}{2}ab_1 = \frac{1}{2}a^2b_0 \\ b_3 &= \frac{1}{3}ab_2 = \frac{1}{6}a^3b_0 \\ &\dots \\ b_k &= \frac{1}{k!}a^k b_0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

El valor de b_0 se determina sustituyendo $t = 0$ en la ecuación (3.21), $z(0) = b_0$.

Por lo tanto, la solución de la ecuación homogénea se puede escribir como:

$$z(t) = \left(1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!} + a^k t^k \dots \right) z(0) = e^{at} z(0) \quad (3.24)$$

A continuación, se resuelve la ecuación diferencial matricial:

$$\{\dot{z}(t)\} = [A]\{z(t)\} \quad (3.25)$$

Por analogía con el caso escalar, se supone que la solución está en la forma de una serie de potencias vectoriales en t :

$$\{z(t)\} = \{b_0\} + \{b_1\}t + \{b_2\}t^2 + \dots + \{b_k\}t^k + \dots \quad (3.26)$$

Al sustituir esta ecuación (3.26) en la ecuación (3.25) se obtiene:

$$\begin{aligned} \{b_1\} + 2\{b_2\}t + \dots + k\{b_k\}t^{k-1} + \dots \\ = [A](\{b_0\} + \{b_1\}t + \{b_2\}t^2 + \dots + \{b_k\}t^k + \dots) \end{aligned} \quad (3.27)$$

La ecuación (3.27) debe ser validada para todo t , por lo tanto los coeficientes de las potencias iguales de t en ambos miembros de la ecuación (3.27) deben ser iguales:

$$\begin{aligned} \{b_1\} &= [A]\{b_0\} \\ \{b_2\} &= \frac{1}{2}[A]\{b_1\} = \frac{1}{2}[A]^2\{b_0\} \\ \{b_3\} &= \frac{1}{3}[A]\{b_2\} = \frac{1}{6}[A]^3\{b_0\} \\ &\dots \\ \{b_k\} &= \frac{1}{k!}[A]^k\{b_0\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Al sustituir $t = 0$ en la ecuación (3.26) se obtiene:

$$\{z(0)\} = \{b_0\} \quad (3.29)$$

De esta forma, la solución $\{z(t)\}$ se expresa como:

$$\{z(t)\} = ([I] + [A]t + \frac{1}{2!}[A]^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}[A]^kt^k + \dots)\{z(0)\} \quad (3.30)$$

La expresión entre paréntesis de la ecuación (3.30) constituyen una matriz. Debido a su similitud con la serie infinita de potencias para una exponencial escalar, se la denomina matriz exponencial y se escribe:

$$[I] + [A]t + \frac{1}{2!}[A]^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}[A]^kt^k + \dots = e^{[A]t} \quad (3.31)$$

En términos de dicha matriz exponencial, la solución de la ecuación (3.25) se puede escribir como:

$$\{z(t)\} = e^{[A]t}\{z(0)\} \quad (3.32)$$

La solución del espacio de estado homogénea se puede escribir de forma alternativa como:

$$\{z(t)\} = [\Theta(t)]\{z(0)\} \quad (3.33)$$

donde $[\Theta(t)]$ es una matriz de dimensión $n_s \times n_s$ única solución de:

$$[\dot{\Theta}(t)] = [A][\Theta(t)] \text{ y } [\Theta(0)] = [I] \quad (3.34)$$

Para verificar esto obsérvese que:

$$[z(0)] = [\Theta(0)]\{z(0)\} \quad (3.35)$$

y

$$[\dot{z}(t)] = [\dot{\Theta}(t)]\{z(0)\} = [A][\Theta(t)]\{z(0)\} = [A]\{z(t)\} \quad (3.36)$$

Por lo tanto, se confirma que la ecuación (3.33) es la solución de la ecuación (3.25). A partir de las ecuaciones (3.32) y (3.33) se obtiene que:

$$[\Theta(t)] = e^{[A]t} \quad (3.37)$$

En la ecuación (3.33) vemos que la solución de la ecuación (3.25) es simplemente una transformación de la condición inicial. Por lo tanto, la matriz única, $[\Theta(t)]$, se denomina matriz de transformación de estados. La matriz de transformación de estados contiene toda la información sobre el movimiento libre del sistema definido por la ecuación (3.25).

Si los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, de la matriz $[A]$ son distintos, entonces $[\Theta(t)]$ contendrá las n_s exponenciales, $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$. En particular si la matriz $[A]$ es diagonal, entonces:

$$[\Theta(t)] = e^{[A]t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Si hay multiplicidad en los valores característicos entonces además de los términos exponenciales habrá términos polinomiales en la matriz ($te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, \dots$).

Para el caso no homogéneo se comenzará considerando el caso no escalar:

$$\dot{z}(t) = az(t) + bu(t) \quad (3.39)$$

Re-escribiendo la ecuación (3.39) de la siguiente forma:

$$\dot{z}(t) - az(t) = bu(t) \quad (3.40)$$

Multiplicando ambos términos de la ecuación por e^{-at} se obtiene:

$$e^{-at}[\dot{z}(t) - az(t)] = \frac{d}{dt}[e^{-at}z(t)] = e^{-at}bu(t) \quad (3.41)$$

Integrando dicha ecuación entre 0 y t se obtiene:

$$e^{-at}z(t) - z(0) = \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau) d\tau \quad (3.42)$$

o bien:

$$z(t) = e^{at}z(0) + e^{at} \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau) d\tau \quad (3.43)$$

El primer término del segundo miembro de la ecuación (3.43) es la respuesta a las condiciones iniciales, y el segundo término es la respuesta a la entrada, $u(t)$.

Se considera en este punto la ecuación de estado no homogénea descrita mediante:

$$\{\dot{z}(t)\} = [A]\{z(t)\} + [B]\{u(t)\} \quad (3.44)$$

donde todas las variables fueron previamente definidas.

La ecuación (3.44) se puede escribir como:

$$\{\dot{z}(t)\} - [A]\{z(t)\} = [B]\{u(t)\} \quad (3.45)$$

Multiplicando ambos términos de la ecuación por $e^{-[A]t}$ se obtiene

$$e^{-[A]t}[\{\dot{z}(t)\} - [A]\{z(t)\}] = \frac{d}{dt}[e^{-[A]t}\{z(t)\}] = e^{-[A]t}[B]\{u(t)\} \quad (3.46)$$

Integrando la ecuación (3.46) entre 0 y t se obtiene:

$$e^{-[A]t}\{z(t)\} - \{z(0)\} = \int_0^t e^{-[A]\tau}[B]\{u(\tau)\} d\tau \quad (3.47)$$

o bien

$$\{z(t)\} = e^{[A]t}\{z(0)\} + \int_0^t e^{[A](t-\tau)}[B]\{u(\tau)\} d\tau \quad (3.48)$$

La ecuación (3.48) también se puede escribir como;

$$\{z(t)\} = [\Theta(t)]\{z(0)\} + \int_0^t [\Theta(t-\tau)][B]\{u(\tau)\} d\tau \quad (3.49)$$

donde $[\Theta(t)] = e^{[A]t}$. Las ecuaciones (3.48) y (3.49) son la solución de la ecuación (3.44). La solución $\{z(t)\}$ es claramente la suma de un término formado por la transición del estado inicial y un término que surge de la entrada al sistema.

Una vez conocida la ecuación que rige la respuesta del sistema, tres propiedades del sistema pueden ser estudiadas: (i) la estabilidad del sistema; (ii) la controlabilidad; y (iii) la observabilidad.

Las condiciones de estabilidad, controlabilidad y observabilidad determinan la existencia de una solución completa para el problema de diseño de un sistema de control. La solución a dicho problema puede no existir si el sistema considerado no es estable ni controlable. Aunque la mayor parte de las estructuras de ingeniería civil son estables, controlables y observables, los modelos matemáticos correspondientes tal vez no poseen la propiedad de la estabilidad, controlabilidad y observabilidad. Es por ello necesario, conocer las condiciones en las que un sistema es estable, controlable y observable.

Para estudiar la estabilidad del sistema usaremos la definición de estabilidad que establece que un sistema es estable si la salida permanece acotada para todo tipo de entradas acotadas (Dominguez, 2002).

Como se observa de la ecuación (3.48). la respuesta del sistema queda acotada por el término $e^{[A]t}$. De esta forma, los componentes de la matriz $[A]$ van a determinar la estabilidad del sistema. Aplicando la ecuación (3.38) se puede comprobar que resolviendo un problema de valores propios sobre dicha matriz, $[A]$, se puede estudiar la estabilidad del problema. Para asegurar la estabilidad del problema es necesario que dichos valores propios se sitúen en la zona negativa del eje de abscisas.

Por otro lado, se dice que un sistema es controlable en el tiempo t_0 , si se puede transferir desde cualquier estado inicial $\{z(t_0)\}$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito (Dominguez, 2002).

De esta forma, dada la ecuación del estado de un sistema se dice que es de estado controlable en $t = t_0$ si es posible construir una señal de control sin restricciones que transfiera un estado inicial al cualquier estado final en un intervalo de tiempo $t_0 \leq t \leq t_1$. Si todos los estados son controlables, se dice que el sistema es de estado completamente controlable.

Se puede establecer una condición que indique la controlabilidad completa del estado. Se va a suponer, sin pérdida de generalidad, que el estado final es el origen en el espacio de estado y que el estado inicial es cero ($t_0 = 0$).

La respuesta de un sistema en el espacio de estado ante una entrada $\{u(t)\}$ viene expresada por la ecuación (3.48). Aplicando la definición de controlabilidad completa del estado se tiene que:

$$\{z(t_1)\} = 0 = e^{[A]t_1}\{z(0)\} + \int_0^{t_1} e^{[A](t_1-\tau)}[B]\{u(\tau)\} d\tau \quad (3.50)$$

o bien

$$\{z(0)\} = - \int_0^{t_1} e^{-[A]\tau}[B]\{u(\tau)\} d\tau \quad (3.51)$$

Considerado que $e^{-[A]\tau}$ se puede expresar como la siguiente serie (Ogata, 2006):

$$e^{-[A]\tau} = \sum_{k=0}^{n_s-1} \alpha_k(\tau)[A]^k \quad (3.52)$$

Sustituyendo la ecuación (3.52) en la (3.51) se obtiene:

$$\{z(0)\} = - \sum_{k=0}^{n_s-1} [A]^k[B] \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)\{u(\tau)\} d\tau \quad (3.53)$$

Si se define:

$$\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)\{u(\tau)\} d\tau = \beta_k \quad (3.54)$$

La ecuación (3.53) se transforma en:

$$\{z(0)\} = - \sum_{k=0}^{n_s-1} [A]^k [B] \beta_k = - [[B] \quad [A][B] \quad \dots \quad [A]^{n_s-1}[B]] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_{n_s-1} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Si el sistema es de estado completamente controlable, entonces dado cualquier estado inicial $x(0)$, la ecuación (3.55) debe satisfacerse. Esto requiere que el rango de la matriz $n_s \times n_s$ sea n_s .

$$[[B] \quad [A][B] \quad \dots \quad [A]^{n_s-1}[B]] \quad (3.56)$$

De dicho análisis, se puede concluir la condición para la controlabilidad completa del estado de la forma siguiente. El sistema obtenido mediante la ecuación (3.44) es de estado completamente controlable si y solo si los vectores $[B]$, $[A][B]$, ..., $[A]^{n_s-1}[B]$ son linealmente independientes, o la matriz definida por la ecuación (3.56) tenga de rango n_s . La matriz definida por la ecuación (3.56) recibe el nombre de *matriz de controlabilidad*.

Finalmente, se dice que un sistema es observable en el tiempo t_0 , si con el sistema en el estado $\{z(t_0)\}$, es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito (Dominguez, 2002).

De esta forma, se dice que un sistema es completamente observable si el estado $\{z(t_0)\}$ se determina a partir de la observación de $\{y(t)\}$ durante un intervalo de tiempo finito, $t_0 \leq t \leq t_1$. Por lo tanto, el sistema es completamente observable si todas las transiciones del estado afectan eventualmente a todos los elementos del vector salida. Para establecer la condición de observabilidad completa se considera, por simplicidad, el sistema sin excitación. No obstante, la condición obtenida puede ser fácilmente extrapolable a sistemas con excitación. Las ecuaciones de estado de un sistema lineal invariante sin excitación se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \{\dot{z}(t)\} &= [A]\{z(t)\} \\ \{y(t)\} &= [E]\{z(t)\} \end{aligned} \quad (3.57)$$

El vector de salida del sistema, $\{y(t)\}$, se puede determinar mediante la siguiente ecuación:

$$\{y(t)\} = [E]e^{[A]t}\{z(0)\} \quad (3.58)$$

Considerando el resultado de la ecuación (3.52) la salida del sistema se puede expresar como:

$$\{y(t)\} = \sum_{k=0}^{n_s-1} \alpha_k(t) [E][A]^k \{z(0)\} \quad (3.59)$$

o bien

$$\begin{aligned} \{y(t)\} = & \alpha_1(t)[E]\{z(0)\} + \alpha_2(t)[E][A]\{z(0)\} + \dots \\ & + \alpha_{n_s-1}(t)[E][A]^{n_s-1}\{z(0)\} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Así si el sistema es completamente observable, dada la salida, $\{y(t)\}$, durante un intervalo de tiempo $0 \leq t \leq t_1$, se determina únicamente a través de la ecuación (3.60). Se demuestra que esto requiere que el rango de la matriz rxn_s sea n_s .

$$\begin{bmatrix} [E] \\ [E][A] \\ \dots \\ [E][A]^{n_s-1} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

A partir del análisis anterior, se puede expresar la condición de observabilidad completa del modo siguiente. El sistema descrito por la ecuación (3.57) es completamente observable si y solo si la matriz definida por la ecuación (3.61) sea de rango n_s .

Una vez definidas las ecuaciones que rigen el comportamiento de los sistemas dinámicos en la siguiente sección se describen como a partir de las mismas se establecen las diferentes estrategias de control dinámico.

3.4. Control de Sistemas Dinámicos.

Existe básicamente tres maneras de controlar los actuadores conectados a sistemas dinámicos (Weber *et al.*, 2006): (i) control por retro-alimentación (*feedback*); (ii) control en avance (*feedforward*); y (iii) control pasivo.

En el caso del control estructural, los actuadores controlados son normalmente sistemas de amortiguación ya que el principal objetivo del control estructura en el campo de la ingeniería civil es incrementar el amortiguamiento. Tanto a los actuadores como a los amortiguadores se les suele denominar “sistemas de control” mientras que, a los sistemas dinámicos controlados, tales como edificios altos, puentes esbeltos, cables de gran longitud y otras estructuras de ingeniería civil se les llama “planta”.

El control por retro-alimentación (*feedback*) se aplica cuando la principal perturbancia de la planta o no se conoce o no se puede medir. La idea básica es medir la respuesta del sistema, y , que incluye el ruido medido, v , y comparar el valor de dicha variable, y , con el valor deseado de, y , el denominado valor de la señal de referencia, r , y retro-alimentar el error resultante, e , a través del controlador sobre la planta. El controlador es diseñado para minimizar el error de la señal con la condición de que el sistema en lazo cerrado no debe ser inestable.

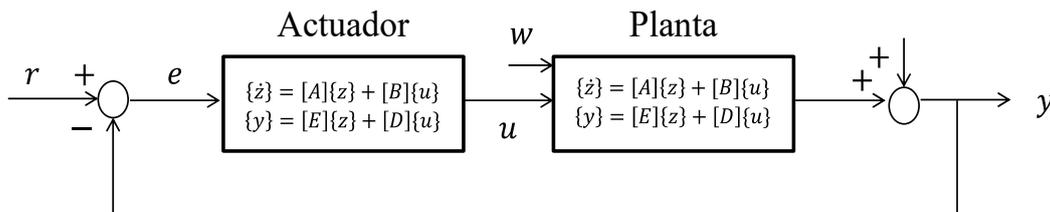


Figura 10. Estructura de lazo cerrado del control por retro-alimentación.

El problema de la estabilidad de los sistemas en lazo cerrado es fácilmente comprensible a partir de la ecuación de estado de dichos sistemas. A partir de la Figura 10 se puede formular dicha ecuación de estado en lazo cerrado.

$$\{\dot{z}(t)\} = [A]\{z(t)\} + [B]\{u(t)\} - [B_c]\{u_c(t)\} \quad (3.62)$$

donde $[B_c]$ es la matriz de entrada de la fuerza de control y $\{u_c(t)\}$ es la entrada de la fuerza de control. Como normalmente, en la configuración de retro-alimentación, dicha fuerza depende del propio estado del sistema, $\{u_c(t)\} = [G]\{z(t)\}$, donde $[G]$ es una matriz de ganancia. De esta forma, bajo dicha hipótesis, la fuerza de control es proporcional al estado. La ecuación de estado del sistema en lazo cerrado considerando esta hipótesis se puede escribir como:

$$\{\dot{z}(t)\} = [A]\{z(t)\} + [B]\{u(t)\} - [B_c][G]\{z(t)\} \quad (3.63)$$

La ecuación (3.63) se puede re-escribir de la siguiente forma:

$$\{\dot{z}(t)\} = ([A] - [B_c][G])\{z(t)\} + [B]\{u(t)\} \quad (3.64)$$

Como vimos anteriormente, la estabilidad del sistema (ecuación 3.38) depende de los valores propios de la matriz $[A] - [B_c][G]$. El valor de la ganancia $[G]$ del sistema de control condiciona claramente la estabilidad del sistema. Como veremos en el siguiente apartado la definición de la matriz de ganancia, $[G]$, constituye el aspecto clave del diseño del sistema de control ya que debe por un lado asegurar que el sistema cumpla los requisitos de diseño sin poner en peligro la estabilidad del sistema.

El control por avance (*feedforward*) se aplica cuando se tiene conocimiento de alguna de las señales de entrada al sistema, la cual es correlacionada con la perturbancia que actúa sobre la planta (Figura 11). La señal de referencia medida se pasa por un filtro adaptativo cuya señal de salida actúa sobre la planta como una segunda perturbancia. El criterio para la adaptación de los coeficientes del filtro es la minimización del error, e , por ejemplo minimizando las aceleraciones en cierta posición de la estructura. De esta forma, la básica idea de un filtro adaptativo es producir tal perturbancia adicional que el efecto de la perturbancia primaria en la planta se vea compensado. Sin embargo, la compensación total solo es posible en el punto de localización del sensor.

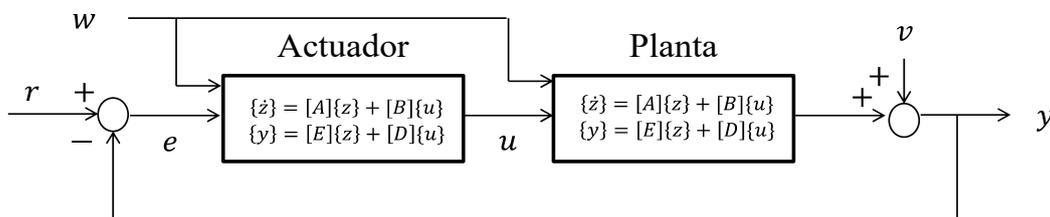


Figura 11. Estructura del control por avance.

El control pasivo se ha aplicado ampliamente en estructuras de ingeniería civil debido a su simplicidad y robustez (Zang *et al.*, 2005): (i) no requiere ningún microcontrolador que regule las fuerzas aplicadas durante el fenómeno; y (ii) la estabilidad no es un problema ya que el bucle no es cerrado.

El valor óptimo de la señal de entrada en el sistema, u_c , suele ser determinado de forma experimental. El criterio para determinar el valor óptimo, u_c , es minimizar el error a la salida del sistema, $e = r - y$, por ejemplo el mínimo de las aceleraciones medidas en diferentes puntos de la planta. En la Figura 12 se presenta un esquema del bucle abierto que regula el control de los sistemas pasivos.

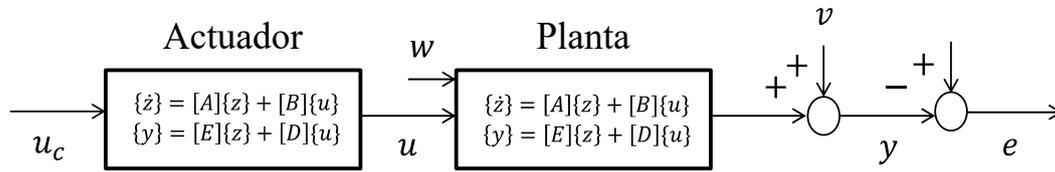


Figura 12. Estructura en lazo abierto del control pasivo.

De estas tres estrategias de control la primera y la última han sido consideradas en este estudio para llevar a cabo el diseño de sistemas de control de masa inercial con diferente comportamiento (activo, semi-activo y pasivo). De esta forma los sistemas activo y semi-activo serán diseñados por un algoritmo basado en el control por retro-alimentación; y el sistema pasivo, por un algoritmo basado en el control pasivo. Por otro lado en el presente trabajo se ha despreciado el error introducido por el error en la medida del sensor, v .

3.5. Diseño de un Controlador en el Espacio de Estado.

Una vez hayamos definido el modelo matemático de nuestro sistema bajo su representación en el espacio de estado es sencillo la implementación de la ley para el diseño de un controlador basado en la retro-alimentación del sistema.

Entre los diferentes algoritmos existentes (Xu *et al.*, 2017), este trabajo se centra en la implementación de un algoritmo de control óptimo lineal (Ogata, 2006) por su amplio uso en aplicaciones prácticas de ingeniería civil. Concretamente en este trabajo se aplicará el denominado control lineal por regularización cuadrática (LQR). En este algoritmo de control, la integración de funciones cuadráticas, que contienen tanto el estado del sistema como la entrada del sistema son consideradas para definir una función índice de rendimiento (PIF). De esta forma, la ganancia de la fuerza de control es definida a partir de la optimización de dicha función índice de rendimiento (Figura 13).

El control lineal por regularización cuadrática ha sido ampliamente utilizado por su efectividad y conveniencia. El control del sistema se plantea independientemente de la excitación exterior aplicada al sistema. De esta forma, en base a la ecuación (3.3) la ecuación del espacio de estado de un sistema controlable lineal e invariable en el tiempo sin excitación exterior se puede expresar como:

$$\{\dot{z}(t)\} = [A]\{z(t)\} + [B_0]\{f_a(t)\} \quad (3.65)$$

$$\{y(t)\} = [E_0]\{z(t)\} \quad (3.66)$$

con las condiciones iniciales $\{z(t_0)\} = \{z_0\}$.

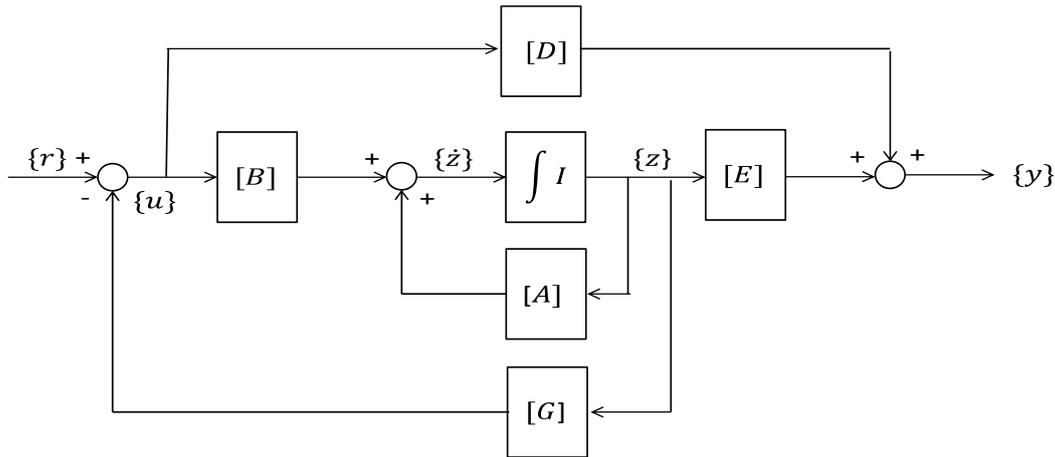


Figura 13. Diseño de un controlador usando un algoritmo de control óptimo lineal (LQR).

Se define la función índice de rendimiento (PIF) como:

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [\{z(t)\}^T [Q] \{z(t)\} + \{f_a(t)\}^T [R] \{f_a(t)\}] dt \quad (3.67)$$

donde $[Q]$ y $[R]$ son matrices peso, $[Q]$ es una matriz semi-definida positiva, y $[R]$ es una matriz definida positiva. Ambas matrices tienen una función penalizadora de la función objetivo, de esta forma $[Q]$ penaliza el rendimiento y $[R]$ penaliza el esfuerzo. Por consiguiente, en el caso que se quiera reducir el error entre algún estado del sistema y el esperado se deben incrementar las correspondientes componentes de la matriz $[Q]$ y si en cambio el coste del actuador es excesivo, su acción se puede reducir aumentando el valor de las componentes de la matriz $[R]$. La función cuadrática anterior tiene la propiedad de que es convexa y por lo tanto cualquier valor extremo de la misma tiene un carácter global (Nocedal y Wright, 1999).

Para minimizar la función, J , el método de los multiplicadores de Lagrange (Nocedal y Wright, 1999) se introduce el factor, $\{\tilde{\lambda}(t)\}$. La función de Lagrange tiene la forma:

$$\{L\} = \int_{t_0}^{\infty} \left[\{z(t)\}^T [Q] \{z(t)\} + \{f_a(t)\}^T [R] \{f_a(t)\} + \{\tilde{\lambda}(t)\}^T ([A] \{z(t)\} + [B_0] \{f_a(t)\} - \{\dot{z}(t)\}) \right] dt \quad (3.68)$$

En base con el cálculo de variaciones (Struve, 2008) la ecuación (3.68) se puede escribir como:

$$\{L\} = \int_{t_0}^{\infty} \left[H(\{z(t)\}, \{f_a(t)\}, \{\tilde{\lambda}(t)\}, t) + \{\dot{\tilde{\lambda}}(t)\}^T \{z(t)\} \right] dt - \{\tilde{\lambda}(t)\}^T \{z(t)\} \Big|_{t_0}^{\infty} \quad (3.69)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 H(\{z(t)\}, \{f_a(t)\}, \{\tilde{\lambda}(t)\}, t) & \quad (3.70) \\
 &= \{z(t)\}^T [Q] \{z(t)\} + \{f_a(t)\}^T [R] \{f_a(t)\} + \{\tilde{\lambda}(t)\}^T ([A] \{z(t)\} \\
 &+ [B_0] \{f_a(t)\})
 \end{aligned}$$

Si se considera una variación de primer orden, se puede obtener la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 \delta\{L\} = \delta\{L_z\} + \delta\{L_{f_a}\} + \delta\{L_{\tilde{\lambda}}\} &= \int_{t_0}^{\infty} \left[\delta\{z(t)\}^T \left(\frac{\partial\{H(t)\}}{\partial\{z(t)\}} + \{\dot{\tilde{\lambda}}(t)\} \right) + \right. \\
 \delta\{f_a(t)\}^T \frac{\partial\{H(t)\}}{\partial\{f_a(t)\}} &+ \left. \delta\{\tilde{\lambda}(t)\}^T \left(\frac{\partial\{H(t)\}}{\partial\{\tilde{\lambda}(t)\}} - \{\dot{z}(t)\} \right) \right] dt - \delta\{z(t)\}^T \{\tilde{\lambda}(t)\}_{t_0}^{\infty}
 \end{aligned} \quad (3.71)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \delta\{L_z\} &= \delta\{z(t)\}^T \frac{\partial\{L\}}{\partial\{z(t)\}} \\
 &= \int_{t_0}^{\infty} \delta\{z(t)\}^T \left(\frac{\partial\{H(t)\}}{\partial\{z(t)\}} + \{\dot{\tilde{\lambda}}(t)\} \right) dt - \delta\{z(t)\}^T \{\tilde{\lambda}(t)\}_{t_0}^{\infty}
 \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\delta\{L_{f_a}\} = \delta\{f_a(t)\}^T \frac{\partial\{L\}}{\partial\{f_a(t)\}} = \int_{t_0}^{\infty} \delta\{f_a(t)\}^T \frac{\partial\{H(t)\}}{\partial\{f_a(t)\}} dt \quad (3.73)$$

$$\delta\{L_{\tilde{\lambda}}\} = \delta\{\tilde{\lambda}(t)\}^T \frac{\partial\{L\}}{\partial\{\tilde{\lambda}(t)\}} = \int_{t_0}^{\infty} \delta\{\tilde{\lambda}(t)\}^T \left(\frac{\partial\{H(t)\}}{\partial\{\tilde{\lambda}(t)\}} - \{\dot{z}(t)\} \right) dt \quad (3.74)$$

Para satisfacer los requerimientos de la condición de extremo, $\delta\{L\} = 0$, con los valores arbitrarios de $\delta\{z(t)\}$, $\delta\{f_a(t)\}$ y $\delta\{\tilde{\lambda}(t)\}$ se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial\{H(t)\}}{\partial\{z(t)\}} + \{\dot{\tilde{\lambda}}(t)\} &= 0 \\
 \frac{\partial\{H(t)\}}{\partial\{f_a(t)\}} &= 0 \\
 \frac{\partial\{H(t)\}}{\partial\{\tilde{\lambda}(t)\}} - \{\dot{z}(t)\} &= 0 \\
 \delta\{z(t)\}^T \{\tilde{\lambda}(t)\}_{t_0}^{\infty} &= 0
 \end{aligned} \quad (3.75)$$

En base a las ecuaciones (3.69)-(3.75) se pueden obtener las siguientes ecuaciones:

$$\{\dot{\tilde{\lambda}}(t)\} = \frac{-\partial\{H(t)\}}{\partial\{z(t)\}} = -2[Q]\{z(t)\} - [A]^T \{\tilde{\lambda}(t)\} \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial\{H(t)\}}{\partial\{f_a(t)\}} = 2[R]\{f_a(t)\} + [B_0]^T \{\tilde{\lambda}(t)\} = 0 \quad (3.77)$$

La ecuación (3.77) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\{f_a(t)\} = -\frac{1}{2}[R]^{-1}[B_0]^T\{\tilde{\lambda}(t)\} \quad (3.78)$$

Se puede concluir que $f_a(t)$ es una función lineal de $\{\tilde{\lambda}(t)\}$. Una relación de transformación lineal puede asumirse como:

$$\{\tilde{\lambda}(t)\} = \{\tilde{P}(t)\}\{z(t)\} \quad (3.79)$$

Sustituyendo la ecuación (3.79) en (3.78) y considerado que $[G] = \frac{1}{2}[R]^{-1}[B_0]^T\{\tilde{P}(t)\}$ se puede obtener:

$$\{f_a(t)\} = -[G]\{z(t)\} \quad (3.80)$$

Sustituyendo (3.80) en (3.76) se puede obtener que:

$$\{\dot{\tilde{P}}(t)\}\{z(t)\} + \{\tilde{P}(t)\}\{\dot{z}(t)\} = -(2[Q] + [A]^T\{\tilde{P}(t)\})\{z(t)\} \quad (3.81)$$

Simplificando la ecuación (3.81) con (3.65) y (3.78) se puede obtener que:

$$\{\dot{\tilde{P}}(t)\} + \{\tilde{P}(t)\}[A] + [A]^T\{\tilde{P}(t)\} - \frac{1}{2}\{\tilde{P}(t)\}[B_0][R]^{-1}[B_0]^T\{\tilde{P}(t)\} + 2[Q] = 0 \quad (3.82)$$

La ecuación se puede re-escribir como:

$$\{\dot{\tilde{P}}(t)\} = -\{\tilde{P}(t)\}[A] - [A]^T\{\tilde{P}(t)\} + \frac{1}{2}\{\tilde{P}(t)\}[B_0][R]^{-1}[B_0]^T\{\tilde{P}(t)\} - 2[Q] \quad (3.83)$$

La ecuación (3.83) se denomina ecuación de Riccati, una ecuación diferencial matricial no-lineal, siendo $\{\tilde{P}(t)\}$ la función matriz de Riccati. La solución de la ecuación (3.83) se puede determinar por el método descrito en la referencia (Yang *et al.*, 1987).

Substituyendo (3.80) en (3.65) se obtiene:

$$\{\dot{z}(t)\} = ([A] - \frac{1}{2}[B_0][R]^{-1}[B_0]^T\{\tilde{P}(t)\})\{z(t)\} \quad (3.84)$$

En resumen, el algoritmo LQR permite controlar un sistema lineal formulado en el espacio de estado según la teoría de control moderna. La función índice de rendimiento (PIF) se basa en el estado del sistema y en la fuerza de control. Dicha función índice, J , computa las matrices $[Q]$ y $[R]$. La asignación de un gran valor a los elementos de la matriz $[Q]$ indica la reducción de la respuesta de control y un mayor efecto del control. Por contrapartida, el efecto de la fuerza de control no será obvio cuando los elementos de $[R]$ son grandes en comparación con los de $[Q]$.

Por consiguiente, la elección de las matrices peso afecta tanto la máxima fuerza generada por el actuador como el control general de la estructura. De esta forma, la optimización del valor de dichas matrices debe ser considerada durante el proceso

optimización de los parámetros de control de la estructura. Para facilitar dicho proceso, las siguientes expresiones son consideradas para la definición de las matrices de peso:

$$[Q] = \alpha_d \begin{bmatrix} [K] & 0 \\ 0 & [M] \end{bmatrix} [R] = \beta_d [I] \quad (3.85)$$

donde α_d y β_d son los factores de peso.

De esta forma, el proceso de diseño de un controlador LQR implica las siguientes fases: (i) desarrollar un modelo lineal del sistema en el espacio de estado; (ii) ajustar el valor de las matrices $[Q]$ y $[R]$; (iii) determinar el valor de la ganancia óptima de la fuerza de control; (iv) simular numéricamente la respuesta del sistema; y (v) repetir los pasos (ii) a (iv) hasta que la repuesta numérica del sistema se ajuste a algún criterio de diseño adicional. En este trabajo, este algoritmo se va a hibridar dentro un algoritmo de diseño más general basado en el movimiento de la estructura (Connor, 2003).

El algoritmo propuesto puede ser adaptado fácilmente para que permita obtener la fuerza ejercida por un amortiguador magneto-reológico de un sistema de control de masa inercial semi-activa. El ajuste de la fuerza de control se lleva a cabo mediante los siguientes pasos: (i) la fuerza de control, f_a , se determinará inicialmente con el algoritmo de control LQR, f_{lqr} ; y (ii) dicha fuerza de control es modificada para adaptarse al comportamiento real del amortiguador magneto-reológico (Zhang y Xu, 2012). La fuerza del sistema de control será superior a la mínima fuerza capaz de transmitir el amortiguador magneto-reológico, f_{min} , e inferior a la máxima fuerza que dicho amortiguador es capaz de generar, f_{max} .

Se presenta en la siguiente ecuación la ley que regula la determinación de la fuerza de control ejercida por el amortiguador magneto-reológico:

$$f_a = \begin{cases} \text{sgn}(f_{lqr}) \cdot f_{max} & f_{lqr} \cdot \dot{u}_r < 0 \text{ y } |f_{lqr}| > f_{max} \\ f_{lqr} & \text{si } f_{lqr} \cdot \dot{u}_r < 0 \text{ y } f_{min} < |f_{lqr}| < f_{max} \\ \text{sgn}(f_{lqr}) \cdot f_{min} & f_{lqr} \cdot \dot{u}_r > 0 \text{ y } |f_{lqr}| < f_{min} \end{cases} \quad (3.86)$$

donde \dot{u}_r es la velocidad relativa del amortiguador magneto-reológico y $\text{sgn}()$ es la función signo.

4. Diseño Basado en el Movimiento bajo Condiciones Deterministas.

4.1. Formulación del Problema de Diseño.

Para el diseño de los parámetros de los diferentes sistemas de control se va a aplicar un método de diseño basado en el rendimiento (Connor, 2003; Liang, 2007). Dicho método transforme el problema de diseño en un problema de optimización. El principal objetivo del método es obtener los parámetros constituyentes del sistema de control que minimizando su coste aseguren el cumplimiento de los requisitos de diseño establecidos bien por el diseñador, propietario o constructor de la estructura. Como los requisitos de diseño, que necesitan ser satisfechos, son normalmente definidos en función del confort de los usuarios de la estructura, y dicho parámetro, el confort, queda especificado a partir de la velocidad o aceleración experimentada por cada individuo, la metodología empleada suele denominarse método de diseño basado en el movimiento (Connor, 2003).

De esta forma la formulación del problema puede realizarse bien a partir del esquema general de un problema de optimización restringido con un único objetivo, o bien a partir de un problema de optimización multi-objetivo (Nocedal y Wright, 1999).

En este trabajo se ha optado por su mejor coste computacional por esta segunda opción (Deb, 2010). De esta forma, la formulación general del problema de diseño bajo este método de diseño se puede expresar como:

$$\begin{aligned} & \text{Encontrar } \{\theta\} \\ & \text{Minimizar } \{f(\{\theta\})\} \\ & \text{Sujeto a } \{\theta^l\} \leq \{\theta\} \leq \{\theta^u\} \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $\{\theta\}$ es un vector con las variables de diseño de tamaño n_d ; $\{f(\{\theta\})\}$ es el vector que define la función multi-objetivo de tamaño n_f ; $\{\theta^l\}$ y $\{\theta^u\}$ son vectores que marcan los límites inferiores y superiores respectivamente del dominio de búsqueda.

Normalmente, como la relación entre las variables de diseño y la función objetivo es no lineal, con múltiples óptimos locales, la resolución de este tipo de problema de optimización ha de resolverse con algún algoritmo computacional basado en procesos naturales (Nilanjan *et al.*, 2020). En este trabajo por su sencillez y amplia aplicación en aplicaciones prácticas de ingeniería civil, los algoritmos genéticos han sido utilizados (Ghee y Perry, 2010).

Los principales pasos del método de diseño basado en el movimiento se presentan en la Figura 14.

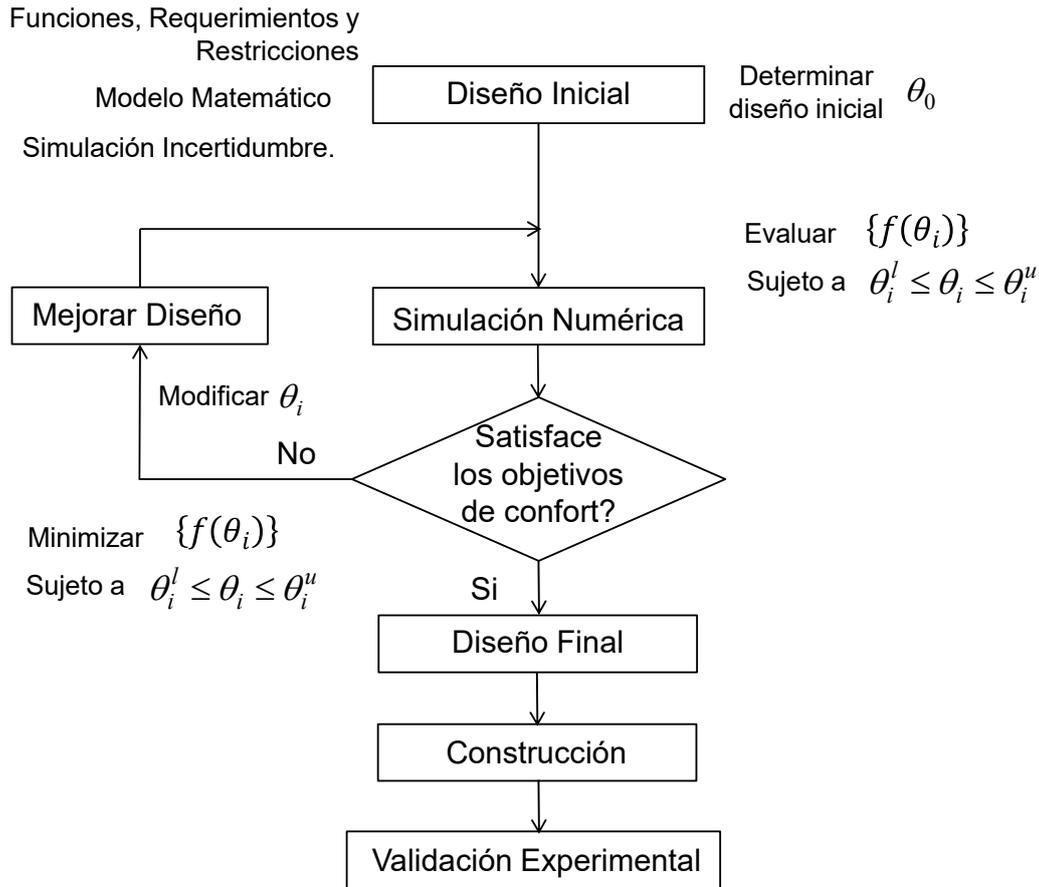


Figura 14. Esquema general del método de diseño basado en el movimiento.

Una vez que el sistema de control ha sido diseñado y después de que el mismo hay sido construido e instalado en la estructura, se deben llevar a cabo ensayos experimentales para verificar que todos los requerimientos de confort son satisfechos. Al objeto de cumplir dicho propósito, dos tipos de ensayos experimentales son normalmente llevados a cabo (Caetano *et al.*, 2009): (i) ensayos ambientales para estimar experimentalmente las propiedades modales de la estructura; y (ii) ensayos peatonales para correlacionar numérica y experimentalmente la repuesta dinámica de la estructura bajo uno o más peatones que cruzan la estructura a frecuencias de paso controladas.

Se va a particularizar este método general al caso particular estudiado en este trabajo, el diseño de sistemas de control de masa inercial para el control de estructuras de ingeniería civil.

En el diseño de dichos sistemas, las siguientes variables de diseño son normalmente considerados: (i) la ratio de masa, $\mu = m_a/m_s$ (donde m_a es la masa del sistema de control de masa inercial y m_s es la masa de la estructura); (ii) la ratio de frecuencias, $\delta = f_c/f_f$ (f_c donde es la frecuencia natural del sistema de control de masa inercial y f_f es la frecuencia natural de la estructura); (iii) ζ_a es la ratio de amortiguamiento del sistema de control de masa inercial; y (iv) f_a es la fuerza motriz generada por el sistema de control.

En el caso de los sistemas de control de masa inercial, independientemente de su comportamiento (pasivo, semi-activo o activo), se va a adoptar el siguiente criterio de diseño: (i) se va a realizar un ajuste (sintonización) entre la frecuencia natural de la estructura y la frecuencia natural del sistema de control; y (ii) el cumplimiento del estado límite de servicio de vibraciones se va a garantizar mediante el incremento de la masa del amortiguador, m_a , o la fuerza motriz, f_a , generada por el mismo (o ambas).

Para la sincronización del comportamiento entre el sistema de control y la estructura, el criterio proporcionado por Den Hartog va a ser considerado en este estudio (Asami *et al.*, 2002). De acuerdo con dicho criterio, la ratio de frecuencias y la ratio de amortiguamiento del sistema de control son establecidos en función de la ratio de masa, μ :

$$\delta = \frac{1}{1 + \mu} \quad (4.2)$$

$$\zeta_a = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)}} \quad (4.3)$$

Una vez se han fijado dichos parámetros, se pueden obtener los parámetros que regulan el comportamiento del sistema de control mediante las siguientes expresiones (Butz *et al.*, 2007):

$$k_a = (2\pi f_c)^2 m_a \quad (4.4)$$

$$c_a = 2m_a(2\pi f_c)\zeta_a \quad (4.5)$$

Finalmente, considerando la formulación general anteriormente presentada y las características particulares del sistema de control considerado (amortiguador de masa inercial) el problema de diseño bajo condiciones deterministas se puede expresar como:

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } \{\theta\} \\ &\text{Minimizar } \{f(\{\theta\})\} = \{f_1(\{\theta\}) \quad f_2(\{\theta\})\} = \left\{ \mu \quad \frac{a_f}{a_{lim}} \right\} \quad (4.6) \\ &\text{Sujeto a } \{\theta^l\} \leq \{\theta\} \leq \{\theta^u\} \end{aligned}$$

donde el vector de las variables de diseño, $\{\theta\}$, se define en función del tipo de amortiguador de masa inercial a diseñar: (i) masa inercial pasiva, $\{\theta\} = \{\mu\}$; (ii) masa inercial semi-activa, $\{\theta\} = \{\mu \quad \alpha_d \quad \beta_d\}$; y (iii) masa inercial activa, $\{\theta\} = \{\mu \quad \alpha_d \quad \beta_d\}$.

En la ecuación (4.6), el segundo término de la función objetivo representa el cumplimiento del estado límite de servicio frente a vibraciones de la estructura. Como posteriormente, se describirá en la sección 6, al objeto de garantizar que las vibraciones que se producen en la estructura sean compatibles con su funcionalidad se suele limitar la máxima aceleración, a_f , sobre la misma por debajo de una aceleración límite, a_{lim} .

Cuando un algoritmo de optimización global es aplicado al problema anterior (problema de optimización multi-objetivo), se obtiene como solución un conjunto de posibles soluciones (no-dominadas). Dicho conjunto de soluciones puede ser presentado

en un espacio funcional (definido por los términos de la función multi-objetivo) dando como resultado el denominado frente de Pareto (Deb, 2010).

Posteriormente, para seleccionar la mejor solución dentro de las posibles soluciones aportadas por el frente de Pareto, una condición general ha de ser normalmente añadida para resolver el problema de toma de decisión. En este caso, al objeto de optimizar el diseño la siguiente condición límite se ha considerado $\frac{a_f}{a_{lim}} = 1$.

De esta forma, como solución del problema de diseño, el elemento del frente de Pareto que cumpla dicha condición será considerada. En la Figura 15 se presenta dicho proceso de diseño bajo condiciones deterministas.

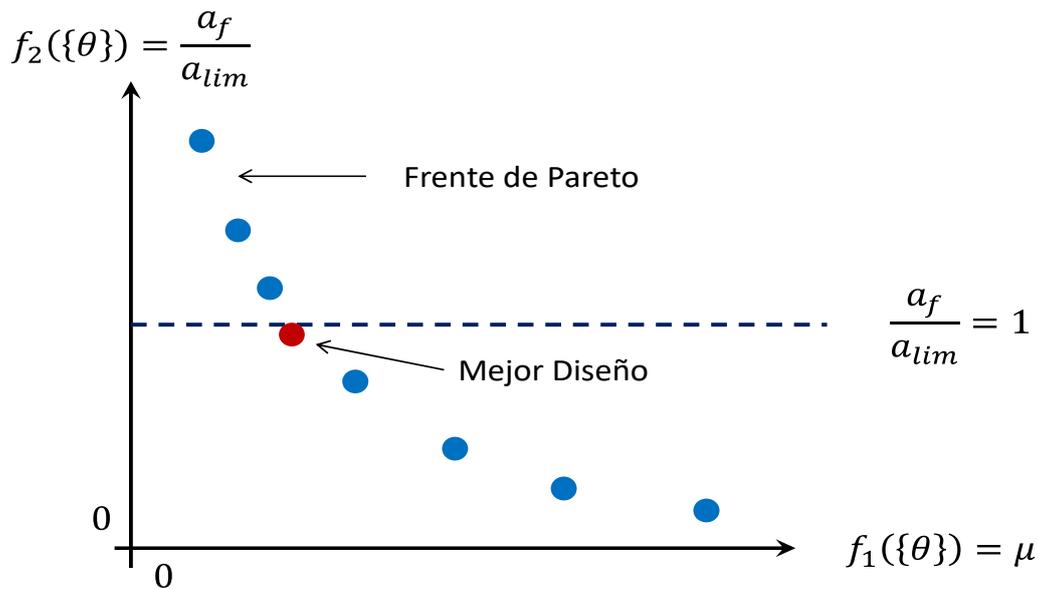


Figura 15. Frente de Pareto y selección de la mejor solución del problema de diseño bajo condiciones deterministas.

4.2. Resolución del Problema de Optimización.

Para resolver el problema de optimización planteado algoritmos computacionales basados en la naturaleza son normalmente considerados debido a su buen rendimiento en problemas complejos (relación no-lineal entre las variables de diseño y las funciones objetivo). Dichos algoritmos presentan como mayor ventaja frente a los algoritmos clásicos, basados en la computación del gradiente de la función objetivo, que son capaces de encontrar una solución global al problema (Figura 16a). Por contrapartida tienen el problema de su mayor coste computacional ya que se basan en la evaluación iterativa de la función objetivo. Entre dichos algoritmos de optimización global, los algoritmos genéticos han sido considerados en este trabajo.

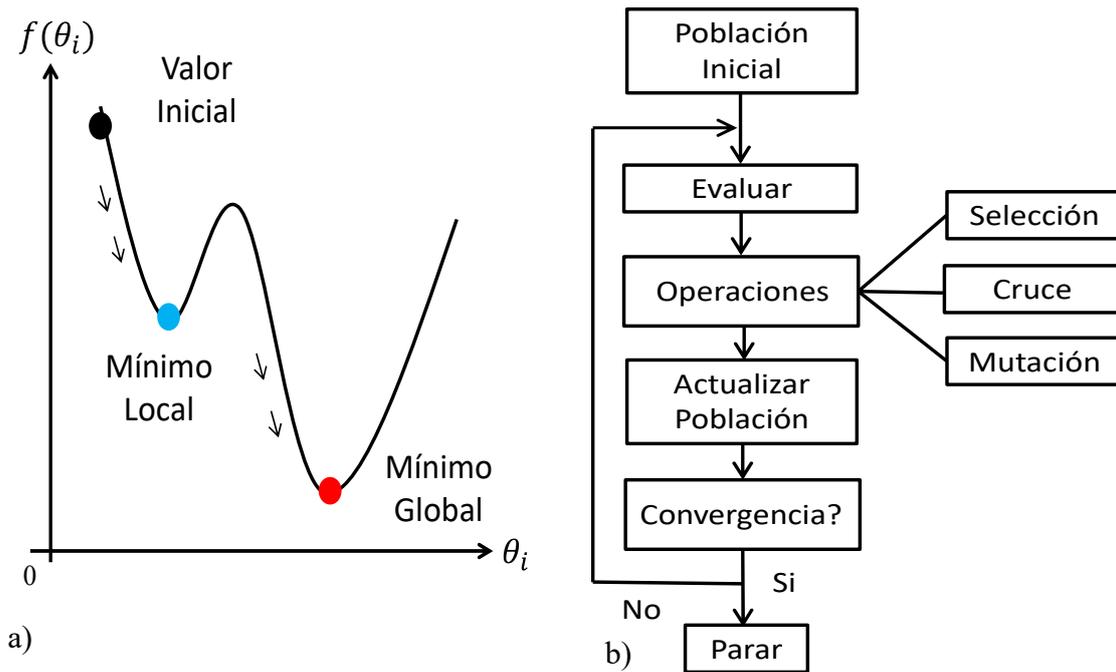


Figura 16. a) Optimo local y global de una función objetivo y b) esquema general de funcionamiento de los algoritmos genéticos.

Los algoritmos genéticos son un tipo de algoritmo computacional que se basan en la teoría de la selección natural de Darwin (Ghee y Perry, 2010). De acuerdo a esta teoría, cada posible valor de las variables de diseño es identificado como un cromosoma. De esta manera, cada conjunto de variables de diseño se agrupa en un individuo (vector de variables de diseño). Posteriormente, el valor de dicho vector se mejora en base a un proceso iterativo en el que el valor de la función objetivo es optimizado. El desarrollo general de los algoritmos genéticos se puede resumir en los siguientes pasos: (i) se crea aleatoriamente un población inicial; (ii) la función objetivo es evaluada para todos los individuos de dicha población; (iii) una nueva población es creada a partir de la población inicial usando tres mecanismos (selección, cruce y mutación); (iv) la función objetivo es evaluada por los elementos de la nueva población; (v) los pasos (iii) a (iv) son repetidos hasta que algún criterio de convergencia es cumplido. La Figura 16b muestra el esquema general de funcionamiento de los algoritmos genéticos.

Tres mecanismos son usados por este algoritmo para encontrar el valor óptimo de la función objetivo: (i) la selección, donde una parte de la población inicial se mantiene cuando una nueva población es generada; (ii) el cruce, donde un nuevo vector de variables de diseño es derivado de dos vectores previos; y (iii) la mutación, donde un nuevo vector de variables de diseño es generado de uno previo modificando aleatoriamente el valor de algún elemento de dicho vector. La combinación de estos dos últimos mecanismos permite barrer el dominio de búsqueda del problema de optimización. Tres variables de diseño son definidas para caracterizar estos tres mecanismos: (i) la ratio de selección, r_{sel} , que establece el número de individuos que constituyen la elite de la población; los mismos se mantienen en la siguiente generación y son usados como padres para la generación de nuevos individuos usando los mecanismos de cruce y mutación; (ii) la ratio de cruce, r_{cru} , que determina el porcentaje de la población restante que se modifica mediante el mecanismo de cruce; y (iii) la ratio

de mutación, r_{mut} , que establece el porcentaje de población restante que es modificada por el mecanismo de mutación. En el presente trabajo se han considerado los siguientes valores para dichas ratios en base a las recomendaciones de otros autores (Ghee y Perry, 2010): (i) una ratio de selección, $r_{sel} = 0.1$; (ii) una ratio de cruce, $r_{cru} = 0.9$; y (iii) una ratio de mutación, $r_{mut} = 0.1$.

En base a dicho algoritmo genético para funciones de un único objetivo se propuso una variante para funciones multi-objetivo configurando el denominado algoritmo genético con ordenamiento no-dominado (Deb *et al.*, 2002).

Dicho algoritmo hace uso de la técnica de ordenamiento no-dominado (Srinivas y Deb, 1994) para distinguir entre soluciones dominadas y no dominadas (aquellas que mejoran el valor de uno de los términos de la función objetivo sin sacrificar el valor del otro término). Con dicho propósito, cada individuo (posible solución) es caracterizado por un operador denominado, operador de comparación de la multitud. Dicho operador tiene en cuenta dos atributos de la solución: (i) el rango; y (ii) la distancia entre elementos de la población.

Los pasos de la variante de los algoritmos genéticos aplicada a funciones multi-objetivo son: (i) crear una población final de forma aleatoria; (ii) evaluar por cada individuo de la población la función objetivo; (iii) posteriormente, la técnica de clasificación no dominada es empleada para clasificar las soluciones en base a su rango y la distancia entre los individuos de la población; (iv) posteriormente un proceso iterativo es iniciado, de forma que una nueva población es generada usando los mecanismos de la mutación y el cruce; (v) la función objetivo es evaluada por la nueva población y la técnica de la clasificación no dominada es aplicada de nuevo; (vi) el tamaño de la población se mantienen mediante la eliminación de los elemento que presentan un peor distancia entre las soluciones obtenidas (soluciones más alejadas); y (vii) los pasos (iv) a (vi) son repetidos hasta que un criterio de convergencia es alcanzado. Como resultado de dicho proceso, el denominado frente de Pareto, un conjunto con las posibles soluciones al problema, es obtenido.

En este trabajo la implementación practica de los algoritmos genéticos en el proceso de diseño se ha realizado mediante el software Matlab (Matlab, 2019).

5. Diseño Basado en el Movimiento bajo Condiciones Estocásticas.

La incertidumbre asociada con la variabilidad tanto de las acciones exteriores como de las propiedades modales de la estructura puede ser tenida en cuenta durante el proceso de diseño mediante la aplicación bien de métodos probabilísticos (Souza de Cursi y Sampaio, 2015) o bien de métodos de lógica difusa (Lievens *et al.*, 2016). El presente trabajo se centra en la aplicación del análisis de fiabilidad (Holický, 2009), método probabilístico que permite incluir el tratamiento de la incertidumbre en la formulación general del método de diseño basado en el movimiento (previamente descrita en la sección 4).

En el análisis de fiabilidad, el cumplimiento de un determinado requisito de la estructura viene representado por el cumplimiento de un estado límite. La formulación general del estado límite, $\{g(\theta)\}$, obedece a la siguiente relación:

$$g(\{\theta\}) = C(\{\theta\}) - D(\{\theta\}) = 0 \tag{5.1}$$

donde $\{\theta\}$ representa el vector de variables consideradas en el diseño; $C(\{\theta\})$ es la capacidad de la estructura; y $D(\{\theta\})$ es la demanda de las cargas exteriores.

Para el análisis vamos a suponer que las variables de diseño, $\{\theta\}$, son variables aleatorias (definidas por su función de densidad de probabilidad) y que por lo tanto la capacidad, $C(\{\theta\})$, y la demanda, $D(\{\theta\})$, de la estructura también lo son. Se supone, además, que la capacidad, $C(\{\theta\})$, y la demanda, $D(\{\theta\})$, son variables independientes. De esta forma, el estado límite, $g(\{\theta\})$, divide el espacio de diseño (dominio de búsqueda) en dos regiones: (i) segura; y (ii) insegura. La Figura 17a muestra dicho estado límite definido como variable aleatoria.

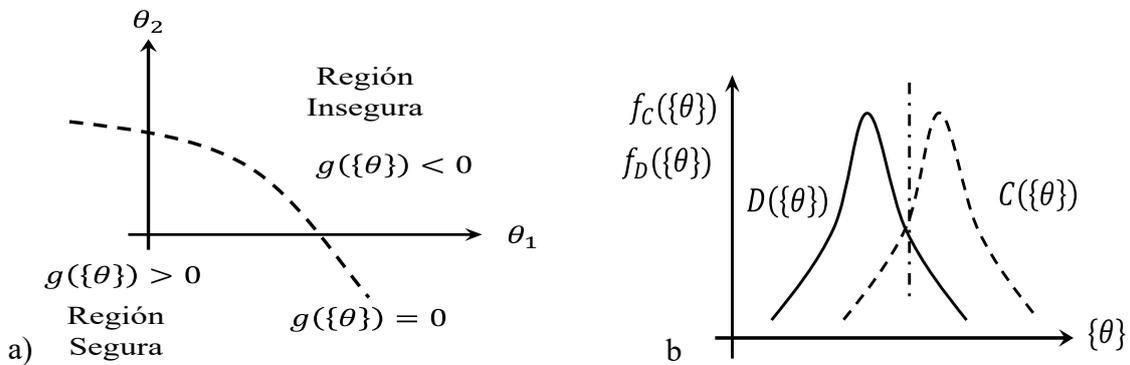


Figura 17. a) Estado límite mostrando la división del espacio de diseño en dos regiones (segura e insegura) y b) Probabilidad de fallo de dicho estado límite.

De la Figura 17a se puede concluir que hay infinitas combinaciones de capacidad, $C(\{\theta\})$, y demanda, $D(\{\theta\})$, que caen sobre el estado límite y por lo tanto que cumplen los criterios de diseño. De esta forma la selección del diseño óptimo exige la resolución de un problema de optimización complejo. Una solución intuitiva a este problema es elegir el punto que tengo menor probabilidad de fallo, $p_f(\{\theta\})$.

Para evaluar dicho punto, empecemos por evaluar primero el punto que se encuentra sobre el estado límite. En la Figura 17b se muestran las funciones de densidad de probabilidad de la capacidad, $f_C(\{\theta\})$, y de la demanda, $f_D(\{\theta\})$. Del análisis de la

Figura 17b se puede concluir que el área común debajo de las dos curvas determina la probabilidad de fallo, $p_f(\{\theta\})$.

Dicha afirmación se basa en el hecho de que el valor de la variable aleatoria c es menor que d en esta región, y por lo tanto, asegura la ocurrencia del fallo. Para evaluar el área común, $p_f(\{\theta\})$, se procede de la siguiente forma.

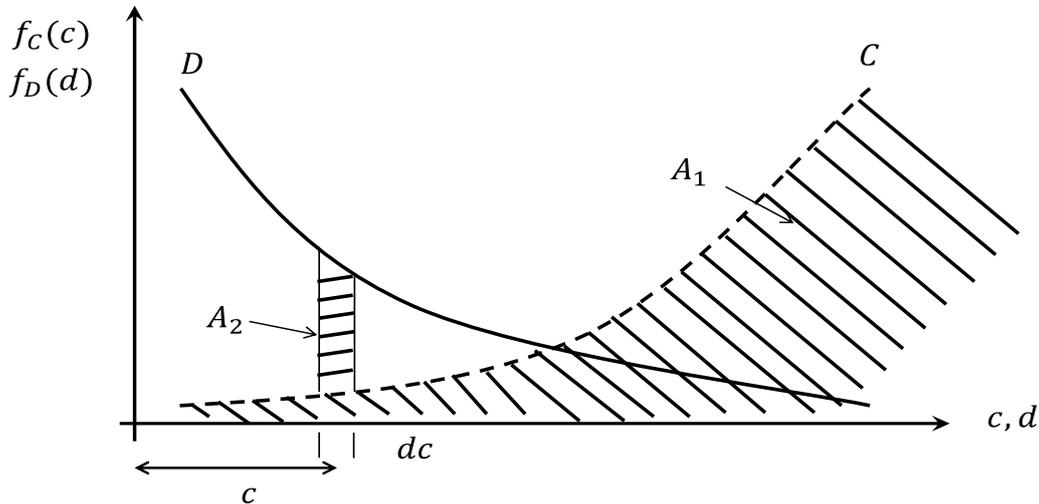


Figura 18. Evaluación de la fiabilidad del sistema.

En la Figura 18 se muestra un detalle de dicha área común. De esta forma, la probabilidad de que $D(\{\theta\})$ asuma un valor d es:

$$P\left(c - \frac{dc}{2} < C < c + \frac{dc}{2}\right) = f_C(c)dc = A_1 \quad (5.2)$$

De esta forma, la probabilidad de que $c > d$ se puede obtener como;

$$P(D > c) = \int_c^{\infty} f_D(d)dd = A_2 \quad (5.3)$$

Por consiguiente, la fiabilidad del diseño, $R(\{\theta\})$, cuando $C(\{\theta\})$ se acerca a c es:

$$dR = A_1 \cdot A_2 = f_C(c)dc \int_c^{\infty} f_D(d)dd \quad (5.4)$$

Se debe señalar que la ecuación (5.4) es aplicable cuando $C(\{\theta\})$ y $D(\{\theta\})$ son independientes (lo que se cumple en la mayoría de ocasiones dentro del campo de la ingeniería civil estructural). Para obtener la fiabilidad del diseño, $R(\{\theta\})$, basta con integrar la ecuación (5.4):

$$R(\{\theta\}) = \int dR = \int_{-\infty}^{\infty} f_C(c) \left[\int_c^{\infty} f_D(d)dd \right] dc \quad (5.5)$$

Debido a que la probabilidad de fallo, $p_f(\{\theta\})$, y la fiabilidad, $R(\{\theta\})$, son complementarias, la probabilidad de fallo, $p_f(\{\theta\})$, se puede expresar como:

$$p_f(\{\theta\}) = 1 - R(\{\theta\}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_C(c) F_D(d) dc = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_D(d) F_C(d) dc \quad (5.6)$$

donde F_C y F_D son las funciones de distribución acumuladas de la capacidad y la demanda respectivamente.

De forma general, la mayor parte de las estructuras de ingeniería civil se pueden caracterizar en dos casos: (i) $C(\{\theta\})$ y $D(\{\theta\})$ son independientes y normales; o (ii) $C(\{\theta\})$ y $D(\{\theta\})$ son independientes y normales logarítmicas. Se presenta en la Figura 19 la función de probabilidad del estado límite, $g(\{\theta\})$, en ambos casos.

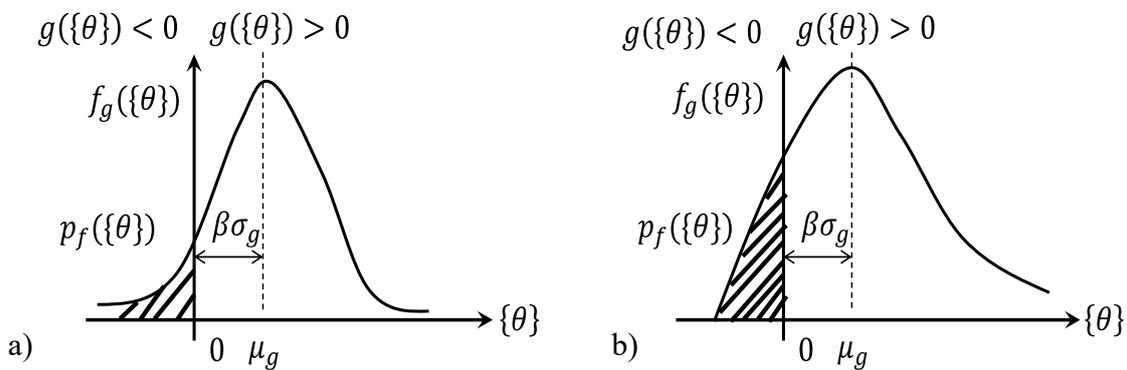


Figura 19. Funciones de densidad de probabilidad del estado límite $g(\{\theta\})$ suponiendo una distribución a) normal y b) normal logarítmica.

De esta forma, en el primer caso, es decir, cuando $C(\{\theta\})$ y $D(\{\theta\})$ son normales e independientes, la probabilidad de fallo, $p_f(\{\theta\})$, se puede obtener de la siguientes expresión (donde F_g es la función de probabilidad acumulada de $g(\{\theta\})$):

$$p_f(\{\theta\}) = P(C(\{\theta\}) - D(\{\theta\}) < 0) = P(g(\{\theta\}) < 0) = F_g(0) \quad (5.7)$$

Como $C(\{\theta\})$ y $D(\{\theta\})$ siguen distribuciones normales, entonces $g(\{\theta\})$ también sigue una distribución normal y usando algebra de la varianza se puede evaluar la media, μ_g , y desviación típica, σ_g , de $g(\{\theta\})$.

De la Figura 19a se puede evaluar con facilidad la probabilidad de fallo (área rallada a la izquierda del eje de ordenadas). Dicha probabilidad de fallo se puede determinar mediante la siguiente ecuación (donde Φ es la función de distribución acumulada estándar de la distribución normal normalizada):

$$p_f(\{\theta\}) = \Phi\left(-\frac{\mu_g}{\sigma_g}\right) \quad (5.8)$$

De igual forma, si son independientes y siguen una distribución normal logarítmica, la probabilidad de fallo, $p_f(\{\theta\})$, se obtiene modificando el estado límite, $g(\{\theta\})$, de la siguiente manera:

$$p_f(\{\theta\}) = P\left(\frac{C(\{\theta\})}{D(\{\theta\})} < 1\right) \quad (5.9)$$

Como $C(\{\theta\})$ y $D(\{\theta\})$ siguen una distribución normal logarítmica (Figura 19b), entonces $g(\{\theta\})$ sigue también una distribución normal logarítmica y a partir de la definición de la probabilidad de fallo, $p_f(\{\theta\})$, de la ecuación (5.9) se obtiene:

$$p_f(\{\theta\}) = \Phi\left(\frac{\ln(\mu_C/\mu_D)}{(\sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{\ln D}^2)^{1/2}}\right) \quad (5.10)$$

donde μ_C y μ_D son las medias de las variables aleatorias $C(\{\theta\})$ y $D(\{\theta\})$; y $\sigma_{\ln C}$ y $\sigma_{\ln D}$ son las desviaciones típicas del logaritmo neperiano (\ln) de las variables aleatorias $C(\{\theta\})$ y $D(\{\theta\})$.

Para la aplicación normativa de esta metodología, en lugar de calcular la probabilidad de fallo, $p_f(\{\theta\})$, se ha extendido el uso de una magnitud equivalente, el denominado índice de fiabilidad de Cornell, β (Holický, 2009). Su relación con la probabilidad de fallo se refleja tanto en la Figura 19 como mediante las siguientes expresiones para los dos casos estudiados:

Para $C(\{\theta\})$ y $D(\{\theta\})$
normales e independientes

$$p_f(\{\theta\}) = \Phi\left(-\frac{\mu_g}{\sigma_g}\right) = \Phi(-\beta) \quad (5.11)$$

Para $C(\{\theta\})$ y $D(\{\theta\})$
normales logarítmicas e
independientes

$$p_f(\{\theta\}) = \Phi\left(\frac{\ln(\mu_C/\mu_D)}{(\sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{\ln D}^2)^{1/2}}\right) = \Phi(-\beta) \quad (5.12)$$

De esta forma el cumplimiento del estado límite se puede reformular de la siguiente forma:

$$\beta \geq \beta_{lim} \quad (5.13)$$

donde β es el índice de fiabilidad de la estructura para el estado límite considerado; y β_{lim} es el índice de fiabilidad límite en función de la probabilidad de fallo permitida por el diseñador, propietario o constructor de la estructura.

Para evaluar el valor del índice de fiabilidad, β , existen tanto métodos analíticos como numéricos para integrar el área de la función de probabilidad. Entre dichos métodos, el método de Monte Carlo se ha usado en este trabajo (Binder y Heermann, 2010).

Las simulaciones de Monte Carlo es la técnica de simulación más popular en análisis de fiabilidad para evaluar la probabilidad de fallo, p_f (y por tanto el índice de fiabilidad, β). Según este método, un número suficientemente grande de casos son generados y a partir del estudio de sus resultados individuales el comportamiento global del sistema es analizado. A partir de dicho resultado, la probabilidad de fallo, p_f , puede ser estimada. De esta forma, un número mínimo de casos deben ser generados para garantizar una adecuada estimación de la probabilidad de fallo, p_f .

De forma simplificada, el problema consiste en dada la variable aleatoria, θ_i , generar un conjunto aleatorio de valores de la misma, $\{\hat{\theta}_i\}$, y comprobar que se cumple la relación, $g(\{\hat{\theta}_i\}) \leq 0$.

La probabilidad de fallo puede determinarse de esta forma aplicando la siguiente expresión:

$$p_f = \frac{1}{n_{MC}} \sum_{i=1}^{n_{MC}} (I_g(g(\{\hat{\theta}_i\}) \leq 0)) \quad (5.14)$$

donde n_{MC} representa el número de simulaciones de Monte Carlo; y I_g es una función indicador que vale 1 si se cumple la ecuación límite ($g(\{\hat{\theta}_i\}) \leq 0$) y 0 en caso contrario.

Por lo tanto, el problema del cálculo de la probabilidad de fallo, p_f , se reduce a evaluar la ecuación (5.14) un número determinado de veces. Resulta clave por lo tanto controlar la generación de casos de manera que se consiga reducir el número de simulaciones sin comprometer la precisión de la estimación.

Entre los diferentes métodos existentes para controlar la generación de las simulaciones (Binder y Heermann, 2010) y determinar el tamaño de la muestra, la realización de un estudio de sensibilidad de la variación de la probabilidad de fallo, p_f (o del índice de fiabilidad, β) en función del tamaño de la simulación, n_{MC} , se ha considerado en este trabajo.

De dicho estudio de sensibilidad se fijará el tamaño de la simulación a partir de la estabilización del parámetro analizado (ver sección 6). En este trabajo el parámetro de estabilización considerado será la ratio, $\frac{\beta_{lim}}{\beta}$. De esta forma se estudiará la evolución del valor de dicha ratio con el tamaño de la simulación. Finalmente, se establecerá como tamaño de la simulación, n_{MC} , el menor número de simulaciones para el que la variación del valor de dicho ratio, $\Delta \frac{\beta_{lim}}{\beta}$, sea menor de un valor umbral (tolerancia). En este trabajo, dicho valor umbral se ha fijado en el 5%. Dicha condición queda expresada por la siguiente ecuación.

$$\Delta \frac{\beta_{lim}}{\beta} = \frac{(\frac{\beta_{lim}}{\beta})_{i+1} - (\frac{\beta_{lim}}{\beta})_i}{(\frac{\beta_{lim}}{\beta})_i} \cdot 100 \leq 5\% \quad (5.15)$$

donde i es el número de simulaciones consideradas.

Se presenta en la Figura 20 un ejemplo del diagrama de estabilización de dicha ratio, $\frac{\beta_{lim}}{\beta}$, y el criterio considerado para estimar el tamaño de la simulación.

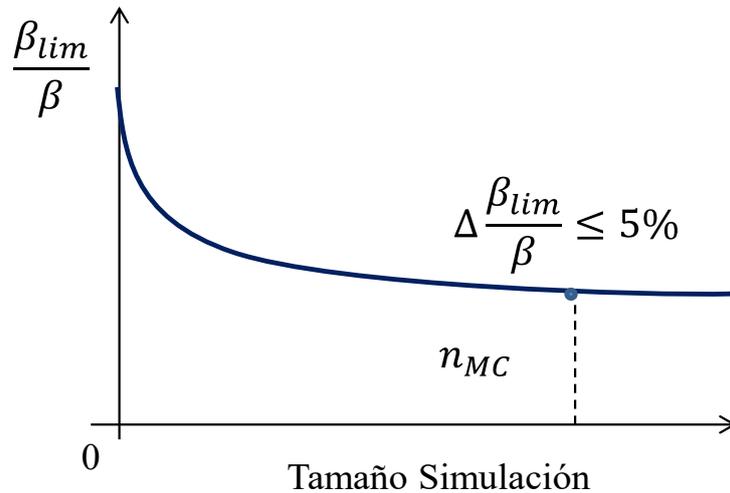


Figura 20. Variación de la ratio, $\frac{\beta_{lim}}{\beta}$, con el número de simulaciones al objeto de determinar el tamaño de la simulación de Monte Carlo, n_{MC} .

La generación de los casos, en este trabajo, se realizará suponiendo que ciertos parámetros físicos de la estructura son variables aleatorias independientes que siguen funciones de probabilidad conocidas (Binder y Heermann, 2010). En este trabajo la implementación numérica del método de Monte Carlo se ha realizado mediante el software comercial Matlab (Matlab, 2019).

Finalmente, para el problema que estamos estudiando (diseño de sistemas de control de masa inercial para el control de vibraciones de estructuras de ingeniería civil) la formulación del problema de optimización multi-objetivo bajo condiciones estocásticas se podría expresar como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Encontrar } \{\theta\} \\
 & \text{Minimizar } \{f(\{\theta\})\} = \{f_1(\{\theta\}) \quad f_2(\{\theta\})\} = \left\{ \mu \quad \frac{\beta_{lim}}{\beta} \right\} \quad (5.16) \\
 & \text{Sujeto a } \{\theta^l\} \leq \{\theta\} \leq \{\theta^u\}
 \end{aligned}$$

donde el vector de las variables de diseño, $\{\theta\}$, se define en función del tipo de sistema de control de masa inercial a diseñar: (i) masa inercial pasiva, $\{\theta\} = \{\mu\}$; (ii) masa inercial semi-activa, $\{\theta\} = \{\mu \quad \alpha_d \quad \beta_d\}$; y (iii) masa inercial activa, $\{\theta\} = \{\mu \quad \alpha_d \quad \beta_d\}$.

Para seleccionar la mejor solución dentro de las posibles soluciones aportadas por el frente de Pareto, al igual que el caso de la optimización determinista, un problema de toma de decisión será resuelto estableciendo la condición límite $\frac{\beta_{lim}}{\beta} = 1$.

Se presenta en la Figura 21 un resumen del proceso de diseño bajo condiciones estocásticas.

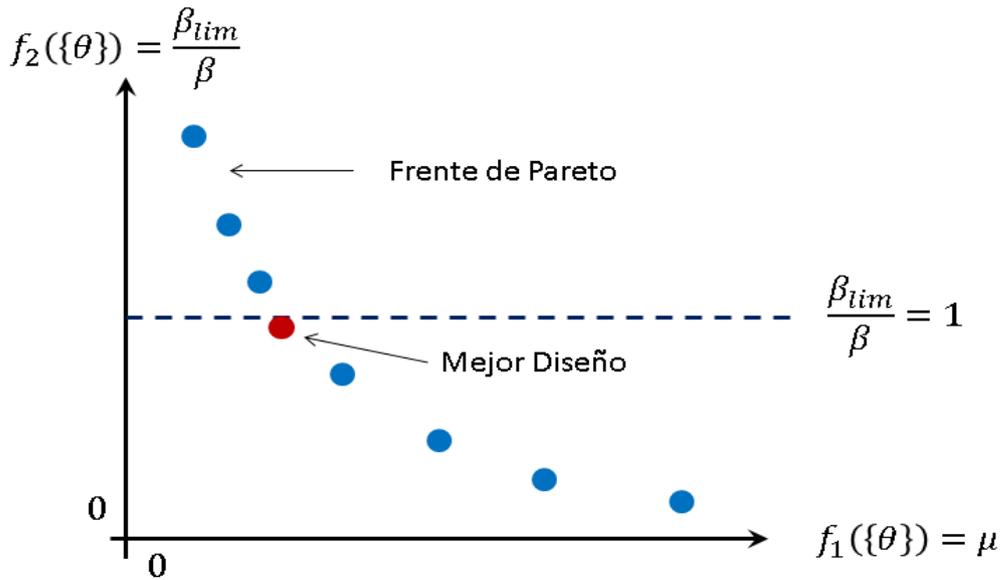


Figura 21. Frente de Pareto y selección de la mejor solución del problema de diseño bajo condiciones estocásticas.

Para la resolución del problema de optimización, un algoritmo computacional inspirado en la naturaleza es normalmente empleado (Nilanjan *et al.*, 2020). En el caso de este trabajo, los algoritmos genéticos han sido nuevamente utilizados (Ghee y Perry, 2010).

En la sección 6 se implementará la metodología descrita en un caso real, el control de las vibraciones de una pasarela peatonal considerando los tres tipos de amortiguadores de masa inercial mencionados y los dos tipos de condicionantes (deterministas y estocásticos).

6. Caso en estudio: Control de Vibraciones de un Pasarela peatonal.

En este apartado se compara el rendimiento de los tres sistemas de control anteriormente mencionados (control pasivo, semi-activo y activo) cuando los mismos son implementados para el control de las vibraciones inducidas por peatones en una pasarela metálica. Un amortiguador de masa inercial será instalado en el punto central de la estructura y sus parámetros serán determinados en base a la metodología de diseño anteriormente descrita bajo dos condicionantes: (i) deterministas; y (ii) estocásticos.

6.1. Evaluación del Estado Limite de Servicio de Vibraciones de Pasarelas Peatonales.

De acuerdo a las normas más actuales de diseño (Van Nimmen *et al.*, 2014) la evaluación del estado límite de servicio de vibraciones en estructuras de ingeniería civil implica la aplicación de un procedimiento estructurado en siete pasos (Butz *et al.*, 2007):

(i) Evaluar las frecuencias naturales de la estructura en base a un análisis modal a partir de un modelo de elementos finitos de la misma.

(ii) Comprobar el rango crítico de frecuencias naturales, es decir, comprobar si se puede dar un fenómeno resonante entre la estructura y las acciones exteriores (para peatones caminando en dirección vertical dicho rango se puede establecer como $1.2 \leq f_f \leq 2.3$ siendo f_f la frecuencia natural del modo de vibración considerado de la estructura).

(iii) Establecer una situación de diseño, normalmente dicha situación implica definir la carga a aplicar sobre la estructura, $p(t)$, y los requerimientos de confort (Tabla 1) exigidos por el propietario o diseñador de la estructura (a_{adm}).

La carga vertical, $p(t)$, ejercida por un grupo de peatones caminando puede definirse, de acuerdo con el proyecto de investigación Synpex (Butz *et al.*, 2007) como:

$$p(t) = 280 \cdot \cos(2\pi \cdot f_f \cdot t) \cdot n_{eq} \cdot \psi \text{ [N]} \quad (6.1)$$

donde f_f es la frecuencia natural de la estructura considera, n_{eq} es el número de peatones equivalentes y ψ es un coeficiente reductor que tiene en cuenta la probabilidad de que la frecuencia natural de la estructura este dentro del rango de interacción con la acción peatonal ($1.25 \leq f_f \leq 2.3$ Hz).

El número de peatones equivalentes, n_{eq} , determina el número de peatones, n_p , dentro de la multitud que andan en fase (dan el paso a la vez). Su valor puede ser determinado a partir de las siguientes expresiones experimentales en función del flujo de tráfico peatonal (densidad peatonal, d , [P=Peatón/m²]) y de la ratio de amortiguamiento de la estructura, ζ_f :

$$\text{Si } \begin{cases} d < 1 \\ d \geq 1 \end{cases} \text{ P/m}^2 \quad \begin{cases} n_{eq} = 10.8 \cdot \sqrt{\zeta_f \cdot n_p} \\ n_{eq} = 1.85 \cdot \sqrt{n_p} \end{cases} \quad (6.2)$$

El coeficiente reductor, ψ , se puede determinar a partir de la siguiente expresión, asumiendo que la variación de comportamiento de los peatones es una variable aleatoria con distribución normal.

$$\begin{aligned}
 & 0 \leq f_f < 1.25 && 0 \\
 & 1.25 \leq f_f < 1.70 && \frac{1}{0.35} (f_f - 1.25) \\
 \text{Si } & 1.7 \leq f_f < 2.1 \text{ Hz entonces } \psi(f_f) = && 1 \\
 & 2.1 \leq f_f < 2.3 && 1 - \frac{1}{0.2} (f_f - 2.1) \\
 & f_f \geq 2.3 && 0
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Tabla 1. Relación entre las clases de confort y los rangos de aceleración límite.

Clases de Confort	Grado de Confort	Aceleración Admisible (a_{lim})
CL 1	Máximo	<0.50 m/s ²
CL 2	Medio	0.50-1.00 m/s ²
CL 3	Mínimo	1.00-2.50 m/s ²
CL 4	Confort Inaceptable	>2.50 m/s ²

(iv) Establecimiento del amortiguamiento estructural, ζ_f .

(v) Determinación de la máxima repuesta de la estructura (aceleración, a_f) bajo la situación de diseño establecida (mediante la integración numérica de la ecuación de movimiento de la estructura).

(vi) Evaluar el confort de la estructura, comparando la máxima repuesta de la estructura con el valor límite asociado al requerimiento de confort establecido ($a_f \leq a_{lim}$).

(vii) Finalmente, si el confort no es el deseado se mejora el comportamiento de la estructura actuando sobre su rigidez, su masa o introducción algún sistema de control auxiliar

De esta forma, el método para verificar el confort de una estructura de ingeniería civil bajo acción peatonal se aplicará solo en los casos en los que la frecuencia natural de alguno de los modos de vibración de la estructura este dentro del rango crítico que caracteriza la acción peatonal. En dichos casos, el nivel de confort se cumplirá si la máxima aceleración que experimenta la estructura es inferior a un valor límite previamente establecido. En caso de que dicha condición no se cumpla, se actuará sobre la estructura al objeto de controlar su repuesta y modificarla hasta un valor admisible.

En el presente trabajo, dicho método se ha considerado al objeto de garantizar un adecuado nivel de confort sobre en una pasarela peatonal.

En la Figura 22 se presenta el diagrama de flujo para realizar la evaluación del estado límite de servicio de vibraciones en estructuras de ingeniería civil.

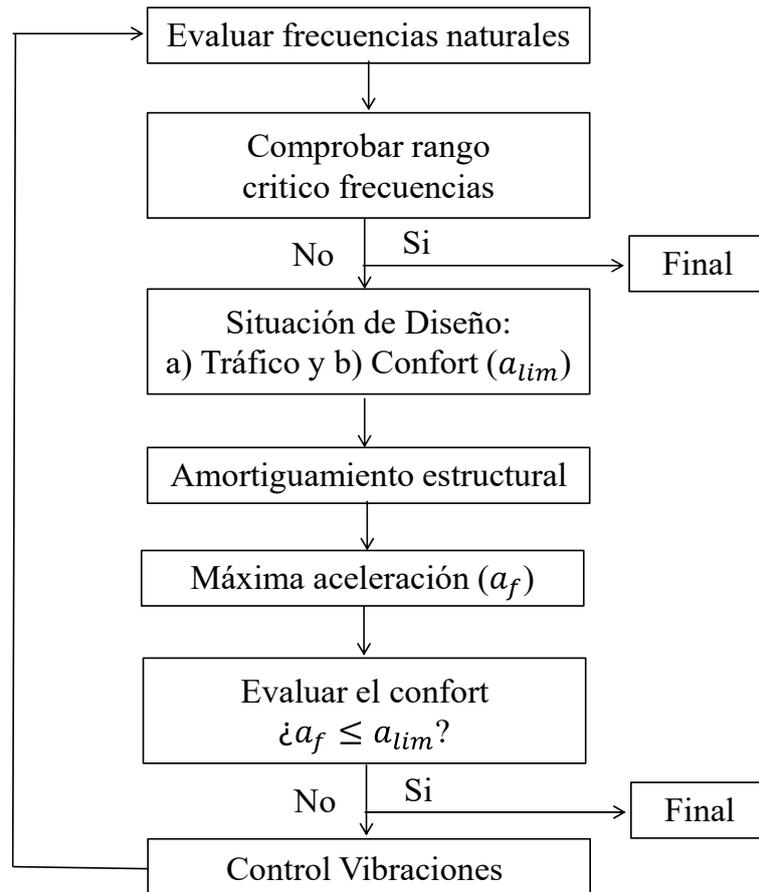


Figura 22. Diagrama de flujo para evaluar el estado límite de servicio de vibraciones en estructuras de ingeniería civil.

6.2. Descripción de la estructura y determinación de sus propiedades modales.

Para el propósito de este estudio, una pasarela peatonal numérica, que ha sido usada como ejemplo por la normativa francesa (Setra, 2006) para ilustrar un procedimiento para evaluar el estado límite de servicio de vibraciones en pasarelas ha sido considerada como referencia.

La pasarela tiene un único vano de 38.85 m luz. Su sistema estructural consiste en dos celosías laterales tipo Warren de acero que se encuentran arriostradas transversalmente en su cordón inferior por montantes horizontales y una losa de hormigón armado que configura el tablero de la estructura. El espesor de la losa del tablero es de 0.10 m.

Las vigas celosía son curvas con un radio de curvatura vertical de 250 m. El canto de la celosía es de 1.21 m y están separadas lateralmente 2.90 m. El ancho de la pasarela es de 2.50 m. La losa del tablero se apoya sobre los montantes horizontales configurando una sección mixta acero-hormigón. Tanto el cordón superior como inferior de la celosía consiste en un tubo rectangular hueco de sección 400x200x12 mm y las diagonales y montantes están configurados por tubos rectangulares huecos de sección 120x120x8 mm. La estructura esta simplemente apoyada en sus cuatro apoyos. (Figura 23).

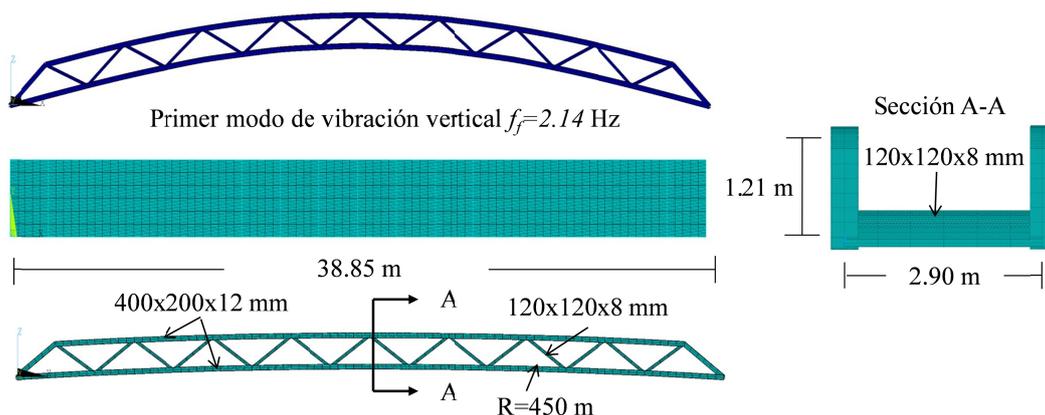


Figura 23. Definición geométrica de la estructura y primer modo de vibración vertical (Setra, 2006).

El comportamiento de la estructura ha sido simulado mediante un modelo de elementos finitos desarrollado en el software Ansys (Ansys, 2019). Dicho modelo está compuesto por elementos tipo viga, BEAM188 (2 nodos por elementos, 6 grados de libertad por nodo), y elementos tipo placa, SHELL181 (4 nodos por elemento, 6 grados de libertad por nodo). En la Figura 24 se presenta un esquema de dichos elementos.

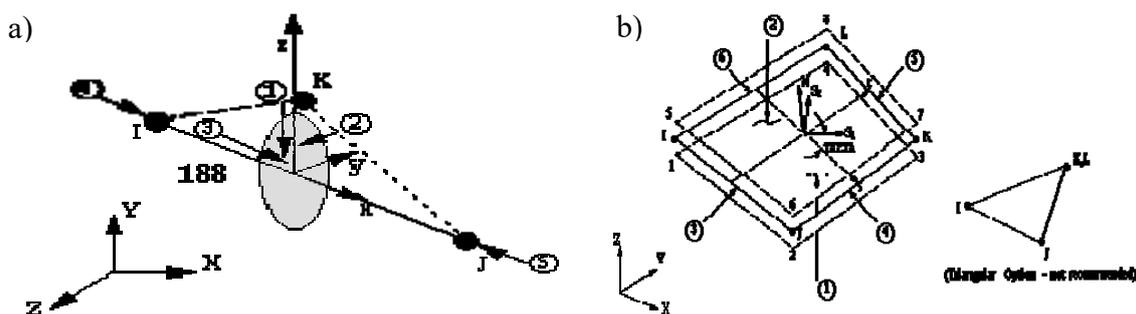


Figura 24. Elementos finitos utilizados para modelizar la pasarela (Ansys, 2019): a) BEAM188; y b) SHELL181.

El comportamiento de la estructura se ha simulado usando una malla de 646 elementos viga y 540 elementos placa (Figura 23). Se ha supuesto una ley lineal para las leyes constitutivas de los dos materiales, hormigón armado y acero estructural. Las propiedades mecánicas adoptadas para dichos materiales son: (i) para el hormigón armado, un módulo de Young, $E_c = 31000$ MPa; un coeficiente de Poisson, $\nu_c = 0.2$; y una densidad, $\rho_c = 2500$ kg/m³; y (ii) para el acero, un módulo de Young, $E_s = 210000$ MPa; un coeficiente de Poisson, $\nu_c = 0.3$; y una densidad, $\rho_s = 7850$ kg/m³. El ratio de amortiguamiento de la estructura, ζ_f , se ha estimado en 0.6 % de acuerdo a las recomendaciones de las guías de diseño Synpex (Butz *et al.*, 2007)

Los parámetros modales de la pasarela se han obtenido por medio de un análisis modal numérico en base al modelo de elementos finitos de la estructura (Figure 23). De esta forma, se ha obtenido que solo el primer modo de vibración vertical de la estructura puede verse afectado por la acción de la carga peatonal (Butz *et al.*, 2007). Las características modales de dicho modo son (Chopra, 2017): (i) una frecuencia natural,

$f_f = 2.14$ Hz; (ii) una masa modal, $m_s = 34706$ kg, (iii) un amortiguamiento modal, $c_s = 5600$ sN/m; y (iv) una rigidez modal, $k_s = 6.275 \cdot 10^6$ N/m.

A efectos de comprobar el estado límite de servicio de vibraciones se considera que sobre la estructura actual un tráfico peatonal equivalente a una densidad de 1 P/m^2 .

En la ecuación (6.4) se presentan la fuerza equivalente a dicha carga peatonal.

$$p(t) = 280 \cdot \cos(2\pi \cdot f_f \cdot t) \cdot 19.64 \cdot 0.8 \text{ [N/m]} \quad (6.4)$$

Dicha fuerza se proyecta modalmente sobre el primer modo de vibración de la estructura, $p^*(t) = \phi^T p(t)$, y se aplica posteriormente al siguientes sistema de ecuaciones:

$$\{\dot{z}(t)\} = [A]\{z(t)\} + [B]\{p^*(t)\} \quad (6.5)$$

$$\{y(t)\} = [E]\{z(t)\} + [D]\{p^*(t)\} \quad (6.6)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} \end{bmatrix} [B] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [E] = [0 \quad 1] [D] = [0 \quad 1][B] \quad (6.7)$$

donde las variables de estado $\{z(t)\} = \begin{Bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{Bmatrix}$ son el desplazamiento, $x(t)$, y la velocidad, $\dot{x}(t)$, en el centro del vano de la estructura. La integración de la ecuación anterior se ha realizado a partir de su implementación en el software comercial Matlab (Matlab, 2019). Para la integración numérica de la ecuación anterior se ha utilizado un método explícito de Runge-Kutta considerando un tiempo total de integración, t_t , de 10 segundos y un incremento de tiempo, $\Delta t=0.01$ segundos (Chopra, 2017).

Se presenta en la Figura 25 la respuesta de la estructura (aceleraciones) ante el flujo peatonal anteriormente especificado.

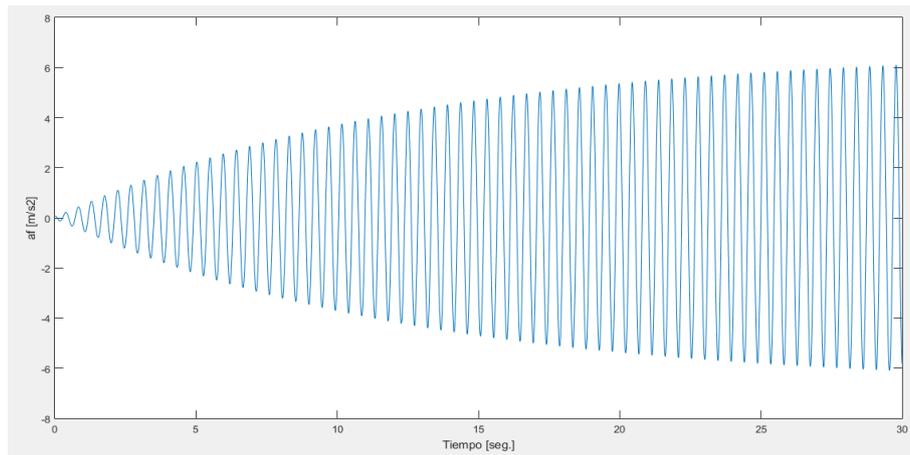


Figura 25. Respuesta de la estructura (aceleraciones) bajo un tráfico peatonal de 1 P/m^2 y condiciones deterministas.

Como se ilustra en la Figura 25 la máxima aceleración de la estructura es de aproximadamente 6.1 m/s^2 . Según se establece en la Tabla 2 la aceleración alcanzada

por la estructura, a_f , es superior al valor límite, a_{lim} , en situación inaceptable, siendo por lo tanto necesario instalar un sistema de control en la estructura al objeto de cumplir el estado límite de servicio de vibraciones.

Por otra parte, se va a considerar que la estructura se encuentra bajo condiciones de incertidumbre. Bajo dichas condiciones de incertidumbre se va a suponer que las propiedades modales de la estructura son variables aleatorias. En este trabajo se asume que la primera frecuencia natural, f_f , y la ratio de amortiguamiento asociada, ζ_f , siguen funciones de probabilidad normales con un rango de variación del $\pm 10\%$.

Para simular las condiciones de incertidumbre mediante un análisis de fiabilidad el primer paso es determinar el tamaño de la simulación de Monte Carlos. Para determinar el tamaño de dicha simulación en este trabajo se va a realizar un estudio de sensibilidad del índice de fiabilidad de la estructura, β , en función del tamaño de la simulación. En la Figura 26 se resume dicho estudio. Como resultado del mismo se puede comprobar que el índice de fiabilidad de la estructura, β , es inferior al valor recomendado por las normativas estructurales (EN 1990, 2002; ISO 2394, 2015), $\beta_{lim} = 1.5$. Adicionalmente se establece un tamaño mínimo de simulaciones, $n_{MC} = 4000$, para asegurar una definición precisa de dicho índice.

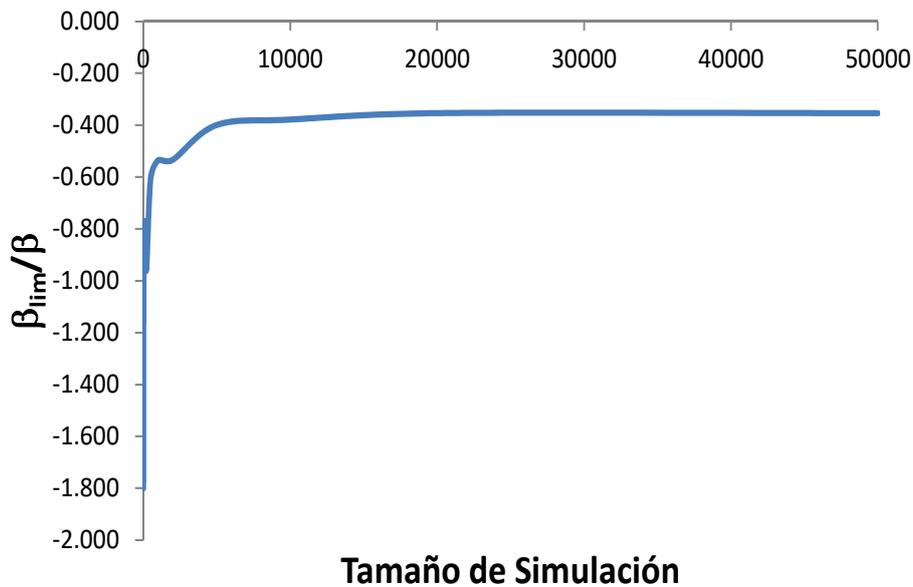


Figura 26. Estudio de sensibilidad del ratio β_{lim}/β en función del tamaño de la simulación de Monte Carlo considerada.

Se presenta en la Figura 27 el histograma de las dos variables aleatorias que caracterizan el comportamiento de la estructura (frecuencia natural, f_f , y ratio de amortiguamiento, ζ_f) y la variable aleatoria que rige la repuesta del sistema (máxima aceleración, a_{max} , ante el tráfico peatonal).

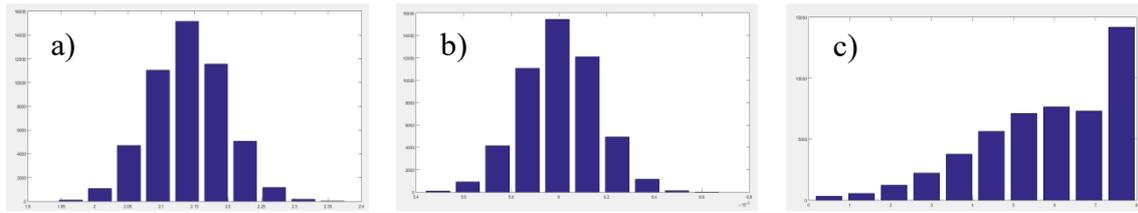


Figura 27. Histograma de las variables aleatorias que regulan el comportamiento de la estructura: a) frecuencia natural, f_f ; b) ratio de amortiguamiento, ζ_f ; y c) máxima aceleración de la estructura, a_{max} .

De igual forma, se presenta en la Figura 28 la aceleración vertical de la estructura, a_f , bajo flujo peatonal y considerando diferentes valores de la frecuencia natural de la estructura, f_f .

Los resultados bajo los condicionantes estocásticos son análogos a los obtenidos en el caso determinista. El índice de fiabilidad, β , obtenido es superior a los valores recomendados por la normativa vigente para el estado límite de servicio de vibraciones bajo estudio, β_{lim} . Se hace igualmente necesario instalar en la estructura un sistema de amortiguamiento de masa inercial y dimensionar sus parámetros constituyentes para garantizar que la probabilidad de fallo en el cumplimiento de dicho estado límite de servicio sea inferior a un valor recomendado ($\beta \geq \beta_{lim}$).

Al objeto de mejorar el comportamiento de la estructura se instala sobre el punto intermedio de su vano un sistema de control de masa inercial (pasivo, semi-activo y activo).

Para diseñar dicho sistema de control los siguientes requerimientos son considerados: (i) bajo condicionantes deterministas, una aceleración admisible, $a_{lim} = 0.5 \text{ m/s}^2$; y (ii) bajo condicionantes estocásticos, una aceleración admisible, $a_{lim} = 1.0 \text{ m/s}^2$, y un índice de fiabilidad límite, $\beta_{lim} = 1.5$.

En las siguientes secciones se realiza el diseño del sistema de control de masa inercial (activa, semi-activa y pasiva) considerando el algoritmo basado en el movimiento propuesto en este trabajo.

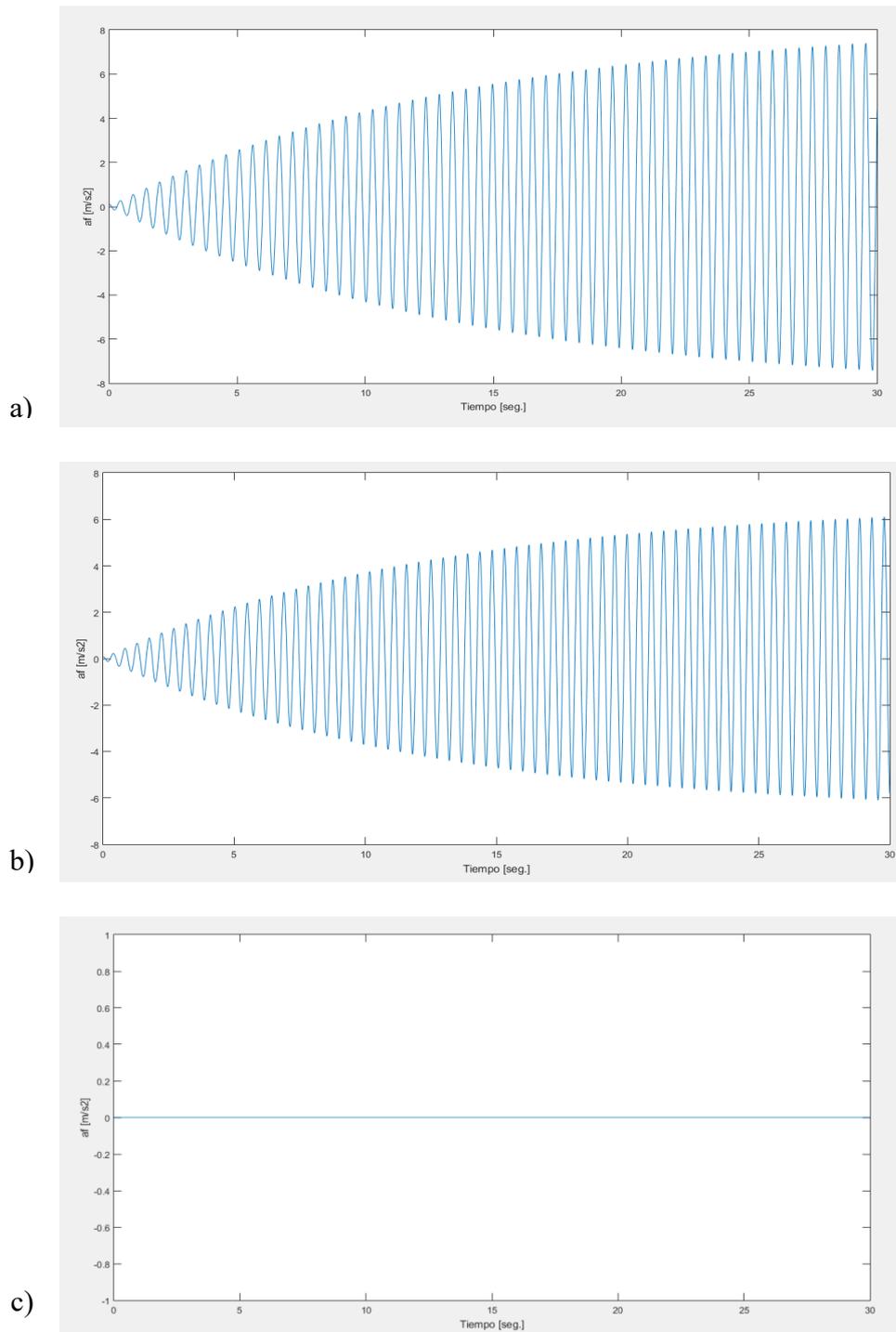


Figura 28. Respuesta de la estructura (aceleraciones) ante un tráfico peatonal de $1 P/m^2$ y condiciones estocásticas: a) frecuencia natural, $f_f = 1.92$ Hz; b) frecuencia natural, $f_f = 2.14$ Hz; y c) frecuencia natural, $f_f = 2.35$ Hz (en los tres casos se ha considerado una ratio de amortiguamiento media, $\zeta_f = 0.6$ %).

6.3. Control Pasivo de las Vibraciones en la Pasarela.

Se realiza en primer lugar el diseño del sistema de control de masa inercial pasiva sobre la pasarela peatonal. En la Figura 29 se presenta el esquema del sistema de interacción pasarela-sistema de control de masa inercial pasiva.

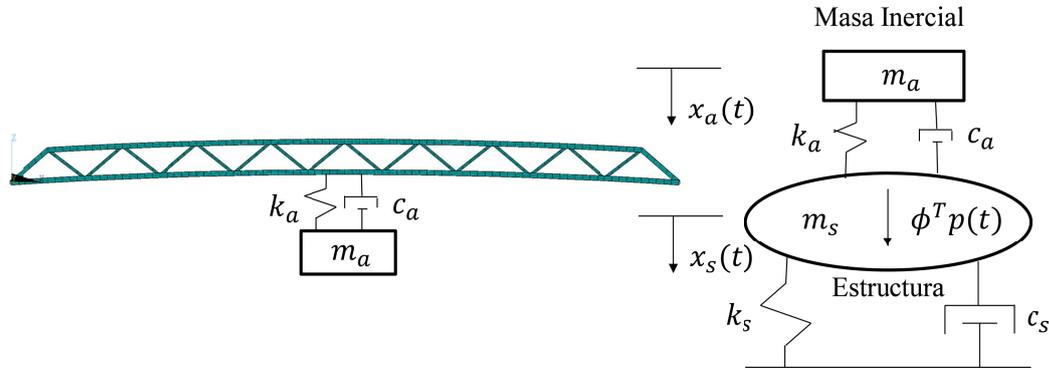


Figura 29. Esquema del sistema pasarela-sistema de control de masa inercial pasiva.

Se establecen en primer lugar el modelo matemático que describe el comportamiento del modelo de interacción entre la estructura y el sistema de control de masa inercial pasiva.

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_s(t) \\ \ddot{x}_a(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s + c_a & -c_a \\ -c_a & c_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_a(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s + k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_s(t) \\ x_a(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} p^*(t) \quad (6.8)$$

donde todas las variables del sistema han sido previamente definidas.

A partir de la ecuación (6.8) y considerando las transformaciones definidas por la ecuación (3.19) se plantean las ecuaciones en el espacio de estado que rigen el comportamiento de sistema de interacción. Dichas ecuaciones de estado se implementarán en el software comercial Matlab (Matlab, 2019) para su integración numérica.

Se procede en primer lugar al diseño del sistema de control bajo condiciones deterministas. La formulación del algoritmo de diseño basado en el movimiento bajo condiciones deterministas se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } \mu \\ &\text{Minimizar } \{f(\mu)\} = \{f_1(\mu) \quad f_2(\mu)\} = \left\{ \mu \quad \frac{a_f}{a_{lim}} \right\} \quad (6.9) \\ &\text{Sujeto a } \mu \in [0.01 \ 0.10] \end{aligned}$$

donde μ es la ratio entre la masa del sistema de control de masa inercial pasiva y la masa modal del modo considerado, a_f es la aceleración de la estructura $[m/s^2]$ y a_{lim} es la aceleración límite según los requerimientos de confort establecidos $[m/s^2]$.

El problema de optimización se ha resuelto considerando como algoritmo de optimización; los algoritmos genéticos. Los siguientes parámetros fueron establecidos

en la definición del algoritmo de optimización: (i) una población inicial de 100 individuos; (ii) un número máximo de iteraciones de 100; y (iii) un tamaño del frente de Pareto de 25. En Figura 30 se presenta el frente de Pareto obtenido como solución del problema de optimización previamente definido. Al objeto de determinar la mejor solución entre los diferentes elementos del frente de Pareto, una condición adicional fue establecida. De esta forma, el punto que cumpla estrictamente la condición $a_f/a_{lim} = 1$ será considerado como solución óptima del problema de diseño.

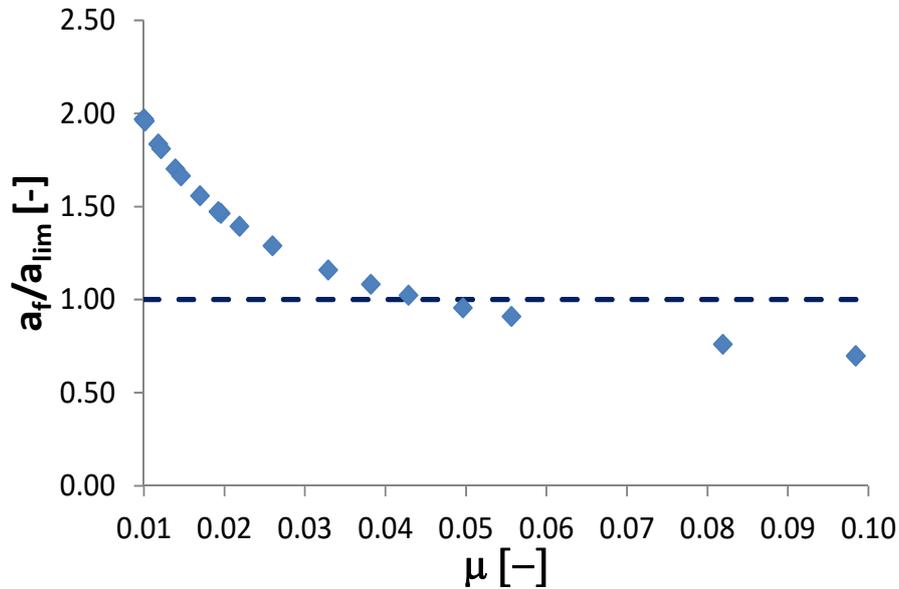


Figura 30. Frente de Pareto y criterio de toma de decisión para el problema de diseño del sistema de control de masa inercial pasiva bajo condiciones deterministas.

Se muestra en la Figura 31 la respuesta de la estructura (aceleraciones verticales) tras la instalación del sistema de control de masa inercial pasiva. Como la Figura 31 ilustra las aceleraciones de la estructura tras la instalación del sistema de control cumplen las especificaciones de diseño ($a_{lim} = 0.50 \text{ m/s}^2$).

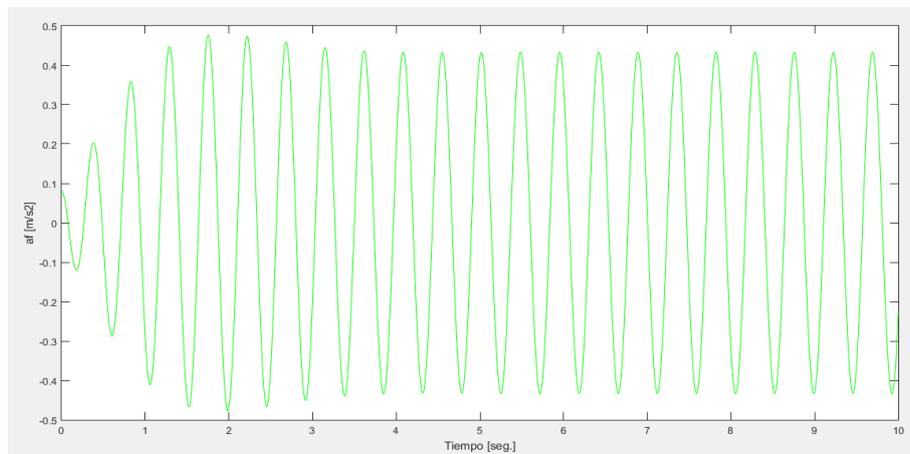


Figura 31. Respuesta de la estructura (aceleraciones) controlada por el sistema de control de masa inercial pasiva bajo un tráfico peatonal de 1 P/m^2 y condiciones deterministas.

Posteriormente, se ha realizado el diseño del sistema de control de masa inercial pasiva bajo condiciones estocásticas. La formulación del algoritmo de diseño basado en el movimiento bajo condiciones estocásticas se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{Encontrar } \mu \\ & \text{Minimizar } \{f(\mu)\} = \{f_1(\mu) \quad f_2(\mu)\} = \left\{ \mu \quad \frac{\beta_{lim}}{\beta} \right\} \quad (6.10) \\ & \text{Sujeto a } \mu \in [0.01 \quad 0.10] \end{aligned}$$

donde β es el índice de fiabilidad de la estructura; y β_{lim} es el índice de fiabilidad limite.

Para evaluar el índice de fiabilidad de la estructura, β , en cada iteración del problema de optimización, una simulación de Monte Carlo ha sido utilizada. Al objeto de determinar el tamaño adecuado de dicha simulación de Monte Carlo, se ha realizado un estudio de sensibilidad de la variación del segundo término de la función objetivo con el tamaño de la simulación. El resultado de dicho estudio se presenta en la Figura 32. Como resultado de dicho estudio se establece un conjunto de simulaciones, $n_{MC} = 40000$, para determinar el índice de fiabilidad de la estructura, β .

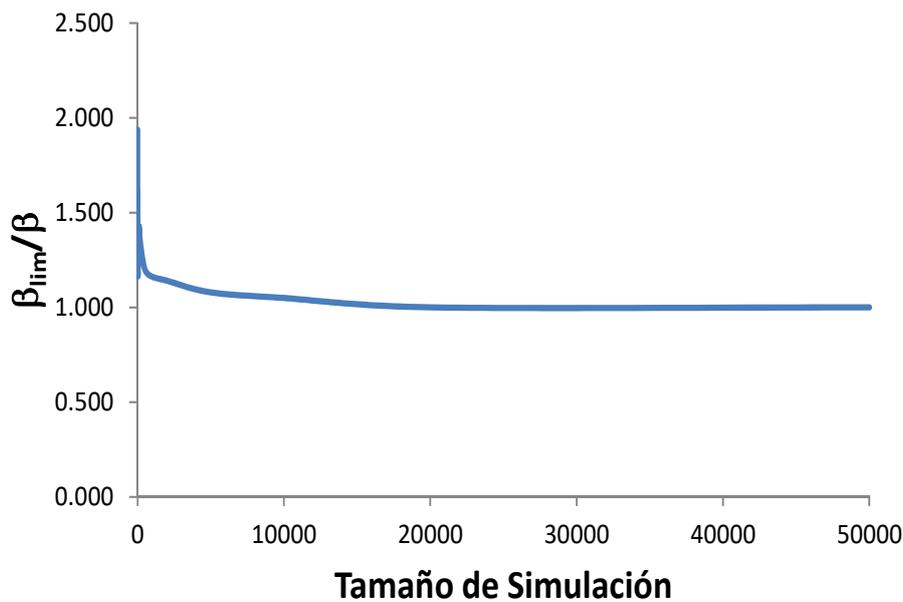


Figura 32. Estudio de sensibilidad del ratio, β_{lim}/β , frente al tamaño de la simulación de Monte Carlo.

El problema de optimización se ha resuelto considerando de nuevo los algoritmos genéticos como algoritmo de optimización. Para regular el comportamiento de los algoritmos genéticos se han considerado los mismos parámetros que en el caso determinista. En Figura 33 se presenta el frente de Pareto obtenido como solución del problema de optimización previamente definido. Al objeto de determinar la mejor solución entre los diferentes elementos del frente de Pareto, una condición adicional fue establecida. De esta forma, el punto que cumple estrictamente la condición $\beta_{lim}/\beta = 1$ será considerado como solución óptima del problema de diseño.

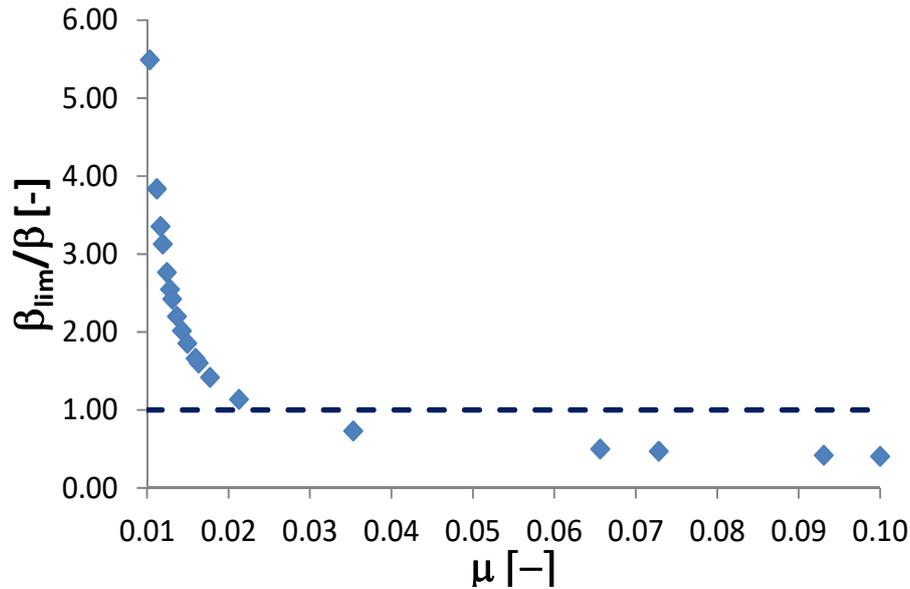


Figura 33. Frente de Pareto y criterio de toma de decisión para el problema de diseño del sistema de control de masa inercial pasiva bajo condiciones estocásticas.

Se presenta en la Figura 34 el histograma de las tres variables aleatorias que caracterizan el comportamiento de la estructura controlada por el sistema de control de masa inercial pasiva: (i) frecuencia natural, f_f ; (ii) ratio de amortiguamiento, ζ_f ; y (iii) máxima aceleración de la estructura controlada, a_{max} , ante el tráfico peatonal.

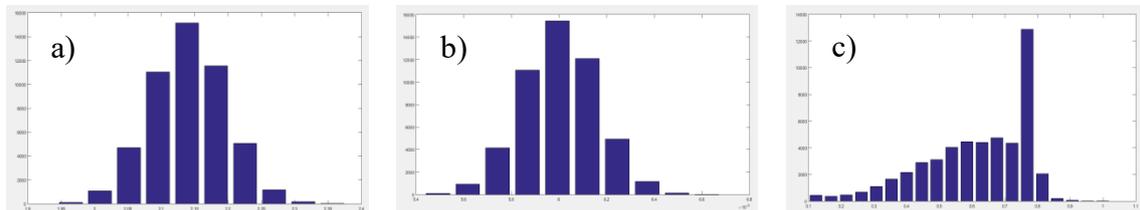


Figura 34. Histograma de las variables aleatorias que regulan el comportamiento de la estructura controlada por el sistema de control de masa inercial pasiva: a) frecuencia natural, f_f ; b) ratio de amortiguamiento, ζ_f ; y c) máxima aceleración de la estructura controlada, a_{max} .

Se muestra en la Figura 35 la respuesta (aceleraciones) de la estructura, a_f , tras la instalación del sistema de control de masa inercial pasiva considerando la variación de la frecuencia natural de la estructura, f_f . Como la Figura 35 muestra, tras la instalación del sistema de control la máxima aceleración de la estructura, a_f , es inferior al valor límite considerado, $a_{lim}=1.00 \text{ m/s}^2$.

Finalmente, se presentan en la Tabla 2 un resumen de los parámetros de diseño del sistema de control de masa inercial pasiva tras la resolución del problema de optimización bajo las dos condiciones consideradas (deterministas y estocásticas).

Tabla 2. Parámetros del sistema de control de masa inercial pasiva en función de las condiciones de diseño (deterministas o estocásticas).

Condición	Pasivo	a_f [m/s ²]	β [-]	m_a [kg]	c_a [sNm]	k_a [N/m]
Determinista	No	6.10	---	---	---	---
Estocástica	No	---	-0.53	---	---	---
Determinista	Si	0.50	---	1735	5940	$2.85 \cdot 10^5$
Estocástica	Si	1.00	1.50	902	2305	$1.55 \cdot 10^5$

La metodología de diseño aplicada a este sistema de control de masa inercial pasiva se ha aplicado de forma iterativa al resto de variantes del sistema de control considerado (activa y semi-activa).

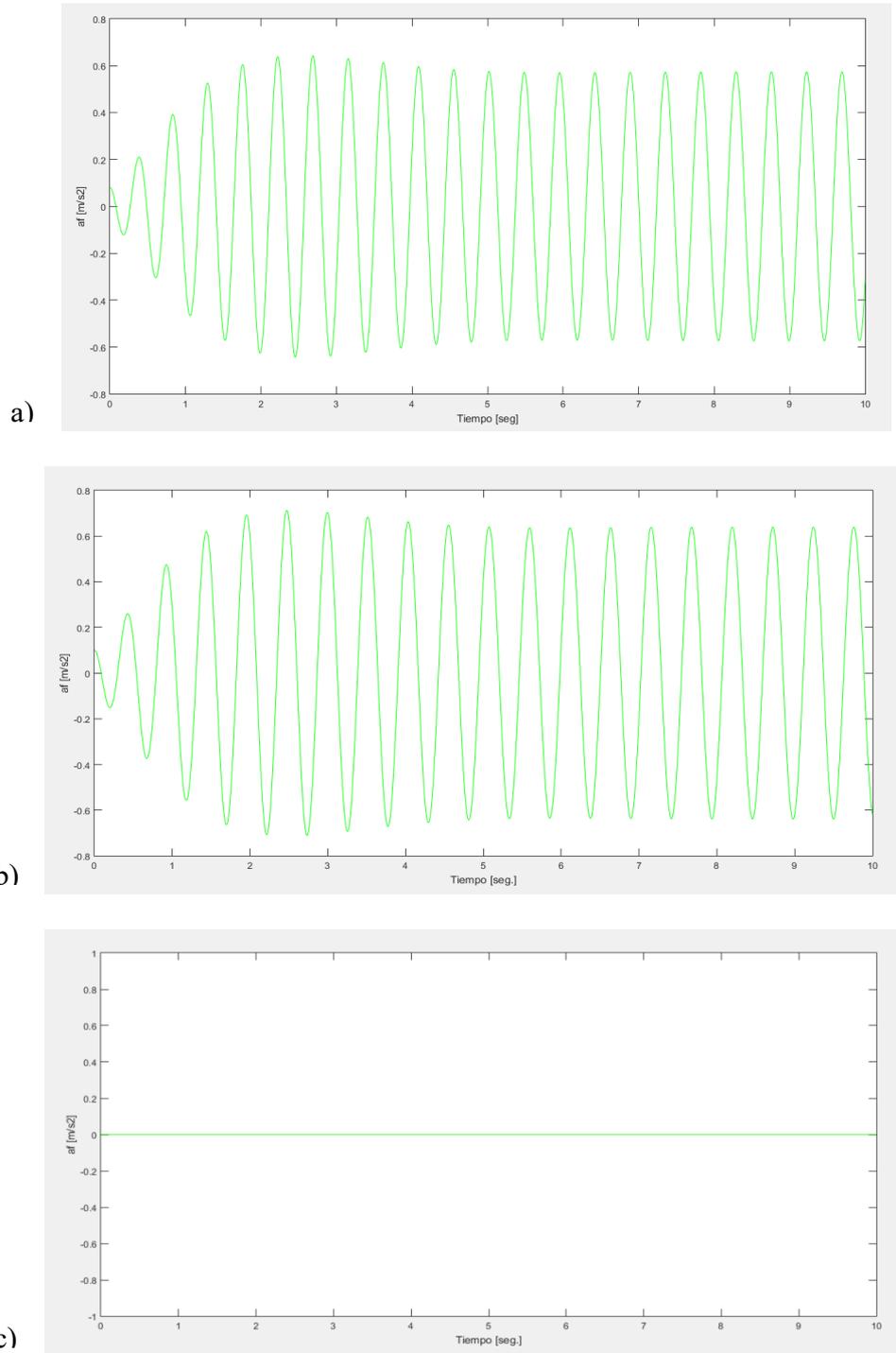


Figura 35. Respuesta de la estructura controlada (aceleraciones) con el sistema de control de masa inercial pasiva ante un tráfico peatonal de $1 P/m^2$ y condiciones estocásticas: a) frecuencia natural, $f_f = 1.92$ Hz; b) frecuencia natural, $f_f = 2.14$ Hz; y c) frecuencia natural, $f_f = 2.35$ Hz (en los tres casos se ha considerado una ratio de amortiguamiento media, $\zeta_f = 0.6$ %).

6.4. Control Semi-activo de las Vibraciones en la Pasarela.

Se realiza en segundo lugar el diseño del sistema de control de masa inercial semi-activa sobre la pasarela. En la Figura 36 se presenta el esquema del sistema de interacción pasarela-sistema de control de masa inercial semi-activa.

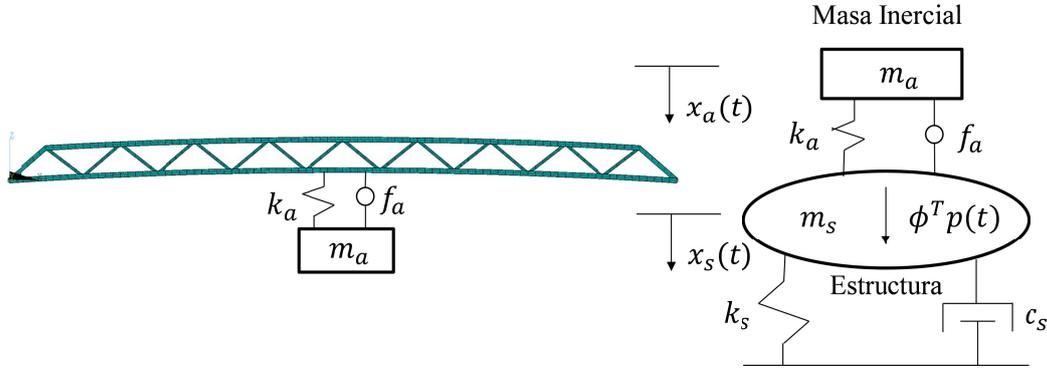


Figura 36. Esquema del sistema pasarela-sistema de control de masa inercial semi-activa.

Se establece posteriormente el modelo matemático que describe el comportamiento del sistema de interacción entre la estructura y el sistema de control de masa inercial semi-activa.

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_s(t) \\ \ddot{x}_a(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_a(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s + k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_s(t) \\ x_a(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} p^*(t) + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} f_a(t) \quad (6.11)$$

donde todas las variables han sido previamente definidas.

Se realizar en primer lugar el diseño de los parámetros del sistema de control bajo condiciones deterministas. La formulación de dicho problema de diseño se puede expresar de la siguiente forma (considerando el algoritmo basado en el movimiento):

Encontrar μ, α_d, β_d

$$\text{Minimizar } \{f(\mu, \alpha_d, \beta_d)\} = \{f_1(\mu) \quad f_2(\mu, \alpha_d, \beta_d)\} = \left\{ \mu \quad \frac{a_f}{a_{lim}} \right\} \quad (6.12)$$

$$\text{Sujeto a } \mu \in [0.01 \ 0.10] \quad \alpha_d \in [10 \ 1000] \quad \beta_d \in [10^{-5} \ 10^{-8}]$$

donde μ es la ratio entre la masa del sistema de control de masa inercial semi-activa y la masa modal del modo considerado, a_f es la aceleración de la estructura $[m/s^2]$ y a_{lim} es la aceleración límite según los requerimientos de confort establecidos $[m/s^2]$.

Al objeto de adaptar la fuerza motriz, f_a , calculada por el algoritmo de control LQR, a las condiciones del amortiguador magneto-reológico, se ha limitado el valor de dicha fuerza tanto inferior, $f_{min} = 10$ N, como superiormente, $f_{max} = 50$ N.

En Figura 37 se presenta el frente de Pareto obtenido como solución del problema de optimización previamente definido. Al objeto de determinar la mejor

solución entre los diferentes elementos del frente de Pareto, la condición adicional previamente definida, $a_f/a_{lim} = 1$, ha sido considerada.

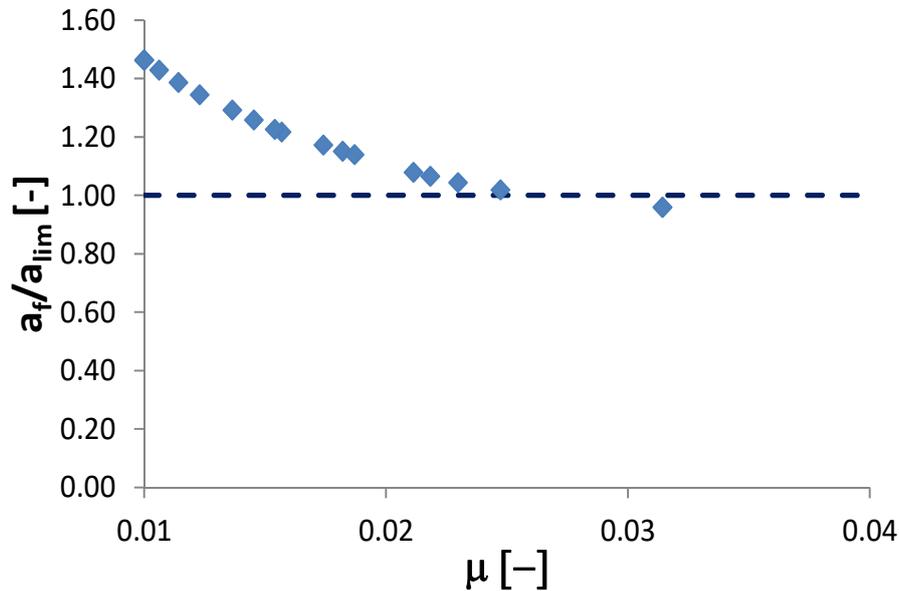


Figura 37. Frente de Pareto y criterio de toma de decisión para el problema de diseño del sistema de control de masa inercial semi-activa bajo condiciones deterministas.

Se muestra en la Figura 38 la respuesta de la estructura (aceleraciones verticales) tras la instalación del sistema de control de masa inercial semi-activa. Adicionalmente la Figura 38 ilustra que las aceleraciones de la estructura tras la instalación del sistema de control cumplen las especificaciones de diseño ($a_{lim} = 0.50 \text{ m/s}^2$).

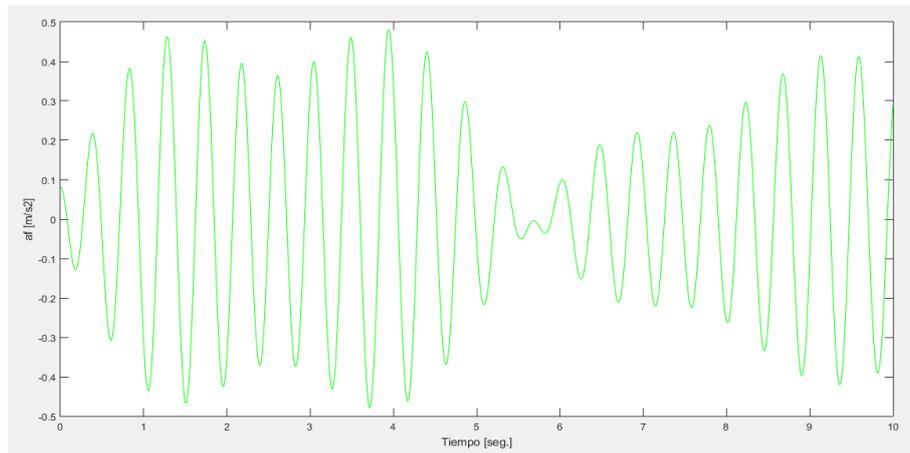


Figura 38. Respuesta de la estructura (aceleraciones) controlada por el sistema de masa inercial semi-activa bajo un tráfico peatonal de 1 P/m^2 y condiciones deterministas.

Adicionalmente, se presenta en la Figura 39 la fuerza motriz, f_a , ejercida por el amortiguador magneto-reológico durante la simulación dinámica.

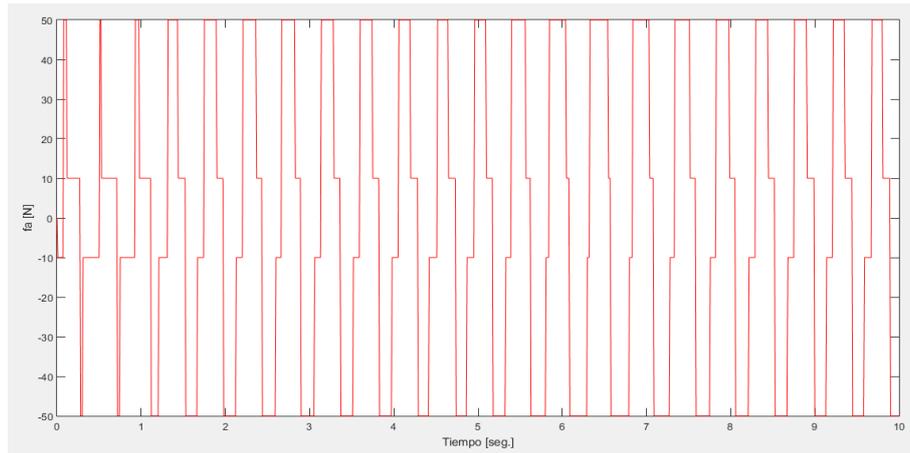


Figura 39. Fuerza motriz, f_a , ejercida por el sistema de masa inercial semi-activo bajo un tráfico peatonal de 1 P/m^2 y condiciones deterministas.

Posteriormente, se ha realizado el diseño del sistema de control de masa inercial semi-activa bajo condiciones estocásticas. La formulación de dicho problema, según el algoritmo de diseño basado en el movimiento bajo condiciones estocásticas, se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } \mu, \alpha_d, \beta_d \\ &\text{Minimizar } \{f(\mu, \alpha_d, \beta_d)\} = \{f_1(\mu) \quad f_2(\mu, \alpha_d, \beta_d)\} = \left\{ \mu \quad \frac{\beta_{lim}}{\beta} \right\} \quad (6.13) \\ &\text{Sujeto a } \mu \in [0.01 \ 0.10] \quad \alpha_d \in [10 \ 1000] \quad \beta_d \in [10^{-5} \ 10^{-8}] \end{aligned}$$

donde β es el índice de fiabilidad de la estructura; y β_{lim} es el índice de fiabilidad límite.

Al igual que el caso del sistema de control de masa inercial pasiva, se ha realizado un estudio de sensibilidad de la ratio entre los índices de fiabilidad límite y de la estructura al objeto de determinar el número óptimo de simulaciones de Monte Carlo para abordar con precisión el problema. El resultado de dicho estudio de sensibilidad se muestra en la Figura 40. Se determina, como resultado de dicho estudio, un conjunto de simulaciones, $n_{MC} = 40000$, para determinar el índice de fiabilidad de la estructura, β .

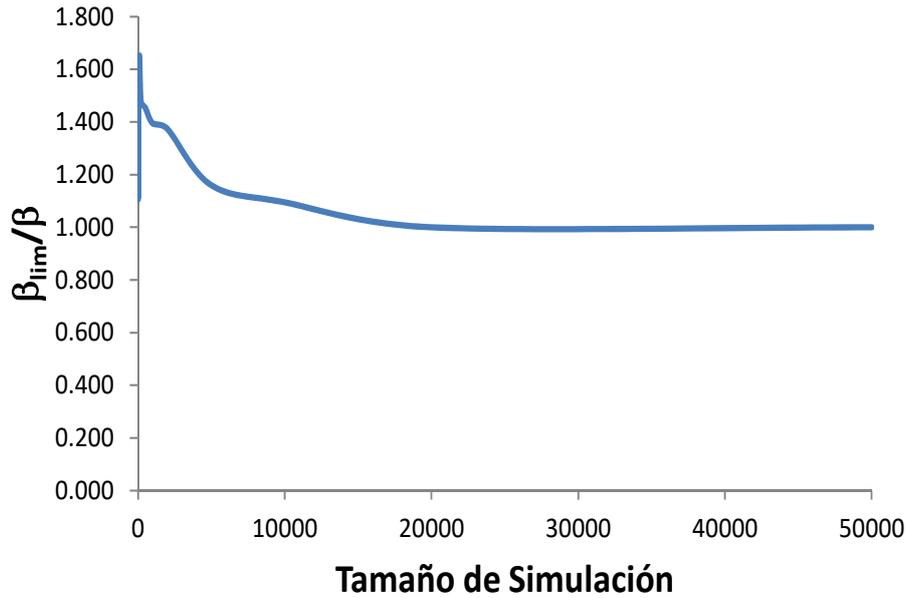


Figura 40. Estudio de sensibilidad del ratio, β_{lim}/β , frente al tamaño de la simulación de Monte Carlo.

Para resolver el problema de optimización, se recurre como en los casos anteriores al uso de algoritmos genéticos. En la Figura 41 se presenta el frente de Pareto obtenido como solución del problema de optimización. Al objeto de determinar la mejor solución entre los diferentes elementos del frente de Pareto, la condición, anteriormente establecida en el caso del sistema de control de masa inercial pasiva, ha sido de nuevo incluida, $\beta_{lim}/\beta = 1$.

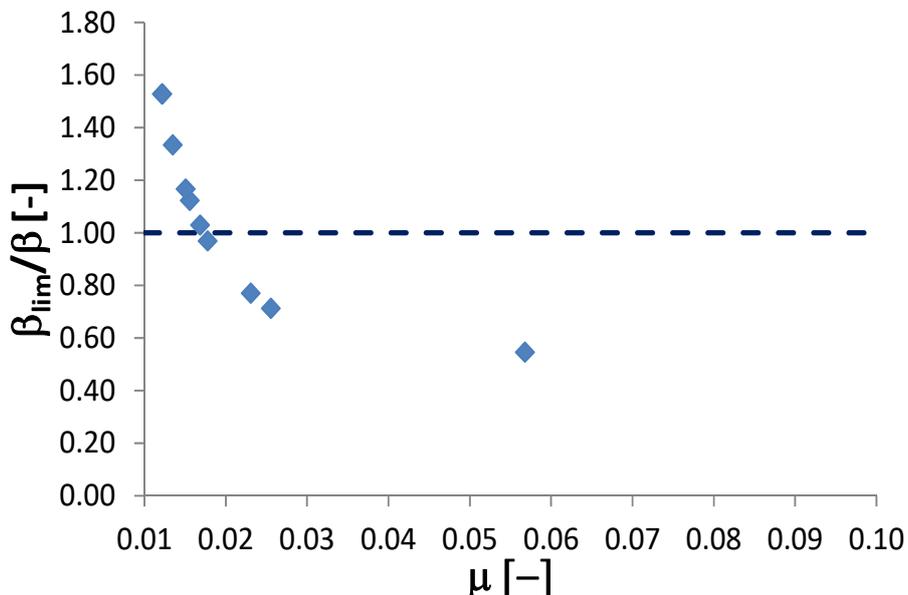


Figura 41. Frente de Pareto y criterio de toma de decisión para el problema de diseño del sistema de control de masa inercial semi-activa bajo condiciones estocásticas.

Se presenta en la Figura 42 el histograma de las tres variables aleatorias que caracterizan el comportamiento de la estructura controlada por el sistema de control de masa inercial semi-activa: (i) frecuencia natural, f_f ; (ii) ratio de amortiguamiento, ζ_f ; y (iii) máxima aceleración de la estructura controlada, a_{max} , ante el tráfico peatonal.

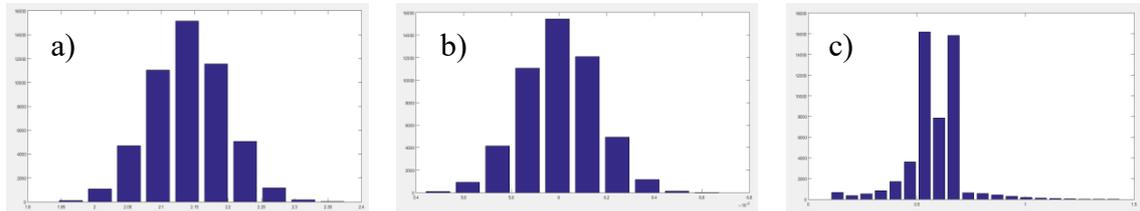


Figura 42. Histograma de las variables aleatorias que regulan el comportamiento de la estructura controlada por el sistema de control de masa inercial semi-activa: a) frecuencia natural, f_f ; b) ratio de amortiguamiento, ζ_f ; y c) máxima aceleración de la estructura controlada, a_{max} .

Se muestra en la Figura 43 la respuesta (aceleraciones) de la estructura, a_f , tras la instalación del sistema de control de masa inercial semi-activa considerando la variación de la frecuencia natural de la estructura, f_f . Como la Figura 43 muestras, tras la instalación del sistema de amortiguación la máxima aceleración de la estructura, a_f , es inferior al valor límite considerado, $a_{lim}=1.00 \text{ m/s}^2$.

Adicionalmente se muestra en la Figura 44 la fuerza motriz, f_a , ejercida por el amortiguador de masa inercial semi-activa en función de la variación de la frecuencia natural de la estructura, f_f .

Finalmente, se presentan en la Tabla 3 un resumen de los parámetros de diseño del sistema de control de masa inercial semi-activa tras la resolución del problema de optimización bajo las dos condiciones consideradas (deterministas y estocásticas).

Tabla 3. Parámetros del sistema de control de masa inercial semi-activa en función de las condiciones de diseño (deterministas o estocásticas).

Condición	Activo	a_f [m/s ²]	β [-]	α_d [-]	β_d [-] 10 ⁻⁸	m_a [kg]	k_a [N/m] 10 ⁵	f_a [N]
Determinista	No	6.10	---	---	---	---	---	---
Estocástica	No	---	-0.53	---	---	---	---	---
Determinista	Si	0.50	---	360.11	457.05	1075	1.80	50
Estocástica	Si	1.00	1.50	224.19	771.64	625	1.08	50

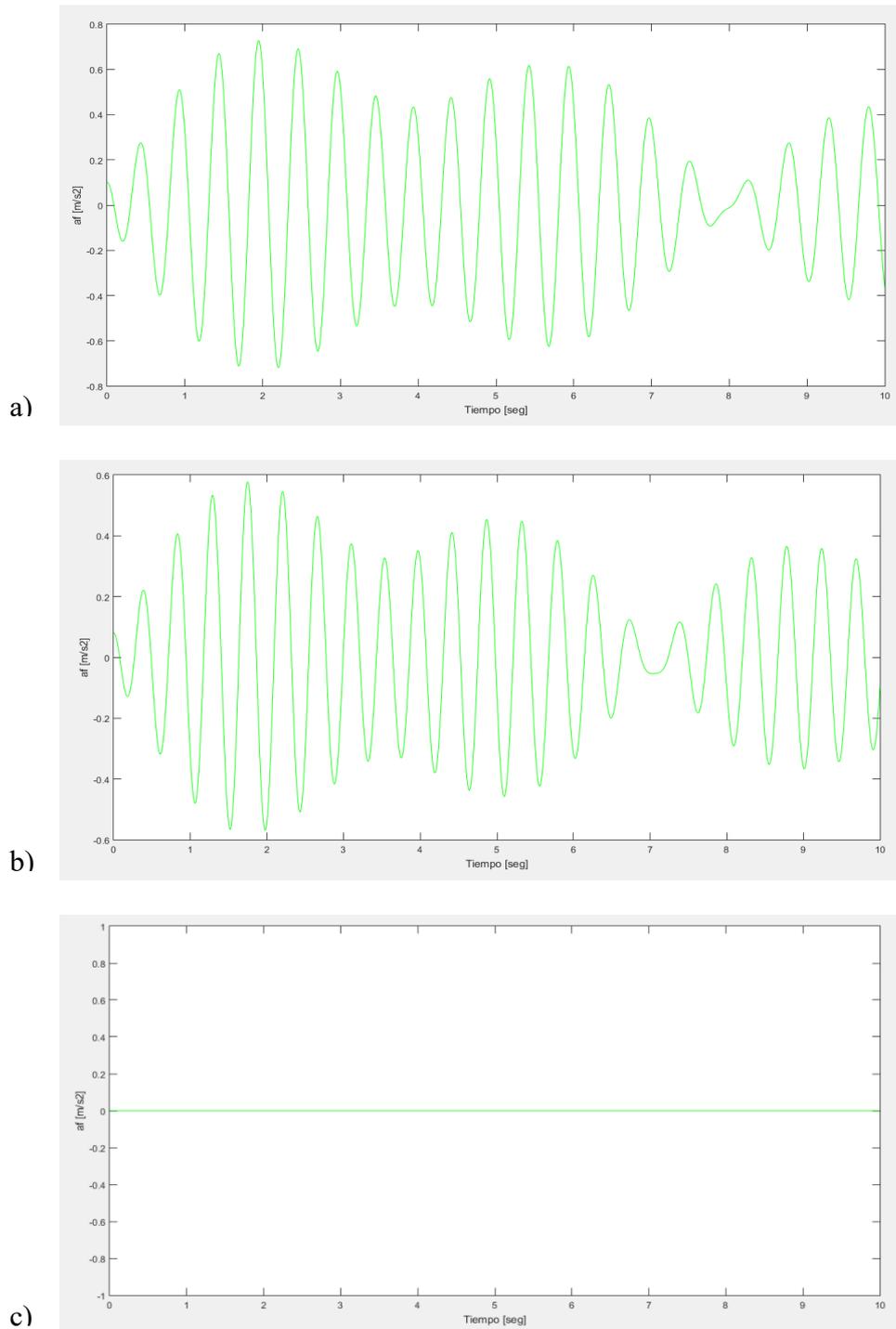


Figura 43. Respuesta de la estructura controlada (aceleraciones) con el sistema de control de masa inercial semi-activa ante un tráfico peatonal de 1 P/m^2 y condiciones estocásticas: a) frecuencia natural, $f_f = 1.92$ Hz; b) frecuencia natural, $f_f = 2.14$ Hz; y c) frecuencia natural, $f_f = 2.35$ Hz (en los tres casos se ha considerado una ratio de amortiguamiento media, $\zeta_f = 0.6$ %).

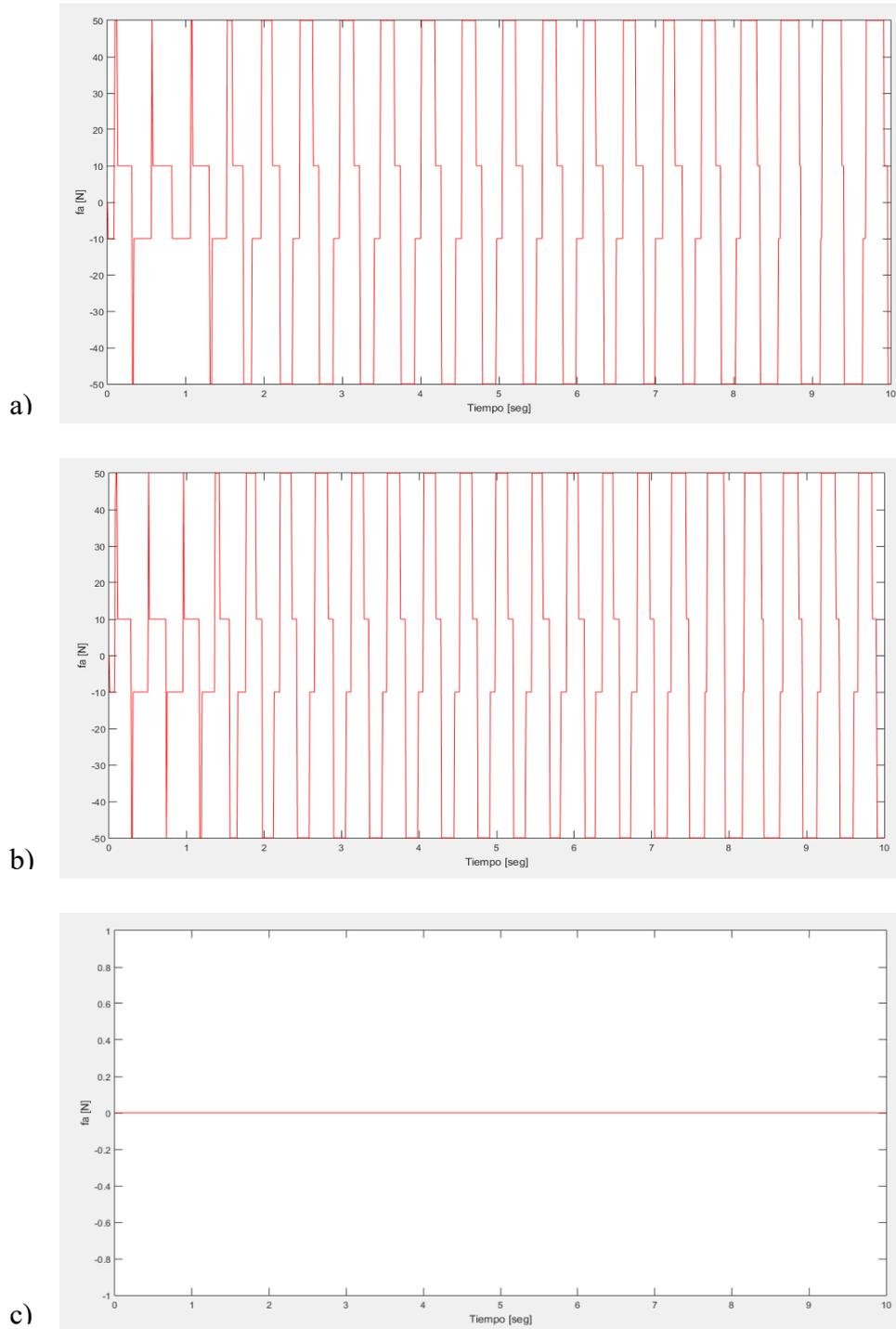


Figura 44. Fuerza motriz, f_a , ejercida por el amortiguador de masa inercial semi-activo ante un tráfico peatonal de 1 P/m^2 y condiciones estocásticas: a) frecuencia natural, $f_f = 1.92 \text{ Hz}$; b) frecuencia natural, $f_f = 2.14 \text{ Hz}$; y c) frecuencia natural, $f_f = 2.35 \text{ Hz}$ (en los tres casos se ha considerado una ratio de amortiguamiento media, $\zeta_f = 0.6 \%$).

6.5. Control Activo de las Vibraciones en la Pasarela.

Se realiza finalmente el diseño del sistema de control de masa inercial activa sobre la pasarela. En la Figura 45 se presenta el esquema del sistema de interacción pasarela-sistema de control de masa inercial activa.

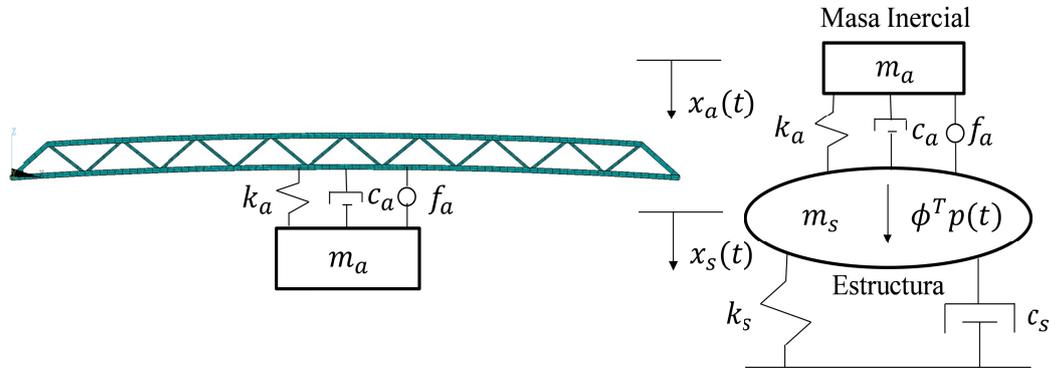


Figura 45. Esquema del sistema pasarela-sistema de control de masa inercial activa.

Como en el resto de casos, se establece en primer lugar el modelo matemático que describe el comportamiento del sistema de interacción entre la estructura y el sistema de control de masa inercial activa.

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_s(t) \\ \ddot{x}_a(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s + c_a & -c_a \\ -c_a & c_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_a(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s + k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_s(t) \\ x_a(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} p^*(t) + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} f_a(t) \quad (6.14)$$

donde todas las variables han sido previamente definidas.

Al igual que en los casos anteriores, se realiza la integración de la ecuación (6.14) mediante su transformación al espacio de estado. Para diseñar los parámetros del sistema de control de masa inercial activa se implementa el algoritmo previamente descrito en el software comercial Maltab (Matlab, 2019).

De esta forma, la formulación del problema de optimización según el algoritmo de diseño basado en el movimiento bajo condiciones deterministas se puede expresar como:

$$\begin{aligned} & \text{Encontrar } \mu, \alpha_d, \beta_d \\ & \text{Minimizar } \{f(\mu, \alpha_d, \beta_d)\} = \{f_1(\mu) \quad f_2(\mu, \alpha_d, \beta_d)\} = \left\{ \mu \quad \frac{a_f}{a_{lim}} \right\} \quad (6.15) \\ & \text{Sujeto a } \mu \in [0.01 \ 0.10] \quad \alpha_d \in [10 \ 1000] \quad \beta_d \in [10^{-5} \ 10^{-8}] \end{aligned}$$

donde μ es la ratio entre la masa del sistema de control y la masa modal del modo considerado, a_f es la aceleración de la estructura $[m/s^2]$ y a_{lim} es la aceleración límite según los requerimientos de confort establecidos $[m/s^2]$.

El problema de optimización se ha resuelto considerando como en el resto de los casos, algoritmos genéticos. Para la definición del funcionamiento de dicho algoritmo se han considerado los mismos meta-parámetros que en los casos anteriores (población,

número de interacciones y número de elementos del frente de Pareto). En la Figura 46 se presenta como resultado el frente de Pareto obtenido. De igual forma, se ha incluido en la Figura 46 el criterio para la resolución del problema de toma de decisión correspondiente a la selección de la mejor solución entre los diferentes elementos del frente de Pareto. El cumplimiento de la condición $a_f/a_{lim} = 1$ ha sido considerado al objeto de llevar a cabo dicho propósito.

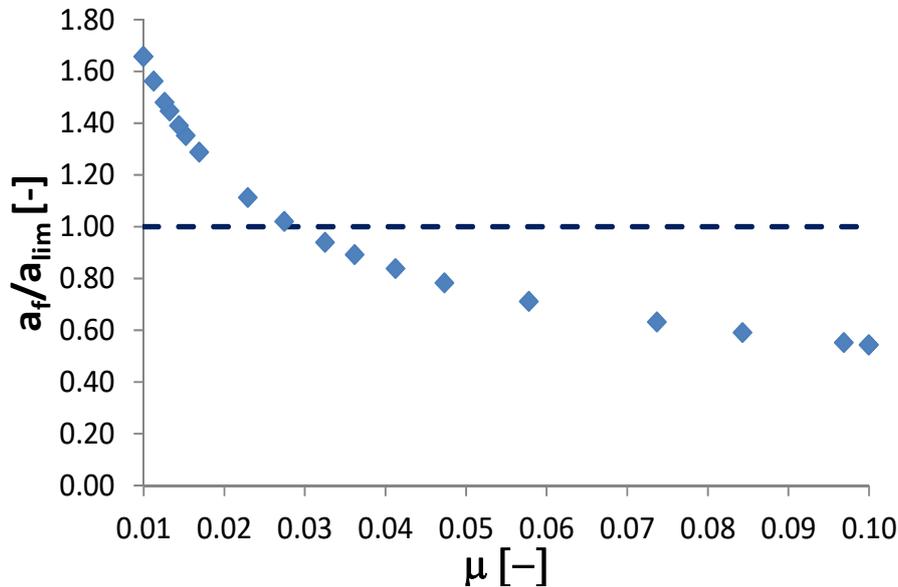


Figura 46. Frente de Pareto y criterio de toma de decisión para el problema de diseño del sistema de control de masa inercial activa bajo condiciones deterministas.

Se muestra en la Figura 47 la respuesta de la estructura (aceleraciones verticales) tras la instalación del sistema de control de masa inercial activa. Adicionalmente la Figura 47 ilustra que las aceleraciones de la estructura tras la instalación del sistema de control cumplen las especificaciones de diseño ($a_{lim} = 0.50 \text{ m/s}^2$).

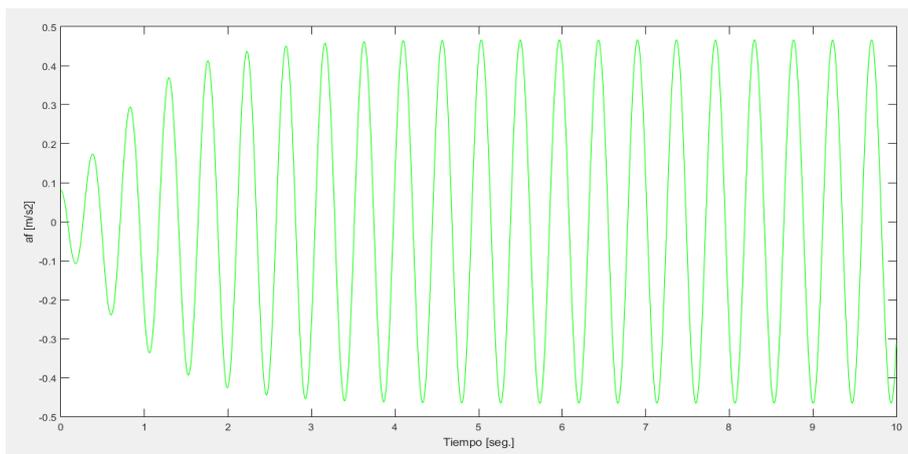


Figura 47. Respuesta de la estructura (aceleraciones) controlada por el sistema de control de masa inercial activa bajo un tráfico peatonal de 1 P/m^2 y condiciones deterministas.

Adicionalmente, se presenta en la Figura 48 la fuerza de control ejercida por el actuador, f_a , durante la simulación numérica.

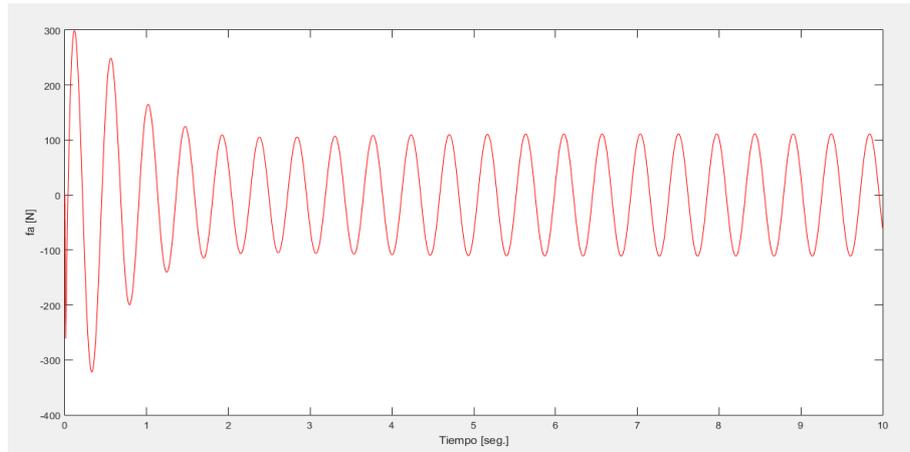


Figura 48. Fuerza motriz, f_a , ejercida por el actuador del sistema de control de masa inercial activa bajo un tráfico peatonal de 1 P/m^2 y condiciones deterministas.

Tras la resolución del problema bajo condicionantes determinísticas, se procede a la formulación del problema bajo condicionantes estocásticos. De esta forma, la formulación del algoritmo de diseño basado en el movimiento bajo condiciones estocásticas se puede expresar como:

Encontrar μ, α_d, β_d

$$\text{Minimizar } \{f(\mu, \alpha_d, \beta_d)\} = \{f_1(\mu) \quad f_2(\mu, \alpha_d, \beta_d)\} = \left\{ \mu \quad \frac{\beta_{lim}}{\beta} \right\} \quad (6.16)$$

$$\text{Sujeto a } \mu \in [0.01 \ 0.10] \quad \alpha_d \in [10 \ 1000] \quad \beta_d \in [10^{-5} \ 10^{-8}]$$

donde β es el índice de fiabilidad de la estructura; y β_{lim} es el índice de fiabilidad límite.

Al igual que en los casos anteriores, se ha realizado un estudio de sensibilidad de la ratio, $\frac{\beta_{lim}}{\beta}$, al objeto de determinar el número óptimo de simulaciones de Monte Carlo, n_{MC} , para abordar con precisión el problema. El resultado de dicho estudio de sensibilidad se muestra en la Figura 49. Se determina, como resultado de dicho estudio, un conjunto de simulaciones, $n_{MC} = 40000$, para determinar el índice de fiabilidad de la estructura, β .

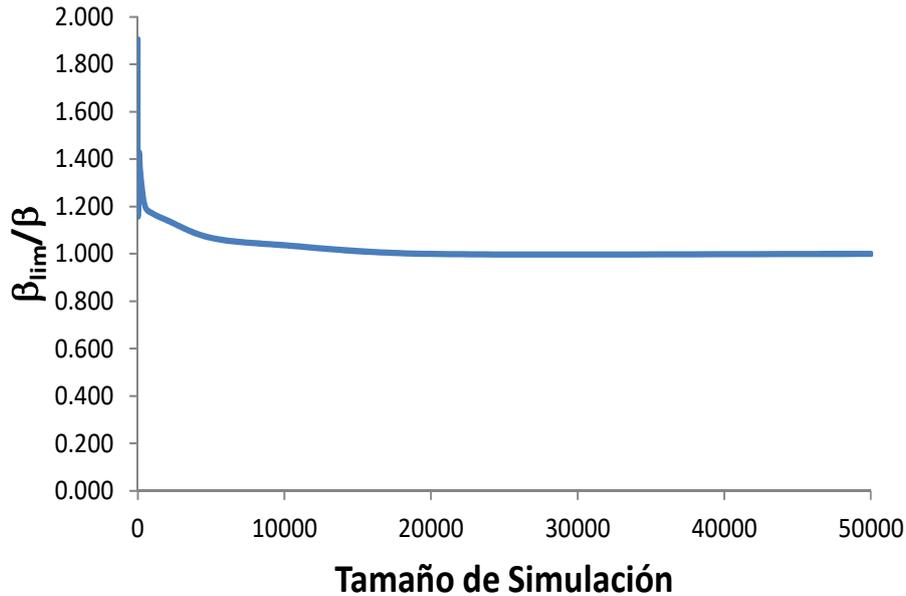


Figura 49. Estudio de sensibilidad del ratio, β_{lim}/β , frente al tamaño de la simulación de Monte Carlo.

El problema de optimización se ha resuelto considerando algoritmos genéticos como en el resto de los casos. Se han seleccionado los mismos parámetros que en los casos anteriores para regular el comportamiento de los algoritmos genéticos (población, número de interacciones y número de elementos del frente de Pareto). En la Figura 50 se presenta como resultado el frente de Pareto obtenido. De igual forma se ha incluido en la Figura 50 el criterio para la resolución del problema de toma de decisión correspondiente a la selección de la mejor solución entre los diferentes elementos del frente de Pareto. El cumplimiento de la condición $\beta_{lim}/\beta = 1$ ha sido establecido con dicho propósito.

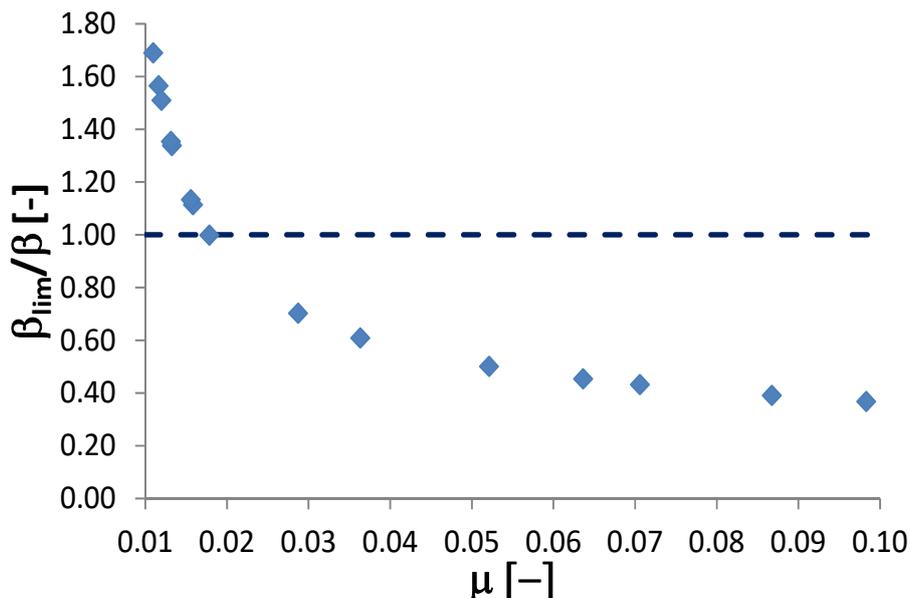


Figura 50. Frente de Pareto y criterio de toma de decisión para el problema de diseño del sistema de control de masa inercial activa bajo condiciones estocásticas.

Se presenta en la Figura 51 el histograma de las tres variables aleatorias que caracterizan el comportamiento de la estructura controlada por el sistema de control de masa inercial activa: (i) frecuencia natural, f_f ; (ii) ratio de amortiguamiento, ζ_f ; y (iii) máxima aceleración de la estructura controlada, a_{max} , ante el tráfico peatonal.

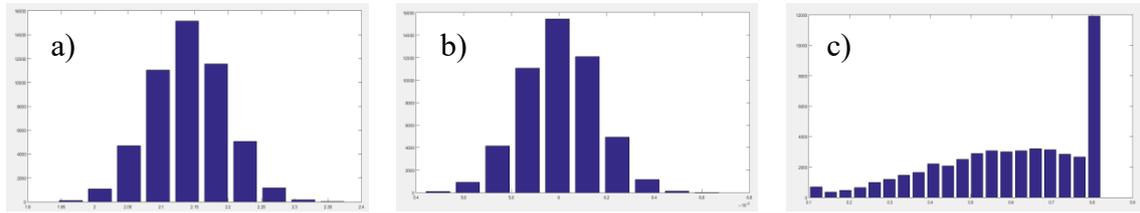


Figura 51. Histograma de las variables aleatorias que regulan el comportamiento de la estructura controlada por el sistema de control de masa inercial activa: a) frecuencia natural, f_f ; b) ratio de amortiguamiento, ζ_f ; y c) máxima aceleración de la estructura controlada, a_{max} .

Se muestra en la Figura 52 la respuesta (aceleraciones) de la estructura, a_f , tras la instalación del sistema de control de masa inercial activa considerando la variación de la frecuencia natural de la estructura, f_f . Como la Figura 52 muestra, tras la instalación del sistema de control la máxima aceleración de la estructura, a_f , es inferior al valor límite considerado, $a_{lim}=1.00 \text{ m/s}^2$.

Adicionalmente se muestra en la Figura 53 la fuerza motriz, f_a , ejercida por el actuador del sistema de control de masa inercial activa en función de la variación de la frecuencia natural de la estructura, f_f .

Finalmente, se presentan en la Tabla 4 un resumen de los parámetros de diseño del sistema de control de masa inercial activa tras la resolución del problema de optimización bajo las dos condiciones consideradas (deterministas y estocásticas).

Tabla 4. Parámetros del sistema de control de masa inercial activa en función de las condiciones de diseño (deterministas o estocásticas).

Condición	Activo	a_f [m/s ²]	β [-]	α_d [-]	β_d [-] 10 ⁻⁸	m_a [kg]	c_a [sNm]	k_a [N/m] 10 ⁵	f_a [N]
Determinista	No	6.10	---	---	---	---	---	---	---
Estocástica	No	---	-0.53	---	---	---	---	---	---
Determinista	Si	0.50	---	34.57	1.05	1145	3263	1.94	299
Estocástica	Si	1.00	1.50	511.30	344.19	625	1343	1.09	286

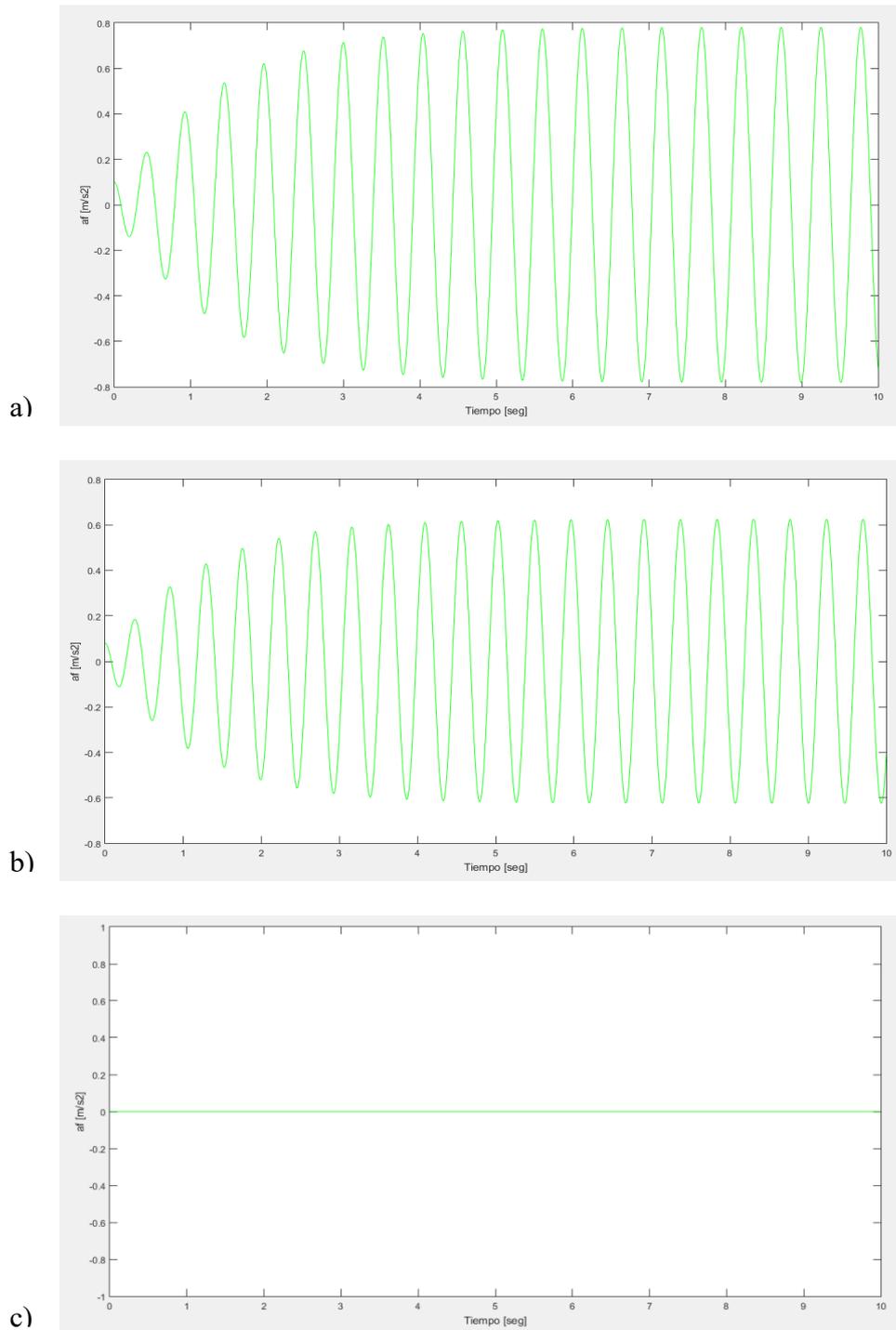


Figura 52. Respuesta de la estructura controlada (aceleraciones) con el sistema de control de masa inercial activa ante un tráfico peatonal de $1 P/m^2$ y condiciones estocásticas: a) frecuencia natural, $f_f = 1.92$ Hz; b) frecuencia natural, $f_f = 2.14$ Hz; y c) frecuencia natural, $f_f = 2.35$ Hz (en los tres casos se ha considerado una ratio de amortiguamiento media, $\zeta_f = 0.6$ %).

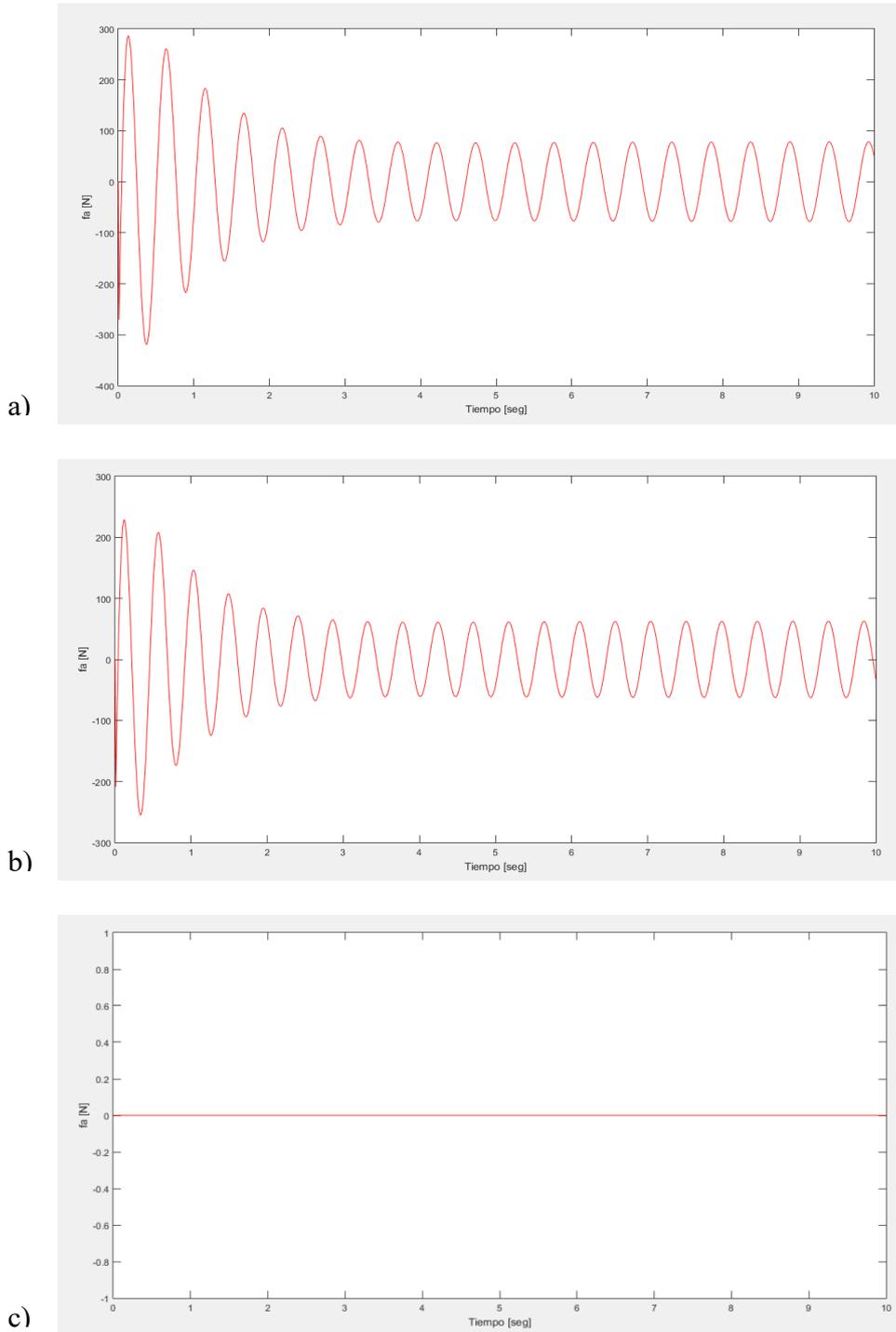


Figura 53. Fuerza motriz, f_a , ejercida por el actuador del sistema de masa inercial activa ante un tráfico peatonal de 1 P/m^2 y condiciones estocásticas: a) frecuencia natural, $f_f = 1.92 \text{ Hz}$; b) frecuencia natural, $f_f = 2.14 \text{ Hz}$; y c) frecuencia natural, $f_f = 2.35 \text{ Hz}$ (en los tres casos se ha considerado una ratio de amortiguamiento media, $\zeta_f = 0.6 \%$).

6.6. Discusión de Resultados.

Del análisis efectuado se pueden obtener los siguientes resultados:

- El sistema de amortiguamiento analizado, bajo sus tres comportamientos (pasivo, semi-activo y activo), permite garantizar el cumplimiento del estado límite de servicio de vibraciones de la estructura considerando tanto los dos condicionantes deterministas como los estocásticos).
- Del análisis de la forma de los frentes de Pareto se comprueba que en todos los casos existe una clara relación entre la masa inercial del amortiguador y el nivel de confort de la estructura. En todos los casos un aumento de la masa inercial lleva consigo un aumento del nivel de confort de la estructura.
- De los resultados obtenidos, se comprueba la importancia de incluir la incertidumbre de las propiedades modales de la estructura en el diseño del sistema de control. Los parámetros en condiciones deterministas para un nivel de confort alto son equivalentes a los obtenidos en condiciones estocásticas para un nivel de confort medio.
- El diseño de un sistema de amortiguamiento inteligente (semi-activo y activo) permite reducir claramente la masa inercial del amortiguador. En dicho sentido, se muestra especialmente efectivo, los amortiguadores de masa inercial semi-activa ya que reducen la masa inercial respecto a las soluciones pasivas y la fuerza motriz respecto de la solución activa. La única contrapartida de este método es la mayor deformación relativa entre el sistema de amortiguamiento y la estructura. No obstante, en el caso en estudio dicho aumento del desplazamiento relativo sigue siendo razonable dada la física del problema.

7. Conclusiones y Futuras Líneas de Investigación.

7.1. Conclusiones

En este trabajo se ha formulado el problema de diseño de los sistemas de control de estructuras de ingeniería civil a partir de un método basado en el movimiento. Según dicho método, el problema de diseño puede ser formulado como un problema de optimización multi-objetivo. El problema de diseño se ha formulado considerando dos tipos de comportamiento de la estructura: (i) determinista; y (ii) estocástico.

El planteamiento del problema de optimización es genérico para ambos casos, solo difiriendo en la naturaleza de unos de los términos de la función multi-objetivo. El trabajo se ha centrado en el diseño de amortiguadores de masa inercial por ser uno de los sistemas de control más utilizado para las estructuras de ingeniería civil. Se ha considerado que dichos amortiguadores de masa inercial pueden adoptar tres tipos de comportamiento: (i) pasivo; (ii) semi-activo; y (iii) activo. De esta forma, se ha abordado el problema de diseño de dicho sistema de control considerando los tres comportamientos y los dos condicionantes estructurales (deterministas o estocásticos). No obstante, el método es fácilmente aplicable para el diseño de cualquier tipo de sistema de control de estructuras de ingeniería civil.

Los sistemas de amortiguación basados en la masa inercial quedan configurados por cuatro parámetros básicos: (i) la masa inercial, (ii) la rigidez de los muelles de conexión; (iii) el coeficiente del amortiguador (en los casos pasivo y activo); y (iv) la fuerza del actuador (en los casos semi-activo y activo).

De esta forma, el problema de diseño del amortiguador de masa inercial se ha planteado a partir de un problema de optimización con dos objetivos. El primer término de la función objetivo se ha definido en función de la ratio entre la masa del sistema de amortiguamiento y la masa modal de la estructura; mientras que el segundo término se ha definido a partir de una ratio que garantiza que el nivel de vibraciones de la estructura no supera un umbral admisible por los usuarios de la misma. Dicho umbral se ha definido a partir de un valor fijo bajo la aproximación determinista y a partir de un índice de fiabilidad bajo la aproximación estocástica. Dicho índice de fiabilidad ha sido determinado a partir de un análisis de fiabilidad de la estructura donde se ha considerado que las variables que rigen el comportamiento de la estructura son variables aleatorias. El método de Monte Carlo se ha empleado para determinar el valor de dicho índice de fiabilidad. El cumplimiento de que el índice de fiabilidad de la estructura sea superior a un valor límite garantiza que la probabilidad de fallo del confort de los usuarios sea inferior a un valor especificado.

Tres variables de diseño han sido consideradas en la solución del problema de optimización: (i) la ratio entre la masa del sistema de amortiguación inercial y la masa modal de la estructura (en todos los casos); y (ii) la fuerza del actuador (en los casos semi-activo y activo) por medio de dos factores que regulan su valor en función del algoritmo de control seleccionado. El resto de los parámetros del sistema de masa inercial se han determinado mediante reglas analíticas que garantizan la sincronización entre la estructura y el sistema de control.

Se ha establecido un dominio de búsqueda de cada variable de diseño al objeto de garantizar el sentido físico de la solución obtenida.

El problema de diseño se ha planteado y resuelto mediante el empleo de algoritmos genéticos bajo una formulación multi-objetivo. Como resultado de la resolución de dicho problema de optimización, un frente de Pareto ha sido obtenido

Dicho frente de Pareto establece la relación entre la ratio de masa del amortiguador y la ratio que marca el cumplimiento del estado límite de servicio de vibraciones de la estructura. Para la resolución del problema de toma de decisión, seleccionar la mejor solución del frente de Pareto, una condición adicional ha sido incluida. Dicha condición se establece a partir del valor límite de la ratio asociada al estado límite de servicio de vibraciones de la estructura.

El rendimiento del algoritmo propuesto se ha probado sobre una pasarela peatonal metálica, utilizada por la normativa francesa para explicar la metodología actualmente propuesta para evaluar el confort en este tipo de estructuras.

Del análisis de los resultados de este caso en estudio, se puede obtener las siguientes conclusiones: (i) la metodología propuesta permite formular, implementar y resolver de forma general el problema de diseño de un sistema de control para mitigar las vibraciones en estructuras de ingeniería civil; (ii) una clara relación entre la masa inercial del amortiguador y el confort de la estructura; (iii) la importancia de considerar la incertidumbre en el diseño de este tipo de sistemas de amortiguación para controlar las vibraciones en estructuras de ingeniería civil; y (iv) para el caso práctico estudiado, la alternativa semi-activa se presenta especialmente interesante ya que permite reducir la masa inercial del amortiguador frente a la alternativa pasiva; y la fuerza del actuador frente a la alternativa activa.

A pesar de los resultados obtenidos, se estima que análisis adicionales deben realizarse para validar las conclusiones obtenidas: (i) estudiando el comportamiento de este tipo de amortiguadores en pasarelas de diferentes tipologías y materiales; y (ii) considerando otros algoritmos de optimización y control al objeto de mejorar el rendimiento de los sistemas de control diseñados.

7.2. Futuras Líneas de Investigación.

A partir del desarrollo de este trabajo y de los resultados obtenidos se pueden establecer las siguientes líneas de investigación:

- Aplicar la metodología propuesta a otros tipos de sistemas de control habitualmente empleados en estructuras de ingeniería civil, como por ejemplo los tendones activos.
- Realizar la simulación de la incertidumbre dentro del proceso de diseño utilizando otras herramientas matemáticas, como por ejemplo la lógica difusa.
- Analizar el rendimiento de diferentes algoritmos de control en el cálculo de la fuerza motriz.
- Analizar la influencia del valor de los meta-parámetros que regulan el comportamiento de los algoritmos computacionales empleados en la solución del problema.
- Analizar la influencia del algoritmo de optimización considerado en el proceso de diseño. En dicho sentido, un estudio comparativo entre el rendimiento de la solución obtenida mediante diferentes algoritmos computacionales basados en la naturaleza puede mejorar tanto la aplicación práctica del método como el propio diseño de los sistemas de control.

Agradecimientos

Este Trabajo Final de Master se ha desarrollado en el Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla. Dicho trabajo ha sido supervisado por el Catedrático de Universidad D. Francisco Guillen González. Agradezco profundamente a D. Francisco Guillen González por su apoyo constante durante el desarrollo de este trabajo. Esta investigación no habría sido posible sin sus oportunos consejos para la organización de las ideas que dan origen a este documento. Le agradezco en estas líneas su tiempo y esfuerzo para la consecución de este trabajo.

Adicionalmente, me gustaría con las siguientes líneas agradecer a todos aquellos que ha contribuido al desarrollo de este trabajo:

Al profesor D. Javier López Martínez de la Universidad de Almería por todo el material (libros y artículos científicos) que me facilitó para introducirme en el campo del control de sistemas dinámicos.

A los profesores D. Iván Muñoz Díaz y D. José Manuel Soria de la Universidad Politécnica de Madrid por su ayuda para comprender el funcionamiento de los sistemas de control semi-activos en estructuras de ingeniería civil.

Al estudiante de doctorado D. Jorge Pérez Aracil de la Universidad de Exeter (U.K.) por todo el material bibliográfico aportado para la redacción del presente trabajo.

Por último, pero no en menor medida, agradezco el apoyo de mi familia, en particular de Patricia, Claudia y Lorena, por su comprensión por el tiempo que no les puede dedicar durante el desarrollo de este trabajo; y de otros familiares y amigos que han contribuido a la consecución del mismo.

Referencias

- Andradre R, Rodellar Benedé J, López-Almansa F (1993). Control predictivo en sistemas de protección sísmica de Estructuras. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería.
- Ansys (2019) Mechanical Release <http://www.ansys.com/>
- Asami T, Nishihara O, Baz AM (2002). Analytical solutions to H_∞ and H_2 optimization of dynamic vibration absorbers attached to damped linear systems. *Journal of Vibration and Acoustics*; 124(2), 284-295. doi: <https://doi.org/10.1115/1.1456458>.
- Binder K, Heermann D (2010). Monte Carlo Simulation in Statistical Physics. An Introduction. Springer.
- Burns RS (2001). Advanced Control Engineering. Butterworth Heinemann.
- Butz, CH, Heinemeyer, CH, Goldack A, Keil A, Lukic M, Caetano E, Cunha A (2007). Advanced Load Models for Synchronous Pedestrian Excitation and Optimised Design Guidelines for Steel Footbridges (SYNPEX)". RFCS-Research Project RFS-CR-03019.
- Caetano E, Cunha A, Raoul J, Hoorpah W (2009). Footbridge Vibration Design, CRC Press Taylor and Francis Group, Leuden, The Netherlands.
- Chopra AK (2017). Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering, 5th Edition. Prentice-Hall International Edition.
- Connor, J. (2003). Introduction to Structural Motion Control, Prentice Hall.
- Deb K (2010). Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms. Wiley.
- Deb K, Pratap A, Agarwal S, Meyarivan T (2002). A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II. *Evolutionary Computation*; 6(2): 182–197. doi: <http://dx.doi.org/10.1109/4235.996017>.
- Dominguez S (2002). Control en el Espacio de Estado. Prentice Hall 2º Edición.
- EN 1990, (2002). Basis of structural design. European Committee for Standardization.
- Ferreira F, Moutinho C, Cunha A, Caetano E. (2019). Use of semi-active tuned mass dampers to control footbridges subjected to synchronous lateral excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 446: 176-194. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.01.026>.
- Gawtonski, WK (2004). Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures. Springer.
- Ghee CK, Perry MC (2010). Structural Identification and Damage Detection using Genetic Algorithms p. 140. CRC Press, Taylor and Francis Group, London.

- Hatch MR (2001). *Vibration Simulation Using Matlab and Ansys*. Chapman & Hall/CRC Press.
- Holický M (2009). *Reliability Analysis for Structural Design*. Sun Media Stellenbosch.
- Hu WH, Caetano E, Cunha A (2013). Structural health monitoring of a stress-ribbon footbridge. *Engineering Structures*, 57: 578-593. doi: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.06.051>
- ISO 2394 (2015). *General principles on reliability for structures*.
- Liang QQ (2007). Performance-Based Optimization: A review. *Advances in Structural Engineering*, 10(6): 739-753. doi: <https://doi.org/10.1260/136943307783571418>
- Lievens K, Lombaert G, De Roeck G, Van den Broeck P (2016) Robust design of a TMD for the vibration serviceability of a footbridge, *Engineering Structures*, 123, 408-418. doi: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.05.028>.
- Matlab (2019) R2019a. <http://www.mathworks.com/>.
- Moutinho C, Cunha A, Caetano E, de Carvalho JM (2018). Vibration control of a slender footbridge using a passive and a semi-active tuned mass damper. *Structural Control and Health Monitoring*, 25(9). doi: <https://doi.org/10.1002/stc.2208>.
- Nilanjan D, Amira SA, Siddhartha B (2020). *Applied Nature-Inspired Computing: Algorithms and Case Studies*. Springer Nature Singapore Pte Ltd.
- Nocedal J. Wright SJ (1999). *Numerical Optimization*, Springer, New York, United States.
- Ogata K (2006). *Ingeniería de Control Moderna (4º edición)*. Prentice Hall Inc.
- Preumont A (2011). *Vibration Control of Active Structures. An Introduction*. Springer Science+Business Media B.V.
- Setra (2006). *Guide méthodologique passerelles piétonnes (Technical Guide Footbridges: Assessment of vibration behaviour of footbridge under pedestrian loading)*.
- Soong, TT, Costantinou MC (1994). *Passive and active control structural vibration control in civil engineering*, Springer, State University of New York at Buffalo. Buffalo, United States.
- Soria JM, Díaz I, García-Palacios J. and Ibán N (2016). Vibration Monitoring of a Steel-Plated Stress-Ribbon Footbridge: Uncertainties in the Modal Estimation. *Journal of Bridge Engineering ASCE*, 21(8): C5015002. doi: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)BE.1943-5592.0000830](https://doi.org/10.1061/(ASCE)BE.1943-5592.0000830).

- Souza de Cursi E, Sampaio R (2015). Uncertainty Quantification and Stochastics Modeling with Matlab. ISTE Press Ltd.
- Srinivas N, Deb K (1994). Multi-objective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms. *Evolutionary Computation*; 2(3): 221–248. doi: <http://dx.doi.org/10.1162/evco.1994.2.3.221>
- Struve M (2008). Variational methods: applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Springer
- Van Nimmen K, Lombaert G, De Roeck G, Van den Broeck P (2014). Vibration serviceability of footbridges: Evaluation of the current codes of practice. *Engineering Structures*, 59: 448-461. doi: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.11.006>.
- Vega R (2010). Dynamics of Smart Structures. A John Wiley and Sons, Ltd., Publication.
- Wang X, Emiliano Pereira E, Díaz IM, García-Palacios JH (2018). Velocity feedback for controlling vertical vibrations of pedestrian-bridge crossing. Practical guidelines. *Smart Structures and Systems*, 22(1): 95-103. doi: <https://doi.org/10.12989/sss.2018.22.1.095>.
- Weber F, Feltrin G, Huth O (2006). Guidelines for Structural Control. Structural Engineering Research Laboratory. Swiss Federal Laboratories for Materials Testing Research. Dübendorf, Switzerland.
- Xu Z-D, Guo Y-Q, Zhu J-T, Xu F-H (2017). Intelligent Vibration Control in Civil Engineering Structures. Zhejiang University Press Co., Ltd.
- Yang JN, Akharpour A, Ghaemmaghami P (1987). New optimal control algorithm for structural control. *Journal of Engineering Mechanics*, 113(9): 1369-86. doi: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1987\)113:9\(1369\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1987)113:9(1369)).
- Zang C, Friswell MI, Mottershead JE (2005). A review of robust optimal design and its application in dynamics, *Computers&Structures*, 83, 315–326. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.10.007>.
- Zhang XC, Xu ZD (2012). Testing and modelling of a CLEMR damper and its application in structural vibration reduction. *Nonlinear Dynamics*, 70(2): 1575-1588. doi: <https://doi.org/10.1007/s11071-012-0557-1>.
- Zienkiewicz OC, Taylor RL (2013). The Finite Element Method. Butterworth-Heinemann (7th Edition).