FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Departamento de Análisis Matemático

OPERADORES UNIVERSALES
Y SUBESPACIOS INVARIANTES

Trabajo de fin de Máster para el Máster Universitario en Matemáticas.

Francisco Javier González Doña

Supervisado por los profesores:
Luis Rodríguez Piazza
Miguel Lacruz Martín

Índice general

Abstract

The Invariant Subspace Problem is one of the most studied problems on Operator Theory in the last decades. In fact, it is still open in the Hilbert space setting. The purpose of this work is to present the most classic results concerning this problem and to study the approach based on universal operators.

The text is organized as follows:

In the first chapter we introduce the theory Banach algebras, focusing on spectral theory and Gelfand transform, two tools that will be fundamental in the development of the text.

In the second chapter we provide a classical view of the invariant subspace problem in Hilbert spaces. We show two of the most important results on the existence of hyperinvariant subspaces: Lomonosov theorem and spectral theorem for normal operators. In the third chapter we study the tools to calculate invariant subspaces lattices for some classical operators, emphasizing on the need to use models to characterize these lattices.

In chapter four we introduce the universal operators and we prove that the characterization of the invariant subspaces lattice of the hyperbolic automorphism composition operator in H^2 would solve the invariant subspace problem. Finally, in chapter five we present the closest result to date: the characterization of the lattice of the parabolic non-automorphism composition operator in H^2.

Resumen

El Problema del Subespacio Invariante es uno de los problemas más estudiados en Teoría de Operadores en las últimas décadas. De hecho, sigue abierto para operadores definidos en espacios de Hilbert. El objetivo de este trabajo es presentar los resultados más clásicos en este problema y estudiar el enfoque basado en los operadores universales.

El trabajo está organizado como sigue:

En el primer capítulo, introducimos la teoría de álgebras de Banach, haciendo hincapié en la teoría espectral y en la transformada de Gelfand, dos herramientas que serán dos elementos fundamentales en el desarrollo del texto.

En el capítulo segundo proporcionamos una visión clásica del problema del subespacio invariante en espacios de Hilbert. Demostramos dos de los resultados más importantes de existencia de subespacios híperinvariantes: el teorema de Lomonosov y el teorema espectral para operadores normales. En el tercer capítulo, estudiamos las herramientas para calcular los retículos de subespacios invariantes de algunos operadores clásicos, enfatizando la necesidad del uso de modelos para caracterizar dichos retículos.

En el capítulo cuarto introducimos los operadores universales y probamos que la caracterización del retículo de subespacios invariantes del operador de composición hiperbólico automorfismo en H^2 resolvería el problema del subespacio invariante. Finalmente, en el quinto capítulo presentamos el resultado más cercano hasta la fecha: la caracterización del retículo del operador de composición parabólico no automorfismo en H^2.

Introducción

Denotaremos por X a un espacio de Banach complejo y por $\mathcal{B}(X)$ al espacio de los operadores lineales y acotados $T : X \to X$. Cuando X sea un espacio de Hilbert, lo denotaremos por H. Además, llamaremos **subespacio** a cualquier variedad lineal cerrada en X.
Antes de enunciar el problema del subespacio invariante, debemos introducir algunas definiciones. Llamamos **subespacio invariante** a cualquier subespacio $M \subseteq X$ tal que $T(M) \subseteq M$. Diremos además que es **no trivial** si $M \neq \{0\}, H$. El problema se enuncia como sigue:

¿Tiene todo operador $T \in \mathcal{B}(H)$ un subespacio invariante no trivial?

A pesar de su aparente sencillez, el problema del subespacio invariante lleva abierto desde que fue propuesto por John von Neumann en la década de los años 30.

Una Introducción Histórica al Problema del Subespacio Invariante

Presentamos ahora una exposición histórica documentada gracias a [24]. A principios de los años treinta, John von Neumann empezó a trabajar en lo que conocemos actualmente como el **problema del subespacio invariante**. Von Neumann se preguntaba si todo operador T lineal y acotado en un espacio de Banach complejo X tenía un subespacio invariante no trivial. Es decir, si para todo $T \in \mathcal{B}(X)$ existe M subespacio cerrado propio y de dimensión no nula tal que $T(M) \subset M$.
Antes de comentar el desarrollo histórico del problema, observemos que el problema es trivial si nuestro espacio de Banach X tiene dimensión finita o es no separable. Si X es de dimensión finita $n \in \mathbb{N}$ es isomorfo a $\mathbb{C}^n$. Así, todo operador $T \in \mathcal{B}(X)$ es semejante a una matriz cuadrada $n \times n$. Ahora, está claro por el teorema fundamental del álgebra que todas estas matrices tienen autovalores, y por tanto autovectores que generan subespacios invariantes no triviales.
En el caso en el que X es no separable, basta tomar $x \in X$ no nulo y considerar la órbita

de x por T. Es decir, el conjunto

$$\overline{\text{span}}\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}.$$

Obtenemos un subespacio cerrado, invariante y *propio*, ya que es separable y por tanto no puede coincidir con X.
Por tanto, podemos suponer que X es un espacio de Banach complejo y *separable*. El primer resultado parcial positivo del problema fue probado por Aronszajn y Smith en [2] en 1956, donde aseguraban que von Neumann les comunicó que probó la hipótesis para operadores compactos en espacios de Hilbert pero que nunca lo publicó. Los dos autores prueban en dicho artículo este resultado para operadores compactos en espacios de Banach. Diez años más tarde, Bernstein y Robinson consiguieron demostrar en [4] que todo operador polinomialmente compacto (aquellos operadores T tales que existe p polinomio con $p(T)$ compacto) tiene un subespacio invariante no trivial, pero su prueba incluía métodos de análisis no-estándar. Inmediatamente después, Halmos probaba el mismo resultado en [14] utilizando técnicas estándar.
Pocos años más tarde, en 1973, Victor Lomonosov probaba en [19] su famoso teorema sobre supespacios invariantes. Concretamente, Lomonosov demostraba que cualquier operador no escalar que conmute con un operador compacto no nulo tiene un subespacio híperinvariante (es decir, invariante para todos los operadores que conmutan con él). Con este resultado, probaba de una sola vez todos los resultados parciales que se habían obtenido hasta entonces y ampliaba de forma espectacular la clase de operadores con subespacios invariantes. Nosotros probaremos este resultado en su forma más general en el segundo capítulo.
El primer resultado negativo no se hizo esperar demasiado. En un seminario de Maurey-Schwarz en 1976, Per Enflo esbozó una idea para construir un operador en un espacio de Banach que no tuviera subespacios invariantes. Once años más tarde, Enflo publicó su resultado, demostrando que la hipótesis de von Neumann es falsa para espacios de Banach en general. Con respecto a la idea de su construcción, Enflo construyó un espacio de polinomios con una norma adecuada y encontró un operador de tipo 'shift' que no tenía subespacios invariantes. Podemos considerar que construyó un espacio de Banach *complicado* pero un operador *simple*. Por otro lado, basándose en las ideas que Enflo comunicó en su seminario, Read publicó dos años antes, en 1985, un ejemplo de un operador *complicado* sin subespacios invariantes en ℓ_1 en [26]. Desde entonces se han proporcionado muchos contraejemplos al problema, aunque siempre para operadores que **no** son adjuntos de ningún operador. Por tanto, la versión más general del problema que continúa abierto es la *conjetura de Lomonosov*:

Dado un espacio de Banach complejo X y $T \in \mathcal{B}(X)$, tiene T^* un subespacio invariante no trivial?

En consecuencia, el problema continúa abierto en espacios de Banach reflexivos y, en

concreto, en espacios de Hilbert. Es muy remarcable también el resultado de Argyros y Haydon en 2011 en [1] en el que construyen un espacio de Banach separable donde todo operador es suma de un operador compacto y un múltiplo escalar de la identidad, por tanto todo operador en este espacio tiene un subespacio invariante no trivial por una aplicación directa del teorema de Lomonosov.
El enfoque que tomaremos es el estudio del problema del subespacio invariante en espacios de Hilbert. Como el problema sigue abierto en espacios de Banach reflexivos, la mayor riqueza geométrica de los espacios de Hilbert proporciona herramientas más potentes para enfrentar al problema del subespacio invariante.

Enfoque del Problema

Es nuestro objetivo proporcionar una introducción completa al problema del subespacio invariante, y mostrar las técnicas desarrolladas en las últimas décadas relacionadas con los operadores universales. Exponemos a continuación las ideas y resultados principales que estudiaremos en cada capítulo.

En el capítulo 1, introducimos las nociones generales de álgebras de Banach, centrándonos especialmente en la teoría espectral y la transformada de Gelfand. Un **álgebra de Banach** es un espacio de Banach A con una multiplicación $(x, y) \mapsto xy$ que es continua en la topología de la norma. Es trivial probar que $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra de Banach para cualquier espacio de Banach X. Desde este enfoque abstracto obtendremos una gran cantidad de resultados para $\mathcal{B}(X)$ que también podremos aplicar para otras álgebras de Banach que manejaremos en el texto, como el álgebra de Sobolev $W^{1,2}[0, \infty)$.
Si A tiene unidad (es decir, existe $1 \in A$ tal que $a1 = 1a = a$) diremos que $a \in A$ es invertible si existe $b \in A$ con $ab = ba = 1$. Esto nos lleva a la definición de **espectro** de un elemento $a \in A$, que se define como

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \text{ no es invertible}\}.$$

El estudio del espectro de los operadores y sus propiedades es una herramienta completamente indispensable en el estudio de subespacios invariantes. Estudiaremos su descomposición para el caso particular de los operadores y veremos sus propiedades más importantes.
Finalmente, introduciremos el **espectro de** A y la transformada de Gelfand. Dada un álgebra conmutativa A definimos

$$\Omega(A) = \{\varkappa : A \to \mathbb{C} : \varkappa(ab) = \varkappa(a)\varkappa(b) \ \forall a, b \in A, \varkappa \neq 0\}.$$

Veremos que el espectro $\Omega(A)$ es un subconjunto de A^* que es localmente compacto y Hausdorff (T_2) con la topología débil*. Así, definiremos la **transformada de Gelfand** como

$$\begin{aligned} A &\to C_0(\Omega(A)) \\ a &\mapsto \hat{a}, \end{aligned}$$

donde $\hat{a}(\varkappa) = \varkappa(a)$. Esta aplicación definirá un homomorfismo de álgebras que nos permitirá entender cada elemento de un álgebra de Banach como una función continua definida sobre el espectro. Finalmente, utilizaremos la transformada de Gelfand para estudiar ciertas propiedades de los ideales maximales regulares de las álgebras conmutativas, que serán imprescindibles en el capítulo 5.

En el capítulo 2 comenzamos el estudio propiamente dicho del problema del subespacio invariante. Empezamos con la definiciones básicas necesarias para enunciar el problema, centrándonos principalmente en el **retículo** de subespacios invariantes de un operador $T \in \mathcal{B}(H)$, que se define como sigue:

$$\text{Lat } T = \{M \subseteq H : M \text{ es invariante por } T\}.$$

Veremos que podemos dotar a Lat T de una estructura de orden que efectivamente lo convierte en retículo. Este concepto es uno de los más importantes en este trabajo, pues los capítulos 3 y 5 están completamente dedicados a obtener caracterizaciones explícitas de los retículos de ciertos operadores.
A continuación, definimos el concepto de **semejanza**. Dos operadores $T \in \mathcal{B}(H_1), S \in \mathcal{B}(H_2)$ son semejantes si existe un isomorfismo $\Phi : H_1 \to H_2$ tal que

$$T = \Phi^{-1} S \Phi.$$

Veremos que establecer una semejanza entre dos operadores es muy útil para estudiar sus subespacios invariantes, pues podemos ponerlos en correspondencia biyectiva.
Finalizamos el capítulo presentando dos de los teoremas más importantes de existencia de subespacios híperinvariantes. Diremos que un subespacio M es híperinvariante por T si es invariante para todos los operadores S que conmutan con T. El teorema de Lomonosov ([19]) afirma lo siguiente:

Teorema de Lomonosov: *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in \mathcal{B}(X)$ un operador no escalar. Supongamos que T conmuta con un operador compacto no nulo $K \in \mathcal{B}(X)$. Entonces T tiene un subespacio híperinvariante.*

Como comentamos en la introducción histórica, este teorema nos proporciona una clase amplísima de operadores con subespacios invariantes y resuelve de un solo golpe una gran cantidad de problemas parciales. Nosotros presentaremos la prueba original basada en un argumento de punto fijo. También probaremos el siguiente teorema:

Teorema: *Sea H un espacio de Hilbert complejo y $T \in \mathcal{B}(H)$ un operador normal no escalar. Entonces T tiene un subespacio híperinvariante.*

Con este resultado ampliamos aún más el conjunto de operadores con subespacios invariantes. Para la demostración de este teorema nos valdremos del teorema espectral para operadores normales, que nos permitirá representar todo operador normal como una integral respecto a una medida espectral.

Una vez establecidas las nociones básicas del problema y probada la existencia de una amplia variedad de operadores con subespacios invariantes, en el capítulo 3 nuestro interés se dirige a a caracterizar los retículos de algunos operadores clásicos. Ante la imposibilidad de un cálculo directo, nuestra estrategia consistirá en encontrar un **modelo** para nuestro operador. Es decir, hallar un operador semejante en otro espacio de Hilbert cuyo retículo pueda caracterizarse más fácilmente, y así obtener el retículo del operador inicial.
Primero, estudiamos el retículo del operador **shift** en ℓ^2, definido como

$$S(a_1, a_2, a_3, \cdots) = (0, a_1, a_2, a_3, \cdots).$$

Este operador tiene una representación muy sencilla en el espacio de Hardy H^2, que es el espacio de funciones analíticas en el disco $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$ tales que $\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty$. Veremos que H^2 es un espacio de Hilbert y estudiaremos sus propiedades más básicas. Tendremos de forma trivial que S es unitariamente equivalente al operador de multiplicación $M_z \in \mathcal{B}(H^2)$, definido como $M_z f(z) = z f(z)$. Entonces, caracterizaremos el retículo de M_z. Para ello, introduciremos los productos de Blaschke y las funciones interiores, y probaremos el teorema de Beurling:

Teorema de Beurling: *Un subespacio cerrado Y de H^2 es invariante para M_z si y solo si existe ϕ función interior tal que $Y = \phi H^2$.*

Finalmente, estudiaremos algunas propiedades de orden del retículo de M_z estudiando las funciones interiores que caracterizan a los subespacios invariantes.
Acto seguido, caracterizamos el retículo del operador de Volterra $V \in \mathcal{B}(L^2(0,1))$, definido como

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

En este caso, el retículo de V vendrá dado por

$$\text{Lat } V = \{L^2(a,1) : a \in (0,1)\}.$$

El modelo que consideramos en este caso es algo más complejo. Si $\varphi(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$, $Y = (\varphi H^2)^\perp$ y P es la proyección ortogonal sobre Y, definimos $T = P \circ S_{|Y} \in \mathcal{B}(Y)$. Probaremos entonces que $W = (I - V)(I + V)^{-1}$ es semejante a T. Con ayuda de algunos resultados teóricos sobre cálculo funcional analítico, veremos que Lat W = Lat V, así que la caracterización del retículo de T nos dará el retículo de V. Finalmente, aplicaremos los resultados obtenidos para el shift para deducir el retículo de T.
Para finalizar este capítulo caracterizamos el retículo del álgebra de traslaciones en $L^2(\mathbb{R})$.

Es decir, caracterizamos los subespacios de $L^2(\mathbb{R})$ que son invariantes por todas las traslaciones $T_\alpha \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ definidas como

$$T_\alpha f(t) = f(t-\alpha)$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Para ello, nos valdremos de la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ y de la propiedad $\mathcal{F}T_\alpha = M_\alpha \mathcal{F}$, donde $M_\alpha f(t) = e^{-i\alpha t} f(t)$. Así, convertiremos nuestras traslaciones en operadores de multiplicación para probar que

$$\bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} \text{Lat } T_\alpha = \{\{f \in L^2(\mathbb{R}) : \mathcal{F}f = 0 \text{ en casi todo } E\} : E \text{ es medible Lebesgue}\}.$$

En el capítulo 4, presentamos el concepto de operador universal, introducido por Rota en [28]. Diremos que un operador $U \in \mathcal{B}(H)$ es **universal** si dado $T \in \mathcal{B}(H)$ existe $\lambda \in \mathbb{C}$ y $M \in \text{Lat } U$ de forma que λT es semejante a $U_{|M}$. Mostraremos el primer ejemplo dado por el propio Rota para probar la existencia de estos operadores. El interés de los operadores universales radica en el siguiente teorema:

Teorema: *Un operador universal $U \in \mathcal{B}(H)$ tiene todos sus subespacios invariantes minimales de dimensión 1 si y solo si todo operador $T \in \mathcal{B}(H)$ tiene un subespacio invariante no trivial.*

Es decir, la caracterización completa del retículo de cualquier operador universal resolvería el problema del subespacio invariante en espacios de Hilbert. Acto seguido, demostramos el teorema de Caradus ([6]), que afirma que todo operador sobreyectivo y con núcleo de dimensión infinita es universal, y probamos que la universalidad se conserva bajo semejanzas. Con estas herramientas, dedicamos el resto del capítulo a proporcionar un operador universal en H^2 ([22]):

Teorema: *Sea φ una transformación de Möbius hiperbólica automorfismo, sea $C_\varphi \in \mathcal{B}(H^2)$ el operador de composición que induce y $\lambda \in \sigma_p(C_\varphi)$. Entonces $C_\varphi - \lambda I$ es un operador universal.*

Inmediatamente deducimos que la caracterización del retículo de C_φ resolvería el problema del subespacio invariante.
Para poder comprender la definición de C_φ, introducimos el concepto de operador de composición. Dado $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ con $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ se define $C_\varphi : H^2 \to H^2$ como $C_\varphi f = f \circ \varphi$. Veremos que estos operadores son siempre acotados. Nosotros estamos interesados en los operadores de composición inducidos por las transformaciones de Möbius $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, donde $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Veremos entonces una clasificación completa de estas transformaciones en función de sus puntos fijos (parabólicas, hiperbólicas, elípticas y loxodrómicas) y daremos los modelos canónicos de cada uno de los tipos.
Finalmente, probaremos que $C_\varphi - \lambda I$ es universal estableciendo una semejanza con un

operador de multiplicación en H^2 y probando la universalidad de este gracias al teorema de Caradus.

Finalizaremos el texto presentando un resultado que nos puede ayudar a entender la estructura del retículo del operador universal anteriormente descrito. En el capítulo 5, cacaterizaremos el retículo de un operador de composición inducido por una transformación de Möbius, pero inducido por una transformación parabólica no automorfismo ([20]). Para ello, construiremos un isomorfismo de H^2 en el álgebra de Sobolev $W^{1,2}[0,\infty)$ y veremos que C_φ^* es semejante al operador de multiplicación M_ψ, donde ψ es un elemento cíclico en el álgebra $W^{1,2}[0,\infty)$ bajo este isomorfismo.
A continuación, gracias a las herramientas que introducimos en el capítulo 1 con la transformada de Gelfand, veremos que los subespacios invariantes de M_ψ vienen dados por la intersección de $\ker \varkappa$, donde $\varkappa \in \Omega(W^{1,2}[0,\infty))$. Así, caracterizando el espectro de $W^{1,2}[0,\infty)$, obtenemos que

$$\mathrm{Lat}\ C_\varphi = \{\overline{\mathrm{span}}\{e_t : t \in F\} : F \text{ es cerrado en } [0,\infty)\},$$

donde $e_t(z) = \exp\left(t\frac{z+1}{z-1}\right)$ son autofunciones de C_φ.
Finalizamos este capítulo mostrando una aplicación de la semejanza de C_φ^* y M_ψ. Utilizaremos este resultado para probar que el conmutante de C_φ es minimal ([17]), en el sentido de que coincide con la clausura en la topología débil de operadores del álgebra generada por C_φ.

Capítulo 1

Teoría Espectral

Este capítulo está basado en la presentación que puede encontrarse en [21], aunque añadiremos algunos elementos de [3] por completitud.

1.1. Álgebras de Banach

De ahora en adelante todos los espacios vectoriales que consideraremos serán complejos. Comenzamos exponiendo las definiciones básicas:

Definición 1.1.1. Un **álgebra** es un espacio vectorial A equipado con una aplicación bilineal

$$\begin{aligned} A \times A &\to A \\ (a, b) &\mapsto ab, \end{aligned}$$

que además es asociativa. Es decir,

$$(ab)c = a(bc), \quad \text{para todo } a, b, c \in A.$$

Llamaremos **multiplicación** a esta aplicación. Una **subálgebra** B es un subespacio vectorial B de A de forma que $bb' \in B$ para todo $b, b' \in B$.

Está claro que toda subálgebra es un álgebra con la multiplicación inducida. Es muy usual que las álgebras tengan definidas una norma. Introducimos ahora las definiciones sobre álgebras que involucran esta situación:

Definición 1.1.2. Una norma en un álgebra A se dice **submultiplicativa** si

$$\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\| \quad \text{para todo } a, b \in A.$$

En ese caso, diremos que el par $(A, \|\cdot\|)$ es un **álgebra normada**. Si además A admite una **unidad** 1, es decir, un elemento $1 \in A$ tal que $a1 = 1a = a$ para todo $a \in A$ y tal que $\|1\| = 1$, diremos que A es un **álgebra normada unitaria**.

Ya podemos presentar la definición de *álgebra de Banach*:

Definición 1.1.3. Un **álgebra de Banach** es un álgebra normada y completa. Si este álgebra tiene unidad lo llamaremos **álgebra de Banach unitaria**.

De nuevo, está claro que cualquier subálgebra de un álgebra normada es también un álgebra normada. Además, cualquier subálgebra *cerrada* en un álgebra de Banach es, a su vez, un álgebra de Banach.

Nota 1.1.4. Es importante remarcar que la multiplicación en un álgebra normada A es *compatible* con la topología inducida por la norma, en el sentido de que es una aplicación continua. Para probarlo, basta tomar $a, a', b, b' \in A$ y estudiar la siguiente desigualdad:

$$\|ab - a'b'\| = \|ab - a'b' + ab' - ab'\| \leq \|a\| \|b - b'\| + \|b'\| \|a - a'\| .$$

Es primordial proporcionar algunos ejemplos sobre álgebras de Banach para mostrar el interés de este concepto:

Ejemplos 1.1.5. (a) Si (Ω, μ) es un espacio de medida, entonces el conjunto de clases de funciones esencialmente acotadas $L^\infty(\Omega, \mu)$ equipada con la norma esencial $\|\cdot\|_\infty$ es un álgebra de Banach unitaria con la suma, producto por escalar y multiplicación puntual, donde la función constante 1 es la unidad.

(b) Si Ω es un espacio topológico de Hausdorff compacto, entonces el conjunto de funciones continuas complejas definidas sobre $C(\Omega)$ es una álgebra de Banach unitaria.

(c) Si X es un espacio normado y denotamos por $\mathcal{B}(X)$ al conjunto de endomorfismos acotados de X, entonces $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra unitaria con la suma y producto por escalar habituales, con la composición como multiplicación y el operador identidad como unidad. Si además X es completo, $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra de Banach. Por tanto, en particular $\mathcal{B}(H)$ es un álgebra de Banach unitaria, que será principalmente el álgebra que estudiemos en este trabajo.

Merece la pena resaltar que en los ejemplos (a) y (b) las dos álgebras presentadas son *conmutativas*, cuando el álgebra $\mathcal{B}(X)$ no es conmutativa en general.

Consideremos ahora un álgebra A, y sea $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de subálgebras de A. Es rutinario comprobar que

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$$

es también una subálgebra. Por tanto, dado cualquier subconjunto S de A, existe la mínima subálgebra B que contiene a S, que es la intersección de todas las subálgebras que contienen a S, que denominaremos **subálgebra generada por** S. Si S es un subconjunto unitario $\{a\}$, entonces B es el subespacio engendrado por todas las potencias a^n, $n \in \mathbb{N}$. Además, si A es un álgebra normada, el **subálgebra cerrada generada por** S es la mínima subálgebra cerrada que contiene a S, que coincide con $\overline{B}$.

Definición 1.1.6. Un **homomorfismo** de un álgebra A a un álgebra B es una aplicación lineal

$$\varphi : A \to B$$

tal que $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ para todo $a, b \in A$. Diremos que φ es **unitario** si $\varphi(1) = 1$.

1.2. Teoría Espectral Elemental

Denotemos por $\mathbb{C}[z]$ al álgebra de todos los polinomios con coeficientes complejos en la indeterminada z. Si $p \in \mathbb{C}[z]$ es el polinomio

$$p(z) = \lambda_0 + \lambda_1 z + \cdots + \lambda_n z^n$$

entonces definimos

$$p(a) = \lambda_0 1 + \lambda_1 a + \cdots + \lambda_n a^n$$

para todo $a \in A$.

Proposición 1.2.1. *Dada un álgebra A y $a \in A$, la aplicación*

$$\begin{aligned} \varphi : &\mathbb{C}[z] \to A \\ &p \to p(a) \end{aligned}$$

es un homomorfismo unitario.

Demostración.
Está claro que φ es homomorfismo. Basta entonces notar que la unidad en $\mathbb{C}[z]$ es el polinomio constante $p(z) = 1$, entonces está claro que $p(1) = 1$. $\square$

Definición 1.2.2. Dada un álgebra A, diremos que $a \in A$ es **invertible** si existe $b \in A$ tal que $ab = ba = 1$. En este caso, b es único y lo denotamos por a^{-1}.

Denotaremos

$$\text{Inv } A = \{a \in A : a \text{ es invertible}\}.$$

Es trivial ver que Inv A es un grupo multiplicativo.

Definición 1.2.3. Dado un álgebra A y $a \in A$, definimos su **espectro** $\sigma(a)$ como

$$\sigma_A(a) = \sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \notin \text{Inv } A\}.$$

Llamaremos **conjunto resolvente** a $\rho(a) := \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$. A partir de ahora y cuando no haya lugar a confusión, escribiremos λ en lugar de $\lambda 1$.

Veamos un par de ejemplos de cálculo de espectro:

Ejemplos 1.2.4. (a) Consideremos Ω un espacio topológico de Hausdorff compacto, y sea $f \in C(\Omega)$. Tenemos que $f - \lambda$ no será invertible si se anula en algún punto, es decir, si $\lambda \in f(\Omega)$. Por tanto, se tiene que $\sigma(f) = f(\Omega)$.

(b) Consideremos ahora $M_n(\mathbb{C})$, el espacio de matrices cuadradas de dimensión n con coeficientes complejos. Está claro que este espacio conforma un álgebra unitaria no conmutitativa con la suma, producto por escalar y multiplicación usuales y con la matriz identidad como unidad.
Dada $A \in M_n(\mathbb{C})$ es bien conocido que $A - \lambda I$ es no invertible si y solo si λ es un autovalor de A. Por tanto, $\sigma(A)$ es el conjunto de autovalores de A.

Podemos entender por tanto el espectro de un elemento a de un álgebra como una generalización del concepto de autovalor de una matriz cuadrada o de rango de una función continua.
En el caso del álgebra de Banach $\mathcal{B}(X)$ donde X es un espacio de Banach, se suele descomponer el espectro en subconjuntos más pequeños que muestran la causa de la no invertibilidad del operador $T - \lambda I$. Nosotros presentamos aquí los casos que serán interesantes en este trabajo, aunque obviamente no es una descripción exhaustiva de la descomposición total del espectro.

Definición 1.2.5. Se llama **espectro puntual** del operador $T \in \mathcal{B}(X)$ al conjunto de autovalores de T y lo denotamos por $\sigma_p(T)$.

Observemos que todo autovalor está en el espectro, ya que $T - \lambda I$ no será un operador inyectivo y por tanto, no será invertible.

Definición 1.2.6. Se llama **espectro puntual aproximado** al conjunto de $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $T - \lambda I$ no está acotado inferiormente. Es decir, al conjunto de $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que no existe $C > 0$ tal que $\|Tx - \lambda x\| \geq C\|x\|$. Denotamos a este conjunto por $\sigma_{ap}(T)$.

De nuevo, está claro que $\sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$, ya que la acotación inferior es una condición necesaria para la invertibilidad de cualquier operador definido entre espacios de Banach.

Definición 1.2.7. Dado un operador $T \in \mathcal{B}(H)$ se llama **espectro de compresión** y lo denotamos por $\Gamma(T)$ al conjunto de $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que el rango de $T - \lambda I$ **no** es denso.

Estos dos últimos subconjuntos del espectro cubren completamente al espectro:

Proposición 1.2.8. *Si* $T \in \mathcal{B}(X)$, *entonces* $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \Gamma(T)$.

Demostración.
Veamos que si $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$ y $\lambda \notin \Gamma(T)$ entonces $\lambda \notin \sigma(T)$. Observemos que si $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$ entonces $T - \lambda I$ está acotado inferiormente. Es decir, existe $C > 0$ de forma que

$\|(T-\lambda I)x\| \geq C\|x\|$ para todo $x \in X$. Veamos que $\mathrm{Im}(T-\lambda I)$ es cerrado. Para ello, sea $((T-\lambda I)x_n)_n$ sucesión en $\mathrm{Im}(T-\lambda I)$ convergiendo a $y \in X$. Veamos que (x_n) es una sucesión convergente. Su límite $x \in X$ cumplirá que $(T-\lambda I)x = y$, lo que probará lo que queremos. Para ello, basta ver que es de Cauchy, ya que

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{C}\|(T-\lambda I)(x_n - x_m)\| = \|(T-\lambda I)x_n - (T-\lambda I)x_m\|.$$

Como $((T-\lambda I)x_n)$ es convergente es de Cauchy, y por tanto también (x_n), como queríamos. Así, $\mathrm{Im}(T-\lambda I)$ es cerrado. Además, sabemos que es denso, ya que $\lambda \notin \Gamma(T)$. Por tanto, $T-\lambda I$ es sobreyectivo. Además, como está acotado inferiormente se tiene que es inyectivo y por tanto invertible. Así, $\lambda \notin \sigma(T)$. □

Proposición 1.2.9. *Si $T \in \mathcal{B}(X)$, entonces $\partial\sigma(T) \subset \sigma_{ap}(T)$.*

Demostración.
Primero, como $\sigma(T)$ es cerrado, se tiene que $\partial\sigma(T) = \sigma(T) \cap \overline{\rho(T)}$. Supongamos que $\lambda \in \partial\sigma(T)$ y $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$. Tomemos $(\lambda_n) \subset \rho(T)$ convergiendo a λ. Veamos que existen $k, N \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq N$ entonces $\|(T-\lambda_n)x\| \geq (1/k)\|x\|$ para todo $x \in X$. Razonamos por reducción al absurdo. Para todo $m, N \in \mathbb{N}$ existe $n \geq N$ y un vector x_m de norma 1 con $\|(T-\lambda)x_m\| \leq \|(A-\lambda_n)x_m\| + \|(\lambda-\lambda_n)x_m\| \leq \frac{1}{m} + |\lambda - \lambda_n|$, lo que implica que $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, que es contradicción. Por tanto, existen dichos $k, N \in \mathbb{N}$.
Vamos a probar que $\lambda \notin \Gamma(A)$. Este hecho, junto con el resultado anterior, probará lo que queremos. Dado $x \in X$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in X$ de forma que $(T-\lambda_n)y_n = x$. Como $\|(T-\lambda_n)y_n\| \geq (1/k)\|y_n\|$, se deduce que $\|y_n\| \leq k\|x\|$ para $n \geq N$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\|(T-\lambda)y_n - x\| &\leq \|(T-\lambda_n)y_n - x\| + \|(\lambda_n-\lambda)y_n\| = 0 + |\lambda_n - \lambda|\,\|y_n\| \\ &\leq k\|x\|\,|\lambda_n - \lambda|.\end{aligned}$$

Si $n \to \infty$ entonces $k\|x\|\,|\lambda_n - \lambda| \to 0$, lo que implica que $\lambda \notin \Gamma(T)$, como queríamos.
□

Será también útil hablar del *espectro total*:

Definición 1.2.10. Llamamos **espectro total** de un operador $T \in \mathcal{B}(X)$ y lo denotamos por $\eta(\sigma(T))$ a la unión de $\sigma(T)$ con las componentes conexas acotadas de $\rho(T)$. Es decir, $\eta(\sigma(T))$ es el menor conjunto simplemente conexo que contiene a $\sigma(T)$.

Nota 1.2.11. Si A es un álgebra unitaria y $a, b \in A$, entonces $1-ab$ es invertible si y solo si lo es $1-ba$, ya que si $1-ab$ tiene inversa c, entonces $1-ba$ tiene inversa $1+bca$. Como consecuencia se deduce que $\sigma_A(ab) \setminus \{0\} = \sigma_A(ba) \setminus \{0\}$.

Veamos ahora algunos de los resultados más importantes y conocidos de la teoría espectral:

Teorema 1.2.12. *[Teorema de la Aplicación Espectral] Sea A un álgebra unitaria, y sea $a \in A$. Si $\sigma(a)$ es no vacío y $p \in \mathbb{C}[z]$, entonces*

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Demostración.
Si $p = \alpha$ constante, entonces está claro que $\sigma(p(a)) = \alpha = p(\sigma(a))$, así que podemos suponer que p es no constante. Tomemos $\mu \in \mathbb{C}$. Está claro que

$$p(z) - \mu = \lambda(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_n),$$

así que

$$p(a) - \mu = \lambda(a - \lambda_1) \cdots (a - \lambda_n).$$

Está claro que $p(a) - \mu$ es invertible si y solo si $(a - \lambda_k)$ lo son para todo $k = 1, ..., n$. Por tanto, se tiene que $\mu \in \sigma(p(a))$ si y solo si $\mu = p(\lambda)$ para algún $\lambda \in \sigma(a)$, así que $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$, como queríamos probar. □

Teorema 1.2.13. *Sea A un álgebra de Banach unitaria y sea $a \in A$ tal que $\|a\| < 1$. Entonces $(1 - a) \in Inv\ A$ y*

$$(1 - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n.$$

Demostración.
Tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n = \frac{1}{1 - \|a\|} < \infty,$$

por lo que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ es absolutamente convergente y, por tanto, convergente, ya que A es completo. Llamemos $b = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$. Ahora, observemos que

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right)(1 - a) = (1 - a)\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 - a^{n+1}$$

y si tomamos límite cuando $n \to \infty$ en la triple igualdad obtenemos que $(1 - a)b = b(1 - a) = 1$, como queríamos. □

Teorema 1.2.14. *Si A es un álgebra de Banach unitaria, entonces $Inv\ A$ es abierto en A y la aplicación*

$$\begin{aligned} \varphi :\ & Inv\ A \to A \\ & a \mapsto a^{-1} \end{aligned}$$

es diferenciable en el sentido de Fréchet.

Demostración.
Sea $a \in \text{Inv } A$ y sea $b \in A$ de forma que $\|b - a\| < \left\|a^{-1}\right\|^{-1}$. Entonces $\left\|ba^{-1} - 1\right\| \leq \|b - a\| \left\|a^{-1}\right\| < 1$, así que por el teorema anterior $ba^{-1} \in \text{Inv } A$ y por tanto $b \in \text{Inv } A$.
Para ver la diferenciabilidad, tomemos $b \in A$ tal que $\|b\| < 1$. Entonces $(1 + b) \in \text{Inv } A$ y

$$\begin{aligned} \|(1 + b)^{-1} - 1 + b\| &= \|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b^n - 1 + b\| = \|\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n b^n\| \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \|b\|^n = \frac{\|b\|^2}{1 - \|b\|}. \end{aligned}$$

Tomemos ahora $a \in \text{Inv } A$ y elijamos $c \in A$ de forma que $\|c\| < \frac{1}{2\|a^{-1}\|}$. Entonces está claro que $\left\|a^{-1}c\right\| < 1/2 < 1$, así que escribiendo $b = a^{-1}c$ tenemos

$$\left\|(1 - a^{-1}c)^{-1} - 1 + a^{-1}c\right\| \leq \left\|a^{-1}c\right\|^2 /(1 - \left\|a^{-1}c\right\|) \leq 2\left\|a^{-1}c\right\|^2,$$

ya que $1 - \left\|a^{-1}c\right\| > 1/2$. Ahora definimos el operador $U : A \to A$ como $U(b) = a^{-1}ba^{-1}$.
Entonces

$$\begin{aligned} &\left\|(a + c)^{-1} - a^{-1} - U(c)\right\| = \left\|(1 + a^{-1}c)^{-1}a^{-1} - a^{-1} + a^{-1}ca^{-1}\right\| \\ &\leq \left\|(1 + a^{-1}c)^{-1} - 1 + a^{-1}c\right\| \left\|a^{-1}\right\| \leq 2\left(\left\|a^{-1}\right\|^3 \|c\|^2\right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{c \to 0} \frac{\|(a + c)^{-1} - a^{-1} - U(c)\|}{\|c\|} = 0,$$

lo que prueba que φ es diferenciable con derivada $D\varphi(a) = U$. □

Lema 1.2.15. *Sea A un álgebra de Banach unitaria y sea $a \in A$. El espectro $\sigma(a)$ de a es un subconjunto cerrado del disco cerrado de centro el origen y radio $\|a\|$, y además la aplicación*

$$\begin{aligned} \varphi : \rho(a) &\to A \\ \lambda &\mapsto (a - \lambda)^{-1} \end{aligned}$$

es diferenciable (en el sentido de Fréchet).

Demostración.
Comencemos observando que la diferenciabilidad de φ se sigue inmediatamente del teorema (1.2.14). Si $\lambda > \|a\|$, entonces $\left\|\lambda^{-1}a\right\| < 1$ y $(1 - \lambda^{-1}a)$ es invertible, y por tanto, también lo es $\lambda - a$. Por tanto, $\lambda \in \rho(a)$, lo que prueba que si $\lambda \in \sigma(a)$, entonces $|\lambda| \leq \|a\|$.

Finalmente, para ver que el espectro $\sigma(a)$ es cerrado basta probar que $\rho(a)$ es abierto. Para ello, observemos que $\rho(a) = \varphi^{-1}(\text{Inv } A)$. Como Inv A es un conjunto abierto y φ es diferenciable por ser continua, se sigue el resultado. $\square$

El siguiente resultado puede entenderse como una generalización del teorema fundamental del álgebra para álgebras de Banach.

Teorema 1.2.16 (Teorema de Gelfand)**.** *Sea A un álgebra de Banach unitaria y sea $a \in A$. Entonces, el espectro $\sigma(a)$ es no vacío.*

Demostración.
Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que $\sigma(a) = \emptyset$. Si $|\lambda| > 2\,\|a\|$, entonces $\|\lambda^{-1}a\| < \frac{1}{2}$ y por tanto, $1 - \|\lambda^{-1}a\| > \frac{1}{2}$. Así,

$$\begin{aligned}\|(1-\lambda^{-1}a)^{-1} - 1\| &= \|\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda^{-1}a)^n\| \leq \frac{\|\lambda^{-1}a\|}{1-\|\lambda^{-1}a\|} \\ &\leq 2\left\|\lambda^{-1}a\right\| < 1.\end{aligned}$$

En consecuencia, $\|(1-\lambda^{-1}a)^{-1}\| \leq \|(1-\lambda^{-1}a)^{-1} - 1\| + \|1\| < 2$, y por tanto

$$\left\|(a-\lambda)^{-1}\right\| = \left\|\lambda^{-1}(1-\lambda^{-1}a)^{-1}\right\| < 2/|\lambda| < \|a\|^{-1},$$

ya que $a \neq 0$ porque $\sigma(a) = \emptyset$. Es más, como la aplicación $\lambda \mapsto (a-\lambda)^{-1}$ es continua, está acotada en el compacto $2\,\|a\|\,\overline{\mathbb{D}}$. Por tanto, hemos probado que esta aplicación está acotada en todo el plano complejo; es decir, existe $M > 0$ de forma que $\|(a-\lambda)^{-1}\| \leq M$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.
Si $\tau \in A^*$(donde A^* denota el dual de A), la aplicación $\lambda \mapsto \tau((a-\lambda)^{-1})$ es entera y acotada por $M\,\|\tau\|$, así que gracias al teorema de Liouville, es constante. En particular, $\tau(a^{-1}) = \tau((a-1)^{-1})$. Como esto es cierto para todo $\tau \in A^*$, deducimos que $a = a - 1$, lo cual es una contradicción. $\square$

Teorema 1.2.17 (Teorema de Gelfand-Mazur)**.** *Si A es un álgebra de Banach unitaria donde todo elemento no nulo es invertible, entonces $A = 1\mathbb{C}$. Es decir, A es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$.*

Demostración.
Definimos $\theta : \mathbb{C} \to A$ con $\theta(\lambda) = \lambda 1$. Claramente, θ un isomorfismo de $\mathbb{C}$ en la subálgebra $\mathbb{C}1$. Vamos a probar que θ es sobreyectivo en A, lo que terminará la prueba. Dado $a \in A$, tenemos por el teorema de Gelfand que existe $\lambda \in \sigma(a)$ de forma que $a - \lambda$ no es invertible, así que $x - \lambda = 0$ por hipótesis. Esto prueba que $a = \theta(\lambda)$, como queríamos. $\square$

Definición 1.2.18. Si A es un álgebra de Banach unitaria y $a \in A$, definimos su **radio espectral** como

$$r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

Está claro por la nota 1.2.11 que $r(ab) = r(ba)$ para todo $a, b \in A$.
El siguiente teorema nos proporciona una sencilla fórmula para calcular el radio espectral de cualquier elemento de un álgebra de Banach unitaria:

Teorema 1.2.19 (Teorema de Beurling). *Sea A un álgebra de Banach unitaria y $a \in A$. Entonces*

$$r(a) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Demostración.
Sea $\lambda \in \sigma(a)$. Entonces, por el teorema de la aplicación espectral 1.2.12, se tiene que $\lambda^n \in \sigma(a^n)$. Por tanto, tenemos que $|\lambda|^n \leq \|a^n\|$ y se sigue que

$$|\lambda| \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{1/n} \leq \liminf_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Veamos que efectivamente el límite existe y que se tiene la igualdad. Para ello, llamamos Δ al disco abierto en $\mathbb{C}$ centrado en 0 y con radio $1/r(a)$ (tomamos el convenio $1/0 = \infty$.) Si tomamos $\lambda \in \Delta$, entonces $1 - \lambda a \in \mathrm{Inv}\ A$. Si $\tau \in A^*$, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} f : \Delta &\to \mathbb{C} \\ \lambda &\mapsto \tau((1-\lambda a)^{-1}) \end{aligned}$$

es analítica, así que existe una sucesión de números complejos $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de forma que

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \lambda^n$$

para todo $\lambda \in \Delta$. Además, si $|\lambda| \leq 1/\|a\|$, como $\|a\| \geq r(a)$, se sigue que $|\lambda| < 1/r(a)$ y por tanto $\|\lambda a\| < 1$, así que

$$(1-\lambda a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n,$$

y por tanto

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \tau(a^n).$$

Ahora, por la unicidad de coeficientes de series de potencias, se sigue que $\lambda_n = \tau(a^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, la sucesión $\lambda^n\tau(a^n)$ converge a 0 para cada $\lambda \in \Delta$, y en concreto la sucesión está acotada. Como esto es cierto para todo $\tau \in A^*$, se tiene por el principio de acotación uniforme que la sucesión $(\lambda^n a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada. Por tanto, existe una constante $M > 0$ que depende de λ tal que $\|\lambda^n a^n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, en consecuencia, $\|a^n\|^{1/n} \leq M^{1/n}/|\lambda|$ si $\lambda \neq 0$. Por tanto, $\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} \leq 1/|\lambda|$ para todo $\lambda \in \Delta$ tal que $r(a) < 1/|\lambda|$. Por tanto, deducimos que

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} \leq r(a),$$

y recordando que $r(a) \leq \liminf_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$, se sigue que

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n},$$

como queríamos probar. □

Vamos a finalizar esta sección estudiando cómo podemos añadir una unidad a un álgebra no unitaria. Aunque es una herramienta muy útil, esto no reduce la teoría de las álgebras a las unitarias, ya que puede haber casos en el que esta unidad añadida sea demasiado artificiosa.
Tomemos un álgebra A y tomemos

$$\hat{A} = A \oplus \mathbb{C}$$

como espacio vectorial. Ahora, definimos la multiplicación en $\hat{A}$ como

$$(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu).$$

Esta multiplicación está bien definida y convierte a $\hat{A}$ en un álgebra **unitaria**, donde $(0, 1)$ es la unidad. Llamaremos al álgebra $\hat{A}$ **unitización de** A. La aplicación

$$\begin{aligned} A &\to \hat{A} \\ a &\mapsto (a, 0) \end{aligned}$$

es un homomorfismo claramente inyectivo, que usaremos para identificar A como un ideal de $\hat{A}$.
A partir de ahora, escribiremos $(a, \lambda) \in \hat{A}$ como $a + \lambda$ cuando no haya lugar a confusión. La aplicación

$$\begin{aligned} \hat{A} &\to \mathbb{C} \\ a + \lambda &\mapsto \lambda \end{aligned}$$

es un homomorfismo unitario con núcleo A, y lo llamaremos **homomorfismo canónico**.
Es fácil ver que si A es abeliana, entonces $\hat{A}$ también lo es.
Si A es un álgebra normada, $\hat{A}$ también lo será con la norma

$$\|a + \lambda\| = \|a\| + |\lambda|.$$

Observemos que si A es álgebra de Banach, entonces también lo es $\hat{A}$. Además, A es una subálgebra cerrada de $\hat{A}$. Finalmente, si A es un álgebra no-unitaria, definimos para $a \in A$ $\sigma_A(a) = \sigma_{\hat{A}}(a)$ y $r(a) = \sup_{\lambda\in\sigma(a)} |\lambda|$.

1.3. La Representación de Gelfand

En esta sección vamos a desarrollar las ideas básicas sobre *ideales* en un álgebra de Banach, y vamos a estudiar las ideas necesarias para introducir la **transformada de Gelfand**, una herramienta muy potente que nos permitirá representar cualquier álgebra de Banach conmutativa como un álgebra de funciones continuas sobre un espacio de Hausdorff localmente compacto.

Definición 1.3.1. Un **ideal por la derecha** (respectivamente, **por la izquierda**) en un álgebra A es un subespacio vectorial I de forma que $ab \in I$, para todo $a \in A, b \in I$ (respectivamente, $ba \in I$.) Un **ideal** en A es un subespacio vectorial que es simultáneamente ideal por la derecha y por la izquierda.

Obviamente, $\{0\}$ y A son ideales, que llamaremos ideales triviales de A.

Definición 1.3.2. Diremos que un ideal propio I es **maximal** si no está contenido en otro ideal propio de A. Los ideales maximales por la derecha se definen de manera equivalente.

Por las características de los ideales, son los conjuntos idóneos para construir espacios cociente, ya que la propiedad de 'absorción' de la multiplicación es indispensable para que las operaciones estén bien definidas.

Proposición 1.3.3. *Sea I un ideal en el álgebra A. Entonces A/I es un álgebra con la multiplicación*

$$(a + I)(b + I) = ab + I \qquad (a, b \in A).$$

Demostración.
Está claro que A/I es un espacio vectorial con las operaciones habituales de cociente de espacios vectoriales. Además, como A es un anillo con la suma y la multiplicación, se sigue que la multiplicación en A/I está bien definida. Esto prueba que A/I es un álgebra. □

Será importante en el desarrollo de este trabajo el concepto de *ideal regular*:

Definición 1.3.4. Un ideal I de un álgebra A es **regular** si A/I es un álgebra unitaria.

Proposición 1.3.5. *Un ideal I es regular si y solo si existe $u \in A$ de forma que $a - au$ y $a - ua$ pertenecen a I para todo $a \in A$.*

Demostración.
Supongamos que A/I es unitario, sea $u+I$ la unidad. Entonces, se tiene que $(a-au)+I = (a + I) - (a + I)(u + I) = 0 + I$, por lo que $a - au \in I$. De la misma forma se prueba que $a - ua \in I$. Recíprocamente, si $u \in A$ es tal que $a - au$ y $a - ua$ pertenecen a I, se comprueba de la misma forma que $u + I$ es unidad en A/I. □

Puede probarse usando el lema de Zorn que todo ideal regular está contenido en un ideal

maximal. Este resultado puede encontrarse en [15], Corolario 2.6. Por tanto, si A es unitario, está claro que todas las álgebras A/I son unitarias y por tanto todos sus ideales regulares, así que todas las álgebras unitarias tienen ideales maximales.
Consideremos ahora un álgebra A y $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de ideales de A. Como en el caso de las subálgebras que ya estudiamos, se tiene que

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$$

constituye también un ideal. Por tanto, dado cualquier subconjunto $S \subset A$, existe el mínimo ideal I conteniendo a S, dado por la intersección de todos los ideales que contienen a S. Llamaremos a este ideal el **ideal generado por S**.
Consideremos ahora A un álgebra normada. Es trivial comprobar que dado cualquier ideal I, su clausura $\overline{I}$ es también un ideal. Dado cualquier subconjunto S, existe el mínimo ideal cerrado conteniendo a S, que viene dado por la clausura del ideal generado por S.

Proposición 1.3.6. *Sea A un álgebra normada y sea I un ideal. Entonces A/I es un álgebra normada con la norma dada por*

$$\|a + I\| = \inf_{b\in I} \|a - b\|.$$

Demostración.
Está claro que es una norma para A/I, ya que es la norma definida en el espacio vectorial cociente, Falta ver que es submultiplicativa. Tomemos $\varepsilon > 0$ y sean $a, b \in A$. Entonces existen $a', b' \in I$ de forma que $\|a + I\| + \varepsilon > \|a + a'\|$, $\|b + I\| + \varepsilon > \|b + b'\|$. Por tanto, si tomamos $c = a'b + ab' + a'b' \in I$ se tiene

$$(\|a + I\| + \varepsilon)(\|b + I\| + \varepsilon) > \|a + a'\| \|b + b'\| \geq \|ab + c\|.$$

Entonces $(\|a + I\| + \varepsilon)(\|b + I\| + \varepsilon) \geq \|ab + I\|$. Finalmente, tomando $\varepsilon \to 0$, se sigue que

$$\|a + I\| \|b + I\| \geq \|ab + I\|,$$

es decir, la norma es submultiplicativa, como queríamos. □

Antes de continuar estudiando propiedades, vamos a ver un sencillo ejemplo de ideal. Tomemos A y B dos álgebras y sea $\varphi : A \to B$ un homomorfismo. Entonces $\ker\varphi$ es claramente un ideal, ya que dado $a \in \ker\varphi$, $b \in A$ se tiene que $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = 0$, así que $ab \in I$. El manejo de los núcleos de homomorfismos como ideales serán una herramienta importante en algunas secciones de este trabajo.

Teorema 1.3.7. *Sea I un ideal regular en un álgebra de Banach A. Si I es propio, también lo es $\overline{I}$. Si además I es maximal, I es cerrado.*

Demostración.
Como I es regular, entonces existe $u \in A$ tal que $a - au, a - ua \in I$ para todo $a \in A$. Ahora, si $b \in I$ es tal que $\|u - b\| < 1$, entonces el elemento $v = 1 - u + b$ es invertible en $\hat{A}$. Si $a \in A$, entonces $av = a - au + ab \in I$, por tanto $A = A = Av \subseteq I$, lo cual es imposible ya que I es propio. Por tanto, se sigue que $\|u - b\| \geq 1$ para todo $b \in I$, por lo tanto $u \notin \overline{I}$, lo que demuestra que es propio.
Finalmente, si I es maximal, se tiene que $I = \overline{I}$, por tanto es cerrado. □

Lema 1.3.8. *Sea I un ideal regular maximal en un álgebra unitaria y conmutativa A. Entonces A/I es un cuerpo.*

Demostración.
Tenemos que el álgebra A/I es conmutativa y unitaria, con unidad $u + I$. Si J es un ideal en A/I, y π es la aplicación de paso al cociente de A a A/I, entonces está claro que $\pi^{-1}(J)$ es un ideal en A que contiene a I. Entonces, como I es un ideal maximal, se sigue que $\pi^{-1}(J)$ es A o I. Por tanto, A/I solo tiene los ideales triviales. Ahora supongamos que $\pi(a)$ es un elemento no nulo de A/I. Entonces, $J = \pi(a)(A/I)$ es un ideal no nulo en A/I, por lo tanto $J = A/I$. Por tanto, existe un elemento $b \in A$ de forma que $(a+I)(b+I) = u+I$, así que $a + I$ es invertible. Eso prueba que A/I es un cuerpo. □

Ahora introducimos el concepto de *carácter*, que serán los elementos sobre los que construiremos la transformada de Gelfand.

Definición 1.3.9. Un **carácter** en un álgebra A es un homomorfismo $\varkappa : A \to \mathbb{C}$ no nulo. El conjunto de caracteres se denota por $\Omega(A)$.

Antes de enunciar las principales características del espectro de un álgebra, merece la pena detenernos en dos detalles:

Nota 1.3.10.

1. Si $\varphi : A \to B$ es un homomorfismo de álgebras y B es unitaria, entonces existe un único homomorfismo unitario
$$\begin{aligned} \hat{\varphi} : \hat{A} &\to B \\ a + \lambda &\mapsto \varphi(a) + \lambda 1 \end{aligned}$$
que extiende a φ.

2. Si $\varphi : A \to B$ es un homomorfismo unitario entre álgebras unitarias, entonces
$$\varphi(\text{Inv } A) \subseteq \text{Inv } B,$$
por tanto $\sigma(\varphi(a)) \subset \sigma(a)$ para todo $a \in A$.

Teorema 1.3.11. *Sea A un álgebra de Banach abeliana y unitaria. Se tiene:*

(a) Si $\varkappa \in \Omega(A)$, entonces $\varkappa \in A^*$ y $\|\varkappa\| = 1$.

(b) $\Omega(A)$ es no vacío, y la aplicación

$$\varkappa \mapsto \ker \varkappa$$

define una biyección de $\Omega(A)$ al conjunto de ideales maximales de A.

Demostración.

(a) Sea $\varkappa \in \Omega(A)$. Observemos que $\varkappa$ es un homomorfismo unitario, ya que $\varkappa(1) = \varkappa(1)^2 = 1$. Entonces, por el apartado (2) de la nota anterior, se sigue que $\sigma(\varkappa(a)) \subset \sigma(a)$. Ahora, está claro que $\varkappa(a) \in \sigma(\varkappa(a))$, por lo tanto $\varkappa(a) \in \sigma(a)$. De aquí deducimos por tanto que $|\varkappa(a)| \leq r(a) \leq \|a\|$. Así, se tiene que $\varkappa$ es acotado y $\|\varkappa\| \leq 1$. Finalmente, como $\varkappa(1) = 1$, se sigue que $\|\varkappa\| = 1$.

(b) Llamemos I al ideal cerrado $\ker \varkappa$. Es un ideal propio, ya que $\varkappa \neq 0$ y además $I + \mathbb{C}1 = A$, pues $a - \varkappa(a) \in I$ para todo $a \in A$, de donde se sigue claramente que I es maximal. Ahora, si $\varkappa_1, \varkappa_2 \in \Omega(A)$ y $\ker \varkappa_1 = \ker \varkappa_2$, entonces para cada $a \in A$ tenemos $\varkappa_1(a - \varkappa_2(a)) = 0$, así que $\varkappa_1(a) = \varkappa_2(a)$ y $\varkappa_1 = \varkappa_2$, por tanto la aplicación es inyectiva.
Veamos ahora que es sobre. Tomemos I un ideal maximal cualquiera de A. Entonces, por el teorema 1.3.7, sabemos que I es cerrado. Como A es unitario, I es regular y por tanto A/I es un cuerpo por el lema 1.3.8. Entonces, por el teorema de Gelfand-Mazur, se tiene que $A/I = \mathbb{C}(1 + I)$, de donde deducimos que $A = I \oplus \mathbb{C}1$. Ahora, definimos $\varkappa : A \to \mathbb{C}$ como $\varkappa(a + \lambda) = \lambda$, con $a \in I$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces, $\varkappa$ es un carácter y $\ker \varkappa = I$, lo que prueba que la aplicación define una biyección entre $\Omega(A)$ y los ideales maximales de A.
Finalmente, como ya hemos visto, A admite ideales maximales porque es unitario, así que $\Omega(A) \neq \emptyset$. $\square$

En ciertos momentos del trabajo tendremos que trabajar con álgebras de Banach no unitarias, así que vamos a presentar una versión algo más débil del teorema anterior, en el que el concepto de ideal regular juega un papel determinante.

Teorema 1.3.12. *Sea A un álgebra de Banach abeliana. Se tiene:*

(a) Si $\varkappa \in \Omega(A)$, entonces $\varkappa \in A^*$ y $\|\varkappa\| \leq 1$.

(b) La aplicación

$$\varkappa \mapsto \ker \varkappa$$

define una biyección de $\Omega(A)$ sobre conjunto de ideales maximales regulares de A, que denotaremos por $\mathfrak{M}$.

Demostración.

(a) Sea $\varkappa \in \Omega(A)$, y denotemos por M a $\ker \varkappa$. Entonces, por el primer teorema de isomorfía, $A/M \cong \mathbb{C}$, de donde deducimos que M es regular. De nuevo, M es también maximal porque tiene codimensión 1, y por tanto es cerrado. Denotemos ahora por $\|\cdot\|'$ a la norma inducida en $\mathbb{C}$ por A/M. Se tiene claramente que $\|\lambda\|' = \|1\|' |\lambda|$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Como $\|1\|' \geq 1$, se sigue que $|\lambda| \leq \|\lambda\|'$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, y por tanto deducimos que para cualquier $a \in A$, $|\varkappa(a)| \leq \|\varkappa(a)\|' \leq \|a\|$, lo que prueba el enunciado.

(b) Tomemos $\varkappa \in \Omega(A)$. Observemos que $\varkappa$ está completamente determinado por su núcleo $M = \ker \varkappa$, que es un ideal regular maximal, pues si $a \in M$ entonces $\varkappa(a) = 0$ y si $a \notin M$ entonces $\varkappa(a)$ es el único número complejo tal que $a^2 - \varkappa(a)a \in M$. Esto prueba que la aplicación es inyectiva.
Por otro lado, si M es un ideal maximal regular de A, el cociente A/M es un cuerpo. Como M es cerrado, entonces A/M es también un álgebra de Banach, y por tanto $A/M \cong \mathbb{C}$. Por tanto, la aplicación de paso al cociente $\pi : A \to M$ es un carácter, lo que prueba que la aplicación $\varkappa \mapsto \ker \varkappa$ es una biyección. $\square$

Teorema 1.3.13. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa.*

(a) Si A es unitaria, entonces

$$\sigma(a) = \{\varkappa(a) : \varkappa \in \Omega(A)\} \quad (a \in A).$$

(b) Si A es no unitaria, entonces

$$\sigma(a) = \{\varkappa(a) : \varkappa \in \Omega(A)\} \cup \{0\} \quad (a \in A).$$

Demostración.

(a) Supongamos que A es unitaria y sea $a \in A$. Entonces, si $\lambda \in \sigma(a)$, se sigue que el ideal $I = (a - \lambda)A$ es propio, así que I está contenido en un ideal maximal $\ker(\varkappa)$. Así, $\varkappa(a - \lambda) = 0$ y por tanto $\varkappa(a) = \lambda$. Hemos probado entonces que

$$\sigma(a) \subset \{\varkappa(a) : \varkappa \in \Omega(A)\}.$$

Para la otra inclusión, supongamos que $a - \varkappa(a)$ es invertible. Entonces tenemos

$$1 = \varkappa(1) = \varkappa(a - \varkappa(a))\varkappa(a - \varkappa(a))^{-1},$$

pero $\varkappa(a - \varkappa(a)) = 0$, y llegamos a contradicción. Por lo tanto, $\varkappa(a) \in \sigma(a)$.

(b) Ahora supongamos que A es un álgebra no unitaria y tomemos $\varkappa_\infty : \hat{A} \to \mathbb{C}$ el homomorfismo canónico. Entonces $\Omega(\hat{A}) = \{\hat{\varkappa} : \varkappa \in \Omega(A)\} \cup \{\varkappa_\infty\}$, donde $\hat{\varkappa}$ es el único carácter que extiende $\varkappa$ a $\hat{A}$. Entonces, tenemos por (a) que

$$\sigma(a) = \sigma_{\hat{A}}(a) = \{\varkappa(a) : \varkappa \in \Omega(\hat{A})\} = \{\varkappa(a) : \varkappa \in \Omega(A)\} \cup \{0\},$$

lo que prueba el resultado. □

Notemos que si A es un álgebra de Banach abeliana, entonces por el teorema 1.3.12 deducimos que $\Omega(A)$ está contenida en la bola unidad cerrada de A^*. Dotaremos por tanto a $\Omega(A)$ de la topología débil* relativa, y llamaremos al espacio topológico $\Omega(A)$ **espacio de caracteres** o **espectro** de A.

Teorema 1.3.14. *Si A es un álgebra de Banach abeliana, entonces $\Omega(A)$ es un espacio T_2 localmente compacto. Es más, si A es unitaria, $\Omega(A)$ es compacto.*

Demostración.
Veamos primero que $\Omega(A) \cup \{0\}$ es débil cerrado en la bola unidad cerrada B_{A^*} de A^*. Tomemos entonces una red $(\varkappa_\alpha)$ en $\Omega(A) \cup \{0\}$ convergiendo a $\varkappa \in B_{A^*}$. Tomemos $a, b \in A$. Tenemos que

$$\varkappa(ab) = \lim_\alpha \varkappa_\alpha(ab) = \lim_\alpha \varkappa_\alpha(a)\varkappa_\alpha(b) = \varkappa(a)\varkappa(b),$$

lo que prueba que $\varkappa$ es un homomorfismo y por tanto pertenece a $\Omega(A) \cup \{0\}$. Ahora, como B_{A^*} es débil* compacto por el teorema de Banach-Alaoglu, se sigue que $\Omega(A) \cup \{0\}$ es débil* compacta y, por tanto, $\Omega(A)$ es localmente compacto. En el caso en el que A es unitaria, se sigue que $\Omega(A)$ es débil* cerrado, y por tanto es compacto. □

Dado un espacio topológico T_2 Ω, diremos que una función continua $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *se desvanece en el infinito* si para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{x \in \Omega : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ es compacto en Ω. El álgebra constituida por estas funciones se denota por $C_0(\Omega)$, y es un álgebra de Banach abeliana y unitaria con la norma infinito.
Podemos entonces presentar la idea central de esta sección, la *transformada de Gelfand*, que nos permitirá entender cada elemento de un álgebra de Banach como una función continua que se desvanece en el infinito definida sobre su espectro:

Definición 1.3.15. Sea A un álgebra de Banach abeliana con $\Omega(A)$ no vacío. Dado $a \in A$, definimos la función $\hat{a}$ como

$$\begin{aligned} \hat{a} : \Omega(A) &\to \mathbb{C} \\ \varkappa &\mapsto \varkappa(a). \end{aligned}$$

Llamamos **transformada de Gelfand** de a a la función $\hat{a}$.

Teorema 1.3.16 (Teorema de Representación de Gelfand)**.** *Sea A un álgebra de Banach abeliana con $\Omega(A)$ no vacío. Entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} A &\to C_0(\Omega(A)) \\ a &\mapsto \hat{a}, \end{aligned}$$

llamada ***representación de Gelfand****, es un homomorfismo decreciente en norma, y $r(a) = \|\hat{a}\|_\infty$.*
Además, si A es unitario, $\sigma(a) = \hat{a}(\Omega(A))$, y si A es no unitario, $\sigma(a) = \hat{a}(\Omega(A)) \cup \{0\}$, para todo $a \in A$.

Demostración.
Veamos primero que la aplicación está bien definida. Es decir, que $\hat{a} \in C_0(\Omega(A))$ para todo $a \in A$. Observemos que la topología débil* es la topología menos fina que hace continuas a todas las funciones $\hat{a}$, lo que en cierta manera justifica la elección de la topología. Además, para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{\varkappa \in \Omega(A) : |\varkappa(a)| \geq \varepsilon\}$ es débil* cerrado en la bola unidad cerrada de A^*, y de nuevo por Banach-Alaoglu se sigue que son conjuntos compactos para todo $a \in A$. Esto prueba que $\hat{a} \in C_0(\Omega(A))$.
Ahora, por el teorema 1.3.11 se tiene que $\sigma(A)$ es el rango de $\hat{a}$ si A es unitario ($\sigma(a) \cup \{0\}$ si es no unitario). Por tanto, $r(a) = \|\hat{a}\|_\infty$, lo que implica que la aplicación es decreciente en norma. Finalmente, el hecho de que la aplicación es homomorfismo se sigue inmediatamente de la definición de la transformada de Gelfand. □

Definición 1.3.17. Sea A un álgebra de Banach abeliana con $\Omega(A)$ no vacío. Llamaremos **radical** de A al núcleo de la representación de Gelfand. Si el radical de A es $\{0\}$, diremos que A es **semisimple**.

Es trivial ver que los elementos del radical de A son aquellos tales que $r(a) = 0$. Por tanto, el radical contiene a todos los elementos nilpotentes.

Proposición 1.3.18. *Sea A un álgebra de Banach abeliana con espectro no vacío. Son equivalentes:*

(a) *A es semisimple.*

(b) *$\Omega(A)$ separa puntos.*

(c) $\bigcap_{\varkappa \in \Omega(A)} \ker \varkappa = \{0\}$.

Demostración.
Sea A es semisimple, y razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que $\Omega(A)$ no separa puntos. Es decir, existe $a \in A$ no nulo tal que $\varkappa(a) = 0$ para todo $\varkappa \in \Omega(A)$. Es decir, $\hat{a}(\varkappa) = 0$ para todo $\varkappa \in \Omega(A)$, lo que implica que $\hat{a} = 0$, que contradice el hecho de que A es semisimple.

Supongamos ahora que $\Omega(A)$ separa puntos. Entonces, está claro que dado $\varkappa_1 \in \Omega(A)$, y $x \in \ker \varkappa_1$ no nulo, existe $\varkappa_2$ tal que $\varkappa_2(x) \neq 0$, por lo tanto $x \notin \ker \varkappa_2$. Además, está claro que $0 \in \ker \varkappa$ para todo $\varkappa \in \Omega(A)$, lo que prueba que

$$\bigcap_{\varkappa \in \Omega(A)} \ker \varkappa = \{0\}.$$

Finalmente, supongamos que la intersección de todos los núcleos de los caracteres es cero. Supongamos que A no es semisimple: existe $a \in A$ no nulo de forma que $\hat{a} = 0$, es decir, $0 = \hat{a}(\varkappa) = \varkappa(a)$ para todo $\varkappa \in \Omega(A)$. Es decir, $a \in \bigcap_{\varkappa \in \Omega(A)} \ker \varkappa$, y obtenemos de nuevo una contradicción. □

Como vimos en el teorema 1.3.12, los ideales maximales regulares de cualquier álgebra de Banach abeliana son precisamente los núcleos de los caracteres definidos en A, así que tenemos una biyección $\Omega(A) \to \mathfrak{M}$. Identificaremos por tanto $\Omega(A)$ con $\mathfrak{M}$. Es más, podemos ver entonces a $\mathfrak{M}$ como un espacio topológico, ya que $\Omega(A)$ está equipado con la topología débil* relativa a la bola unidad cerrada de A^*. Así, podemos entender la transformada de Gelfand como

$$\begin{aligned} \hat{a} : \mathfrak{M} &\to \mathbb{C} \\ M &\mapsto \hat{a}(M), \end{aligned}$$

donde definimos $\hat{a}(M) = \varkappa(a)$, donde $M = \ker \varkappa$, y podemos entonces definir la representación de Gelfand como la aplicación

$$\begin{aligned} A : &\to C_0(\mathfrak{M}) \\ a &\to \hat{a}. \end{aligned}$$

Lidiaremos con ambas definiciones, entendiendo que en realidad estamos trabajando exactamente con las mismas ideas en ambos casos.
Finalizamos la sección introduciendo el concepto de álgebra de Banach **regular**, que será una idea crucial en ciertos momentos del trabajo. Para ello, debemos hablar primero de ciertas ideas que de nuevo pondrán en juego a los ideales maximales regulares.

Definición 1.3.19. Sea A un álgebra de Banach abeliana. Dado un ideal I de A, definimos su **cierre** $h(I)$ como el conjunto de todos los ideales maximales regulares que contienen a I.

Es fácil ver entonces, gracias a nuestra definición alternativa de la transformada de Gelfand que

Proposición 1.3.20. *Dado un ideal I en un álgebra de Banach abeliana A, $h(I)$ es el conjunto de $M \in \mathfrak{M}$ tales que $\hat{a}(M) = 0$ para todo $a \in I$. En consecuencia, $h(I)$ es cerrado.*

Demostración.
Llamemos $B = \{M \in \mathfrak{M} : \hat{a}(M) = 0 \ \forall a \in I\}$, y veamos que $h(I) = B$.
Sea $M \in h(I)$. Entonces M es un ideal maximal regular con $I \subset M$. Es decir, $M = \ker \varkappa$ con $\varkappa \in \Omega(A)$ con $I \subset \ker \varkappa$. Entonces, para todo $a \in I$, se tiene que $\varkappa(a) = 0$, es decir, $\hat{a}(M) = 0$, por lo tanto $M \in B$.
Tomemos ahora $M = \ker \varkappa \in B$. Se tiene por tanto que $\hat{a}(M) = 0$ para todo $a \in I$, es decir, $\varkappa(a) = 0$ para todo $a \in I$. Por tanto, $I \subset M$, que por definición quiere decir que $M \in h(I)$. $\square$

Definición 1.3.21. Dada un álgebra de Banach abeliana A, definimos el **núcleo** de un conjunto $E \subset \mathfrak{M}$ como el ideal
$$k(E) = \bigcap_{M \in E} M.$$

De nuevo, podemos relacionar esta definición con la transformada de Gelfand:

Proposición 1.3.22. *Dada un álgebra de Banach abeliana A, se tiene que*
$$k(E) = \{a \in A : \hat{a}(M) = 0 \ \forall \ M \in E\}.$$
En consecuencia, $k(E)$ es cerrado.

Demostración.
Llamemos $C = \{a \in A : \hat{a}(M) = 0 \ \forall \ M \in E\}$ y veamos que $k(E) = C$.
Sea $a \in k(E)$. Entonces $a \in M$ para todo $M \in E$. Es decir, si $\ker \varkappa = M \in E$, entonces $\varkappa(a) = 0$. Es decir, $\hat{a}(M) = 0$ para todo $M \in E$, por lo tanto $a \in C$.
Por otro lado, sea $a \in C$. Si $M = \ker \varkappa$, entonces $\varkappa(a) = 0$, así que $a \in M$ para todo $M \in E$, es decir, $a \in k(E)$. $\square$

Definición 1.3.23. Diremos que un álgebra de Banach abeliana A es **regular** si todo punto $M \in \mathfrak{M}$ tiene un entorno U de forma que $k(U)$ es un ideal regular.

Dado un conjunto cerrado F en $\mathfrak{M}$, definimos $J(F, \infty)$ como la unión de los ideales $k(U)$, donde U es cualquier conjunto abierto tal que $F \subset U$ y con complementario compacto. Se tiene

Proposición 1.3.24. *Dada A un álgebra abeliana y F cerrado en $\mathfrak{M}$, se tiene $J(F, \infty)$ es el menor ideal con cierre igual a F.*

La demostración de este resultado es bastante técnica y las herramientas presentadas en este capítulo no son suficientes para poder plantearla. Dicha prueba puede encontrarse en ([27], p. 91).
Gracias a este resultado, tenemos para cualquier ideal cerrado I que
$$J(h(I), \infty) \subset I \subset k(h(I)).$$

Finalmente, damos una condición necesaria y suficiente para poder expresar todo ideal cerrado I de un álgebra de Banach abeliana A semisimple y regular como la intersección de ideales regulares maximales:

Lema 1.3.25. *Sea A un álgebra de Banach abeliana, semisimple y regular. Entonces los conjuntos cerrados de $\mathfrak{M}$ son exactamente los cierres de los ideales cerrados. Además, todo ideal cerrado I de A es intersección de ideales maximales regulares si y solo si*

$$\overline{J(h(I),\infty)} = k(h(I)).$$

En ese caso, se tiene que

$$\overline{J(h(I),\infty)} = I = k(h(I)).$$

De nuevo, la prueba es bastante árida, pero el lector interesado puede encontrarla en ([27], p. 92).

Capítulo 2

El Problema del Subespacio Invariante

En este capítulo ofrecemos el planteamiento general del problema del subespacio invariante, enfocándonos en la estructura del retículo de los subespacios invariantes de un operador, y proporcionando algunas herramientas básicas tales como la semejanza. A continuación, enunciamos y demostramos el teorema de Lomonosov y el teorema espectral para operadores normales, los dos resultados más importantes que prueban la existencia de subespacios invariantes para una gran clase de operadores.

2.1. El Problema del Subespacio Invariante en Espacios de Hilbert

Durante el resto del texto consideraremos espacios de Hilbert H complejos, separables y de dimensión infinita.
El problema del subespacio invariante en espacios de Hilbert tiene un sencillo enunciado:

¿tiene todo operador $T \in \mathcal{B}(H)$ un subespacio invariante no trivial?

Vamos a comenzar presentando las definiciones básicas necesarias para comprender el problema.

Definición 2.1.1. Dado un operador $T \in \mathcal{B}(H)$, diremos que un subespacio $M \subseteq H$ es **invariante** por T si

$$Tx \in M \quad \text{para todo } x \in M.$$

Está claro que todo operador acotado tiene siempre dos subespacios invariantes: $\{0\}$ y H, que llamaremos subespacios invariantes **triviales**.

Definición 2.1.2. Dado un operador $T \in \mathcal{B}(H)$, llamamos **retículo de subespacios invariantes** o **retículo** de T al conjunto de subespacios invariantes por T y lo denotamos por Lat T. Además, si $\mathcal{S}$ es una familia de operadores acotados, definimos

$$\text{Lat } \mathcal{S} = \bigcap_{T \in \mathcal{S}} \text{Lat } T.$$

Usar el término *retículo* para referirnos al conjunto de subespacios invariantes de un operador no es casual. La colección de estos subespacios cumple ciertas propiedades de orden que hacen que constituyan un *retículo* en el lenguaje de la teoría algebraica de orden. Vamos a comentar ciertos aspectos de este punto de vista de estudio de los retículos para deducir propiedades sobre subespacios invariantes.

Definición 2.1.3. Una relación binaria definida en un conjunto A $\leq$ es una **relación parcial de orden** en A si cumple para todo $a, b, c \in A$:

(i) $a \leq a$ (Reflexividad)

(ii) Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$. (Antisimetría)

(iii) Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.

Si además se cumple que para todo $a, b \in A$

1. $a \leq b$ ó $b \leq a$,

diremos que es una **relación de orden total.** A cualquier conjunto con una relación parcial de orden lo llamaremos **conjunto parcialmente ordenado** y si esta relación es total lo llamaremos **conjunto totalmente ordenado**. Además, si $a \leq b$ pero $a \neq b$, lo denotaremos por $a < b$.

Podemos generalizar muchos de los conceptos de orden que aplicamos a los números reales a los conjuntos parcialmente ordenados:

Definición 2.1.4. Sea A un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado P. Un elemento $p \in P$ es una **cota superior** para A si $a \leq p$ para todo $a \in A$. Un elemento $p \in P$ es el **supremo** de A ($\sup A$) si p es cota superior de A y $p \leq p'$ para todo $p' \in P$ cota superior de A. Si $a, b \in A$, definimos el **intervalo cerrado** $[a, b]$ como el conjunto de los elementos $c \in P$ tales que $a \leq c \leq b$, y el **intervalo abierto** (a, b) como los elementos $c \in P$ tales que $a < c < b$.

De igual manera, podemos definir los conceptos de **cota inferior** e **ínfimo**. Introducimos entonces el concepto algebraico de *retículo*:

Definición 2.1.5. Dado un conjunto parcialmente ordenado A diremos que es un **retículo** si para todo $a, b \in A$ los elementos $\sup\{a, b\}$ e $\inf\{a, b\}$ existen y pertenecen a A. Además se definen las operaciones:

$$\begin{aligned} \vee : A \times A &\to A \\ (a, b) &\mapsto \sup\{a, b\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \wedge : A \times A &\to A \\ (a, b) &\mapsto \inf\{a, b\}. \end{aligned}$$

Puede ser interesante considerar aplicaciones entre conjuntos parcialmente ordenados que conserven el orden definido:

Definición 2.1.6. Sean dos conjuntos parcialmente ordenados A_1 y A_2 y $\alpha : A_1 \to A_2$ una aplicación. Diremos que α **preserva el orden** si para todos $a, b \in A_1$ tales que $a \leq b$ se cumple que $\alpha(a) \leq \alpha(b)$. En cambio, si $\alpha(b) \leq \alpha(a)$ para todo $a \leq b$, diremos que α **invierte el orden**.

Finalmente, también podemos hablar de isomorfismo en el sentido de la teoría de orden:

Definición 2.1.7. Dos retículos A_1 y A_2 son **isomorfos** si existe una aplicación biyectiva $\alpha : A_1 \to A_2$ de forma que α y α^{-1} preservan el orden. A esta aplicación se le denomina **isomorfismo**. Si α es una aplicación biyectiva tal que α y α^{-1} invierten el orden, diremos que α es un **anti-isomorfismo**.

Una vez sentadas las bases teóricas del concepto de retículo, veamos que dado un operador $T \in \mathcal{B}(H)$ el conjunto de sus subespacios invariantes Lat T conforma un *retículo*:

Proposición 2.1.8. *Dado $T \in \mathcal{B}(H)$ se tiene que Lat T es un retículo, donde $A \leq B$ si $A \subseteq B$.*

Demostración.
Está claro que la inclusión de conjuntos es una relación parcial de orden. Ahora, basta observar que $A \wedge B = A \cap B$, y que $A \vee B = \overline{\text{span}}\ A \cup B$. Veamos que $A \wedge B \in \text{Lat}\ T$. Para ello, sea $x \in A \cap B$. Tenemos que $Tx \in A$ y $Tx \in B$, ya que $A, B \in \text{Lat}\ T$, por lo que $Tx \in A \cap B$, y entonces $A \cap B$ es invariante por T. Ahora, sea $x \in \overline{\text{span}} A \cup B$. Entonces, $x = \alpha x_1 + \beta x_2$, con $x_1 \in A$, $x_2 \in B$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Ahora, como $A, B \in \text{Lat}\ T$, se sigue que $Tx_1 \in A$ y $Tx_2 \in B$, por lo tanto $\alpha Tx_1 + \beta Tx_2 \in \text{span} A \cup B$, así que $\text{span} A \cup B$ también es invariante por T, y por la continuidad de T también lo es $\overline{\text{span}} A \cup B$. $\square$

Definición 2.1.9. Dado $T \in \mathcal{B}(H)$, diremos que $M \in \text{Lat}\ T$ es **minimal** si para todo $N \leq M$ se tiene que $N = M$ o $N = \{0\}$.

Nota 2.1.10. De la misma forma, dada una familia de operadores $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ se tiene que Lat S es un retículo, donde $A \leq B$ si $A \subseteq B$ y donde las aplicaciones $\vee$ y $\wedge$ se definen de manera análoga. La misma definición es válida además para los subespacios minimales.

Es natural preguntarse por propiedades adicionales de invariancia de subespacios por acción de operadores de $\mathcal{B}(H)$. Una de las más estudiadas es la *hiperinvariancia*, relacionada con el conmutante de un operador, que pasamos a definir.

Definición 2.1.11. Dados dos operadores $T, S \in \mathcal{B}(H)$ definimos su **conmutador** como $[T, S] = TS - ST$. Diremos que T y S **conmutan** si $[T, S] = 0$, es decir, si $TS = ST$. Llamamos **conmutante** de T al conjunto de los operadores que conmutan con T, y lo denotamos por $\{T\}'$:

$$\{T\}' := \{S \in \mathcal{B}(H) : TS = ST\}.$$

Está claro que $\{T\}'$ es una subálgebra de $\mathcal{B}(H)$.

Definición 2.1.12. Dado $T \in \mathcal{B}(H)$, diremos que un subespacio $M \subseteq H$ es **híperinvariante** por T si $M \in \text{Lat } S$ para todo $S \in \{T\}'$.

El problema de decidir si todos los operadores de $\mathcal{B}(H)$ que no son un múltiplo escalar de la identidad son híperinvariantes es un problema que continúa abierto, aunque ha recibido algunas respuestas parciales, como el teorema de Lomonosov (que probaremos en la siguiente sección), que asegura que todo operador no escalar que conmuta con un operador compacto posee subespacios hiperinvariantes no triviales.

Definición 2.1.13. Dados $T \in \mathcal{B}(H)$ y M subespacio de H, diremos que M **reduce** a T si M y $M^{\perp}$ pertenecen a Lat T. También llamaremos a M **espacio reductor**.

Veamos algunos resultados de carácter general que nos ayudarán a decidir qué subespacios son invariantes para un operador concreto:

Proposición 2.1.14. *Si $T \in \mathcal{B}(H)$ y P es una proyección sobre M, entonces $M \in$ Lat T si y solo si $TP = PTP$.*

Demostración.
Si que $M \in \text{Lat } T$ y $x \in H$, entonces TPx está contenido en TM, y como $TM \subseteq M$, se sigue que $P(TPx) = TPx$. Para la otra implicación, observemos que si $TP = PTP$ y $x \in M$, entonces $Px = x$ y $Tx = PTx$. Como $P(Tx) = Tx$, se sigue que $Tx \in M$, y por tanto $M \in \text{Lat } T$. □

Proposición 2.1.15. *Dado $T \in \mathcal{B}(H)$, se tiene que Lat $T^* = \{M : M^{\perp} \in \text{Lat } T\}$.*

Demostración.
Vamos a probar la doble inclusión. Tomemos primero $M \in \text{Lat } T^*$. Tomemos $x \in M^{\perp}$. Se tiene para todo $y \in M$ que $0 = \langle x, T^*y \rangle = \langle Tx, y \rangle$, por lo que $Tx \in M^{\perp}$. Así, $M^{\perp} \in \text{Lat } T$. Ahora, si $M^{\perp} \in \text{Lat } T$, como M es cerrado se tiene que $(M^{\perp})^{\perp} = M$, por tanto $M \in \text{Lat } T^*$. □

Podemos deducir entonces que:

Corolario 2.1.16. *El subespacio M reduce a T si y solo si $M \in (Lat\ T) \cap (Lat\ T^*)$.*

También será muy importante el concepto de *semejanza*:

Definición 2.1.17. Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert complejos. Diremos que dos operadores $T \in \mathcal{B}(H_1)$ y $S \in \mathcal{B}(H_2)$ son **semejantes** si existe un isomorfismo $\Phi : H_1 \to H_2$ de forma que

$$T = \Phi^{-1} S \Phi.$$

Cuando queramos enfatizar el isomorfismo Φ diremos que son **semejantes bajo** Φ. Además, si Φ es unitario, diremos que T y S son **unitariamente equivalentes**.

La relación 'ser semejantes' es una relación de equivalencia sobre los operadores acotados. Esta propiedad va a ser fundamental en nuestro trabajo, pues la semejanza entre operadores conserva muchas propiedades que juegan un papel crucial en la teoría de los subespacios invariantes. Por ejemplo, si conocemos el retículo de un operador, conoceremos también el retículo de todos los operadores semejantes a él:

Proposición 2.1.18. *Sean $T \in \mathcal{B}(H_1)$ y $S \in \mathcal{B}(H_2)$ dos operadores semejantes bajo $\Phi : H_1 \to H_2$. Entonces $M \in Lat\ T$ si y solo si $\Phi(M) \in Lat\ S$. Es decir:*

$$Lat\ S = \{\Phi(M) : M \in Lat\ T\}.$$

Demostración.
Veremos solo una de las implicaciones, la otra es análoga. Supongamos que $M \in \mathrm{Lat}\ T$. Por tanto, para todo $x \in M$, se tiene que $Tx \in M$. Es decir, $\Phi^{-1} S \Phi x \in M$, o sea, $\Phi^{-1} S y \in M$ para todo $y \in \Phi(M)$. Ahora, $\Phi^{-1}(Sy) \in M$ si y solo si $Sy \in \Phi(M)$, por lo que deducimos que $Sy \in \Phi(M)$ para todo $y \in \Phi(M)$, es decir, $\Phi(M) \in \mathrm{Lat}\ S$. $\square$

Proposición 2.1.19. *Sean $T \in \mathcal{B}(H_1)$ y $S \in \mathcal{B}(H_2)$ dos operadores semejantes bajo $\Phi : H_1 \to H_2$. Entonces $\sigma(T) = \sigma(S)$ y $\sigma_p(T) = \sigma_p(S)$.*

Demostración.
Sea $\lambda \in \sigma(T)$. Entonces, $T - \lambda I$ no es invertible. Entonces, está claro que $\Phi^{-1}(T - \lambda I)\Phi$ tampoco es invertible. Además tenemos que

$$\Phi^{-1}(T - \lambda I)\Phi = S - \lambda I$$

así que $S - \lambda I$ no es invertible y $\lambda \in \sigma(S)$. La otra contención es análoga.
Consideremos ahora $\lambda \in \sigma_p(T)$. Es decir, existe $x \in H_1$ de forma que $Tx = \lambda x$. Entonces, se tiene que $\Phi^{-1} S \Phi x = \lambda x$. Si despejamos obtenemos $S(\Phi x) = \lambda(\Phi x)$. Como Φ es isomorfismo se sigue que $\Phi x \neq 0$ y por tanto $\lambda \in \sigma_p(S)$. De nuevo, la otra contención es análoga.
$\square$

2.2. El Teorema de Lomonosov

El objetivo de esta sección es probar el **teorema de Lomonosov**, (ver [19]) uno de los resultados más potentes en la teoría de subespacios invariantes:

Teorema 2.2.1 (Teorema de Lomonosov)**.** *Sea X un espacio de Banach complejo, sea $T \in \mathcal{B}(X)$, y supongamos que no es un múltiplo escalar de la identidad. Entonces, si T conmuta con un operador compacto no nulo, T tiene un subespacio híperinvariante no trivial.*

Como comentamos en la anterior sección, nuestro objetivo es estudiar el problema del subespacio invariante en espacios de Hilbert por su mayor riqueza geométrica. A pesar de ello, la demostración para el teorema de Lomonosov es un resultado relativamente sencillo de probar en el marco general de un espacio de Banach complejo X, aunque es necesario aplicar herramientas propias del Análisis Funcional no Lineal. Además, responde a varias preguntas clásicas sobre el problema del subespacio invariante, que veremos como corolarios directos. Por este motivo, enunciamos y probamos el resultado para espacios de Banach.
Como hemos comentado, necesitaremos utilizar dos resultados clásicos de Análisis Funcional: el teorema de Mazur sobre el cierre convexo de un compacto en un espacio de Banach y el teorema de punto fijo de Schauder. Por completitud, vamos a ofrecer la prueba de ambos.

Teorema 2.2.2 (Teorema de Punto Fijo de Schauder)**.** *Sea X un espacio de Banach y sea $K \subset X$ un compacto, convexo no vacío. Entonces, dada $f : K \to K$ aplicación continua, existe $x \in K$ de forma que $f(x) = x$.*

Demostración.
La idea de la prueba está basada en reducirnos al caso finito-dimensional y aplicar entonces el teorema de punto fijo de Brower. Tomemos $\varepsilon > 0$. Entonces, la familia de bolas abiertas $\{B(x, \varepsilon) : x \in K\}$ forma un recubrimiento abierto para K. Como K es compacto, podemos seleccionar entonces $x_1, ..., x_n \in K$ de forma que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

Tomemos entonces $K_\varepsilon \subset K$ el cierre convexo y cerrado de $x_1, ..., x_n$. Veamos que es compacto. Consideramos el símplice estándar en R^n dado por

$$S = \{(t_1, .., t_n) \in \mathbb{R}^n : t_1, ..., t_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\}$$

está claro que S es compacto. Ahora, si definimos $\varphi : S \to X$ de forma que $\varphi(t_1, ..., t_n) = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$, está claro que φ es continua y que su imagen es K_ε. Entonces, como S es

compacto, se sigue que K_ε también lo es.
Consideremos ahora V_ε un espacio afín de dimensión $n-1$ conteniendo a K_ε. Ahora, definimos $F_i : K \to \mathbb{R}$ como

$$\varphi_i(x) = \max\{0, 1 - \|x - x_i\| / \varepsilon\}$$

para $1 \leq i \leq n$. Observemos que están bien definidas y son continuas, y $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) > 0$ para todo $x \in K$. Ponemos ahora $\Pi_\varepsilon : K \to K_\varepsilon$ como

$$\Pi_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i \varphi_i(x)}{\sum_{i=1}^n \varphi_i(x)}.$$

De nuevo, Π_ε está bien definido y además, para todo $x \in K$ se tiene que

$$\|\Pi(x) - x\| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Definimos entonces

$$\begin{aligned} f_\varepsilon : K_\varepsilon &\to K_\varepsilon \\ x &\mapsto \pi_\varepsilon(f(x)). \end{aligned}$$

Es una función continua definida en un convexo compacto K_ε contenido en un espacio vectorial finito dimensional V_ε. Entonces podemos aplicar el teorema del punto fijo de Brouwer y se sigue que existe un punto fijo $x_\varepsilon \in K_\varepsilon$ para f_ε. Es decir,

$$f_\varepsilon(x) = x.$$

Ahora, como K es compacto, podemos encontrar una sucesión $\varepsilon_k \to 0$ tal que $x_k := x_{\varepsilon_k}$ converge a cierto punto $\overline{x} \in K$. Veamos que $\overline{x}$ es el punto fijo que buscamos para f. Es decir, vamos a probar que $f(\overline{x}) = \overline{x}$.
Claramente se tiene que $f_{\varepsilon_k}(x_k) = x_k \to \overline{x}$. Basta entonces ver que $f_{\varepsilon_k}(x_k) \to f(\overline{x})$. Es decir, que $\|f_{\varepsilon_k}(x_k) - f(\overline{x})\| \to 0$. Tenemos

$$\begin{aligned} \|f_{\varepsilon_k}(x_k) - f(\overline{x})\| = \|\pi_{\varepsilon_k}(f(x_k)) - f(\overline{x})\| &\leq \|\pi_{\varepsilon_k}(f(x_k)) - f(x_k)\| + \|f(x_k) - f(\overline{x})\| \\ &\leq \varepsilon_k + \|f(x_k) - f(\overline{x})\| \to 0. \end{aligned}$$

Falta justificar que existe $k_0 \geq 0$ de forma que $\|\pi_{\varepsilon_k}(f(x_k)) - f(x_k)\| \leq \varepsilon_k$ para todo $k \geq k_0$. Para ello, basta recordar la propiedad (2.1) para deducir lo que queremos. Esto prueba por tanto que f tiene un punto fijo y acaba la demostración. □

Antes de ver el teorema de Mazur, recordemos que dado $A \subset X$ un subconjunto denotamos por $\mathrm{co}(A)$ al cierre convexo de A.

Teorema 2.2.3 (Teorema de Mazur)**.** *Sea X un espacio de Banach y sea $A \subset X$ un compacto. Entonces, $\overline{\mathrm{co}(A)}$ es compacto.*

Demostración.
Observemos que como X es completo, se sigue que $\overline{\text{co}}(A)$ es completo, ya que es cerrado. Por tanto, para probar que es compacto bastará ver que es totalmente acotado. Es decir, que para todo $\varepsilon > 0$ existen $x_1, ..., x_n \in \overline{\text{co}}(A)$ de forma que

$$\overline{\text{co}}(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

Tomemos entonces $\varepsilon > 0$. Como A es compacto, se sigue que existen $z_1, ..., z_n \in A$ de forma que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(z_i, \varepsilon/4)$. Tomemos $K = \text{co}(\{z_1, ..., z_n\})$, que es compacto usando el mismo razonamiento que en la prueba anterior. Ahora,

$$\overline{\text{co}(A)} \subseteq \bigcup_{y \in \text{co}(A)} B(y, \varepsilon/4).$$

Pero si $y \in \text{co}(A)$, entonces $y = \sum_{i=1}^{m} a_i y_i$, donde $y_i \in A$, $a_i \geq 0$ y $\sum_{i1}^{m} a_i = 1$. Definimos ahora $v : A \to \{1, ..., n\}$ de forma que $\left\| x - z_{v(x)} \right\| < \varepsilon/4$. Está bien definida porque $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(z_i, \varepsilon/4)$. Si x estuviera contenida en más de una bola, seleccionamos $v(x)$ de forma que sea el mínimo índice. Se tiene que

$$\|y - \sum_{i=1}^{m} a_i z_{y(i)}\| = \|\sum_{i=1}^{n} a_i (y_i - y_{v(y)})\| < \varepsilon/4,$$

y por tanto

$$\overline{\text{co}(A)} \subset \bigcup_{y \in K} B(y, \varepsilon/2).$$

Ahora, como K es compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito de bolas de forma que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B(y_i, \varepsilon/2)$ con $y_i \in K$. Por tanto, se sigue que

$$\overline{\text{co}(A)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B(y_i, \varepsilon),$$

lo que prueba que es totalmente acotado, como queríamos. □

Vamos a usar estos dos teoremas para probar el *Lema de Lomonosov*, del cual deduciremos fácilmente el teorema de Lomonosov como corolario. Llamamos **álgebra transitiva** a cualquier álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X)$ tal que $\text{Lat}\ \mathcal{A} = \{\{0\}, X\}$.

Teorema 2.2.4 (Lema de Lomonosov)**.** *Sea $\mathcal{A}$ una subálgebra transitiva de $\mathcal{B}(X)$, y sea $K \in \mathcal{K}(X)$ un operador compacto no nulo. Entonces, existe $A \in \mathcal{A}$ de forma que* 1 *es autovalor para AK, es decir,* $1 \in \sigma_p(AK)$.

Demostración.
La idea de la prueba consiste en encontrar un operador compacto en un conjunto convexo y compacto para aplicar el teorema de punto fijo de Schauder. Este punto fijo será entonces un autovector para AK, con $A \in \mathcal{A}$ que iremos construyendo a lo largo de la prueba.
Comencemos suponiendo sin pérdida de generalidad que $\|K\| = 1$. Elijamos $x_0 \in X$ de forma que $\|Kx_0\| > 1$, lo que implica que $\|x_0\| > 1$. Llamemos $B = \overline{B(x_0, 1)}$. Ahora, para cada $A \in \mathcal{A}$ definimos

$$u(A) := \{y \in X : \|Ay - x_0\| < 1\} = A^{-1}(B(x_0, 1)).$$

Está claro que cada $u(A)$ es un conjunto abierto. Veamos que

$$X \setminus \{0\} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} u(A).$$

Tomemos primero $x \in X$ no nulo. Entonces, como el álgebra $\mathcal{A}$ es transitiva, se sigue que todo vector no nulo es cíclico para el álgebra. Es decir, el conjunto

$$\{Ax : A \in \mathcal{A}\}$$

es denso para todo $x \in X \setminus \{0\}$. Así, como el conjunto es denso, existe $A \in \mathcal{A}$ de forma que $\|Ax - x_0\| < 1$, así que $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} u(A)$. Recíprocamente, tenemos que ver que $0 \notin \bigcup_{A \in \mathcal{A}} u(A)$. Si $0 \in u(A)$, se sigue que $\|x_0\| < 1$, lo cual es absurdo.
Ahora, tenemos que $\overline{KB} \subset X \setminus \{0\}$, ya que para todo $x \in B$ $\|Kx - Kx_0\| \leq \|x - x_0\| < 1$. Así que si $0 \in \overline{KB}$, se tendría de nuevo que $\|x_0\| < 1$ y volveríamos a llegar a contradicción. Así se tiene

$$\overline{KB} \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} u(A).$$

Como K es compacto, podemos entonces tomar $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ de forma que $\overline{KB} \subset \bigcup_{i=1}^{n} u(A_i)$. Definimos ahora para cada $i \in \{1, ..., n\}$ las aplicaciones $\alpha_i : \overline{KB} \to \mathbb{R}$ como

$$\alpha_i(y) = \text{máx}\{0, 1 - \|A_i y - x_0\|\}.$$

Observemos que son aplicaciones continuas por ser el máximo de dos aplicaciones continuas. También es claro que para todo $y \in \overline{KB}$ $0 \leq \alpha_i(y) \leq 1$. Además, para cada y siempre existe $i \in \{1, ..., n\}$ de forma que $\|A_i y - x_0\| < 1$, por tanto $\alpha_i(y) > 0$. Por tanto, si definimos las aplicaciones

$$\beta_i(y) = \frac{\alpha_i(y)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(y)}$$

están bien definidas y vuelven a ser aplicaciones continuas. Merece la pena señalar que $\sum_{i=1}^{n} \beta_i(y) = 1$ para todo $y \in \overline{KB}$. Con estos elementos a mano, podemos ya definir la función continua que nos dará el punto fijo que buscamos. Se define

$$\psi : B \to X$$

como
$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(Kx) A_i K(x).$$
Obviamente está bien definida, ya que $Kx \in \overline{KB}$ para todo $x \in B$ y es una aplicación continua por ser composición y suma de continuas. Veamos primero que $\psi(B) \subset B$. Dado $x \in B$ se tiene
$$\begin{aligned}\|\psi(x) - x_0\| &= \|\sum_{i=1}^{n} \beta_i(Kx) A_i K(x) - x_0\| = \|\sum_{i=1}^{n} \beta_i(Kx) A_i K(x) - \sum_{i=1}^{n} \beta_i(Kx) x_0\| \\ &= \|\sum_{i=1}^{n} \beta_i(Kx)(A_i Kx - x_0)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \beta_i(Kx) \|A_i Kx - x_0\|.\end{aligned}$$
Ahora obervemos que si $\|A_i Kx - x_0\| > 1$ entonces por definición $\beta_i(Kx) = 0$, así que tenemos que
$$\|\psi(x) - x_0\| \leq \sum_{i=1}^{n} \beta_i(Kx) = 1,$$
lo que prueba que $\psi(x) \in B$. No podemos aplicar aún el teorema de Schauder, porque aunque B es un conjunto cerrado y convexo, no es compacto. Vamos a buscar algún compacto que sea invariante por ψ dentro de la bola B. Observemos que como los operadores compactos conforman un ideal, los operadores $A_i K$ es compactos. Por tanto, el conjunto
$$\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i KB}$$
es compacto. Entonces, por el teorema de Mazur, se sigue que $\mathcal{C} := \overline{\mathrm{co}(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i KB})}$ es un conjunto compacto. Ahora, como $\beta_i(y) \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} \beta_i(y) = 1$ para todo $y \in \overline{KB}$, se sigue que $\psi(y)$ es combinación convexa de $A_i K(y) \in \overline{KB}$. Por tanto, $\psi(B) \subset \mathcal{C} \cap B$. Así, $\psi(\mathcal{C} \cap B) \subset \mathcal{C} \cap B$. Además, $\mathcal{C} \cap B$ es un conjunto no vacío porque contiene a $\psi(B)$. Finalmente, como es la intersección de dos conjuntos compactos y convexos, podemos aplicar el teorema de punto fijo de Schauder, y se sigue que existe $x \in \mathcal{C} \cap B$ tal que $\psi(x) = x$, es decir,
$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i(Kx) A_i K(x) = x.$$
Entonces, llamando $A = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(Kx) A_i \in \mathcal{A}$ se tiene que $AKx = x$, así que x es autovector de AK asociado al autovalor 1. Esto termina la demostración. $\square$

Podemos entonces probar el teorema de Lomonosov:
Demostración del teorema 2.2.1:
Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que $T \in \mathcal{B}(X)$ no tiene subespacios

híperinvariantes. Es decir, el álgebra $\{T\}'$ es un álgebra transitiva, pues solo tiene subespacios invariantes triviales. Tomemos K un operador compacto que conmute con T. Así, por el lema de Lomonosov, existe $A \in \{T\}'$ de forma que 1 es autovalor para AK. Es decir, el subespacio $N := \ker(AK - I)$ tiene dimensión mayor estricta que 0. Además, como $AK_{|N}$ es la identidad y AK es compacto, se sigue que N tiene dimensión finita, pues la bola unidad en N es compacta por ser AK compacto. Ahora, como A y K conmutan con T, se tiene que dado $x \in N$

$$AK(Tx) = T(AKx) = Tx,$$

por tanto $Tx \in N$ para todo $x \in N$, lo que prueba que N es invariante por T. Como N tiene dimensión finita, podemos extraer un autovalor λ para T. Así, el subespacio $M := \ker(T - \lambda I)$ es un subespacio cerrado claramente invariante por T, y dado cualquier $B \in \{T\}'$ se tiene que M es invariante por B, ya que dado $x \in M$

$$T(Bx) = B(Tx) = B(\lambda x) = \lambda Bx.$$

Así, $Bx \in M$ y M es invariante por B, por lo tanto M es híperinvariante para T y llegamos a contradicción. □

Como corolarios inmediatos vamos a enunciar algunos resultados que se mantuvieron como problemas abiertos durante decenas de años desde que se postuló el problema del subespacio invariante hasta que fueron resueltos por diferentes matemáticos en la segunda mitad del siglo XX:

Corolario 2.2.5. *Todo operador compacto posee un subespacio híperinvariante (en particular, invariante).*

Demostración.
Basta observar que todo operador compacto conmuta consigo mismo y aplicar el teorema de Lomonosov. □

Definición 2.2.6. Diremos que un operador $T \in \mathcal{B}(X)$ es **polinomialmente compacto** si existe un polinomio $p \in C[z]$ de forma que $p(T)$ es compacto.

Teorema 2.2.7. *Todo operador polinomialmente compacto tiene un subespacio híperinvariante (en particular, invariante).*

Demostración.
Sea $T \in B(X)$ con $p(T)$ compacto. Entonces, $p(T)$ es un operador compacto que conmuta con T y por el teorema de Lomonosov tiene un subespacio híperinvariante. □

Nota 2.2.8. Observemos que no hemos utilizado en ningún momento la hipótesis de que X sea un espacio reflexivo, así que merece la pena remarcar que el teorema de Lomonosov es válido en cualquier espacio de Banach complejo X.

2.3. El Teorema Espectral para Operadores Normales

En esta sección vamos a presentar el teorema espectral para operadores normales en espacios de Hilbert y veremos como aplicación que todo operador normal posee un subespacio híperinvariante no trivial. Las demostraciones de los resultados que no probaremos pueden consultarse en [25].
Comencemos recordando la definición de *operador normal*:

Definición 2.3.1. Diremos que $T \in \mathcal{B}(H)$ es **normal** si conmuta con su adjunto. Es decir, si

$$TT^* = T^*T.$$

El resultado principal de esta sección es el siguiente:

Teorema 2.3.2. *Sea $T \in \mathcal{B}(H)$ un operador normal no escalar. Entonces T tiene un espacio híperinvariante.*

Como ya hemos comentado, obtendremos este resultado como consecuencia del teorema espectral. Comencemos definiendo el concepto de *medida espectral*:

Definición 2.3.3. Sea (Ω, Σ) un espacio medible. Diremos que $E : \Sigma \to \mathcal{B}(H)$ es una **medida espectral** si cumple las siguientes propiedades:

(a) $E(\emptyset) = 0$, $E(\Omega) = I$.

(b) $E(A)$ es una proyección autoadjunta (ortogonal), para todo $A \in \Sigma$.

(c) $E(A_1 \cap A_2) = E(A_1) \circ E(A_2) = E(A_2) \circ E(A_1)$, para todos $A_1, A_2 \in \Sigma$.

(d) Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, entonces $E(A_1 \cup A_2) = E(A_1) + E(A_2)$.

(e) Para todos $x, y \in H$, si denotamos $E_{x,y}(A) = \langle E(A)x, y\rangle$ para todo $A \in \Sigma$, entonces $E_{x,y}$ es una medida compleja en Σ.

Es decir, una medida espectral es una aplicación E que asocia a cada conjunto medible una proyección ortogonal definida en H. Notemos que las propiedades exigidas a E recuerdan a las propiedades de una medida de probabilidad μ. Podemos entender la propiedad (a) como una equivalencia con la propiedad de $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\Omega) = 1$. Además, la propiedad (d) puede entenderse como aditividad finita. Observemos que en esta analogía no es completa, pues no reclamamos la aditividad numerable para E. Finalmente, la propiedad (e) nos permite generar medidas complejas $E_{x,y}$ para cada $x, y \in H$. Se cumplen las siguientes propiedades adicionales:

Proposición 2.3.4. *Sea E medida espectral en $\mathcal{B}(H)$ definida en (Ω, Σ). Entonces:*

(a) $E_{x,x}$ es una medida positiva para todo $x \in H$.

(b) Para cada $x \in H$, la aplicación $x \to E(A)H$ es una medida vectorial numerablemente aditiva.

(c) Si $\{A_n\} \subset \Sigma$ y $E(A_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $E\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$.

Como ocurre con las medidas positivas y las medidas complejas, las medidas espectrales nos permiten construir una teoría de integración. A nosotros nos bastará con definir las integrales para funciones E-esencialmente acotadas, concepto que definimos a continuación:

Definición 2.3.5. Sea E una medida espectral definida en (Ω, Σ). Definimos $L^\infty(E)$ como el espacio de funciones medibles $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tales que $E(\{|f| > C\}) = 0$. Si $f \in L^\infty(E)$ diremos que está **E- esencialmente acotada**.

Notemos la analogía en la definición de este espacio con los espacios $L^\infty(\mu)$, donde μ es una medida positiva o compleja cualquiera. Como en dichos casos, $L^\infty(E)$ es un espacio de Banach (tomando clases de equivalencia de funciones) con la siguiente norma:

$$\|f\|_{L^\infty(E)} = \text{mín}\{C > 0 : E(\{|f| > C\}) = 0\}.$$

Observemos ademas que si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es acotada en el sentido usual (existe $M > 0$ tal que $|f| \leq M$) entonces $f \in L^\infty(E)$, con $\|f\|_{L^\infty(E)} \leq M$. El siguiente resultado nos abre la puerta para definir las integrales de funciones de $L^\infty(E)$ con respecto a la medida espectral:

Proposición 2.3.6. *Sea E una medida espectral en $\mathcal{B}(H)$ definida en (Ω, Σ). Entonces, dada $f \in L^\infty(E)$ existe un único operador $T \in \mathcal{B}(H)$ de forma que*

$$\langle Tx, y\rangle = \int_\Omega f dE_{x,y}$$

para todo $x, y \in H$.

Definición 2.3.7. Sea E una medida espectral en $\mathcal{B}(H)$ definida en (Ω, Σ), y sea $f \in L^\infty(E)$. Definimos la **integral de f con respecto a E**

$$\int_\Omega f dE$$

como el único operador $T \in \mathcal{B}(H)$ que cumple que

$$\langle Tx, y\rangle = \int_\Omega f dE_{x,y}$$

para todo $x, y \in H$.

Es decir, la integral de una función en $L^\infty(\Omega)$ nos definirá un operador acotado $T \in \mathcal{B}(H)$. Como veremos más adelante, esta definición nos permitirá representar todo operador normal T como la integral de la función identidad $z \mapsto z$ definida sobre su espectro $\sigma(T)$. Esta representación es una herramienta muy potente gracias a las siguientes propiedades:

Proposición 2.3.8. *Sea E una medida espectral en $\mathcal{B}(H)$ definida en (Ω, Σ), $f, g \in L^\infty(E)$ y $T = \int f dE$, $g = \int g dE$. Se tiene:*

(a) $T^* = \int f dE$.

(b) $T \circ S = S \circ T = \int f g dE$.

(c) $\|T\| = \|f\|_{L^\infty(E)}$.

(d) $\sigma(T)$ es el E-rango esencial de f. Es decir, $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ es el abierto más grande G tal que $E(f^{-1}(G)) = 0$.

(e) Si $A \in \Sigma$ entonces $E(A) = \int_\Omega \chi_A dE$.

Enunciamos ahora el teorema espectral:

Teorema 2.3.9 (Teorema espectral para operadores normales)**.** *Sea $T \in \mathcal{B}(H)$ un operador normal. Entonces existe una única medida espectral E definida en la $\sigma-$álgebra de Borel de $\sigma(T)$ tal que*

$$\int_{\sigma(T)} z dE(z) = T.$$

Es más, T conmuta con todas las proyecciones $E(A)$, para todo Borel $A \in \sigma(T)$.

Esta representación nos permitirá extender el cálculo funcional analítico para operadores normales. Es decir, nos permitirá definir $f(T)$ para cualquier función $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ acotada, lo cual amplía enormemente la clase de las funciones disponibles para el cálculo analítico.

Definición 2.3.10. Sea $T \in \mathcal{B}(H)$ un operador normal y E la medida espectral que lo representa. Sea $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ medible Borel y acotada. Definimos entonces

$$\tilde{f}(T) = \int_{\sigma(T)} f(z) dE(z).$$

Se tienen las siguientes propiedades:

Proposición 2.3.11. *Sea $T \in \mathcal{B}(H)$ un operador normal, $f, g, f_n : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ funciones medibles y acotadas. Se tienen:*

(a) $\widetilde{fg}(T) = \tilde{f}(T) \circ \tilde{g}(T)$ *y* $\widetilde{f+g}(T) = \tilde{f}(T) + \tilde{g}(T)$.

(b) Si $g = \overline{f}$*, entonces* $\tilde{g}(T) = (\tilde{f}(T))^*$*.*

(c) Si f *es continua, entonces* $\sigma(\tilde{f}(T)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$*.*

(d) Si $f_n \to f$ *uniformemente en* $\sigma(T)$*, entonces* $\left\|\tilde{f}_n(T) - \tilde{f}(T)\right\| \to 0$*.*

(e) Si $S \in \{T\}'$*, entonces* $S \in \{\tilde{f}(T)\}'$*.*

Demostración del teorema 2.3.2.
Veamos que como T no es múltiplo escalar de la identidad, $\sigma(T)$ tiene al menos 2 puntos distintos. Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que el espectro se reduce a un punto. Es decir, existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\sigma(T) = \{\lambda_0\}$. Entonces se tiene para todo $x, y \in H$ que

$$\begin{aligned} \langle Tx, y\rangle &= \int_{\{\lambda_0\}} z dE_{x,y}(Z) = \int_{\sigma(T)} \lambda_0 dE_{x,y}(z) = \lambda_0 E_{x,y}(\sigma(T)) \\ &= \lambda_0 \langle E(\sigma(T))x, y\rangle = \langle \lambda_0 x, y\rangle . \end{aligned}$$

Así, se tiene que $T = \lambda I$, lo cual es absurdo.
Tomemos entonces $a, b \in \sigma(T)$ con $a \neq b$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ de forma que $B(a,\varepsilon) \cap B(b,\varepsilon) = \emptyset$. Definamos entonces $A = B(a,\varepsilon)\cap\sigma(T)$. Se tiene por tanto que A y $B = \sigma(T) \setminus A$ son conjuntos de Borel. Observemos que ambos son no vacíos, y al menos uno de ellos es abierto. Por tanto, se sigue que $E(A)$ y $E(B)$ son proyecciones no triviales. Además, como $A \cup B = \sigma(T)$ y $A \cap B = \emptyset$, se tiene que $E(A) + E(B) = I$ y $E(A)E(B) = E(B)E(A) = 0$, de donde se sigue que $P = E(A) \neq I$ y $E(B) = I - P$. Ahora, definimos

$$M = P(H).$$

Observemos que M es un subespacio cerrado y no trivial de H. Veamos que es híperinvariante para T. Para ello, observemos que $P = E(A) = \int_{\sigma(T)} \chi_A(z) dE(z) = \widetilde{\chi_A}(T)$. Por tanto, gracias a la propiedad (e) de la proposición 2.3.11 se sigue que si S conmuta con T, entonces S conmuta con P. Tomemos entonces $S \in \{T\}'$. Así, $PS = SP$. Tomemos $x \in M$, y veamos que $Sx \in M$. Tenemos que $Px = x$, así que

$$Sx = SPx = PSx = P(Sx) \in M,$$

lo que prueba que $M \in \operatorname{Lat} S$, y por tanto M es híperinvariante por T. □

Si observamos detenidamente la prueba, realmente hemos probado un resultado más fuerte, que resumimos en el siguiente corolario:

Corolario 2.3.12. *Sea* $T \in \mathcal{B}(H)$ *un operador normal no escalar. Entonces existe un subespacio cerrado* M *que reduce a todo operador* $S \in \{T\}'$*.*

Demostración.
Retomemos la notación de la prueba anterior. El subespacio M es invariante para todo operador $S \in \{T\}'$. Ahora, el mismo razonamiento utilizado es válido para el espacio $M^{\perp} = (I - P)(H) = E(B)(H)$. Entonces, $M^{\perp}$ es invariante para todo operador $S \in \{T\}'$, por lo tanto M reduce a todos los operadores S que conmutan con T, como queríamos. $\square$

Capítulo 3

Cálculo de Retículos Clásicos

En este capítulo vamos a presentar el cálculo explícito del retículo de subespacios invariantes de dos operadores clásicos (el shift y el operador de Volterra) y el retículo de la familia de las traslaciones en $L^2(\mathbb{R})$. Es decir, vamos a proporcionar una descripción explícita de sus subespacios invariantes y trataremos de estudiar las propiedades de orden de estos retículos.
Es de vital importancia notar que las pruebas que vamos a presentar en los dos primeros casos se basan fuertemente en la utilización de **modelos** que representen a nuestros operadores. La caracterización de los retículos de muchos operadores puede resultar una tarea inabarcable sin el uso de modelos. La estrategia a seguir será tratar de encontrar un espacio de Hilbert separable en el que podamos representar por semejanza al operador que queremos estudiar de forma más sencilla y caracterizar sus subespacios invariantes en este nuevo espacio.

3.1. El Retículo del Operador Shift

Vamos a comenzar ofreciendo una caracterización completa del retículo de subespacios invariantes del operador shift, gracias al teorema de Beurling. Vamos a seguir las ideas que se exponen sobre este tema en el libro de Rudin [29]. El operador shift se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &S : \ell_2 \to \ell_2 \\ &(a_0, a_1, ...) \mapsto (0, a_0, a_1, ...). \end{aligned}$$

Claramente es un operador acotado y es, de hecho, una isometría. Observamos rápidamente que los subespacios

$$M_k := \{(a_n)_{n\geq 0} \in \ell_2 : a_n = 0 \text{ para todo } n = 0, ..., k.\} \tag{3.1}$$

son claramente invariantes por S, pero cuesta mucho decidir si estos son sus únicos subespacios invariantes. Por ello, vamos a presentar un **modelo** de nuestro operador en el espacio de Hardy H^2, que es un espacio de Hilbert separable (que recordemos es siempre isométricamente isomorfo a ℓ_2). Estudiaremos entonces el operador shift en este espacio, que tomará una forma más sencilla de manejar como operador de multiplicación. Para ello, vamos a recordar los conceptos más básicos del espacio de Hardy.

3.1.1. El Espacio de Hardy H^2

Las pruebas de los resultados que vamos a exponer en esta sección pueden encontrarse con todo detalle en [12].
Definimos el espacio de Hardy H^2 como el espacio de las funciones analíticas definidas en el disco unidad $\mathbb{D}$ del plano complejo $\mathbb{C}$ cuyos sucesión de coeficientes de la serie de potencias centrada en el 0 están en ℓ_2. Es decir:

$$H^2 := \{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty\}.$$

Podemos dotar a H^2 del producto escalar definido como sigue. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{g}(n) z^n$ son funciones de H^2, entonces

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}. \tag{3.2}$$

Claramente este producto escalar induce una norma en H^2 definida como

$$\|f\|_{H^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \right)^{1/2}.$$

Como ya hemos comentado, se tiene que

Teorema 3.1.1. *El espacio H^2 es un espacio de Hilbert separable con el producto escalar definido en (3.2).*

Por tanto, H^2 es isométricamente isomorfo a ℓ_2, donde este isomorfismo viene dado por $T : \ell_2 \to H^2$, donde $T(a_0, a_1, a_2, ...) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Como los elementos de ℓ_2 son sucesiones acotadas, entonces la serie de potencias que engendra tiene radio de convergencia al menos 1, así que T está bien definida. Además, por definición la sucesión de coeficientes de cualquier función de H^2 está en ℓ_2. Estos hechos, junto con la unicidad de series de potencias, prueban que esta identificación es un isomorfismo isométrico.
Es muy útil, e imprescindible en muchos casos, la siguiente caracterización de la norma en H^2:

Teorema 3.1.2. *Sea $f \in H^2$. Se tiene que*

$$\|f\|^2 = \lim_{r \to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sup_{0 \le r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Se deduce fácilmente de este resultado que el espacio de funciones holomorfas acotadas en el disco, que se denota por H^∞, está contenido en el espacio de Hardy.
Es también primordial hablar del límite radial de una función del espacio de H^2. Dada $f \in H^2$ definimos la familia de funciones f_r como

$$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}) \quad \text{para todo } e^{i\theta} \in \mathbb{T},$$

con $0 \leq r < 1$, donde $\mathbb{T}$ es el toro, es decir, la frontera del disco unidad. Se sigue que $f_r \in L^2(\mathbb{T})$ para todo $0 \leq r < 1$. Definimos también el **valor frontera** de f como la función f^* cuya serie de Fourier viene dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)e^{i\theta}.$$

Se tiene

Teorema 3.1.3. *[Teorema del límite radial]. Sea $f \in H^2$. Entonces*

(a) $f^* \in L^2(\mathbb{T})$ *y* $\|f^*\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f\|_{H^2}$ *.*

(b) $\|f_r - f^*\|_{L^2(\mathbb{T})} \to 0$ *si* $r \to 1^-$*.*

(c) $f_r \to f^*$ *en casi todo* $\mathbb{T}$*.*

Gracias a este teorema, tenemos que el valor frontera de f coincide con su límite radial. Cuando no haya lugar a confusión, usaremos ambos términos indistintamente.
Este teorema nos permite entonces identificar H^2 con el subespacio de $L^2(\mathbb{T})$ de funciones con coeficientes de Fourier de índices negativos nulos.
Como consecuencia del teorema, podemos recuperar cualquier función del espacio de Hardy mediante la integral de Poisson de su función radial:

Corolario 3.1.4. *Sea $f \in H^2$. Entonces*

$$f = P[f^*],$$

donde $P[f^*]$ denota la integral de Poisson de f^*.

En cierta manera, el límite radial f^* recoge el comportamiento de f en la frontera del disco en la que no tiene por qué estar definida. De ahora en adelante y cuando no haya lugar a confusión, tomaremos el convenio de escribir f en vez de f^*.

Una vez expuestos los resultados más básicos sobre H^2, retomamos el estudio del operador shift S. Recordemos que se define como $S(a_0, a_1, ...) = (0, a_0, a_1, ...)$. Por el isomorfismo isométrico que hemos descrito, el shift en el espacio de Hardy vendrá definido como

$$S\left(\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)z^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n-1)z^n.$$

Es decir, $Sf(z) = zf(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Como ya hemos comentado, el operador shift se convierte en un operador de multiplicación en H^2. Recordemos cuál es su definición:

Definición 3.1.5. Dada $b \in H^\infty$, definimos el operador de multiplicación

$$M_b : H^2 \to H^2$$

como $M_b f = bf$ para todo $f \in H^2$.

Proposición 3.1.6. *Dada $b \in H^\infty$, el operador de multiplicación M_b está bien definido, es acotado y $\|M_b\| \leq \|b\|_\infty$.*

Así, tenemos que si T es el isomorfismo isométrico de $\ell_2 \to H^2$ se sigue que $S = T^{-1}M_zT$. Es decir, S es unitariamente equivalente al operador de multiplicación M_z. Cuando no haya lugar a confusión, llamaremos indistintamente S al shift en ℓ_2 y al shift M_z en H^2.
Entonces, si logramos caracterizar los subespacios invariantes asociados al operador M_z obtendremos la descripción completa para el shift definido en ℓ_2. Para ello, será necesario estudiar las funciones interiores del espacio H^2.

3.1.2. Productos de Blaschke y Funciones Interiores

Como ya hemos visto, los subespacios M_k que definimos en 3.1 son invariantes para S. Si traducimos estos espacios al lenguaje de los espacios de Hardy, tenemos que

$$M_k := \left\{ \sum_{n=k}^{\infty} \hat{f}(n) z^n \in H^2 \right\}.$$

Es decir, los subespacios de funciones de H^2 con un cero de orden k en el origen. Observemos que gracias a la expresión del shift como operador de multiplicación M_z, si f tiene ceros en $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset \mathbb{D}$, entonces Sf también se anulará en estos puntos. Por tanto, las variedades formadas por estas funciones también serán invariantes por S. Vamos entonces a estudiar la construcción de funciones con unos ceros determinados en el disco unidad:

Teorema 3.1.7. *Si $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{D}$ de forma que $\alpha_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty,$$

si $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y definimos

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \quad (z \in \mathbb{D}) \tag{3.3}$$

entonces $B \in H^\infty$ y solo se anula en los puntos α_n.

A la función B la llamamos **producto de Blaschke**. Cabe destacar que si alguno de los α_n se repite, entonces B tendrá un cero múltiple en ese punto. Además, cada factor del producto que define a B tiene módulo 1 en $\mathbb{T}$. Para poder realizar la prueba, necesitamos recordar el siguiente resultado:

Proposición 3.1.8. *Sea Ω una región en $\mathbb{C}$, y sean $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ no idénticamente nulas. Si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$$

converge uniformemente en compactos de Ω, entonces el producto

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

converge uniformemente en compactos de Ω, y en consecuencia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
Es más, tenemos

$$m(f; z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n; z),$$

donde $m(f; z)$ es la multiplicidad del cero de f en z (Si $f(z) \neq 0$, entonces $m(f; z) = 0$).

Demostración.
Ver [29].

Probamos entonces el resultado:
Demostración del teorema 3.1.7.
Vamos a aplicar la proposición anterior para probar el teorema. Consideramos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \right|.$$

Su n-ésimo término viene dado por

$$\left| \frac{\alpha_n + |\alpha_n| z}{(1 - \overline{\alpha_n} z)\alpha_n} (1 - |\alpha_n|) \right| \leq \frac{1 + r}{1 - r} (1 - |\alpha_n|),$$

si $|z| \leq r$. Por tanto, se sigue que $B \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y que solo tiene los ceros prescritos. Además, como cada factor del producto tiene módulo menor que 1, se sigue que $|B(z)| < 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$, por lo que $B \in H^{\infty}$. $\square$

Cabe destacar que como $B \in H^{\infty}$, entonces $B \in H^2$, por lo que podemos hablar de su límite radial B^*. El siguiente resultado muestra que podemos manejar bien el comportamiento de los productos de Blashcke en la frontera:

Proposición 3.1.9. *Si B es un producto de Blashcke, entonces $|B^*| = 1$ en casi todo $\mathbb{T}$.*

Demostración.
Observemos primero que como $|B| < 1$ en $\mathbb{D}$ se sigue que $|B^*| \leq 1$ en casi todo $\mathbb{T}$. Usamos el hecho de que las cantidades

$$M_1(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |B(re^{i\theta})| d\theta$$

son finitas para todo $f \in H^\infty$, y son no decrecientes respecto r (consultar [10], teorema 1.5). Entonces, aplicando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y que f_r converge en casi todo a f^* que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{i\theta})| d\theta.$$

Ahora, aplicamos esta desigualdad a la función $f = B/B_n$, donde B está definida como en 3.1.7 y B_n se define como

$$B_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}.$$

Ahora, observemos que cada B_n está bien definida en el disco cerrado, y se tiene para cada factor que

$$\left| \frac{\alpha_n - e^{i\theta}}{1 - \overline{\alpha_n} e^{i\theta}} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \right| = \left| \frac{\alpha_n - e^{i\theta}}{e^{i\theta} (\overline{e^{i\theta}} - \overline{\alpha_n})} \right| = |e^{-i\theta}| \left| \frac{\omega}{\overline{\omega}} \right| = 1$$

para todo $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$, por lo tanto $|B_n| = 1$ en $\mathbb{T}$. Así, obtenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{B(re^{i\theta})}{B_n(re^{i\theta})} \right| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |B^*(e^{i\theta})| d\theta,$$

pero además B_n converge uniformemente a B en cada compacto del disco, por tanto también lo hace en $r\mathbb{T}$ para todo $0 < r < 1$, así que se sigue que

$$1 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |B^*(e^{i\theta})| d\theta,$$

que junto al hecho de que $|B^*| \leq 1$ en casi todo prueba que $|B^*| = 1$ en casi todo $\mathbb{T}$. □

Recordemos que la variedad Y de funciones con ceros en $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\} \subset \mathbb{D}$ era una variedad invariante por S. Vamos a formalizar esta idea usando productos finitos de Blaschke. Si B es el producto asociado a los ceros $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$, entonces $f \in Y$ si y solo si $f/B \in H^2$, ya que f y B tienen el mismo número de ceros. Por tanto, $f \in Y$ si y solo si $f \in M_B H^2$.

Es decir, las variedades lineales $M_B H^2$ son invariantes por S, donde M_B denota el operador de multiplicación por B. Cabe preguntarse entonces ahora si este razonamiento puede ampliarse a los productos de Blaschke infinitos. Veremos más aún: vamos a introducir el concepto de **función interior**, que podemos entender como una generalización de productos de Blaschke. Vamos a probar que si ϕ es una función interior, entonces las variedades $M_\phi H^2$ son variedades cerradas y por tanto subespacios y que además son los únicos subespacios invariantes de S, lo que caracterizará su retículo, como queríamos.

Definición 3.1.10. Una **función interior** es una función $\phi \in H^\infty$ tal que $|\phi^*| = 1$ en casi todo $\mathbb{T}$.

Gracias al resultado anterior, sabemos que todos los productos de Blaschke son funciones interiores, así que en efecto podemos entender a estas funciones como generalizaciones de los productos de Blaschke.
Con el siguiente resultado vamos a ofrecer una caracterización de las funciones interiores en función de sus ceros y de las medidas singulares respecto a la medida de Lebesgue, cuya definición recordamos a continuación.

Definición 3.1.11. Dado un espacio de medida (X, Σ, μ) y $A \in \Sigma$, diremos que A es **soporte** de la medida μ si $\mu(M) = \mu(A \cap M)$ para todo $M \in \Sigma$. Además, decimos que dos medidas μ, ν definidas sobre el mismo espacio medible son **singulares** si tienen soportes disjuntos.

Se tiene:

Teorema 3.1.12. *Sea $\theta \in \mathbb{R}$, B un producto de Blaschke, μ una medida de Borel finita y positiva en $\mathbb{T}$ que es singular con respecto a la medida de Lebesgue, y*

$$\phi(z) = e^{i\theta} B(z) \exp\left(- \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t) \right) \qquad (z \in \mathbb{D}). \tag{3.4}$$

Entonces ϕ es una función interior, y toda función interior es de esta forma.

Necesitaremos algunos resultados previos para la prueba. Las demostraciones pueden ser consultadas en [29]. Primero, definimos la integral de Poisson de una medida de Borel positiva μ en $\mathbb{T}$ como

$$P[d\mu](z) = \int_{\mathbb{T}} P(z, e^{it}) d\mu(e^{it}) \qquad (z \in \mathbb{D}),$$

donde $P(z, e^{it}) = \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}$ es el núcleo de Poisson.

Proposición 3.1.13. *Si μ una medida de Borel positiva en $\mathbb{T}$ y la derivada de Radon-Nykodim de μ respecto a la medida de Lebesgue es 0 en $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$, entonces la integral de Poisson de la medida $u = P[d\mu]$ tiene límite no tangencial 0 en $e^{i\theta}$.*

Proposición 3.1.14. *Sea u una función armónica en $\mathbb{D}$ y sea $u_r(e^{i\theta}) = u(re^{i\theta})$ para $0 < r < 1$. Supongamos que*

$$\sup_{0<r<1} \|u_r\|_1 < \infty.$$

Entonces existe una única medida de Borel compleja μ en $\mathbb{T}$ tal que $u = P[d\mu]$. Además, toda función armónica positiva en $\mathbb{D}$ es la integral de Poisson de una única medida de Borel positiva en $\mathbb{T}$.

Demostración del teorema 3.1.12.
Si (3.4) se cumple y $g = \phi/B$, entonces $\log|g|$ es la integral de Poisson de la medida real $-\mu$, por lo tanto $\log|g| \leq 0$, así que $g \in H^\infty$ y se sigue entonces que $\phi \in H^\infty$. Además, la derivada de Radon-Nykodim de μ con respecto a la medida de Lebesgue m es 0 porque μ es singular con respecto a m, así que los límites radiales de $\log|g|$ son 0 en casi todo por la proposición 3.1.13. Como $|B^*| = 1$ en casi todo, se sigue por tanto que $|\phi^*| = 1$ en casi todo, así que es una función interior.
Ahora, supongamos que B es el producto de Blaschke formado por los ceros de la función ϕ y sea $g = \phi/B$. Entonces $\log|g|$ es armónica en U. Se sigue entonces que $|g| \leq 1$ en $\mathbb{D}$ y $|g^*| = 1$ en casi todo $\mathbb{T}$, así que $\log|g| \leq 0$. Concluimos entonces por la proposición 3.1.14 que $\log|g|$ es la integral de Poisson de $-d\mu$, donde μ es una medida positiva en $\mathbb{T}$. Como $\log|g^*| = 0$ en casi todo $\mathbb{T}$, se sigue que la derivada de Radon-Nykodim de μ con respecto a la medida de Lebesgue es 0 en casi todo $\mathbb{T}$, así que μ es singular. Finalmente, $\log|g|$ es la parte real de

$$h(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t),$$

y esto implica que $g = c\exp(h)$ para alguna constante c con $c \in \mathbb{T}$. Por tanto, ϕ es de la forma (3.4), como queríamos. □

Ejemplo 3.1.15. Podemos entonces definir de forma sencilla funciones interiores que no sean productos de Blaschke. Por ejemplo, bastaría con tomar $c = 1$ y μ la medida delta de Dirac en 1. Entonces obtendríamos

$$\phi(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Esta función interior será de gran importancia cuando estudiemos el retículo del operador de Volterra.

3.1.3. El Teorema de Beurling

Podemos entonces caracterizar el retículo del operador S gracias al teorema de Beurling:

Teorema 3.1.16 (Teorema de Beurling)**.** *Se tiene:*

(i) Para cada función interior ϕ el espacio $M_\phi H^2$ es un subespacio invariante de S en H^2.

(ii) Cada subespacio invariante Y de H^2 diferente de $\{0\}$ contiene una función interior ϕ de forma que $Y = M_\phi H^2$.

Demostración.

(i) Tomemos ϕ función interior. Por definición, sabemos que $|\phi^*| = 1$ en casi todo $\mathbb{T}$. Ahora, recordemos que para toda $f \in H^2$ tenemos que su norma en H^2 coincide con la norma en $L^2(\mathbb{T})$ de su límite radial. Es decir,

$$\|f\|_{H^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Gracias a esta propiedad, se sigue que el operador de multiplicación M_ϕ es una isometría, ya que

$$\|M_\phi f\|_{H^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\phi^*(e^{i\theta})|^2 |f^*(e^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{i\theta})|^2 d\theta = \|f\|_{H^2}^2 .$$

Veamos entonces gracias a que M_ϕ es isometría que $M_\phi H^2$ es cerrado. Para ello, tomamos una sucesión $(\phi \cdot f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y digamos que converge a $g \in H^2$. Entonces, la sucesión $(\phi \cdot f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, y por tanto también lo es $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por completitued, $f_n \to f \in H^2$, y así se tiene que $\phi \cdot f_n \to \phi \cdot f \in M_\phi H^2$, lo que prueba que es cerrado. Ahora basta ver que $M_\phi H^2$ es invariante por S, que recordemos que se expresa como el operador de multiplicación M_z. Esto es muy sencillo, ya que M_ϕ y M_z conmutan por ser operadores de multiplicación. Entonces, dada $M_\phi f$ se tiene

$$M_z M_\phi f = M_\phi(M_z f) \in M_\phi H^2,$$

lo que prueba que $M_\phi H^2$ es un subespacio invariante, como queríamos.

(ii) Consideremos ahora Y un subespacio invariante por S no trivial. Entonces, existe un mínimo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de forma que Y contiene a una función f de la forma

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \hat{f}(n) z^n \quad z \in \mathbb{D}$$

tal que $\hat{f}(k) = 1$. Por la construcción de f, está claro entonces que $f \notin M_z Y$. Se sigue además que $M_z Y$ es un subespacio cerrado y propio de Y, así que el complemento ortogonal de $M_z Y$ en Y no se reduce solo al 0, por lo que existe $\phi \in Y$ con $\|\phi\|_{H^2} = 1$ y tal que $\phi \perp M_z Y$. En particular, se tiene que $\phi \perp z^n \phi$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, por polarización y por el teorema 3.1.3, tenemos que el producto escalar en H^2 puede ser escrito como

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{i\theta})\overline{g^*(e^{i\theta})}d\theta$$

para todo $f, g \in H^2$. Así, se sigue que

$$0 = \langle \phi, z^n\phi\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\phi^*(e^{i\theta})|^2 e^{-in\theta}d\theta$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Si conjugamos en la igualdad anterior obtenemos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\phi^*(e^{i\theta})|^2 e^{in\theta}d\theta = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, todos los coeficientes de Fourier de la función $|\phi^*|^2$ son nulos excepto si $n = 0$, que es igual a 1. Como los coeficientes de Fourier determinan completamente a las funciones integrables, se sigue que $|\phi^*|^2 = 1$ en casi todo $\mathbb{T}$, así que deducimos lo mismo para $|\phi^*|$. Además, recordemos que $\phi \in H^2$ y ϕ es la integral de Poisson de ϕ^*, por lo que $|\phi| \leq 1$ en $\mathbb{D}$. Por tanto, $\phi \in H^\infty$ y ϕ es una función interior.
Ahora, recordemos que Y es invariante por S, así que tenemos que $z^n\phi \in Y$ para todo $n \geq 0$, así que $p\phi \in Y$ para cualquier polinomio p. Como los polinomios son densos en H^2, Y es cerrado y $\phi \in H^\infty$, se sigue que $M_\phi H^2 \subseteq Y$. Tenemos que probar que la inclusión no es propia, es decir, que $M_\phi H^2 = Y$. Como $M_\phi H^2$ es cerrado, basta entonces probar que para cualquier $h \in Y$ tal que $h \perp M_\phi H^2$ se tiene que $h = 0$.
Tomemos entonces $h \in Y$ de forma que $h \perp M_\phi H^2$. Se tiene entonces que $h \perp z^n\phi$ para todo $n \geq 0$, es decir:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h^*(e^{i\theta})\overline{\phi^*(e^{i\theta})}e^{-in\theta}d\theta = 0.$$

Ahora, como $h \in Y$, tenemos por invariancia sobre S que $z^n h \in Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por nuestra elección de ϕ se tiene que $z^n h \perp \phi$, o lo que es lo mismo

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h^*(e^{i\theta})e^{in\theta}\overline{\phi(e^{i\theta})}d\theta = 0$$

para todo $n \geq 0$. Así, tenemos que todos los coeficientes de Fourier de la función $h^*\overline{\phi^*}$ son nulos, por lo tanto $h^*\overline{\phi^*} = 0$ en casi todo $\mathbb{T}$. Finalmente, como sabemos que $|\phi^*| = 1$ en casi todo, se sigue que $h^* = 0$ en casi todo $\mathbb{T}$, y por tanto

$$\|h\|_{H^2} = \|h^*\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0,$$

lo que prueba que $h = 0$, como queríamos. □

Este teorema proporciona explícitamente la caracterización del retículo del operador shift en H^2, como queríamos. Observemos no obstante que nuestro problema inicial era caracterizar el retículo del operador shift en ℓ_2. Sabemos que si $T : \ell_2 \to H^2$ es el isomorfismo isométrico que presentamos anteriormente, entonces los subespacios invariantes de S en ℓ_2 vienen dador por

$$\text{Lat } S = \{T^{-1}(\phi H^2) : \phi \text{ es interior}\}.$$

Esta descripción puede no resultar del todo satisfactoria, pero por el momento no es conocida ninguna caracterización de los coeficientes de Taylor de las funciones del subespacio ϕH^2 cuando ϕ es una función interior, por tanto la descripción obtenida es la mejor que podemos proporcionar.
Finalicemos esta sección mostrando algunas propiedades de orden de los retículos:

Corolario 3.1.17. *Sean ϕ_1 y ϕ_2 funciones interiores.*

(i) $M_{\phi_1}H^2 \subset M_{\phi_2}H^2$ *si y solo si* ϕ_1/ϕ_2 *es interior.*

(ii) $M_{\phi_1}H^2 = M_{\phi_2}H^2$ *si y solo si* ϕ_1/ϕ_2 *es constante. Es decir, cualquier subespacio* $M \in$ *Lat* S *viene representado unívocamente por una función interior salvo producto por un número complejo de módulo* 1*.*

Demostración.

(i) Si $M_{\phi_1}H^2 \subset M_{\phi_2}H^2$, entonces $\phi_1 \in M_{\phi_2}H^2$, es decir, existe $f \in H^2$ de forma que $\phi_1 = \phi_2 \cdot f$, por lo que $\phi_1/\phi_2 \in H^2$. Además, como ϕ_1 y ϕ_2 son acotadas en $\mathbb{D}$ y están en H^∞, se sigue que ϕ_1/ϕ_2 está acotada, como queríamos.
Supongamos ahora que $\phi_3 = \phi_1/\phi_2$ es interior. Entonces $\phi_1 f = \phi_2(\phi_3 f)$ para todo $f \in H^2$, y por tanto $\phi_1 H^2 \subset \phi_2 H^2$.

(ii) Supongamos que $M_{\phi_1}H^2 = M_{\phi_2}H^2$. Entonces, $\phi_1 \in M_{\phi_2}H^2$, es decir, existe $f \in H^2$ de forma que $\phi_1 = \phi_2 \cdot f$, por lo que $\phi_1/\phi_2 \in H^2$. De igual forma, se sigue que $\phi_2/\phi_1 \in H^2$. Veamos que cualquiera de estos dos cocientes es constante. Llamemos $\phi = \phi_1/\phi_2$ y sea $h = \phi + 1/\phi$. Entonces tenemos que $h \in H^2$, y como $|\phi^*| = 1$ en casi todo $\mathbb{T}$, se sigue que h es real en casi todo $\mathbb{T}$, ya que se tiene que

$$h^* = \phi^* + 1/\phi^* = \phi^* + \overline{\phi^*},$$

que claramente es real en casi todo el toro. Ahora, recordemos que por el corolario 3.1.4 se tiene que h es la integral de Poisson de h^*, así que deducimos que h es una función real en $\mathbb{D}$, por tanto h es constante. Esto implica que ϕ es constante. Además, como $|\phi^*| = 1$, se sigue que $\phi \in \mathbb{T}$, como queríamos.
Supongamos ahora que ϕ_1/ϕ_2 es constante. Entonces ϕ_2/ϕ_1 también lo es. Basta aplicar el apartado (i) para obtener $\phi_1 H^2 = \phi_2 H^2$.

□

Gracias al teorema 3.1.12 podemos caracterizar estas propiedades de orden en función de los ceros de las funciones interiores y de las medidas que las representan:

Corolario 3.1.18. *Sean ϕ_1 y ϕ_2 dos funciones interiores, y denotemos por μ_1 y μ_2 las dos medidas que representan a estas funciones respectivamente como en (3.4). Entonces:*

(a) $M_{\phi_1}H^2 \subset M_{\phi_2}H^2$ si y solo si todos los ceros de ϕ_2 son ceros de ϕ_1 y $\mu_1 - \mu_2$ es una medida positiva.

(b) $M_{\phi_1}H^2 = M_{\phi_2}$ si y solo si ϕ_1 y ϕ_2 tienen los mismos ceros y $\mu_1 = \mu_2$.

Demostración.

(a) Sabemos que $M_{\phi_1}H^2 \subset M_{\phi_2}H^2$ si y solo si ϕ_1/ϕ_2 es una función interior. Si ponemos

$$\phi_1(z) = e^{i\theta_1}B_1(z)\exp\left(-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu_1(t)\right)$$

y

$$\phi_2(z) = e^{i\theta_2}B_2(z)\exp\left(-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu_2(t)\right),$$

donde B_1 y B_2 son los productos de Blaschke con los ceros de ϕ_1 y ϕ_2 respectivamente. Entonces,

$$\frac{\phi_1(z)}{\phi_2(z)} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}\frac{B_1(z)}{B_2(z)}\exp\left(-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d(\mu_1-\mu_2)(t)\right)$$

será interior si y solo si B_1/B_2 es un producto de Blaschke y $\mu_1 - \mu_2$ es una medida positiva finita singular respecto a la medida de Lebesgue. Está claro que B_1/B_2 será un producto de Blaschke si y solo si los ceros de ϕ_2 son todos ceros de ϕ_1, y la medida $\mu_1 - \mu_2$ es claramente finita y singular respecto a la medida de Lebesgue. Entonces, solo necesitamos exigir que $\mu_1 - \mu_2$ sea positiva, lo que prueba el resultado.

(a) Sabemos que $M_{\phi_1}H^2 = M_{\phi_2}H^2$ si y solo si ϕ_1/ϕ_2 es constante. Con la notación de la demostración del apartado anterior, se tiene

$$\frac{\phi_1(z)}{\phi_2(z)} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}\frac{B_1(z)}{B_2(z)}\exp\left(-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d(\mu_1-\mu_2)(t)\right),$$

que será constante si y solo si $\mu_1 = \mu_2$ y $B_1 = B_2$, lo que prueba que ϕ_1 y ϕ_2 tienen exactamente los mismo ceros.

□

3.2. El Retículo del Operador de Volterra

En esta sección caracterizaremos el retículo del operador de Volterra en $L^2(0,1)$ y probaremos es un operador con retículo totalmente ordenado, que denominamos **operador unicelular**. Es decir, el retículo del operador de Volterra es pequeño en el sentido del orden.
La caracterización de su retículo utilizando las técnicas que nosotros vamos a mostrar la realizó Donald Sarason en [30].
Se define el operador de Volterra $V \in \mathcal{B}(L^2(0,1))$ como

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Está claro que este operador está bien definido y es lineal. Para ver que es acotado, basta ver que:

$$\|Vf\|_{L^2}^2 = \int_0^1 \left| \int_0^x f(t)dt \right|^2 dx \leq \|f\|^2 \int_0^1 \|f\|_{L^2}^2 \, xdx = \frac{1}{2} \|f\|^2 .$$

Así, $\|V\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
El resultado principal de esta sección es el siguiente:

Teorema 3.2.1. *Si definimos* $M_a := \{f \in L^2(0,1) : f = 0$ *en casi todo* $[0,a]\}$ *para* $a \in [0,1]$ *se tiene que*

$$Lat\ V = \{M_a : a \in [0,1]\}.$$

Ahora, consideramos la función interior

$$\psi(z) = \exp(\frac{z+1}{z-1}).$$

Sabemos que es interior gracias al ejemplo 3.1.15. Ahora, denotamos por $Y = (\psi H^2)^\perp$ y por $P : H^2 \to Y$ a la proyección ortogonal. Entonces, definimos $T = P \circ S_{|Y}$, donde $S \in \mathcal{B}(H^2)$ es el operador shift. La estrategia de la prueba consiste en:

(1) Probaremos que T es unitariamente equivalente a $W = f(V)$, donde $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$.

(2) A continuación, demostraremos un resultado general que nos permitirá deducir que $\text{Lat } W = \text{Lat } V$.

(3) Finalmente, valiéndonos del teorema de Beurling, caracterizaremos el retículo de T. Así, obtendremos el retículo de W y por tanto el de V, como queremos.

Empecemos por tanto con nuestra construcción. Se tiene:

Teorema 3.2.2. *El operador* $W = (I - V)(V + I)^{-1}$ *es unitariamente equivalente a* T.

Debemos presentar el espacio de Hardy en el semiplano superior para poder realizar la prueba. Consideramos el semiplano superior

$$\Pi := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}.$$

Entonces, se define el **espacio de Hardy en el semiplano superior** como

$$H^2(\Pi) := \{f \in \mathcal{H}(\Pi) : \|f\|_{H^2(\Pi)} < \infty\},$$

donde

$$\|f\|_{H^2(\Pi)}^2 = \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2 dx.$$

Se tiene que $H^2(\Pi)$ es un espacio de Hilbert con la norma definida anteriormente y el producto escalar asociado, como deduciremos de la siguiente proposición:

Proposición 3.2.3. *La aplicación*

$$\begin{aligned} U_2 : H^2(\Pi) &\to H^2 \\ f \to U_2 f(z) &= \frac{2\sqrt{\pi}}{1-z} f\left(i\frac{1+z}{1-z}\right) \end{aligned}$$

es un isomorfismo isométrico.

Una demostración de este resultado puede encontrarse en ([13], p. 106).
Será imprescindible utilizar el siguiente resultado, que afirma que gracias la fórmula de inversión de Fourier podemos encontrar un isomorfismo isométrico entre $H^2(\Pi)$ y $L^2(0, +\infty)$:

Teorema 3.2.4 (Teorema de Paley Wiener)**.** *Sea* $f \in H^2(\Pi)$. *Entonces existe* $F \in L^2(0, +\infty)$ *de forma que*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} F(t) e^{itz} dt \quad (z \in \Pi), \tag{3.5}$$

donde

$$F(t) = e^{ty} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+iy) e^{-itx} dx.$$

Además, $\|f\|_{H^2(\Pi)} = \|F\|_{L^2(0,+\infty)}$.

La prueba de este resultado puede encontrarse en ([29], p. 372). Ya podemos demostrar el teorema anterior:
Demostración del teorema 3.2.2.
Será conveniente a lo largo de la prueba considerar $L^2(0, 1)$ como subespacio de $L^2(0, \infty)$ de L^2. Consideramos $Q : L^2(0, \infty) \to L^2(0, 1)$ la proyección ortogonal. Observemos que

Q es el operador de multiplicación en $L^2(0,\infty)$ con símbolo $\chi_{[0,1]}$. Ahora, definimos el operador $K \in \mathcal{B}(L^2(0,\infty))$

$$(Kf)(x) = \int_0^x f(t)e^{t-x}dt.$$

Observemos que como $\|V\| \le 1/\sqrt{2}$, $(V+I)$ es invertible. Probaremos primero que

$$(V+I)^{-1} = Q(I-K)_{|L^2(0,1)}.$$

Para ello, tomemos $f \in L^2(0,1)$. Tenemos que ver que $(I+V)Q(1-K)f = f$. Fijemos $s \in [0,1]$. Se tiene

$$(QKf)(s) = \chi_{[0,1]} \int_0^s f(t)e^{t-s}dt = \int_0^s f(t)e^{t-s}dt,$$

y se sigue que

$$[(I+V)Q(I-K)f](s) = f(s) + \int_0^s f(t)dt - \int_0^s f(t)e^{t-s}dt - \int_0^s \int_0^x f(t)e^{t-x}dtdx.$$

Ahora, por el teorema de Fubini se tiene que

$$\int_0^s \int_0^x f(t)e^{t-x}dtdx = \int_0^s f(t)\left(\int_t^s e^{t-x}dx\right)dt = \int_0^s (f(t) - f(t)e^{t-s})dt.$$

Así,

$$[(I+V)Q(I-K)f](s) = f(s)$$

y

$$(I+V)^{-1} = Q(1-K)_{|L^2(0,1)}.$$

Se sigue entonces que

$$W = (I-V)(I+V)^{-1} = 2(I+V)^{-1} - I = Q(I-2K)_{|L^2(0,1)}.$$

Basta entonces probar que $(I-2K)$ es unitariamente equivalente a S.
Vamos a contruir un isomorfismo isométrico de $L^2(0,\infty)$ a H^2. Sabemos por el teorema de Paley-Wiener que la aplicación

$$U_1 : L^2(0,\infty) \to H^2(\Pi)$$

definida por $(Uf)(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(t)e^{iwt}dt$ es un isomorfismo isométrico. Ahora, la aplicación U_1 dada en la proposición anterior por

$$U_2f(z) = \frac{2\sqrt{\pi}}{1-z} f\left(i\frac{1+z}{1-z}\right)$$

también es un isomorfismo isométrico. Por tanto, la composición U_2U_1 es una isometría de $L^2(0,\infty)$ a H^2. En otras palabras, el operador $U = U_2U_1 : L^2(0,\infty) \to H^2$ definido por

$$(Uf)(z) = \frac{\sqrt{2}}{1-z}\int_0^\infty f(t)e^{-\frac{1+z}{1-z}t}dt$$

es un isomorfismo isométrico.
Veamos que $SU = U(I-2K)$. Para ello, tomemos $f \in L^2(0,\infty)$. Entonces,

$$U(I-2K)(f)(z) = (Uf)(z) - 2(UKf)(z),$$

y

$$\begin{aligned}(UKf)(z) &= \frac{\sqrt{2}}{1-z}\int_0^\infty \left(\int_0^t f(s)e^{s-t}ds\right)e^{-\frac{1+z}{1-z}t}dt = \frac{\sqrt{2}}{1-z}\int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{\left(-\frac{1+z}{1-z}-1\right)t}dt\right)f(s)e^s ds\\ &= \frac{\sqrt{2}}{1-z}\int_0^\infty \frac{1-z}{2}e^{\left(-\frac{1+z}{1-z}-1\right)s}f(s)e^s ds = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\infty f(s)e^{-\frac{1+z}{1-z}s}ds.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}U(I-2K)(f)(z) &= (Uf)(z) - \sqrt{2}\int_0^\infty f(s)e^{-\frac{1+z}{1-z}s}ds = (Uf)(z) - (1-z)(Uf)(z)\\ &= z(Uf)(z) = (SUf)(z).\end{aligned}$$

Se sigue por tanto que $SU = U(I-2K)$, o lo que es lo mismo, $U^{-1}SU = 1-2K$, como queríamos. □

El siguiente paso es probar un teorema que nos de condiciones suficientes para asegurar que el retículo de un operador coincide con el retículo de una función analítica de dicho operador. Para ello, recordemos que el espectro total $\eta(\sigma(T))$ de un operador es el menor conjunto simplemente conexo conteniendo a $\sigma(T)$.

Teorema 3.2.5. *Sea H un espacio de Hilbert complejo y separable y sea $T \in \mathcal{B}(H)$. Si f es una función holomorfa y biyectiva en un conjunto abierto que contiene a $\eta(\sigma(T))$, entonces Lat T = Lat $f(T)$.*

Debemos presentar algunos resultados previos para realizar la prueba de este teorema. Primero, veamos la relación entre el espectro de un operador restringido a uno de sus subespacios invariantes y el espectro total:

Proposición 3.2.6. *Si $M \in$ Lat T, entonces $\sigma(T_{|M}) \subset \eta(\sigma(T))$.*

Demostración.
Primero, notemos que si $\lambda \in \sigma_{ap}(T_{|M})$ implica que existe una sucesión (x_n) de vectores

unitarios tales que $\|(T-\lambda)x_n\|$ converge a 0. Entonces, $\sigma_{ap}(T_{|M}) \subset \sigma_{ap}(T)$. Ahora, por el teorema 1.2.9,

$$\partial\sigma(T_{|M}) \subset \sigma_{ap}(T_{|M}) \subset \sigma(T).$$

Ahora, si $\sigma(T_{|M})$ contiene puntos de la componente no acotada de $\rho(T)$, entonces $\partial\sigma(T_{|M})$ corta a la componente no acotada de $\rho(T)$ y eso es imposible por lo anterior. □

Proposición 3.2.7. *Sea $T \in \mathcal{B}(H)$ y $M \in Lat\ T$. Si f es analítica en un abierto conteniendo a $\sigma(T) \cup \sigma(T_{|M})$, entonces $M \in Lat\ f(T)$ y $f(T_{|M}) = f(T)_{|M}$.*

Demostración.
Comencemos tomando una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ en el abierto en el que f es holomorfa de forma que γ rodee a $\sigma(T) \cup \sigma(T_{|M})$. Entonces se tiene que

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (z-T)^{-1} f(z)dz.$$

Ahora, veamos que como la imagen de γ está contenida en $\rho(T) \cap \rho(T_{|M})$, se tiene que $(z-T_{|M})^{-1} = (z-T)^{-1}_{|M}$ y $M \in \text{Lat } (z-T)^{-1}$ para todo $z \in \gamma([a,b])$.
Para ello, observemos que si $x \in M$, y ponemos $(z-T_{|M})x = u$, $(z-T)^{-1}x = v$ podemos aplicar $(z-T)$ para obtener $x = (z-T)u = (z-T)v$, de donde deducimos que $u = v$ y por tanto $(z-T_{|M})^{-1} = (z-T)^{-1}_{|M}$. Así, dado $x \in M$ se tiene que

$$(z-T)^{-1}x = (z-T_{|M})^{-1}x = y,$$

de donde deducimos que $x = zy - Tx$, así que $zy = x - Tx \in M$, lo que prueba que $M \in \text{Lat } (z-T)^{-1}$.
Esto prueba el resultado, ya que $f(A)$ es límite uniforme de funciones simples simples de la forma $\sum_{j=1}^n \alpha_j (z_j - T)^{-1}$ con $z_j \in \gamma([a,b])$. □

Corolario 3.2.8. *Si f es analítica en un abierto conteniendo a $\eta(\sigma(T))$, entonces $Lat\ T \subset Lat\ f(T)$.*

Demostración.
Sea $M \in \text{Lat } T$. Por la proposición 3.2.6 tenemos que $\sigma(T_{|M}) \subset \eta(\sigma(T))$. Por tanto, f es analítica en un abierto que contiene a $\sigma(T) \cup \sigma(T_{|M})$ y $M \in \text{Lat } f(T)$ por el resultado anterior. □

Ya podemos probar nuestro resultado:
Demostración del teorema 3.2.5.
Primero, observemos que por el corolario anterior se tiene que Lat $T \subset$ Lat $f(T)$. Denotemos por U un abierto que contenga a $\eta(\sigma(T))$ y tal que $\overline{U}$ está contenido en el abierto en el que f es analítica. Entonces, $f(U)$ es abierto, y $f(U)$ contiene a $\sigma(f(T))$. Para ello, basta aproximar $f(T)$ uniformemente por polinomios y aplicar el teorema de la aplicación

espectral. Ahora, como $f_{|\overline{U}}$ es un homeomorfismo, se sigue que $\eta(\sigma(f(T))) \subset f(\overline{U})$. Denotemos ahora por g a la inversa de f, que es una función analítica que lleva $f(U)$ en U. Entonces, $g(f(T)) = T$ y por el corolario anterior se sigue que Lat $f(T) \subset$ Lat T, lo que concluye la prueba. □

Para poder aplicar el teorema 3.2.5 a nuestro operador $W = f(V)$ debemos comprobar que se cumplen las hipótesis del teorema. Para ello vamos a demostrar que V es un operador *cuasinilpotente*, que definimos a continuación:

Definición 3.2.9. Diremos que un operador $T \in \mathcal{B}(H)$ es **cuasinilpotente** si $\sigma(T) = \{0\}$.

Está claro por tanto que si V es cuasinilpotente se cumplirán las hipótesis del teorema 3.2.5, ya que f es holomorfa y biyectiva en $\mathbb{D}$. Para probar que el espectro de V se reduce a $\{0\}$, debemos valernos del siguiente teorema sobre el espectro de los operadores compactos:

Teorema 3.2.10. *Sea $T \in \mathcal{B}(H)$ un operador compacto. Entonces, todo elemento no nulo del espectro de T es un autovalor para T. Es decir, $\sigma_p(T) \supseteq \sigma(T) \setminus \{0\}$.*

La prueba de este resultado puede consultarse en ([21], teorema 1.4.11). Se tiene:

Proposición 3.2.11. *El operador de Volterra V es compacto y cuasinilpotente.*

Demostración.
Para probar que V es compacto, vamos a ver que es límite en la topología de la norma de operadores de una sucesión de operadores de rango finito. Tomemos $n \in \mathbb{N}$. Definimos para cada $1 \leq k < n$

$$\alpha_{n,k}(f) = \int_0^{k/n} f(t)dt$$

para todo $f \in L^2[0,1]$. Ahora, definimos

$$V_n(f) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n,k}\chi_{[k/n,(k+1)/n]}.$$

Observemos que $\mathrm{Im}(V_n) = \mathrm{span}\{\chi_{[k/n,(k+1)/n]} : k = 1, \cdots, n\}$. Por tanto, son operadores de rango finito y acotados. Ahora tomemos $f \in L^2(0,1)$ y $k/n \leq x \leq (k+1)/n$. Se tiene que

$$|V_n f(x) - Vf(x)| = \left| \int_{k/n}^x f(t)dt \right| \leq \sqrt{x - k/n}\, \|f\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Así, $\|V_n f - Vf\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ para todo $f \in L^2(0,1)$, por lo que $\|V_n - V\| \leq 1/\sqrt{n}$. Por tanto, $V_n \to V$ en la norma de operadores y V es compacto por ser límite de operadores de rango finito.
Ahora, por el teorema , sabemos que si $\lambda \in \sigma(V)$ es no nulo, entonces es autovalor para

V. Vamos a probar que $0 \in \sigma(T)$ y que no tiene autovalores, lo que terminará la prueba del teorema.
Observemos que por el teorema fundamental del cálculo Vf es continua para todo $f \in L^2(0,1)$, lo que prueba que V no es sobreyectivo, por lo que no es invertible. Así, $0 \in \sigma(T)$. Supongamos ahora que $\lambda \neq 0$ es autovalor para V. Es decir, existe una autofunción $f \in L^2(0,1)$ tal que $Vf = \lambda f$. Observemos que Vf es continua, así que también lo es f. Ahora, por el primer teorema fundamental del cálculo, Vf es derivable y por tanto también lo es f. Si derivamos, tenemos que $f = \lambda f'$ y $f(0) = 0$. Por tanto, f es la única solución de la edo

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{\lambda} y \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Ahora, la única solución de esta ecuación es $y \equiv 0$, asi que deducimos que $f \equiv 0$, lo que contradice el hecho de que f es autofunción. Así, se sigue que V no tiene autovalores no nulos, por tanto $\sigma(T) = \{0\}$, como queríamos. □

Finalmente, vamos a caracterizar el retículo del operador $T = P \circ S_{|Y}$. La equivalencia unitaria de este operador con $W = f(V)$ nos dará finalmente el retículo buscado.

Teorema 3.2.12. *Sean $\phi(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$, $Y = (\phi H^2)^\perp$, $P : H^2 \to Y$ la proyección ortogonal y $T = P \circ S$, donde S es el operador shift en H^2. Entonces*

$$Lat\ T = \{P(\psi_a H^2) : \psi(z) = \exp\left(a\frac{z+1}{z+1}\right), a \in [0,1]\}.$$

Veamos un par de lemas que serán necesarios para la prueba:

Lema 3.2.13. *Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert complejo y separable H, sea $S \in \mathcal{B}(H)$ y supongamos que $M \in Lat\, S$. Consideramos $P : H \to M^\perp$ la proyección ortogonal y sea $T = PS_{|M^\perp}$. Entonces $Y \in Lat\ T$ si y solo si $Y \oplus M \in Lat\ S$.*

Demostración.
Tomemos primero $Y \in \text{Lat } T$ y tomemos $f \in Y$, $g \in M$. Entonces $S(f+g) = Sf + Sg$. Ahora $Sg \in M$, y $Sf = PSf + (I-P)Sf = Tf + (I-P)Sf$. Entonces se sigue que $(I-P)Sf \in M$, y por tanto $S(f+g) \in Y \oplus M$. Por tanto, $Y \oplus M \in \text{Lat } S$. Ahora, sea $Y \oplus M \in \text{Lat } S$ y $f \in Y$. Se tiene que $f \in Y \oplus M$ y por tanto $Sf \in Y \oplus M$. Finalmente, $PSf \in M^\perp$, por lo que $PSf \in Y$. □

Lema 3.2.14. *Sea $\phi(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$. El cociente ϕ/ψ es interior si y solo si*

$$\psi(z) = e^{i\theta} \exp\left(a\frac{z+1}{z-1}\right)$$

con $a \in [0,1]$ y $\theta \in \mathbb{R}$.

Demostración.
Sabemos por el teorema 3.1.12 que ϕ/ψ es interior si y solo si todos los ceros de ψ son ceros de ϕ y la diferencia de las medidas que las representan es una medida positiva. Observemos que como ϕ no tiene ceros, se sigue que ψ tampoco los tiene. Además, la medida que representa a ϕ es la medida que vale 1 en todos los conjuntos que contienen a 1 y 0 en el resto. Por tanto, ϕ/ψ será interior si y solo si la medida que representa a ψ vale $a \in [0,1]$ en 1 y 0 en el resto de $\mathbb{T}$. Así, se tiene que $\psi(z) = e^{i\theta} \exp\left(a\frac{z+1}{z-1}\right)$, como queríamos. $\square$

Ya podemos completar la prueba del teorema 3.2.12.
Demostración.
Sabemos por el lema 3.2.13 que $M \in \text{Lat } T$ si y solo si $M \oplus (\phi H^2) \in \text{Lat } S$. Ahora, sabemos por el teorema de Beurling que existe ψ interior de forma que $M \oplus (\phi H^2) = \psi H^2$. Además, por el corolario 3.1.17 se sigue que $M = \psi H^2$, donde ϕ/ψ es interior. Entonces, por el lema 3.2.14 tenemos por tanto que $\text{Lat } T = \{P(\psi_a H^2) : \psi_a(z) = \exp\left(a\frac{z+1}{z+1}\right), a \in [0,1]\}$, como queríamos. $\square$

Podemos entonces probar la caracterización del retículo de Volterra:
Demostración.
Como V es un operador cuasinilpotente por la proposición 3.2.11 podemos aplicar el teorema 3.2.5 a $W = f(V)$, donde $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$. Por tanto, $\text{Lat } V = \text{Lat } W$. Ahora, sabemos que T es unitariamente equivalente a W mediante el operador U construido en la prueba de 3.2.2. Además, por la proposición 2.1.18, se tiene que

$$\text{Lat } V = U^{-1}(\text{Lat } T) = \{U^{-1}(\psi_a H^2) : \psi(z) = \exp\left(a\frac{z+1}{z+1}\right), a \in [0,1]\}.$$

Basta entonces computar los subespacios $U^{-1}(\psi_a H^2)$ para lograr nuestro resultado. Vamos a probar que $U(M_a) = \psi_a H^2$. Para ello, tomemos $f \in L^2(0,\infty)$ de forma que $f = 0$ en casi todo $[0,a]$. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{(Uf)(z)}{\psi_a(z)} &= e^{-a\frac{z+1}{z-1}} \frac{\sqrt{2}}{1-z} \int_0^\infty f(t) e^{-t\frac{1+z}{1-z}dt} = \frac{\sqrt{2}}{1-z} \int_a^\infty f(t) e^{-\frac{1+z}{1-z}(t-a)dt} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{1-z} \int_0^\infty f(t+a) e^{-\frac{1+z}{1-z}t} dt.\end{aligned}$$

Así, se deduce que (Uf/ψ_a) pertenece a H^2, y por lo tanto $Uf \in \psi_a H^2$, lo que prueba que $UM_a \in \psi_a H^2$ para todo $a \in [0,1]$. Para la otra inclusión, tomemos $\psi_a g \in \psi_a H^2$. Entonces $g = Uf$ para alguna $f \in L^2(0,\infty)$. Es decir,

$$g(z) = \frac{\sqrt{2}}{1-z} \int_0^\infty f(t) e^{-t\frac{1+z}{1-z}} dt.$$

Se sigue por tanto que

$$\psi_a(z)g(z) = \frac{\sqrt{2}}{1-z}\int_0^\infty f(t)e^{-\frac{1+z}{1-z}(t+a)}dt = \frac{\sqrt{2}}{1-z}\int_a^\infty f(t-a)e^{-t\frac{1+z}{1-z}}dt.$$

Ahora, si definimos $h(t) = f(t-a)\chi_{[a,\infty)}(t)$ para todo $t \geq 0$, se sigue que $h \in M_a$ y $\psi_a g = Uh$, como queríamos. □

Terminamos esta sección demostrando que V es unicelular, como enunciamos al comienzo de nuestro estudio:

Corolario 3.2.15. *V es un operador unicelular. Es más, Lat V es anti-isomorfo a $[0,1]$ en el sentido del orden.*

Demostración.
Como Lat $V = \{M_a : a \in [0,1]\}$, es obvio que la aplicación $\alpha :$ Lat $V \to [0,1]$ definida por $M_a \mapsto a$ es una aplicación biyectiva. Ahora, observemos que si $a \leq b$ entonces $M_b \subset M_a$, por lo tanto α es un anti-isomorfismo, como queríamos probar. □

3.3. El Retículo de las Traslaciones en $L^2(\mathbb{R})$

En esta última sección no vamos a caracterizar el retículo de un solo operador, sino que caracterizaremos el retículo de subespacios invariantes de la de operadores en $L^2(\mathbb{R})$ constituida por las traslaciones T_α definidas por

$$f \mapsto T_\alpha f(x) = f(x-\alpha)$$

para $\alpha \in \mathbb{R}$. Es decir, si

$$A = \{T_\alpha \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R})) : \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$$

vamos a ofrecer la caracterización completa de Lat A, que recordemos se define como

$$\text{Lat } A = \bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} \text{Lat } T_\alpha.$$

La exposición que vamos a presentar está basada en la que se puede encontrar en [29].
Será fundamental utilizar la **transformada de Fourier** en nuestro estudio. Nosotros utilizaremos la siguiente definición de la transformada de Fourier $\mathcal{F}$. Para cada función $f \in L^1(\mathbb{R})$, definimos

$$\mathcal{F}f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixt}dx$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Como es habitual, denotaremos $\mathcal{F}f \equiv \hat{f}$.
Extenderemos la transformada de Fourier de la forma usual a $L^2(\mathbb{R})$, obteniendo así la identidad de Plancherel:

Teorema 3.3.1 (Identidad de Plancherel)**.** *Si* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *se tiene que*

$$\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2 .$$

Necesitaremos recordar además la siguiente propiedad, que nos permite transformar las traslaciones en multiplicaciones:

Proposición 3.3.2. *Dada* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$ *se tiene que*

$$\mathcal{F}(T_\alpha f)(t) = e^{-i\alpha t}\mathcal{F}f(t).$$

Es decir, si M_α *denota al operador de multiplicación por* $e_\alpha(t) = e^{-i\alpha t}$*, se cumple*

$$\mathcal{F}T_\alpha = M_\alpha \mathcal{F}.$$

Necesitaremos introducir algo de notación antes de enunciar el teorema que describe Lat A. Dado cualquier conjunto medible Lebesgue $E \subseteq \mathbb{R}$ denotamos por el subespacio M_E como

$$M_E := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \mathcal{F}f = 0 \text{ en casi todo } E\}.$$

Está claro que M_E es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R})$, ya que $M_E = \ker(M_{\chi_E}\mathcal{F})$, donde M_{χ_E} es el operador de multiplicación en L^2 por χ_E. Tenemos entonces:

Teorema 3.3.3. *El retículo de* A *es*

$$\textit{Lat } A = \{M_E \subseteq L^2(\mathbb{R}) : E \textit{ es medible Lebesgue}\}.$$

Demostración.
Comencemos tomando $E \subseteq \mathbb{R}$ medible, y veamos que M_E es invariante para todas las traslaciones. Es decir, tomemos $\alpha \in \mathbb{R}$ y veamos que para todo $f \in M_E$ se tiene que $T_\alpha f \in M_E$. Tenemos que ver que $\mathcal{F}(T_\alpha f) = 0$ en casi todo E. Ahora, sabemos por la proposición 3.3.2 que $\mathcal{F}(T_\alpha f) = M_\alpha \mathcal{F}(f)$. Como $f \in M_E$, se tiene que $\mathcal{F}(f) = 0$ en casi todo E, de donde se sigue entonces que $M_\alpha \mathcal{F}(f) = 0$ en casi todo E. Esto prueba que $M_E \in \text{Lat } T_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, como queríamos.
Tomemos ahora $M \in \text{Lat } A$. Vamos a contruir E medible Lebesgue de forma que $M = M_E$. Para ello, consideremos $\hat{M} = \mathcal{F}(M)$, que claramente es un subespacio cerrado por ser $\mathcal{F}$ una isometría. Consideremos $P : L^2(\mathbb{R}) \to \hat{M}$ la proyección ortogonal. Se tiene entonces que para todo $f, g \in L^2(\mathbb{R})$

$$f - Pf \perp Pg.$$

Además, como $\hat{M}$ es invariante por M_α, tenemos igualmente que

$$f - Pf \perp (Pg)e_\alpha$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Es decir, se tiene por la definición de producto escalar en $L^2(\mathbb{R})$ que

$$\int_{\mathbb{R}} (f - Pf) \cdot \overline{Pg} \cdot e_{-\alpha} dm = 0$$

para todo $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Observemos que lo obtenido en la ecuación anterior muestra precisamente que la transformada de Fourier de $(f - Pf) \cdot \overline{Pg}$ en α es 0 para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Notemos también que el producto $(f - Pf) \cdot \overline{Pg}$ es una multiplicación de dos funciones en $L^2(\mathbb{R})$. Por tanto, $(f - Pf) \cdot \overline{Pg}$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$ por la desigualdad de Hölder. Ahora, gracias al teorema de inversión en $L^1(\mathbb{R})$ podemos deducir que el producto $(f - Pf) \cdot \overline{Pg}$ es 0 en casi todo $\mathbb{R}$. Observemos que la conjugación de la segunda función no juega ningún papel, así que deducimos que $(f - Pf)Pg = 0$ en casi todo. Por tanto,

$$fPg = (Pf)(Pg)$$

en casi todo. De igual forma, obtenemos que $gPf = (Pf)(Pg)$. Combinando ambas igualdades, obtenemos que

$$fPg = gPf \tag{3.6}$$

para todo $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.
Ahora, tomemos g una función positiva cualquiera en $L^2(\mathbb{R})$. Para fijar ideas, definamos $g(t) = e^{-|t|}$ y definamos

$$\varphi(t) = \frac{(Pg)(t)}{g(t)}.$$

Con esta elección de g, la igualdad (3.6) nos da

$$Pf = \varphi \cdot f$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{R})$. Ahora, si $f \in \hat{M}$ tenemos que $Pf = f$, por lo tanto $f = \varphi \cdot f$. Además, tenemos que $\varphi^2 = \varphi$, ya que

$$\varphi^2 \cdot g = \varphi \cdot Pg = P^2 g = Pg = \varphi \cdot g.$$

Por tanto, deducimos que $\varphi = 0$ ó $\varphi = 1$ en casi todo. Definamos entonces

$$E := \{t \in \mathbb{R} : \varphi(t) = 0\}.$$

Entonces, $f \in \hat{M}$ si y solo si $f = Pf = \varphi \cdot f$. Es decir, si y solo si $f = 0$ en casi todo E. Basta aplicar la transformada de Fourier de nuevo para obtener que $f \in M$ si y solo si $\hat{f} = 0$ en casi todo E, lo que termina la demostración. $\square$

Capítulo 4

Operadores Universales

4.1. El Operador Universal de Rota

En este capítulo presentaremos el concepto de *operador universal,* que fue introducido por G.C. Rota en [28], y proporcionaremos un primer ejemplo expuesto en el mismo artículo. Después demostraremos una condición suficiente dada por S.R. Caradus para la universalidad de operadores en [6], que nos ayudará a probar algunos ejemplos más.

Definición 4.1.1. Diremos que un operador $U \in \mathcal{B}(H)$ es **universal** si para cada operador $T \in \mathcal{B}(H)$ existe un subespacio invariante M de U ($M \in \mathrm{Lat}U$) tal que T es semejante a un múltiplo escalar de $U_{|M}$. Es decir, si existe un isomorfismo $X \in \mathcal{B}(H, M)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ de forma que

$$T = \lambda X^{-1} U_{|M} X.$$

Es decir, si encontramos un operador universal U podemos estudiar todas las propiedades que se conservan bajo semejanza para los operadores de $\mathcal{B}(H)$, tales como la existencia de subespacios invariantes, limitándonos al estudio de las restricciones de U a sus subespacios invariantes.
Podemos entender en cierta forma que los operadores universales 'contienen' toda la información sobre la existencia de subespacios invariantes para los operadores de $\mathcal{B}(H)$.
Eso sí, es imprescindible primero aportar al menos un ejemplo de operador universal en un espacio de Hilbert complejo y separable en dimensión infinita. Como bien es sabido, todos estos espacios son isométricamente isomorfos, por lo que existe un único espacio de este tipo salvo relación de equivalencia. Así, si conseguimos construir un ejemplo en un espacio de Hilbert concreto deduciremos que este tipo de operadores existen en todos los espacios de Hilbert con los que vayamos a trabajar.
Vamos a presentar el ejemplo que dio Rota en el ya mencionado artículo [28]. Primero, consideremos H un espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión infinita y

definamos el siguiente espacio:

$$\ell_2(H) := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in H \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < \infty\}.$$

Observemos que si consideramos la sucesión de espacios de Hilbert $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $H_n = H$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\ell_2(H) = \bigoplus_{\ell_2} H_n,$$

así que gracias al Teorema 3.3.2. de [12] se tiene que $\ell_2(H)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y_n \rangle$$

y la norma inducida

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 .$$

Una vez que sabemos que $\ell_2(H)$ es un espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión infinita podemos ya enunciar el resultado:

Teorema 4.1.2. *Consideremos el espacio $\ell_2(H)$ y definamos el 'backward shift' $U : H \to H$ como*

$$U(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, ...).$$

Entonces, U es un operador universal.

Demostración.
Notemos para empezar que U es acotado y, que de hecho, es una contracción. Es decir, $\|U\| \leq 1$. Tomemos ahora $T \in \mathcal{B}(\ell_2(H))$ cualquiera. Como H y $\ell_2(H)$ son isométricamente isomorfos, consideramos $V : \ell_2(H) \to H$ un isomorfimo isométrico, y definimos $A := VTV^{-1} \in \mathcal{B}(H)$. Sabemos por el teorema de Gelfland 1.2.16 que el espectro de A es no vacío y por el lema 1.2.15 que el espectro de A es un conjunto cerrado y acotado en el disco de radio $\|A\|$ y centrado en el origen. Ahora, consideremos $S = \frac{A}{2\|A\|}$. Está claro entonces que el espectro de S está contenido en $\mathbb{D}$. Sabemos también por el teorema de Beurling 1.2.19 que

$$\lim_{n\to\infty} \|S^n\|^{1/n} = r(S) < 1,$$

donde $r(S)$ denota el radio espectral de S. Ahora definimos la función

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \|S^n\| \, z^n,$$

que es holomorfa en la región $|z| < r(S)^{-1}$, que contiene estrictamente al disco ya que $r(S)^{-1} > 1$. Por lo tanto, f es holomorfa y acotada en el disco, así que $f \in H^2$ y por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|S^n\|^2 = \|f\|_{H^2}^2 < \infty.$$

Ahora, consideramos el conjunto

$$M(S) := \{y = (S^n x)_{n\geq 0} : \ x \in H\}.$$

Primero, observemos que está contenido en $\ell_2(H)$, ya que dado $x \in H$ se tiene que

$$\|(S^n x)_{n\in\mathbb{N}}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|S^n x\|^2 \leq \|x\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|S^n\|^2 = \|x\|^2 \, \|f\|_{H^2}^2 < \infty. \tag{4.1}$$

Además, está claro que $M(S)$ constituye un subespacio vectorial de $\ell_2(H)$. Veamos que es cerrado. Para ello, consideramos una sucesión de Cauchy $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\ell_2(H)$. Ahora, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in H$ de forma que $y_n = (S^k x_n)_{k\geq 0}$. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es de Cauchy, ya que

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\|S^k x_n - S^k x_m\right\|^2 = \|y_n - y_m\|^2 .$$

Por tanto, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, digamos a $x \in H$. Veamos finalmente que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $y = (S^k x)_{k\geq 0}$. Basta observar que

$$\begin{aligned} \|y_n - y\|^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\|S^k x_n - S^k x\right\|^2 \leq \|x_n - x\|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \|S^k\|^2 \\ &\leq \|f\|_{H^2}^2 \, \|x_n - x\|^2 , \end{aligned}$$

lo que prueba que $M(S)$ es completo y por tanto cerrado. Finalmente, está claro que $M(S)$ es un subespacio invariante por U, ya que dado $(S^n x)_{n\geq 0} \in M(S)$ se tiene que

$$U(S^n x)_{n\geq 0} = (S^n x)_{n\geq 1} = (S^n(Sx))_{n\geq 0} \in M(S).$$

Ahora, definimos el operador $I_S : H \to M(S)$ como $I_S x = (S^n x)_{n\geq 0}$, que claramente está bien definido. Además, es acotado por (4.1) e inyectivo. Es más, si x_n es una sucesión en H que converge a 0, entonces $I_S x$ también converge a 0, por tanto gracias al teorema del grafo cerrado I_S es invertible y I_S^{-1} es también acotado.
Finalmente, tenemos que dado $x \in H$

$$I_S^{-1} U I_S x = I_S^{-1} U (S^n x)_{n\geq 0} = I_S^{-1} (S_n x)_{n\geq 1} = Sx,$$

por lo que se tiene que $I_S^{-1}UI_S = S$. Por tanto, $2\|A\|\, I_S^{-1}UI_S = A$ y si componemos con el isomorfismo isométrico V y con su inversa obtenemos

$$2\|A\|\, V^{-1}I_S^{-1}UI_SV = V^{-1}AV = T,$$

así que tomando $X = I_SV$ se tiene $2\|A\|\, X^{-1}UX = T$, lo que prueba que U es universal. $\square$

Por tanto, hemos probado que los operadores universales existen. Como ya hemos comentado, la importancia de esta clase de operadores radica en que basta estudiar la restricción de estos operadores a sus subespacios invariantes para poder estudiar propiedades que se conservan por semejanza. Obviamente, la propiedad que nos interesa a nosotros es tener subespacios invariantes no triviales. El siguiente resultado nos muestra la potencia de los operadores universales, pues caracterizar su retículo o al menos sus subespacios invariantes minimales resolvería el problema del subespacio invariante.

Teorema 4.1.3. *Sea $U \in \mathcal{B}(H)$ un operador universal. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Todos los subespacios invariantes minimales de U son de dimensión 1.

(ii) Todo operador $T \in \mathcal{B}(H)$ tiene subespacios invariantes no triviales.

Demostración.
Supongamos primero que U tiene todos sus subespacios invariantes minimales de dimensión 1. Tomemos $T \in \mathcal{B}(H)$ y supongamos que no tiene subespacios invariantes no triviales. Tenemos que T es semejante a un múltiplo escalar de $U_{|M}$, con $M \in \text{Lat } T$. Ahora, como H es de dimensión infinita, M debe tener también dimensión infinita. Como T no tiene subespacios invariantes no triviales, obtenemos que M es un subespacio invariante minimal, lo cual es absurdo.
Supongamos ahora que todo operador $T \in \mathcal{B}(H)$ tiene subespacios invariantes no triviales. Tomemos $M \in \text{Lat } U$ un subespacio invariante minimal para U. Ahora, si M es minimal y tiene dimensión mayor o igual que 2, el operador $U_{|M}$ tiene un subespacio invariante no trivial N con $N \subsetneq M$, lo que contradice el hecho de que M es minimal. Por tanto, $\dim(M) = 1$, como queríamos. $\square$

4.2. El Teorema de Caradus

El objetivo de esta sección es enunciar y demostrar el teorema de Caradus ([6]), que nos proporciona una condición suficiente para probar que un operador es universal. Como ya hemos expuesto, podemos reducir el problema del subespacio invariante a estudiar este tipo de operadores, por lo que tener una amplia familia de operadores universales en diferentes espacios de Hilbert nos abre la puerta a poder abordar dicho problema desde varias perspectivas muy diferentes. La capacidad de obtener operadores universales en diversos espacios de Hilbert nos permite afrontar el problema del subespacio invariante con una amplia gama de herramientas, como puede ser la teoría de la medida o la variable compleja en espacios de funciones analíticas, y es aquí donde radica la importancia de este resultado.

Teorema 4.2.1 (Teorema de Caradus)**.** *Sea $U \in \mathcal{B}(H)$ y supongamos que satisface las siguientes condiciones:*

(i) U es sobreyectivo.

(ii) $\ker U$ tiene dimensión infinita.

Entonces, U es universal.

Demostración.
Comenzaremos la prueba construyendo sendos operadores $V, W \in \mathcal{B}(H)$ tales que $UV = I$, $UW = 0$, $\ker(W) = 0$, $\mathrm{Im}(W)$ es cerrada y $\mathrm{Im}(W) \perp \mathrm{Im}(V)$. Para ello, denotamos por $\overline{U} = U_{|\ker(U)^{\perp}}$. Veamos que $\overline{U}$ es invertible. Está claro que es inyectivo, ya que $\ker(\overline{U}) = \{0\}$. Para probar que es sobreyectivo, tomemos $y \in H$. Como U es sobre, existe $x \in H$ tal que $Ux = y$. Ahora, si P es la proyección ortogonal sobre $\ker(U)$ y Q sobre $\ker(U)^{\perp}$ tenemos que $x = Px + Qx$, por lo tanto $y = Ux = U(Qx) = \overline{U}(Qx)$, lo que prueba que $\overline{U}$ es sobreyectivo. Denotemos entonces $V = \overline{U}^{-1}$. Ahora tomemos $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H y f_n una base ortonormal de $\ker(U)$. Definimos entonces $We_n = f_n$ y extendemos la definición por linealidad y continuidad y todo H. Es obvio que V y W cumplen las propiedades deseadas. Ahora tomemos $T \in \mathcal{B}(H)$ cualquiera, y elijamos $\lambda \in \mathbb{C}$ de forma que $|\lambda| \, \|V\| \, \|T\| < 1$. Entonces definimos

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k V^k W T^k.$$

Para ver que Φ está bien definida, basta obervar que $\|W\| = 1$ por ser isometría, y tenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \lambda^k V^k W T^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} (|\lambda| \, \|V\| \, \|T\|)^k.$$

Entonces, gracias a la elección de λ y a la serie geométrica, la serie es absolutamente convergente y Φ está bien definido. Si recordamos que $UV = I$, $UW = 0$, se deduce fácilmente que

$$U\Phi = \lambda \Phi T \tag{4.2}$$

y

$$\Phi = \lambda V \Phi T + W. \tag{4.3}$$

Ahora, si conseguimos probar que Φ es un homeomorfismo sobre su imagen podremos escribir por (4.2)

$$T = \lambda^{-1}\Phi^{-1}U_{|\mathrm{Im}(\Phi)}\Phi.$$

Si además demostramos que $\mathrm{Im}(\Phi)$ es cerrado y que es invariante por U, se seguirá que U es universal. Comencemos probando que Φ es inyectivo. Para ello, sea $x \in \ker\Phi$. Entonces, gracias a la expresión (4.3) y al hecho de que $\mathrm{Im}(V) \perp \mathrm{Im}(W)$, se sique que $V\Phi Tx = Wx = 0$, pero como W es isometría deducimos que $x = 0$, por lo tanto Φ es homeomorfismo sobre su imagen. Veamos ahora que $\mathrm{Im}(\Phi)$ es cerrada. Tomemos la sucesión $(\Phi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ y supongamos que converge a $y \in H$. De nuevo gracias a (4.3), se sigue que $\lambda V\Phi Tx_n + Wx_n \to y$. Por tanto, usando que $\mathrm{Im}(V) \perp \mathrm{Im}(W)$ se sigue que $Wx_n \to Py$, donde P es la proyección ortogonal sobre $\mathrm{Im}(W)$. Ahora, como $\mathrm{Im}(W)$ es cerrada, existe $x \in \mathrm{Im}(\Phi)$ de forma que $Wx_n \to Wx$ y por tanto $x_n \to x$ gracias a que W es isometría. Así, $\Phi(x_n) \to \Phi(x) = y \in \mathrm{Im}(\Phi)$, lo que prueba que $\mathrm{Im}(\Phi)$ es un subespacio vectorial cerrado. Finalmente, para ver que es invariante por U, basta remitirnos a la igualdad (4.2). Dada $x \in H$ se tiene que $U(\Phi x) \in \mathrm{Im}(\Phi)$, ya que

$$U(\Phi x) = \lambda\Phi(Tx) \in \mathrm{Im}(\Phi),$$

por tanto $\mathrm{Im}(\Phi)$ es invariante por U, lo que prueba que U es universal. □

La combinación del teorema de Caradus, con la siguiente proposición, nos otorga una herramienta potentísima para encontrar diferentes modelos de operadores universales en diversos espacios de Hilbert, lo que nos permite transformar el problema del subespacio invariante en un problema de cálculo explícito de retículos gracias al teorema 4.1.3.

Proposición 4.2.2. *Sean $U_1 \in \mathcal{B}(H_1)$, $U_2 \in \mathcal{B}(H_2)$ dos operadores semejantes. Entonces U_1 es universal si y solo si lo es U_2.*

Demostración.
Está claro que basta probar una de las implicaciones, la otra es análoga. Supongamos que U_1 es universal. Veamos que U_2 también lo es. Para ello, tomemos $T \in \mathcal{B}(H_2)$. Como U_1 y U_2 son semejantes, existe $\Phi \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ isomorfismo tal que $U_2 = \Phi U_1 \Phi^{-1}$. Consideremos entonces el operador $S = \Phi^{-1}T\Phi \in \mathcal{B}(H_1)$. Como U_1 es universal, existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $M \in \mathrm{Lat}\, U_1$ y un isomorfismo $X \in \mathcal{B}(H_1, M)$ de forma que

$$S = \lambda X^{-1}U_{1|M}X.$$

Por tanto, se tiene que $\Phi^{-1}T\Phi = \lambda X^{-1}U_{1|M}X$. Observemos que $\Phi(M)$ es un subespacio invariante para U_1. Si llamamos $\Psi = \Phi^{-1}_{|\Phi(M)}$, se tiene que Ψ es un isomorfismo de $\Phi(M)$ a H_1. Además, tenemos que $U_{2|\Phi(M)} = \Psi^{-1}U_{1|M}\Psi$. Así, se sigue que

$$\Phi^{-1}T\Phi = \lambda X^{-1}\Psi U_{2|\Phi(M)}\Psi^{-1}X.$$

Así, obtenemos que

$$T = \lambda \Phi X^{-1} \Psi U_{2|\Phi(M)} \Psi^{-1} X \Phi^{-1},$$

lo que prueba que U_2 es universal. □

4.3. Un Operador de Composición Universal en H^2

El objetivo de esta sección es probar el siguiente resultado, que fue probado en [22] por Nordgren, Rosenthal y Wintrobe:

Teorema 4.3.1 (Nordgren, Rosenthal y Wintrobe)**.** *Sea φ una transformación de Möbius hiperbólica automorfismo, y consideremos el operador de composición inducido C_φ en H^2. Sea $\lambda \in \sigma_p(C_\varphi)$. Entonces el operador $C_\varphi - \lambda I \in \mathcal{B}(H^2)$ es universal.*

Se sigue inmediatamente el siguiente resultado:

Corolario 4.3.2. *El operador de composición $C_\varphi \in \mathcal{B}(H^2)$ tiene todos sus subespacios invariantes minimales de dimensión 1 si y solo si todo operador tiene subespacios invariantes no triviales.*

Demostración.
Observemos que dado $\lambda \in \sigma(C_\varphi)$ el operador C_φ tiene el mismo retículo de subespacios invariantes que el operador $C_\varphi - \lambda I$. Entonces basta remitirse al teorema 4.1.3 para obtener el resultado. □

Obtenemos así un modelo muy potente para estudiar el problema del subespacio invariante, pues tenemos a nuestra disposición toda la maquinaria del análisis complejo y la teoría de funciones holomorfas para tratar de caracterizar el retículo de subespacios invariantes de C_φ, lo que resolvería el problema del subespacio invariante gracias al corolario anterior.
Antes de probar el resultado, introduciremos el concepto de operador de composición en H^2 y estudiando sus propiedades más elementales. A continuación, hablaremos sobre las transformaciones de Möbius del disco unidad $\mathbb{D}$, para poder definir la transformación hiperbólica automorfismo que inducirá el operador de composición universal.
Finalmente, probaremos el resultado. No seguiremos la prueba original de [22], si no que seguiremos una demostración alternativa que recientemente publicaron C. Cowen y E. Gallardo-Gutiérrez en [18].

4.3.1. Operadores de Composición en H^2

Vamos a introducir en este apartado el concepto de *operador de composición*, una clase de operadores crucial para el estudio de la teoría de subespacios invariantes, como ya podemos deducir del teorema 4.3.1. Las pruebas omitidas de esta presentación pueden consultarse en [12].

Definición 4.3.3. Sea $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Definimos el **operador de composición** de *símbolo* φ como

$$\begin{aligned} C_\varphi : &H^2 \to H^2 \\ &f \mapsto f \circ \varphi. \end{aligned}$$

Veamos que estos operadores son acotados. Para ello, comencemos enunciando el *principio de subordinación de Littlewood* que nos proporcionará la acotación del operador cuando fije el 0:

Teorema 4.3.4 (Principio de Subordinación de Littlewood)**.** *Sea $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ con $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ y tal que $\varphi(0) = 0$. Entonces $C_\varphi \in \mathcal{B}(H^2)$ y $\|C_\varphi\| = 1$.*

Gracias a esta primera propiedad podemos obtener la continuidad de cualquier operador de composición, pues podemos expresar cualquier operador de composición como $C_\varphi = C_\psi C_{\alpha_{\varphi(0)}}$, donde ψ lleva el disco en si mismo y fija el cero y $\alpha_{\varphi(0)}$ es el automorfismo del disco que intercambia el cero con el punto $\varphi(0)$. Estudiando la acotación de $C_{\alpha_{\varphi(0)}}$ se obtiene

Teorema 4.3.5 (Teorema de Littlewood)**.** *Sea $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Entonces $C_\varphi \in \mathcal{B}(H^2)$ y*

$$\|C_\varphi\| \leq \sqrt{\frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|}}.$$

Serán muy importantes los núcleos reproductores, unas funciones que nos ayudarán a tratar con los adjuntos de los operadores de composición:

Definición 4.3.6. Para cada $p \in \mathbb{D}$, llamamos **núcleo reproductor** para p a la función

$$k_p(z) = \frac{1}{1 - \overline{p}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{p}^n z^n.$$

Proposición 4.3.7. *Sea $p \in \mathbb{D}$. Se tiene*

(i) $k_p \in H^2$.

(ii) Para cada $f \in H^2$ tenemos

$$\langle f, k_p \rangle = f(p)$$

(iii) Sea $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ con $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Entonces

$$C_\varphi^* k_p = k_{\varphi(p)}.$$

Veamos ahora que podemos conseguir una amplia clase de operadores universales usando los operadores de composición. El resultado es el siguiente:

Teorema 4.3.8. *Sea $C_\varphi \in \mathcal{B}(H^2)$ un operador inducido por una función interior no automorfismo tal que $\varphi(0) = 0$. Entonces, C_φ^* es universal.*

Necesitaremos un par de resultados técnicos para probar este teorema.

Proposición 4.3.9. *Sea $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ con $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Supongamos además que φ es una función interior con $\varphi(0) = 0$. Entonces, el operador de composición $C_\varphi \in \mathcal{B}(H^2)$ es una isometría.*

Demostración.
Si φ es una función interior con $\varphi(0) = 0$, entonces su sucesión de potencias $1, \varphi, \varphi^2, ...$ forma una sucesión ortonormal, pues gracias al hecho de que $|\varphi| = 1$ en casi todo $\mathbb{T}$ tenemos

$$\langle \varphi^n, \varphi^m \rangle = \int_{\mathbb{T}} \varphi^n \overline{\varphi}^m dm = \int_{\mathbb{T}} \varphi^{n-m} dm = \langle \varphi^{n-m}, 1 \rangle .$$

Por tanto, junto al hecho de que $\varphi(0) = 0$ se sigue que $\langle \varphi^n, \varphi^m \rangle = \delta_{n,m}$ para $n \geq m$. Por tanto, dada $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$ tenemos que

$$\|C_\varphi f\|^2 = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) \varphi^n \right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|^2 ,$$

así que C_φ es una isometría. □

Proposición 4.3.10. *Sea $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ con $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, y supongamos que es una función interior no automorfismo con $\varphi(0) = 0$. Entonces φ no es inyectiva.*

Demostración.
Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que φ es inyectiva. Como φ no es automorfismo no puede ser sobreyectiva, así que existe $a \in \mathbb{D} \setminus \varphi(\mathbb{D})$. Consideramos ahora φ_a el automorfismo del disco que lleva a en 0, y definimos

$$g = \varphi_a \circ \varphi.$$

Entonces, está claro que g es inyectiva por composición de inyectivas, $g(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$ por construcción, $g \in H^\infty(\mathbb{D})$ y además $|g^*| = 1$ en casi todo $\mathbb{T}$, por lo que g también es interior.
Observemos que como g es no nulo en $\mathbb{D}$ y el disco es simplemente conexo podemos definir su raíz cuadrada. Es decir, existe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ de forma que $f^2 = g$. Inmediatamente se sigue que f es también inyectiva, acotada e interior. Observemos además que, como f es abierta, existen $b \in \mathbb{D}$ y $0 < \varepsilon < |b|$ tales que $B(-b, \varepsilon) \subset f(\mathbb{D})$. Además, observemos que si $f(z_1) = a$ y $f(z_2) = -a$ se sigue que $g(z_1) = g(z_2)$. Como g es inyectiva, se tiene que $z_1 = z_2$. Así, deducimos que

$$B(b, \varepsilon) \cap f(\mathbb{D}) = \emptyset.$$

Si consideramos ahora φ_b el automorfismo del disco que lleva b en 0, podemos definir

$$u(z) = -\log|\varphi_b(f(z))|.$$

Observemos primero que de nuevo $\varphi_b \circ f$ es interior. Además, como u es la parte real de una función holomorfa, u es armónica y $u(z) > 0$ por construcción. Es más, como $|f(z)-b| \geq \varepsilon$ para todo $z \in \mathbb{D}$, se sigue que existe $\delta > 0$ de forma que $|\varphi_b(f(z))| \geq \delta$ para todo $z \in \mathbb{D}$, de donde deducimos por tanto que $u(z) > 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$, ya que $\delta \leq |\varphi_b(f(z))| < 1$. Ahora, como u es armónica, sabemos por el teorema del valor medio que

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta$$

para todo $0 < r < 1$. Finalmente, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada a las funciones $u_r(e^{i\theta}) = u(re^{i\theta})$, pues son funciones uniformemente acotadas. Además, como el límite radial de $\varphi_b \circ f$ tiene módulo 1 en casi todo, se sigue que $u_r \to 0$ en casi todo cuando $r \to 1^-$. Por tanto, se sigue que $u(0) \to 0$ cuando $r \to 1^-$, lo que contradice el hecho de que $u(z) > 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$.
Por tanto, deducimos que φ no es inyectiva, lo que prueba el resultado. $\square$

Ya podemos entonces probar el teorema 4.3.8
Demostración del teorema 4.3.8.
Veamos que C_φ cumple las hipótesis del teorema de Caradus. Primero, veamos que como C_φ es isometría se tiene que C_φ^* es sobreyectivo. Para ello, tomemos $f \in H^2$. Observemos que como C_φ es isometría, entonces es un isomorfismo sobre su imagen y podemos definir $C_\varphi^{-1} : C_\varphi(H^2) \to H^2$ que es un operador acotado por ser C_φ isometría. Ahora, definimos el operador $\Lambda : C_\varphi(H^2) \to \mathbb{C}$ como $\Lambda(g) = \left\langle f, C_\varphi^{-1}g \right\rangle$. Este operador es claramente acotado por ser composición de operadores acotados. Por tanto, podemos extenderlo a un operador definido en todo H^2 por el teorema de Hahn-Banach. Además, por el teorema de representación de Riesz, existe $h \in H^2$ que representa a Λ. Veamos que $\mathbb{C}_\varphi^* h = f$. Tenemos para todo $g \in H^2$

$$\left\langle C_\varphi^* h, g \right\rangle = \langle h, C_\varphi g\rangle = \left\langle f, C_\varphi^{-1} C_\varphi g \right\rangle = \langle f, g\rangle,$$

así que $C_\varphi^* h = f$, como queríamos.
Ahora, veamos que $\ker C_\varphi^*$ tiene dimensión infinita, que es equivalente a probar que $\mathrm{Im}(C_\varphi)$ tiene codimensión infinita. Fijemos $N \in \mathbb{N}$. Observemos que como φ no es automorfismo del disco podemos aplicar la proposición 4.3.10 para deducir que φ no es inyectiva. Por tanto, podemos encontrar $2N$ puntos en $\mathbb{D}$ $w_1, ..., w_N$ y $w_1', ..., w_N'$ de forma que $\varphi(w_j) = \varphi(w_j')$ para todo $j = 1, ..., N$. Entonces, consideramos las funciones $h_j = k_{w_j} - k_{w_j'}$ que claramente son linealmente independientes. Tenemos que para todo $f \in H^2$

$$\langle C_\varphi f, h_j\rangle = f(\varphi(w_j)) - f(\varphi(w_j')) = 0,$$

por lo que todas las h_j son ortogonales a C_φ. Finalmente, como $N \in \mathbb{N}$ es arbitrario, se sigue que $\mathrm{Im}(C_\varphi)$ tiene dimensión infinita y por tanto C_φ^* es universal. □

Con este resultado tenemos un buen ejemplo de una clase muy amplia de operadores universales que están definidos en un espacio más natural, como puede ser H^2. Caracterizar el retículo de subespacios invariantes (o al menos los subespacios minimales) de alguno de estos operadores resolvería el problema del subespacio invariante gracias al teorema 4.1.3.

4.3.2. Las Transformaciones de Möbius de $\mathbb{D}$

Definición 4.3.11. Vamos a comenzar estudiando las transformaciones de Möbius del disco, enfatizando el estudio de sus puntos fijos, para poder introducir las transformaciones hiperbólicas. Esta presentación puede consultarse en el capítulo 0 de [31].
Una **transformación de Möbius** o **transformación fraccional lineal** es una aplicación

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ y que lleva la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ en sí misma.

Es bien sabido que estas transformaciones son biyecciones de $\hat{\mathbb{C}}$ en $\hat{\mathbb{C}}$ y que forman un grupo con la composición, que denotaremos por $LFT(\hat{\mathbb{C}})$.
Cada matriz no singular

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ define claramente una transformación de Möbius φ_A dada por la definición anterior. Está claro además que $\varphi_A = \varphi_{\lambda A}$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$ diferente de 0, por lo tanto varias matrices diferentes pueden darnos la misma transformación. Por ello, normalizaremos todas las matrices para que tengan determinante $+1$, y diremos entonces que φ está en **forma estándar**. De ahora en adelante, salvo que se especifique explícitamente lo contrario, consideraremos que todas nuestras transformaciones están en forma estándar. Observemos que aunque nuestra transformación esté en forma estándar, esto no determina de manera única nuestros coeficientes a, b, c, d, ya que puede haber cambios de signo entre ellos que permitan nuestra condición $ad - bc = 1$.

Puntos Fijos

Vamos a centrar nuestra atención en el estudio de los puntos fijos de estas transformaciones. Comencemos notando que φ fija el ∞ si y solo si $c = 0$, por tanto, si φ está en forma estándar, el punto ∞ será el *único* punto fijo de φ si y solo si $a = d$ y $b \neq 0$. Si $c \neq 0$, y $z \in \mathbb{C}$ es un punto fijo para una transformación φ, se tiene que

$$\frac{az+b}{cz+d} = z \implies -cz^2 + (a-d)z + b = 0.$$

Es decir, en el caso en el que φ no es la aplicación identidad (todos los puntos son fijos) los puntos fijos α, β de φ vienen determinados por una ecuación cuadrática, por lo que φ tendrá uno o dos puntos fijos, dados por la siguiente igualdad:

$$\alpha, \beta = \frac{(a-d) \pm [(a-d)+4bc]^{1/2}}{2c}.$$

Vamos a caracterizar la ecuación anterior en términos de la **traza** de φ, que viene dada por

$$\chi(\varphi) = \pm(a+d).$$

Observemos que la traza de φ es precisamente la traza de la matriz que define la transformación φ. Si nuestra transformación está en forma estándar, sus puntos fijos serán

$$\alpha, \beta = \frac{(a-d) \pm [\chi(\varphi)^2 - 4]^{1/2}}{2c}. \tag{4.4}$$

Notemos entonces que φ tendrá un único punto fijo si y solo si $|\chi(\varphi)| = 2$. Podemos resumir esta información en el siguiente resultado:

Proposición 4.3.12. *Sea $\varphi \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$ con $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Entonces φ tiene un único punto fijo si y solo si $|\chi(\varphi)| = 2$.*

Estudiar las derivadas de φ puede darnos también información útil sobre los puntos fijos. Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 4.3.13. *Sea $\varphi \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $|\chi(\varphi)| = 2$.

(b) $\varphi' = 1$ *en un punto fijo de* φ.

(c) T *tiene un único punto fijo en* $\hat{\mathbb{C}}$. *Si* φ *tiene dos puntos fijos distintos, entonces sus derivadas en estos puntos son inversas y su suma es* $\chi(\varphi)^2 - 2$.

Demostración.
Como φ está en forma estándar, se tiene que

$$\varphi'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}.$$

Además, gracias a la expresión de 4.4, si α, β son los puntos fijos de φ se tiene que

$$\varphi'(\alpha), \varphi'(\beta) = \frac{1}{4}\left(\chi(\varphi) \pm [\chi(\varphi)^2 - 4]^{1/2}\right)^2.$$

Por tanto, deducimos que

$$\varphi'(\alpha) = \frac{1}{\varphi'(\beta)}$$

$$\varphi'(\alpha) + \varphi'(\beta) = \chi(\varphi)^2 - 2.$$

En el caso no contemplado en el que φ tiene un punto fijo en ∞ y otro $\alpha \in \mathbb{C}$, está claro que $\varphi(z) = z + b$ por estar en forma estándar. Por tanto, se sigue trivialmente que $\varphi'(\alpha) = 1/\varphi'(\infty) = 1$. Observemos por tanto que se tienen automáticamente las tres equivalencias y el resultado queda probado. □

Clasificación de Puntos Fijos

Nuestro próximo objetivo es clasificar las transformaciones de Möbius en función de su número de puntos fijos y de sus características. Dividiremos los elementos de $LFT(\hat{\mathbb{C}})$ en transformaciones parabólicas, hiperbólicas, elípticas y loxodrómicas. Ya hemos estudiado las propiedades de la primera, que definimos a continuación:

Definición 4.3.14. Diremos que una transformación $\varphi \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$ es **parabólica** si tiene un único punto fijo.

Si el punto fijo de φ es ∞, está claro que $\varphi(z) = z + r$, con $r \in \mathbb{C}$ no nulo. Es decir, φ es una traslación. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ es su punto fijo, y tomamos $S \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$ que lleve α a ∞, entonces

$$V = S \circ \varphi \circ S^{-1} \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$$

fija solamente el ∞. Por tanto, $V(z) = z + \tau$ con τ un número complejo no nulo. Por tanto, tenemos que

$$\varphi = S^{-1} \circ V \circ S,$$

por lo que deducimos que φ es conjugado a una traslación.
Supongamos ahora que φ no es parabólica, así que tiene dos puntos fijos $\alpha, \beta \in \hat{\mathbb{C}}$. Tomemos $S \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$ de forma que lleve α a 0 y β a ∞. Entonces, la aplicación $V = S \circ \varphi \circ S^{-1} \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$ tiene a 0 y a ∞ como puntos fijos, por lo tanto $V(z) = \lambda z$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, que llamaremos el **multiplicador** de φ. Por tanto,

$$\varphi(z) = S^{-1}(\lambda S(z)) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Ahora, si derivamos, obtenemos que

$$\varphi'(\alpha) = \lambda \quad \text{y} \quad \varphi'(\beta) = \frac{1}{\lambda}.$$

Observemos que la igualdad anterior asegura que, si $|\lambda| \neq 1$, uno de los puntos fijos de φ es **atractivo**. Por ejemplo, si $|\lambda| < 1$ el punto fijo atractivo es α, y

$$\varphi^n(z) \to \alpha \quad (z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\beta\}),$$

donde la convergencia se da uniformemente en compactos.
Notemos ahora que puede haber ambigüedad en la definición de multiplicador. Si cambiamos los papeles de α y β, entonces obtendríamos que el multiplicador es $1/\lambda$. Es mucho

más apropiado pensar en el par $\{\lambda, 1/\lambda\}$ como el multiplicador de φ. La proposición 4.3.2 nos muestra que

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = \chi(T)^2 - 2, \tag{4.5}$$

que es una cantidad que elimina toda posible ambigüedad para el multiplicador.
Ya podemos definir entonces el resto de tipos de transformaciones:

Definición 4.3.15. Sea $\varphi \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$ una transformación no parabólica diferente de la identidad. Sea $\lambda \neq 1$ el multiplicador de φ. Entonces diremos que φ es:

(a) **Elíptica** si $|\lambda| = 1$.

(b) **Hiperbólica** si $\lambda > 0$.

(c) **Loxodrómica** si no es elíptica ni parabólica.

El siguiente resultado clasifica las transformaciones de Möbius según las propiedades de conjugación expuestas anteriormente:

Proposición 4.3.16. *Las transformaciones parabólicas son conjugadas de traslaciones, las elípticas a rotaciones, las hiperbólicas a dilataciones positivas y las loxodrómicas a dilataciones complejas.*

Finalmente, podemos establecer una caracterización total en función de la traza gracias a la igualdad 4.5:

Proposición 4.3.17. *Sea $\varphi \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$ diferente de la identidad. Entonces φ es loxodrómica si y solo si $\chi(\varphi)$ no es real. Si $\chi(\varphi)$ es real, entonces:*

(a) φ es hiperbólica si y solo si $|\chi(\varphi)| > 2$,

(b) φ es parabólica si y solo si $|\chi(\varphi)| = 2$,

(c) φ es elíptica si y solo si $|\chi(\varphi)| < 2$.

Transformaciones de Möbius en $\mathbb{D}$

Queremos centrarnos en estudiar las transformaciones de Möbius que lleven el disco $\mathbb{D}$ en si mismo. Es decir, nuestro objetivo es estudiar las transformaciones φ tales que $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Denotaremos por $LFT(\mathbb{D})$ a este subgrupo de transformaciones de Möbius. Podemos conseguir información extra sobre la distribución de los puntos fijos en el espacio, como vemos en el siguiente resultado:

Teorema 4.3.18. *Sea $\varphi \in LFT(\mathbb{D})$ distinta de la identidad. Se tiene:*

(a) Si φ es parabólica, entonces su único punto fijo está en $\mathbb{T}$.

(b) Si φ es hiperbólica, entonces tiene uno de sus puntos fijos en $\overline{\mathbb{D}}$. Además, ambos están en $\mathbb{T}$ si y solo si φ es automorfismo.

(c) Si φ es loxodrómica o elíptica, entonces tienen un punto fijo en $\mathbb{D}$ y otro fuera de $\overline{\mathbb{D}}$. Las transformaciones elípticas son precisamente los automorfismos de $\mathbb{D}$ con esta configuración de puntos fijos.

Demostración.

(a) Sea φ una transformación parabólica, y sea α su único punto fijo. Hemos visto que $\varphi = S^{-1} \circ V \circ S$, donde V es una traslación y $S(\alpha) = \infty$. Ahora, S lleva el disco $\mathbb{D}$ en otro disco o en un semiplano, que denotamos por A. Además, como $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, se sigue que $V(A) \subset A$, y como A es una traslación, está claro que A es un hiperplano. Finalmente, como ∞ es el punto fijo de V y S^{-1} lleva ∂A en $\mathbb{T}$, se sigue que $S^{-1}(\infty) = \alpha \in \mathbb{T}$, como queríamos.

(b) Sea φ transformación hiperbólica y sean α y β sus puntos fijos. Entonces, $\varphi = S^{-1} \circ V \circ S$, donde S manda α a 0 y β a ∞, y V es homotecia positiva. Sea $V(z) = \lambda z$ con $0 < \lambda < +\infty$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\lambda < 1$ y que α es el punto fijo atractivo. Si no fuera así, bastaría conjugar con la transformación $z \mapsto 1/z$. En estas condiciones, 0 es punto fijo atractivo para V. Es este caso, $S(\mathbb{D}) = A$ puede ser cualquier disco o semiplano que contenga a 0 en su clausura. En el primer caso obtendríamos que $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, mientras que $\beta \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Observemos además que en este caso φ no puede ser automorfismo. En el caso del semiplano, obtendríamos que $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ y $\beta \in \mathbb{T}$, ya que ∞ está en la frontera del semiplano. En este caso, tenemos que φ es automorfismo si y solo si 0 está en la frontera de A, por lo que se sigue que $\alpha \in \mathbb{T}$ si φ es automorfismo y $\alpha \in \mathbb{D}$ sino lo es.

(c) Finalmente, sea φ transformación elíptica o loxodrómica, y sean α y β sus puntos fijos. Entonces, $\varphi = S^{-1} \circ V \circ S$, donde S manda α a 0 y β a ∞, y $V = \lambda z$, con $|z| = 1$ en el caso elíptico y $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ en el caso loxodrómico. Distingamos ambos casos:

   (i) Si φ es elíptico, está claro que $S(\mathbb{D}) = A$ es otro disco, pues V es una rotación. Entonces, se tiene que $V(A) = A$. Los puntos fijos son $0 \in A$ y $\infty \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{A}$, por lo que está claro que $\alpha \in \mathbb{D}$ y $\beta \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Además, gracias a los apartados (a) y (b), se sigue que si φ es un automorfismo con esta configuración de puntos fijos debe ser elíptico.

   (ii) Sea φ loxodrómico. Entonces, $\lambda = re^{i\theta}$, con $r \neq 1$, $\theta \neq 0$. Ahora, sea $S(\mathbb{D}) = A$. Se sigue entonces que A debe ser un disco y $r < 1$. Razonando como en el caso anterior, se sigue que $\alpha \in \mathbb{D}$ y $\beta \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

$\square$

Finalmente, vamos a estudiar las **formas canónicas** de estas transformaciones. Es decir, daremos explícitamente las fórmulas para cada uno de los tipos de transformación de Möbius asumiendo algunas hipótesis extra de sobre los puntos fijos. Estas formas canónicas serán esenciales para nosotros, pues las transformaciones de Möbius con las que trabajararemos serán conjugadas de alguno de estos modelos. Esto es debido a que podemos componer con traslaciones y rotaciones para obtener los puntos fijos deseados para el símbolo, obteniendo así que nuestro operador de composición es semejante al operador inducido por la transformación canónica asociada.

Teorema 4.3.19. *Sea $\varphi \in LFT(\mathbb{D})$.*

(a) Supongamos que φ es parabólico y que 1 es su punto fijo. Entonces

$$\varphi(z) = \frac{(2-a)z + a}{2 + a - az},$$

donde $\Re(a) \geq 0$. Además, φ es automorfismo si y solo si $\Re(a) = 0$.

(b) Supongamos que φ es automorfismo hiperbólico, y que -1 y 1 son sus puntos fijos. Entonces

$$\varphi(z) = \frac{r + z}{1 + rz},$$

con $0 < r < 1$.

(c) Supongamos que φ es no-automorfismo hiperbólico. Distinguimos dos posibles casos:

(i) Sean 0 y 1 los puntos fijos de φ. Entonces

$$\varphi(z) = \frac{rz}{1 - (1-r)z},$$

con $0 < r < 1$.

(ii) Sean 1 y ∞ los puntos fijos de φ. Entonces

$$\varphi(z) = rz + (1-r),$$

con $0 < r < 1$.

(d) Supongamos que φ es elíptico y que fija a 0 y ∞. Entonces

$$\varphi(z) = \omega z,$$

donde $\omega \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$.

(e) Supongamos que φ es loxodrómico y que fija a 0. Entonces

$$\varphi(z) = \frac{z}{az + b},$$

donde $|b| > 1$ y $|a| < |b| - 1$.

Demostración.

(a) Sea φ parabólica fijando al 1. Entonces, podemos mandar 1 a ∞ con la transformación $S(z) = \frac{1+z}{1-z}$. Obtenemos entonces que $S(\mathbb{D}) = A$ es el semiplano $\Re(z) \geq 0$. Sabemos ahora que $S \circ \varphi \circ S^{-1} = V$ es una traslación que cumple que $V(A) \subset A$, por lo tanto $V(z) = z + a$, donde $\Re(a) \geq 0$. Está claro que V será automorfismo si y solo si $\Re(a) = 0$. Basta entonces despejar en nuestra fórmula para obtener

$$\varphi(z) = \frac{(2-a)z + a}{2 + a - az}.$$

(b) Sea φ automorfismo hiperbólico con -1 y 1 sus puntos fijos. Entonces, podemos mandar -1 a 0 y 1 a ∞ con la aplicación $S(z) = \frac{z+1}{z-1}$. De nuevo, obtenemos que $S(\mathbb{D}) = A$ es el semiplano $\Re(z) \geq 0$. Sabemos además que $V = S \circ \varphi \circ S^{-1}$ es una homotecia positiva, es decir, $V(z) = \lambda z$ con $\lambda > 0$ y diferente de 1. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\lambda > 1$. Despejando, obtenemos que

$$\varphi(z) = \frac{z(\lambda+1) + (\lambda-1)}{z(\lambda-1) + (\lambda+1)}.$$

Basta entonces poner $r = \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \in (0,1)$ y dividir en la ecuación de φ por $(\lambda+1)$ para obtener

$$\varphi(z) = \frac{r+z}{1+rz},$$

como queríamos.

(c) Sea φ no-automorfismo hiperbólico.

(i) Con la transformación $S(z) = \frac{z}{1-z}$ dejamos fijo el 0 y llevamos el 1 a ∞. Entonces, $S(\mathbb{D}) = A$ es un semiplano y $V = S \circ \varphi \circ S^{-1}$ es una homotecia positiva de parámetro $0 < r < 1$. Así, Tenemos que $\varphi = S^{-1} \circ V \circ S$. Como $S^{-1}(z) = \frac{z}{1+z}$, obtenemos que

$$\varphi(z) = \frac{rz}{1-(1-r)z}.$$

(ii) Ponemos $S(z) = z - 1$ para llevar 1 a 0 y dejar fijo ∞. Entonces $S(\mathbb{D})$ es un disco y entonces $V = S \circ \varphi \circ S^{-1}$ es una homotecia $V(z) = rz$ con $0 < r < 1$. Basta despejar para obtener

$$\varphi(z) = rz + (1-r)$$

como queremos.

(d) Está claro que si φ es elíptico y fija 0 e ∞, se tiene que φ es una rotación. Como φ es distinto de la identidad, se sigue que $\varphi(z) = \omega z$, con $\omega \in \mathbb{T}$ diferente de 1.

(e) Finalmente, consideremos φ loxodrómico fijando el 0. Entonces está claro que $\varphi(z) = \frac{z}{az+b}$. Veamos que condiciones tienen que cumplir $a, b \in \mathbb{C}$ para que φ sea efectivamente loxodrómico. Primero, como $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, se tiene que cumplir que $|\varphi(z)| < 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Entonces, $|z| \leq |az+b| \leq |a|+|b|$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Así, $|a| < |b|-1$. Ahora, por el lema de Schwarz, tenemos que $|\varphi'(0)| \leq 1$, de donde deducimos que $|b| \geq 1$. Ahora, por la condición anterior, $|b| \neq 1$, así que $|b| > 1$. Finalmente, es una mera comprobación ver que estas condiciones son suficientes.

□

Nota 4.3.20. Hemos enunciado en el teorema anterior la forma canónica para la transformación hiperbólica automorfismo más conocida en la literatura. Sin embargo, para nuestro desarrollo posterior será más útil utilizar la expresión hallada en la prueba. Es decir,

$$\varphi(z) = \frac{z(\lambda+1) + (\lambda-1)}{z(\lambda-1) + (\lambda+1)},$$

donde $\lambda > 0$ es el multiplicador. Es más, nosotros pondremos $\lambda = e^{-t}$ para $t \in \mathbb{R}$ no nulo, obteniendo así que

$$\varphi_t(z) = \frac{z(e^{-t}+1) + (e^{-t}-1)}{z(e^{-t}-1) + (e^{-t}+1)}.$$

Nota 4.3.21. A pesar de que la clasificación anterior es estándar en la literatura, tenemos algunas dudas sobre su exhaustividad para el caso del no-automorfismo hiperbólico. De todas formas, en esta memoria trabajaremos exclusivamente con los casos hiperbólico automorfismo y parabólico no automorfismo, así que la clasificación anterior basta para cubrir el posterior desarrollo del texto.

4.3.3. El Operador de Composición Hiperbólico Automorfismo

A lo largo de este apartado denotaremos por φ al automorfismo hiperbólico del disco en si mismo. Además, podemos suponer sin pérdida de generalidad que φ tiene la forma

$$\varphi_t(z) = \frac{z(e^{-t}+1) + (e^{-t}-1)}{z(e^{-t}-1) + (e^{-t}+1)},$$

donde $t \in \mathbb{R}$ no nulo, ya que todo operador de composición hiperbólico automorfismo es semejante a uno de esta clase. Cuando no haya lugar a confusión escribiremos φ en lugar de φ_t.

El objetivo de esta sección es demostrar el teorema 4.3.1 construyendo un operador de multiplicación cuyo adjunto sea semejante a nuestro operador de composición, y probando a continuación la universalidad.

Primero, caracterizaremos el espectro de C_φ:

Teorema 4.3.22. *Sea* $\varphi_t(z) = \frac{z(e^{-t}+1)+(e^{-t}-1)}{z(e^{-t}-1)+(e^{-t}+1)}$ *el automorfismo hiperbólico de* $\mathbb{D}$ *que fija* -1 *y* 1. *Entonces*

$$\sigma(C_{\varphi_t}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : e^{-|t|/2} \leq |\lambda| \leq e^{|t|/2}\}.$$

Además

$$\sigma_p(C_{\varphi_t}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : e^{-|t|/2} < |\lambda| < e^{|t|/2}\},$$

donde las funciones $w_\lambda(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\lambda$ *son autofunciones asociadas al autovalor* $e^{-t\lambda}$ *para todo* $-1/2 < Re(\lambda) < 1/2$. *Es más, todo automorfismo hiperbólico del disco es conjugado con* φ_t *para algún* $t \in \mathbb{R}$ *y por tanto* C_φ *y* C_{φ_t} *comparten espectro y espectro puntual.*

Antes de presentar la demostración de este resultado, necesitamos exponer un par de resultados que serán imprescindibles en la prueba.

Lema 4.3.23. *Sea* $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ *con* $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. *Entonces, para todo* $f \in H^2$ *se tiene que*

$$\|C_\varphi f\|_{H^2} = \|f\|_{L^2(m_{\varphi^*})},$$

donde m_{φ^*} *denota la medida imagen de la medida de Lebesgue normalizada en* $\mathbb{T}$ *respecto a* φ^*.

La prueba de este resultado puede consultarse en [12].

Proposición 4.3.24. *Sea* $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ *con* $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ *función interior, y sea* $a = \varphi(0)$. *Entonces,* m_{φ^*} *coincide con la medida de densidad respecto de* m *del núcleo de Poisson en* a *dado por*

$$P_a(e^{it}) = \frac{1-|a|^2}{|a-e^{it}|^2}.$$

Demostración.
Primero observemos que la medida imagen m_{φ^*} está soportada en todo $\mathbb{T}$ porque φ es una función interior. Para probar este resultado basta ver que los coeficientes de Fourier de ambas medidas coinciden, pues tienen el mismo soporte. Tenemos, si $m \geq 0$, usando el teorema de la media que

$$\int_{\mathbb{T}} z^m dm_{\varphi^*} = \int_{\mathbb{T}} [\varphi(z)]^m dm = \varphi(0)^m = a^m.$$

Como φ es interior, basta observar que $\varphi(z)^{-m} = \overline{\varphi(z)}^m$ para obtener que

$$\int_{\mathbb{T}} z^m dm_{\varphi^*} = \overline{a}^{|m|}$$

si $m < 0$.
Para la medida de densidad, observemos que integrando z^m contra el núcleo de Poisson en el toro recuperamos la función holomorfa con z^m como función radial, por lo tanto

obtenemos los mismos coeficientes de Fourier para la medida de densidad.
Como estos coeficientes determinan las medidas de manera única, se sigue que ambas medidas coinciden.

Ya podemos probar entonces la caracterización del espectro:
Demostración del teorema 4.3.22.
Como vimos en el teorema de Littlewood, se tiene que

$$\|C_{\varphi_t}\| \leq \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi_(0)|}},$$

de donde se sigue que $\|C_\varphi\| \leq e^{|t|/2}$. Así, tenemos por tanto que $\sigma(C_\varphi) \subseteq \overline{B}(0, e^{|t|/2})$. Además, como $\varphi^{-1}(z) = \frac{z(e^{-t}+1)+(1-e^{-t})}{(e^{-t}+1)+(1-e^{-t})z}$ se tiene que $\left\|C_\varphi^{-1}\right\| \leq e^{|t|/2}$. Ahora, si $\lambda \in B(0, e^{-|t|/2}) \cap \sigma(C_\varphi)$, se sigue que $1/\lambda \in \sigma(C_\varphi^{-1})$, pero $1/|\lambda| > e^{|t|/2}$, lo cual es absurdo. Así, $\sigma(C_\varphi)$ está contenido en el anillo $\{z \in \mathbb{C} : e^{-|t|/2} \leq \|z\| \leq e^{|t|/2}\}$. Para ver que la anterior contención es una igualdad, basta probar entonces que el espectro puntual coincide con el interior de este anillo, como hemos enunciado. Observemos primero que

$$\{z \in \mathbb{C} : e^{-|t|/2} < |z| < e^{|t|/2}\} = \{e^{-t\lambda} \in \mathbb{C} : -1/2 < \mathrm{Re}(\lambda) < 1/2\}.$$

Comencemos viendo que las funciones $w_\lambda(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\lambda$ son autofunciones asociadas al autovalor $e^{-t\lambda}$ para $-1/2 < \mathrm{Re}(\lambda) < 1/2$. Tenemos

$$C_{\varphi_t}(w_\lambda)(z) = w_\lambda(\varphi(z)) = \left(\frac{1+\frac{z(e^{-t}+1)+(e^{-t}-1)}{z(e^{-t}-1)+(e^{-t}+1)}}{1-\frac{z(e^{-t}+1)+(e^{-t}-1)}{z(e^{-t}-1)+(e^{-t}+1)}}\right)^\lambda = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\lambda e^{-t\lambda} = w_\lambda(z)e^{-t\lambda},$$

como queríamos. Esto prueba por tanto que

$$\sigma_p(C_{\varphi_t}) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : e^{-|t|/2} < |\lambda| < e^{|t|/2}\}.$$

Veamos que la contención anterior es una igualdad. Para ello, Para ello, veamos que para todo $f \in H^2$ se tiene que

$$\|C_{\varphi_t} f\| < e^{|t|/2} \|f\|.$$

Esto obviamente impide que existan autovectores asociados a autovalores con $|\lambda| = e^{|t|/2}$. Con el mismo argumento aplicado a C_φ^{-1}, se obtiene que no puede haber autovalores con $|\lambda| = e^{-|t|/2}$, lo que cerrará la demostración. Para ello, tenemos gracias a la proposición 4.3.24 y al lema 4.3.23 que

$$\begin{aligned}\|C_\varphi f\|_{H^2} = \|f\|_{L^2(m_{\varphi^*})} = \int_{\mathbb{T}} |f(e^{it})|^2 P_a(e^{it}) dm &< \int_{\mathbb{T}} |f(e^{it})|^2 \|P_a\|_\infty dm(e^{it}) \\ = e^{|t|/2} \|f\|_{L^2(m_{\varphi^*})} = e^{|t|/2} \|f\|_{H^2},&\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\|P_a\|_\infty = e^{|t|/2}$ y que solo se alcanza en un solo punto. Esto termina la demostración. $\square$

El conocimiento del espectro y en particular de las autofunciones descritas anteriormente son cruciales para la construcción necesaria para la prueba.
Ahora, vamos a construir el operador de multiplicación cuyo adjunto será semejante a C_φ. Para ello, definimos

$$\psi_t(z) = \exp\left(\frac{ti}{\pi}\log\left(\frac{1-z}{1+z}\right)\right) = \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{ti}{\pi}} \quad (z \in \mathbb{D})$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Observemos que esta función está bien definida, ya que la aplicación $z \mapsto \frac{1-z}{1+z}$ lleva el disco $\mathbb{D}$ en el semiplano derecho $\mathrm{Re}(z) > 0$. Así, podemos tomar la rama natural del logaritmo tal que $\log(1) = 0$. Observemos entonces que ψ es holomorfa en $\mathbb{D}$. Veamos qué conjunto es $\psi_t(\mathbb{D})$. Dado $z \in \mathbb{D}$, pongamos $re^{i\theta} = \frac{1-z}{1+z}$, donde $r > 0$ y $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Entonces, $\log\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = \log r + i\theta$. Así,

$$\psi_t(z) = \exp\left(\frac{ti}{\pi}(\log r + i\theta)\right) = \exp\left(\frac{ti\log r}{\pi}\right)\exp\left(-\frac{t\theta}{\pi}\right). \tag{4.6}$$

Observemos que la primera exponencial tiene exponente imaginario puro, así que es un número complejo de módulo 1. La segunda exponencial nos dará el módulo de $\psi_t(z)$. Como $\theta \in (-pi/2, \pi/2)$, observemos entonces que $e^{-|t|/2} < e^{-t\theta/\pi} < e^{|t|/2}$. Por tanto, se tiene que

$$\psi_t(\mathbb{D}) = \{z \in \mathbb{C} : e^{-|t|/2} < |z| < e^{|t|/2}\}.$$

Así, $\psi_t \in H^\infty$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y el operador de multiplicación está bien definido. Observemos además que $\psi(\mathbb{D})$ coincide exactamente con el espectro puntual $\sigma_p(C_{\varphi_t})$ de nuestro operador de composición.
Con la siguiente proposición vamos a estudiar de forma parcial el espectro puntual de $M^*_{\psi_t}$. Además, vamos a dar una forma explícita de las autofunciones asociadas a los autovalores λ de la misma forma en la que las vimos para C_φ, lo que nos permitirá comparar las autofunciones de ambos operadores.

Proposición 4.3.25. *Dada $t \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$\{z \in \mathbb{C} : e^{-|t|/2} < |z| < e^{|t|/2}\} \subseteq \sigma_p(M^*_{\psi_t}),$$

donde las funciones $v_\lambda(z) = \left(1 - \frac{i\sin(\lambda\pi/2)}{\cos(\lambda\pi/2)}z\right)^{-1}$ son autofunciones asociadas al autovalor $e^{-t\lambda}$ para $-1/2 < Re(\lambda) < 1/2$.

Demostración.
Comencemos tomando $\alpha \in \mathbb{D}$ y consideremos el núcleo reproductor en α dado por $k_\alpha(z) = \frac{1}{1-\overline{\alpha}z}$. Dada $f \in H^2$, tenemos que

$$\left\langle M^*_{\psi_t}k_\alpha, f\right\rangle = \langle k_\alpha, \psi_t \cdot f\rangle = \overline{\langle \psi_t \cdot f, k_\alpha\rangle} = \overline{\psi_t\alpha f(\alpha)} = \left\langle \overline{\psi_t(\alpha)}k_\alpha, f\right\rangle.$$

Por tanto, para todo $\alpha \in \mathbb{D}$, se tiene que k_α es autofunción para $M^*_{\psi_t}$ asociada al autovalor $\overline{\psi_t(\alpha)}$. Como $\psi_t(\mathbb{D}) = \{z \in \mathbb{C} : e^{-|t|/2} < |z| < e^{|t|/2}\}$, se sigue entonces que

$$\{z \in \mathbb{C} : e^{-|t|/2} < |z| < e^{|t|/2}\} \subseteq \sigma_p(M^*_{\psi_t}).$$

Vamos ahora a expresar nuestro autovalor $\overline{\psi_t(\alpha)}$ y la autofunción k_α asociada en función de λ con $-1/2 < \mathrm{Re}(\lambda) < 1/2$ para obtener la forma enunciada. Para ello, observemos que

$$\overline{\psi_t(\alpha)} = \left(\frac{1-\overline{\alpha}}{1+\overline{\alpha}}\right)^{-\frac{ti}{\pi}}.$$

Ahora, ponemos

$$e^{-\lambda t} = \left(\frac{1-\overline{\alpha}}{1+\overline{\alpha}}\right)^{-\frac{ti}{\pi}}$$

y despejamos $\overline{\alpha}$ en función de λ. Tenemos entonces que

$$e^{-i\lambda\pi} = \frac{1-\overline{\alpha}}{1+\overline{\alpha}}.$$

Por tanto,

$$\overline{\alpha} = \frac{1-e^{-i\lambda\pi}}{1+e^{-i\lambda\pi}} = \frac{e^{i\pi\lambda/2} - e^{-i\pi\lambda/2}}{e^{i\pi\lambda/2} + e^{-i\pi\lambda/2}} = i\frac{\sin(\frac{\pi\lambda}{2})}{\cos(\frac{\pi\lambda}{2})}.$$

Así, los autovalores $e^{-\lambda t} = \overline{\psi_t(\alpha)}$ están asociados a las autofunciones $k_\alpha(z) = (1-\overline{\alpha}z)^{-1} = \left(1 - \frac{i\sin(\lambda\pi/2)}{\cos(\lambda\pi/2)}z\right)^{-1}$ para $-1/2 < \mathrm{Re}(\lambda) < 1/2$, como queríamos. $\square$

Las autofunciones descritas para C_{φ_t} y $M^*_{\psi_t}$ tienen propiedades muy útiles:

Proposición 4.3.26. *Definamos $v_\lambda, w_\lambda \in H^2$ como anteriormente. Entonces, los subespacios span$\{v_\lambda : -1/2 < \lambda < 1/2\}$ y span$\{w_\lambda : -1/2 < \lambda < 1/2\}$ son densos en H^2.*

Demostración.
Comencemos probando el resultado para las funciones v_λ. Tomemos $f \in H^2$ tal que $f \perp \mathrm{span}\{v_\lambda : -1/2 < \lambda < 1/2\}$. Recordemos que las funciones v_λ son los núcleos reproductores en $\alpha = -i\frac{\sin(\frac{\pi\lambda}{2})}{\cos(\frac{\pi\lambda}{2})}$. Por tanto, se tiene que

$$0 = \langle f, k_\alpha \rangle = f(\alpha).$$

Entonces, se sigue que $f(-i\frac{\sin(\frac{\pi\lambda}{2})}{\cos(\frac{\pi\lambda}{2})}) = 0$ para todo $-1/2 < \lambda < 1/2$. Es decir, f es idénticamente nula en la intersección del eje imaginario con el disco unidad $\mathbb{D}$. Por tanto, gracias al principio de prolongación analítica, deducimos que $f = 0$, lo que prueba la densidad de span$\{v_\lambda : -1/2 < \lambda < 1/2\}$.

Para las funciones w_λ, está claro que basta probar la densidad de $\mathrm{span}\{w_\lambda : 0 < \lambda < 1/2\}$. Para ello, vamos a considerar el isomorfismo isométrico $U : L^2(0,\infty) \to H^2$ dado por $(Uf)(z) = \frac{\sqrt{2}}{1-z}\int_0^\infty f(x)e^{-\frac{1+z}{1-z}x}dx$ que introdujimos en la prueba de la proposición 3.2.2. Vamos a probar que $\mathrm{span}\{U^{-1}(w_\lambda) : 0 < \lambda < 1/2\}$ es denso en $L^2(0,\infty)$, lo que probará el resultado. Tomemos las funciones de $L^2(0,\infty)$

$$e_\lambda(x) = \int_0^x t^{\lambda-1}e^{-(x-t)}dt \quad (x > 0).$$

Vamos a ver que $U(e_\lambda) = \gamma_\lambda w_\lambda$ para todo $0 < \lambda < 1/2$, donde $\gamma_\lambda \in \mathbb{C}$ es una constante que dependerá de λ. Entonces, bastará probar la densidad de $\mathrm{span}\{w_\lambda : 0 < \lambda < 1/2\}$. Tenemos, aplicando el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}
(Ue_\lambda)(z) &= \frac{\sqrt{2}}{1-z}\int_0^\infty \left(\int_0^x t^{\lambda-1}e^{-(x-t)}dt\right)e^{-\frac{1+z}{1-z}x}dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{1-z}\int_0^\infty t^{\lambda-1}e^t\left(\int_t^\infty \exp\left(-x(1+\frac{1+z}{1-z})\right)dx\right)dt \\
&= \frac{\sqrt{2}}{1-z}\frac{1}{1+\frac{1+z}{1-z}}\int_0^\infty t^{\lambda-1}\exp\left(-\frac{1+z}{1-z}t\right)dt \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\infty t^{\lambda-1}\exp\left(-\frac{1+z}{1-z}t\right)dt.
\end{aligned}$$

Observemos que obtenemos una integral que puede transformarse en una función Γ. Si ponemos $\frac{1+z}{1-z}t = w$, la integral queda:

$$\begin{aligned}
(Ue_\lambda)(z) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1-z}{1+z}\int_0^\infty \left(\frac{1-z}{1+z}w\right)^{\lambda-1}e^{-w}dw \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{-\lambda}\int_0^\infty w^{\lambda-1}e^{-w}dw \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{-\lambda}\Gamma(\lambda) \\
&= \gamma_\lambda w_\lambda(z).
\end{aligned}$$

Como $\lambda > 0$, $\Gamma(\lambda)$ está bien definida y obtenemos que $U(e_\lambda) = \gamma_\lambda w_\lambda$, como queríamos. Veamos por tanto que $\mathrm{span}\{e_\lambda : 0 < \lambda < 1/2\}$ es denso en $L^2(0,\infty)$. Para ello, tomemos $f \in L^2(0,\infty)$ ortogonal a este subespacio. Es decir, supongamos que

$$\int_0^\infty e_\lambda(x)\overline{f(x)}dx = 0$$

para todo $0 < \lambda < 1/2$. Aplicando de nuevo el teorema de Fubini, obtenemos que

$$\int_0^\infty t^{\lambda-1}\left(\int_t^\infty e^{-(x-t)}\overline{f(x)}dx\right)dt = 0. \tag{4.7}$$

Definimos entonces la función continua $F \in L^2(0,\infty)$ dada por

$$F(t) = \int_t^{\infty} e^{-(x-t)}\overline{f(x)}dx \quad (t \in (0,\infty)).$$

Observemos que la función $\tilde{F}(\lambda) = \int_0^{\infty} t^{\lambda-1}F(t)dt$ es una función analítica en la región $0 < \mathrm{Re}(\lambda) < 1/2$. Ahora, por la condición obtenida en (4.7), tenemos que $\tilde{F}(\lambda) = 0$ para todo $0 < \lambda < 1/2$. Por tanto, deducimos por el principio de prolongación analítica que $\tilde{F} \equiv 0$, lo que implica por tanto que $F = 0$ en $(0,\infty)$. Así, se sigue que $f = 0$ en casi todo $(0,\infty)$, lo que prueba por tanto la densidad de $\mathrm{span}\{e_\lambda : 0 < \lambda < 1/2\}$ y en consecuencia la de $\mathrm{span}\{w_\lambda : 0 < \lambda < 1/2\}$, como queríamos. □

La densidad de estas funciones nos permitirá definir un isomorfismo de H^2 en sí mismo, que nos dará la semejanza buscada entre C_{φ_t} y $M^*_{\psi_t}$, como vemos en el siguiente teorema:

Teorema 4.3.27. *Consideremos las funciones v_λ y w_λ para $0 < \lambda < 1/2$. Se tiene:*

(a) Si definimos

$$S : span\{v_\lambda : -1/2 < \lambda < 1/2\} \to span\{w_\lambda : -1/2 < \lambda < 1/2\}$$

como $S(v_\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}}w_\lambda$, entonces S puede ser extendido a un operador en $\mathcal{B}(H^2)$ con inversa acotada.

(c) Para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $C_{\varphi_t}S = SM^*_{\psi_t}$. Es decir, C_{φ_t} y $M^*_{\psi_t}$ son semejantes.

Demostración.

(a) Definimos el producto escalar $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ en H^2 como

$$\langle\langle f,g\rangle\rangle = \langle f,g\rangle - \frac{1}{2}f(0)\overline{g(0)} = \frac{1}{2}\hat{f}(0)\overline{\hat{g}(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\hat{f}(n)\overline{g(n)}$$

para todo $f,g \in H^2$. Además, denotaremos por $|||f|||$ a la norma inducida por el producto escalar. Tenemos que

$$\frac{1}{2}\|f\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2 \leq |||f|||^2 \leq \|f\|_{H^2},$$

por lo que son normas equivalentes. Denotemos entonces por K^2 al espacio de Hilbert de funciones analíticas en el disco con norma $|||\cdot|||$ finita. Observemos que K^2 y H^2 contienen exactamente a las mismas funciones, pero tienen productos escalares diferentes. Consideremos ahora $A : H^2 \hookrightarrow K^2$ la inyección canónica. Es decir, $Af = f$

para todo $f \in H^2$. Como $\frac{1}{\sqrt{2}}\|f\| \leq \| \| Af \| \| \leq \|f\|$, se sigue que A es un operador acotado de H^2 a K^2 con inversa acotada.
Ahora, definimos

$$V : \mathrm{span}\{v_\lambda : -1/2 < \lambda < 1/2\} \subset K^2 \to \mathrm{span}\{w_\lambda : -1/2 < \lambda < 1/2\} \subset H^2$$

como $V(v_\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} w_\lambda$ y extendiendo por linealidad. Veamos que V es una isometría. Para ello, observemos que $v_\lambda(0) = 1$ para todo $-1/2 < \lambda < 1/2$. Además, dados $-1/2 < \lambda, \mu < 1/2$ se tiene que

$$2 \langle v_\lambda, v_\mu \rangle = \langle w_\lambda, w_\mu \rangle + 1.$$

Omitimos este cálculo por ser bastante farragoso. Para el lector interesado, pueden encontrarse en [18], colorario 2. Se tiene por tanto que

$$\begin{aligned}\langle Vv_\lambda, Vv_\mu \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} w_\lambda, \frac{1}{\sqrt{2}} w_\mu \right\rangle = \frac{1}{2} \langle w_\lambda, w_\mu \rangle = \frac{1}{2}(2 \langle v_\lambda, v_\mu \rangle - 1) \\ &= \langle v_\lambda, v_\mu \rangle - \frac{1}{2} v_\lambda(0)\overline{v_\mu(0)} = \langle \langle v_\lambda, v_\mu \rangle \rangle .\end{aligned}$$

Por tanto, S es isometría. Ahora, como $\mathrm{span}\{v_\lambda : -1/2 < \lambda < 1/2\}$ y $\mathrm{span}\{w_\lambda : -1/2 < \lambda < 1/2\}$ son densos en H^2 (y en K^2), podemos extender V a un isomorfismo isométrico de K^2 en H^2. Finalmente, definimos $S = V \circ A : H^2 \mapsto H^2$. Así, tenemos $S(v_\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} w_\lambda$, como queríamos.

(b) Sea $-1/2 < \lambda < 1/2$. Entonces $S(M^*_{\psi_t} v_\lambda) = S(e^{-\lambda t} v_\lambda) = \frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{2}} w_\lambda$. Por otro lado, $C_{\varphi_t}(Sv_\lambda) = C_{\varphi_t}(\frac{1}{\sqrt{2}} w_\lambda)$. Como $C_{\varphi_t} S = SM^*_{\psi_t}$ coinciden sobre un conjunto total, se sigue que los dos operadores son iguales.

□

Necesitamos introducir ahora los *operadores de Toeplitz*. Dada una función $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, ésta induce un operador de multiplicación $M_f \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$ definido como $M_f g = fg$ para todo $g \in L^2(\mathbb{T})$. Nuestro objetivo es convertir estos operadores de multiplicación en $L^2(\mathbb{T})$ en operadores acotados definidos en H^2. Recordemos que podemos identificar H^2 con el subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{T})$ de funciones cuyos coeficientes de Fourier de índice negativo son nulos. Por tanto, existe una proyección ortogonal $P : L^2(\mathbb{T}) \to H^2$.

Definición 4.3.28. Se define el **operador de Toeplitz** de símbolo f T_f como

$$T_f = P \circ M_{f|H^2}.$$

Observemos que es un operador bien definido y automáticamente acotado, pues $\|T_f\| \leq \|P\| \|M_f\| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$.

Observemos que para toda función $f \in H^\infty$ se tiene que su límite radial f^* es una función acotada en $\mathbb{T}$, así que f^* induce un operador de Toeplitz T_f. Veamos que en este caso, el operador de Toeplitz inducido por f y el operador de multiplicación usual M_f coinciden.

Proposición 4.3.29. *Sea $f \in H^\infty$. Entonces, $T_f = M_f$.*

Demostración.
Sea $g \in H^2$. Observemos que $T_f g = P(f^* g^*)$. Ahora, como $f \in H^\infty$, se sigue que $fg \in H^2$, por lo que su límite radial $f^* g^*$ tiene sus coeficientes de Fourier de índices negativos nulos. Así, $P(f^* g^*) = f^* g^*$, y por tanto $T_f g = fg = M_f g$, como queríamos. $\square$

Ya podemos entonces probar la universalidad de C_φ :

Demostración del teorema 4.3.1:
Sea φ un automorfismo hiperbólico del disco, y sea $\lambda \in \sigma_p(C_\varphi)$. Ahora, C_φ es semejante a C_{φ_t} para algún $t \in \mathbb{R}$. Además, sabemos por el teorema 4.3.27 que C_{φ_t} es semejante a $M^*_{\psi_t}$. Entonces, gracias a la proposición 4.2.2 basta probar que $M^*_{\psi_t} - \lambda I$ es universal. Para ello, nos valdremos del teorema de Caradus. Tenemos que probar que $M^*_{\psi_t} - \lambda I$ tiene núcleo de dimensión infinita y que es sobreyectivo.
Comencemos estudiando la primera propiedad. Recordemos que $\psi_t(\mathbb{D}) = \sigma_p(C_{\varphi_t})$. Vamos a probar que ψ_t toma cada valor en una cantidad infinita de puntos. Para ello, tomemos $z \in \mathbb{D}$ y pongamos $re^{i\theta} = \frac{1-z}{1+z}$, con $r > 0$ y $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Como vimos en la igualdad 4.6, se tiene que

$$\psi_t(z) = \exp\left(\frac{ti \log r}{\pi}\right) \exp\left(-\frac{t\theta}{\pi}\right).$$

Ahora, pongamos $\overline{\lambda} = \rho e^{i\alpha}$, donde $e^{-|t|/2} < \rho < e^{|t|/2}$. Entonces, está claro que existe $\theta_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ tal que $\exp\left(-\frac{t\theta}{\pi}\right) = \rho$. Más aún, observemos que el argumento de $\psi_t(z)$ viene dado por $\exp\left(\frac{ti \log r}{\pi}\right)$. Como $r \in (0, \infty)$, podemos elegir una cantidad infinita r_n $(n \in \mathbb{N})$ de forma que $\exp\left(\frac{ti \log r_n}{\pi}\right) = e^{i\alpha}$ gracias a la periodicidad de $t \mapsto e^{it}$. Finalmente, basta ver que como la transformación $z \mapsto \frac{1-z}{1+z}$ es una biyección del disco en el semiplano derecho, existe un número infinito de $z_n \in \mathbb{D}$ tales que $\psi_t(z_n) = \overline{\lambda}$. Ahora, consideramos los núcleos reproductores k_{z_n}. Está claro que son funciones linealmente independientes para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ que

$$M^*_{\psi_t} k_{z_n} = \overline{\psi_t(z_n)} k_{z_n} = \lambda k_{z_n}.$$

Así,

$$(M^*_{\psi_t} - \lambda I) k_{z_n} = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que prueba que $\ker(M_{\psi_t}^* - \lambda I)$ tiene dimensión infinita.
Veamos la sobreyectividad. Notemos que $\psi_t - \overline{\lambda}$ es una función analítica acotada en el disco. Además, se tiene que $M_{\psi_t} - \lambda I = M_{\psi_t - \lambda}$, así que $M_{\psi_t}^* - \lambda I = M_{\psi_t - \overline{\lambda}}^*$. Observemos ahora que como $M_{\psi_t}^*$ es semejante a C_{φ_t}, su espectro y su espectro puntual coinciden. Por tanto, se tiene que $\overline{\lambda} \in \sigma_p(M_{\psi_t}^*)$. Veamos que existe $\ell > 0$ de forma que

$$|\psi_t(e^{i\theta}) - \overline{\lambda}| \geq \ell$$

en casi todo $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$. Para ello, observemos que ψ_t lleva la frontera de $\mathbb{D}$ en la frontera del espectro

$$\partial\sigma(M_{\psi_t}^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = e^{-|t|/2}\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = e^{|t|/2}\}.$$

Entonces, como λ está en el interior del espectro, basta tomar ℓ su distancia a la frontera. Así, obtenemos que $f_t = \frac{1}{\psi_t - \overline{\lambda}}$ es una función acotada en $L^\infty(\mathbb{T})$, y por lo tanto induce un operador de Toeplitz T_f. Veamos que T_f es la inversa por la izquierda de $M_{\psi_t - \overline{\lambda}}$. Sea $g \in H^2$. Si $P_L^2(\mathbb{T}) \to H^2$ es la proyección ortogonal, se tiene que

$$T_f M_{\psi_t - \overline{\lambda}} g = T_f((\psi_t - \overline{\lambda})) = P(f \cdot (\psi_t - \overline{\lambda})) = P(1) = 1.$$

Entonces, se tiene que $T_f M_{\psi_t - \overline{\lambda}} = I$. Basta tomar adjuntos para obtener que $M_{\psi_t - \overline{\lambda}}^* T_f^* = I$. Por tanto, T_f^* es la inversa por la derecha de $M_{\psi_t - \overline{\lambda}}^*$, por lo que deducimos que es sobreyectivo.
Así, $M_{\psi_t}^* - \lambda I$ verifica las hipótesis del teorema de Caradus y es un operador universal, como queríamos demostrar. $\square$

Capítulo 5

El Retículo de Cierto Operador de Composición

5.1. Formulación del Problema

En este último capítulo vamos a presentar el retículo de subespacios invariantes del operador de composición inducido por una transformación parabólica no automorfismo. Más allá del interés propio que tiene conocer el retículo de este operador, el atractivo de esta caracterización radica en que es el único retículo no trivial conocido de un operador de composición inducido por una transformación de Möbius. Por tanto, su estudio puede aportarnos ideas y métodos aprovechables para el estudio del operador de composición hiperbólico automorfismo, que resolvería el problema del subespacio invariante en espacios de Hilbert.

Como ya comentamos en el capítulo anterior en la sección de transformaciones de Möbius, nosotros estamos interesados en aquellas transformaciones que llevan al disco unidad $\mathbb{D}$ dentro de sí mismo. Todas estas aplicaciones tienen uno o dos puntos fijos. Vamos a estudiar el caso en el que φ tiene solo un punto fijo, es decir, en el que φ es **parabólico**. Como ya comentamos, este punto fijo debe estar en el toro $\mathbb{T}$. Por tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que este punto fijo es 1, ya que basta componer con un giro para recuperar la aplicación inicial. Vamos a proporcionar una forma canónica para las transformaciones parabólicas. Observemos que la aplicación $\tau(z) = \frac{1+z}{1-z}$ transforma el disco unidad en el semiplano $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$ y manda al punto 1 a ∞. Por tanto, la aplicación $\Phi(w) = \tau \circ \varphi \circ \tau^{-1}$ es una traslación de $\mathbb{H}$ en sí mismo, así que tiene la forma $\Phi(w) = w + a$, donde $\Re(a) \geq 0$. Por tanto, obtenemos que

$$\varphi(z) = \frac{(2-a)z + a}{2 + a - az}. \tag{5.1}$$

Observemos además que φ será automorfismo si y solo si $\Re(a) = 0$, por lo tanto hemos encontrado la forma canónica para la transformación parabólica no automorfismo:

$$\varphi_a(z) = \frac{(2-a)z + a}{2 + a - az} \qquad \Re(a) > 0. \tag{5.2}$$

El resultado general que probaremos en este capítulo fue publicado originalmente por Montes-Rodríguez, Ponce-Escudero y Shkarin en [20]. Vamos a tratar de seguir su construcción en la medida de lo posible, intentando aclarar los detalles que sean necesarios. Antes de enunciar el teorema, vamos a ver algunas características del espectro de C_{φ_a}:

Proposición 5.1.1. *Sea φ_a la transfromación parabólica no automorfismo descrita anteriormente. Entonces*

$$\{e^{-at} : t \geq 0\} \subseteq \sigma_p(C_{\varphi_a}).$$

Además, las funciones interiores e_t dadas por

$$e_t(z) = \exp\left(t\frac{z+1}{z-1}\right) \qquad t \geq 0$$

son autofunciones asociadas al autovalor correspondiente e^{-at}.

Demostración.
Tomemos $t \geq 0$ y comprobemos que $C_{\varphi_a} e_t = e_t \circ \varphi_a = e^{-at} e_t$. Sea $z \in \mathbb{D}$. Se tiene:

$$\begin{aligned} e_t \circ \varphi_a(z) &= e_t\left(\frac{(2-a)z + a}{2 + a - az}\right) = \exp\left(t\frac{\frac{(2-a)z+a}{2+a-az} + 1}{\frac{(2-a)z+a}{2+a-az} - 1}\right) \\ &= \exp\left(t\frac{z + 1 - a(z-1)}{z-1}\right) = \exp\left(-at + t\frac{z+1}{z-1}\right) \\ &= e^{-at}\exp\left(t\frac{z+1}{z-1}\right) = e^{-at} e_t, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Nota 5.1.2. De hecho, Carl C. Cowen demostró en [7] que se tiene

$$\sigma(C_{\varphi_a}) = \{0\} \cup \{e^{-at} : t \geq 0\}.$$

De todas formas, la prueba de este resultado involucra ciertos resultados técnicos que no queremos desarrollar para no emborronar las ideas que nos parecen más importantes relacionadas con el resultado que queremos probar. Es más, cuando hayamos probado el teorema central de este capítulo ofreceremos una prueba de este hecho como corolario.

El resultado principal es el siguiente:

Teorema 5.1.3. *[Montes-Rodríguez, Ponce-Escudero, Shkarin, 2010] Sea φ una transfromación parabólica no automorfismo. Entonces*

$$Lat\ C_\varphi = \{\overline{span}\{e_t : t \in F\} : F \in \mathbb{F}[0,\infty)\},$$

donde $\mathbb{F}[0,\infty)$ *denota a la familia de todos los conjuntos cerrados de* $[0,\infty)$.

En particular, se tiene que todo subespacio invariante no trivial de C_φ contiene una autofunción de C_φ. Como consecuencia, también probaremos que

Teorema 5.1.4. *Sea φ una transformación parabólica no automorfismo. Entonces C_φ no tiene espacios reductores no triviales.*

El resto del trabajo de este capítulo estará dirigido a demostrar el teorema 5.1.3. La idea principal consiste en proporcionar un isomorfismo de H^2 a $W^{1,2}[0,\infty)$ tal que C_φ^* sea similar a un operador de multiplicación por un vector cíclico M_ψ bajo dicho isomorfismo, y a continuación caracterizar el retículo de este operador. En realidad, veremos un resultado más general, pues caracterizaremos el retículo de subespacios invariantes de cualquier operador de multiplicación por un elemento cíclico en un álgebra de Banach, que estará constituido exactamente por los ideales cerrados del álgebra. Además, proporcionaremos una condición para expresar estos ideales como intersección de ideales maximales regulares cuando el álgebra sea semisimple y regular. Finalmente, veremos que el espacio de Sobolev $W^{1,2}[0,\infty)$ cumple las condición anterior y así obtendremos una caracterización de los subespacios invariantes de C_φ^*, lo cual caracterizará completamente el retículo de C_φ.

5.2. Álgebras de Banach con un elemento cíclico.

Comenzaremos entonces mostrando la caracterización general enunciada. Para el trabajo de esta sección nos valdremos fuertemente de los resultados sobre ideales en álgebras de Banach presentados en el capítulo 1. De ahora en adelante, consideraremos A un álgebra de Banach compleja.

Definición 5.2.1. Un elemento $a \in A$ es **cíclico** si la subálgebra generada por a es densa en A. Es decir, si

$$A = \overline{\text{span}}\{a^n : n \geq 1\}.$$

Si A tiene un elemento cíclico, se desprende trivialmente de la definición que A es separable y conmutativa. Si $a \in A$, el operador de multiplicación por a se define como

$$M_a x = ax, \qquad x \in A$$

. Está claro que $M_a \in \mathcal{B}(A)$ para todo $a \in A$. Está claro que todo ideal cerrado es un subespacio invariante para cualquier operador de multiplicación. Veamos que si multiplicamos por un elemento cíclico, el recíproco también es cierto:

Teorema 5.2.2. *Sea A un álgebra de Banach y $a \in A$ un elemento cíclico. Entonces*

$$\textit{Lat } M_a = \{I \subset A : I \textit{ es un ideal cerrado}\}.$$

Demostración.
Primero, observemos que como A tiene un elemento cíclico entonces es conmutativa. Sea $\mathcal{L}$ un subespacio invariante de M_a. Entonces, el conjunto

$$M_{\mathcal{L}} := \{b \in A : bx \in \mathcal{L} \text{ para todo } x \in \mathcal{L}\}.$$

es claramente una subálgebra cerrada de A. Ahora, como $\mathcal{L} \in \text{Lat } M_a$, se sigue que $ax \in \mathcal{L}$ para todo $x \in \mathcal{L}$, así que $a \in M_{\mathcal{L}}$. Así, $M_{\mathcal{L}}$ contiene a la subálgebra generada por A, y como es cerrado y a cíclico, se sigue que $M_{\mathcal{L}} = A$. Es decir, $\mathcal{L}$ es un ideal por la izquierda, y como A es conmutativo, es un ideal de A. Finalmente, todo ideal cerrado es un subespacio invariante para M_a, así que el teorema queda demostrado. □

Así, hemos conseguido la caracterización anunciada para los operadores de multiplicación por elementos cíclicos. Como ya hemos comentado, podemos dar una condición para expresar los ideales cerrados de un álgebra semisimple y regular como intersección de ideales maximales regulares de A.
Recordemos que el espectro $\Omega(A)$ es el conjunto de homomorfismos complejos no nulos definidos sobre A, y que existe una biyección entre $\Omega(A)$ y el conjunto de ideales maximales regulares $\mathfrak{M}$. Es decir, todo ideal $M \in \mathfrak{M}$ es precisamente el núcleo de un carácter $\varkappa \in \Omega(A)$. Recordemos además que se define la transformada de Gelfand $\hat{a}$ de cualquier elemento $a \in A$ como la aplicación

$$\begin{aligned} \hat{a} \ &: \mathfrak{M} \to \mathbb{C} \\ \ker \varkappa &\mapsto \varkappa(a). \end{aligned}$$

Además, dado $x \in A$ denotaremos por $h(x)$ al cierre del ideal generado por x.
El resultado es

Teorema 5.2.3. *Sea A un álgebra de Banach semisimple y regular con $a \in A$ elemento cíclico. Entonces*

$$\textit{Lat } M_a = \left\{ \bigcap_{\varkappa \in F} \ker \varkappa : F \textit{ es cerrado en } \Omega(A) \right\}$$

si y solo si para cada $x \in A$ existe una sucesión (x_n) convergiendo a x en A tal que $\hat{x_n}$ se anula en un entorno U_n de $h(x)$ con complementario compacto.

Demostración.
La prueba de este teorema está profundamente basada en el lema 1.3.25. Observemos que

por la definición de $J(h(I),\infty)$, la igualdad requerida en el lema es equivalente a que para cada ideal cerrado I y cada $x \in k(h(I))$ existan conjuntos abiertos $U_n \supset h(I)$ con complementario compacto y $x_n \in h(U_n)$ tal que $x_n \to x$. Además, es trivial comprobar que $h(\{x\})$ coincide con el cierre del ideal generado por x. Por tanto, la igualdad $\overline{J(h(I),\infty)} = k(h(I))$ es equivalente a la condición de nuestro teorema.
Ahora, gracias al lema 1.3.25, sabemos que si I es un ideal cerrado, entonces $I = k(h(I))$. Además, $h(I)$ es un conjunto cerrado F de $\mathfrak{M}$. Por tanto, $I = k(h(I)) = \bigcap_{M\in F} M$. Así, tenemos gracias al teorema 5.2.2 que

$$\text{Lat } M_a = \left\{ \bigcap_{M\in F} M : F \text{ es cerrado en } \mathfrak{M} \right\}.$$

Finalmente, gracias a la identificación de todo ideal maximal regular con los núcleos de los elementos del espectro de A, deducimos que

$$\text{Lat } M_a = \left\{ \bigcap_{x\in F} \ker \varkappa : F \text{ es cerrado en } \Omega(A) \right\},$$

como queríamos. □

5.3. Un isomorfismo de H^2 a $W^{1,2}[0,+\infty)$

En esta sección vamos a proporcionar un isomorfismo entre los espacios H^2 y $W^{1,2}[0,+\infty)$, el cual nos permitirá representar el adjunto de nuestro operador C_φ como un operador de multiplicación por un vector cíclico. Comenzamos repasando las nociones básicas de espacios de Sobolev, las pruebas de los resultados pueden encontrarse en [5].
Se define el espacio de Sobolev $W^{1,2}[0,\infty)$ como el espacio de las funciones $f \in L^2[0,+\infty)$ tales que f es absolutamente continua en cada subintervalo acotado de $[0,+\infty)$ y $f' \in L^2[0,+\infty)$, donde f' denota la derivada débil de f. Este espacio conforma un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$\langle f,g\rangle_{1,2} := \int_0^{+\infty} f(x)\overline{g(x)} + f'(x)\overline{g'(x)}dx.$$

De igual forma, podemos definir equivalentemente los espacios $W^{1,2}(-\infty,0]$ y $W^{1,2}(\mathbb{R})$. Además, denotaremos por $W_0^{1,2}[0,+\infty)$ al subespacio de funciones de $W^{1,2}[0,+\infty)$ que se anulan en $(-\infty,0]$.
Definamos entonces el isomorfismo buscado. Recordemos que denotamos $e_t = \exp\left(t\frac{z+1}{z-1}\right)$. Entonces, podemos definir

$$\Phi : H^2 \longrightarrow W^{1,2}[0,+\infty)$$

dado por

$$(\Phi f)(t) = \langle f, e_t \rangle_{H^2}.$$

La clave para probar que Φ es un isomorfismo es considerar el operador

$$\Psi : L^2(\mathbb{T}) \to W^{1,2}(\mathbb{R})$$

definido de nuevo por

$$(\Psi f)(t) = \langle f, e_t \rangle_{L^2(\mathbb{T})}.$$

El resultado principal es

Teorema 5.3.1. *El operador Ψ es un isomorfismo de $L^2(\mathbb{T})$ a $W^{1,2}(\mathbb{R})$ que cumple*

$$\|\Psi f\|_{W^{1,2}(\mathbb{R})} = 2\, \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{T})$. Además, $\Psi(zH^2) = W_0^{1,2}[0, +\infty)$ y $\Psi(\overline{z}\overline{H^2}) = W_0^{1,2}(-\infty, 0]$.

En el enunciado anterior, $\overline{H^2}$ es el espacio de funciones del espacio de Hardy conjugadas. Aunque Ψ esté definido sobre $L^2(\mathbb{T})$, podemos entender a Ψ como un operador definido en H^2, identificando este espacio con el subespacio de $L^2(\mathbb{T})$ donde los coeficientes de Fourier de índices negativos son nulos. De igual forma, identificamos $\overline{H^2}$ con el subespacio de $L^2(\mathbb{T})$ de funciones con coeficientes de Fourier de índices positivos nulos. Estas identificaciones son posibles gracias al teorema 3.1.3.
Veamos ahora los resultados que necesitaremos para probar el teorema anterior.
Primero, definiremos la **transformada de Fourier** $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ de una forma ligeramente diferente a como hicimos en el capítulo 2:

$$\mathcal{F}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx} dt.$$

Recordamos las siguientes propiedades, que utilizaremos en la prueba del teorema:

Proposición 5.3.2. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Se tiene:*

(a) $(\mathcal{F}(\mathcal{F}f))(x) = 2\pi f(-x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

(b) Si f es derivable en $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $(\mathcal{F}f')(x) = ix(\mathcal{F}f)(x)$.

(b) (Teorema de Plancherel) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

Además necesitaremos el siguiente isomorfismo que pone en juego al espacio de Hardy del plano superior:

Proposición 5.3.3. *La aplicación*

$$\begin{aligned} M : H^2 &\to H^2(\Pi) \\ f &\to Mf(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(z+i)} f\left(\frac{z-i}{z+i}\right) \end{aligned}$$

es un isomorfismo isométrico.

Demostración.
Basta observer que M es la inversa del isomorfismo isométrico descrito en 3.2.3.
Ya tenemos todo lo necesario para presentar la prueba del teorema 5.3.1:
Demostración.
Para cada $f \in H^2$ tenemos que

$$(\Psi f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\exp\left(t\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)d\theta, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Mediante el cambio de variable $x = i\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$ la integral se transforma en

$$(\Psi f)(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x-i}{x+i}\right)\frac{e^{-itx}}{1+x^2}dx, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

Por tanto, podemos expresar la aplicación como $\Psi = \mathcal{F}MT$, donde $\mathcal{F}$ es la transformada de Fourier que definimos anteriormente,

$$(Mg)(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{g(y)}{\sqrt{1+y^2}} \quad \text{y} \quad (Tf)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}f\left(\frac{x-i}{x+i}\right),$$

donde $T : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{R})$ y $M : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.
Comencemos observando que T es un isomorfismo isómetrico, lo cual es trivial gracias al cambio de variable que aplicamos anteriormente. En efecto, dada $f \in L^2(\mathbb{T})$

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(\frac{x-i}{x+i}\right)\right|^2\frac{1}{1+x^2}dx = \|Tf\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Esta igualdad prueba que T es isometría. Para ver que es sobreyectiva, observemos que la transformación $x \mapsto \frac{x-i}{x+i}$ es una biyección de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{T}$, y su inversa es $e^{i\theta} \mapsto i\frac{1+w}{1-w}$. Entonces, dada $f \in L^2(\mathbb{R})$, se tiene que $\theta \mapsto f\left(i\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)$ es una función de $L^2(\mathbb{T})$. Por tanto, si tomamos

$$g(e^{i\theta}) = \sqrt{\pi}\sqrt{1+\left(i\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)^2}\, f\left(i\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)$$

obtenemos que $Tg(x) = f(x)$, lo que prueba que T es sobreyectiva y por tanto isomorfismo isométrico.
Veamos ahora que $\mathcal{F}M$ es un isomorfismo de $L^2(\mathbb{R})$ a $W^{1,2}(\mathbb{R})$ que cumple la propiedad enunciada para las normas, lo que probará la primera afirmación del teorema. Podemos componer $\mathcal{F}$ y M, ya que Mf es el producto de dos funciones de $L^2(\mathbb{R})$, y por la desigualdad de Hölder se sigue que $Mf \in L^1(\mathbb{R})$. Comencemos viendo que si $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $\mathcal{F}Mf \in W^{1,2}(\mathbb{R})$. Para ello, recordemos que

$$\|g\|^2_{W^{1,2}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}}|g(t)|^2 + |g'(t)|^2 dt = \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|g'\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Ahora, por el teorema de Plancherel (proposición 5.3.2) tenemos para todo $g \in L^2(\mathbb{R})$ que

$$\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi} \|\mathcal{F}(f)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Gracias además a que $\mathcal{F}(g')(x) = ix\mathcal{F}(g)(x)$ (proposición 5.3.2), se tiene

$$\|g'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi} \|\mathcal{F}(g')\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi} \|ix\mathcal{F}(g)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Así, para toda $g \in L^2(\mathbb{R})$, se sigue que

$$\|g\|^2_{W^{1,2}(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (1+x^2)|(\mathcal{F}g)(x)|^2 dx.$$

Es decir, $g \in W^{1,2}(\mathbb{R})$ si y solo si $\sqrt{1+x^2}(\mathcal{F}g)(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Veamos entonces que

$$\mathcal{F}Mf := g \in W^{1,2}(\mathbb{R}).$$

Por lo razonado anteriormente, $g \in W^{1,2}(\mathbb{R})$ si y solo si $\sqrt{1+x^2}(\mathcal{F}g)(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Ahora, gracias a la proposición 5.3.2, se tiene que $\mathcal{F}(\mathcal{F}Mf)(x) = 2\pi Mf(-x)$. Así, $\mathcal{F}Mf \in W^{1,2}(\mathbb{R})$ si y solo si

$$2\pi\sqrt{(1+x^2)}Mf(-x) = \frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} f(-x) \in L^2(\mathbb{R}),$$

lo que prueba que $\mathcal{F}Mf \in W^{1,2}(\mathbb{R})$. Veamos que, además, esta aplicación es un isomorfismo isométrico. En efecto, dada $f \in L^2(\mathbb{R})$ tenemos

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}Mf\|^2_{W^{1,2}(\mathbb{R})} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (1+x^2)|\mathcal{F}(\mathcal{F}Mf)(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (1+x^2)4\pi^2|Mf(-x)|^2 dx \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} |f(-x)|^2 dx = 2\,\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

lo que prueba en particular que $\mathcal{F}M$ es un operador continuo e inyectivo. Para ver que es sobreyectivo, tomemos $f \in W^{1,2}(\mathbb{R})$. Definimos entonces $g(x) = \sqrt{\pi}\sqrt{1+x^2}(\mathcal{F}f)(-x)$. Observemos que $g \in L^2(\mathbb{R})$, ya que como $f(-x) \in W^{1,2}$, se sigue que $\sqrt{1+x^2}(\mathcal{F}f)(-x)$ pertenece a $L^2(\mathbb{R})$ por el razonamiento anterior. Además, está claro que $(Mg)(x) = (\mathcal{F}f)(-x)$, así que $(\mathcal{F}Mg)(x) = f(x)$, lo que prueba la sobreyectividad. Así, hemos probado que $\mathcal{F}M$ es un isomorfismo que cumple que

$$\|\mathcal{F}Mf\|_{W^{1,2}(\mathbb{R})} = 2\,\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{R})$. Por tanto, tenemos que $\Psi = \mathcal{F}MT$ es un isomorfismo que cumple que

$$\|\Psi f\|_{W^{1,2}(\mathbb{R})} = 2\,\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{T})$, como queríamos.
Probemos la segunda parte del teorema. Tomemos $f \in zH^2$, es decir, $f(z) = zg(z)$, con $g \in H^2$. Usando de nuevo el cambio de variable $x = i\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$ tenemos

$$(\Psi f)(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{x-i}{x+i}\right)\frac{e^{-itx}}{(x+i)^2}dx, \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Veamos que gracias a la fórmula anterior podemos deducir que Ψf es la transformada de Fourier de una función de $H^2(\Pi)$. Es decir, tenemos que probar que

$$z \in \Pi \mapsto g\left(\frac{z-i}{z+i}\right)\frac{1}{(z+i)^2} \in H^2(\Pi).$$

Ahora, observemos que gracias a la proposición 5.3.3 se sigue que $z \in \Pi \mapsto g\left(\frac{z-i}{z+i}\right)\frac{1}{(z+i)} \in H^2(\Pi)$. Basta probar entonces que el operador de multiplicación por $(w+i)^{-1}$, que denotaremos por $M : H^2(\Pi) \to H^2(\Pi)$, es acotado en $H^2(\Pi)$. Como ocurría con los operadores de multiplicación en H^2, bastará conque la función de multiplicación sea acotada, que es justo lo que ocurre en nuestro caso. En efecto, dada $w \in \Pi$, tenemos que $|w+i| \geq 1$, por lo tanto $|(w+i)|^{-1} \leq 1$. Así,

$$\|Mf\|_{H^2(\Pi)} = \sup_{y>0}\int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2\frac{1}{|x+iy+i|^2}dx \leq \sup_{y>0}\int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2 dx = \|f\|_{H^2(\Pi)},$$

lo que prueba que el operador está bien definido y es acotado. Por tanto, deducimos que Ψf es la transformada de Fourier del valor frontera de una función de $H^2(\Pi)$, que en concreto es una función continua, ya que es la transformada de una función integrable, como vimos anteriormente. Por tanto, Ψf es una función continua (es la transformada de Fourier de una función continua) se anula en el intervalo $(-\infty, 0]$, lo que prueba por tanto que

$$\Psi(zH^2) \subset W_0^{1,2}[0,+\infty).$$

Con el mismo razonamiento, se prueba que $\Psi(\overline{zH^2}) \subseteq W_0^{1,2}(-\infty, 0]$.
Nos falta probar que estas contenciones son en realidad igualdades. Para ello, notemos que podemos descomponer ortogonalmente $W^{1,2}(\mathbb{R})$ como

$$W^{1,2}(\mathbb{R}) = W_0^{1,2}(-\infty,0] \oplus \left\langle e^{-|t|}\right\rangle \oplus W_0^{1,2}[0,\infty),$$

donde $\left\langle e^{-|t|}\right\rangle$ denota el subespacio de dimensión 1 generado por $e^{-|t|}$. Está claro que los tres subespacios son ortogonales entre sí (basta realizar una sencilla integración por partes.) Además, dada $f \in W^{1,2}(\mathbb{R})$, se tiene que

$$f(t) = (f(t) - f(0)e^{-|t|})\chi_{(-\infty,0]}(t) + f(0)e^{-|t|} + (f(t) - f(0)e^{-t})\chi_{[0,\infty)}(t),$$

lo que prueba que la descomposición enunciada es válida. Además, está claro que

$$L^2(\mathbb{T}) = \overline{z}\overline{H^2} \oplus \langle 1 \rangle \oplus zH^2.$$

Observemos que el isomorfismo Ψ conserva la ortogonalidad gracias a la identidad de polarización: si $f \perp g \in L^2(\mathbb{T})$ tenemos

$$\langle \Psi f, \Psi g \rangle_{W_{1,2}(\mathbb{R})} = 2 \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = 0.$$

Por tanto, Ψ conserva las descomposiciones ortogonales. Finalmente, gracias al hecho de que $\Psi(1) = e^{-|t|}$, se sigue que $\Psi(zH^2) = W_0^{1,2}[0,\infty)$ y $\Psi(\overline{z}\overline{H^2}) = W_0^{1,2}(-\infty, 0]$, como queríamos probar. $\square$

Ya podemos ver entonces que el operador Φ que definimos al comienzo de la sección es un isomorfismo:

Corolario 5.3.4. *El operador* $\Phi : H^2 \to W^{1,2}[0,\infty)$ *es un isomorfimo.*

Demostración.
Gracias al teorema 5.3.1, los operadores Φ y Ψ coinciden en el subespacio zH^2, por lo tanto Φ define un isomorfismo de zH^2 a $W_0^{1,2}[0,\infty)$ cumpliendo $\|\Phi f\|_{W^{1,2}(\mathbb{R})} = 2\|f\|_{H^2}$ para todo $f \in zH^2$ y, por polarización,

$$\langle \Phi f, \Phi g \rangle_{W^{1,2}(\mathbb{R})} = 2 \langle f, g \rangle_{H^2}$$

para todo $f, g \in H^2$. Ahora, por el mismo razonamiento que en la prueba anterior, se sigue que $W^{1,2}[0,\infty) = \left\langle e^{-t}\chi_{[0,\infty)} \right\rangle \oplus W_0^{1,2}[0,\infty) = \langle \Phi 1 \rangle \oplus \Phi(zH^2) = \Phi(H^2)$, lo que prueba que efectivamente Φ es un isomorfismo. $\square$

Gracias a este resultado, vamos a ver con la siguiente proposición que el adjunto de nuestro operador de composición C_{φ_a} puede ser estudiado como un operador de multiplicación en el espacio de Sobolev $W^{1,2}[0,\infty)$:

Proposición 5.3.5. *Sea* φ_a *definido como en (5.1) con* $\Re(a) \geq 0$. *Entonces* $C_{\varphi_a}^* : H^2 \to H^2$ *es semejante bajo* Φ *al operador de multiplicación* $M_\psi : W^{1,2}[0,\infty) \to W^{1,2}[0,\infty)$, *donde* $\psi(t) = e^{-\overline{a}t}$.

Demostración.
Recordemos que la proposición 5.1.1 aseguraba que e^{-at} son autovalores para C_{φ_a} si $t \geq 0$ asociados a los autovectores $e_t = \exp\left(t\frac{z+1}{z-1}\right)$. Tenemos, dada $f \in H^2$

$$\begin{aligned}(\Phi C_{\varphi_a}^* f)(t) &= \left\langle C_{\varphi_a}^* f, e_t \right\rangle_{H^2} = \langle f, C_{\varphi_a} e_t \rangle_{H^2} = \left\langle f, e^{-at} e_t \right\rangle \\ &= e^{-\overline{a}t} \langle f, e_t \rangle_{H^2} = e^{-\overline{a}t}(\Phi f)(t)\end{aligned}$$

para cada $t \geq 0$. Así, $C^*_{\varphi_a} = \Phi^{-1} M_\psi \Phi$, como queríamos. Esto prueba el resultado. $\square$

Para completar todo lo enunciado al comienzo de la sección, solo nos falta probar que M_ψ es cíclico con ψ vector cíclico. Vamos a dar las definiciones formales de estos conceptos:

Definición 5.3.6. Dado un espacio de Banach X, diremos que un operador $T \in \mathcal{B}(X)$ es **cíclico** si existe $x \in X$ tal que su órbita bajo T es densa en H. Es decir, si

$$X = \overline{\text{span}}\{T^n x : n \geq 0\}.$$

En tal caso, diremos que x es un **vector cíclico** asociado a T.

Observemos que un elemento $a \in A$ en un álgebra de Banach es *cíclico* si y solo si el operador de multiplicación $M_a \in \mathcal{B}(A)$ es cíclico y a es vector cíclico para M_a.

Además, necesitaremos poner en juego los *núcleos reproductores* del espacio H^2:

Definición 5.3.7. Para cada $\alpha \in \mathbb{D}$, definimos el **núcleo reproductor** en α como la función $k_\alpha \in H^2$ dada por

$$k_\alpha(z) = \frac{1}{1 - \overline{\alpha} z} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\alpha}^n z^n.$$

Proposición 5.3.8. *Sea $\alpha \in \mathbb{D}$. Se cumple:*

(a) Para cada $f \in H^2$ se tiene $\langle f, k_\alpha \rangle_{H^2} = f(\alpha)$.

(b) Sea $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ con $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Entonces $C^*_\varphi k_\alpha = k_{\varphi(\alpha)}$.

La prueba de este resultado puede encontrarse en ([12], p. 65). Se tiene:

Proposición 5.3.9. *El operador de multiplicación $M_\psi \in \mathcal{B}(W^{1,2}[0,\infty))$, donde $\psi(t) = e^{-\overline{a}t}$ y $\Re(a) > 0$, es cíclico con vector cíclico ψ.*

Demostración.
Tomemos $\alpha = \frac{a-1}{a+1} \in \mathbb{D}$, y sea k_α el núcleo reproductor asociado a α. Tenemos que $(\Phi k_\alpha)(t) = \langle k_\alpha, e_t \rangle_{H^2} = \overline{e_t(\alpha)} = \psi(t)$ para todo $t \geq 0$. Así, como $C^*_{\varphi_a}$ y Φ son similares, basta probar que $C^*_{\varphi_a}$ es cíclico con vector cíclico k_α. Para ello, tomemos $f \in H^2$ y supongamos que es ortogonal a la órbita de k_α bajo $C^*_{\varphi_a}$. Para todo $n \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle (C^*_{\varphi_a})^n k_\alpha, f \right\rangle_{H^2} = \langle k_\alpha, (C_{\varphi_a})^n f \rangle_{H^2} = \langle k_\alpha, C_{\varphi_{na}} f \rangle_{H^2} \\ &= \langle k_\alpha, f \circ \varphi_{na} \rangle = \overline{f(\varphi_{na}(\alpha))}. \end{aligned}$$

Si probamos que $(\varphi_{na}(\alpha))$ no es una sucesión de Blaschke, entonces $f = 0$ y se seguirá el resultado.
Para ello, tenemos que probar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 - |\varphi_{na}(\alpha)| = \infty.$$

Comencemos calculando $\varphi_{na}(\alpha)$. Como $\alpha = \frac{a-1}{a+1}$, tenemos que

$$\varphi_{na}(\alpha) = \frac{(2-na)\frac{a-1}{a+1} + na}{-na\frac{a-1}{a+1} + 2 + na} = \frac{a(n+1)-1}{a(n+1)+1}.$$

Está claro que obtenemos una sucesión en $\mathbb{D}$ que converge a 1. Debemos afinar un poco para probar que la serie que queremos estudiar diverge. Ahora, observemos que

$$(1 - |\varphi_{na}(\alpha)|^2) \leq (1 - |\varphi_{na}(\alpha)|)(1 + |\varphi_{na}(\alpha)|) \leq 2(1 - |\varphi_{na}(\alpha)|).$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 - |\varphi_{na}(\alpha)| \geq \frac{1}{2} \sum 1 - |\varphi_{na}(\alpha)|^2,$$

así que bastará con estudiar la segunda serie para obtener la divergencia. Tenemos

$$\begin{aligned} 1 - |\varphi_{na}(\alpha)|^2 &= 1 - \frac{a(n+1)-1}{a(n+1)+1} \cdot \frac{\overline{a}(n+1)-1}{\overline{a}(n+1)+1} = 1 - \frac{|a|^2(n+1)^2 - 2(n+1)\Re(a) + 1}{|a|^2(n+1)^2 + 2(n+1)\Re(a) + 1} \\ &= \frac{4(n+1)\Re(a)}{|a|^2(n+1)^2 + 2(n+1)\Re(a) + 1} \geq \frac{4(n+1)\Re(a)}{(|a|^2 + 2\Re(a))(n+1)^2} \\ &= \frac{4\Re(a)}{|a|^2 + 2\Re(a)} \cdot \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Observando que $\frac{4\Re(a)}{|a|^2+2\Re(a)}$ es un número real positivo, se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 - |\varphi_{na}(\alpha)| \geq \frac{1}{2} \frac{4\Re(a)}{|a|^2 + 2\Re(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty,$$

como queríamos. Esto prueba que $(\varphi_{na}(\alpha))$ no es sucesión de Blaschke, y por tanto $f = 0$. Esto termina la demostración. □

5.4. El Espacio de Sobolev $W^{1,2}[0, \infty)$ como Álgebra de Banach.

En esta sección vamos a probar que el espacio de Sobolev $W^{1,2}[0, \infty)$ es un álgebra de Banach con el producto puntual como multiplicación. Además, caracterizamos su espectro

y veremos que es un álgebra semisimple y regular. Finalmente, con la ayuda del teorema 5.2.3 lograremos una caracterización del retículo de M_ψ en función de los conjuntos cerrados de $[0,\infty)$, y en consecuencia, del retículo de C_φ^*, con lo que obtendremos la prueba del teorema 5.1.3.
Comencemos viendo algunas propiedades básicas del Espacio de Sobolev $W^{1,2}[0,\infty)$. La prueba del siguiente resultado está extraída de [17].

Proposición 5.4.1. *Si $f \in W^{1,2}[0,\infty)$, entonces $f \in L^\infty[0,\infty)$, con $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{W^{1,2}[0,\infty)}$. En particular, la convergencia en norma $W^{1,2}[0,\infty)$ implica la convergencia uniforme.*

Demostración.
Sea $t_0 \geq 0$ y tomemos $t > t_0$. Por definición, f es absolutamente continua en el intervalo $[t_0,t]$, por lo tanto también lo es f^2. Así, para cada $s \in [t_0,t]$ tenemos

$$f(t_0)^2 - f(s)^2 = -\int_{t_0}^{s} (f^2)'(\sigma)d\sigma = -2\int_{t_0}^{s} f(\sigma)f'(\sigma)d\sigma.$$

Entonces, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$|f(t_0)^2 - f(s)^2| = 2\left|\int_{t_0}^{s} f(\sigma)f'(\sigma)d\sigma\right| \leq 2\|f\|_2\|f'\|_2.$$

Por lo tanto, tenemos

$$|f(t_0)|^2 \leq |f(t_0)^2 - f(s)^2| + |f(s)|^2 \leq 2\|f\|_2\|f'\|_2 + |f(s)|^2.$$

Tomando la media integral en el intervalo $[t_0,t]$ en ambos lados de esta desigualdad, obtenemos

$$|f(t_0)|^2 \leq 2\|f\|_2\|f'\|_2 + \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}|f(\sigma)|^2 d\sigma \leq 2\|f\|_2\|f'\|_2 + \frac{\|f\|_2^2}{t-t_0}.$$

Por tanto, tomando límite con $t \to +\infty$, se sigue que $|f(t_0)|^2 \leq 2\|f\|_2\|f'\|_2$. Como $t_0 \geq 0$ es arbitrario, obtenemos finalmente

$$\|f\|_\infty^2 \leq 2\|f\|_2\|f'\|_2 \leq \|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2 = \|f\|_{W^{1,2}[0,\infty)}^2,$$

como queríamos. □

Como consecuencia de este resultado, obtenemos fácilmente nuestro primer objetivo: el espacio de Sobolev $W^{1,2}[0,\infty)$ es un álgebra de Banach.

Proposición 5.4.2. *El espacio $W^{1,2}[0,\infty)$ con la multiplicación puntual es un álgebra de Banach conmutativa sin unidad.*

Demostración.
Sean $f, g \in W^{1,2}[0,\infty)$. Gracias a la proposición 5.4.1, tenemos

$$\|fg\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_\infty \leq \|f\|_{W^{1,2}[0,\infty)} \|g\|_{W^{1,2}[0,\infty)}$$

y

$$\|(fg)'\|_2 = \|f'g + fg'\|_2 \leq \|f'\|_2 \|g\|_\infty + \|g'\|_2 \|f\|_\infty \leq 2 \|f\|_{W^{1,2}[0,\infty)} \|g\|_{W^{1,2}[0,\infty)},$$

por lo tanto

$$\|fg\|_{W^{1,2}[0,\infty)} \leq 3 \|f\|_{W^{1,2}[0,\infty)} \|g\|_{W^{1,2}[0,\infty)},$$

lo que prueba que $fg \in W^{1,2}[0,\infty)$. □

Como es habitual cuando se trabaja con espacio tipo Sobolev, simplifica mucho algunos razonamientos contar con un subespacio denso compuesto de funciones mucho más regulares. Denotaremos por $\mathcal{C}_c^\infty[0,\infty)$ al espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en $[0,\infty)$. Se tiene

Proposición 5.4.3. *El espacio $\mathcal{C}_c^\infty[0,\infty)$ es denso en $W^{1,2}[0,\infty)$.*

Demostración.
Tomemos $f \in W^{1,2}[0,\infty)$ de forma que $\langle f, g\rangle_{\mathcal{C}_c^\infty[0,\infty)} = 0$ para todo $g \in \mathcal{C}_c^\infty[0,\infty)$. Es decir,

$$\int_0^\infty f(t)\overline{g(t)}dt + \int_0^\infty f'(t)\overline{g'(t)}dt = 0$$

para todo $g \in \mathcal{C}_c^\infty[0,\infty)$. Veamos entonces que $f = 0$, lo que probará que $\mathcal{C}_c^\infty[0,\infty)$ es denso en $W^{1,2}[0,\infty)$.
Como g tiene soporte compacto, si integramos por partes en la identidad anterior tenemos que

$$\int_0^\infty \left[f'(x) - \left(\int_0^x f(t)dt\right)\right] \overline{g'(x)}dx = 0, \qquad \text{para cada } g \in \mathcal{C}_c^\infty[0,\infty).$$

Observemos ahora que como g' tiene soporte compacto, la integral obtenida en realidad es una integral sobre un intervalo de medida finita. Tomemos entonces $a > 0$. Como el conjunto de funciones g' con $g \in \mathcal{C}_c^\infty[0,a)$ es denso en $L^2[0,a]$, se tiene

$$f'(x) - \int_0^x f(t)dt = 0, \quad \text{para cada } \ 0 \leq x \leq a.$$

Por tanto, se sigue que $f(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ para $0 \leq x \leq a$, donde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Como a es arbitrario, se sigue que $f(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ para todo $x \geq 0$. Finalmente, como $f \in W^{1,2}[0,\infty)$, se sigue que $c_1 = 0$, y como $f'(0) = 0$, se tiene $c_2 = 0$. Así, obtenemos que f es la función nula y se sigue el resultado. □

El siguiente paso entonces es caracterizar el espectro $\Omega(W^{1,2}[0,\infty))$. Para cada $t \geq 0$, denotamos por $\delta_t \in W^{1,2}[0,\infty)$ al núcleo reproductor en t, es decir,

$$f(t) = \langle f, \delta_t \rangle_{W^{1,2}[0,\infty)} .$$

Observemos que δ_t puede ser caracterizado mediante el isomorfismo que definimos en el apartado anterior, ya que

$$\langle f, \delta_t \rangle_{W^{1,2}[0,\infty)} = f(t) = \Phi(\Phi^{-1} f)(t) = \left\langle \Phi^{-1} f, e_t \right\rangle_{H^2} .$$

Recordemos que el espectro $\Omega(W^{1,2}[0,\infty))$ es el espacio de caracteres (homomorfismo complejos no nulos) equipado con la topología débil*. Notemos que como $W^{1,2}[0,\infty)$ es un espacio de Hilbert, esta topología coincide con la topología débil. Tenemos

Proposición 5.4.4. *El espectro del álgebra de Banach* $W^{1,2}[0,\infty)$ *es*

$$\Omega(W^{1,2}[0,\infty)) = \{\delta_t : t \geq 0\}.$$

Es más, la aplicación $t \mapsto \delta_t$ *es un homeomorfismo de* $[0,+\infty)$ *a* $\Omega(W^{1,2}[0,\infty))$.

Para poder dar la prueba de este resultado, vamos a basarnos fuertemente en el espectro del espacio $\mathcal{C}^1[0,1]$, con la norma $\|f\|_{\mathcal{C}^1[0,1]} = \text{máx}\{\|f\|_\infty , \|f'\|_\infty\}$ definida para todo $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$. Es trivial comprobar que este espacio constituye un álgebra de Banach conmutativa con el producto puntual.

Lema 5.4.5. *Definimos para cada* $0 \leq s \leq 1$ *las aplicaciones* $\varkappa_s : \mathcal{C}^1[0,1] \to \mathbb{C}$ *como* $\varkappa_s(f) = f(s)$. *Entonces*

$$\Omega(\mathcal{C}^1[0,1]) = \{\varkappa_s : 0 \leq s \leq 1\}.$$

La prueba de este resultado puede encontrarse, en un enunciado mucho más general, en ([16], p. 219).

Demostración de la proposición 5.4.4.

Claramente, para cada $t \geq 0$, el funcional δ_t es un carácter en $W^{1,2}[0,\infty)$, ya que es claramente un homomorfismo complejo. Es decir, $\delta_t \in \Omega(W^{1,2}[0,\infty))$ para todo $t \geq 0$. Hay que probar por tanto que todo carácter en $W^{1,2}[0,\infty)$ es de la forma δ_t para algún $t \geq 0$. Consideramos entonces el álgebra $\mathcal{C}^1[0,1]$ descrita anteriormente y su subálgebra $A_0 := \{f \in \mathcal{C}^1[0,1] : f(1) = 0\}$. Definimos entonces el operador

$$\begin{aligned} T : A_0 &\to W^{1,2}[0,\infty) \\ f &\mapsto (Tf)(x) = f\left(\frac{x}{1+x}\right). \end{aligned}$$

Veamos que está bien definido. Tenemos

$$\|Tf\|^2_{W^{1,2}[0,\infty)} = \int_0^\infty \left| f\left(\frac{x}{1+x}\right)\right|^2 + \frac{1}{(1+x)^4} \left| f'\left(\frac{x}{1+x}\right)\right|^2 dx$$

Con el cambio de variable $\frac{x}{1+x} = y$, la integral anterior queda como

$$\int_0^1 \frac{1}{y^2 - 2y + 1}|f(y)|^2 + (y^2 - 2y + 1)|f'(y)|^2 dy.$$

Ahora, basta observar, aplicando consecutivamente la regla de L'Hôpital que

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 1} \frac{|f(y)|^2}{y^2 - 2y + 1} &= \lim_{y\to 1} \frac{f'(y)\overline{f(y)} + f(y)\overline{f'(y)}}{2y-2} \leq \|f'\|_\infty \lim_{y\to 1} \frac{\overline{f(y)} + f(y)}{2y-2} \\ &= \|f'\|_\infty \Re(f'(1)) \leq \|f'\|_\infty^2 .\end{aligned}$$

Por tanto, la función $\frac{1}{y^2-2y+1}|f(y)|^2 + (y^2 - 2y + 1)|f'(y)|^2$ es una función acotada en el intervalo $[0, 1]$, por tanto su integral es finita y se sigue que $Tf \in W^{1,2}[0, \infty)$. Ahora, observamos que T es claramente es homomorfismo de álgebras, y gracias al razonamiento anterior, es un operador acotado. Ahora, si $\varkappa$ es un carácter en $W^{1,2}[0, \infty)$, es trivial comprobar que el funcional $\tilde{\varkappa}$ en $\mathcal{C}^1[0, 1]$ definido como $\tilde{\varkappa}(f) = \varkappa(T(f - f(1))) + f(1)$ es también un carácter. Ahora, sabemos por el lema 5.4.5 que todo carácter definido en $\mathcal{C}^1[0, 1]$ consiste en una evaluación puntual, así que existe $0 \leq s \leq 1$ tal que $\tilde{\varkappa}(f) = f(s)$ para todo $f \in \mathcal{C}^1[0, 1]$. Si $s = 1$, tenemos para cada $f \in A_0$ que

$$0 = f(1) = \tilde{\varkappa}(f) = \varkappa(T(f - f(1))) + f(1) = \varkappa(Tf)$$

de donde deducimos que $\varkappa(Tf) = 0$. Por lo tanto, $\varkappa$ se anula en todo el rango de T, que es denso porque contiene al espacio $\mathcal{C}_c^\infty[0, \infty)$, que como probamos en 5.4.3 es un subespacio denso. Por tanto, se sigue que $\varkappa$ es el funcional nulo. Ahora, si $s \neq 1$, tomamos $t = s/(1 - s) \geq 0$ y observamos que, si $f \in A_0$ tenemos

$$\delta_t(Tf) = (Tf)(t) = f(s) = \tilde{\varkappa}(f) = \varkappa(T(f - f(1))) + f(1) = \varkappa(Tf).$$

Así, tenemos que δ_t y $\varkappa$ coinciden en $T(A_0)$, que como ya hemos comentado es un conjunto denso, lo que implica que $\varkappa = \delta_t$. Por tanto, hemos probado que $\Omega(W^{1,2}[0, \infty)) = \{\delta_t : t \geq 0\}$, como queríamos.
Falta entonces probar que la aplicación $t \mapsto \delta_t$ es un homeomorfismo. Comencemos probando que es continua. Tomemos $t_n \to t_0$. Tenemos que para cada $f \in W^{1,2}[0, \infty)$

$$\langle f, \delta_{t_n} \rangle = f(t_n) \to f(t_0) = \langle f, \delta_{t_0} \rangle ,$$

por ser f continua. Esto prueba que δ_{t_n} converge débilmente a δ_{t_0}, por lo tanto $t \mapsto \delta_t$ es continua. Veamos ahora que la inversa $\delta_t \mapsto t$ también es una aplicación continua. Para ello, observemos que como $W^{1,2}[0, \infty)$ es un espacio de Hilbert, su topología débil coincide con su topología débil*. Además, como es separable, se sigue que su topología débil es metrizable en conjuntos acotados. Tenemos que para cada $f \in W^{1,2}[0, \infty)$ y $t \geq 0$

$$| \langle f, \delta_t \rangle | = |f(t)| \leq \|f\|_\infty \leq C \|f\|_{1,2} .$$

Así, obtenemos que $\|\delta_t\|_{W^{1,2}[0,\infty)} \leq 1$ para todo $t \geq 0$, por lo tanto $\Omega(W^{1,2}[0,\infty))$ está acotado en norma en el espacio dual, y por lo tanto la topología en $\Omega(W^{1,2}[0,\infty))$ es metrizable. Así, deducimos que para probar que nuestra aplicación es efectivamente homeomorfismo basta probar que $t_n \to t$ si $\delta_{t_n} \to \delta_t$. Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $|t_n - t_0| > \varepsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Consideramos ahora $f \in W^{1,2}[0,\infty)$ definida como

$$f(t) = (\varepsilon - |t_0 - t|)\chi_{[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]}.$$

Entonces, tenemos que $\delta_{t_n}(f) = 0$ y $\delta_{t_0}(f) = \varepsilon$, por lo que δ_{t_n} no puede converger a δ_{t_0}, lo cual es una contradicción. Por tanto, $t \mapsto \delta_t$ es homeomorfismo y el resultado queda probado. □

Con esta caracterización en mano, vamos a probar a continuación que $W^{1,2}[0,\infty)$ es un álgebra semisimple y regular, y caracterizaremos los ideales cerrados del álgebra en función de los conjuntos cerrados de $[0,\infty)$, que denotamos por $\mathbb{F}[0,\infty)$. Recordemos que el retículo de M_ψ coincide exactamente con los ideales cerrados de $W^{1,2}[0,\infty)$ gracias al teorema 5.2.2, y así caracterizaremos su retículo en función de $\mathbb{F}[0,\infty)$. Con esto en mano, probaremos finalmente el teorema 5.1.3.

Proposición 5.4.6. *El Álgebra de Banach $W^{1,2}[0,\infty)$ es semisimple y regular y la aplicación*

$$F \mapsto \bigcap_{t\in F} \ker \delta_t$$

es una biyección de $\mathbb{F}[0,\infty)$ a Lat M_ψ, donde $\psi(t) = e^{-\overline{a}t}$.

Demostración.
Comencemos notando que los caracteres δ_t separan puntos, así que gracias a la proposición 5.4.4, el espectro $\Omega(W^{1,2}[0,\infty))$ separa puntos. Además, gracias a la proposición 1.3.18, se sigue que $W^{1,2}[0,\infty)$ es semisimple. Para ver que es regular, tomemos $M = \ker \delta_t$ un ideal regular maximal. Tenemos que encontrar un entorno abierto U de δ_t de forma que $k(U)$ sea ideal regular, es decir, tal que $W^{1,2}[0,\infty)/k(U)$ sea un álgebra unitaria. Supongamos que $t \in [0,b) \subset [0,\infty)$ con $0 < b < \infty$ y sea U la imagen de $[0,b)$ por el homeomorfismo dado por la proposición anterior. Está claro entonces que U es entorno abierto de δ_t, ya que $[0,b)$ es abierto en la topología relativa de $[0,\infty)$. Ahora, tenemos por definición

$$k(U) = \bigcap_{0\leq t<b} \ker \delta_t = \{f \in W^{1,2}[0,\infty) : f \equiv 0 \text{ en } [0,b)\},$$

que como ya sabemos es un ideal cerrado. Basta entonces ver que $W^{1,2}[0,\infty)/k(U)$ es un álgebra unitaria, lo que probará que $k(U)$ es regular, como queremos. Ya sabemos que $W^{1,2}[0,\infty)/k(U)$ es un álgebra de Banach. Vamos a buscar la unidad. Observemos que, si

$f \in W^{1,2}[0,\infty)$, entonces la clase de equivalencia $f+k(U)$ está compuesta por las funciones que coinciden con f en el intervalo $[0,b)$. Tomemos entonces la función

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < b \\ b+1-t & \text{si } b \leq t < b+1 \\ 0 & \text{si } b+1 \leq t. \end{cases}$$

Está claro que $g \in W^{1,2}[0,\infty)$, pues es una función absolutamente continua tal que tanto ella como su derivada son acotadas y tienen soporte compacto, así que son trivialmente de cuadrado integrable. Tomemos $g + k(U)$. Dada cualquier $f \in W^{1,2}[0,\infty)$ tenemos

$$(f + k(U))(g + k(U)) = (fg + k(U)) = f + k(U),$$

ya que $fg(t) = f(t)$ para todo $\in [0,b)$, gracias a nuestra definición de g. Así, $g + k(U)$ es efectivamente unidad, como queríamos. Por tanto, $k(U)$ es un ideal regular y deducimos que $W^{1,2}[0,\infty)$ es un álgebra de Banach regular.
Para probar la última afirmación de la proposición, basta demostrar que se satisfacen las hipótesis del teorema 5.2.3. Para ello, observemos que dada $f \in W^{1,2}[0,\infty)$ y $t \geq 0$

$$\hat{f}(\delta_t) = \delta_t(f) = f(t).$$

Es decir, la transformada de Gelfand de f se anulará en un subconjunto de $\Omega(W^{1,2}[0,\infty))$ si y solo sí f se anula en la preimagen del subconjunto por el isomorfismo dado en la proposición anterior. Llamemos

$$E := \{t \in [0,\infty) : f(t) = 0\}.$$

Buscamos entonces una sucesión (f_n) que converja a f que cumpla que cada conjunto

$$E_n = \{t \in [0,\infty) : f_n(t) = 0\}$$

contenga un entorno abierto U_n de E y tenga complemento compacto. Para ello, definimos las funciones

$$\varphi_n(x) = \min\{1, n\mathrm{d}(x, (E \cup [n,\infty)) + [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}])\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Observemos que φ_n es continua para cada $n \in \mathbb{N}$. Es más, cada φ_n es idénticamente nula en el conjunto $E \cup [n,+\infty) + [\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}]$, es lineal con pendiente $\pm n$ en el compacto

$$K_n = (E \cup [n,+\infty) + [\frac{-2}{n}, \frac{2}{n}]) \setminus (E \cup [n,+\infty) + [\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}])$$

y constantemente 1 en el resto de $[0,\infty)$. Es importante remarcar que cada componente conexa de K_n tiene medida $1/n$. Como $K_n \subset [0,n]$, se sigue que el número de componentes conexas es finito. Además, se tiene que $m(K_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Así, se tiene que cada φ_n es una función acotada con $\|\varphi_n\|_\infty = 1$ con soporte compacto, por lo tanto $\varphi_n \in L^2[0,\infty)$. Además, tenemos que $|\varphi_n'| = n\chi_{K_n}$, por lo que de nuevo es una función acotada de soporte compacto. Por lo tanto, $\varphi_n' \in L^2[0,\infty)$ y $\varphi_n \in W^{1,2}[0,\infty)$. Ahora, si ponemos

$$f_n := \varphi_n \cdot f$$

tenemos que $f_n \in W^{1,2}[0,\infty)$, ya que es un álgebra. Observemos además que

$$E_n = E \cup [n, +\infty) + [\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}],$$

que claramente tiene complementario compacto y contiene un entorno abierto U_n de E. Falta entonces demostrar que $f_n \to f$ en $W^{1,2}[0,\infty)$. Tenemos que probar entonces que $\varphi_n f \to f$ en $L^2[0,\infty)$ y $(\varphi_n f)' \to f'$ en $L^2[0,\infty)$. Primero, observemos que $|\varphi_n f| \leq |f|$, ya que $\|\varphi_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, $\varphi_n \to 1$ puntualmente en $[0,\infty)$, se sigue que $\varphi_n f \to f$ puntualmente. Por tanto, como $f \in L^2[0,\infty)$, basta aplicar el teorema de la convergencia dominada para obtener $\varphi_n f \to f$ en $L^2[0,\infty)$.
Para la convergencia de la derivada, observemos que $(\varphi_n f)' = \varphi_n f' + \varphi_n' f$. Podemos aplicar de nuevo el teorema de la convergencia dominada para obtener que $\varphi_n f' \to f'$ en $L^2[0,\infty)$, por lo basta probar que $\varphi_n' f \to 0$ en $L^2[0,\infty)$. Es decir, tenemos que ver que

$$\int_0^\infty |\varphi_n'|^2 |f|^2 \to 0.$$

Ahora, como $|\varphi_n'| = n\chi_{K_n}$, basta estudiar la integral

$$\int_{K_n} n^2 |f(t)|^2 dt.$$

Ahora, observemos que si definimos

$$\hat{K}_n = (E \cup [n, +\infty) + [\frac{-2}{n}, \frac{2}{n}]) \setminus (E \cup [n, +\infty))$$

se tiene que $K_n \subset \hat{K}_n$. Al igual que K_n, estos conjuntos tienen un número finito de componentes conexas de medida $2/n$ y $m(\hat{K}_n) \to 0$. Elegimos estos conjuntos porque si ponemos

$$\hat{K}_n = \bigcup_{k=1}^{N} [a_k, b_k]$$

como la unión de sus componentes conexas, se tiene que a_k ó b_k está en E. Así, f se anula en uno de los extremos de cada intervalo. Además, $|b_k - a_k| = 2/n$. Tomemos $[a_k, b_k]$ uno de estos intervalos y supongamos sin pérdida de generalidad que $f(a_k) = 0$. Vamos a estudiar la integral

$$\int_{a_k}^{b_k} n^2 |f(t)|^2 dt.$$

Como f es absolutamente continua en cada subconjunto acotado de $[0,\infty)$, tenemos que

$$f(t) = f(a_k) + \int_{a_k}^{t} f'(t)dt = \int_{a_k}^{t} f'(t)dt$$

para todo $t \in [a_k, b_k]$. Entonces tenemos, usando Cauchy-Schwarz se tiene

$$|f(t)| \leq \int_{a_k}^{t} |f'(x)|dx \leq \sqrt{t-a_k}\left(\int_{a_k}^{t} |f'(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq \sqrt{\frac{2}{n}}\left(\int_{a_k}^{b_k} |f'(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{a_k}^{b_k} n^2|f(t)|^2 dt &\leq n^2 \int_{a_k}^{b_k} \frac{2}{n}\left(\int_{a_k}^{b_k} |f'(x)|^2 dx\right) dt = n^2|b_k - a_k|\frac{2}{n}\left(\int_{a_k}^{b_k} |f'(x)|^2 dx\right) \\ &= 4\int_{a_k}^{b_k} |f'(x)|^2 dx.\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\hat{K}_n} n^2|f(t)|^2 dt &= \sum_{k=1}^{N} \int_{a_k}^{b_k} n^2|f(t)|^2 dt \leq 4\sum_{k=1}^{N} \int_{a_k}^{b_k} |f'(x)|^2 dx \\ &= 4\int_{\hat{K}_n} |f'(t)|^2 dt.\end{aligned}$$

Ahora, como $f' \in L^2[0,\infty)$ y $m(\hat{K}_n) \to 0$ se sigue por la continuidad absoluta de la integral de Lebesgue que

$$\int_{\hat{K}_n} |f'(t)|^2 dt \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Así, como $K_n \subset \hat{K}_n$, se sigue que

$$\int_{K_n} |f'(t)|^2 dt \to 0,$$

y por tanto $\varphi_n' f \to 0$ en $L^2[0,\infty)$. Así, $\varphi_n \cdot f \to f$ en $W^{1,2}[0,\infty)$, como queríamos.
La existencia de esta sucesión, junto con el hecho de que $W^{1,2}[0,\infty)$ es semisimple y regular, se satisfacen las hipótesis requeridas. Por tanto, como ψ es un elemento cíclico en $W^{1,2}[0,\infty)$ gracias a la proposición 5.3.9, deducimos que

$$\mathrm{Lat}\ M_\psi = \left\{\bigcap_{t\in F} \ker \delta_t : F \in \mathbb{F}[0,\infty)\right\},$$

por lo que la aplicación $F \mapsto \bigcap_{t\in F} \ker \delta_t$ es sobreyectiva. Ahora, como $\bigcap_{t\in F} \ker \delta_t \neq \bigcap_{t\in G} \ker \delta_t$ si $F \neq G$, se sigue que la aplicación es biyectiva, como queríamos. $\square$

Ya tenemos por tanto toda la maquinaria necesaria para probar el teorema 5.1.3:
Demostración del teorema 5.1.3.
Tenemos gracias a la proposición 5.4.6 que la aplicación $F \mapsto \bigcap_{t\in F} \ker \delta_t$ es una biyección de $\mathbb{F}[0,\infty)$ a Lat M_ψ. Ahora, observemos que dado $F \in \mathbb{F}[0,\infty)$ se tiene que

$$\bigcap_{t\in F} \ker \delta_t = \{f \in W^{1,2}[0,\infty) : f \equiv 0 \text{ en } F\},$$

por lo que la aplicación

$$F \mapsto \{f \in W^{1,2}[0,\infty) : f \equiv 0 \text{ en } F\}$$

es de nuevo una biyección de $\mathbb{F}[0,\infty)$ a Lat M_ψ. Ahora, recordemos que por la proposición 5.3.5, se tiene que $M_\psi = \Phi C^*_{\varphi_a} \Phi^{-1}$. Gracias a la proposición 2.1.18, tenemos que

$$\text{Lat } C^*_{\varphi_a} = \{\Phi^{-1}(Y) : Y \in \text{Lat } M_\psi\}.$$

Observemos ahora que, dado $F \in \mathbb{F}[0,\infty)$,

$$\Phi^{-1}(\{f \in W^{1,2}[0,\infty) : f \equiv 0 \text{ en } F\}) = \{f \in H^2 : \langle f, e_t\rangle_{H^2} = 0 \text{ para } t \in F\},$$

así que la aplicación

$$F \mapsto J_F := \{f \in H^2 : \langle f, e_t\rangle_{H^2} = 0 \text{ para } t \in F\}$$

es una biyección de $\mathbb{F}[0,\infty)$ a Lat $C^*_{\varphi_a}$. Finalmente, gracias a la proposición 2.1.15, sabemos que Lat C_{φ_a} consiste exactamente en los complementos ortogonales de Lat C_{φ_a}, por lo que la aplicación

$$F \mapsto J_F^\perp$$

es una biyección de $\mathbb{F}[0,\infty)$ a Lat C_{φ_a}. Notemos ahora que

$$\{f \in H^2 : \langle f, e_t\rangle_{H^2} = 0 \text{ para } t \in F\}^\perp = \overline{\text{span}}\{e_t : t \in F\},$$

por lo que obtenemos que

$$\text{Lat } C_{\varphi_a} = \{\overline{\text{span}}\{e_t : t \in F\} : F \in \mathbb{F}[0,\infty)\},$$

como queríamos probar. □

Podemos presentar inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario 5.4.7. *Todos los operadores de composición inducidos por una transformación de Möbius parabólica no automorfismo tienen exactamente el mismo retículo de subespacios invariantes salvo isomorfismo.*

Demostración.
Basta observar que todo operador de composición inducido por una transformación parabólica no automorfismo es semejante a C_{φ_a} para algún $a \in \mathbb{C}$ con parte real positiva. Ahora, por el teorema 5.1.3 sabemos que este retículo es independiente de a, lo que prueba el resultado. □

Como comentamos en la nota 5.1.2, podemos calcular el espectro puntual de C_{φ_a} gracias a nuestra caracterización:

Teorema 5.4.8. *Se tiene que*

$$\sigma_p(C_{\varphi_a}) = \{e^{-at} : t \geq 0\}.$$

Es más, si f es una autofunción asociada al autovalor e^{-at}, entonces $f \in \langle e_t \rangle$.

Demostración.
Sabemos por la proposición 5.1.1 que las funciones e_t son autovectores asociados a los autovalores e^{-at}. Veamos que son los únicos. Supongamos que $f \in H^2$ es una autofunción no nula para C_{φ_a}. Por tanto, el subespacio unidimensional cerrado $\langle f \rangle$ es un subespacio invariante por C_{φ_a}. Por tanto, es de la forma $\overline{\text{span}}\{e_t : t \in F\}$, donde F es un conjunto cerrado de $[0, \infty)$. Como es un subespacio unidimensional, se sigue que existe $t \in [0, \infty)$ de forma que $\langle f \rangle = \langle e_t \rangle$, así que $f \in \langle e_t \rangle$. Por tanto, $C_{\varphi_a} f = e^{-at} f$, lo que prueba el resultado. □

Además, también tenemos las herramientas para probar el teorema 5.1.4:
Demostración.
Sea φ_a una transformación de Möbius no automorfismo y consideremos C_{φ_a} el operador de composición inducido. Tomemos $F \in \mathbb{F}[0, \infty)$ de forma que $N_F = \overline{\text{span}}\{e_t : t \in F\}$ sea no trivial. Tenemos que probar que su complemento ortogonal $N_F^\perp$ no es invariante para C_φ. Necesitamos la siguiente fórmula, que se verifica fácilmente con un sencillo cálculo:

$$\langle e_t, e_s \rangle_{H^2} = e^{-|t-s|}, \qquad t, s \geq 0.$$

Primero, supongamos que $0 \notin F$, y pongamos $t_0 = \text{mín}\, F$. Definimos $f_{t_0} = 1 - e^{-t_0} e_{t_0}$. Tomemos ahora $t \geq t_0$. Se tiene que

$$\langle f_{t_0}, e_t \rangle = \langle 1, e_t \rangle - e^{-t_0} \langle e_{t_0}, e_t \rangle = e_t(0) - e^{-t_0} e^{-(t-t_0)} = e^{-t} - e^{-t} = 0.$$

Es decir, $f_{t_0} \in N_F^\perp$. Supongamos por reducción al absurdo que $N_F^\perp \in \text{Lat}\, C_{\varphi_a}$. Entonces, tendríamos que $f_{t_0} - C_{\varphi_a} f_{t_0} \in N_F^\perp$. Ahora, recordando que 1 y e_{t_0} son autofunciones de C_{φ_a}, tenemos que

$$C_{\varphi_a}(1 - e^{-t_0} e_{t_0}) = C_{\varphi_a} 1 - e^{-t_0} C_{\varphi_a} e_{t_0} = 1 - e^{-t_0} e^{-at_0} e_{t_0}.$$

Por tanto, $f_{t_0} - C_{\varphi_a} f_{t_0} = e^{-t_0}(1 - e^{-at_0}) e_{t_0}$, que observamos que pertenece también a N_F. Así, deducimos que $f_{t_0} - C_{\varphi_a} f_{t_0} = 0$, es decir, f_{t_0} es un punto fijo para C_{φ_a}, lo cual es

contradicción, ya que por el teorema 5.4.8 sabemos que el único punto fijo de C_{φ_a} es la función 1. Por tanto, deducimos que $N_F^\perp$ no es invariante para C_{φ_a}.
Supongamos ahora que $0 \in F$. Tomemos $s > 0$ y consideremos el operador de multiplicación por e_s, que denotamos por M_{e_s}. Tenemos

$$M_{e_s}(N_F) = e_s \overline{\text{span}}\{e_t : t \in F\} = \overline{\text{span}}\{e_{s+t} : t \in F\} = N_{s+F}.$$

Como e_s es una función interior, se sigue que M_{e_s} es una isometría, por lo tanto preserva el producto escalar en H^2. Por tanto,

$$M_{e_s}(N_F^\perp) = (M_{e_s}(N_F))^\perp.$$

Volvemos a razonar por contradicción: supongamos que $N_F^\perp$ es invariante para C_{φ_a}. Entonces

$$M_{e_s}(C_{\varphi_a}(N_F^\perp)) \subseteq M_{e_s}(N_F^\perp).$$

Ahora, para cada $f \in H^2$, tenemos que

$$C_{\varphi_a}(M_{e_s}f) = C_{\varphi_a}(e_s f) = e^{-as} e_s C_{\varphi_a} f = e^{-as} M_{e_s}(C_{\varphi_a} f),$$

por lo que se sigue que

$$C_{\varphi_a}(M_{e_s}(N_F^\perp)) \subseteq M_{e_s}(N_F^\perp).$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} C_{\varphi_a}(N_{s+F}^\perp) &= C_{\varphi_a}((M_{e_s}(N_F))^\perp) = C_{\varphi_a}(M_{e_s}(N_F^\perp)) \\ &\subseteq M_{e_s}(N_F^\perp) = (M_{e_s}(N_F))^\perp = N_{s+F}^\perp, \end{aligned}$$

es decir, $C_{\varphi_a}(N_{s+F}^\perp) \subset N_{s+F}^\perp$, pero $s + F$ es un cerrado que no contiene a 0 y N_{s+F} es invariante por C_{φ_a}, así que el caso probado anteriormente nos da la contradicción. Esto prueba el resultado. □

5.5. El Conmutante de C_φ

Caracterizar el conmutante de un operador $T \in \mathcal{B}(H)$ es una pregunta muy estudiada en el campo de la teoría de operadores. Observemos por ejemplo que puede ayudarnos a probar si dicho operador tiene subespacios invariantes, gracias a los resultados ya comentados sobre híperinvariancia de operadores compactos y normales.
Una de las preguntas clásicas sobre el conmutante es decidir si es **minimal**. Para poder definir este concepto con claridad, necesitamos algunos resultados previos.
Comencemos definiendo dos de las topologías más usadas en el espacio $\mathcal{B}(X)$, donde X es un espacio de Banach:

Definición 5.5.1. Dado un espacio de Banach X definimos la **topología débil de operadores** (WOT) en $\mathcal{B}(X)$ y la denotamos por σ a la topología inducida por los funcionales

$$T \mapsto x^*(Tx)$$

para todo $x \in X, x^* \in X^*$. Es decir, una red (T_α) converge a T en σ si y solo si $x^*(T_\alpha x) \to x^*(Tx)$ para todo $x \in X$, $x^* \in X^*$.

Observemos que esta topología está bien definida, ya que efectivamente el conjunto de funcionales definido anteriormente es un subconjunto del dual de $B(X)$. De hecho, esta topología está inducida por todos los operadores de rango 1 definidos sobre X.
Nosotros manejaremos principalmente esta topología en espacios de Hilbert. Observemos que si H es Hilbert, entonces los funcionales que dan lugar a la topología débil de operadores vienen dados por

$$T \mapsto \langle Tx, y\rangle$$

para todo $x, y \in H$.

Necesitaremos manejar también, aunque en menor medida, la *topología fuerte de operadores.*

Definición 5.5.2. Dado un espacio de Banach X, llamamos **topología fuerte de operadores** (SOT) a la topología localmente convexa en $\mathcal{B}(H)$ inducida por las seminormas $T \mapsto \|Tx\|$ para todo $x \in X$.

Observemos que una red (T_α) converge a $T \in \mathcal{B}(X)$ si y solo si $T_\alpha x \to Tx$ para todo $x \in X$ en la topología de la norma de X. Tenemos la siguiente relación para las topologías en $\mathcal{B}(X)$:

Proposición 5.5.3. *Denotemos por σ, T_{SOT} y $T_{\|\cdot\|}$ a las topologías débil de operadores, fuerte de operadores y topología uniforme en $\mathcal{B}(X)$. Se tiene:*

$$\sigma \subseteq T_{SOT} \subseteq T_{\|\cdot\|}.$$

Demostración.
Tomemos una red (T_α) convergiendo a $T \in \mathcal{B}(X)$ en la topología inducida por la norma. Es decir, $\lim_\alpha \|T_\alpha - T\| = 0$. Por tanto, para todo $x \in X$ se tiene que $\|T_\alpha x - Tx\| \leq \|T_\alpha - T\| \, \|x\| \to 0$, así que $T_\alpha \to T$ en SOT.
Supongamos ahora que (T_α) converge a $T \in \mathcal{B}(H)$ en SOT y veamos que también converge en σ. Para ello, tomemos $x \in X$ y $x^* \in X^*$. Se tiene:

$$\lim_\alpha \, x^*(T_\alpha x) = x^*(\lim_\alpha \, T_\alpha x) = x^*(Tx),$$

lo que prueba que T_α converge a T en σ. □

Tenemos la siguiente propiedad para el conmutante:

Proposición 5.5.4. *Dado $T \in \mathcal{B}(X)$ se tiene que $\{T\}'$ es cerrado en la topología débil de operadores de operadores, y por tanto es cerrado tanto en la topología fuerte de operadores como en la topología uniforme.*

Demostración.
Para ello, tomemos (S_α) una red en $\{T\}'$ convergiendo a $S \in \mathcal{B}(H)$. Tenemos, para todo $x, y \in H$ que

$$\langle STx, y\rangle = \lim_{\alpha} \langle S_\alpha Tx, y\rangle = \lim_{\alpha} \langle TS_\alpha x, y\rangle = \langle TSx, y\rangle .$$

Por tanto, $S \in \{T\}'$, como queríamos. □

Denotemos ahora por $\mathrm{alg}(T)$ al álgebra generada por el operador T. Es decir, al subálgebra

$$\mathrm{alg}(T) := \{p(T) : p \text{ es un polinomio}\}.$$

Está claro que $\mathrm{alg}(T)$ es un álgebra conmutativa contenida en $\{T\}'$. Por tanto, se tiene que

$$\overline{\mathrm{alg}(T)}^{\sigma} \subseteq \{T\}'.$$

Diremos entonces que un operador $T \in \mathcal{B}(H)$ tiene **conmutante minimal** o que T tiene la **propiedad del mínimo conmutante** si

$$\overline{\mathrm{alg}(T)}^{\sigma} = \{T\}'.$$

El objetivo de esta sección es probar que el operador de composición C_φ, con φ un no-automorfismo parabólico tiene la propiedad del mínimo conmutante utilizando la semejanza del adjunto con el operador de multiplicación cíclico en $W^{1,2}[0,\infty)$ descrita en el teorema 5.3.5. Este resultado fue probado en 2018 por M. Lacruz, F. León-Saavedra, S. Petrovic y L. Rodríguez-Piazza en [17]. El resultado es el siguiente:

Teorema 5.5.5 (Lacruz, León-Saavedra, Petrovic y Rodríguez-Piazza)**.** *El operador de composición $C_\varphi \in H^2$ inducido por un no-automorfismo parabólico tiene conmutante minimal.*

La prueba de este resultado radica en demostrar que la propiedad del mínimo conmutante se conserva bajo semejanzas y bajo tomar adjunto y probar a continuación que esta propiedad se cumple para todos los operadores de multiplicación cíclicos en toda álgebra que tenga aproximación a la identidad. Finalmente, veremos que $W^{1,2}[0,\infty)$ tiene en efecto una aproximación a la identidad, lo que probará el resultado. En lo que sigue consideraremos H, H_1 y H_2 espacios de Hilbert complejos y separables, pues el operador que queremos estudiar está definido sobre espacios de Hilbert. No obstante, como manejaremos también álgebras de Banach, ha sido necesario introducir la teoría topológica anterior sobre espacios de Banach cualesquiera.

Lema 5.5.6. *Sea $T \in \mathcal{B}(H_1)$ y $S \in \mathcal{B}(H_2)$ dos operadores semejantes. Entonces T tiene conmutante minimal si y solo si lo tiene S.*

Demostración.
Basta probar que si T tiene conmutante minimal entonces también lo tiene S. Como son semejantes, se tiene que existe un isomorfismo $\Phi : H_1 \to H_2$ de forma que $T = \Phi^{-1}S\Phi$. Sea $Y \in \{T\}'$. Entonces $Y = \Phi T\Phi^{-1} \in \{S\}'$, y como S tiene conmutante minimal, existe una red de polinomios (p_d) tal que $p_d(A) \to X$ en la topología débil de operadores. Se sigue entonces que $p_d(T) = \Phi p_d(S)\Phi$ converge en la topología débil de operadores a Y, como queríamos. □

Lema 5.5.7. *Sea $T \in \mathcal{B}(H)$. Entonces T tiene conmutante minimal si y solo si lo tiene T^*.*

Demostración.
Está claro que basta probar que si T tiene conmutante minimal entonces lo tiene T^*. Primero, veamos que tomar adjunto es continuo en la topología débil de operadores. Tomemos una red (X_α) convergiendo a un operador $X \in \mathcal{B}(H)$ en σ. Veamos que (X_α^*) converge a X^* en esta topología. Para ello, sean $x, y \in H$. Tenemos

$$\begin{aligned}\lim_\alpha \langle (X_\alpha^*)x, y\rangle &= \lim_\alpha \langle x, X_\alpha y\rangle = \lim_\alpha \overline{\langle X_\alpha y, x\rangle} = \overline{\langle Xy, x\rangle} \\ &= \langle x, Xy\rangle = \langle X^*x, y\rangle\,,\end{aligned}$$

lo que prueba la continuidad enunciada. Ahora, probemos que T^* tiene conmutante minimal. Para ello, tomemos $S \in \{T^*\}'$. Entonces, se tiene que $S^* \in \{T\}'$. Como T tiene conmutante minimal, existe una red de polinomios (p_α) tal que $p_\alpha T$ converge a T cuando $\alpha \in A$ en la topología débil de operadores. Ahora, para todo $x, y \in H$ se tiene, usando la continuidad de tomar adjunto, que

$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, S^*y\rangle = \overline{\langle S^*y, x\rangle} = \lim_\alpha \overline{\langle (p_\alpha(T))y, x\rangle} = \lim_\alpha \langle (p_\alpha(T))^*x, y\rangle\,.$$

Entonces, se sigue que $(p_\alpha(T))^* \to S$ en la topología débil de operadores. Basta entonces definir la red de polinomios $(q_\alpha(z)) = \overline{p_\alpha(\overline{z})}$. Está claro que $(p_\alpha(T))^* = q_\alpha(T^*)$, así que

$$q_\alpha(T^*) \to S$$

en la topología débil de operadores, así que T^* tiene la propiedad del mínimo conmutante, como queríamos. □

Gracias a estos dos lemas podemos deducir entonces que basta probar que C_φ tiene conmutante minimal cuando φ está en forma canónica. Además, como C_φ^* es semejante al operador de multiplicación M_ψ introducido en la proposición 5.3.5, basta entonces probar que M_ψ tiene conmutante minimal para obtener nuestro resultado.

Comencemos caracterizando la clausura en la topología débil de operadores del álgebra generada por un operador de multiplicación cíclico en un álgebra de Banach **no unitaria**. Como ya hemos visto, este es el caso del álgebra $W^{1,2}[0,\infty)$:

Lema 5.5.8. *Sea A un álgebra de Banach no unitaria y $a \in A$ un elemento cíclico. Entonces*
$$\overline{alg(M_a)}^\sigma = \overline{\{M_b + \beta I : b \in A, \beta \in \mathbb{C}\}}^\sigma.$$

Demostración.
Comencemos observando primero que el conjunto $\{M_b + \beta I : b \in A, \beta \in \mathbb{C}\}$ es una subálgebra de $\mathcal{B}(A)$. Además, contiene al operador M_a y a la identidad, por lo tanto es claro que contiene a la subálgebra $\mathrm{alg}(M_a)$. Por tanto, la inclusión
$$\overline{\mathrm{alg}(M_a)}^\sigma \subseteq \overline{\{M_b + \beta I : b \in A, \beta \in \mathbb{C}\}}^\sigma$$
es trivial. Veamos la otra inclusión. Para ello, tomemos $b \in A$ y $\beta \in \mathbb{C}$. Tomemos una sucesión de polinomios (p_n) de forma que $p_n(0) = 0$ y $\|b - p_n(a)\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Esto es posible gracias a que a es un elemento cíclico. Es decir, $A = \overline{\mathrm{span}\{a^n : n \in \mathbb{N}\}}$. Ahora, definimos $q_n(z) = p_n(z) + \beta$. Observemos ahora que $q_n(M_a) = M_{p_n(a)} + \beta I \to M_b + \beta I$ en la topología fuerte de operadores cuando $n \to \infty$, así que también converge en la topología débil de operadores. Esto demuestra que
$$\{M_b + \beta I : b \in A, \beta \in \mathbb{C}\} \subseteq \overline{\mathrm{alg}(M_a)}^\sigma,$$
lo que nos da automáticamente la inclusión buscada. □

Como ya hemos comentado, el álgebra $W^{1,2}[0,\infty)$ es no unitaria, pero podemos conseguir una estructura que haga las veces de unidad. Definimos el concepto a continuación:

Definición 5.5.9. Sea A un álgebra de Banach. Llamaremos **aproximación a la identidad** a cualquier sucesión (e_n) tal que $\|e_n b - b\| \to 0$ cuando $n \to \infty$ para todo $b \in A$. Es decir, $M_{e_n} \to I$ cuando $n \to \infty$ en la topología fuerte de operadores.

Veamos entonces que $W^{1,2}[0,\infty)$ efectivamente cumple esta propiedad.

Lema 5.5.10. *La sucesión de funciones (e_n) definida como*
$$e_n(\sigma) = \begin{cases} 1, & si\ 0 \leq \sigma \leq n \\ e^{-(\sigma - n)}, & si\ \sigma \geq n, \end{cases}$$
es una aproximación de la identidad en $W^{1,2}[0,\infty)$.

Demostración.
Comencemos observando que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $e_n \in L^2(0,\infty)$. Además, $e_n' = -e^{-(\sigma-n)}\chi_{[n,\infty)}$, que también está claramente en $L^2(0,\infty)$. Por tanto, está claro

que e_n son funciones de $W^{1,2}[0,\infty)$ que cumplen que $\|e_n\|_\infty \leq 1$. Es más, se tiene que $e_n(\sigma) \to 1$ y $e_n' \to 0$ puntualmente en el intervalo $[0,\infty)$. Tomemos $f \in W^{1,2}[0,\infty)$. Tenemos que probar que $\|e_n \cdot f - f\|_{W^{1,2}[0,\infty)} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Ahora, se tiene

$$\|e_n \cdot f - f\|^2_{W^{1,2}[0,\infty)} = \|e_n \cdot f - f\|^2_{L^2} + \|(e_n \cdot f - f)'\|^2_{L^2}.$$

Observemos que, gracias al hecho de que $\|e_n\|_\infty \leq 1$, se tiene que $|e_n(\sigma)f(\sigma) - f(\sigma)|^2 \leq 4|f(\sigma)|^2$, y por tanto podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para deducir que $\|e_n \cdot f - f\|_2^2 \to 0$ cuando $n \to \infty$. De igual forma, como $f' \in L^2(0,\infty)$, podemos usar el mismo argumento para probar que $\|e_n \cdot f' - f'\|_2^2 \to 0$. Como $(e_n \cdot f - f)' = e_n' \cdot f + e_n \cdot f' - f'$, basta probar que $e_n' \cdot f$ converge a 0 en $L^2(0,\infty)$. Ahora, como f es acotada y $e_n' \to 0$ puntualmente, se tiene que $e_n' f$ converge puntualmente a 0. Como $\|e_n'\|_\infty$, se tiene que $|e_n' \cdot f|^2 \leq \|f\|_{L^2}$, en casi todo, así que basta aplicar de nuevo el teorema de la convergencia dominda. Esto termina la demostración. □

Con el siguiente resultado probamos que basta exigir que un álgebra de Banach conmutativa tenga aproximación a la identidad para asegurar que los operadores de multiplicación cíclicos tengan conmutante minimal:

Teorema 5.5.11. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa con aproximación a la identidad y $a \in A$ un elemento cíclico. Entonces el operador de multiplicación M_a tiene conmutante minimal.*

Demostración.
Denotemos por (e_n) a la aproximación a la identidad de A. Como a es cíclico, existe una sucesión de polinomios que se anulan en cero tales que $\|e_n - p_n(a)\| \to 0$, cuando $n \to \infty$. Ahora, tenemos para cada $b \in A$ que

$$\|p_n(a)b - b\| \leq \|p_n(a)b - e_nb\| + \|e_nb - b\| \leq \|b\| \, \|p_n(a) - e_n\| + \|e_nb - b\| \to 0,$$

así que $(p_n(a))$ es también una aproximación a la identidad. Veamos ahora que, para todo $X \in \{M_a\}'$, tenemos $XM_a = M_b$, donde $b = Xa$. Tenemos para cada $n \in \mathbb{N}$ que

$$XM_aa^n = XM_a^na = M_a^nXa = a^nb = ba^n = M_ba^n.$$

Como hemos probado la igualdad para todas las potencias de a que es un elemento cíclico, se sigue por densidad que $XM_a = M_b$. Ahora, como $p_n(0) = 0$, tenemos que existe una sucesión de polinomios q_n de forma que $p_n(z) = zq_n(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Tomemos ahora $X \in \{M_a\}'$. Tenemos

$$Xp_n(M_a) = XM_aq_n(M_a) = M_bq_n(M_a).$$

Ahora, si tomamos límite en la topología fuerte de operadores en la igualdad anterior, tenemos que $Xp_n(M_a) \to X$, ya que $p_n(a)$ es una aproximación de la identidad. Así, tenemos que $M_b q_n(M_a)$ converge a X en la topología fuerte de operadores, y por tanto, también converge en la topología débil de operadores. Así, se deduce que

$$X \in \overline{\{M_c + \gamma I : c \in A, \gamma \in \mathbb{C}\}}^{\sigma} = \overline{\mathrm{alg}(M_a)}^{\sigma},$$

donde hemos usado en la última igualdad el lema 5.5.8. Esto termina la prueba. □

Ya podemos entonces completar la prueba del teorema 5.5.5:
Demostración.
Sabemos por los lemas 5.5.6 y 5.5.7 que C_φ tiene la propiedad del mínimo conmutante si y solo si M_ψ la tiene. Ahora, M_ψ es un operador de multiplicación por un elemento cíclico en el álgebra de Banach $W^{1,2}[0,\infty)$, que es conmutativa y tiene una aproximación a la identidad por el lema 5.5.10. Finalmente, basta aplicar el teorema 5.5.11 para deducir que $\overline{\mathrm{alg}(M_\psi)}^{\sigma} = \{M_\psi\}'$, así que se sigue que $\overline{\mathrm{alg}(C_\varphi)}^{\sigma} = \{C_\varphi\}'$, como queríamos. □

Bibliografía

[1] S.A. Argyros, R. G. Haydon, A hereditarily indecomposable $\mathcal{L}^{\infty}$-space that solves the scalar-plus-compact problem, Acta Math. 206 (2011), no. 1, 1–54, 2011.

[2] N. Aronszajn, K. T. Smith, Invariant subspaces of completely continuous operators. Ann. of Math. (2) 60, (1954). 345–350.

[3] W. Averson, A Short Course On Spectral Theory, Graduate Texts in Mathematics, 209. Springer-Verlag, New York, 2002.

[4] A. R. Bernstein, A. Robinson, Solution of an invariant subspace problem of K.T. Smith and P.R. Halmos, Pacific J. Math. 16, 421–431.

[5] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson, Paris, 1983.

[6] S.R. Caradus, Universal Operators And Invariant Subspaces, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol 23, No. 3, 1969, 526-527.

[7] C.C. Cowen, Composition operators on H^2. J. Operator Theory 9 (1983), no. 1, 77–106.

[8] C.C. Cowen, B.D. MacCluer, Composition operators on spaces of analytic functions. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[9] I. Chalendar, J.R. Partington, Modern approaches to the invariant-subspace problem. Cambridge Tracts in Mathematics, 188. Cambridge University Press, Cambridge, 2011. xii+285 pp. ISBN: 978-1-107-01051-2

[10] P. Duren, Theory of H^p Spaces, Dover, New York, 2003.

[11] On the invariant subspaces problem for Banach spaces, Acta Math. 158, 213–313, 1987.

[12] F.J. González-Doña, Operadores de Composición y Clases de Schatten, https://idus.us.es/xmlui/bitstream/handle/11441/77524/Gonz %C3 %A1lez %20Do %C3 %B1a %20Francisco %20Javier %20TFG.pdf?sequence=1, 2018.

[13] K. Hoffman, Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1962.

[14] P.R. Halmos, Invariant subspaces of polynomially compact operators, Pacific J. Math. 16, 433–437, 1966.

[15] G. Karpilovsky, The Jacobson radical of group algebras. North-Holland Mathematics Studies, 135. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987.

[16] K.Y. Katznelson, An introduction To Harmonic Analysis, Dover Publications Inc., New York, 2002.

[17] M. Lacruz, F. León-Saavedra, S. Petrovic, L. Rodríguez-Piazza Composition operators with a minimal commutant. Adv. Math. 328 (2018), 890–927.

[18] C.C. Cowen, E. Gallardo-Gutiérrez, A new proof of a Nordgren, Rosenthal and Wintrobe theorem on universal operators. Problems and Recent Methods in Operator Theory, 97–102, Contemp. Math., 687, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017.

[19] V. Lomonosov, Invariant subspaces for the family of operators which commute with a completely continuous operator, V.I. Funct Anal Its Appl (1973) 7: 213. https://doi.org/10.1007/BF01080698

[20] A. Montes-Rodríguez, M. Ponce-Escudero, S. A. Shkarin, Invariant subspaces of parabolic self-maps in the Hardy space. Math. Res. Lett. 17 (2010), no. 1, 99–107.

[21] G.J. Murphy, C*-Algebras And Operator Theory, Academic Press Inc., 1990.

[22] E. Nordgren, P. Rosenthal, F.S Wintrobe, Invertible Composition Operators on H^p. Journal of Functional Analysis, 73, 324-344, 1987.

[23] J.R. Partington, Interpolation, Identification and Sampling. Lond Mathematical Society Monographs, 17. Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1997.

[24] A. Pietsch, History Of Banach Spaces And Linear Operators, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.

[25] H. Radjavi, P. Rosenthal, Invariant subspaces, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

[26] C. Read, A solution to the invariant subspace problem on the space l1, Bull. London Math. Soc. 17, 305–317, 1985.

[27] C.E. Rickard, General Theory Of Banach Algebras, The University Series in Higher Mathematics, D. van Nostrand Co., Inc., Princeton, New York, 1960.

[28] G.C. Rota, Models For Lineal Operators, Communications On Pure And Applied Mathematics, Vol XIII, 1960, 469-472.

[29] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, 1987.

[30] D. Saranson, A Remark On The Volterra Operator, Journal Of Mathematical Analysis And Applications, 12 1965 244–246.

[31] J. H. Shapiro, Composition Operators And Classical Function Theory, Springer-Verlag, New York, 1993.