



FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y ANÁLISIS  
NUMÉRICO

# Aspectos básicos de la Modelización Matemática y Numérica de los Medios Continuos

Trabajo de Fin de Grado realizado por Susana Pérez Martínez

---

Tutor  
Tomás Chacón Rebollo

Septiembre de 2019

# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>1</b>
<b>1. Motivación</b>	<b>5</b>
<b>2. Planteamiento del problema abstracto</b>	<b>7</b>
<b>3. Discretización</b>	<b>15</b>
3.1. Planteamiento del problema aproximado . . . . .	15
3.2. Cálculo efectivo de la solución discreta . . . . .	18
3.3. Interpretación geométrica del método de Galerkin . . . . .	18
3.4. Buen planteamiento del problema . . . . .	19
3.5. Análisis de Error . . . . .	21
<b>4. Ecuación de Elasticidad</b>	<b>26</b>
4.1. Modelización del problema . . . . .	27
4.1.1. Ecuaciones de Equilibrio . . . . .	27
4.1.2. Relaciones constitutivas de materiales elásticos . . . . .	31
4.1.3. Las ecuaciones de Elasticidad no Lineal . . . . .	35
4.1.4. Las ecuaciones de Elasticidad Lineal . . . . .	35
4.2. Elasticidad Lineal . . . . .	36
4.2.1. Desigualdades de Korn . . . . .	36
4.2.2. Existencia, Estabilidad y Regularidad de la Solución Débil . . . . .	40
4.3. Discretización del problema . . . . .	45
4.4. Implementación en FreeFem++ . . . . .	46
4.4.1. Caso elástico en 2D . . . . .	47
4.4.2. Caso elástico en 3D . . . . .	48
<b>5. Ecuación de Difusión-Convección-Reacción</b>	<b>50</b>
5.1. Introducción al Problema . . . . .	50
5.1.1. Modelización del Problema . . . . .	50
5.1.2. Justificación física de transmisión del calor en sólidos . . . . .	54
5.2. Planteamiento del Problema . . . . .	57
5.3. Discretización del Problema . . . . .	61
5.3.1. La Aproximación Conforme $H^1(\Omega)$ . . . . .	62

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	2
5.3.2. La Aproximación no Conforme Crouzeix-Raviart . . . . .	65
5.4. Implementaciones en FreeFem++ . . . . .	69
5.4.1. Primer Caso: Comparativa Materiales . . . . .	69
5.4.2. Segundo Caso: Habitación . . . . .	75
<b>A. Elementos del Análisis Funcional</b>	<b>79</b>
A.1. Espacios de Hilbert y de Banach . . . . .	79
A.2. Espacios $L^p$ . . . . .	83
A.3. Teoría de Distribuciones . . . . .	84
A.3.1. Sobre el concepto de solución de una EDP . . . . .	84
A.3.2. Espacio de Distribuciones $D'(\Omega)$ . . . . .	86
A.3.3. Derivación débil . . . . .	90
A.4. Espacios de Sobolev . . . . .	91
A.4.1. Los espacios de Hilbert $H^k(\Omega)$ . . . . .	93
A.5. Convergencias . . . . .	95
<b>B. Código FreeFem++</b>	<b>97</b>
B.1. Simulaciones Elasticidad . . . . .	97
B.2. Simulaciones Convección-Difusión . . . . .	101



# Abstract

The main purpose of this paper is the construction and treatment of equations that are useful in Continuum Mechanics from both, physical and mathematical points of view. In particular, we will be considering the Advection-Diffusion equation and the Elasticity equation. We will work in Sobolev Spaces, which are the natural environment for PDEs to be developed. Through the theorems of Lax-Milgram and Banach-Nečas-Babuska, we will study under which conditions a configuration setting is well posed. Once the existence and uniqueness of the analytical solution is proven, we will approximate our problem using Galerkin and Petrov-Galerkin methods. The existence and uniqueness of the approximate solution is studied with very similar results to the analytical ones, and its convergence to the exact solution will be a result of having both, consistency and stability properties. Next, the Elasticity and Advection-Diffusion equations will be modeled. We will study the conformal approximation of Elasticity problems with different boundary conditions and the conformal and nonconformal approximation of Advection-Diffusion problems, also with different boundary conditions. Finally, we will briefly present some implementations of the solutions of these problems in FreeFem++.

# Capítulo 1

## Motivación

En su deseo de conocer la Naturaleza, el ser humano como ente no solo animal, sino también racional ha buscado desde tiempos inmemorables la creación de modelos que permitan anteponerse al comportamiento de éste, nuestro Universo. Lo que como recién nacido fueron pruebas de error-acierto o copias de comportamientos que resultaban efectivos, de la mano del proceso de maduración natural de la mentalidad matemática del hombre, se han ido traduciendo en modelos analíticos. Dichos modelos, fieles a una Filosofía aristotélica, si bien tienen origen en *lo empírico*, no anhelan, sino y como objetivo último la trascendencia a otro mundo mucho más imperecedero y elegante en cuanto a su forma: la lógica matemática y su perpleja capacidad de adaptación al mundo caduco. Madre de cualquier disciplina natural actual (Medicina, Biología, Física...), padre del antropocéntrico estado de bienestar, e hijo de ese germen insaciable por conocer y comprender que caracteriza a nuestra especie, el Análisis Funcional y Modelado de Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs) constituye una de las más boyantes ramas de estudio del momento. En particular, este trabajo se centra en la modelización matemática de dos aspectos básicos de los que nace la Arquitectura de nuestros días: la convección difusión tratando los fluidos y la elasticidad en los sólidos.

Ocurre que, generalmente, los modelos no tienen soluciones analíticas y tenemos que recurrir a herramientas propias del Análisis Numérico para poder aproximarnos a dicho comportamiento. Entre estas herramientas se encuentra una fundamental y que marca el sendero del trabajo que aquí se presenta: el Método de los Elementos Finitos, cuyo nombre fue primeramente acuñado por Ray. W. Clough en 1952 en el marco del Boeing Summer Faculty Program. Si bien estos métodos surgieron en el ámbito de la ingeniería, poco a poco fueron sirviendo para solventar una familia de problemas cada vez más amplia y variada. Como consecuencia, fue incrementando la necesidad de crear una teoría matemática que sustentara de algún modo la validez de estos métodos; produciéndose su salto

intrahistórico al mundo académico. Todo esto, unido a la necesidad de dar una base formal fuerte a la nueva "función impulso o Delta de Dirac" tan necesaria en las ramas de la Física (desde Teoría de Circuitos hasta la entonces recién nacida Mecánica Cuántica, pasando por conceptos de estadística de partículas y principios de incertidumbre), Laurent Schwartz en su deseo subversivo por revolucionar el mundo de sus días, desarrolla una teoría por la que fue galardonado con la Medalla Fields: la Teoría de Distribuciones. El concepto de función se relaja. Las nociones de derivabilidad también. Las distribuciones han nacido, y con ellas la tierra prometida donde poder coexistir desde 1960 hasta nuestros días: Los espacios de Sobolev.

Es en estos espacios donde plantearemos nuestros problemas, haciéndolo con un nuevo tipo de formulación, la formulación variacional o débil. Es aquí también donde buscaremos las soluciones; chocándonos contra el muro a priori infranqueable de encontrar una solución analítica y cerrada a nuestra inquietud vestida de problema variacional. Veremos que gracias a herramientas muy potentes como son los teoremas de Lax-Milgram y de Banach-Nečas-Babuska podremos asegurar la existencia y unicidad de dicha solución aunque nuestra maquinaria analítica no esté capacitada para "localizarla". Es aquí donde nace el mundo de la discretización, y su ambición de preparar nuestro problema para encontrar una solución numérica que, de algún modo aproxime a la solución analítica que no podemos hallar. Aparecen los Métodos de Galerkin y de Petrov Galerkin y querremos ver que de la misma forma que podemos asegurar la existencia y unicidad de la solución analítica, existe y es única la mejor aproximación bajo ciertas condiciones. Estudiaremos las distintas formas que existen de discretizar un problema abstracto cuyo buen planteamiento está asegurado. Veremos que no es necesario aproximar los espacios por subespacios suyos: basta con otro tipo de espacio de Banach que de alguna forma aproxime al original. Continuando con nuestro deseo de crear modelos útiles en la Mecánica del Medio Continuo y, en especial, en la Arquitectura, se tratarán dos ecuaciones de vital importancia en este mundo: la Ecuación de la Elasticidad y la Ecuación de Convección-Difusión. No sólo estudiaremos éstas desde el punto de vista numérico, si no que partiendo de ciertas leyes físicas basadas en el empirismo propio que a esta ciencia caracteriza, modelaremos las ecuaciones que rigen tanto el transporte de temperaturas, como la elasticidad de los cuerpos. Finalmente, se analizarán de forma muy breve varios ejemplos prácticos cuya simulación se ha realizado con el potente software de EF de FreeFem++.

Como comentario final, he de decir que dado que para conseguir el objetivo último que motivó la elección de éste trabajo he tenido que realizar un largo viaje en el sentido de tocar campos muy diversos, no he buscado más que un estudio horizontal y básico (que no vertical y concreto) en este nuevo universo en el que comienzo a sumergirme: El Mundo del Modelado del Medio Continuo.

## Capítulo 2

# Planteamiento del problema abstracto

Se presenta a continuación la formulación variacional de las EDPs y resultados esenciales que nos aseguran el buen planteamiento del problema abstracto. Para su redacción, nos hemos centrado especialmente en las lecturas de [6] y de [16].

En concreto, comenzaremos ilustrando la importancia del Teorema de Lax-Milgram clásico para asegurar el buen planteamiento de un problema formulado en su modo variacional.

**Proposición 2.1.** Sean  $V$  y  $W$  espacios de Banach, con  $V$  espacio de Banach reflexivo. Sea  $a : W \times V \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal continua. Entonces existe un operador  $A \in \mathcal{L}(W, V')$  que verifica:

$$\langle Aw, v \rangle_{V', V} = a(w, v) \quad \forall v \in V, w \in W.$$

*Demostración.* Veamos que efectivamente  $A$  así definido es un operador lineal, continuo y acotado entre los espacios de Banach  $V'$  y  $V$ .

Consecuencia de la linealidad de  $a(w, \cdot)$  en  $V$  se tiene que,  $Aw$  es un operador lineal para cada  $w \in W$ . Por otra parte y como consecuencia de la linealidad de  $a(\cdot, v)$  en  $W$ , se demuestra que  $A$  es lineal. Además, como  $a(\cdot, \cdot)$  es continuo se tiene que existe  $c > 0$  con:

$$\langle Aw, v \rangle_{V', V} = a(w, v) < c \|w\|_W \|v\|_V \quad \forall w \in W, v \in V.$$

Si ahora dividimos por  $\|v\|_V$ , se obtiene que cada  $Aw$  es continuo por estar



acotado por  $c\|w\|_W$ :

$$\frac{\langle Aw, v \rangle_{V',V}}{\|v\|_V} \leq c\|w\|_W$$

lo que tomando supremo sobre los  $v \in V$  se obtiene que:

$$\|Aw\|_{V'} \leq c\|w\|_W$$

Finalmente, se toma supremo sobre los  $v \in V$  y se obtiene que:

$$\|A\|_{\mathcal{L}(W,V')} \leq c.$$

■

Sea  $V$  espacio de Hilbert. Considérese el siguiente problema abstracto:

$$\text{PV1} \begin{cases} \text{Hallar } u \in V \\ \text{tal que } a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V \end{cases}$$

donde  $a \in \mathcal{L}(V \times V, \mathbb{R})$  y  $f \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ .

Recuérdese que todo espacio de Hilbert es Banach reflexivo por ser espacio normado con norma inducida por el producto escalar y por el Teorema de representación de Riesz (Teorema A.1). Se recomienda consultar Anexo.

El siguiente teorema, extraído de [12], nace en la década de 1950 [16] y reúne las condiciones que aseguran el buen planteamiento del problema abstracto. Posteriormente, fue reformulado para extenderse al ámbito de los EF.

■ **Teorema 2.1.** (*Lax-Milgram, LM*) *Sea  $a \in \mathcal{L}(V \times V, \mathbb{R})$  una forma bilineal, continua y coercitiva y  $f \in V'$  lineal y continua. Bajo estas condiciones, el problema PV1 está bien planteado.*

*Demostración.* Sea  $A \in \mathcal{L}(V, V')$  el operador lineal asociado a  $a(\cdot, \cdot)$ , que sabemos que existe por la Proposición 2.1.

Notemos por  $f_u$  a  $Au$ . Por ser  $a$  elíptica, se tiene que:

$$\alpha\|u\|_V^2 \leq a(u, u) = \|f_u\|_{V'}\|u\|_V = \|Au\|_{V'}\|u\|_V$$

lo que en particular implica que:

- A está acotado inferiormente:

$$\alpha\|u\|_V \leq \|Au\|_{V'}.$$

- A es inyectiva. Para verlo, recuérdese que un operador lineal es inyectivo si y sólo si  $\ker(A) = \{0\}$ . Sea  $v \in \ker(A)$ , se tiene que:

$$0 \leq \alpha\|v\|_V \leq \|Av\|_{V'} = 0$$

luego,  $\|v\|_V = 0$  y  $v = 0$ .

Como antes se vio, el operador lineal  $Au$  es continuo y acotado, por lo que podemos tomar una cota superior  $M > 0$  y, juntando con la cota inferior anterior, tenemos:

$$\alpha\|u\|_V \leq \|Au\|_{V'} \leq M\|u\|_V. \quad (2.1)$$

Sea ahora  $\phi : V' \rightarrow V$  la función inversa de la isometría dada por el Teorema de Representación de Riesz (A.1). Se tiene que  $\phi \circ A$  es un operador de  $V$  a  $V$ . Empleando la linealidad de  $A$  fácil comprobar que  $\|u\|_A = \|\phi \circ Au\|_V$  es una norma. Esto permite que podamos escribir las condiciones (2.1) como:

$$\alpha\|u\|_V \leq \|u\|_A \leq M\|u\|_V$$

luego, las normas  $\|\cdot\|_V$  y  $\|\cdot\|_A$  son equivalentes. Esto en particular hace que  $Im(\phi \circ A)$  es un espacio normado completo y, por ende, es un subespacio cerrado de  $V$ . Basta probar que  $Im(\phi \circ A)^\perp = \{0\}$  para obtener que de acuerdo a la Proposición A.5 que  $Im(\phi \circ A) = V$ . Para ello, sean  $v \in Im(\phi \circ A)^\perp$  y  $u \in V$  tal que  $v = (\phi \circ A)(u)$ . Se tiene que:

$$\forall w \in V : 0 = \langle v, w \rangle_V = \langle (\phi \circ A)u, w \rangle_V = \langle Au, w \rangle_{V',V}$$

implicando que  $Au$  es el operador idénticamente nulo  $0 \in V'$ , por lo que  $v = (\phi \circ A)(u) = 0$  y  $Im(\phi \circ A)^\perp = \{0\}$ . Finalmente, tomando  $\phi^{-1}$  tenemos que:

$$A(V) = \phi^{-1}(\phi(A(V))) = \phi^{-1}(V) = V'$$

lo que en particular significa que para cada  $f \in V'$ , existe  $u \in V$  tal que  $Au = f$  tal y como quería demostrarse en primer lugar. █

Generalmente la demostración del Teorema de Lax-Milgram que aparece en las literaturas científicas es otra basada en el Teorema del Punto Fijo de Banach. Nosotros en este texto hemos preferido incluir la anterior puesto que ilustra mejor la idea de que los espacios  $V$  y  $V'$  son isomorfos en virtud del Teorema de Representación de Riesz para espacios de Hilbert (Teorema A.1), además de que es más próxima a la ofrecida por Peter Lax y Arthur Milgram en su publicación original. Fue extraída de [6].

El teorema anterior ofrece condiciones suficientes para que una determinada formulación variacional esté bien planteada. No obstante, no son necesarias. Es por esto por lo que nos centramos ahora en una generalización del teorema de Lax-Milgram [12]: el Teorema de Banach-Necas-Babuska (Teorema BNB), segunda generalización en formularse en línea temporal y de esencial presentación ya que ofrece condiciones necesarias y suficientes para que el problema abstracto esté bien formulado. Lo planteó por primera vez Nečas en 1962 [9] para luego ser popularizado en el ámbito de los EF por el matemático checo-americano Ivo M.Babuška en 1972 [10]. Desde el punto de vista del Análisis Funcional el Teorema BNB se basa en dos resultados básicos de la teoría de Banach: el *Teorema del Rango Cerrado* y el *Teorema de la Aplicación Abierta*. Es por esto por lo

que añadimos el nombre de Banach al teorema, enfatizando así los cimientos esenciales que éste plantó.

**Teorema 2.2.** (*Del Rango Cerrado*) Sean  $V$  y  $W$  espacios de Banach. Dado  $A \in \mathcal{L}(V, W')$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $Im(A)$  es cerrado.
2.  $Im(A^T)$  es cerrado.
3.  $Im(A) = (Ker(A^T))^\circ$ .
4.  $Im(A^T) = (Ker(A))^\circ$ .
5.  $\exists \alpha > 0$  tal que

$$\forall w \in Im(A), \exists v_w \in V, Av_w = w \text{ y } \alpha \|v_w\|_V \leq \|w\|_W$$

6.  $\exists \alpha > 0$  tal que

$$\forall v' \in Im(A^T), \exists w_{v'} \in W', A^T w_{v'} = v' \text{ y } \alpha \|w_{v'}\|_{W'} \leq \|v'\|_{V'}$$

**Observación 2.1.** El símbolo  $^\circ$  se refiere al anulador de un conjunto, cuya definición viene dada en la Definición A.14 del Anexo.

**Teorema 2.3.** (*De la Aplicación Abierta ó Banach-Schauder*) Sean  $V, W$  espacios normados. Si  $A \in \mathcal{L}(W, V')$  es sobreyectivo y  $U$  es un conjunto abierto de  $W$ , entonces  $A(U)$  es un conjunto abierto de  $V$ .

Dados  $W, V$  dos espacios vectoriales y normados no necesariamente iguales, en particular  $W$  (espacio de soluciones) Banach y  $V$  (espacio test) Banach reflexivo, el problema sobre el que puede aplicarse el Teorema BNB es el que sigue:

$$PV2 \begin{cases} \text{Hallar } u \in W \text{ tal que} \\ a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V \end{cases}$$

donde  $a \in \mathcal{L}(W \times V, \mathbb{R})$  y  $f \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ .

**Definición 2.1.** (*Hadamard*) Se dice que el problema PV2 está bien planteado si admite una solución y es única, y además satisface la siguiente estimación a priori:

$$\exists c > 0, \forall f \in V', \|u\|_W \leq c \|f\|_{V'}$$

**Observación 2.2.** La definición anterior fue extraída de [17] y lo ahí dicho para PV2, puede ser inmediatamente extrapolado para PV1.

Previo a enunciar y demostrar el Teorema BNB (Teorema 2.5), he de trabajar con ciertos resultados anteriores extraídos de [16] que ayudarán a la hora de construir la prueba y que guardan una estrecha relación con el Teorema 2.2 y el Teorema 2.3.

**Teorema 2.4.** Sean  $W$  y  $V$  dos espacios de Banach, con  $V$  Banach reflexivo. Sea, además  $A \in \mathcal{L}(W, V)$ .  $A$  es biyectiva si y solamente si  $A^T : V' \rightarrow W'$  es inyectiva y existe  $\alpha > 0$  tal que:

$$\forall v \in V, \quad \|A\|_W \geq \alpha \|v\|_V. \quad (2.2)$$

*Demostración.* Comenzamos probando la implicación directa. Dado que  $A$  es sobre,  $\text{Ker}(A^T) = \text{Im}(A)^T = \{0\}$ , es decir  $A^T$  es inyectiva. Como  $\text{Im}(A) = V$  es cerrado y  $A$  es inyectiva, deducimos por el Teorema de Rango Cerrado (Teorema 2.2) que existe  $\alpha > 0$  tal que  $\|Aw\|_V \geq \alpha \|w\|_W$ . Pruebo ahora la implicación contraria. La inyectividad de  $A^T$  implica que  $\overline{\text{Im}(A)} = (\text{Ker}(A^T))^\perp = V$ , i.e.  $\text{Im}(A)$  es denso en  $V$ . Probemos que  $\text{Im}(A)$  es cerrado. Para ello sea  $\{w_n\}$  una sucesión en  $W$  tal que  $\{Aw_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $V$ . La desigualdad  $\|Aw_n\|_V \geq \alpha \|w_n\|_W$  implica que  $\{w_n\}$  es una sucesión de Cauchy (Definición A.2) en  $W$ . La desigualdad  $\|Aw_n\|_V \geq \alpha \|w_n\|_W$  implica que  $\{w_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $W$ . Sea  $w$  su límite. La continuidad de  $A$  implica que  $Aw_n \rightarrow Aw$ , así que,  $\text{Im}(A)$  es cerrada. Finalmente tenemos que  $\text{Im}(A) = V$ , es decir,  $A$  es sobreyectiva y  $A$  es inyectiva como consecuencia directa de la desigualdad (2.2). |

**Observación 2.3.** El Teorema 2.4 lo que establece es que un operador entre espacios de Banach es biyectivo si y solamente si es inyectivo, de rango cerrado y su operador dual es inyectivo.

**Corolario 2.1.** Sean  $V$  y  $W$  dos espacios de Banach. Sea también, el operador  $A \in \mathcal{L}(W, V)$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $A$  es biyectivo.
- Existe una constante  $\alpha > 0$  tal que:

$$\forall w \in W, \quad \|Aw\|_V \geq \alpha \|w\|_W \quad (2.3)$$

$$\forall v' \in V', \quad (A^T v' = 0) \implies (v' = 0) \quad (2.4)$$

- Existe una constante  $\alpha > 0$  tal que:

$$\inf_{w \in W} \sup_{v' \in V'} \frac{\langle v', Aw \rangle_{V', V}}{\|v'\|_{V'} \|w\|_W} \geq \alpha \quad (2.5)$$

$$\forall v' \in V', \quad \left( \langle v', Aw \rangle_{V', V} = 0, \forall w \in W \right) \implies (v' = 0). \quad (2.6)$$

*Demostración.* La condición (2.4) es equivalente a decir que  $A^T$  es inyectiva. Por tanto, el Teorema (2.4) muestra que la biyectividad de  $A$  es equivalente a

las condiciones del segundo punto, (2.3) y (2.4). Además, las afirmaciones del segundo y tercer punto son claramente equivalentes ya que la condición inf-sup (2.5) es simplemente una reformulación de (2.3) ya que (2.4) y (2.6) son claramente equivalentes. |

**Teorema 2.5.** (*Banach-Nečas-Babuška, BNB*) Sea  $W$  un espacio de Banach y  $V$  un espacio de Banach reflexivo, con  $a \in \mathcal{L}(W \times V, \mathbb{R})$ , y  $f \in V'$ . En estas condiciones, el problema PV2 está bien planteado si y solamente si:

- (BNB1)

$$\exists \alpha > 0, \quad \inf_{w \in W} \sup_{v \in V} \frac{a(w, v)}{\|w\|_W \|v\|_V} \geq \alpha \quad (2.7)$$

- (BNB2)

$$\forall v \in V, \forall w \in W, \quad a(w, v) = 0 \implies v = 0. \quad (2.8)$$

*Demostración.* Gracias al Colorario 2.1, la biyectividad de  $A$  es consecuencia de (2.3) y (2.4). Claramente, (2.3) es equivalente a  $\sup_{v \in V} \frac{a(w, v)}{\|v\|_V} \geq \alpha \|w\|_W$ , que es (2.7). Finalmente, también se tiene que (2.6) es equivalente a (2.8) ya que  $V$  es Banach reflexivo. |

A continuación vamos a ver que si tomamos  $W = V$  espacio de Hilbert ésta vez, el lema de Lax Milgram constituye una restricción más fuerte en el sentido que implica BNB1 y BNB2. Consecuencia de esto es que efectivamente el problema PV1 está bien planteado. Veámoslo:

**Lema 2.1.** *Asúmase  $W = V$  espacios de Hilbert, entonces el lema de Lax-Milgram implica BNB1 y BNB2.*

*Demostración.* Sea  $w \in V$ , la condición BNB1 se deduce de:

$$\alpha \|w\|_V \leq \frac{a(w, w)}{\|w\|_V} \leq \sup_{v \in V} \frac{a(w, v)}{\|v\|_V}.$$

Sea, ahora,  $v \in V$ . Tomando  $w=v$  se tiene que:

$$\sup_{w \in W} a(w, v) \geq a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$$

i.e., el  $\sup_{w \in W} a(w, v) = 0$  lo que inmediatamente implica que  $v = 0$  y queda probado BNB2. |

**Observación 2.4.** Dado el operador  $A \in \mathcal{L}(W; V')$  asociado a la forma bilineal  $a(w, v)$  y antes definido, se tiene que en dimensión finita  $LM$  es equivalente a que la matriz asociada a  $A$  sea definida positiva, y las condiciones (BNB1) y (BNB2) son equivalentes a  $LM$ .

A continuación se expone un resultado que será útil a la hora de demostrar bajo qué condiciones el **problema de Dirichlet no homogéneo** (ver a continuación) está bien planteado. Veremos que éste puede ser traducido bajo ciertas hipótesis a un problema homogéneo tras realizar un "levantamiento" de las condiciones de contorno y un cambio de variable. Para ello, sea  $B$  un espacio vectorial de funciones definido en  $\Gamma$ , y asúmase que existe  $\gamma_0 \in \mathcal{L}(W; B)$ , operador traza que toma funciones en  $W$  y las lleva a su restricción sobre  $\Gamma$ . Sea, además, el operador  $A \in \mathcal{L}(W; V')$  asociado a la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$ . Bajo las condiciones anteriores, el problema de Dirichlet no homogéneo puede escribirse de forma no homogénea como:

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in W \text{ tal que} \\ A(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V \\ \gamma_0(u) = g \quad \forall u \in B. \end{cases}$$

Tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 2.2.** Sean  $W, V$  y  $B$  espacios de Banach (con  $V$  Banach reflexivo). Sean, además,  $\gamma_0 \in \mathcal{L}(W; B)$  y  $A \in \mathcal{L}(W; V')$ . Asúmase que  $\gamma_0$  es sobreyectiva y que  $a|_{W_0 \times V}$ , con  $W_0 = \ker(\gamma_0)$  satisface las condiciones del teorema BNB. Entonces, el problema (3.3) está bien definido y  $\exists c > 0$  tal que  $\forall f \in V'$  y  $g \in B$ ,

$$\|u\|_W \leq c(\|f\|_{V'} + \|g\|_B).$$

*Demostración.* Como consecuencia del Teorema de la Aplicación Abierta, dado que  $\gamma_0$  es continua y sobreyectiva,  $\exists c > 0$  tal que,  $\forall g \in B$ , existe una  $u_g \in W$  tal que satisface  $\gamma_0 u_g = g$  (por sobreyectividad) y  $\|u_g\|_W \leq c\|g\|_B$  (por continuidad).

Por otra parte, el problema es equivalente a escribirlo de forma:

$$\begin{cases} \text{Hallar } \varphi \in W_0 \text{ con } \varphi = u - u_g, \\ \text{tal que } a(\varphi, v) = f(v) - a(u_g, v), \quad \forall v \in V \end{cases}$$

de las desigualdades

$$|f(v) - a(u_g, v)| \leq (\|f\|_{V'} + \|a\| \|u_g\|_W) \|v\|_V \leq (\|f\|_{V'} + c\|a\| \|g\|_B) \|v\|_V$$

se deduce que  $f - a(u_g, \cdot)$  es continua en  $V$ . Por otra parte, dado que  $W_0 \times V$  cumple las condiciones del teorema BNB, el problema (3.4) tiene una solución única. Por lo tanto, el problema (2.7) está bien definido y la estimación a priori es consecuencia de las desigualdades anteriores.

■

**Observación 2.5.** *La función  $u_g$  es conocida como levantamiento de las condiciones de contorno.*

## Capítulo 3

# Discretización

En general nos encontramos con la imposibilidad de resolver problemas EDPs desde un punto de vista analítico, i.e., dar la forma de solución cerrada y exacta del problema, pese a que sea posible demostrar la existencia y unicidad de ésta como ya se ha visto con los resultados anteriores. Es por esto por lo que es necesario recurrir a otros métodos, los métodos numéricos, que den una solución aproximada del problema en cuestión. La idea de éstos reside en la transformación del problema de su forma global con dimensión infinita a una forma finita que sea resoluble mediante técnicas numéricas. Las incógnitas resultantes (llamadas grados de libertad) se trabajarán de una u otra manera según la técnica utilizada para construir una solución aproximada. Este proceso se llama *discretización del problema*.

En el caso concreto de los EF (elementos finitos), los grados de libertad son los valores de la solución en ciertos nodos (puntos) de  $\Omega$ . Para construir la solución aproximada se usa interpolación de esos valores nodales, para lo que es necesaria la construcción de una malla que se apoye en los nodos. El resultado es que podemos dar una solución a costa de cometer un error, siendo el objetivo último la estimación para el control de este error cometido.

Nuestro objetivo en este capítulo es el estudio de los aspectos teóricos de la discretización del Problema abstracto, buscando en último lugar dejar la configuración discreta preparada para poder aplicar posteriormente algún método práctico de aproximación numérica.

Este capítulo fue extraído de [16].

### 3.1. Planteamiento del problema aproximado

La idea es aproximar los espacios  $W$  y  $V$  por espacios de dimensión finita  $W_h$  y  $V_h$ , donde el subíndice  $h$  se refiere al parámetro de la discretización. Como ya



se ha dicho, dejaremos el problema preparado para la aplicación de métodos prácticos de construcción de tales espacios, a los que asociaremos normas  $\|\cdot\|_{W_h}$  y  $\|\cdot\|_{V_h}$ . Considérese, además:

$$W(h) = W + W_h \quad (3.1)$$

en el que asumimos que podemos definir una norma tal que cumpla:

1.  $\|w_h\|_{W(h)} = \|w_h\|_{W_h}, \forall w_h \in W_h.$
2.  $\|w\|_{W(h)} \leq c\|w\|_W, \forall w \in W.$

**Observación 3.1.** *La construcción del espacio  $W(h)$  tiene relevancia cuando el espacio de soluciones  $W$  no se aproxima por un subespacio suyo, si no que se busca otro espacio discreto que lo aproxime bajo ciertas condiciones y que facilite de algún modo la construcción de la solución discreta  $u_h$ .*

El método de Petrov-Galerkin (MPG) constituye una aproximación del problema (Pa2). Puede formularse como:

$$\text{MPG} \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u_h \in W_h \text{ tal que} \\ a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right.$$

donde  $a_h$  y  $f_h$  son las formas aproximadas de  $a$  y  $f$  respectivamente.

Un caso más particular sería la construcción de una solución sobre el problema aproximado de (Pa1), que quedaría como:

$$\text{MG} \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que} \\ a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{array} \right.$$

Este es el conocido como Método de Galerkin (MG).

**Definición 3.1.** *Se dirá que el problema está aproximado de forma **conforme** si verifica que  $W_h \subset W$  y  $V_h \subset V$ .*

**Observación 3.2.** *Tener una aproximación conforme permite no tener que aproximar  $a$  y  $f$  definida en  $W \times V$  y  $V$ , por la forma aproximada  $a_h$  y  $f_h$  definidas respectivamente en  $W_h \times V_h$  y  $V_h$ .*

**Definición 3.2.** *Se dirá que el problema aproximado tiene la **propiedad de proximidad** en el caso que cumpla que  $\forall w \in W, \exists w_h \in W_h$  tal que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|w - w_h\|_{W(h)} \rightarrow 0,$$

*es decir, el espacio  $W_h$  aproxima bien a  $W$ .*

**Definición 3.3.**

- *Se dirá que MPG es **consistente** si  $a_h$  puede ser extendida a  $W(h) \times V_h$  (es decir, tiene sentido hablar de  $a_h(u, v_h)$ ) y si la solución exacta  $u$  verifica el problema aproximado, i.e.:*

$$a_h(u, v_h) = f_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

- Se dirá que MPG es **asintóticamente consistente** si  $a_h$  está acotado de manera uniforme en  $W_h \times V_h$ , y  $\exists \Pi_h : W \rightarrow W_h$  un operador lineal y acotado, tal que:

$$\forall w \in W, \|\Pi_h w - w\|_{W(h)} \leq c \inf_{w_h \in W_h} \|w - w_h\|_{W(h)}$$

y

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \sup_{v_h \in V_h} \frac{|f_h(v_h) - a_h(\Pi_h u, v_h)|}{\|v_h\|_{V_h}} \right\} = 0.$$

Esto implicará que la EDP está bien aproximada de forma asintótica.

■ **Definición 3.4.** Se define el **error de consistencia**,  $R_h$ , como:

$$R_h(u) = \sup_{v_h \in V_h} \frac{|f_h(v_h) - a_h(\Pi_h u, v_h)|}{\|v_h\|_{V_h}} \quad (3.2)$$

■ **Lema 3.1.** El error de consistencia es independiente al operador  $\Pi_h$  usado, siempre que se verifique la propiedad de proximidad.

*Demostración.* Sea  $\Pi_h^1$  un operador según la definición anterior y  $\Pi_h^2$  otro operador tal que satisface que  $\forall w \in W, \|\Pi_h^2 w - w\|_{W(h)} \leq c \inf_{w_h \in W_h} \|w - w_h\|_{W(h)}$ . Entonces,  $\forall v_h$

$$\begin{aligned} |f_h(v_h) - a_h(\Pi_h^2 u, v_h)| &= |f_h(v_h) - a_h(\Pi_h^2 u, v_h) \pm a_h(\Pi_h^1 u, v_h)| \leq \\ |f_h(v_h) - a_h(\Pi_h^1 u, v_h)| &+ |a_h(\Pi_h^1 u, v_h) - a_h(\Pi_h^2 u, v_h)| = |f_h(v_h) - a_h(\Pi_h^1 u, v_h)| + \\ |a_h(\Pi_h^1 u - \Pi_h^2 u, v_h)| &\implies R_{2h} \leq R_{1h} + c \|a_h\|_{W_h, V_h} \inf_{w_h \in W_h} \|u - w_h\|_{W(h)}, \end{aligned}$$

de donde tomando el límite  $h \rightarrow 0$  y usando la propiedad de proximidad, se tiene que  $R_{2h} \rightarrow 0$  y, por tanto, la consistencia asintótica mediante el operador  $\Pi_h^2$ . ■

■ **Lema 3.2. (Ortogonalidad de Galerkin)** Si el problema aproximado es consistente se tiene que:

$$\forall v_h \in V_h, a_h(u - u_h, v_h) = 0. \quad (3.3)$$

*Demostración.* Dado que es consistente,  $a_h(u, v_h) = f_h(v_h)$ . Por su parte la solución del problema aproximado verifica que  $a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h)$ . Restando ambas expresiones se tiene el resultado. ■

### 3.2. Cálculo efectivo de la solución discreta

A continuación, veremos que el problema aproximado es equivalente a un sistema lineal mediante el método de Petrov-Galerkin. Para ello, denotamos  $M = \dim W_h$  y  $N = \dim V_h$ ,  $B_W = \{\psi_1, \dots, \psi_M\}$  una base de  $W_h$  y  $B_V = \{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$  una base de  $V_h$ . La solución  $u_h$  puede, por tanto, escribirse como combinación de los elementos de  $B_W$ , i.e.:

$$u_h = \sum_{j=1}^M U_j \psi_j$$

siendo  $U = (U_j)_{1 \leq j \leq M} \in \mathbb{R}^M$  el vector de coordenadas de  $u_h$  referidos a la base  $B_W$ .

Por otra parte, considérese la matriz  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N,M}$ , definida por:

$$\mathcal{A}_{ij} = a_h(\psi_j, \varphi_i) \quad 1 \leq i \leq N \quad 1 \leq j \leq M, \quad (3.4)$$

conocida como **Matriz de Rigidez**; y sea,  $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^N$ , tal que:

$$\mathcal{F}_i = f_h(\phi_i), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (3.5)$$

Finalmente vemos que, efectivamente, el problema (MPG) es equivalente a un problema lineal:

$$\mathcal{A}U = \mathcal{F}, \quad (3.6)$$

donde las incógnitas son las coordenadas de  $u_h$  en  $B_M$ .

#### Observación 3.3.

- *Basta que  $a$  sea simétrica para que  $\mathcal{A}$  también lo sea.*
- *Si el problema aproximado es coercitivo, consistente y conforme, la matriz de rigidez  $\mathcal{A}$  es definida positiva.*

### 3.3. Interpretación geométrica del método de Galerkin

Cuando la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  es continua, simétrica y coercitiva, la solución  $u_h$  del problema aproximado MG es la proyección ortogonal de  $u$  en  $V_h$  con respecto al producto escalar inducido por  $a(\cdot, \cdot)$ ; producto escalar que es equivalente al producto escalar canónico de  $V$ .

Dado  $u \in V$ , su proyección ortogonal  $u_h \in V_h$  está caracterizada por las siguientes propiedades equivalentes:

- **Distancia mínima** entre  $u$  y  $u_h$ :

$$a(u - u_h, u - u_h) = \min_{v_h \in V_h} a(u - v_h, u - v_h).$$

■ **Ortogonalidad:**

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Gracias a esto puede comprenderse mejor la estimación de error a priori que se realizará próximamente como consecuencia del Lema de Lax-Milgram, en el sentido de que  $u_h$  es el elemento de  $V_h$  más próximo a  $u$  en la norma inducida por la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$ , y puede utilizarse en la práctica para obtener estimaciones del error que se comete en la aproximación y controlarlo de algún modo, ya que si se es capaz de construir una *aproximación cómoda*  $\bar{u}_h$  tal que no minimice distancia, sabemos que el error cometido al utilizar  $u_h$  será menor que el que se comete al usar la *aproximación cómoda*  $\bar{u}_h$ .

### 3.4. Buen planteamiento del problema

El objetivo ahora es estudiar cuándo tenemos un buen planteamiento del problema aproximado. El caso particular de tener una aproximación conforme, coercitiva y consistente es relativamente inmediato ya que teniendo en cuenta que  $V_h$  es un subespacio finito de  $V$ ,  $V_h$  es cerrado. Por ser un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert, es, a su vez, espacio de Hilbert. Por tanto, consecuencia inmediata del *Lema de Lax-Milgram* sobre  $V_h$  es la siguiente proposición.

■ **Proposición 3.1.** *Sea  $V$  espacio de Hilbert,  $a$  forma bilineal y continua. Si  $V_h$  es un espacio finito-dimensional y se tiene que*

- $a$  es coercitiva en  $V$
- $V_h \subset V$ .

*Entonces el problema aproximado MG está bien planteado en el sentido de Hadamard, i.e. existe una única solución del sistema de ecuaciones y se puede hacer una primera estimación del error cometido en la aproximación:*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (3.7)$$

Estudiamos ahora el caso más general, donde las condiciones del Teorema BNB en el caso del Problema MPG pueden ser traducidas como:

- **BNB1(h)**  $\exists \alpha_h > 0, \quad \inf_{w_h \in W_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{a_h(w_h, v_h)}{\|w_h\|_{W_h} \|v_h\|_{V_h}} > \alpha_h$
- **BNB2(h)**  $\forall v_h \in V_h, \forall w_h \in W_h, \quad a_h(w_h, v_h) = 0 \implies v_h = 0.$

■ **Proposición 3.2.** *Se tiene que:*

1.  $BNB1(h) \iff Ker(\mathcal{A}) = \{0\}$ .
2.  $BNB2(h) \iff rg(\mathcal{A}) = \dim V_h.$

3. Si  $\dim V_h = \dim W_h$ ,  $BNB1(h) \iff BNB2(h)$ .

*Demostración.* 1. Veamos que

$$BNB1(h) \implies Ker(\mathcal{A}) = \{0\}.$$

Tomemos Para ello sea  $\xi = \sum_{j=1}^M X_j \psi_j$  y comencemos obteniendo una equivalencia a que  $X \in Ker(\mathcal{A})$ .

$$\begin{aligned} X \in Ker(\mathcal{A}) &\iff (\forall i \in \{1, \dots, N\}, \sum_{j=1}^M \mathcal{A}_{i,j} X_j = 0) \iff \\ &(\forall i, a_h(\xi, \varphi_i) = 0) \iff \sup_{v \in V_h} a_h(\xi, v) = 0. \end{aligned}$$

Ahora bien,  $BNB1(h)$  hace que si se tiene que  $(\sup_{v \in V_h} a_h(\xi, v) = 0)$  entonces  $\xi = 0$  y, por tanto,  $Ker(\mathcal{A}) = \{0\}$ .

Por otra parte, veamos que

$$Ker(\mathcal{A}) = \{0\} \implies BNB1(h).$$

Para realizar la demostración vamos a razonar al absurdo.

Para ello, asumamos que  $Ker(\mathcal{A}) = \{0\}$  y supongamos que, sin embargo,  $\exists w_{hn} \in W_h$  subsucesión, tal que  $\|w_{hn}\| = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{hn} = w_h$  y que cumple:

$$\sup_{v \in V_h} \frac{a_h(w_{hn}, v)}{\|v\|_{V_h}} \leq \frac{1}{n}.$$

Dado que la esfera unidad es un subespacio compacto de  $W_h$ , existe una subsucesión que seguiremos denotando como  $w_{hn}$ , que converge a  $w_h$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Dicho límite  $w_h$  ha de cumplir que  $\|w_h\|_{W_h} = 1$  y  $\sup_{v \in V_h} = 0$ .

Esto implica que  $X \in Ker(\mathcal{A})$  donde  $X$  es el vector de coordenadas de  $w_h$ . Dado que  $Ker(\mathcal{A}) = \{0\}$  se tiene que  $X = 0$ , lo que contradice que  $\|w_h\|_{W_h} = 1$ .

2. La prueba de 2 es similar a la de 1 sin más que aplicar lo mismo a  $\mathcal{A}^T$ .
3. Consecuencia directa de 1, 2 y el *Teorema del Rango* (Teorema 3.1).

█

Finalmente, el siguiente teorema expresa las condiciones necesarias para asegurar el buen planteamiento del problema.

█ **Teorema 3.1.** (*Teorema del Rango*) *Asúmase que:*

- $a_h$  está acotada en  $W_h \times V_h$  y  $f_h$  es continua en  $V_h$ .
- Se cumple  $BNB1(h)$ .
- $V_h$  y  $W_h$  tienen igual dimensión.

En tal caso, el problema aproximado está bien planteado en el sentido de Hadamard y se verifica la estimación a priori:

$$\|u_h\|_{W_h} \leq \frac{1}{\alpha_h} \|f_h\|_{V'_h}.$$

Siendo la demostración inmediata a partir del tercer punto de la Proposición 3.2 y el Teorema BNB (Teorema 2.5).

### 3.5. Análisis de Error

Queremos ahora hallar el error  $u_h - u$  para diferentes configuraciones, donde  $u_h$  resuelve el problema aproximado y  $u$  el problema exacto.

#### Caso General

A continuación presentamos un teorema para estimar el error de la situación más general. Se exigen las cuatro propiedades que se necesitan para probar la convergencia de la solución aproximada: estabilidad uniforme, acotación uniforme, consistencia asintótica y que se verifique la propiedad de proximidad. Existe un principio, conocido como *Principio de Lax* que establece que estabilidad y consistencia implica convergencia. No obstante, dicho principio no implica ni continuidad ni que se verifique la propiedad de proximidad.

**Teorema 3.2.** *Supóngase que se verifica lo siguiente:*

1. La condición  $BNB1(h)$  se satisface uniformemente con  $h$ , y  $\dim(W_h) = \dim(V_h)$ .
2. La forma bilinear  $a_h$  está uniformemente acotada en  $W_h \times V_h$ .
3. El problema aproximado es asintóticamente consistente
4. El problema aproximado tiene la propiedad de proximidad.

Entonces, denotando como  $R_h$  al error de consistencia, se verifica que:

$$\|u - u_h\|_{W(h)} \leq \frac{1}{\alpha_h} R_h(u) + c \inf_{w_h \in W_h} \|u - w_h\|_{W(h)} \quad (3.8)$$

y

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{W(h)} = 0. \quad (3.9)$$

*Demostración.* Dado que  $a_h$  está acotado en  $W_h \times V_h$ , utilizamos el operador proyector  $\Pi_h : W \rightarrow W_h$  previamente usado para la consistencia asintótica. Por linealidad tenemos que:

$$a_h(u_h - \Pi_h u, v_h) = f_h(v_h) - a_h(\Pi_h u, v_h) \quad (3.10)$$

Por otra parte, aplicando la condición  $BNB1(h)$  a  $u_h - \Pi_h u$  (obsérvese que  $u_h - \Pi_h u \in W_h$ ), implica que  $\alpha_h \|u_h - \Pi_h u\|_{W_h} \leq R_h(u)$ . Y dado que las normas  $\|\cdot\|_{W_h}$  y  $\|\cdot\|_{W(h)}$  son iguales en  $W_h$ , por la desigualdad triangular y la consistencia asintótica, se tiene que:

$$\begin{aligned} \|u_h - u\|_{W(h)} &\leq \frac{1}{\alpha_h} R_h(u) + \|u - \Pi_h u\|_{W(h)} \leq \\ &\frac{1}{\alpha_h} R_h(u) + c \inf_{w_h \in W_h} \|u - w_h\|_{W(h)}, \end{aligned}$$

quedando probado la estimación (3.8). Finalmente, haciendo uso de la propiedad de proximidad y de la consistencia asintótica, se llega a (3.9):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{W(h)} = 0.$$

|

### Casos particulares

Entre los casos particulares que vamos a estudiar, comencemos tratando el caso de tener una **aproximación no consistente y no conforme**. Asumimos que la forma bilineal  $a_h(\cdot, \cdot)$  puede ser extendida a  $W(h) \times V_h$ , tal que  $a_h(w, v_h)$  tenga sentido para  $w \in W$  y  $v_h \in V_h$ . El siguiente resultado se conoce como *Segundo Lema de Strang* [16].

**Lema 3.3.** (*Strang 2*) *Asúmase lo siguiente:*

1. Se cumple la condición  $BNB1(h)$  y  $\dim(W_h) = \dim(V_h)$ .
2. La forma bilineal aproximada  $a_h$  está acotada en  $W(h) \times V_h$ .

Se tiene entonces la siguiente estimación de error:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{W(h)} &\leq \left(1 + \frac{\|a_h\|_{W(h), V_h}}{\alpha_h}\right) \inf_{w_h \in W_h} \|u - w_h\|_{W(h)} \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{|f_h(v_h) - a_h(u, v_h)|}{\|v_h\|_{V_h}}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Sea  $w_h \in W_h$ . Entonces,

$$\begin{aligned} a_h(u_h - w_h, v_h) &= a_h(u_h \pm u - w_h, v_h) = a_h(u_h - u, v_h) + a_h(u - w_h, v_h) \\ &= f_h(v_h) - a_h(u, v_h) + a_h(u - w_h, v_h). \end{aligned}$$

La condición BNB1(h) implica que

$$\alpha_h \|u_h - w_h\|_{W(h)} \leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{|f_h(v_h) - a_h(u, v_h)|}{\|v_h\|_{V_h}} + \|a_h\|_{W(h), V_h} \|u - w_h\|_{W(h)}.$$

Aplicamos la desigualdad triangular al primer miembro para obtener que:

$$\alpha_h \|u_h - w_h\|_{W(h)} = \alpha_h \|u_h \pm u - w_h\|_{W(h)} \leq \alpha_h \|u - u_h\|_{W(h)} + \alpha_h \|u - w_h\|_{W(h)}.$$

Por último, reagrupamos y obtenemos la estimación de error para una aproximación no conforme y no consistente:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{W(h)} &\leq \left(1 + \frac{\|a_h\|_{W(h), V_h}}{\alpha_h}\right) \inf_{w_h \in W_h} \|u - w_h\|_{W(h)} \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{|f_h(v_h) - a_h(u, v_h)|}{\|v_h\|_{V_h}}. \end{aligned}$$

|

**Observación 3.4.** *Recuérdese que cuando tenemos una configuración consistente la solución real satisface la versión aproximada de la forma bilineal, i.e.  $a_h(u, v_h) = f_h(v_h)$ . Es por esto por lo que el último término de la estimación anterior se anula, quedando la expresión del error para el caso de la **aproximación no conforme y consistente** de la forma siguiente:*

$$\|u - u_h\|_{W(h)} \leq \left(1 + \frac{\|a_h\|_{W(h), V_h}}{\alpha_h}\right) \inf_{w_h \in W_h} \|u - w_h\|_{W(h)}.$$

Estudiamos ahora el caso de la **aproximación no consistente y conforme**. Por ser consistente, se tiene que  $W_h \subset W$  y  $V_h \subset V$ . Como consecuencia, es evidente que  $W = W(h)$ . Esta vez, sin embargo, no asumimos que  $\|\cdot\|_{W(h)}$  y  $\|\cdot\|_W$  sean iguales. Como diferencia de la sección anterior,  $a_h(\cdot, \cdot)$  no puede ser extendida a  $W \times V_h$ . Tenemos el siguiente resultado [16]:

**Lema 3.4. (Strang 1)** *Asúmase lo siguiente:*

1.  $W_h \subset W$  y  $V_h \subset V$ .
2. Se cumple la condición BNB1(h) y  $\dim(W_h) = \dim(V_h)$ .
3. La forma bilineal  $a_h$  está acotada en  $W_h \times V_h$ , y  $a$  está acotada en  $W \times V_h$  cuando  $W$  está equipada con la norma  $\|\cdot\|_{W_h}$ .

Se tiene entonces la siguiente estimación de error:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{W(h)} &\leq \frac{1}{\alpha_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{|f(v_h) - f_h(v_h)|}{\|v_h\|_{V_h}} \\ &\quad + \inf_{w_h \in W_h} \left[ \left(1 + \frac{\|a\|_{W(h), V_h}}{\alpha_h}\right) \|u - w_h\|_{W(h)} + \frac{1}{\alpha_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{|a(w_h, v_h) - a_h(w_h, v_h)|}{\|v_h\|_{V_h}} \right] \end{aligned}$$



*Demostración.* Sea  $w_h \in W(h)$ . La condición BNB1(h) implica que:

$$\alpha_h \|u_h - w_h\|_{W(h)} \leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{a_h(u_h - w_h, v_h)}{\|v_h\|_{V_h}}.$$

Obsérvese que:

$$a(u - w_h, v_h) - f(v_h) + a(w_h, v_h) = 0.$$

Sumando la observación anterior a  $a_h(u_h - w_h, v_h)$  se llega a que:

$$\begin{aligned} a_h(u_h - w_h, v_h) &= f_h(v_h) - a_h(w_h, v_h) = \\ a(u - w_h, v_h) + a(w_h, v_h) - a_h(w_h, v_h) + f_h(v_h) - f(v_h). \end{aligned}$$

Obsérvese, además que aplicando la desigualdad triangular a  $\|u_h - w_h\|_{W(h)}$ , se tiene que:

$$\alpha_h \|u_h - w_h\|_{W(h)} \leq \alpha_h \|u - u_h\|_{W(h)} + \alpha_h \|u - w_h\|_{W(h)}$$

Finalmente, tenemos la estimación que buscábamos:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{W(h)} &\leq \frac{1}{\alpha_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{|f(v_h) - f_h(v_h)|}{\|v_h\|_{V_h}} \\ + \inf_{w_h \in W_h} &\left[ \left( 1 + \frac{\|a\|_{W(h), V_h}}{\alpha_h} \right) \|u - w_h\|_{W(h)} + \frac{1}{\alpha_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{|a(w_h, v_h) - a_h(w_h, v_h)|}{\|v_h\|_{V_h}} \right]. \end{aligned}$$

■

El último caso que analizamos es el de la **aproximación consistente y conforme**, con  $a_h = a$  y  $f_h = f$ , recordemos que el problema aproximado es:

$$\begin{cases} \text{Halla } u_h \in W_h \text{ tal que} \\ a(u_h, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (3.11)$$

El siguiente resultado se conoce como Lema de C ea y fue extraido de [20].

■ **Lema 3.5.** (*Lema de C ea*) *As umanse las hipótesis siguientes:*

1. *Se cumple la condición BNB1(h) y  $\dim(W_h) = \dim(V_h)$ .*

2. *La forma bilineal aproximada  $a_h$  está acotada en  $W(h) \times V_h$*

*con  $V_h \subset V$  y  $W_h \subset W$ ,  $a_h = a$  y  $f_h = f$ . Sea  $u_h$  una solución aproximada del problema (3.11). Se tiene la siguiente estimación de error:*

$$\|u - u_h\|_W \leq \left( 1 + \frac{\|a\|_{W, V}}{\alpha_h} \right) \inf_{w_h \in W_h} \|u - w_h\|_W. \quad (3.12)$$

*Demostración.* Sea  $w_h \in W_h$ . La ortogonalidad de Galerkin implica que:

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u_h - w_h, v_h) = a(u - w_h, v_h).$$

Usando la propiedad BNB1(h) y la continuidad de  $a$ , se tiene:

$$\alpha_h \|u_h - w_h\|_W \leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{a(u_h - w_h, v_h)}{\|v_h\|_V} = \sup_{v_h \in V_h} \frac{a(u - w_h, v_h)}{\|v_h\|_V} \leq \|a\|_{W,V} \|u - w_h\|_W$$

a lo que basta aplicar la desigualdad triangular para tener el resultado del enunciado. █

Por último, nos centramos en el caso **coercitivo**. Para ello, asúmase que  $W_h = V_h$ ,  $W = V$ ,  $f_h = f$  y  $a_h = a$ . Asúmase que  $a$  es coercitiva con constante de coercitividad  $\alpha$  y constante de continuidad  $\|a\|$ . La ortogonalidad de Galerkin implica que:

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h). \quad (3.13)$$

Usando que  $a$  es coercitiva y continua, se llega a la desigualdad del Lema de Cèa pero, esta vez, con constante  $\frac{\|a\|}{\alpha}$  en lugar de  $1 + \frac{\|a\|}{\alpha}$ .

Hemos determinado, pues, condiciones muy generales bajo las cuales el método de Petrov-Galerkin proporciona soluciones con precisión arbitraria del problema elíptico planteado. Observemos que la condición  $\dim(V_h) = \dim(W_h)$  es inevitable, al garantizar que el número de incógnitas y de ecuaciones son iguales. Las hipótesis de proximidad y de consistencia asintótica garantizan que los espacios de soluciones y la ecuación están bien aproximados. Por último la coercitividad en el sentido BNB1(h) garantiza que los problemas discretos están bien planteados.

En adelante trabajamos para construir aproximaciones que cumplan estas hipótesis.

## Capítulo 4

# Ecuación de Elasticidad

Con el objetivo de crear modelos matemáticos útiles en el mundo de la Arquitectura y de la Ingeniería, nos centramos ahora en la ecuación de la elasticidad. Ésta es un tipo de ecuación útil para justificar una determinada clase de las posibles respuestas que dará un sólido frente a la acción de fuerzas externas (**relación de tensión-deformación**). La ecuación de la elasticidad emana de una familia especial de ecuaciones, las llamadas **ecuaciones constitutivas**. Éstas, describen el comportamiento macroscópico de un material deformable causado por su propia composición físico-química interna. Debido a la enorme multitud de variables que influyen en el tipo de respuesta (condiciones mecánicas, térmicas, históricas, ambientales...), no es posible dar un conjunto cerrado de ecuaciones que justifiquen el tipo de comportamiento que va a tener un material, por lo que en todo momento nos limitaremos a realizar una *descripción ideal* del problema. A nivel general, los tipos de respuestas ideales de un material frente a una tensión pueden ser de tres tipos:

- **Comportamiento Elástico:**  
Tipo de respuesta instantánea del material, caracterizada por que la deformación producida por una fuerza se recupera totalmente cuando ésta cesa.
- **Comportamiento Plástico:**  
Tipo de respuesta instantánea del material, caracterizada por que la deformación producida por una fuerza no se recupera cuando cesa la fuerza que lo produjo. Es el comportamiento opuesto al elástico
- **Comportamiento Viscoso:**  
Tipo de respuesta diferido en el que la deformación aumenta en el tiempo aún cuando la tensión aplicada se mantiene constante.

En este capítulo, nos centramos particularmente en la presentación de la ecuación que modela el comportamiento lineal-elástico que sufre un material, bus-

cando probar la existencia y unicidad de solución. Mediante el lema de J.L.Lions podrá establecerse la desigualdad fundamental de Korn que implicará que las ecuaciones de la elasticidad lineal tengan una solución lineal, estable y regular siempre que los datos para el contexto del problema cumplan ciertas propiedades de regularidad. Finalmente, aplicaremos los ya estudiados métodos de Galerkin mediante aproximaciones conformes a las diferentes situaciones del problema que pueden plantearse y se estudiará un caso en 2D y otro en 3D con FreeFem++.

Para el lector interesado en realizar una profundización mayor a la que aquí se expone, recomendamos consultar [13].

## 4.1. Modelización del problema

El desplazamiento y el esfuerzo que aparecen en un cuerpo elástico al ser sometidos a fuerzas, puede modelarse en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales con tres variables espaciales (las coordenadas del espacio físico). Este sistema se obtiene a partir de dos leyes físicas que llevan a su vez asociadas dos conjuntos de ecuaciones: las ecuaciones de equilibrio y las ecuaciones constitutivas. Las ecuaciones de elasticidad no lineal se obtienen añadiendo las condiciones de contorno óptimas a estos conjuntos de ecuaciones. Por su parte, las de elasticidad lineal nacen de la linealización con respecto al campo de desplazamiento de estas últimas. Serán estos puntos los que se abordarán en la sección que sigue y construyan el modelo que tratemos.

### 4.1.1. Ecuaciones de Equilibrio

De forma preliminar se incluye el siguiente glosario para aclarar notación:

- $\mathbb{M}^n$ : el conjunto de todas las matrices reales cuadradas.
- $\mathbb{M}_+^n$ : el conjunto de todas las matrices  $A \in \mathbb{M}^n$  con  $\det A > 0$ .
- $\mathbb{S}^n$ : el conjunto de todas las matrices simétricas.
- $\mathbb{S}_>^n$ : el conjunto de todas las matrices simétricas definidas positivas.
- $\mathbb{O}^n$  el conjunto de todas las matrices ortogonales.
- $\mathbb{O}_+^n$ : el conjunto de todas las matrices ortogonales  $R \in \mathbb{O}^n$  con  $\det R = 1$ .

Los espacios  $\mathbb{M}^n$  y  $\mathbb{S}^n$  están equipados con el producto escalar  $A : B$  y con la norma espectral  $|A|$ , definidos por:

$$A : B := \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} \quad |A| := \sup \{|Av|; v \in \mathbb{R}^n, |v| \leq 1\}.$$

En esta parte comenzamos nuestro estudio de la tensión y deformación con la que responde un cuerpo cuando se somete a una fuerza. Para ello supongamos que el cuerpo ocupa la clausura de un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  cuando sobre él no se aplican fuerzas externas, i.e. en su estado natural a la que nos referiremos como **configuración de referencia**. Cualquier otra configuración que el cuerpo pueda ocupar se verá como el resultado de haberlo sometido a fuerzas, es decir, como una deformación del estado natural. Para ello existe una aplicación que conecta ambos estados:

$$\boxed{\Phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3} \quad (4.1)$$

que ha de satisfacer:

- $\det \nabla \Phi > 0$ , es decir, ha de preservar la orientación.
- **Inyectiva** en  $\Omega$ . Diferentes elementos de la configuración de referencia permanecerán siendo diferentes en la deformación, es decir, no hay interpenetración de materia.

A la imagen de  $\Phi$  en  $\bar{\Omega}$  ( $\Phi(\bar{\Omega})$ ) se la conoce como **configuración deformada o deformación** de  $\bar{\Omega}$ .

Se conoce como **desplazamiento** a la diferencia entre la deformación y el estado natural:

$$\boxed{u := \Phi - id} \quad (4.2)$$

donde  $id : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$  es la aplicación identidad. Cuando se espera que la deformación sea pequeña con respecto a su estado natural, comportamiento característico de la elasticidad lineal, suele ser recomendable describir el estado deformado mediante el desplazamiento  $u$  y no con la deformación  $\Phi$  en sí.

El objetivo principal de esta sección es que podamos determinar de entre todas las configuraciones posibles que proceden de la deformación de un cuerpo, aquellas que están en equilibrio estático mientras se esté aplicando esa fuerza. Vamos a considerar las densidades de fuerzas  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  que actúan sobre la configuración deformada  $\tilde{\Omega} := \Phi(\Omega)$  como:

$$\tilde{f} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{y} \quad \tilde{g} : \tilde{\Gamma}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

donde  $\tilde{\Gamma}_1 \subset \partial \tilde{\Omega}$  es un subconjunto abierto de la frontera de  $\tilde{\Omega}$ .

**Ejemplo 4.1.** *Supongamos que el cuerpo está sometido a la fuerza gravitatoria y a otra fuerza que ejerce una presión uniforme sobre su superficie  $\tilde{\Gamma}_1$ . Las densidades de fuerzas volumétrica y superficial pueden escribirse respectivamente como  $\tilde{f}(\tilde{x}) = -g\tilde{\rho}(\tilde{x})e_3$  y  $\tilde{g}(\tilde{x}) = -\pi\tilde{n}(\tilde{x})$ , donde  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $\tilde{\rho} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  es la densidad de masa en la configuración deformada,  $\tilde{x}$  representa un punto genérico de  $\{\tilde{\Omega}\}^-$ ,  $\tilde{n}(\tilde{x})$  es el vector normal unitario externo de  $\partial \tilde{\Omega}$ ,  $e_3$  no es más que el tercer vector de la base cartesiana y  $\pi$  es una constante, llamémosla presión. Este ejemplo en particular nos muestra que las densidades de fuerzas pueden, o no, depender de la deformación.*

El objetivo ahora es establecer las ecuaciones tales que una determinada configuración deformada esté en equilibrio estático con las fuerzas que se aplican. Para este propósito, trabajamos con las *ecuaciones de equilibrio* de un axioma fundamental debido a Cauchy y a Euler. Las ecuaciones de elasticidad se obtendrán de la combinación de estas ecuaciones con las ecuaciones constitutivas que próximamente veremos.

Considérese

$$S_2 := \{v \in \mathbb{R}^3 : |v| = 1\}$$

el conjunto de todos los vectores unitarios de  $\mathbb{R}^3$ . Se tiene entonces que debido al Principio de Tensión de Euler y Cauchy, un cuerpo  $\tilde{\Omega} \in \mathbb{R}^3$  sometido a fuerzas con densidades  $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\tilde{g} : \tilde{\Gamma}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  está en equilibrio si existe un campo vectorial tal que:

$$\tilde{t} : \{\tilde{\Omega}\} \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tal que satisfazca para todos los dominios  $\tilde{A} \subset \tilde{\Omega}$ ,

$$\int_{\tilde{A}} \tilde{f} d\tilde{x} + \int_{\partial\tilde{A}} \tilde{t}(\tilde{x}, \tilde{n}(\tilde{x})) d\tilde{a} = 0 \quad (4.3a)$$

$$\int_{\tilde{A}} \tilde{x} \wedge \tilde{f} d\tilde{x} + \int_{\partial\tilde{A}} \tilde{x} \wedge \tilde{t}(\tilde{x}, \tilde{n}(\tilde{x})) d\tilde{a} = 0 \quad (4.3b)$$

$$\tilde{t}(\tilde{x}, \tilde{n}(\tilde{x})) = \tilde{g}(\tilde{x}) \text{ en } \partial\tilde{\Omega} \text{ ect } \tilde{x} \in \partial\tilde{A} \cap \tilde{\Gamma}_1 \quad (4.3c)$$

donde  $\tilde{n}(\tilde{x})$  denota el vector normal exterior unitario en  $\tilde{x}$  a la superficie  $\partial\tilde{A}$ , que existe por ser  $\tilde{A}$  dominio.

En efecto, este axioma postula que el *equilibrio* de un cuerpo sometido a fuerzas se refleja en la existencia de una densidad de fuerza  $\tilde{t}$  que actúa en la frontera de cualquier subdominio  $\tilde{A}$  y que depende únicamente de las dos variables  $\tilde{x}$  y  $\tilde{n}(\tilde{x})$ .

El siguiente teorema, que es debido a Cauchy, muestra que la dependencia de  $\tilde{t}$  con respecto a su segunda variable ha de ser, necesariamente, lineal. Considérese  $\Phi : \tilde{\Omega} \rightarrow \{\tilde{\Omega}\}^-$  [7].

**Teorema 4.1.** *Si  $\tilde{t}(\cdot, \tilde{n}) : \{\tilde{\Omega}\}^- \rightarrow \mathbb{R}^3$  es de clase  $C^1$  para todo  $\tilde{n} \in S_2$ ,  $\tilde{t}(\cdot, \cdot) : S_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es continuo para todo  $\tilde{x} \in \{\tilde{\Omega}\}^-$ , y  $\tilde{f} : \{\tilde{\Omega}\}^- \rightarrow \mathbb{R}^3$  es continuo, entonces  $\tilde{t} : \{\tilde{\Omega}\}^- \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es lineal con respecto a su segunda variable*

*Demostración.* La prueba, que por extensión no se incluye, se basa en aplicar el principio de esfuerzo a subdominios particulares de  $\{\tilde{\Omega}\}^-$ . Para más detalle, ver Ciarlet [13] o Gurtin y Martins [15].

El teorema anterior, en otras palabras establece que existe una matriz de clase  $C^1$ ,  $\tilde{T} : \{\tilde{\Omega}\}^- \rightarrow \mathbb{M}^3$  tal que:

$$\tilde{t}(\tilde{x}, \tilde{n}) = \tilde{T}(\tilde{x})\tilde{n} \text{ para todo } \tilde{x} \in \{\tilde{\Omega}\}^- \text{ y todo } \tilde{n} \in S_2.$$

**Definición 4.1.** Dada  $A \in \mathbb{M}^n$  con  $n \in \mathbb{N}$ , se define como matriz cofactor de  $A$ , a  $\text{Cof } A = (\det A)A^{-T}$ .

Combinando ahora el Teorema de Cauchy (Teorema 4.1) con el Principio de tensiones de Cauchy y Euler, mediante la fórmula de Stokes, se obtienen las siguientes **ecuaciones de equilibrio de la configuración deformada**. La matriz de tensiones  $\tilde{T} : \{\tilde{\Omega}\}^- \rightarrow \mathbb{M}^3$  satisface que:

$$-\text{div } \tilde{T}(\tilde{x}) = \tilde{f}(\tilde{x}) \text{ para todo } \tilde{x} \in \tilde{\Omega} \quad (4.4a)$$

$$\tilde{T}(\tilde{x})\tilde{n}(\tilde{x}) = \tilde{g}(\tilde{x}) \text{ para todo } \tilde{x} \in \tilde{\Gamma}_1 \quad (4.4b)$$

$$\tilde{T}(\tilde{x}) \in \mathbb{S}^3 \text{ para todo } \tilde{x} \in \tilde{\Omega} \quad (4.4c)$$

El sistema anterior está definido sobre la configuración de la deformación que es, en principio, desconocida. Afortunadamente, puede ser reformulada en términos de funciones que actúen sobre la configuración de referencia  $\Omega$  del cuerpo, que esta vez si es conocida. Con este propósito, realizamos un cambio de variables  $\tilde{x} = \Phi(x)$  definido por la aplicación de la deformación que recordéese es inyectiva. Además, aplicamos las siguientes relaciones:

- $d\tilde{x} = |\det \nabla \Phi(x)|dx$ .
- $\tilde{n}(\tilde{x})d\tilde{a} = \text{Cof } \nabla \Phi(x)n(x)da$ .

Y como hipótesis [7] asumimos que los campos vectoriales  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $g : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  pueden definirse como:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{x})d\tilde{x} &= f(x)dx \\ \tilde{g}(\tilde{x})d\tilde{a} &= g(x)da. \end{aligned}$$

Para empezar, asumiendo que  $\Phi$  es lo suficientemente regular y usando el cambio de variables  $\Phi : \bar{\Omega} \rightarrow \{\tilde{\Omega}\}^-$  en la primera ecuación del Teorema 4.1.1, se deduce que para todos los subdominios  $A \subset \Omega$

$$\int_{\Delta} f(x)dx + \int_{\partial A} \tilde{T}(\Phi(x)) \text{Cof } \nabla \Phi(x)n(x)da = 0. \quad (4.5)$$

La matriz  $T : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{M}^3$ , definida por:

$$T(x) := \tilde{T}(\Phi(x)) \text{Cof } \nabla \Phi(x) \quad (4.6)$$

para todo  $x \in \bar{\Omega}$ . Se conoce como **Primer Tensor de tensiones de Piola-Kirchoff**.

En términos del Primer Tensor de Piola-Kirchoff, la Ecuación (4.5) puede reescribirse como:

$$\int_A f(x)dx + \int_{\partial A} T(x)n(x)da = 0, \quad (4.7)$$

implicando que el Primer Tensor de Piola-Kirchoff satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$-\operatorname{div} T(x) = f(x) \text{ para todo } x \in \Omega. \quad (4.8)$$

Usando ahora la identidad:

$$\nabla\Phi(x)^{-1}T(x) = \nabla\Phi(x)^{-1}[\det \nabla\Phi(x)\tilde{T}(\Phi(x))]\nabla\Phi(x)^{-T}$$

podemos deducir de la simetría de  $\tilde{T}(\tilde{x})$  que la matriz  $\nabla\Phi(x)^{-1}T(x)$  es **también simétrica**.

Es entonces claro ver que las ecuaciones establecidas en el Teorema 4.1.1 son equivalentes a las siguientes ecuaciones definidas sobre la configuración de referencia:

$$-\operatorname{div} T(x) = f(x) \text{ para todo } x \in \Omega \quad (4.9a)$$

$$T(x)n(x) = g(x) \text{ para todo } x \in \Gamma_1 \quad (4.9b)$$

$$\nabla\Phi(x)^{-1}T(x) \in \mathbb{S}^3 \text{ para todo } x \in \Omega \quad (4.9c)$$

donde el subconjunto  $\Gamma_1$  de  $\partial\Omega$  está definido por  $\tilde{\Gamma}_1 = \Phi(\Gamma_1)$ .

Finalmente, definimos como el **Segundo Tensor de Piola-Kirchoff**,  $\Sigma : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{S}^3$ , a:

$$\Sigma(x) := \nabla\Phi(x)^{-1}T(x) \quad (4.10)$$

para todo  $x \in \Omega$ . Y podemos reescribir por última vez **ecuaciones de equilibrio en la configuración de referencia** en términos de  $\Sigma$  como:

$$-\operatorname{div}(\nabla\Phi(x)\Sigma(x)) = f(x) \text{ para todo } x \in \Omega \quad (4.11a)$$

$$(\nabla\Phi(x)\Sigma(x))n(x) = g(x) \text{ para todo } x \in \Gamma_1. \quad (4.11b)$$

Las incógnitas en cualquiera de los sistemas de ecuaciones de equilibrio obtenidos son la deformación del cuerpo y los tensores de Piola-Kirchoff. Con el objetivo de determinar estas incógnitas, ambos sistemas hay que complementarlos con una ecuación que relacione los campos. Este es el objetivo de la siguiente sección.

### 4.1.2. Relaciones constitutivas de materiales elásticos

Está claro que el tensor de esfuerzo tiene que depender de la deformación inducida en el cuerpo por las fuerzas que actúan sobre él. Esta dependencia se establece mediante la ecuación constitutiva del material, por medio de una función de respuesta específica del material considerado. En lo que sigue, consideraremos un tipo de estos materiales, *los materiales elásticos*.

**Definición 4.2.** Se dice que un material es **elástico** si existe una función  $T^\# : \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{M}^3$  tal que:

$$T(x) = T^\#(x, \nabla\Phi(x)) \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$



O, de forma equivalente, si existe una función  $\Sigma^\# : \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  tal que :

$$\Sigma(x) = \Sigma^\#(x, \nabla\Phi(x)) \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Tanto  $\Sigma^\#$  como  $T^\#$  se conocen como función respuesta del material.

Una función respuesta no puede ser arbitraria. En Física, existe una axioma que establece que un observable ha de ser invariante con respecto a transformaciones ortogonales del sistema de referencia. En el caso particular de materiales elásticos, el observable es el campo de tensiones  $\bar{t}$ , que por lo explicado, ha de ser invariante frente a transformaciones ortogonales de la base del sistema de referencia utilizado para representarlo. Este es el conocido **Axioma de la Invarianza de marco de referencia para sistemas materiales**. En el siguiente teorema damos formalismo matemático en términos de la función de respuesta.

**Teorema 4.2.** *Un material elástico satisface el Axioma de la Invarianza de marco de referencia para sistemas materiales si y solamente si*

$$T^\#(x, QF) = QT^\#(x, F) \quad x \in \bar{\Omega} \text{ y } Q \in \mathbb{O}_+^3 \text{ y } F \in \mathbb{M}_+^3$$

o, equivalentemente satisface que:

$$\Sigma^\#(x, QF) = \Sigma^\#(x, F) \quad x \in \bar{\Omega} \text{ y } Q \in \mathbb{O}_+^3 \text{ y } F \in \mathbb{M}_+^3.$$

Lo anterior indica que la función de respuesta  $\Sigma^\#$  depende de  $F$  solamente vía la matriz simétrica definida positiva  $U := (F^T F)^{\frac{1}{2}}$ . Para verlo, realizamos una factorización polar  $F = RU$ , con  $R := FU^{-1} \in \mathbb{O}_+^3$  y vemos que el Axioma de la Invarianza de marco de referencia para  $\Sigma^\#$  puede expresarse como:

$$\Sigma^\#(x, F) = \Sigma^\#(x, U) \quad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ y } F = RU \in \mathbb{M}_+^3.$$

Lo anterior implica que el Segundo Tensor de Piola  $\Sigma : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{S}^3$  depende del campo de deformaciones  $\Phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  exclusivamente a través del tensor métrico asociado  $C := \nabla\Phi^T \nabla\Phi$ , es decir:

$$\Sigma(x) = \tilde{\Sigma}(x, C(x)) \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad (4.12)$$

y la función  $\tilde{\Sigma} : \bar{\Omega} \times \mathbb{S}_>^3 \rightarrow \mathbb{S}_>^3$  está definido por

$$\tilde{\Sigma}(x, C) = \Sigma^\#(x, C^{\frac{1}{2}}) \quad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ y } C \in \mathbb{S}_>^3.$$

**Definición 4.3.** *Se dice que un material elástico es isotrópico en un punto  $x \in \Omega$  si la respuesta producida es igual en todas sus direcciones, i.e. el tensor de tensiones de Cauchy  $\tilde{T}(x)$  es invariante frente a rotaciones  $\mathbb{O}_+^3$  del sistema de referencia en torno al punto  $x$ .*

Nos restringimos a materiales isotrópicos, que son aquellos materiales que son isotrópicos (Definición 4.3) en todos sus puntos. El siguiente teorema ofrece una caracterización de cuándo la respuesta de un material elástico es isotrópica.

**Teorema 4.3.** *Un material elástico ocupando una configuración  $\bar{\Omega}$  es **isotrópico** si y solamente si:*

$$\begin{aligned} T^\#(x, FQ) &= T^\#(x, F)Q \quad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ y } Q \in \mathbb{O}_+^3 \text{ y } F \in \mathbb{M}_+^3, \\ &\text{o equivalentemente,} \\ \Sigma^\#(x, FQ) &= Q^T \Sigma^\#(x, F)Q \text{ para todo } x \in \bar{\Omega} \text{ y } Q \in \mathbb{O}_+^3 \text{ y } F \in \mathbb{M}_+^3. \end{aligned}$$

Otra propiedad que pueden satisfacer los material elásticos es la homogeneidad.

**Definición 4.4.** *Un material elástico ocupando una configuración  $\bar{\Omega}$  es **homogéneo** si su función respuesta es independiente al punto  $x \in \bar{\Omega}$  considerado. Esto significa que la función respuesta  $T^\#$  o  $\Sigma^\#$  no depende de su primera variable, i.e., existen aplicaciones a las que se seguirán denotando respectivamente  $T^\#$  y  $\Sigma^\#$  tales que:*

$$T^\#(x, F) = T^\#(F) \quad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ y } F \in \mathbb{M}_+^3$$

y

$$\Sigma^\#(x, F) = \Sigma^\#(F) \quad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ y } F \in \mathbb{M}_+^3.$$

**Definición 4.5.** *Una configuración  $\bar{\Omega}$  se dice que está en **estado natural o libre de tensiones** si verifica que:*

$$T^\#(x, I) = 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

o equivalentemente,

$$\Sigma^\#(x, I) = 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Hemos visto en la expresión (4.12) que el Segundo Tensor de Piola-Kirchoff  $\Sigma : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{S}^3$  puede expresarse en función del campo de deformaciones de la forma:

$$\Sigma(x) = \tilde{\Sigma}(x, C(x)), \text{ donde } C(x) = \nabla \Phi^T(x) \nabla \Phi(x) \text{ para todo } x \in \bar{\Omega}.$$

El **Teorema de Rivlin-Ericksen** establece que si el material es isotrópico, podemos simplificar notablemente la dependencia de  $\Sigma$  con respecto a  $C(x)$ . Veámoslo.

**Teorema 4.4. (Teorema de Rivlin-Ericksen)** *Si un material elástico es isotrópico y satisface el principio de invarianza frente a transformaciones del sistema de referencia, entonces existen funciones  $\gamma_i^\# : \Omega \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $i \in \{1, 2, 3\}$  tales que:*

$$\Sigma(x) = \gamma_0(x)I + \gamma_1(x)C(x) + \gamma_2(x)C^2(x) \text{ for all } x \in \bar{\Omega}$$

donde  $\gamma_i^\#(x) = \gamma_i^\#(x, \text{tr } C, \text{tr}(\text{Cof } C), \det C)$ .

**Demostración.** La idea principal de la prueba reside en que toda matriz verifica su polinomio característico. No incluimos la demostración debido a su extensión, pero para el lector interesado consultar [13] o [14].

**Observación 4.1.** *Nótese que  $\text{tr} C(x)$ ,  $\text{tr}(\text{cof } C(x))$ , y  $\det C(x)$  son los invariantes principales de la matriz  $C(x)$ .*

Pese a que el teorema anterior ha reducido notablemente la cantidad de respuestas posibles que puede dar un sistema elástico e isotrópico que satisfazca la invarianza frente a cambios de sistema de referencia, aún las posibles funciones respuesta pertenecen a un conjunto demasiado general y extenso como para que pueda trabajarse con él. Es por esto por lo que ahora nos centramos en un tipo especial de deformaciones, aquellas cuyo estado deformado no dista en exceso de la configuración de referencia.

En términos del campo de desplazamiento  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , el tensor métrico  $C$  cumple que:

$$C(x) = I + 2E(x), \quad (4.13)$$

donde  $E(x)$  es conocido como el **Tensor de tensiones de Green-St Venant** en el punto  $x \in \Omega$  y en función del campo de desplazamientos, puede escribirse como:

$$E(x) := \frac{1}{2} (\nabla u^T(x) + \nabla u(x) + \nabla u^T(x) \nabla u(x)) \quad (4.14)$$

Hemos supuesto que la deformación de la configuración de referencia es pequeña, por lo que los tensores  $E(x)$  han de ser "pequeños" para cualquier  $x \in \bar{\Omega}$ . Es por esto por lo que podemos hacer un desarrollo de Taylor de la función respuesta dada por el Teorema de Rivlin-Ericksen (4.4):

$$\begin{aligned} \text{tr } C(x) &= 3 + 2 \text{tr } E(x) \\ \text{tr}(\text{Cof } C(x)) &= 3 + 4 \text{tr } E(x) + o(|E(x)|) \\ \det C(x) &= 1 + 2 \text{tr } E(x) + o(|E(x)|) \\ C^2(x) &= 1 + 4E(x) + o(|E(x)|) \end{aligned}$$

que asumiendo que las funciones  $\gamma_i^\#$  son lo suficientemente regulares, se tiene que:

$$\boxed{\Sigma(x) = \Sigma^\#(x, I) + \{(\lambda(x) \text{tr } E(x))I + 2\mu(x)E(x)\} + o_x(|E(x)|)} \quad (4.15)$$

**Observación 4.2.** *Tanto  $\mu(x)$  como  $\lambda(x)$  son funciones **independientes al campo de desplazamientos**  $\mathbf{u}(x)$ . Si además el material es homogéneo, entonces  $\mu$  y  $\lambda$  son constantes.*

Si  $\Omega$  es un estado natural o libre de tensiones del sistema, entonces el candidato obvio para poder establecer una relación constitutiva es:

$$\boxed{\Sigma(x) = \lambda(\text{tr } E(x))I + 2\mu E(x)} \quad (4.16)$$

para todo  $x \in \bar{\Omega}$ . En este caso,  $\mu$  y  $\lambda$  se conocen como **las constantes de Lamé** del material.

**Definición 4.6.** Se dirá que un material es del tipo **St Venant-Kirchhoff** si tiene como relación constitutiva la ofrecida en la Ecuación (4.16).

**Observación 4.3.** Las constantes de Lamé se determinan experimentalmente. Dado que nuestro análisis por ahora tiene un fin puramente teórico, no estamos interesados en sus valores exactos, sino en el hecho de saber que son positivas.

En numerosas ocasiones las constantes de Lamé aparecen escritas en función de el coeficiente de Poisson  $\nu$  y el módulo de Young  $E$  mediante las expresiones:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad y \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}.$$

### 4.1.3. Las ecuaciones de Elasticidad no Lineal

Ahora introduciremos las ecuaciones de la elasticidad no lineal en un problema de condiciones de contorno. El motivo de introducirlas y, sin embargo, hacerlo de una forma tan breve, es porque las necesitaremos en la siguiente sección para deducir las ecuaciones de elasticidad lineal. Como es natural por todo lo expuesto hasta el momento, nacen de la combinación de las ecuaciones de equilibrio previamente obtenidas junto con la relación constitutiva del material considerado. Además le añadiremos condiciones de contorno sobre  $\Gamma_0 := \partial\Omega \setminus \Gamma_1$ . Asumiendo que el material ofrece una función respuesta conocida, dada por  $T^\#$  o por  $\Sigma^\#$  y que está fijado en  $\Gamma_0$ , concluimos que la deformación inducida por las fuerzas que se aplican con densidades  $f$  y  $g$  viene dada por el problema no lineal de condiciones de contorno siguiente:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} T(x) &= f(x), & x \in \Omega \\ \Phi(x) &= x, & x \in \Gamma_0 \\ T(x)n(x) &= g(x), & x \in \Gamma_1 \end{aligned}$$

donde

$$T(x) = T^\#(x, \nabla\Phi(x)) = \nabla + \Phi(x)\Sigma^\#(x, \nabla\Phi(x)), \text{ para todo } x \in \bar{\Omega}. \quad (4.17)$$

### 4.1.4. Las ecuaciones de Elasticidad Lineal

Las ecuaciones de Elasticidad lineal se obtienen a partir de las de elasticidad no lineal, bajo la hipótesis de que esta vez el cuerpo sufre una deformación pequeña con respecto a su configuración de referencia, es decir que:

$$\Phi(x) = x + u(x) \text{ con } |\nabla u(x)| \ll 1 \text{ para todo } x \in \bar{\Omega}.$$

Es por tanto razonable aproximar la parte no lineal del modelo anterior por su parte lineal, obtenida de sustituir la función de respuesta de la Ecuación (4.17) por la parte afín de  $u$  en la aproximación por series de Taylor:

$$T^\#(x, \nabla\Phi(x)) = T^\#(x, I) + \frac{\partial T^\#}{\partial F}(x, I)\nabla u(x) + o(|\nabla u(x)|).$$

Así, el desplazamiento en respuesta a las fuerzas aplicadas satisface el problema de contorno lineal siguiente:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left( T^\#(\cdot, I) + \frac{\partial T^\#}{\partial F}(\cdot, I) \nabla u \right) &= f \text{ en } \Omega \\ Tn &= g \text{ sobre } \Gamma_1 \\ u &= 0 \text{ sobre } \Gamma_0. \end{aligned}$$

Estas son las **Ecuaciones de Elasticidad Lineal**.

Un caso particularmente importante es aquel en el que el cuerpo está constituido de un material elástico, isotrópico y homogéneo tal que su configuración de referencia constituya un estado natural. Su ecuación constitutiva será entonces:

$$\Sigma(x) = \lambda(\operatorname{tr} E(x))I + 2\mu E(x) + o(|E(x)|) \quad (4.18)$$

con  $\lambda, \mu > 0$  las constantes de Lamé del material. Se tiene entonces que  $\forall x \in \bar{\Omega}$ ,

$$E(x) = \frac{1}{2} (\nabla \Phi^T(x) \nabla \Phi(x) - I) = \frac{1}{2} (\nabla u^T(x) + \nabla u(x)) + o_x(|\nabla u(x)|) \quad (4.19)$$

y

$$\begin{aligned} T(x) &= \nabla \Phi(x) \Sigma(x) = (I + \nabla u(x)) (\lambda(\operatorname{tr} E(x))I + 2\mu E(x)) \\ &= \frac{\lambda}{2} \operatorname{tr} (\nabla u^T(x) + \nabla u(x)) + \mu (\nabla u^T(x) + \nabla u(x)) + o_x(|\nabla u(x)|). \end{aligned}$$

Finalmente, **Ecuaciones de Elasticidad Lineal** pueden escribirse como:

$$-\operatorname{div} \sigma(x) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (4.20a)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma_0 \quad (4.20b)$$

$$\sigma(x)n(x) = g(x), \quad x \in \Gamma_1 \quad (4.20c)$$

donde

$$\sigma(x) = \lambda(\operatorname{tr} e(x))I + 2\mu e(x) \quad (4.21a)$$

$$e(x) = \frac{1}{2} (\nabla u^T(x) + \nabla u(x)). \quad (4.21b)$$

En la siguiente sección se probará que este sistema lineal de EDPs tiene solución única en espacios de Sobolev.

## 4.2. Elasticidad Lineal

### 4.2.1. Desigualdades de Korn

A continuación, vamos a estudiar la existencia y unicidad de solución cuando tratamos con la ecuación ya presentada que modela el comportamiento lineal-elástico que sufre un material. Mediante el lema de J.L.Lions podrá establecerse

la desigualdad fundamental de Korn que implicará que las ecuaciones de elasticidad lineal tienen una solución lineal, estable y regular siempre que los datos para el contexto del problema cumplan ciertas propiedades de regularidad. El contenido correspondiente a esta sección se ha extraído de [7].

**Observación 4.4.** Si  $v \in L^2(\Omega)$  entonces  $v \in H^{-1}(\Omega)$  y  $\partial_i v \in H^{-1}(\Omega)$ ,  $1 \leq i \leq N$ . Para demostrarlo basta ver que dado  $\psi \in D(\Omega)$ :

$$\begin{aligned} |\langle v, \psi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} v \psi \right| \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{H^1(\Omega)} \\ |\langle \partial_i v, \psi \rangle| &= \left| - \int_{\Omega} v \partial_i \psi \right| \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_i \psi\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\|v\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

La implicación contraria recibe el nombre del primer matemático capaz de probarla, J.L.Lions.

**Lema 4.1.** (*J.L.Lions*) Sea  $v \in D'(\Omega)$ . Se tiene que:

$$\text{Si } v, \partial_i v \in H^{-1}(\Omega), \quad 1 \leq i \leq N \text{ entonces } v \in L^2(\Omega).$$

**Teorema 4.5.** (*Primera Desigualdad de Korn*) Sea  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  tal que la medida de  $\Gamma_0 > 0$ . Entonces, existe una constante  $C$  tal que:

$$\|e(v)\|_{L^2(\Omega; \mathbb{S}^3)} \geq C \|v\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}, \quad \forall v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega; \mathbb{R}^3),$$

donde  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  se refiere al espacio  $\{v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3); v = 0 \text{ en } \Gamma_0\}$  y  $e(v)$  a la matriz con  $e_{ij}(v) := \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$ ,  $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$ .

*Demostración.* Para la demostración procedemos en los pasos siguientes:

1. Teniendo en cuenta que  $e_{ij}(v) := \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$ , se tiene que la desigualdad de Korn es una consecuencia de  $\partial_{ij} v_k = \partial_i e_{jk}(v) + \partial_j e_{ik}(v) - \partial_k e_{ij}(v)$ . Si  $v \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  y  $e(v) \in L^2(\Omega; \mathbb{S}^3)$  la Observación 4.4 muestra que  $\partial_{ij} v_k \in H^{-1}(\Omega)$ . Dado que las funciones  $\partial_j v_k$  también pertenecen al espacio  $H^{-1}(\Omega)$  y el Lema de J.L.Lions (Lema 4.1) muestra que  $\partial_j v_k \in L^2(\Omega)$ . Lo que implica que el espacio:

$$E(\Omega; \mathbb{R}^3) := \{v \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3); e(v) \in L^2(\Omega; \mathbb{S}^3)\}$$

es justamente el espacio  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ .

2. El espacio  $E(\Omega; \mathbb{R}^3)$  es de Hilbert equipado con la norma:

$$\|v\|_{E(\Omega; \mathbb{R}^3)} := \|v\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)} + \|e(v)\|_{L^2(\Omega; \mathbb{S}^3)} \quad (4.22)$$

de igual manera que lo es  $H^1(\Omega)$  con su norma  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ . Recordemos que esto es obvio ya que ya vimos anteriormente que los espacios  $H^k(\Omega)$  son

espacios de Hilbert.

Por otra parte, la aplicación:

$$id : v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \mapsto v \in E(\Omega; \mathbb{R}^3)$$

es claramente lineal, biyectiva y continua, por lo que el Teorema de la Aplicación Abierta (Teorema 2.3), muestra que la aplicación  $id$  así definida es abierta. Existe, por tanto,  $C > 0$  tal que:

$$\|v\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)} \leq C \|v\|_{E(\Omega; \mathbb{R}^3)}, \quad \forall v \in E(\Omega; \mathbb{R}^3)$$

lo que es equivalente a escribir que:

$$\|v\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)} + \|e(v)\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)} \geq C^{-1} \|v\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3).$$

3. Establecemos además, que si  $v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  satisface que  $e(v) = 0$ , entonces  $v = 0$ . Esto es una consecuencia del Punto 1, que muestra que si  $v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  tal que satisface  $e(v) = 0$  entonces ha de satisfacer también:

$$\partial_{ij} v_k = 0 \quad \text{en } \Omega$$

y por tanto  $v$  tiene que ser afín [7], es decir, de la forma  $v(x) = b + Ax$  con  $b \in \mathbb{R}^3$  y  $A \in \mathbb{M}^3$  y dado que la parte simétrica del gradiente de  $v$  (que es justamente  $e(v)$ ), se anula en  $\Omega$  la matriz  $A$  ha de ser además antisimétrica. Dado que el rango de una matriz no nula y antisimétrica de orden 3, es necesariamente 2, el lugar geométrico de los puntos que satisfacen  $b + Ax = 0$  puede ser o una recta en  $\mathbb{R}^3$  o el vacío, dependiendo para cada caso de si el sistema lineal tiene o no soluciones. Pero  $b + Ax = 0$  en  $\Gamma_0$  que tiene medida positiva, entonces  $b = 0$  y  $A = 0$ , lo que hace que  $v = 0$  en  $\Omega$ .

4. Finalmente, obtenemos la desigualdad del enunciado por contradicción. Supongamos que es falsa. Existe una sucesión  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H_{\Gamma_0}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  tal que:

$$\begin{aligned} \|v_n\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)} &= 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \|e(v_n)\|_{L^2(\Omega; \mathbb{S}^3)} &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dado que  $\Omega$  es un dominio, la inclusión  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \subset L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  es compacta por el teorema de Rellich-Kondrasov (Teorema A.9). La sucesión  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  por estar acotada en  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  contiene una subsucesión  $\{v_{\sigma(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  que converge en  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  y donde  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  es una función creciente. Dado que la sucesiones  $\{v_{\sigma(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{e(v_{\sigma(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergen respectivamente en los espacios  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  y  $L^2(\Omega; \mathbb{S}^3)$  son sucesiones de Cauchy. Entonces la sucesión  $\{v_{\sigma(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión con respecto de la norma  $\|\cdot\|_{E(\Omega; \mathbb{R}^3)}$ , así que también lo es con respecto a  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}$  por la desigualdad establecida en el Punto 2. El espacio  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  es completo al

ser subespacio cerrado de  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ , entonces existe  $v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  tal que:

$$v_{\sigma(n)} \rightarrow v \quad \text{en } H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$$

Dado que ese límite satisface

$$e(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} e(v_{\sigma(n)}) = 0$$

de lo que sigue que  $v = 0$  por el Punto 2. Pero esto contradice la relación  $\|v\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_{\sigma(n)}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)} = 1$ . Luego queda probada la desigualdad de Korn. |

La desigualdad establecida en la Parte 2 de la prueba se llama **Desigualdad de Korn sin condiciones de contorno**. El resultado de unicidad correspondiente a la Parte 3 se llama **Lema del Desplazamiento Rígido Infinitesimal**, es decir, si  $v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  es tal que  $e(v) = 0$ ,  $v$  tiene que ser necesariamente:

$$v(x) = a + b \times x \quad \forall x \in \Omega \text{ y } a, b \in \mathbb{R}^3.$$

Esto hace que el **espacio de todos los desplazamientos rígidos infinitesimales** tenga dimensión finita y se denota como:

$$\text{Rig}(\Omega; \mathbb{R}^3) := \{w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3; w(x) = a + b \wedge x, \quad a, b \in \mathbb{R}^3\}.$$

**Observación 4.5.** En el caso especial de que  $\Gamma_0 = \partial\Omega$ , la Primera Desigualdad de Korn (Teorema 4.5) es una consecuencia trivital de la identidad:

$$\int_{\Omega} |e(v)|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$$

sin más que integrar por partes dos veces.

**Teorema 4.6.** (Segunda Desigualdad de Korn) Para todo  $v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ , existe  $C > 0$  tal que:

$$\|e(v)\|_{L^2(\Omega; \mathbb{S}^3)} \geq C \inf_{w \in \text{Rig}(\Omega; \mathbb{R}^3)} \|v + w\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}.$$

**Demostración.** La prueba de esta desigualdad se obtiene del Teorema (4.5) con las Partes 2 y 3 adaptadas como sigue. Sea  $v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  tal que satisface  $e(v) = 0$  necesariamente pertenece al espacio  $\text{Rig}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ . La sucesión  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se define ahora en  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  y satisface:

$$\inf_{w \in \text{Rig}(\Omega; \mathbb{R}^3)} \|v_n\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



$$\|e(v_n)\|_{L^2(\Omega; \mathbb{S}^3)} \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Si  $\text{Rig}(\Omega; \mathbb{R}^3)^\perp$  denota el complemento ortogonal de  $\text{Rig}(\Omega; \mathbb{R}^3)$  en el espacio de Hilbert  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ , entonces  $v_n = u_n + w_n$  con  $u_n \in \text{Rig}(\Omega; \mathbb{R}^3)^\perp$  y  $w_n \in \text{Rig}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ . Las relaciones anteriores implican que:

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)} &= 1 \text{ for all } n \\ \|e(u_n)\|_{L^2(\Omega; \mathbb{S}^3)} &\rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Entonces existe una función creciente  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que la subsucesión  $(u_{\sigma(n)})$  es de Cauchy en  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ . Este espacio por ser completo, existe  $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  tal que:  $u_{\sigma(n)} \rightarrow u$  en  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  y el límite satisface que:  $\mathbf{e}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} e(u_{\sigma(n)}) = 0$ . Así que  $u \in \text{Rig}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ . Por otra parte,  $u \in \text{Rig}(\Omega; \mathbb{R}^3)^\perp$  dado que  $\text{Rig}(\Omega; \mathbb{R}^3)^\perp$  es cerrado y  $u_n \in \text{Rig}(\Omega; \mathbb{R}^3)^\perp$ . Entonces  $u = 0$ , lo que contradice  $\|u_{\sigma(n)}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ . █

#### 4.2.2. Existencia, Estabilidad y Regularidad de la Solución Débil

Se define una solución débil a la ecuación de elasticidad como la solución a las ecuaciones variacionales:

$$\int_{\Omega} \sigma : \nabla v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v dx \quad (4.23)$$

$\forall v$ , tal que satisfazca  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $v = 0$  en  $\Gamma_0$ , donde:

$$\sigma = \lambda(\text{tr } e(u))I + 2\mu e(u) \text{ y } e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u^T + \nabla u).$$

Nótese que dado que  $\sigma$  es simétrica, la integral de la izquierda puede ser escrita como

$$\sigma : \nabla v = \sigma : e(v)$$

donde

$$e(v) := \frac{1}{2}(\nabla v^T + \nabla v).$$

La existencia y unicidad de solución a este problema variacional puede probarse con el Teorema de Lax-Milgram (Teorema 2.1). Distinguimos dos casos dependiendo de si la medida de  $\Gamma_0$  es positiva o nula.

Problema variacional elástico  $\text{PE}_{\text{var}}$ :

$$\text{PE}_{\text{var}} \begin{cases} \text{Hallar } u \in V \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} \sigma : \nabla v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v dx, \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

**Teorema 4.7.** *Supóngase que las constantes de Lamé satisfacen  $\lambda \geq 0$  y  $\mu > 0$  y que las densidades de fuerza satisfacen  $f \in L^{6/5}(\Omega; \mathbb{R}^3)$  y  $g \in L^{4/3}(\Gamma_1; \mathbb{R}^3)$ . Si el área  $\Gamma_0$  tiene medida estrictamente positiva, el problema variacional  $PE_{\text{var}}$  tiene solución única en el espacio:*

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega; \mathbb{R}^3) := \{v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3); v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\}.$$

*Demostración.* Basta aplicar el Teorema de Lax Milgram (2.1) al problema variacional  $PE_{\text{var}}$  ya que todas las hipótesis del teorema se cumplen. En particular, la coercitividad de la forma bilineal es una consecuencia de la desigualdad de Korn establecida en el Teorema 4.5 y del hecho de que las constantes de Lamé sean positivas. Por su parte  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  es un subespacio cerrado de un espacio de un espacio de Hilbert, luego es espacio de Hilbert. Todo esto implica que efectivamente se tenga que  $\forall v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma : e(v) dx &= \int_{\Omega} (\lambda [\text{tr}(e(v))]^2 + 2\mu |e(v)|^2) dx \\ &\geq 2\mu \int_{\Omega} |e(v)|^2 dx \geq C \|v\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}^2. \end{aligned}$$

**Teorema 4.8.** *Supóngase que las constantes de Lamé satisfacen  $\lambda \geq 0$  y  $\mu > 0$  y las densidades de las fuerzas aplicadas  $f \in L^{6/5}(\Omega; \mathbb{R}^3)$  y  $g \in L^{4/3}(\partial\Omega; \mathbb{R}^3)$ . Si el área  $\Gamma_0$  tiene medida nula y  $\int_{\Omega} f \cdot w dx + \int_{\partial\Omega} g \cdot w da = 0 \forall w \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  satisfaciendo  $e(w) = 0$ , entonces el problema variacional  $PE_{\text{var}}$  tiene una solución en  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ , única salvo movimientos rígidos.*

*Demostración.* Está basada en el Teorema de Lax Milgram (2.1) aplicado al problema variacional  $PE_{\text{var}}$ , esta vez definido sobre el espacio cociente  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)/\text{Rig}(\Omega; \mathbb{R}^3)$  donde  $\text{Rig}(\Omega; \mathbb{R}^3)$  es el subespacio de  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  consistiendo de todas los desplazamientos infinitesimales. Por el lema de desplazamientos rígidos infinitesimales (ver Parte 2 de la prueba del Teorema de 4.5),  $\text{Rig}(\Omega; \mathbb{R}^3)$  es el espacio de dimensión finita:

$$\{w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3; w(x) = a + b \wedge x, a, b \in \mathbb{R}^3\}.$$

Las relaciones de compatibilidad satisfechas por aplicar las fuerzas implican que la formulación variacional  $PE_{\text{var}}$  está bien definida sobre el cociente:

$$H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) / \text{Rig}(\Omega; \mathbb{R}^3),$$

que es un espacio de Hilbert con respecto de la norma

$$\|\dot{v}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)/\text{Rig}(\Omega; \mathbb{R}^3)} = \inf_{w \in \text{Rig}(\Omega; \mathbb{R}^3)} \|v + w\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}.$$

La coercitividad de la forma bilineal que aparece en la parte izquierda de la Ecuación  $PE_{\text{var}}$  es consecuencia de la desigualdad de Korn del Teorema 4.5 junto con el hecho de que las constantes de Lamé sean positivas.  $\blacksquare$

Dado que el sistema de ecuaciones diferenciales asociado con el problema variacional es elíptico, esperamos que la solución sea regular si los datos  $f$ ,  $g$  y  $\delta\Omega$  son regulares y si no hay cambio en la condición de contorno en una subregión conexa de  $\delta\Omega$ . Más específicamente, se tienen los siguientes resultados.

**Teorema 4.9. (Problema de desplazamiento, PD)** *Asúmase que  $\Gamma_0 = \delta\Omega$ . Si  $f \in W^{m,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$  y  $\delta\Omega$  es de clase  $C^{m+2}$  para algún entero  $m \geq 0$  y un número real  $1 < p < \infty$  satisfaciendo  $p \geq \frac{6}{5+2m}$ , entonces la solución  $u$  al problema variacional  $PE_{\text{var}}$  está en el espacio  $W^{m+2,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$  y existe una constante  $C > 0$  tal que*

$$\|u\|_{W^{m+2,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{W^{m+2,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)}.$$

Además,  $u$  satisface el problema de Dirichlet siguiente:

$$PD \begin{cases} -\operatorname{div} \sigma(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

**Teorema 4.10. (Problema de tracción)** *Supamos que se tiene  $\Gamma_1 = \delta\Omega$  y  $\int_{\Omega} f \cdot w dx + \int_{\partial\Omega} g \cdot w da = 0$ ,  $\forall v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  satisfaciendo que  $e(w) = 0$ . Si  $f \in W^{m,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ ,  $g \in W^{m+1-1/p,p}(\Gamma_1; \mathbb{R}^3)$ , y  $\delta\Omega$  es de clase  $C^{m+2}$  para algún entero  $m \geq 0$  y número real  $1 < p < \infty$  cumpliendo que  $p \geq \frac{6}{5+2m}$ , entonces cualquier solución al problema variacional  $PE_{\text{var}}$  está en  $W^{m+2,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$  y existe una constante  $C > 0$  tal que:*

$$\|\dot{u}\|_{W^{m+2,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)/\operatorname{Rig}(\Omega; \mathbb{R}^3)} \leq C (\|f\|_{W^{m+2,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)} + \|g\|_{W^{m+1-1/p,p}(\partial\Omega; \mathbb{R}^3)}).$$

Más aún,  $u$  satisface el problema de contorno:

$$PT \begin{cases} -\operatorname{div} \sigma(x) = f(x), & x \in \Omega \\ \sigma(x)n(x) = g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Podemos estudiar una situación intermedia en la que tenemos tanto condiciones de Dirichlet en una parte de la frontera,  $\partial\Omega_D$ , como condiciones de Neumann en la parte complementaria de ésta,  $\partial\Omega_N$ . Un ejemplo de la situación puede verse en la Figura 4.1. La frontera  $\partial\Omega_D$  se corresponde con una sección empotrada, mientras que una fuerza normal actúa sobre la parte  $\partial\Omega_N$ . El modelo de problema que tratamos es:

$$PM \begin{cases} \nabla \cdot \sigma(u) + f = 0 & \text{en } \Omega \\ \sigma(u) = \lambda(\nabla \cdot u)\mathcal{I} + \mu(\nabla u + \nabla u^T) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_D \\ \sigma(u) \cdot n = g & \text{sobre } \partial\Omega_N. \end{cases}$$

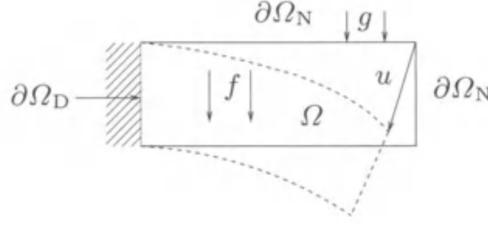


Figura 4.1: Ejemplo de un Problema Mixto

Dado que  $\int_{\Omega} -(\nabla \cdot \sigma(u)) \cdot v = \int_{\Omega} \sigma(u) : \nabla v - \int_{\partial\Omega} v \cdot \sigma(u) \cdot n$  y recordando que dado que  $\sigma(u)$  es simétrico, se tiene que  $\sigma(u) : \nabla v = \sigma(u) : e(v)$ , se llega a:

$$\int_{\Omega} \sigma(u) : e(v) - \int_{\partial\Omega} v \cdot \sigma(u) \cdot n = \int_{\Omega} f \cdot v.$$

Tomamos el desplazamiento  $u$  y las funciones test en el espacio

$$V_{\text{DN}} = \left\{ v \in [H^1(\Omega)]^3 ; v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_{\text{D}} \right\}, \quad (4.24)$$

equipado con la norma  $\|v\|_{1,\Omega} = \sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{1,\Omega}$  con  $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ .

El Problema PM escrito en formulación débil ( $\text{PM}_{\text{var}}$ ) queda entonces como:

$$\text{PM}_{\text{var}} \begin{cases} \text{Hallar } u \in V_{\text{DN}} \text{ tal que} \\ a(u, v) = \int_{\Omega} f \cdot v + \int_{\partial\Omega_{\text{N}}} g \cdot v, \quad \forall v \in V_{\text{DN}} \end{cases}$$

con la forma bilineal  $a$ :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) = \int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot u \nabla \cdot v + \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon(u) : e(v). \quad (4.25)$$

En Mecánica de Medios Continuos, la función test  $v$  juega un papel bastante importante: es el conocido desplazamiento virtual. El problema  $\text{PM}_{\text{var}}$  en su formulación variacional constituye el **Principio de Trabajos Virtuales**.

**Proposición 4.1.** *Sea  $\Omega$  un dominio de  $\mathbb{R}^3$ , considera la partición de la frontera  $\partial\Omega = \partial\Omega_{\text{D}} \cup \partial\Omega_{\text{N}}$ . Sean, además los coeficientes de Lamé  $\mu > 0$  y  $\lambda \geq 0$  y las densidades de fuerza  $f \in [L^2(\Omega)]^3$  y  $g \in [L^2(\partial\Omega_{\text{N}})]^3$ . La solución al  $\text{PM}_{\text{var}}$  satisface*

$$-\mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u) = f \quad \text{e.c.t. in } \Omega$$

$u = 0$  e.c.t.  $\partial\Omega_{\text{D}}$ , y  $\sigma \cdot n = g$  e.c.t en  $\partial\Omega_{\text{N}}$ .

*Demostración.* La verificación es inmediata. |

Para poder relacionar el desplazamiento y el problema variacional con términos energéticos, introduzcamos la siguiente proposición.

**Proposición 4.2.** *Bajo todas las hipótesis realizadas previamente para el Teorema de Lax-Milgram (Teorema 2.1), junto con las hipótesis:*

- *a es simétrica:*  $a(u, v) = a(v, u), \forall u, v \in V$ ;
- *a es positiva:*  $a(u, u) \geq 0, \forall u \in V$ .

Estableciendo que  $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v)$ ,  $u$  resuelve el problema variacional:

$$Pv \begin{cases} \text{Halla } u \in V \text{ tal que} \\ a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V \end{cases}$$

si y solamente si  $u$  minimiza  $J$  sobre  $V$ .

**Demostración.** La prueba se basa en la siguiente identidad:  $\forall u, v \in V$  y  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$J(u + tv) = J(u) + t(a(u, v) - f(v)) + \frac{t^2}{2}a(v, v), \quad (4.26)$$

que resulta de la simetría de  $a$ . Asumamos que  $u$  es solución del problema variacional Pv del enunciado. Entonces, debido a la positividad de  $a$ , la identidad (4.26) implica que  $u$  minimiza  $J$  sobre  $V$ . Para la implicación contraria, asúmase que  $u$  minimiza  $J$  sobre  $V$ . Sea  $v \in V$  con  $a(v, v) \neq 0$  y  $t = -\frac{a(u, v) - f(v)}{a(v, v)}$  en la identidad (4.26). Haciendo un cálculo directo, se obtiene:

$$0 \geq J(u) - J(u + tv) = \frac{(a(u, v) - f(v))^2}{2a(v, v)}.$$

Debido a la positividad de  $a$ , esto implica que  $a(u, v) = f(v)$ . Si  $a(v, v) = 0$ , no hay más que proceder de la misma manera pero tomando  $t = -a(u, v) + f(v)$ . **|**

**Proposición 4.3.** *Sea  $\Omega$  un dominio de  $\mathbb{R}^3$  y sea  $\partial\Omega_D \subset \partial\Omega$  con medida estrictamente positiva. Sea  $f \in [L^2(\Omega)]^3$  y  $g \in [L^2(\partial\Omega_N)]^3$ . El problema  $PM_{var}$  está bien planteado y existe una constante  $c$  tal que:*

$$\forall f \in [L^2(\Omega)]^3, \forall g \in [L^2(\partial\Omega_N)]^3, \quad \|u\|_{1, \Omega} \leq c(\|f\|_{0, \Omega} + \|g\|_{0, \partial\Omega_N}).$$

Además,  $PM_{var}$  es equivalente a la formulación variacional siguiente:

$$\min_{u \in V_{DN}} \left( \frac{1}{2} \lambda \int_{\Omega} (\nabla \cdot u)^2 + \frac{1}{2} \mu \int_{\Omega} \varepsilon(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega} f \cdot u - \int_{\partial\Omega_N} g \cdot u \right).$$

**Demostración.** Si  $\partial\Omega_D = \partial\Omega$ ,  $V_{DN} = [H_0^1(\Omega)]^3$  estamos en el caso del PD. La coercitividad resulta de la Primera Desigualdad de Korn (Teorema 4.5), dado que:

$$\forall u \in [H_0^1(\Omega)]^3, \quad a(u, u) \geq 2\mu \int_{\Omega} e(u) : e(u) \geq c\|u\|_{1, \Omega}^2.$$

Si la medida de  $\partial\Omega_N$  es estrictamente positiva, la coercitividad resulta de la Segunda Desigualdad de Korn (Teorema 4.6) y de resultados de compacidad que no analizaremos ahora, pero que pueden consultarse en [16].

Probada la coercitividad, para el resultado no hay más que aplicar el Teorema de Lax-Milgram (Teorema 2.1), y la Proposición 4.2. |

| **Observación 4.6.** *Dado un desplazamiento  $u$ , la cantidad  $\mathbf{J}(u)$  representa la energía total de la configuración deformada. Los términos cuadráticos se corresponden con la energía elástica de deformación y los términos lineales con la energía potencial de las fuerzas externas.*

### 4.3. Discretización del problema

Por simplicidad, asumamos que  $\Omega$  es un poliedro y consideremos una aproximación  $H^1$ -Conforme. Recordemos que se dice que una aproximación es conforme cuando  $V_h \subset V$  y  $W_h \subset W$ , es decir los espacios test y de soluciones de partida se aproximan para aplicar métodos de Galerkin por subespacios suyos.

En particular la aproximación conforme la realizaremos del tipo  $H^1$ . Este tipo de aproximación la realizamos mediante una familia de triangulaciones afín y geoméricamente conformes  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  y elementos finitos de Lagrange de grado  $k \geq 1$  que se denotan por  $\{\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}\}$ .

Para aproximar el problema mixto, asumamos por simplicidad que  $\partial\Omega_D$  es la unión de las caras del mallado. Así, que el espacio aproximado es

$$V_h^k = \left\{ v_h \in [C^0(\bar{\Omega})]^3; \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h \circ T_K \in [\hat{P}]^3; v_h = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_D \right\}, \quad (4.27)$$

que es subespacio de  $V_{DN}$ . Consideremos el problema discreto:

$$\begin{cases} \text{Halla } u_h \in V_h^k \text{ tal que} \\ a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f \cdot v_h + \int_{\partial\Omega_N} g \cdot v_h, \quad \forall v_h \in V_h^k. \end{cases}$$

| **Observación 4.7.** *El problema anterior tiene solución única, al ser  $V_h^k$  subespacio de  $V_{DN}$  y ser por tanto válido el análisis de la sección anterior.*

| **Proposición 4.4. (Problema Mixto)** *Sea  $u$  solución de y  $u_h$  la solución del problema discreto a resolver resolver. Se tiene que  $\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{1,\Omega} = 0$ . Además, si  $u \in [H^{l+1}(\Omega)] \cap V_{DN}$  para algún  $l \in \{1, \dots, k\}$ , existe  $c$  tal que:*

$$\forall h, \quad \|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq ch^l |u|_{l+1,\Omega}$$

Para el PT, una forma posible de eliminar los desplazamientos rígidos es la siguiente:

1. Se impone que el desplazamiento de un nodo, llamémoslo por ejemplo  $a_0$ , es 0.
2. Elegimos tres nodos adicionales  $a_1, a_2$  y  $a_3$ , y tres vectores unitarios  $\tau_1, \tau_2$  y  $\tau_3$  tal que el conjunto  $\{(a_i - a_0) \times \tau_i\}_{1 \leq i \leq 3}$  forma una base de  $\mathbb{R}^3$ , e impóngase que el desplazamiento del nodo  $a_i$  en la dirección  $\tau_i$  sea 0.

Esto nos lleva a que el espacio aproximado sea:

$$V_h^k = \{v_h \in [C^0(\bar{\Omega})]^3; \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h \circ T_K \in [\hat{P}]^3, v_h(a_0) = 0; v_h(a_i) \cdot \tau_i = 0, \\ i = 1, 2, 3\}$$

y al problema discreto de tracción,  $PT_{\text{dis}}$ :

$$PT_{\text{dis}} \begin{cases} \text{Halla } u_h \in V_h^k \text{ tal que} \\ a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f \cdot v_h + \int_{\partial\Omega} g \cdot v_h, \quad \forall v_h \in V_h^k. \end{cases}$$

**Definición 4.7.** Se denota como el espacio  $V_N$  al espacio

$$V_N = \left\{ u \in [H^1(\Omega)]^3; \int_{\Omega} u = 0; \int_{\Omega} \nabla \times u = 0 \right\}.$$

**Proposición 4.5. (Problema de Tracción)** Sea  $u$  una solución al problema  $PT_{\text{dis}}$  y  $u_h$  una solución al problema  $P_{\text{dis}}$ . Se tiene que  $\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{1,\Omega} = 0$ . Además, si  $u \in [H^{l+1}(\Omega)]^3 \cap V_N$  para algún  $l \in \{1, \dots, k\}$ , existe  $c$  tal que

$$\forall h, \quad \|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq ch^l |u|_{l+1,\Omega},$$

y si  $\Omega$  es convexo y  $g = 0$ , existe  $c$  tal que:

$$\forall h, \quad \|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq ch^{l+1} |u|_{l+1,\Omega}.$$

## 4.4. Implementación en FreeFem++

En esta sección hemos realizado implementaciones en FreeFem++ [19] de distintas situaciones de la ecuación de la elasticidad:

1. Caso bidimensional para vigas de acero, cobre y hormigón con el objetivo de realizar una comparación del comportamiento de éstas (estudio del desplazamiento) cuando están sometidas a igual esfuerzo.
2. Caso tridimensional de viga de acero.

El código utilizado para las distintas simulaciones aparece en el Apéndice B. Como observación, diremos que esta parte será breve ya que lo que buscamos es contrastar el contenido teórico previamente estudiado mediante algún ejemplo o aplicación como son los que se exponen.

#### 4.4.1. Caso elástico en 2D

Como es de esperar, el código utilizado para las vigas de distintos materiales es el mismo con la pequeña variación de las constantes elásticas.

En el código, comenzamos definiendo los parámetros necesarios para tratar un problema lineal elástico. Todos los declaramos reales, por lo que incluimos la orden `-real` previo a la definición de los parámetros. En concreto, necesitamos:

1. **rho**, se refiere a la densidad del material.
  - Acero:  $7700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .
  - Cobre:  $8960 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .
  - Hormigón:  $2300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .
2.  **$\mu$**  y  **$\lambda$** , se obtienen a partir de la constante de Poisson ( $\nu$ ) y del módulo de Young ( $E$ ), a partir de las expresiones:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad \text{y} \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}.$$

En concreto, los valores que hemos usado para cada material son:

- Acero:  $\mu = 11,05e10 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$  y  $\lambda = 14,06e10 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ .
  - Cobre:  $\mu = 15,110e10 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$  y  $\lambda = 32,110e10 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ .
  - Hormigón:  $\mu = 1,125e10 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$  y  $\lambda = 0,75e10 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ .
3. **gravity**, fuerza de la gravedad con valor  $-9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  que es la que actúa sobre el cuerpo.
  4. **twomul**, definido como  $\text{twomul} = 2\mu + \lambda$  nos servirá a la hora de escribir el problema variacional.
  5. **n** y **m** no describen más que el número de elementos en los que vamos a hacer el mallado regular en  $x$  e  $y$  respectivamente.

La idea es fijar un borde y estudiar el desplazamiento en el resto de la viga. Lo anterior se corresponde con condiciones de Dirichlet homogéneas en la parte fija y de tensión normal nula en el resto. En concreto, a que  $\partial\Omega_D$  sea la parte fija, y  $\partial\Omega_N$  el resto (en el problema PN). Es por esto por lo que nos basta etiquetar tres de los bordes iguales (1) y uno diferente (2). Lo realizamos mediante el comando que aparece en la línea 18 del código de cualquiera de los tres materiales. A continuación, definimos la malla  $T_h$ , que es una discretización en el número de elementos  $n$  y  $m$ , indicados previamente. El dominio  $\Omega$  ocupado por la viga



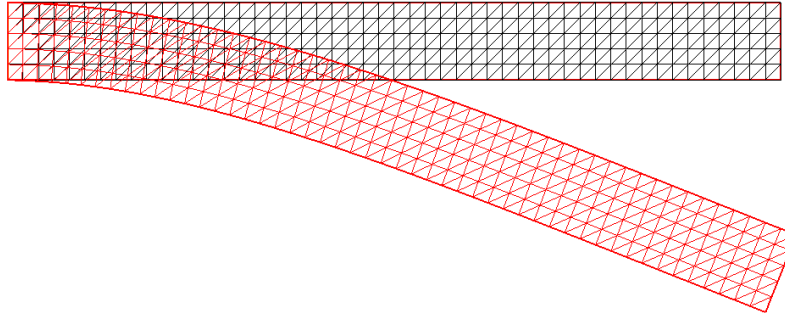


Figura 4.2: Viga 2D de acero con un borde fijo y sometida a fuerza gravitatoria

es un rectángulo definido en  $[0, 10] \times [0, 1]$  con distancias medidas en metros. Por otra parte, realizamos una discretización por EF tipo  $P^1$  del espacio test. Definimos ahora el problema, escribiendo las integrales del problema variacional, y estableciendo que la solución para el desplazamiento  $u$  ha de ser tal que la fuerza elástica determinada por los coeficientes antes definidos ha de compensar la fuerza correspondiente a la gravitacional que actúa sobre el cuerpo. Finalmente, realizamos una gráfica del espacio mallado inicial y final con el desplazamiento de la solución. La figura que se obtiene es el que aparece en la Figura 4.2.

Los desplazamientos son similares en forma para los tres materiales considerados, pero no en magnitud. Es por esto por lo que sólo incluimos el desplazamiento de uno de los materiales. Es interesante realizar una comparativa de los desplazamientos reales y máximos sufridos por las vigas de cada material. Así, obtenemos que el desplazamiento máximo se obtiene para el hormigón, constituyendo por tanto, el material más elástico. El valor que se obtiene del desplazamiento para la componente  $x$  en el caso del hormigón es de 0,0106751 m. El segundo más elástico sería el acero, con un desplazamiento en la componente  $x$  de 0,00324154 m. Por último, el cobre constituye el caso menos elástico con un desplazamiento longitudinal de 0,00247876 m. Estos resultados están totalmente de acuerdo con el material utilizado para las vigas de las construcciones, que son principalmente de hormigón, el encofrado y de acero, la estructura.

#### 4.4.2. Caso elástico en 3D

El interés de incluir el caso 3D del problema anterior (con las mismas condiciones al caso del acero) no es otro que ver cómo se modifica el código ya que es más complejo crear la estructura y construir el mallado que en el caso anterior. Para

coef amplification = 20.3769

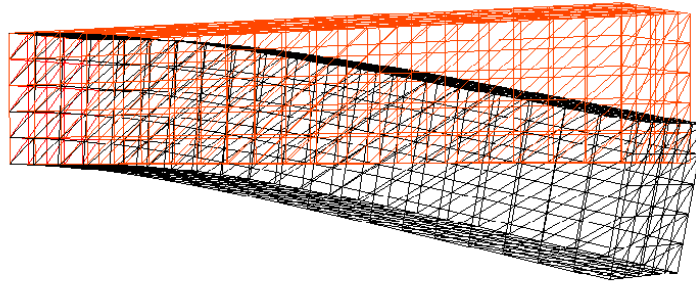


Figura 4.3: Viga en 3D

ello cargamos el código del cubo, obtenido de [18], definimos sus dimensiones y coordenadas y construimos la malla regular sobre la viga que se forma. Además, hay que cambiar las funciones añadiendo una más correspondiente a la tercera dimensión. El resultado que se obtiene al ejecutarlo es el mostrado en la Figura 4.3.

## Capítulo 5

# Ecuación de Difusión- Convección-Reacción

La gran complejidad de ecuaciones de transporte, entre ellas las ecuaciones de Euler (fluidos perfectos) y de Navier-Stokes (viscosos incompresibles), ha provocado que desde principios de siglo XX el tratamiento de este tipo de ecuaciones haya sido un tema de permanente estudio en el Análisis Matemático y en el Análisis Numérico debido a la incapacidad de los métodos analíticos de obtener una solución cerrada. Desde el punto de vista arquitectónico, la *ecuación de difusión-convección* constituye una aproximación formal a la dinámica de los flujos (calor, aire...) en el interior/exterior de los espacios. Es por esto por lo que en este capítulo se modelará dicha ecuación, y se aplicarán los métodos de Petrov-Galerkin y Galerkin ya estudiados para prepararla para la búsqueda de una solución numérica.

### 5.1. Introducción al Problema

En esta sección trataremos a la ecuación del calor desde el punto de vista físico. Realizaremos tanto la modelización del problema partiendo de leyes naturales como el tratamiento físico de la conducción del calor en sólidos cristalinos.

#### 5.1.1. Modelización del Problema

A continuación, realizaremos una modelización de la ecuación del calor huyendo en todo momento de la formalidad que a las Matemáticas caracteriza, ya que

no anhelamos más que un acercamiento físico al comportamiento del calor en un medio. El modelado de la ecuación del calor se basa en una aproximación partiendo de una Ley de Conservación. Permítenos el lector que cometamos un abuso del lenguaje al escribir *calor contenido* en un sólido para referirnos al proceso de transferencia de calor en un sólido, siendo la energía térmica la magnitud que realmente se posee. En todo momento obviaremos la radiación como proceso de transferencia calorífica, considerando únicamente difusión y convección.

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un dominio para algún  $d \in \mathbb{N}$ . Generalmente se tomará  $d = 4$ , que significará que estamos considerando un volumen y la evolución temporal del calor en él. Así construiremos nuestro modelo, suponiendo que  $\Omega = V \times S$ ,  $V \subset \mathbb{R}^{d-1}$  y  $S \subset \mathbb{R}$ . Partimos de la hipótesis de que el calor contenido en un sólido o fluido por unidad de volumen puede modelarse por:

$$H : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto H(x, t) = \sigma(x, t)c(x, t)T(x, t)$$

y donde:

- $x \in V$  y  $t \in S$  son las variables espacial y temporal respectivamente.
- $\sigma(x, t)$  es la densidad volumétrica del sistema donde se transporta.
- $c(x, t)$  es el calor específico del material.
- $T(x, t)$  es la temperatura.

**Observación 5.1.** *Es trivial ver que el calor total,  $N$ , contenido en el sistema viene dado por:*

$$N : S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto N(t) = \int_V H(x, t) dV. \quad (5.1)$$

**Definición 5.1.** (*Flujo*) *Se denomina como flujo  $\vec{q}$  a la cantidad de una determinada magnitud que atraviesa una superficie por unidad de tiempo, y tiene como dirección la de la normal a la superficie.*

**Proposición 5.1.** *El flujo calorífico en un sólido viene dado por la expresión:*

$$\overrightarrow{q(x, T)} = -\kappa(x, t)\nabla T = \overleftarrow{q(x, t)},$$

donde  $\kappa(x, T) > 0$  se refiere a la conductividad térmica del material.

**Observación 5.2.** *La única forma de transferencia de calor en un sólido es la difusión, ya que basándonos en la Teoría Cinético Molecular, las partículas que conforman al sólido tienen como único grado de libertad la oscilación entorno a una posición de equilibrio.*

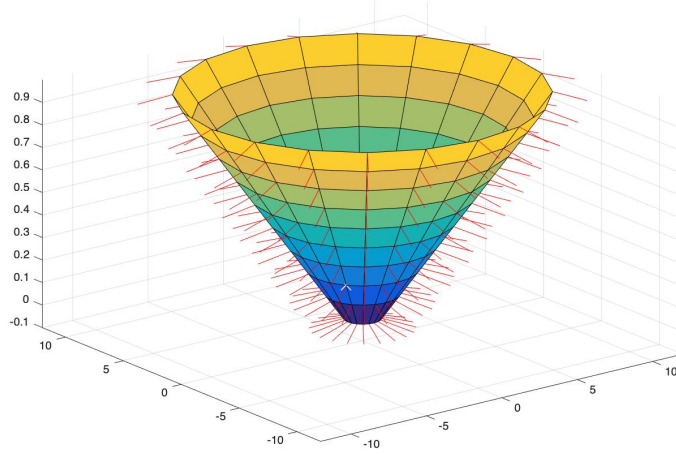


Figura 5.1: Normales a la superficie del cono

**Observación 5.3.** Dado que  $\overrightarrow{q(x, T)} = \overrightarrow{q(x, t)}$ , al ser  $T = T(x, t)$ , para aliviar notación voy a escribir a partir de ahora  $q(x, t)$ . Por el mismo motivo, evitaremos escribir el argumento de las funciones en ciertos momentos que puedan sobreentenderse.

**Proposición 5.2.** El flujo calorífico de un líquido viene dado por la expresión:

$$\vec{q}(x, t) = \vec{q}(x, t)_{dif} + \vec{q}(x, t)_{conv} = -\kappa(x, t)\nabla T(x, t) + H(x, t)\vec{\beta}(x, t)$$

donde  $\vec{\beta}(x, t)$  se refiere a la velocidad de convección del fluido.

**Observación 5.4.** De acuerdo a la Teoría Cinético Molecular, las partículas que conforman al líquido están unidas entre ellas por fuerzas de cohesión más débiles que en el caso de los sólidos. Es por esto por lo que las moléculas de los líquidos, aparte de vibrar, pueden desplazarse relativamente. Tenemos, por tanto, dos formas de transferencia de calor: la difusión y la convección.

**Proposición 5.3.** Sea  $\vec{q}$  el flujo de la magnitud  $H$ ,  $\vec{n}$  el vector normal a  $\partial V$  y  $f \in C^0(\Omega)$  las fuentes o sumideros de campo por unidad de volumen. Se tiene entonces que la variación temporal de la cantidad total de calor  $N(t)$  puede expresarse como:

$$N'(t) = \int_{\Gamma} -\vec{q} \cdot \vec{n} \, d\Gamma + \int_V f \, dV, \quad (5.2)$$

donde  $\Gamma$  se refiere a la frontera de  $V$  que ha de ser de tipo  $C^1$ . Además, se exige la regularidad de  $H \in C^1(\Omega)$  para que lo anterior tenga sentido.

**Observación 5.5.** El producto  $\vec{q} \cdot \vec{n}$  sale hacia afuera del volumen, por lo que ha de contribuir negativamente a la cantidad de calor contenido. Esto justifica la elección del signo negativo. Este integrando modela la cantidad de calor que atraviesa la superficie que encierra al volumen.

**Proposición 5.4.** Supongamos que  $H, q$  y  $f$  son funciones con regularidad  $C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  y que  $\Gamma$  es de tipo  $C^1$ . Entonces, la variación temporal del calor total contenido en el volumen  $V$  viene dada por:

$$N'(t) = - \int_V (\nabla \vec{q} - f) dV. \quad (5.3)$$

*Demostración.* La prueba es consecuencia directa de aplicar a (5.2) la Fórmula de Green.

$$N'(t) = \int_{\Gamma} -\vec{q} \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_V f dV = - \int_V \nabla \vec{q} dV + \int_V f dV = - \int_V (\nabla \vec{q} - f) dV.$$

■

Por otra parte, de derivar (5.1) se obtiene que:

$$N'(t) = \frac{d}{dt} \int_V H(x, t) dV = \int_V \frac{\partial H(x, t)}{\partial t} dV,$$

que igualando con (5.3) se llega a:

$$\int_V \left( \frac{\partial H(x, t)}{\partial t} + \nabla \vec{q}(x, t) - f(x, t) \right) dV = 0.$$

Dado que  $\frac{\partial H(x, t)}{\partial t} + \nabla \vec{q}(x, t) - f(x, t) \in L^1(\Omega)$ , se tiene que  $\frac{\partial H(x, t)}{\partial t} + \nabla \vec{q}(x, t) - f(x, t) = 0$  e.c.t.  $\Omega$ . Esta ecuación de continuidad constituye una **Ley General de Conservación**:

$$\frac{\partial H(x, t)}{\partial t} + \nabla \vec{q}(x, t) = f(x, t).$$

El proceso de difusión de calor en un sólido viene entonces dado por:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sigma(x, t)c(x, t)T(x, t)) - \nabla(\kappa(x, t)\nabla T(x, t)) = f(x, t). \quad (5.4)$$

Si tratamos con **materiales homogéneos** en los que sus propiedades de  $\kappa(x, t)$ ,  $c(x, t)$  y  $\sigma(x, t)$  son constantes con respecto al punto material, llegamos a que la ecuación que modela el proceso de difusión se puede expresar como:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \tilde{\kappa} \nabla^2 T(x, t) = g(x, t), \quad (5.5)$$

donde  $\tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{\sigma c}$  y  $g(x, t) = \frac{1}{\sigma c} f(x, t)$ .

Para obtener la ecuación equivalente para el caso de los fluidos, basta tener en cuenta la forma del flujo dada en la Proposición 5.2. En este caso, **la ecuación que modela la convección-difusión en un fluido homogéneo** viene dada por:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (T(x, t) \overrightarrow{\beta(x, t)}) - \nabla \cdot (\kappa(x, t) \nabla T(x, t)) = f(x, t). \quad (5.6)$$

**Observación 5.6.** Tanto la ecuación de difusión en sólidos como la de convección-difusión en fluidos son ecuaciones elípticas, para las que se puede hacer un estudio temporal o estacionario anulando el término correspondiente a la derivada temporal de la temperatura.

### 5.1.2. Justificación física de transmisión del calor en sólidos

Este apartado es para comentar brevemente cómo se estudia en Física un determinado tipo de los sólidos en cuanto a su capacidad de transmitir el calor.

Nos referimos a materia condensada a aquella caracterizada por el hecho de que la distancia media entre las entidades que la forma es de aproximadamente  $1 \text{ \AA}$ . Lo que determina si un material es sólido o líquido es la energía cinética  $T$  en relación a la energía potencial  $U$  que mantiene cohesionados a los constituyentes de la materia.

- **Líquidos**,  $T \approx U$ . Las partículas se mueven sin perder el contacto unas con otras pero sin la capacidad de mantenerse en una determinada posición. El hecho de que se observen ciertos grados de orden está relacionado con el morfismo de las partículas.
- **Sólidos**,  $T < U$ . Las partículas vibran respecto a una posición fija. La nula capacidad de desplazamiento relativo entre los entes que conforman al sólido provocan que sea más fácil encontrar estructuras con un elevado grado de orden. En cuanto a esto, podemos clasificar los sólidos en:
  1. Sólidos cristalinos. Son sólidos cuya estructura atómica se basa en la repetición de un patrón denominado: el retículo, formando las redes

de Bravais. Presentan, como es natural, alta simetría y orden de largo alcance.

2. Sólidos amorfos. Tienen un orden de corto alcance, con proceso de solidificación rápido y calor latente inexistente.

Nos centramos particularmente en los sólidos cristalinos.

Los átomos de los sólidos cristalinos a temperaturas superiores al cero absoluto ( $0K$ ) están unidos a posiciones de equilibrio en torno a las cuales oscilan como consecuencia de tener cierta energía térmica. Debido a que los átomos están unidos a enlaces, las vibraciones se propagan por la red cristalina en forma de ondas elásticas. El tratamiento cuántico de las vibraciones reticulares nos lleva a la necesidad de tener un ente corpuscular que satisfaga la dualidad onda-corpúsculo para estos paquetes de ondas elásticas. Nace así el concepto de fonón, que tiene un papel esencial en la descripción de numerosas propiedades físicas, especialmente las térmicas y las eléctricas.

En un sólido aislante, la temperatura se transmite únicamente a través de las vibraciones reticulares. Si el sólido es conductor, habría que considerar la contribución al desplazamiento electrónico por agitación térmica. En por esto, por lo que en los sólidos el concepto de fonón es esencial. En Física, la propagación de los fonones en su la red se modela con la teoría cinética de los gases, quedando la conductividad:

$$\kappa = \frac{1}{3}c_V v l, \quad (5.7)$$

donde  $c_V$  se refiere al calor específico a volumen constante,  $v$  a la velocidad de propagación de los fonones que es aproximadamente la velocidad del sonido en el medio y  $l$  al recorrido libre medio entre colisiones.

Dado que  $v$  puede considerarse constante, la dependencia de  $\kappa$  con  $T$  reside en los términos de  $c_V$  y  $l$ .

Para explicar la dependencia del calor específico  $c_V$  con la temperatura  $T$  existen numerosos modelos que funcionan mejor o peor en función del rango de temperaturas que estemos analizando. Quizás, una de las mejores aproximaciones teóricas a este comportamiento físico sea el Modelo de Debye ver [21]. Este modelo muestra una dependencia de  $c_V$  con altas y bajas temperaturas, muy parecido que en lo que en el laboratorio de forma experimental se obtiene. La premisa básica que asume es que la distribución de frecuencias en el sólido sigue la distribución de un sólido continuo homogéneo y, con un tratamiento propio de física estadística, este modelo establece que el calor específico en un sólido cristalino cumple la siguiente ecuación:

$$C_V \approx \frac{12\pi^4}{5} N r k_B \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3. \quad (5.8)$$

donde  $N$  se refiere al número de celdas unidad,  $r$  al número de átomos por celda unidad,  $k_B$  es la constante de Boltzman,  $T$  es la temperatura y  $\theta_D$  es la temperatura de Debye [21].

Por su parte, la dependencia de  $l$  con  $T$  puede explicarse cuando consideramos



los térmicos anarmónicos del potencial de interacción entre los constituyentes del sólido. En concreto, hay que considerar procesos de interacción fonónica de tipo  $U$ , que (como idea general) son procesos en los que la energía de los fonones incidentes es alta y, como resultado cambian su sentido de propagación y se crea una resistencia que afecta a la conductividad térmica del sólido. Este modelo demuestra que a altas temperaturas, se tiene:

$$l \propto \frac{1}{T}, \quad (5.9)$$

y a bajas temperaturas

$$l \propto \exp\left(\frac{\theta_D}{T}\right). \quad (5.10)$$

Cuando los sólidos cristalinos son conductores eléctricos, hay que tener en

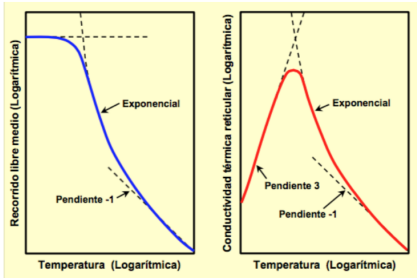


Figura 5.2: Teoría de Debye

cuenta la contribución a la conductividad térmica del término relativo al calor transportado por los electrones de conducción. Para obtener la expresión de  $\kappa$  se utiliza el modelo de Sommerfeld y la distribución fermiónica que siguen los electrones por tener espín semientero. Se llega a:

$$\kappa = \frac{\pi^2 n k_B^2 \tau_F T}{3m}, \quad (5.11)$$

donde los términos que no aparecen en la  $\kappa$  de vibraciones reticulares son  $\tau_F$  que es la temperatura de Fermi,  $n$  la densidad de electrones de conducción y  $m$  su masa. Además, en los metales, de acuerdo a la **Ley de Wiedemann-Franz** el cociente entre conductividad eléctrica y térmica a una temperatura absoluta fijada es aproximadamente constante para todos ellos, implicando en particular que ambas conductividades son proporcionales para cada metal. De acuerdo a la Teoría de Bandas, los metales son conductores. En los conductores, la banda de conducción y de valencia solapan, de forma que los electrones del último orbital (o los últimos dependiendo del solapamiento), quedan en la capa de conducción, significando esto que la energía potencial debida al núcleo atómico se apantalla con la energía cinética debido a la movilidad que tienen en esta capa. Una alta movilidad electrónica indica una alta capacidad de conducción de corriente. Para el lector interesado, consultar [21].

## 5.2. Planteamiento del Problema

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un dominio Lipschitz y  $\mathcal{L}$  el operador asociado a la ecuación (5.6) estacionaria, habiendo hecho  $T = u$  y habiendo añadido un último término  $\mu u$  correspondiente a la posible reacción dentro del sistema:

$$\mathcal{L}u = -\nabla \cdot (\sigma \cdot \nabla u) + \beta \cdot \nabla u + \mu u \quad (5.12)$$

donde  $\sigma$ ,  $\beta$  y  $\mu$  son funciones definidas sobre  $\Omega$  y toman sus valores en  $\mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $\mathbb{R}^d$  y  $\mathbb{R}$  respectivamente. En concreto se exige la siguiente regularidad a los datos:  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\sigma \in [L^\infty(\Omega)]^{d,d}$ ,  $\beta \in [L^\infty(\Omega)]^d$ ,  $\nabla \beta \in [L^\infty(\Omega)]^d$  y  $\mu \in [L^\infty(\Omega)]$ .

**Observación 5.7.** *Pese a que el término de reacción aparece a la hora de modelar procesos químicos y no arquitectónicos (por eso en el modelado de la ecuación del calor no nos aparecía), hemos decidido introducir la formulación completa de la ecuación para poder realizar un estudio más global.*

Podemos, además, modelar la versión de evolución temporal de (5.12) sin más que añadir un término  $\partial_t u$ :

$$\partial_t u + \mathcal{L}u = f, \quad (5.13)$$

donde hemos anulado el término reactivo de  $\mathcal{L}$ , es decir:

$$\mathcal{L}u = -\nabla \cdot (\sigma \cdot \nabla u) + \beta \cdot \nabla u$$

La discretización temporal de este problema se realiza mediante el método de Euler implícito, es decir:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \mathcal{L}u^{n+1} = f^{n+1}. \quad (5.14)$$

Despejando  $u^{n+1}$ , ésta satisface la ecuación  $\mathcal{L}u^{n+1} + \frac{1}{\Delta t}u^{n+1} = f^{n+1}$ , que es justamente una ecuación en la que interviene el operador  $\mathcal{L}$  definido por (5.12), con  $\mu = 1/\Delta t$ .

Asumiremos que el operador  $\mathcal{L}$  es *elíptico* en el siguiente sentido.

**Definición 5.2.** *El operador  $\mathcal{L}$  se dirá que es **elíptico** si  $\exists \sigma_0 > 0$  tal que*

$$\forall \chi \in \mathbb{R}^d, \quad \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij} \chi_i \chi_j \geq \sigma_0 \|\chi\|_d^2. \quad (5.15)$$

Tomando ahora  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , considérese el siguiente problema:

$$\text{CDR} \begin{cases} \text{Hallar } u \text{ tal que} \\ \mathcal{L}u = f, & \text{en } \Omega \\ \mathcal{B}u = g & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

El problema CDR (Convectivo-Difusivo-Reactivo), modela la dinámica de un soluto  $u$  en su transporte por un flujo de campo  $\beta$  (*proceso de convección*). Por su parte, la matriz  $\sigma$  representa la difusión del soluto debido o bien a la difusión molecular o a la mezcla en el régimen turbulento del propio fluido. La producción o destrucción del soluto mediante reacciones químicas viene modelado por el término  $\mu u$ .

**Observación 5.8.** *Por el interés arquitectónico que nos concierne, es importante resaltar que el problema anterior también modela el **proceso de transferencia de calor**. En este caso,  $u$  es la temperatura,  $\sigma = \kappa \mathcal{I}$ ,  $\beta$  flujo de campo,  $\mu = 0$  y  $f$  las fuentes de calor externas por unidad de volumen.*

Se va a analizar ahora la formulación variacional de tres casos del problema anterior en función del tipo de condiciones de contorno que ofrezca la matriz  $\mathcal{B}$ .

1. **Condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas:**

Que las condiciones de contorno sean homogéneas, implica que  $u = 0$  en  $\partial\Omega$ . Ahora, multiplicamos por una función test  $v$  lo suficientemente regular y que se anule en la frontera, integramos en  $\Omega$  y aplicamos la fórmula de Green para obtener:

$$\int_{\Omega} -\nabla \cdot (\sigma \cdot \nabla u) = \int_{\Omega} \nabla v^t \cdot \sigma \cdot \nabla u - \int_{\partial\Omega} v(n \cdot \sigma \cdot \nabla u), \quad (5.16)$$

donde el segundo término del segundo miembro se anula por condiciones de contorno sobre  $v$ . Finalmente, integrando y sustituyendo lo anterior queda:

$$\int_{\Omega} (\nabla v^t \cdot \sigma \cdot \nabla u + v\beta \cdot \nabla u + \mu uv) = \int_{\Omega} fv.$$

Una posible exigencia para  $u$  es  $u \in H^1(\Omega)$  y por la condición de contorno  $u|_{\partial\Omega} = 0$ , elegimos  $V = W = H_0^1(\Omega)$ . Finalmente, llegamos a la formulación débil del problema CDR homogéneo (CDR.H).

$$\text{CDR.H} \begin{cases} \text{Hallar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ a_{\sigma,\beta,\mu}(u, v) = \int_{\Omega} fv, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

donde,  $a_{\sigma,\beta,\mu}$  es una forma bilineal tal que:

$$a_{\sigma,\beta,\mu}(u, v) = \int_{\Omega} \nabla v^t \cdot \sigma \cdot \nabla u + v(\beta \cdot \nabla u) + \mu uv. \quad (5.17)$$

En el siguiente resultado se muestra que si  $u$  es solución del problema CDR.H, efectivamente resuelve también el problema en  $\Omega$ .

**Proposición 5.5.** *Si  $u$  es tal que resuelve el problema CDR.H, entonces  $\mathcal{L}u = f$  en  $\Omega$  y  $u = 0$  en  $\delta\Omega$ .*

*Demostración.* Sea  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  una función test. Dado que  $u \in H^1(\Omega)$ , el término correspondiente a la derivada segunda sólo tiene sentido como distribución. Es por esto por lo que la tratamos como tal:

$$\langle \nabla \cdot (\sigma \cdot \nabla u), \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = - \langle \sigma \cdot \nabla u, \nabla \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \text{ de donde } \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \sigma \cdot \nabla u = \int_{\Omega} (f - \beta \cdot \nabla u - \mu u) \varphi,$$

donde se ha usado CDR.H con  $v = \varphi$ . Finalmente deducimos que  $\langle \mathcal{L}u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \int_{\Omega} f \varphi$ , y debido a que  $\mathcal{D}(\Omega)$  es denso en  $L^2(\Omega)$ , se tiene que  $\mathcal{L}u = f$  en  $L^2(\Omega)$ . Lo que lleva a que finalmente tenemos que  $\mathcal{L}u = f$  en  $\Omega$  y  $u = 0$  en  $\delta\Omega$  al ser  $u \in H_0^1(\Omega)$ . |

## 2. Condiciones de contorno de Dirichlet no homogéneas:

Sea  $g : \delta\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que  $u = g$  en  $\delta\Omega$ . Asíumase que  $\exists u_g \in H^1(\Omega)$  tal que  $u_g = g$  en  $\delta\Omega$ , a la que llamaremos *función de levantamiento*. El problema CDR con condiciones de Dirichlet no homogéneas en su formulación débil se presenta como:

$$\text{CDR.NH} \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u \in H^1(\Omega) \text{ tal que} \\ u = u_g + \phi, \quad \phi \in H_0^1(\Omega) \\ a_{\sigma, \beta, \mu}(\phi, v) = \int_{\Omega} f v - a_{\sigma, \beta, \mu}(u_g, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

De nuevo, veamos que si  $u$  resuelve CDR.NH, entonces  $u$  es solución del problema de Dirichlet no homogéneo para la EDP que tratamos.

| **Proposición 5.6.** *Sea  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\delta\Omega)$ . Si  $u$  resuelve CDR.NH, entonces  $\mathcal{L}u = f$  a.e. en  $\Omega$  y  $u = g$  en  $\delta\Omega$ .*

*Demostración.* La demostración es similar a la del caso homogéneo sin más que considerar la función  $\phi = u - u_g$ . Demostrar que  $u|_{\partial\Omega} = g$  es directamente consecuencia de que  $\tau u = \tau u_g + \tau \phi = g$ , con  $\tau$  el operador traza. |

## 3. Condiciones de contorno de Neumann:

Sea  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que  $n \cdot \sigma \cdot \nabla u = g$  en  $\partial\Omega$ . Nótese que si  $\sigma = \mathcal{I}$ , entonces  $n \cdot \nabla u = \partial_n u$ . Procediendo igual que previamente, tenemos que la EDP con la que trabajamos con condiciones de contorno tipo Neumann puede formularse débilmente como:

$$\text{CDR.N} \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u \in H^1(\Omega) \text{ tal que} \\ a_{\sigma, \beta, \mu}(u, v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\delta\Omega} g v, \quad v \in H^1(\Omega). \end{array} \right.$$

**Proposición 5.7.** Sea  $g \in L^2(\delta\Omega)$ . Si  $u$  es tal que resuelve el problema CDR.N, entonces  $\mathcal{L}u = f$  a.e. en  $\Omega$  y  $n \cdot \sigma \cdot \nabla u = g$  a.e. en  $\partial\Omega$ .

*Demostración.* Tomemos las funciones test en  $\mathcal{D}(\Omega)$ , lo que implica rápidamente que  $\mathcal{L}u = f$  a.e. en  $\Omega$ . Tenemos entonces que  $-\nabla \cdot (\sigma \cdot \nabla u) \in L^2(\Omega)$  a.e. en  $\delta\Omega$ , lo que la Fórmula de Green [16] implica que  $n \cdot \sigma \nabla u \in H^{\frac{1}{2}}(\delta\Omega)' = H^{-\frac{1}{2}}(\delta\Omega)$ , dado que:

$$\forall \phi \in H^{\frac{1}{2}}(\delta\Omega), \quad \langle n \cdot \sigma \cdot \nabla u, \phi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}} = \int_{\Omega} -\nabla \cdot (\sigma \cdot \nabla u) u_{\phi} + \int_{\Omega} \nabla u_{\phi} \cdot \sigma \nabla u,$$

donde  $u_{\phi} \in H^1(\Omega)$ , es una función de levantamiento de  $\phi$  en  $H^1(\Omega)$ . Esta expresión viene de integrar por partes. Si  $u$  fuese regular el término de la izquierda sería una integral de borde en sentido habitual. En nuestro caso no es así, pero sí que define una aplicación lineal y continua sobre las funciones  $\phi$  que sean trazas sobre  $\partial\Omega$  de funciones de  $H^1(\Omega)$ , y este espacio es justamente  $H^{1/2}(\Omega)$ . Por tanto  $n \cdot \sigma \nabla u$  define un elemento del dual de  $H^{1/2}(\Omega)$ , que es justamente  $H^{-1/2}(\Omega)$ . Finalmente tenemos que el problema CDR.N conduce a:

$$\forall \phi \in H^{\frac{1}{2}}(\delta\Omega), \quad \langle n \cdot \sigma \cdot \nabla u, \phi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}} = \int_{\delta\Omega} g \phi,$$

demostrando que  $n \cdot \sigma \cdot \nabla u = g$  en  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  y, por lo tanto, en  $L^2(\delta\Omega)$  dado que  $g$  pertenece a dicho espacio. |

Haciendo uso del *Teorema de Lax-Milgram* (Teorema 2.1), vamos a analizar las condiciones suficientes para que los problemas anteriores estén bien definidos. Como la formulación abstracta la hemos escrito sobre espacios de Hilbert, para que se satisfazan las condiciones del Teorema basta ver qué necesitamos para tener coercitividad.

**Definición 5.3.** (*Ínfimo esencial*) Definiremos como *ínfimo esencial* de  $\mu - 1/2\nabla\beta$  al supremo (respecto a todas las funciones que son iguales c.p.d. a  $\mu - 1/2\nabla\beta$ ) del *ínfimo* de cada una de estas funciones.

**Teorema 5.1.** Sea  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\sigma \in [L^{\infty}(\Omega)]^{d,d}$  elíptico,  $\beta \in [L^{\infty}(\Omega)]^d$  con  $\nabla\beta \in L^{\infty}(\Omega)$ , y  $\mu \in L^{\infty}(\Omega)$ . Sea, además,  $p = \inf_{x \in \Omega} \text{ess}(\mu - \frac{1}{2}\nabla\beta)$  y  $c_{\Omega}$  la constante en la desigualdad de Poincaré.

1. Los problemas de Dirichlet homogéneo y no homogéneo están bien definidos si se satisface:

$$\sigma_0 + \min(0, pc_{\Omega}) > 0. \quad (5.18)$$

2. El problema de Neumann está bien definido si

$$p > 0 \quad \text{y} \quad \inf_{x \in \delta\Omega} \text{ess}(\beta n) \geq 0. \quad (5.19)$$

*Demostración.*

1. Como consecuencia de la fórmula de la divergencia, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(\beta \cdot \nabla u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \beta \cdot \nabla u^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\beta u^2) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) u^2 = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n) u^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) u^2. \end{aligned}$$

Además,  $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$a_{\sigma, \beta, \mu}(u, u) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \sigma \cdot \nabla u + u(\beta \cdot \nabla u) + \mu u^2 \geq \sigma_0 |u|_{1, \Omega}^2 + p \|u\|_{0, \Omega}^2.$$

Si  $p > 0$ , entonces ya se tiene la coercitividad de  $a_{\sigma, \beta, \mu}$  sin más que tomar  $\min(0, pc_{\Omega}) = 0$ .

Analizamos el caso en el que  $p < 0$ . Haciendo uso de la Desigualdad de Poincaré (Proposición A.11):

$$\|u\|_{0, \Omega}^2 \leq c_{\Omega} \|\nabla u\|_{0, \Omega}^2 \implies \|u\|_{0, \Omega}^2 p \geq c_{\Omega} \|\nabla u\|_{0, \Omega}^2 p.$$

Sumando en ambos términos  $\sigma_0 \|\nabla u\|_{0, \Omega}^2$  llegamos a:

$$\|u\|_{0, \Omega}^2 p + \sigma_0 \|\nabla u\|_{0, \Omega}^2 \geq (pc_{\Omega} + \sigma_0) \|\nabla u\|_{0, \Omega}^2$$

que inmediatamente nos lleva a la condición de que  $pc_{\Omega} + \sigma_0 > 0$ .

2. Para el caso de condiciones de Neumann tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(\beta \cdot \nabla u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \beta \cdot \nabla u^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\beta u^2) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) u^2 = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n) u^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) u^2 \end{aligned}$$

y

$$a_{\sigma, \beta, \mu}(u, u) \geq \sigma_0 \|\nabla u\|_{0, \Omega}^2 + \frac{1}{2} \inf_{x \in \partial\Omega} \text{ess}(\beta n) \int_{\partial\Omega} u^2 + p \|u\|_{0, \Omega}^2.$$

Llegamos finalmente a las condiciones  $p > 0$  y  $\inf_{x \in \partial\Omega} \text{ess}(\beta n) \geq 0$ .

■

### 5.3. Discretización del Problema

En esta sección vamos a aplicar distintos métodos de EF para aproximar el problema. Supongamos que se cumplen las hipótesis del Teorema 5.1 que recordemos, nos aseguran el buen planteamiento del problema. Denotaremos como  $u$  a la única solución al problema variacional.

### 5.3.1. La Aproximación Conforme $H^1(\Omega)$

Por simplicidad en lo que sigue, asumamos que  $\Omega$  es un poliedro en  $\mathbb{R}^d$ . Sea  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  una familia de mallados de  $\Omega$ , y  $\{\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}\}$  un Elemento Finito de Lagrange de referencia con grado  $k \geq 1$ . Recuérdese que hemos visto que salvo el problema de Dirichlet no homogéneo que analizaremos más adelante, los problemas que hemos tratados y a los que le realizamos una aproximación conforme tienen la forma:

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in V \text{ tal que} \\ a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V, \end{cases}$$

con  $H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$ , concretamente el problema de Dirichlet homogéneo:

$$\text{CDR.H} \begin{cases} \text{Hallar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ a_{\sigma, \beta, \mu}(u, v) = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

y el problema con condiciones tipo Neumann:

$$\text{CDR.N} \begin{cases} \text{Hallar } u \in H^1(\Omega) \text{ tal que} \\ a_{\sigma, \beta, \mu}(u, v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\delta\Omega} g v, \quad v \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

donde recuérdese que  $a_{\sigma, \beta, \mu}$  tenía la forma dada en (5.17).

Sea  $L_{c,h}^k$  el espacio aproximado  $H^1$  conforme definido por:

$$L_{c,h}^k = \left\{ v_h \in C^0(\bar{\Omega}); \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h \circ T_K \in \hat{P} \right\}. \quad (5.20)$$

De hecho, dependiendo del tipo de Elemento Finito que se use ( $P_{c,h}^k$  o  $Q_{c,h}^k$ ),  $L_{c,h}^k$  puede ser  $\mathbb{P}_k$  o  $\mathbb{Q}_k$  respectivamente. A esto, hay que añadirle las condiciones de contorno que es equivalente a escribir:

$$V_h = V \cap L_{c,h}^k. \quad (5.21)$$

■ **Condiciones de tipo Dirichlet homogéneo:**

$$V_h = \{ v_h \in L_{c,h}^k; v_h = 0 \text{ sobre } \delta\Omega \}. \quad (5.22)$$

■ **Condiciones de tipo Neumann:**

$$V_h = L_{c,h}^k. \quad (5.23)$$

Dado que la aproximación es conforme no es necesario cambiar las formas  $a$  y  $f$  por sus formas aproximadas, ya que tiene perfecto sentido hablar de  $a(u_h, v_h)$  y  $f(v_h)$  al ser  $u_h \in V$  y  $v_h \in V$ . Teniendo en cuenta esto y las formas de  $V_h$  dadas previamente, considérese el siguiente problema aproximado:

$$\text{P}_{\text{aprox}} \begin{cases} \text{Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que} \\ a(u_h, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases}$$

En lo que sigue, nuestro objetivo será estimar el error  $u - u_h$  que se comete en esta aproximación utilizando diferentes normas.

**Teorema 5.2.** (*Estimación  $H^1$* ) Sea  $\Omega$  un poliedro en  $\mathbb{R}^d$  y  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  una familia regular de mallas conformes de  $\Omega$ . Sea  $V_h$  tal y como se define en (5.21). Se tiene entonces que  $\|u - u_h\|_{1,\Omega} = 0$ . Además, si  $u \in H^s(\Omega)$  con  $\frac{d}{2} < s \leq k+1$ ,  $\exists c > 0$  tal que:

$$\forall h, \quad \|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq ch^{s-1}|u|_{s,\Omega}. \quad (5.24)$$

*Demostración.* Para el lector interesado, consultar [16].

**Teorema 5.3.** (*Estimación  $L^2$* ) Dadas las hipótesis del Teorema 5.2, asúmase que  $V = H_0^1(\Omega)$ ,  $V_h = L^k \cap H_0^1(\Omega)$ , y que el problema  $P_{\text{aprox}}$  tiene propiedades de suavidad. Entonces,  $\exists c > 0$  tal que

$$\forall h, \quad \|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq ch|u - u_h|_{1,\Omega}. \quad (5.25)$$

*Demostración.* Para el lector interesado, consultar [16].

Para el caso del problema de Dirichlet no homogéneo, que recordemos tenía la forma:

$$\text{CDR.NH} \begin{cases} \text{Hallar } u \in H^1(\Omega) \text{ tal que} \\ a(u, v) = \int_{\Omega} f v, & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \gamma_0(u) = g, & \text{en } H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega). \end{cases}$$

con  $\gamma_0$  el operador traza que aparece definido en el Teorema A.11. Supongamos que el problema está bien planteado en  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  gracias a las condiciones ofrecidas en el Teorema de BNB (Teorema 2.5). Tomamos a  $V_h = L_{c,h}^k$  y  $N = \dim V_h$  con  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$  como base y  $\{a_1, \dots, a_N\}$  los nodos asociados. Por otra parte recordando que el interpolante de Lagrange de una función continua  $u$  en  $\Omega$  está definido por:

$$\mathcal{I}_h u = \sum_{i=1}^N u(a_i) \varphi_i, \quad (5.26)$$

tenemos que si  $g$  es una función continua en  $\partial\Omega$  entonces, ha de ser:

$$\mathcal{I}_h g = \sum_{a_i \in \partial\Omega} g(a_i) \gamma_0(\varphi_i). \quad (5.27)$$

Veamos que la traza del interpolante de una función suficientemente regular coincide con el interpolante de su traza. Dado que  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$  es una base nodal,

$$(a_i \notin \partial\Omega) \implies (\gamma_0(\varphi_i) = 0).$$



Por lo que si  $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \gamma_0(\mathcal{I}_h u) &= \gamma_0 \left( \sum_{i=1}^N u(a_i) \varphi_i \right) = \sum_{i=1}^N u(a_i) \gamma_0(\varphi_i) \\ &= \sum_{a_i \in \partial\Omega} u(a_i) \gamma_0(\varphi_i) = \mathcal{I}_h^\partial(\gamma_0(u)) \end{aligned} \quad (5.28)$$

y  $\gamma_0 \circ \mathcal{I}_h = \mathcal{I}_h^\partial \circ \gamma_0$ .

Considera el problema aproximado de CDR.NH:

$$\text{CDR.NH}_{\text{aprox}} \begin{cases} \text{Hallar } u_h \in V_h(\Omega) \text{ tal que} \\ a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h, & \forall v_h \in V_{h0} \\ \gamma_0(u_h) = \mathcal{I}_h^\partial g, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Con  $V_{h0} = \{v_h \in V_h, \gamma_0(v_h) = 0\} \subset H_0^1(\Omega)$  y asumiendo que la forma bilineal  $a$  satisface la condición  $BNB1_h$  de la Proposición 3.1 en  $V_{h0} \times V_{h0}$ .

**Proposición 5.8.** *Sea  $g$  una función lo suficientemente regular como para tener una función de levantamiento en  $C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ . En tales condiciones, el teorema  $CDR.NH_{\text{aprox}}$  está bien planteado.*

*Demostración.* Sea  $u_g$  el levantamiento de  $g$  en  $C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ . Claramente,

$$\gamma_0(\mathcal{I}_h u_g) = \mathcal{I}_h^\partial(\gamma_0(u_g)) = \mathcal{I}_h^\partial(g) = \gamma_0(u_h).$$

Así que,  $\theta_h = u_h - \mathcal{I}_h u_g$  nos lleva a  $\theta_h \in V_{h0}$  y  $a(\theta_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h - a(\mathcal{I}_h u_g, v_h)$  para todo  $v_h \in V_{h0}$ . Dado que  $a$  satisface  $BNB1_h$  en  $V_{h0} \times V_{h0}$ , el problema CDR.NH (aprox) está bien planteado. |

Una vez probado el buen planteamiento del problema  $CDR.NH_{\text{aprox}}$ , nuestro objetivo es estimar el error  $u - u_h$ . Para ello, enunciamos brevemente y sin deternos demasiado los siguientes resultados extraídos de [16].

**Lema 5.1.** *Sea  $g$  una función lo suficientemente regular como para tener una función de levantamiento en  $C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ , sea  $u$  una solución lo suficientemente regular para que su interpolador de Lagrange esté bien definido. Sea, además,  $\|a\| := \|a\|_{H^1(\Omega), H^1(\Omega)}$ . Se tiene entonces que:*

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \left( 1 + \frac{\|a\|}{a_h} \right) \|u - \mathcal{I}_h u\|_{1,\Omega}. \quad (5.29)$$

**Lema 5.2.** *Sean las condiciones del Lema 5.1, asúmase además que:*

- *El problema  $CDR.NH_{\text{aprox}}$  tiene propiedades de regularidad.*

- La forma bilineal  $a$  satisface la siguiente propiedad de continuidad:  $\exists c$  tal que,  $\forall v \in H^1(\Omega)$  y  $\forall w \in H^2(\Omega)$ ,

$$|a(v, w)| \leq c (\|v\|_{0,\Omega} + \|\gamma_0(v)\|_{0,\partial\Omega}) \|w\|_{2,\Omega}.$$

- Existe una constante de interpolación  $c > 0$  tal que:

$$\forall h, \forall \theta \in H^2(\Omega), \|\theta - \mathcal{I}_h \theta\|_{1,\Omega} \leq ch \|\theta\|_{2,\Omega}. \quad (5.30)$$

Existe entonces una constante  $c$  tal que:

$$\forall h, \quad \|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq c \left( h \|\mathcal{I}_h u - u\|_{1,\Omega} + \|\mathcal{I}_h u - u\|_{0,\Omega} + \|\mathcal{I}_h g - g\|_{0,\partial\Omega} \right). \quad (5.31)$$

**Corolario 5.1.** Sea  $\Omega$  un poliedro,  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  una familia regular de mallados conforme de  $\Omega$ , y  $V_h$  una aproximación conforme de  $H^1(\Omega)$  mediante EF de Lagrange de grado  $k \geq 1$ . Satisfechas las hipótesis del Lema 5.2 y  $u \in H^{K+1}(\Omega)$ . Entonces, se tiene que:

$$\forall h, \quad \|u - u_h\|_{0,\Omega} + h \|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq ch^{k+1} \|u\|_{k+1,\Omega}. \quad (5.32)$$

### 5.3.2. La Aproximación no Conforme Crouzeix-Raviart

El objetivo ahora es presentar una aproximación no conforme para la ecuación de convección-difusión. Vamos a realizar el análisis para el caso en el que únicamente hay difusión, lo que se traduce en trabajar con una forma bilineal que es un laplaciano. Es una simplificación importante en cuanto a lo que a facilitar al tratamiento del problema se refiere. Pero es real. Tenga el lector en cuenta que el mecanismo de transporte de calor en un sólido puede modelarse esencialmente por un laplaciano, ya que no existe transporte por convección en este caso. Bajo esta suposición, el operador  $\mathcal{L}$  dado en (5.12) queda como:

$$\mathcal{L}u = \sigma \Delta u.$$

En la expresión anterior también hemos supuesto que el coeficiente de conducción térmica  $\sigma$  es constante.

Vamos a hacer la aproximación usando EF de Crouzeix-Raviart. Para ello, consideremos  $\Omega$  un poliedro en  $\mathbb{R}^d$  y  $f \in L^2(\Omega)$ . Bajo estas condiciones, en concreto por ser todo poliedro un espacio convexo,  $u$  puede verse como función de  $H^2(\Omega)$  [16], siendo  $u$  solución al problema variacional siguiente:

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in V \text{ tal que} \\ a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

Consideremos  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  una familia de mallados de  $\Omega$  regular afín y conforme. Sea  $P_{\text{pt},h}^1$  el espacio de EF de Crouzeix-Raviart definido por:

$$P_{\text{pt},h}^1 = \left\{ v_h \in L^1(\Omega_h); \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathbb{P}_1 \right. \\ \left. \forall F \in \mathcal{F}_h^i, \int_F [v_h] = 0 \right\}. \quad (5.33)$$

Consideremos, además, el siguiente espacio:

$$P_{\text{pt},h,0}^1 = \left\{ v_h \in P_{\text{pt},h}^1; \forall F \in \mathcal{F}_h^\partial, \int_F v_h = 0 \right\},$$

donde  $\mathcal{F}_h^\partial$  denota el conjunto de caras del mallado que están sobre el contorno de  $\Omega$ . Es trivial que  $\dim P_{\text{pt},h,0}^1 = N_{\text{f}}^i$ , el número de caras internas (superficies en dos dimensiones) de la triangulación. Dado que las funciones de  $P_{\text{pt},h,0}^1$  pueden ser discontinuas,  $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$  hay que aplicarla a cada uno de los elementos por separado. Veámoslo:

$$\begin{cases} \text{Hallar } u_h \in P_{\text{pt},h,0}^1 \text{ tal que} \\ a_h(u_h, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in P_{\text{pt},h,0}^1 \end{cases},$$

donde  $a_h$  es la forma aproximada de  $a$ ,

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h \quad \text{y} \quad f(v_h) = \int_\Omega f v_h. \quad (5.34)$$

Por otra parte,  $V(h) = P_{\text{pt},h,0}^1 + H_0^1(\Omega)$  y para  $v_h \in V(h)$  se define la seminorma en  $H^1$ :

$$|v_h|_{h,1,\Omega} = \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla v_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Equipamos al espacio  $V(h)$  con la norma  $\|\cdot\|_{V(h)} = \|\cdot\|_{0,\Omega} + |\cdot|_{h,1,\Omega}$ . Nuestro objetivo es investigar la convergencia de solución al problema aproximado en norma  $\|\cdot\|_{V(h)}$ . Para ello, tenemos que mostrar la estabilidad, continuidad, consistencia y propiedades de proximidad vistas en el Capítulo 3. Para poder hablar de estabilidad, primero hay que probar la coercitividad de  $a_h$  en  $P_{\text{pt},h,0}^1$  que no es una propiedad trivial ya que  $P_{\text{pt},h,0}^1 \not\subset H_0^1(\Omega)$ . Todas las pruebas de los resultados que aparecen a continuación no se exponen en este texto debido a complejidad y extensión. Para el lector interesado, consultar [16]. Tenemos que extender la desigualdad de Poincaré a esta norma. Veámoslo en el siguiente lema.

**Lemma 5.3.** *Desigualdad de Poincaré extendida Existe  $c > 0$  dependiendo únicamente de  $\Omega$  tal que,  $\forall h \leq 1$ ,*

$$\forall u \in V(h), \quad c\|u\|_{0,\Omega} \leq |u|_{h,1,\Omega}. \quad (5.35)$$

**Lema 5.4.** Sea  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  una familia regular de mallas conformes y afines y  $m \geq 1$  un entero fijo. Para  $K \in \mathcal{T}_h$ ,  $\psi \in [H^1(K)]^m$  y una cara  $F \in \partial K$ , sea  $\bar{\psi} = \frac{1}{\text{meas}(F)} \int_F \psi$ . Entonces, existe  $c > 0$  tal que:

$$\forall h, \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall F \in \partial K, \forall \psi \in [H^1(K)]^m, \quad \|\psi - \bar{\psi}\|_{0,F} \leq ch_K^{\frac{1}{2}} |\psi|_{1,K}. \quad (5.36)$$

*Demostración.* Sea  $K \in \mathcal{T}_h$  y  $\psi \in [H^1(K)]^m$  y considera una cara  $F \in \partial K$  de la malla. Sea, además,  $\hat{K}$  ser el simplex de referencia y  $T_K : \hat{K} \rightarrow K$  la transformación afin con el Jacobiano  $J_K$ . Haciendo  $\hat{F} = T_K^{-1}(F)$ , es trivial ver que debido al Teorema de la Traza (INCLUIR REF) se tiene que:

$$\|\psi - \bar{\psi}\|_{0,F} \leq \left( \frac{\text{meas } F}{\text{meas } \hat{F}} \right)^{\frac{1}{2}} \|\hat{\psi} - \bar{\hat{\psi}}\|_{0,\hat{F}} \leq c \left( \frac{\text{meas } F}{\text{meas } \hat{F}} \right)^{\frac{1}{2}} \|\hat{\psi} - \bar{\hat{\psi}}\|_{1,\hat{K}}.$$

Del Teorema de Deny-Lions (ver [16]) se obtiene

$$\|\hat{\psi} - \bar{\hat{\psi}}\|_{1,\hat{K}} \leq c |\hat{\psi}|_{1,\hat{K}}.$$

Volviendo al elemento  $K$  y usando la regularidad de la malla finalizamos la prueba

$$\begin{aligned} \|\psi - \bar{\psi}\|_{0,F} &\leq c \left( \frac{\text{meas } F}{\text{meas } \hat{F}} \right)^{\frac{1}{2}} \|J_K^{-1}\|_d \left( \frac{\text{meas } \hat{K}}{\text{mas } K} \right)^{\frac{1}{2}} |\psi|_{1,K} \\ &\leq ch_K^{\frac{d-1}{2}} h_K h_K^{-\frac{d}{2}} |\psi|_{1,K} \leq ch_K^{\frac{1}{2}} |\psi|_{1,K}. \end{aligned}$$

■

**Corolario 5.2.** (*Estabilidad*) La forma bilineal  $a_h$  es coercitiva en  $P_{\text{pt},h,0}^1$  por simple aplicación de la Desigualdad de Poincaré extendida.

**Lema 5.5.** (*Consistencia asintótica*) Sea  $u$  solución al problema de Dirichlet homogéneo con  $f \in L^2(\Omega)$  y asúmase además que  $u \in H^2(\Omega)$ . Existe entonces  $c > 0$  tal que :

$$\forall h, \forall w_h \in P_{\text{pt},h,0}^1, \quad \frac{|f(w_h) - a_h(u, w_h)|}{\|w_h\|_{V(h)}} \leq ch|u|_{2,\Omega}. \quad (5.37)$$

*Demostración.* Sea  $w_h \in P_{\text{pt},h,0}^1$ . Dado que  $f = -\Delta u$ ,

$$a_h(u, w_h) - f(w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\nabla u \cdot \nabla w_h - f w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \partial K} \int_F \nabla u \cdot n_K w_h.$$

Dado que cada cara  $F$  del elemento  $K$  localizada en el interior de  $\Omega$  aparece doblemente en la suma, podemos restarle el valor medio de  $w_h$  en la cara, denotémoslo por  $\bar{w}_h$ . Si  $F$  está en  $\delta\Omega$  es claro ver que  $\bar{w}_h = 0$ . Así que:

$$a_h(u, w_h) - f(w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \partial K} \int_F \nabla u \cdot n_K (w_h - \bar{w}_h).$$

Podemos además restar de  $\nabla u$  su valor medio en la cara  $F$ ,  $\bar{\nabla} u$  llevándonos a:

$$a_h(u, w_h) - f(w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \partial K} \int_F (\nabla u - \bar{\nabla} u) \cdot n_K (w_h - \bar{w}_h).$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz implica:

$$|a_h(u, w_h) - f(w_h)| \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \partial K} \|\nabla u - \bar{\nabla} u\|_{0,F} \|w_h - \bar{w}_h\|_{0,F}$$

y aplicando el Lema 5.4, llegamos a:

$$\begin{aligned} |a_h(u, w_h) - f(w_h)| &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} ch_K^{\frac{1}{2}} |u|_{2,K} h_K^{\frac{1}{2}} |w_h|_{1,K} \\ &\leq ch \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |u|_{2,K}^2 \cdot \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |w_h|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq ch |u|_{2,\Omega} \|w_h\|_{V(h)}. \end{aligned}$$

■

■ **Lema 5.6. (Proximidad)** Existe una constante  $c > 0$  tal que:

$$\forall h, \forall u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad \inf_{v_h \in P_{pt,h,0}^1} \|u - v_h\|_{V(h)} \leq ch |u|_{2,\Omega}. \quad (5.38)$$

*Demostración.* Ver [16].

■

■ **Teorema 5.4. (Convergencia)** Bajo las condiciones del Lema anterior, existe  $c > 0$  tal que:

$$\forall h, \quad \|u - u_h\|_{V(h)} \leq ch |u|_{2,\Omega}. \quad (5.39)$$

■ **Teorema 5.5. (Estimación de error  $L^2$ )** Bajo las condiciones del teorema anterior, asúmase que el laplaciano tiene propiedades de regularidad en  $\Omega$ . Existe entonces  $c > 0$  tal que:

$$\forall h, \quad \|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq ch |u - u_h|_{h,1,\Omega}. \quad (5.40)$$

Luego, con los resultados anteriores hemos conseguido ver mediante la Desigualdad de Poincaré extendida que la forma bilineal es coercitiva, resultado que implica estabilidad. Además, si  $f \in L^2(\Omega)$  y  $u \in H^2(\Omega)$  nos aseguramos la consistencia asintótica. Mediante la proximidad vemos que el espacio  $V_h$  aproxima bien al espacio  $V$ . Finalmente, recordemos que tener consistencia y estabilidad nos asegura tener convergencia.

## 5.4. Implementaciones en FreeFem++

A continuación, vamos a realizar diferentes implementaciones de la ecuación de transporte. Por una parte, trataremos el caso de difusión pura, característico principalmente en el caso de los sólidos. Estudiaremos el caso difusivo para materiales con diferentes constantes térmicas, comparando los resultados que se obtienen. Por otra parte, estudiaremos un caso algo más real del comportamiento del calor en las paredes de una habitación con un radiador. En este caso, las paredes están compuestas con distintos materiales.

Como comentario, añadiremos que no se ha pretendido cubrir todos los casos antes expuestos en teoría, sólomente trazar los primeros pasos de la implementación de los casos más sencillos para afianzar el contenido estudiado y, al mismo tiempo, dar una visión más cotidiana de estas ecuaciones.

### 5.4.1. Primer Caso: Comparativa Materiales

El primer problema que queremos resolver es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\kappa \nabla u) \quad \text{en } (0, T) \times \Omega \\ u(\cdot, t = 0) = \theta \text{ en } \Omega, \\ \\ \frac{\partial u}{\partial n} = -1 \text{ sobre } (0, T) \times \Gamma_1 \\ \\ u = \theta \text{ sobre } [0, T) \times \Gamma_2, \end{array} \right.$$

donde  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$  y  $\theta$  es la temperatura inicial a la que se encuentra el sistema  $\Omega$ .

Si el material donde se produce la difusión es aire, el anterior podría ser la simplificación del caso de una habitación  $\Omega$  que se ha mantenido a una temperatura  $\theta$  y quitando la fuente que ha conseguido que la temperatura sea constante, se deja otra sobre  $\Gamma_2$  a temperatura  $\theta$  y quiere estudiarse como evoluciona la temperatura considerando las pérdidas que hay a través de la pared  $\Gamma_1$ . Suponiendo, además, que no hay transporte por convección o que es despreciable frente a la difusión. Esto podría darse en una habitación sin corrientes de aire, por ejemplo. Por los motivos arquitectónicos que conciernen a este trabajo, llamaremos

al sistema  $\Omega$  habitación y a  $\Gamma_2$  radiador, independientemente de si el material donde se produce la difusión es aire u otro diferente.

Mediante el Método de Euler podemos realizar la discretización temporal:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t^n} - \nabla \cdot (\kappa \nabla u^{n+1}) = 0. \quad (5.41)$$

Por su parte, para la discretización tenemos en cuenta que la frontera del recinto es, como se ha dicho previamente a la composición de dos fronteras diferentes:

- $\Gamma_1$  frontera del recinto donde se pierde temperatura.
- $\Gamma_2$  frontera interior a una temperatura constante de  $\theta$ .

Por otra parte, vamos a realizar una discretización del espacio de soluciones  $H^1(\Omega)$  con traza igual a  $\theta$  sobre  $\Gamma_2$ . Es decir, para cualquier  $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ , definimos el espacio:

$$V_g = \{v \in H^1(\Omega), v = g \text{ sobre } \Gamma_2\}. \quad (5.42)$$

Obsérvese que en nuestro caso tenemos  $V_\theta$ .

Por otra parte, para el espacio test, consideremos  $V_0$ .

Transformamos nuestro problema anterior a su formulación variacional. Para ello, multiplicamos por  $v \in V_0$ , aplicamos la fórmula de Green y las condiciones de contorno. Mediante el Teorema de Lax Milgram, se tiene que para cada  $u^{n+1}$  existe y es única. El problema abstracto queda como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u \in V_\theta \text{ tal que} \\ \frac{1}{\Delta t^n} \int_{\Omega} u^{n+1} v dx + \int_{\Omega} \kappa \nabla u^{n+1} \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_1} \kappa v d\sigma = \frac{1}{\Delta t^n} \int_{\Omega} u^n v dx, \quad \forall v \in V_0. \end{array} \right.$$

Discretizamos ahora los espacios mediante EF  $P^1$  de Lagrange, quedándonos ahora:

$$V^h = \{v^h \in H^1(\Omega^h), v^h \in C^0(\Omega^h), v^h|_K \in P^1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad (5.43)$$

$$V_g^h = \{v^h \in V^h, v^h = g^h \text{ sobre } \Gamma_2^h\} \text{ para } g^h \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2^h). \quad (5.44)$$

Finalmente, el problema discreto es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u^h \in V_\theta^h \text{ tal que} \\ \frac{1}{\Delta t^n} \int_{\Omega} u^{h,n+1} v^h dx + \int_{\Omega} \kappa \nabla u^{h,n+1} \cdot \nabla v^h dx + \int_{\Gamma_1} \kappa v^h d\sigma = \frac{1}{\Delta t^n} \int_{\Omega} u^{h,n} v^h dx, \end{array} \right.$$

$\forall v^h \in V_0^h$ . Obsérvese que el problema discreto también tiene solución y es única por aplicación del Teorema de Lax Milgram.

Hemos realizado el estudio para tres materiales bien diferentes en cuanto a su comportamiento difusivo:

- Madera de Roble, con  $\kappa = 0,17 \frac{W}{m \cdot ^\circ C}$ .
- Plata, con  $\kappa = 419 \frac{W}{m \cdot ^\circ C}$ .
- Aire, con  $\kappa = 0,024 \frac{W}{m \cdot ^\circ C}$ .

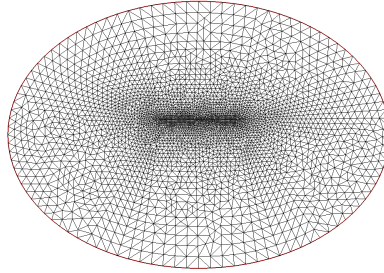


Figura 5.3: Mallado

Hemos elegido un recinto con forma elíptica y un radiador interno a temperatura  $\theta = 25^\circ C$ , que es a su vez la temperatura inicial del sistema. El mallado que realizamos en FreeFem++ sobre la habitación es el que indica la Figura 5.2. Obsérvese que para el entorno del radiador hemos elegido una densidad de EF mayor, lo que es totalmente lógico ya que en su entorno es donde habrá un cambio de temperaturas mayor. En el código,  $n$  y  $m$  se refieren justamente al número de EF y la malla se construye con el comando típico `buildmesh`. A continuación se muestran los resultados que se obtienen para cada material con un salto de tiempo  $dt = 1s$  desde  $t = 1s$ .



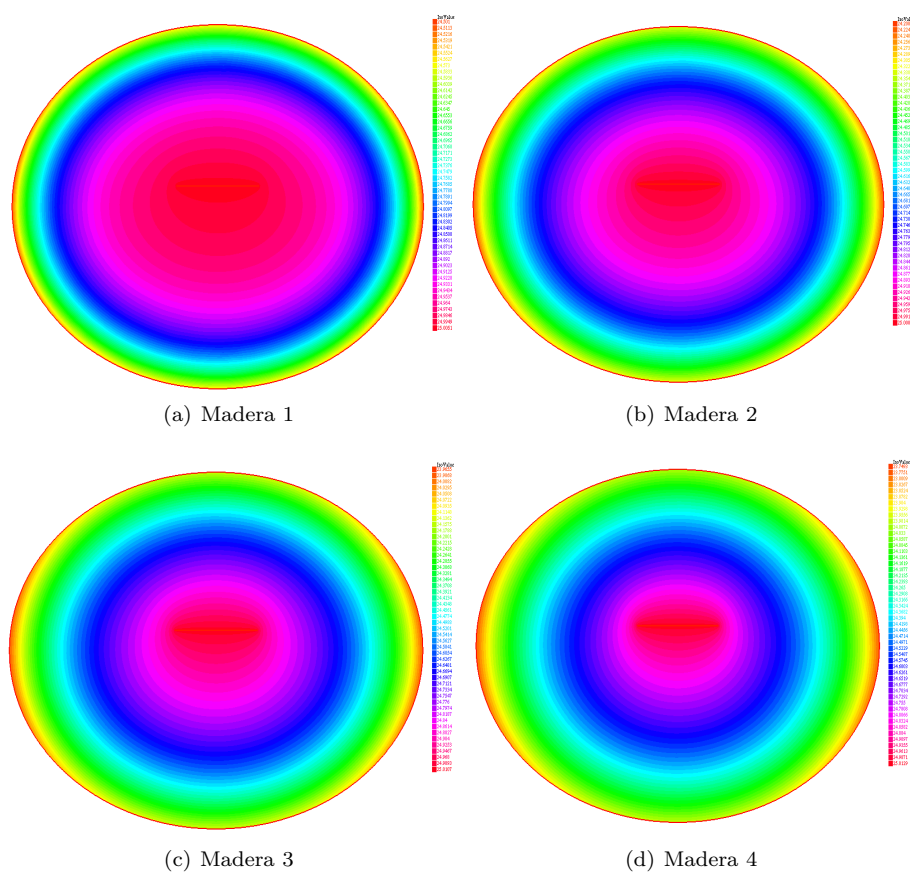


Figura 5.4: Difusión en Madera

Madera	1	2	3	4
T. mín °C	24.5010	24.2080	23.9655	23.7493

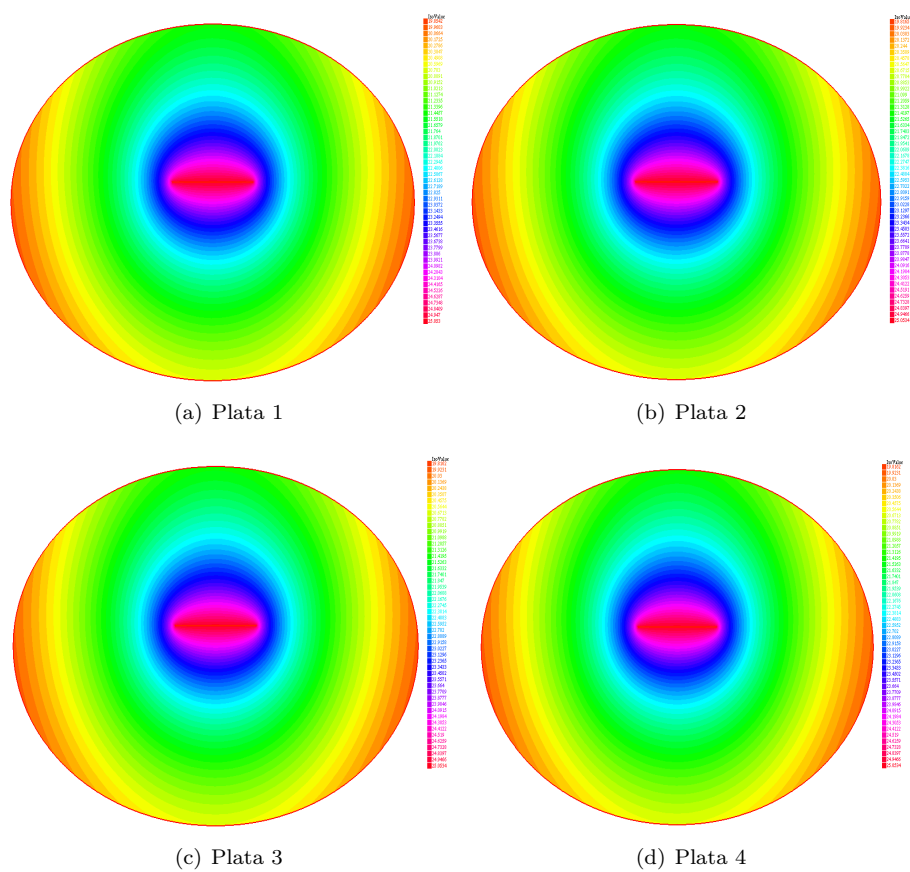


Figura 5.5: Difusión en Plata

Plata	1	2	3	4
T. mín °C	19.8542	19.8165	19.8162	19.8161

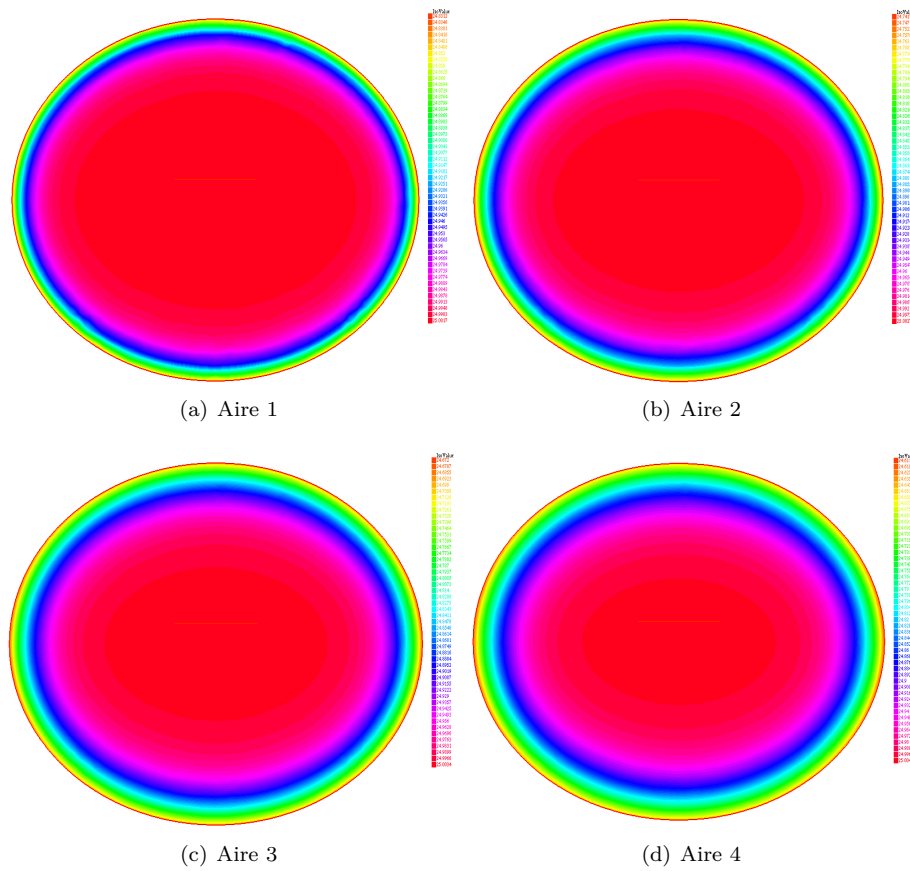


Figura 5.6: Difusión en Aire

Aire	1	2	3	4
T. mín °C	24.8312	24.7417	24.6720	24.6119

La temperatura más baja, como es obvio por la condición de Neumann que tenemos, se alcanza en la frontera  $\Gamma_1$ . Nótese que el comportamiento térmico en cada uno de los materiales es bien distinto, en el sentido de la mínima temperatura que se alcanza en cada paso de tiempo. Los metales son materiales con una alta conductividad térmica gracias al tipo de enlace que presentan por ser sólidos conductores tal y como se vio en la justificación física del principio del tema. Esto entra en concordancia con las conductividades térmicas antes indicadas para cada material, además de con el hecho de que la en cada paso la mayor difusión se haya conseguido para el sistema metálico de plata. La madera de roble y el aire pueden considerarse materiales aislantes desde el punto de vista térmico. Tienen baja conductividad y, los resultados que se obtienen corresponden a bajas pérdidas. Para el cuarto paso de tiempo, la pérdida es de aproximadamente  $0,39\text{ }^\circ\text{C}$  en el caso del aire y de  $1,2\text{ }^\circ\text{C}$  en el de la madera. En las construcciones, los edificios suelen separarse con cámaras de aire. El aire es un aislante térmico cuando la convección es baja frente a la difusión. Recuérdese que en este problema no hemos considerado efectos convectivos. Ocurre que antiguamente la anchura de estas cámaras de aire era elevada. Se producían pérdidas térmicas considerables, lo que a priori parecía entrar en contradicción con la Física del fenómeno difusivo. Lo que ocurría era que la anchura era lo suficientemente grande como para que se generaran corrientes de aire en las que el transporte se producía generalmente por convección, término que no se estaba considerando a la hora de modelar el problema del calor en el diseño de estas estructuras. Actualmente, a la hora de construir cámaras de aires se hermetizan totalmente para eliminar los efectos convectivos.

### 5.4.2. Segundo Caso: Habitación

Queremos ahora analizar la situación algo más real de una habitación en la que no hay corriente de aire (la suponemos totalmente hermética), siendo la única posibilidad de transporte de temperatura la difusión, pero con ciertas particularidades. La pared derecha está revestida por dos tipos de aislantes diferentes: uno caro y otro barato. Por motivos económicos, el volumen ocupado por el aislante caro ( $V_e$ ) tiene que estar en una proporción fija  $\mu = \frac{V_e}{V}$  con el volumen total ( $V$ ) que tiene la pared derecha  $V = l_x L_y$ . La dimensión del interior de la habitación ( $\Omega_a$ ) es de  $L_x \times L_y$ . Tenemos un radiador situado en la pared izquierda ocupando una parte parcial de ( $\Gamma_r$ ). Los espacios ocupados por tener cierto grosor la pared derecha y la parte del material caro, serán denotados respectivamente como  $\Omega_P$  y  $\Omega_e$ . En  $\Gamma_a$  suponemos que el flujo de temperatura es nulo. La pared que limita la habitación completa en la derecha la denotamos por  $\Gamma_{ext}$ , y fijamos su temperatura a  $T_{ext}$ . Lo anterior es totalmente ético en el sentido de que el exterior actúa de fuente térmica al ser mucho más extenso que el interior. Los coeficientes de conductividad térmica son:

- Aire,  $\kappa_a = 0,032 \frac{W}{^\circ\text{C} \cdot m}$ .

- Aislante barato,  $\kappa_c = 0,017 \frac{W}{\text{oC} \cdot m}$ .
- Aislante caro,  $\kappa_e = 0,008 \frac{W}{\text{oC} \cdot m}$ .

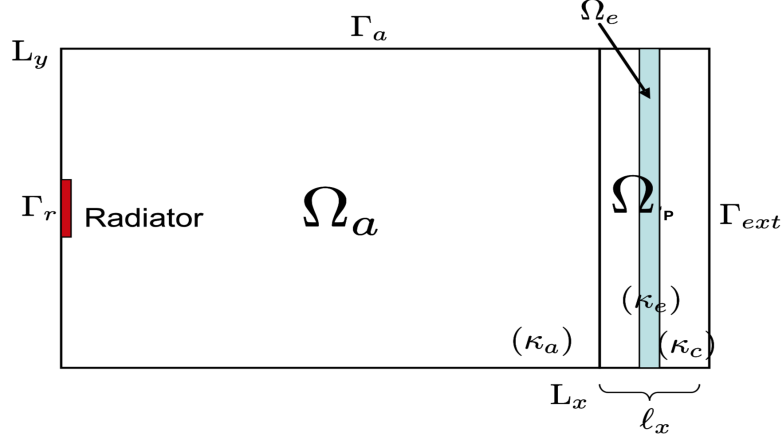


Figura 5.7: Habitación

Consideremos también, el interior de todos los dominios  $\Omega$ , y el dominio ocupado por el aislante barato  $\Omega_c$ . La formulación del problema que tratamos de resolver es:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\kappa(\cdot) \nabla T) = 0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial T}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Gamma_a, \\ T = T_r & \text{sobre } \Gamma_r, \\ T = T_{ext} & \text{sobre } \Gamma_{ext}, \end{cases}$$

donde  $\kappa(\cdot)$  es la conductividad térmica total. Llamando como  $\Omega_c = \Omega_P \setminus \Omega_e$  al dominio de la pared ocupado por el aislante barato, podemos definir  $\kappa$  a partir de la función indicatriz  $I_{x \in A}(x)$  con valor 1 si  $x \in A$  y 0 en caso contrario.

$$\kappa(x) = \kappa_a I_{x \in \Omega_a}(x) + \kappa_c I_{x \in \Omega_c}(x) + \kappa_e I_{x \in \Omega_e}(x). \quad (5.45)$$

Buscamos funciones de  $H^1(\Omega)$  que tengan como traza en la frontera las indicadas por las condiciones de contorno tipo Dirichlet anteriores. El problema anterior tiene solución única como se vio en teoría gracias al Teorema de Lax-Milgram. Realizamos una discretización conforme de Lagrange  $P^1$ . La versión discreta también tiene solución única tal y como se vio anteriormente. Mediante FreeFem++, hemos construido la malla sobre  $\Omega$ , obteniendo:

Observamos que la densidad de EF es variable en función de la necesidad que requiere cada una de las zonas, siendo las más importantes la zona central de  $\Omega_a$  debido a la acción del radiador, y las zonas que ocupan los aislamientos térmicos. A continuación, hemos dibujado las diferentes zonas de la habitación

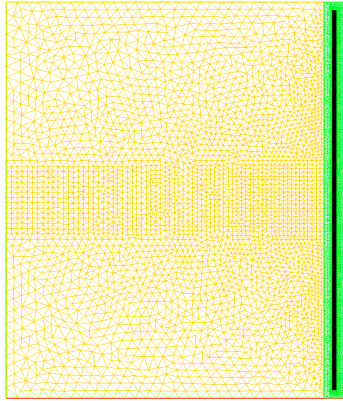


Figura 5.8: Mallado Habitación

en función de las conductividades térmicas.

Discretizando los espacios de funciones como antes indicamos, hemos resuelto el problema para una  $T_{ext} = -5^{\circ}C$  y una  $T_r = 20^{\circ}C$ , obteniendo que la difusión de la temperatura en una habitación con estas condiciones correspondería a la que muestra la Figura 5.9.

Lo que se obtiene es lo esperado. El foco caliente de la habitación se corresponde con la zona ocupada con el radiador. La temperatura va disminuyendo a medida que se avanza hacia la derecha. En la zona ocupada por el material barato la temperatura varía menos que en la zona que ocupa el aire, pero más que en la zona que ocupa el material caro. Lo que está en concordancia con las conductividades térmicas de los materiales.

Finalmente, FreeFem++ también me devuelve los indicadores  $J1$ ,  $J2$  y  $J3$  correspondientes al valor medio, al valor mínimo y a la desviación estándar de la temperatura en la habitación. Los valores son:

- $J1 = 5,36654^{\circ}C$ .
- $J2 = -2,56279^{\circ}C$ .
- $J3 = 4,64362^{\circ}C$ .

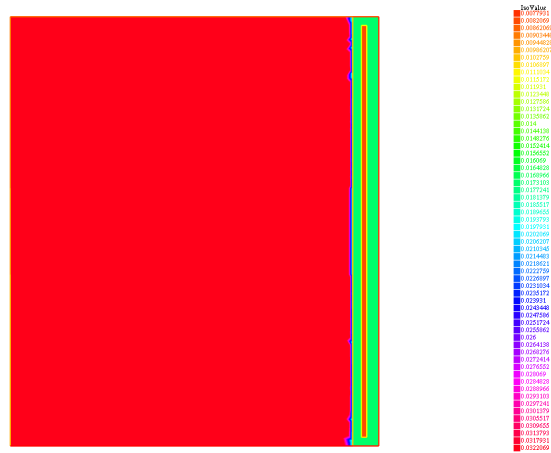


Figura 5.9: Coeficiente de difusión térmica

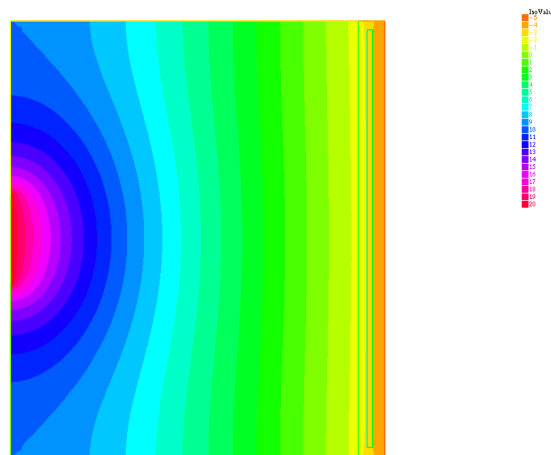


Figura 5.10: Difusión de Temperatura en la Habitación

# Apéndice A

## Elementos del Análisis Funcional

Con el objetivo de poder realizar un análisis profundo y pulcro desde el punto de vista matemático de la aproximación de las ecuaciones de convección-difusión y elasticidad mediante el método de los elementos finitos, en este capítulo se expondrán los aspectos necesarios de la teoría de espacios de funciones para los enunciados, demostraciones y resultados generales de los que constará la memoria que aquí se presenta.

Los resultados correspondientes a esta capítulo se han tomado principalmente de [1], [2], [5], [3] y [11].

### A.1. Espacios de Hilbert y de Banach

Esta sección está enfocada a describir algunos conceptos y resultados sobre los espacios de Hilbert y de Banach. Los espacios de Hilbert constituyen la generalización más inmediata a espacios de dimensión infinita de los espacios euclídeos finitos. De hecho, la intuición geométrica desempeña un papel importante en muchos aspectos de su teoría, y además surgen de modo natural y frecuente en matemáticas, física e ingeniería; constituyendo herramientas esenciales en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, mecánica cuántica y procesamiento de señales. Por su parte, los Espacios Normados son espacios en los que aún sin producto escalar puede definirse una norma. En concreto, nos centraremos en los *Espacios de Banach* (espacios normados completos) por su importancia en el área del análisis numérico, donde lo que se construye son sucesiones convergentes.

**Definición A.1.** *Se dice que  $H$  es un espacio prehilbertiano si  $H$  es*



un espacio vectorial sobre un cuerpo  $K$  en el que está definida una aplicación  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow K$  llamada producto escalar. Dicha aplicación ha de satisfacer:

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  y  $\langle x, x \rangle = 0$  si y sólo si,  $x = 0 \quad \forall x \in H$ .
2.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^* \quad \forall x, y \in H$ ,  $y^*$  denotando el conjugado.
3.  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \forall \lambda \in K, \forall x, y \in H$ .
4.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in H$ .

**Definición A.2.** Si  $H$  es un espacio prehilbertiano y  $x \in H$ , al número real no negativo  $\sqrt{\langle x, x \rangle}$  se le llama norma cuadrática de  $x$  y se denota como  $\|x\|$ . Diremos que la aplicación  $x \in H \mapsto \|x\|$  es una seminorma en caso de cumplir todas las propiedades de la norma salvo el punto 1. en la Definición 2.1.1.

Por una parte, se deduce de forma inmediata que cualquier espacio prehilbertiano  $H$  es un espacio topológico, en el que todo subconjunto abierto puede tomarse como unión de las bolas abiertas  $B(x, r) := \{y \in H : d(x, y) < r\}$  ( $x \in H, r > 0$ ) de la topología. Esto hace que, en particular, podamos hablar de aplicaciones  $H \rightarrow T$ , con  $T$  cualquier espacio topológico.

Por otra parte, desde el punto de vista métrico, con el objetivo de poder definir el concepto de espacio de Hilbert, recordemos los siguientes conceptos relativos a la continuidad y convergencia en un espacio métrico general  $(X, d)$ , donde  $d$  denota la distancia:

- Se dice que una sucesión  $x_n \subset X$  es de Cauchy cuando, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x_m, x_n) < \epsilon, \forall m, n \geq n_0$ .
- Toda sucesión convergente es de Cauchy (lo que no se cumple en sentido contrario a nivel general). El espacio métrico  $(X, d)$  se dice completo cuando toda sucesión de Cauchy es convergente.
- Sean  $A \subset X$  y  $x_0 \in X$ . Se tiene que  $x_0 \in \bar{A}$  si y solo si  $\exists x_n \subset A$  tal que  $x_n \rightarrow x_0$ .  $\bar{A}$  se denomina como la clausura, cierre o adherencia de  $A$ . En particular, obtenemos que  $A$  es cerrado si y solo si  $[x_n \subset A, x_n \rightarrow x_0 \implies x_0 \in A]$ .

**Definición A.3.** Se dice que  $H$  un espacio prehilbertiano es, además, espacio de Hilbert si es completo.

**Definición A.4.** Sea  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  una forma lineal con  $H$  espacio de Hilbert. Dicha forma lineal se dice:

- *continua*, si  $\exists c \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$|a(u, v)| \leq c|u||v| \quad \forall u, v \in H$$

- *coercitiva o elíptica*, si  $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$|a(v, v)| \geq \alpha|v|^2 \quad \forall v \in H$$

**Definición A.5.** Sea  $X$  un espacio vectorial. Se dice que una aplicación  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  es una norma, si  $\forall x, y \in X$  y  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ :

1.  $\|x\| \geq 0$  y  $\|x\| = 0$  si y solo si  $x = 0$
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Definición A.6.** Un espacio  $X$  equipado con una norma, se dice **espacio normado**.

**Observación A.1.** Como antes se vio, todo espacio prehilbertiano con la norma cuadrática es un espacio normado.

**Definición A.7.** Un espacio normado es **separable** si contiene un subconjunto denso numerable.

**Definición A.8.** Se llama **espacio de Banach** a un espacio normado que es completo para la distancia inducida por su norma.

**Definición A.9.** Dados dos espacios normados  $V, W$  y un operador lineal  $A : V \rightarrow W$ , se dice que el operado  $A$  es:

- **continuo**, si dados  $x \in V$ , y  $\{x_n\} \subset V$  con  $x_n \rightarrow x$ , se tiene que  $Ax_n \rightarrow Ax$ , con convergencia en  $W$
- **cerrado**, si dado  $D \subset V$  y para cada  $\{x_n\} \subset V$  con  $x_n \rightarrow x$ , con  $x \in V$  tal que  $Ax_n \rightarrow y \in W$ , se tiene que  $x \in D$  y  $Ax = y$ .
- **acotado** si verifica que:

$$\sup_{x \in V} \frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V} < \infty.$$

**Proposición A.1.** Todo operador  $A : V \rightarrow W$  continuo entre espacios de Banach es cerrado.

**Definición A.10.** El conjunto de los operadores lineales acotados de  $V$  en  $W$  se llama  $\mathcal{L}(V, W)$ .

**Proposición A.2.** El espacio  $\mathcal{L}(V, W)$  es un espacio vectorial equipado con la norma:

$$\|A\|_{\mathcal{L}(V, W)} = \sup_{x \in V} \frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V}.$$

**Definición A.11.** Sea  $V$  un espacio de Banach. Se denomina espacio dual de  $V$  al espacio  $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ . Se denota por  $V'$ .

**Proposición A.3.** Sea  $V$  un espacio de Banach y  $W$  espacio de Hilbert. Sus espacios duales  $V'$  y  $H'$  son respectivamente Banach y Hilbert.

**Proposición A.4.** Dado  $V$  espacio de Banach, existe un monomorfismo  $\Gamma : V \rightarrow V''$  que viene dado por:

$$f(v) = \langle f, v \rangle_{V', V} = \langle \Gamma v, f \rangle_{V'', V} \quad \forall f \in V'.$$

**Definición A.12.** Se dice que  $V$  espacio de Banach es reflexivo si el monomorfismo anterior  $\Gamma$  es biyectivo.

**Teorema A.1. (De Representación de Riesz para espacios de Hilbert)** Sea  $V$  espacio de Hilbert y  $V'$  su espacio dual. Se tiene que los espacios  $V$  y  $V'$  son isomorfos como espacios de Hilbert mediante el isomorfismo canónico  $R : V \rightarrow V'$  dado por:

$$\langle u, v \rangle_V = \langle R(u), v \rangle_{V', V} \quad \forall v \in V.$$

Además, se tiene que  $\|R\|_{\mathcal{L}(V, V')} = \|R^{-1}\|_{\mathcal{L}(V', V)} = 1$ .

**Observación A.2.** Todo espacio de Hilbert es, trivialmente, reflexivo.

**Definición A.13.** Sean  $V, W$  espacios de Banach y  $A : V \rightarrow W$  un operador. Se define como operador traspuesto de  $A$  como  $A^T : W' \rightarrow V'$ , dado por la asignación:

$$\langle A^T f, v \rangle_{V', V} = \langle f, Av \rangle_{W', W}.$$

**Definición A.14.** Dado un espacio de Banach  $V$  y un subconjunto  $C \subset V$ , se llama anulador de  $C$  al subconjunto:

$$C^\circ = \{f \in V' / f(v) = 0 \forall v \in C\}.$$

**Proposición A.5.** Dado un espacio de Banach  $V$  y un subconjunto  $C$  de  $V$ , si  $C^\circ = \{0\}$  entonces,  $C$  es denso en  $V$ .

**Teorema A.2. (De la Inversa Acotada)** Dado un espacio de Banach  $V$ , un espacio normado  $W$  y un subespacio  $E \subset V$ , se tiene que si  $A : E \rightarrow W$  es operador cerrado y el rango de  $A$ ,  $A(E)$  es de segunda categoría entonces:

1.  $A$  es sobreyectivo, es decir,  $A(E) = W$ .
2.  $\exists m > 0$  tal que  $\forall w \in W$  existe algún  $v \in E$  con  $Av = w$  y  $\|v\|_V \leq m\|w\|_W$ .
3. Si  $\exists A^{-1}$ , entonces es continuo.

**Teorema A.3. (Hahn-Banach)** Sea  $V$  un espacio vectorial y  $M$  un subespacio de  $V$ , si existen  $p : M \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0}$  tal que

$$p(v + w) \leq p(v) + p(w), \quad \forall v, w \in V$$

$$p(tv) = tp(v), \quad \forall v \in V, t \in \mathbb{R},$$

y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  lineal con  $f(x) \leq p(x) \forall x \in M$ , entonces  $\exists F : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$F(v) = f(v) \quad \forall v \in M$$

y

$$-p(-v) \leq F(v) \leq p(v) \quad \forall v \in M.$$

**Observación A.3.** Dado un espacio normado  $V$  y un subespacio  $M \subset V$ , si  $f \in M'$ ,  $\exists F \in V'$  tal que:

$$\|f\|_{M'} = \|F\|_{V'} \text{ y } f(v) = F(v) \quad \forall v \in M.$$

**Teorema A.4. (Banach-Steinhaus)** Sean  $X$  un espacio de Banach e  $Y$  un espacio normado. Dados  $I$  un conjunto de índices de cardinalidad arbitraria y  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  un subconjunto de  $\mathcal{L}(X, Y)$ . Se tiene que si  $\sup_{\alpha \in I} \|A_\alpha x\| < \infty$ ,  $\forall x \in X$ , entonces  $\sup_{\alpha \in I} \|A_\alpha\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \infty$ .

## A.2. Espacios $L^p$

**Definición A.15.** Se define  $L^p(\mu)$  como el espacio de funciones  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  medibles tales que  $|f|^p$  es integrable. Si  $f \in L^p(\mu)$  se define:

$$\|f\|_p = \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

$\|\cdot\|_p$  actúa como seminorma en  $L^p(\mu)$ .

**Teorema A.5. (Convergencia dominada)** Sea  $f_n$  una sucesión en  $L^p(\mu)$  que converge puntualmente a  $f$ . Si existe  $g \in L^p(\mu)$  tal que  $\forall n, |f_n| \leq g$ ; entonces  $f \in L^p(\mu)$  y  $f_n$  converge a  $f$  en  $L^p(\mu)$ .

**Teorema A.6. (Riesz-Fischer)** El espacio  $L^p(\mu)$  es completo. Más precisamente si  $f_n$  es una sucesión de Cauchy en  $L^p(\mu)$ , entonces existe una subsucesión  $f_{n_k}$  que converge en casi todo punto a una función  $f \in L^p(\mu)$ , además  $f_n$  converge a  $f$  en  $\|\cdot\|_p$ .

**Definición A.16. (Espacio dual)** Si  $E$  es un espacio de Banach, el conjunto de todas las formas lineales continuas u definidas sobre  $E$  forman un espacio de Banach con la norma

$$\|u\| = \sup \{|u(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\}.$$

Este espacio normado se denota por  $E^*$  y se le llama espacio dual (topológico) de  $E$ .

**Definición A.17. (Exponente dual)** Dado  $p \in \mathbb{N}$ , se define como exponente dual o conjugado de  $p$  al único  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q > 1$ , tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Teorema A.7.** Sea  $1 < p < \infty$ , y  $q$  el exponente conjugado. El dual de  $L^p(\mu)$  se identifica con  $L^q(\mu)$ , en el sentido de que a cada forma lineal y continua  $u \in L^p(\mu)^*$  se le puede asociar una función  $g \in L^q(\mu)$  de forma que  $\forall f \in L^p(\mu)$

$$u(f) = \int fg d\mu.$$

Además  $\|u\| = \|g\|_q$ . Recíprocamente, cada función  $g \in L^q(\mu)$  determina mediante (2.3) una forma lineal y continua en  $L^p(\mu)$ .

El caso  $p = 1$  es más complicado, lo vemos a continuación.

**Definición A.18.** Se define el espacio  $L^\infty(\mu)$  como el conjunto de las funciones medibles y acotadas  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ . Es un espacio vectorial. Para  $f \in L^\infty(\mu)$  se define la función  $\|\cdot\|_\infty$  como:

$$\|f\|_\infty = \inf \{C > 0 : |f(x)| \leq C \text{ ect } x \in X\}$$

Dicha aplicación es una seminorma en  $L^\infty(\mu)$ .

**Teorema A.8.** Si  $\mu$  es  $\sigma$ -finita el dual de  $L^1(\mu)$  se identifica con  $L^\infty(\mu)$  de la misma forma que para cualquier otro caso  $L^p(\mu)$ ,  $p > 1$ .

**Observación A.4.** El dual de  $L^\infty(\mu)$  no se identifica con  $L^1(\mu)$  más que en casos triviales, siendo fácil ver que cada función de  $L^1(\mu)$  sí induce una forma lineal y continua en  $L^\infty(\mu)$ . No obstante, a nivel general este tipo de formas lineales no son todas las que existen.

### A.3. Teoría de Distribuciones

*Laurent Schwartz (1915-2002)* recibió la Medalla Fields en 1950 gracias a sus trabajos sobre la Teoría de Distribuciones, la cual nace de la necesidad de crear una forma de derivación más débil y general que la tradicional forma clásica para, entre otros, poder trabajar con EDPs y dar una base formal y coherente de los cálculos realizados por físicos como Paul Dirac en el ámbito de Mecánica Cuántica. El concepto de distribución es mucho más general que el de función, en el sentido que pueden ser infinitamente derivables incluso cuando se corresponden con funciones no derivables en el sentido clásico. Sus derivadas son, también, distribuciones. Esta es la razón por la que tiene sentido hablar de soluciones distribucionales a EDPs de cualquier orden. Además, introducir el concepto de distribuciones es esencial para poder hablar de los espacios en los que principalmente trabajaremos: *los espacios de Sobolev*.

#### A.3.1. Sobre el concepto de solución de una EDP

Comenzamos el texto expresando la necesidad de crear un nuevo concepto de solución a un problema de EDPs. Para ello considérese el problema de estudiar la flexión de una cuerda elástica de longitud  $L$ , sujeta a los extremos y sobre la que actúa una determinada fuerza  $f = f(x)$ . La Figura 2.1 representa la situación. La ecuación diferencial que modela esta situación nace de la combinación de la *Ley de Hooke* de la elasticidad lineal, el principio de conservación de la cantidad

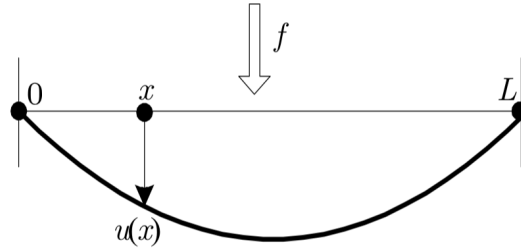


Figura A.1: Carga distribuida

de movimiento y de la consideración de que el medio que tratamos es elástico. El problema se trata entonces de resolver:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u \in C^2(0, L) \cap C^0[0, L] \\ \text{tal que } -(\kappa(x)u(x))' + \lambda(x)u(x) = f(x), \quad \forall x \in (0, L) \\ u(0)=u(L)=0 \end{array} \right.$$

que es básicamente hallar la solución en el sentido clásico del problema. Considérese ahora que la fuerza en lugar de ser distribuida en la longitud de la cuerda, se aplica constituyendo una carga puntual como muestra la siguiente figura:

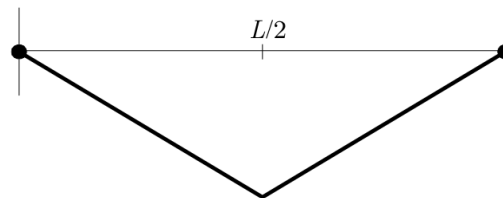


Figura A.2: Carga puntual

Ésta es una situación muy real en la que, no obstante, no puede pedírsele al desplazamiento ser  $C^2(0, L)$ , ya que la función no es diferenciable en  $x = \frac{L}{2}$ . Por claridad en la notación, no escribimos la dependencia con respecto a  $x$  de todas las funciones implicadas. Si la fuerza  $f$  produce un desplazamiento  $v$ , entonces  $fv$  es el trabajo, que integrando en toda la cuerda tenemos que:

$$\int_0^L fv$$

Procediendo de la misma manera, aplicando la integración por partes y considerando que los extremos sufren un desplazamiento nulo:

$$\int_0^L -(\kappa u')'v + \lambda uv = \int_0^L \kappa u'v' + \lambda uv$$

Lo que reuniendo todo en una misma expresión nos lleva a que para  $u$  ser solución del problema, ha de satisfacer:

$$\int_0^L \kappa u'v' + \lambda uv = \int_0^L f v$$

No obstante, nos seguimos encontrando con los problemas de que  $u \in C^1(0, L)$  y de que  $u = 0$  es solución del problema ya que  $f(x) = 0$ ,  $\forall x \in [0, L]$  y  $x \neq \frac{L}{2}$ . Ambos resultados contradicen la experiencia física.

En una primera corrección del modelo, consideremos que la función fuerza verifica:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & \frac{L}{2} - \epsilon \leq x \leq \frac{L}{2} + \epsilon \\ 0 & e.c.c. \end{cases}$$

Aplicando el *Teorema del Valor Medio* y tomando  $\epsilon \rightarrow 0$ , el trabajo producido por esta carga viene ahora dado por:

$$\int_0^L f v = \int_{\frac{L}{2}-\epsilon}^{\frac{L}{2}+\epsilon} \frac{v}{2\epsilon} = v(\xi_\epsilon) = v\left(\frac{L}{2}\right).$$

Luego, una nueva forma de tratar matemáticamente el desplazamiento producido por medio de una carga localizada sobre un punto  $x_0$ , puede hacerse mediante la introducción de una nueva aplicación, llámese  $\delta_{x_0}$  que actúa sobre una determinada clase de funciones y produce valores siguiendo la regla:

$$\delta_{x_0} : v \rightarrow \langle \delta_{x_0}, v \rangle := v(x_0).$$

La anterior es la conocida función *delta de Dirac*, a la que en lo que sigue se le dará una caracterización más formal.

Este ejemplo ilustra claramente el que fue el origen de la *Teoría de las Distribuciones*.

### A.3.2. Espacio de Distribuciones $D'(\Omega)$

En lo que sigue, sea  $\Omega$  un subconjunto abierto, conexo y acotado de  $\mathbb{R}^N$ , cuya frontera será denotada por  $\Gamma$ .

**Definición A.19.** Dada  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, llamamos **sopORTE de  $g$**  al conjunto:

$$\text{sop } g = \{x \in \Omega : g(x) \neq 0\}$$

**Definición A.20.** Se denota por  $C^k(\Omega)$  al conjunto de funciones definidas en  $\Omega$  que son  $k \in \mathbb{N}$  veces derivables en el conjunto.

**Definición A.21.** Se denota como  $C^k(\bar{\Omega})$  al espacio de restricciones a  $\bar{\Omega}$  de las funciones de  $C^k(\Omega')$  donde  $\Omega'$  es un abierto que contiene a  $\Omega$ .

**Definición A.22.** Se denota como  $C_c^k(\Omega)$  para  $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ , al conjunto de funciones de  $C^k(\Omega)$  con soporte compacto en  $\Omega$ .

**Definición A.23.** Se define espacio de funciones test al espacio vectorial  $C_c^\infty(\Omega)$  y se denota como  $D(\Omega)$ .

**Observación A.5.** Las funciones test se anulan en un entorno de  $\Gamma$  (contenido en  $\Omega$ ).

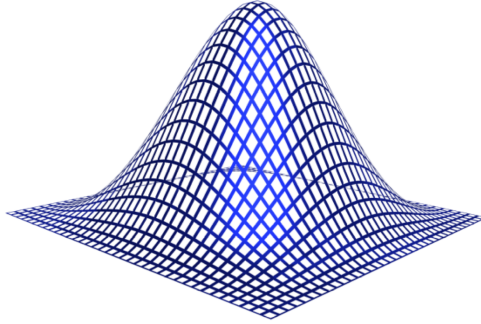


Figura A.3: Aspecto típico de Función test

A continuación va a verse que pese a que el espacio  $D(\Omega)$  no sea un espacio normado, éste puede dotarse de una topología, la *topología límite inductivo*, que es compatible con la estructura de espacio vectorial del mismo.

**Definición A.24.** Sean  $\{\phi_n\}_{n \geq 1} \subset D(\Omega)$  una sucesión y  $\phi \in D(\Omega)$ . Diremos que  $\phi_n$  converge a  $\phi$  en  $D(\Omega)$  si existe un compacto  $K \subset \Omega$  tal que:

$$\text{sop } \phi_n \subset K, \forall n \geq 1 \text{ y } D^\alpha \phi_n \rightarrow D^\alpha \phi \text{ uniformemente en } \Omega, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N.$$

**Observación A.6.**

- La noción de convergencia anterior es compatible con la estructura de espacio vectorial de  $D(\Omega)$ , es decir, si  $\phi_n$  y  $\psi_n$  son dos sucesiones de  $D(\Omega)$  convergentes en  $D(\Omega)$  a  $\phi$  y  $\psi$  respectivamente y si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\alpha \phi_n + \beta \psi_n \rightarrow \alpha \phi + \beta \psi \quad \text{en } D(\Omega)$$

- $D(\Omega)$  se inyecta de forma continua en  $L^p(\Omega)$ , lo que significa que  $D(\Omega) \subset L^p(\Omega)$  (i.e. inclusión de conjuntos) y que si  $\phi_n \rightarrow \phi$  en  $D(\Omega)$ , entonces  $\phi_n \rightarrow \phi$  en  $L^p(\Omega)$  (i.e. inclusión de topologías).



- Dado que la convergencia uniforme implica convergencia puntual, se tiene trivialmente que la función  $\phi$  también tiene soporte en  $K$ .

Una vez definido el espacio vectorial  $D(\Omega)$  dotado con la topología anterior, estamos en condiciones de definir su dual topológico, es decir, el espacio vectorial de las formas lineales y continuas sobre  $D(\Omega)$ . Dicho espacio es conocido como *Espacio de las Distribuciones* y se denota como  $D'(\Omega)$ . Acudiendo a la noción de convergencia en  $D(\Omega)$ , el espacio  $D'(\Omega)$  puede definirse de la siguiente manera:

**Definición A.25.** Se dice que  $T$  es una distribución en  $\Omega$  si es una aplicación  $T : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  lineal que cumple ser secuencialmente continua, i.e.:

$$\phi_n \rightarrow \phi \text{ en } D(\Omega) \implies T(\phi_n) \rightarrow T(\phi) \text{ en } \mathbb{R}.$$

Dicho conjunto, denotado como  $D'(\Omega)$ , constituye un espacio vectorial. Se utilizará la notación  $\langle T, \phi \rangle$  para referirnos a  $T(\phi)$ .

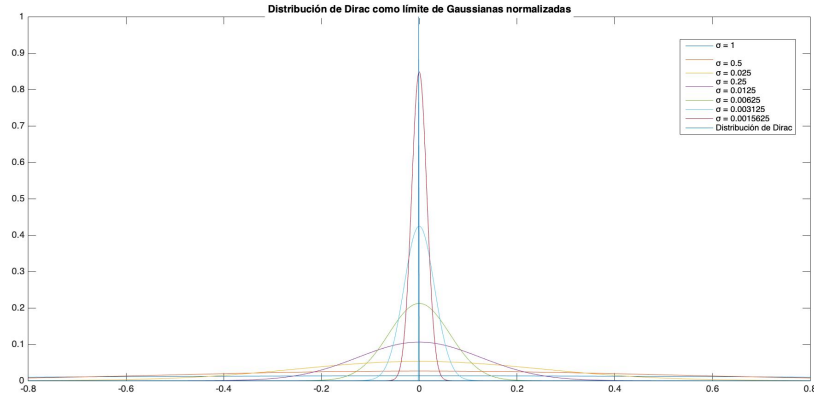


Figura A.4: Distribución de Dirac  $\delta_0$  como límite de funciones Gaussianas normalizadas.

**Ejemplo A.1. (La distribución de Dirac)** Fijemos  $x \in \Omega$ . Se define  $\delta_x$  mediante:

$$\delta_x \in D'(\Omega) : \psi \in D(\Omega) \rightarrow \langle \delta_x, \psi \rangle = \psi(x) \in \mathbb{R}.$$

Es trivial que  $\delta_x \in D'(\Omega)$  pues es lineal, secuencialmente continua y no es la distribución nula pues  $\exists \psi \in D(\Omega), (\psi = 1)$  tal que  $\langle \delta_x, \psi \rangle = \psi(x) = 1$ .

**Proposición A.6.** Si consideramos el espacio  $L^1_{loc}(\Omega)$  de las funciones  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $\int_K |f| < \infty$  para  $K$  un compacto de  $\Omega$ , es trivial ver que la aplicación:

$$T_f : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\psi \rightarrow \langle T_f, \psi \rangle = \int_{\Omega} f \psi$$

es una distribución sobre  $\Omega$ . Además, puede definirse el operador  $\mathcal{T}$ :

$$\mathcal{T} : f \in L^1_{loc}(\Omega) \rightarrow \mathcal{T}(f) = T_f \in D'(\Omega)$$

que verifica que

- está bien definido
- es inyectivo
- es secuencialmente continuo
- no es sobreyectivo.

*Demostración.*

- Buena definición del operador ya que si  $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$  y  $f = g$  casi por doquier en  $\Omega$ , entonces  $\mathcal{T}(f) = \mathcal{T}(g)$ .
- Inyectividad:  $ker(\mathcal{T}) = \{f \in L^1_{loc}(\Omega) : \mathcal{T}(f) = 0\} = \{f \in L^1_{loc}(\Omega) : \int_{\Omega} f\psi = 0, \forall \psi \in D(\Omega)\} = \{0\}$ .
- Secuencialmente continuo ya que si  $\{f_n\}_{n \geq 1}$ ,  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  y  $f_n \rightarrow f$  en  $L^1_{loc}(\Omega)$ , entonces  $\mathcal{T}(f_n) = \langle T_{f_n}, \cdot \rangle = \int_{\Omega} f_n(\cdot) \rightarrow \int_{\Omega} f(\cdot) = \langle T_f, \cdot \rangle = \mathcal{T}(f)$  en  $D'(\Omega)$ .
- No sobreyectividad: Hemos visto que  $\delta_x \in D'(\Omega)$  delta de Dirac para  $x \in \Omega$  es una distribución. Si  $\mathcal{T}$  fuese sobreyectiva, existiría  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  tal que:

$$\langle T_f, \psi \rangle = \int_{\Omega} f\psi = \langle \delta_x, \psi \rangle = \psi(x), \quad \forall \psi \in D(\Omega)$$

Tomando funciones tests  $\psi \in D(\Omega)$  tal que  $sup \psi \in D(\Omega - \{x\})$  deducimos que:

$$\int_{\Omega} f\psi = 0, \quad \forall \psi \in D(\Omega - \{x\})$$

de donde deducimos por inyectividad que  $f = 0$ , pero esto es absurdo ya que  $\delta_x \neq 0$ .

**Observación A.7.** Mediante la inyectividad del operador  $\mathcal{T}$  identificamos de forma unívoca  $L^1_{loc}(\Omega)$  con un subconjunto de  $D'(\Omega)$  y el hecho de que  $\mathcal{T}$  sea secuencialmente continuo hace que se tenga una inclusión de topologías. No obstante puede demostrarse que  $\mathcal{T}$  no es sobreyectivo, lo que hace que no todos los elementos de  $D'(\Omega)$  vengan de una función  $f$  de  $L^1_{loc}(\Omega)$ .

**Observación A.8.** Como consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se tiene que  $L^2(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ , y por tanto, toda función de  $L^2(\Omega)$  es una distribución.

### A.3.3. Derivación débil

Para motivar la definición de la derivada en Teoría de distribuciones que daremos a continuación, comenzamos justificando la necesidad de ésta. Para ello, considerense  $u, D_i u \in C^0(\Omega)$  para un cierto  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Por ser funciones continuas,  $u, D_i u \in D'(\Omega)$ . Nos planteamos cuál es la relación entre ellas vistas como distribuciones:

$$\langle D_i u, \psi \rangle = \int_{\Omega} (D_i u) \psi = \int_{\Omega} D_i(u\psi) - \int_{\Omega} u D_i \psi$$

donde se tiene que  $u\psi \in C_c^0(\Omega)$  y  $D_i(u\psi) \in C_c^0(\Omega)$ . Denotando como  $\bar{v}$  a la prolongación por cero fuera de  $\Omega$  de una función  $v$  y gracias a que  $u\psi$  y  $D_i(u\psi)$  tienen soporte compacto en  $\Omega$ , se tiene que:

$$\overline{u\psi} \in C_c^0(\Omega), \quad \overline{D_i u \psi} \in C_c^0(\Omega) \text{ y } \overline{D_i u \psi} = D_i(\overline{u\psi}).$$

Así,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D_i(u\psi) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} D_i(\overline{u\psi}) dx = \\ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left( \int_{-M}^M D_i(\overline{u\psi}) dx_i \right) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_N &= 0 \end{aligned}$$

donde  $M > 0$  es tal que  $\text{sop}(\overline{u\psi}) = \text{sop}(u\psi) \subset [-M, M]^N$ . Y en consecuencia tenemos que:

**Proposición A.7.** *Si  $u \in C^0(\Omega)$  es tal que existe  $D_i u \in C^0(\Omega)$  para algún  $i \in \{1, \dots, N\}$  entonces:*

$$\langle D_i u, \psi \rangle = - \langle u, D_i \psi \rangle.$$

Por inducción sobre el orden  $k$  de derivación también se obtiene el siguiente resultado:

**Definición A.26.** *Si  $u \in C^k(\Omega)$ , con  $k \geq 1$ , entonces*

$$\langle D^\alpha u, \psi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \psi \rangle$$

para todo multiíndice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$  tal que  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k$ .

Esta última definición nos lleva al concepto de derivada en su sentido débil.

**Definición A.27.** *Dada  $T \in D'(\Omega)$  y  $\alpha \in \mathbb{N}^N$  un multiíndice, se define la derivada  $\alpha$  de  $T$ ,  $D^\alpha T$ , como el elemento de  $D'(\Omega)$  dado por:*

$$\langle D^\alpha T, \psi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \psi \rangle, \quad \forall \psi \in D(\Omega).$$

**Observación A.9.**

- Obsérvese que la derivación débil es congruente con la derivación clásica cuando ésta es posible. En particular si  $f \in C^1(\Omega)$  las derivadas clásica y débil coinciden.

- La derivada distribucional siempre existe, es decir, si  $T \in D'(\Omega)$ , entonces siempre existe  $D^\alpha T \in D'(\Omega)$  para cualquier orden de derivación  $\alpha$ . En particular, cualquier función de  $L^1_{loc}(\Omega)$  será derivable con derivada una distribución.
- La derivación de distribuciones es un operador  $D^\alpha : D'(\Omega) \rightarrow D'(\Omega)$  secuencialmente continuo.

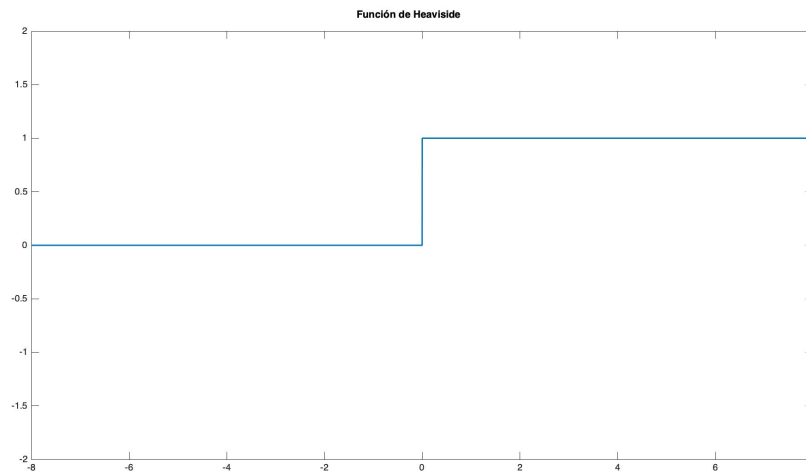


Figura A.5: Función de Heaviside

**Ejemplo A.2.** (La función de Heaviside en  $\mathbb{R}$ ) Considérese la siguiente función:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$H \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \implies H \in D'(\mathbb{R})$ . Esta función no es continua y por tanto no derivable en el sentido clásico. Vista como distribución, veamos cuál es su derivada en el sentido débil. Para ello sea  $\psi \in D(\mathbb{R})$ :

$$\langle H', \psi \rangle = - \langle H, \psi' \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} H \psi' = - \int_0^{+\infty} \psi' = - \int_0^M \psi' = \psi(0) = \langle \delta_0, \psi \rangle$$

con  $M > 0$  tal que  $\text{sop } \psi \subset [-M, M]$ . Deducimos así que  $H' = \delta_0 \in D'(\mathbb{R})$  pero  $H' \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$ .

## A.4. Espacios de Sobolev

Nuestro objetivo ahora es poder aplicar los resultados anteriores a espacios de funciones adecuados, con formas lineales y bilineales apropiadas, determinadas

futuramente con las EDPs con las que trabajaremos. Estos espacios son subespacios de  $L^p(\Omega)$  y constituyen el entorno natural donde poder trabajar con las EDPs. Nos referimos a los conocidos Espacios de Sobolev, cuyo nombre se debe al primer matemático que los introdujo, el soviético Sergei Lvovich Sobolev. La mayor parte de los resultados aquí expuestos se tomarán de [3] y [4], limitándonos en algunos casos a dar el mero enunciado puesto que su demostración sea demasiado extensa o compleja, alejándonos en cualquier caso del propósito de esta memoria.

A partir de ahora  $D^\alpha$  y  $D_i^\alpha$  se tomarán en el sentido débil y el concepto de integral se asumirá en el sentido de Lebesgue.

**Definición A.28.** Sea  $p \in [1, +\infty)$  y  $k \in \mathbb{N}$ . Se define como **espacio de Sobolev**  $W^{k,p}(\Omega)$  a:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{R}^N \text{ tal que } 0 \leq |\alpha| \leq k\}.$$

**Proposición A.8.** Todo espacio de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  es un espacio de Banach separable con la norma asociada:

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right\}^{1/p}.$$

**Demostración.** Para probar que el espacio  $W^{k,p}(\Omega)$  es un espacio de Banach hay que probar que es espacio normado y que es completo.

En primer lugar, para probar que es un espacio normado hay que demostrar que la aplicación  $\|\cdot\|_{W^{k,p}} : W^{k,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  satisface las propiedades de la norma, lo cual es trivial.

En segundo lugar, probar que el espacio  $W^{k,p}(\Omega)$  con la norma asociada  $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$  es completo consiste en demostrar que toda sucesión de Cauchy es convergente en el espacio. Para ello, tomemos  $\{u_m\}_{m=1}^\infty$  una sucesión de Cauchy en  $W^{k,p}(\Omega)$ . Para cada  $|\alpha| \leq k$ ,  $\{D^\alpha u_m\}_{m=1}^\infty$  es una sucesión de Cauchy en  $L^p(\Omega)$  para la cual existe  $u_\alpha \in L^p(\Omega)$  tal que  $D^\alpha u_m \rightarrow u_\alpha$  por ser  $L^p(\Omega)$  un espacio completo. Sea ahora  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  y  $D^\alpha u = u_\alpha$ ,  $|\alpha| \leq k$ , y  $\psi \in D(\Omega)$ , entonces:

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \psi dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_m D^\alpha \psi dx = \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (D^\alpha u_m) \psi dx = \int_{\Omega} u_\alpha \psi dx$$

y dado que  $D^\alpha u_m \rightarrow u_\alpha = D^\alpha u \quad \forall |\alpha| \leq k$  en  $L^p(\Omega)$  se sigue que  $u_m \rightarrow u$  en  $W^{k,p}(\Omega)$ .

Finalmente tenemos que como  $W^{k,p}(\Omega)$  es un espacio normado y completo para la norma  $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ ,  $W^{k,p}(\Omega)$  es espacio de Banach. |

**Proposición A.9.** El espacio  $C^k(\bar{\Omega})$  es de Banach con respecto a la norma:

$$\|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha f(x)|.$$

**Definición A.29.** La adherencia de  $C_0^\infty(\Omega)$  en  $W^{k,p}(\Omega)$ , se denota como  $W_0^{k,p}(\Omega)$ .

El siguiente resultado es importante a la hora de poder demostrar la Desigualdad de Korn en el capítulo de la Ecuación de la Elasticidad. Una demostración del teorema puede encontrarse en [8].

**Teorema A.9.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  abierto, acotado y con borde  $C^1$ . Si  $1 \leq p < N$ , entonces  $\forall 1 \leq q < p^*$  se tiene que:

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega).$$

Es decir, la inclusión es compacta. Aquí  $p^*$  es el llamado conjugado de Sobolev de  $p$ , definido como  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$  ( $p^* = \frac{pN}{N-p}$ ).

#### A.4.1. Los espacios de Hilbert $H^k(\Omega)$

Para nuestro estudio nos interesan especialmente los espacios de Sobolev con  $p=2$  (i.e.  $W^{k,2}(\Omega)$ ). Serán denotados como  $H^k(\Omega)$ .

**Definición A.30.** El espacio de Sobolev  $H^k(\Omega)$  está definido como:

$$H^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{R}^N \text{ tal que } 0 \leq |\alpha| \leq k\}$$

**Proposición A.10.** El espacio  $H^k$  es un espacio de Hilbert dotado con el siguiente producto escalar:

$$\langle u, v \rangle_{H^k} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

**Definición A.31.** Se define el espacio de funciones que están localmente en  $H^k(\Omega)$  como:

$$H_{loc}^k(\Omega) = \{u : u \in H^k(\Omega'), \forall \Omega' \subset \Omega\}$$

**Observación A.10.** En el caso concreto de  $p = 2$ , la adherencia de  $C_0^\infty(\Omega)$  en  $H^k(\Omega)$  (i.e.  $W_0^{k,2}(\Omega)$ ) se denota como  $H_0^k(\Omega)$ .

#### Problemas de contorno

Los problemas principales al trabajar con espacios de Sobolev aparecen cuando queremos asignar un cierto valor de la función en la frontera  $\Gamma$ . Por ejemplo, podríamos plantearnos qué significa que una función  $f \in W^{k,p}(\Omega)$  se anule en  $\Gamma$ . Recuerdese que  $\Gamma$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^N$  que tiene medida nula y que, por tanto no está bien definido el valor de  $f$  en  $\Gamma$ . De hecho, las funciones que difieren exclusivamente en un conjunto de medida nula, son iguales en el sentido de  $L^p(\Omega)$ .

**Observación A.11.** Si dotamos a  $W_0^{k,p}(\Omega)$  de la norma  $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ , obtenemos un espacio normado y cerrado de  $W^{k,p}(\Omega)$  que es de Banach, entonces  $W_0^{k,p}(\Omega)$  es también espacio de Banach. En particular, el espacio  $H_0^1(\Omega)$  es un espacio completo, dotándolo de la norma  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ .

Los elementos de  $W_0^{k,p}(\Omega)$  pueden interpretarse como funciones cuyas derivadas hasta orden  $k-1$  se anulan en la frontera. Desde el punto de vista del Análisis Funcional, el siguiente resultado es particularmente importante ya que establece en qué sentido las funciones de  $W^{k,p}(\Omega)$  tienen valores en la frontera.

**Teorema A.10. (Teorema de Traza en  $W^{1,p}(\Omega)$ )** Dado  $\Omega \in \mathbb{R}^N$  un dominio Lipschitz, y sea  $1 \leq p \leq \infty$ . Existe una aplicación lineal y continua  $\tau : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Gamma)$  tal que para toda  $f \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , se tiene que  $(\tau f)(x) = f(x)$  para todo  $x \in \Gamma$ .

La versión para el caso  $H^1(\Omega)$  es:

**Teorema A.11. (Teorema de Traza en  $H^1(\Omega)$ )** Sea  $\Omega$  de clase  $C^1$  y  $\Gamma$  acotada. Existe un único operador lineal y acotado

$$\tau : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$$

tal que  $\forall u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$

$$\tau u = u|_{\Gamma}$$

**Definición A.32.** Al operador  $\tau$  se le conoce como **operador traza**.

**Observación A.12.** Es interesante resaltar que en general  $C^0(\Omega)$  no está contenido en  $H^1(\Omega)$ , lo cual sólo se verifica de forma necesaria en dimensión 1.

**Corolario A.1.** Dados  $u \in H^1(\Omega)$  y  $v \in [H^1(\Omega)]^N$ , se tiene la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot v dx = - \int_{\Omega} u \nabla \cdot v dx + \int_{\Gamma} (\tau u)(\tau v) \cdot n_e d\sigma$$

donde  $n_e$  es el vector normal unitario a  $\Gamma$ , y  $\tau v = (\tau v_1, \dots, \tau v_n)^T$ .

El operador traza  $\tau : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$  no es sobreyectivo, de hecho  $\exists \tau$  está estrictamente contenido en  $L^2(\Gamma)$ , i.e. existen funciones de  $L^2(\Gamma)$  que no son "trazas" de funciones de  $H^1(\Omega)$ . Se tiene la siguiente definición.

**Definición A.33.** Sea  $\Omega \in \mathbb{R}^N$ , un dominio Lipschitz acotado. Denotamos por  $H^{1/2}(\Gamma)$ , al espacio definido como:

$$H^{1/2}(\Gamma) = \{u|_{\Gamma} : u \in H^1(\Omega)\}$$

dotado de la norma:

$$\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \inf \{ \|u\|_{H^1(\Omega)} : u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma} = g \}.$$

Dado que el operador traza es continuo y, por tanto, acotado, existe una constante  $c_\tau = c_\tau(\Omega, p)$  tal que :

$$\|f|_\Gamma\|_{L^p(\Gamma)} \leq c_\tau \|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \text{para todo } f \in W^{1,p}(\Omega).$$

Además para dominios Lipschitz se tiene que:

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) : f|_\Gamma = 0\}.$$

Por otra parte, si  $g \in L^2(\Gamma)$  se tiene que:

$$\|g\|_{L^2(\Gamma)} \leq c_\Gamma \|u\|_{H^1} \quad \forall u : u|_\Gamma = g.$$

Por lo que,

$$\|g\|_{L^2(\Gamma)} \leq c_\Gamma \min_{u|_\Gamma=g} \|u\|_{H^1} = c_\Gamma \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

**Proposición A.11.** (*Desigualdad de Poincaré*) Sea  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , se tiene que  $\exists C_\Omega \in \mathbb{R}^+$ :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \quad (\text{A.1})$$

**Observación A.13.** En virtud de la desigualdad de Poincaré,  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$  es una norma sobre  $H_0^1(\Omega)$ , equivalente a  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ .

## A.5. Convergencias

Sean  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$  espacios de Banach y  $X^*$  el espacio dual de  $X$ .

**Definición A.34.** (*Convergencia débil*) Sea  $\{x_n\} \subset X$ . Se dice que  $\{x_n\} \subset X$  converge débilmente a  $x \in X$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, x_n \rangle = \langle f, x \rangle, \quad \forall f \in X^*.$$

Se denota con  $x_n \rightharpoonup x$ .

**Definición A.35.** (*Convergencia fuerte*) Sea  $\{x_n\} \subset X$ . Se dice que  $\{x_n\} \subset X$  converge fuertemente a  $x \in X$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| \rightarrow 0.$$

**Proposición A.12.** Sea  $\{x_n\} \subset X$ . Se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| \rightarrow 0 \implies x_n \rightharpoonup x.$$

**Teorema A.12.** (*Banach-Steinhaus*) Sea  $(T_i)_{i \in I}$  una familia no necesariamente numerable de operadores lineales y continuos de  $X$  en  $Y$  tal que

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty, \quad \forall x \in X.$$



Entonces,

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{L(X,Y)} < \infty, \quad \forall x \in X$$

i.e.,  $\exists c \in \mathbb{R}$  tal que

$$\|T_i x\| < c \|x\|, \quad \forall x \in X, \forall i \in I.$$

**Definición A.36.** Sea  $H$  espacio de Hilbert, y  $x_n \subset H$ , y  $x \in H$ . Entonces

$$x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (v, x_n) \rightarrow (v, x) \quad \forall v \in H.$$

Además, si  $x_n \rightharpoonup u$  y  $v_n \subset H$  es tal que  $v_n \rightarrow v$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n, x_n) \rightarrow (v, x)$ .

# Apéndice B

## Código FreeFem++

### B.1. Simulaciones Elasticidad

Código Viga 2D Acero

```
1 // SUSANA PEREZ MARTINEZ
2 //-----
3 // Discretizacion por EF P1 ECUACION DE ELASTICIDAD LINEAL
4 // Material acero
5 //-----
6 //-----
7
8 // Parametros
9 real rho = 7700;//rho=7700 kg/m^3$.
10 real mu = 11.05e10;//mu = 11.05e10 N/m^2
11 real lambda = 14.06e10 ; //lambda= 14.06e10 N/m^2,
12 real gravity = -9.81, twomul=2*mu+lambda; // fuerza de gravedad
    sobre el cuerpo (9,81 N), Optimizacion
13 real n = 50;//numero de elementos para x
14 real m = 5;//numero de elementos para y
15 cout << "lambda,mu,gravity ="<<lambda<< " " << mu << " " << gravity
    << endl;//indica la salida por defecto en pantalla o archivo
16 //
17 //Generacion del mallado
18 int[int] labs=[1,1,1,2]; //numera los bordes
19 mesh Th=square(n,m,[x*10,y],label=labs); //square(n, m, [x0+(x1-x0)
    *x, y0+(y1-y0)*y])
20 fespace Vh(Th,[P1,P1]);
21 //
22 // Problema
23 func A = [[twomul,lambda, 0. ],
24           [lambda,twomul, 0. ],
25           [ 0. , 0. , mu  ]];
26
27 macro epsV(u1,u2 ) [dx(u1),dy(u2),dy(u1)+dx(u2)] // EOM
28 macro div(u1,u2 ) ( dx(u1)+dy(u2) ) // EOM
29 Vh [u1,u2], [v1,v2];
```

```

30 problem Lamé([u1,u2],[v1,v2])= int2d(Th)( [dx(u1),dy(u2),dy(
      u1)+dx(u2)] '*A* [dx(v1),dy(v2),dy(v1)+dx(v2)] )
31 - int2d(Th) ( rho*gravity*v2) + on(2,u1=0,u2=0) ;
32 // Resuelve Problema
33 Lamé;
34 // Dibujo del mallado
35 real dmax= u1[.].linfty, coef= 3/dmax;
36 cout << " max displacement = " << dmax << " coef " << coef << endl;
37 mesh Thm = change(movemesh(Th,[x+u1*coef,y+u2*coef]),fregion=1);
38 plot(Th,Thm,wait=1,cmm="coef amplification = "+coef);

```

## Código Viga 2D Cobre

```

1 // SUSANA PEREZ MARTINEZ
2 //-----
3 // Discretizacion por EF P1 ECUACION DE ELASTICIDAD LINEAL
4 // Material Cobre
5 //-----
6 //-----
7
8 // Parametros
9 real rho = 8960;//rho=8960 kg/m^3$.
10 real mu = 15.110e10;//mu = 15.110e10 N/m^2
11 real lambda = 32.110e10 ; //lambda= 32.110e10 N/m^2,
12 real gravity = -9.81, twomul=2*mu+lambda; // fuerza sobre el cuerpo
    , Optimizsacion
13 real n = 50;//numero de elementos para x
14 real m = 5;//numero de elementos para y
15 cout << "lambda,mu,gravity ="<<lambda<< " " << mu << " " << gravity
    << endl;//indica la salida por defecto en pantalla o archivo
16 //
17 //Generacion del mallado
18 int[int] labs=[1,1,1,2]; //numera los bordes
19 mesh Th=square(n,m,[x*10,y],label=labs); //square(n, m, [x0+(x1-x0)
    *x, y0+(y1-y0)*y])
20 fespace Vh(Th,[P1,P1]);
21 //
22 // Problema
23 func A = [[twomul,lambda, 0. ],
24           [lambda,twomul, 0. ],
25           [ 0. , 0. , mu ]];
26
27 macro epsV(u1,u2 ) [dx(u1),dy(u2),dy(u1)+dx(u2)] // EOM
28 macro div(u1,u2 ) ( dx(u1)+dy(u2) ) // EOM
29 Vh [u1,u2], [v1,v2];
30 problem Lamé([u1,u2],[v1,v2])= int2d(Th)( [dx(u1),dy(u2),dy(
      u1)+dx(u2)] '*A* [dx(v1),dy(v2),dy(v1)+dx(v2)] )
31 - int2d(Th) ( rho*gravity*v2) + on(2,u1=0,u2=0) ;
32 //Resolucion del Problema
33 Lamé;
34 // Dibujo del mallado
35 real dmax= u1[.].linfty, coef= 3/dmax;

```

```

36 cout << " max displacement = " << dmax << " coef " << coef << endl;
37 mesh Thm = change(movemesh(Th,[x+u1*coef,y+u2*coef]),fregion=1);
38 plot(Th,Thm,wait=1,cmm="coef  amplification = "+coef);

```

## Código Viga 2D Hormigón

```

1 // SUSANA PEREZ MARTINEZ
2 //-----
3 // Discretizacion por EF P1 ECUACION DE ELASTICIDAD LINEAL
4 // Material Hormigon
5 //-----
6 //-----
7
8 // Parametros
9 real rho = 2300;//rho=2300 kg/m^3$.
10 real mu = 1.125e10;//mu =1.125e10 N/m^2
11 real lambda = 0.75e10 ; //lambda= 0.75e10 N/m^2,
12 real gravity = -9.81, twomul=2*mu+lambda; // fuerza sobre el cuerpo
    , Optimisation
13 real n = 50;//numero de elementos para x
14 real m = 5;//numero de elementos para y
15 cout << "lambda,mu,gravity ="<<lambda<< " " << mu << " " << gravity
    << endl;//indica la salida por defecto en pantalla o archivo
16 //
17 //Generacion del mallado
18 int[int] labs=[1,1,1,2]; //numera los bordes
19 mesh Th=square(n,m,[x*10,y],label=labs); //square(n, m, [x0+(x1-x0)
    *x, y0+(y1-y0)*y])
20 fespace Vh(Th,[P1,P1]);
21 //
22 // Problema
23 func A = [[twomul,lambda, 0. ],
24           [lambda,twomul, 0. ],
25           [ 0. , 0. , mu ]] ;
26
27 macro epsV(u1,u2 ) [dx(u1),dy(u2),dy(u1)+dx(u2)] // EOM
28 macro div(u1,u2 ) ( dx(u1)+dy(u2) ) // EOM
29 Vh [u1,u2], [v1,v2];
30 problem Lamé([u1,u2],[v1,v2])= int2d(Th)( [dx(u1),dy(u2),dy(
    u1)+dx(u2)] '*A* [dx(v1),dy(v2),dy(v1)+dx(v2)] )
31 - int2d(Th) ( rho*gravity*v2 ) + on(2,u1=0,u2=0) ;
32 //Resolucion del Problema
33 Lamé;
34 // Dibujo del mallado
35 real dmax= u1[.].linfoy, coef= 3/dmax;
36 cout << " max displacement = " << dmax << " coef " << coef << endl;
37 mesh Thm = change(movemesh(Th,[x+u1*coef,y+u2*coef]),fregion=1);
38 plot(Th,Thm,wait=1,cmm="coef  amplification = "+coef);

```

## Código Cubo

```

1 load "msh3"
2 load "medit"
3 //Funciones basicas para construir una malla regular de un cubo
4
5 mesh3 Cube(NN,BB,L);
6 -- construye la superficie mallada de una caja en 3D
7 where: for exqpmle:
8 int[int] NN=[nx,ny,nz]; // the number of seg in the 3 direction
9 real [int,int] BB=[[xmin,xmax],[ymin,ymax],[zmin,zmax]]; //
   bounding bax
10 int [int,int] L=[[1,2],[3,4],[5,6]]; // the label of the 6 face
   left,right, front, back, down, right
11 */
12 func mesh3 Cube(int[int] & NN,real[int,int] &BB ,int[int,int] & L)
13 {
14 // first build the 6 faces of the hex.
15 real x0=BB(0,0),x1=BB(0,1);
16 real y0=BB(1,0),y1=BB(1,1);
17 real z0=BB(2,0),z1=BB(2,1);
18
19 int nx=NN[0],ny=NN[1],nz=NN[2];
20 mesh Thx = square(nx,ny,[x0+(x1-x0)*x,y0+(y1-y0)*y]);
21
22 int[int] rup=[0,L(2,1)], rdown=[0,L(2,0)],
23 rmid=[1,L(1,0), 2,L(0,1), 3, L(1,1), 4, L(0,0) ];
24 mesh3 Th=buildlayers(Thx,nz, zbound=[z0,z1],
25 labelmid=rmid, labelup = rup,
26 labeldown = rdown);
27
28 return Th;
29 }

```

## Código Viga en 3D

```

1 // Susana Perez Martinez
2 // Septiembre de 2019
3 //-----
4 //-----
5 //
6 // Problema de Elasticidad Lineal en 3D (Ecuaciones de Lamé)
7
8 load "medit"
9 //Definimos la malla:
10 include "cube.idp";// Incluimos la definicion del cubo
11 int[int] Nxyz=[20,5,5];
12 real [int,int] Bxyz=[[0.,5.],[0.,1.],[0.,1.]];
13 int [int,int] Lxyz=[[1,2],[2,2],[2,2]];
14 mesh3 Th=Cube(Nxyz,Bxyz,Lxyz);
15 // Definimos los parametros:
16 real E = 21.5e4;

```

```

17 real sigma = 0.28;
18 real mu = E/(2*(1+sigma));
19 real lambda = E*sigma/((1+sigma)*(1-2*sigma));
20 real gravity = -9.81;
21 // Discretizamos el espacio con Elementos Finitos tipo P1
22 fespace Vh(Th, [P1,P1,P1]);
23 Vh [u1,u2,u3], [v1,v2,v3];
24 cout << "lambda,mu,gravity ="<<lambda<< " " << mu << " " << gravity
    << endl;
25
26 real sqrt2=sqrt(2.);
27 macro epsilon(u1,u2,u3) [dx(u1),dy(u2),dz(u3),(dz(u2)+dy(u3))/
    sqrt2,(dz(u1)+dx(u3))/sqrt2,(dy(u1)+dx(u2))/sqrt2] // EOM
28 macro div(u1,u2,u3) ( dx(u1)+dy(u2)+dz(u3) ) // EOM
29 // Resolvemos el problema
30 solve Lamé([u1,u2,u3],[v1,v2,v3])=
31   int3d(Th(
32     lambda*div(u1,u2,u3)*div(v1,v2,v3)
33     +2.*mu*( epsilon(u1,u2,u3)'*epsilon(v1,v2,v3) ) //'
34   )
35   - int3d(Th) (gravity*v3)
36   + on(1,u1=0,u2=0,u3=0)
37   ;
38 real dmax= u1[.].max;
39 cout << " max displacement = " << dmax << endl;
40 //ut << " maximo desplazamiento="<<dmax<<endl;
41 real coef= 0.1/dmax;
42 int[int] ref2=[1,0,2,0];
43 mesh3 Thm=movemesh3(Th,transfo=[x+u1*coef,y+u2*coef,z+u3*coef],
    label=ref2);
44 Thm=change(Thm,label=ref2);
45 plot(Th,Thm, wait=1,cmm="coef amplification = "+coef );

```

## B.2. Simulaciones Convección-Difusión

### Código Difusión Madera

```

1 // Susana Perez Martinez
2 //
3
4 // Problema lineal de calor con condiciones de Dirichlet no
    homogéneas y
5 condiciones de flujo tipo Neuman no homogéneas
6
7 //
8 // Parametros:
9 real kappa = 0.17; // conductividad termica de Madera de Roble
10 real theta = 25; // temperatura inicial en el contorno
11 real n = 100; //numero de elementos finitos para Gamma1
12 real m = 60; //numero de elementos finitos para Gamma2
13 real dt = 1.0; // salto de tiempo
14 //
15 // Se definen los bordes
16 border Gamma1(t=0,2*pi){x=2.5*cos(t); y=1.75*sin(t);}

```

```

17 border Gamma2(t=0, 1){x=-0.5+t; y=0.2;}
18 // Se define la malla
19 mesh Th = buildmesh (Gamma1(n)+Gamma2(m));
20 // Se dibuja la malla
21 plot(Th, wait=1, ps="Th.eps");
22 //
23 // Se discretiza el espacio de funciones
24 fespace Vh(Th,P1);
25 Vh uh, uold, vh;
26 //
27 // Problema
28 uh = theta; uold = uh;
29 problem heatstep(uh, vh, solver=LU) =
30 int2d(Th)(uh*vh/dt)
31 - int2d(Th)(uold*vh/dt)
32 + int2d(Th)(kappa*dx(uh)*dx(vh) + kappa*dy(uh)*dy(vh))
33 + int1d(Th, Gamma1)(kappa*vh)
34 + on(Gamma2, uh=theta); // Condiciones de Dirichlet en Gamma2
35 // Hallamos la solucion para 6 tiempos diferentes
36 for (int it=0;it<4;it++) {
37 // Se renueva la temperatura con respecto al tiempo anterior
38 uold = uh;
39 // Se realiza un salto de tiempo y se resuelve
40 heatstep;
41 //Se dibuja la solucion
42 plot(uh, nbiso=50, fill=1, value=1, wait=1, ps="res"+it+".eps");
43
44 }

```

Código Difusión en Plata con salto de tiempo  $dt = 1$ 

```

1 // Susana Perez Martinez
2 //
3
4 // Problema lineal de calor con condiciones de Dirichlet no
5 // homogeneas y
6 // condiciones de flujo tipo Neuman no homogeneas
7
8 //
9 // Parametros:
10 real kappa = 419; // conductividad termica de Plata
11 real theta = 25; // temperatura inicial en el contorno
12 real n = 100; //numero de elementos finitos para Gamma1
13 real m = 60; //numero de elementos finitos para Gamma2
14 real dt = 1; // salto de tiempo
15 //
16 // Se definen los bordes
17 border Gamma1(t=0,2*pi){x=2.5*cos(t); y=1.75*sin(t);}
18 border Gamma2(t=0, 1){x=-0.5+t; y=0.2;}
19 // Se define la malla
20 mesh Th = buildmesh (Gamma1(n)+Gamma2(m));
21 // Se dibuja la malla

```

```

21 plot(Th, wait=1, ps="Th.eps");
22 //
23 // Se discretiza el espacio de funciones
24 fespace Vh(Th,P1);
25 Vh uh, uold, vh;
26 //
27 // Problema
28 uh = theta; uold = uh;
29 problem heatstep(uh, vh, solver=LU) =
30 int2d(Th)(uh*vh/dt)
31 - int2d(Th)(uold*vh/dt)
32 + int2d(Th)(kappa*dx(uh)*dx(vh) + kappa*dy(uh)*dy(vh))
33 + int1d(Th, Gamma1)(kappa*vh)
34 + on(Gamma2, uh=theta); // Condiciones de Dirichlet en Gamma2
35 // Hallamos la solucion para 4 tiempos diferentes
36 for (int it=0;it<4;it++) {
37 // Se renueva la temperatura con respecto al tiempo anterior
38 uold = uh;
39 // Se realiza un salto de tiempo y se resuelve
40 heatstep;
41 //Se dibuja la solucion
42 plot(uh, nbiso=50, fill=1, value=1, wait=1, ps="res"+it+".eps");
43
44 }

```

## Código Difusión en Aire

```

1 // Susana Perez Martinez
2 //
3 // Problema lineal de calor con condiciones de Dirichlet no
4 // homogeneas y
5 // condiciones de flujo tipo Neuman no homogeneas
6 //
7 real kappa = 0.024; // conductividad termica del Aire
8 real theta = 25; // temperatura inicial en el contorno
9 real n = 100; //numero de elementos finitos para Gamma1
10 real m = 60; //numero de elementos finitos para Gamma2
11 real dt = 1; // salto de tiempo
12 //
13 // Se definen los bordes
14 border Gamma1(t=0,2*pi){x=2.5*cos(t); y=1.75*sin(t);}
15 border Gamma2(t=0, 1){x=-0.5+t; y=0.2;}
16 // Se define la malla
17 mesh Th = buildmesh (Gamma1(n)+Gamma2(m));
18 // Se dibuja la malla
19 plot(Th, wait=1, ps="Th.eps");
20 //
21 // Se discretiza el espacio de funciones
22 fespace Vh(Th,P1);
23 Vh uh, uold, vh;
24 //
25 // Problema

```



```

25 uh = theta; uold = uh;
26 problem heatstep(uh, vh, solver=LU) =
27 int2d(Th)(uh*vh/dt)
28 - int2d(Th)(uold*vh/dt)
29 + int2d(Th)(kappa*dx(uh)*dx(vh) + kappa*dy(uh)*dy(vh))
30 + int1d(Th, Gamma1)(kappa*vh)
31 + on(Gamma2, uh=theta); // Condiciones de Dirichlet en Gamma2
32 // Hallamos la solución para 4 tiempos diferentes
33 for (int it=0;it<4;it++) {
34 // Se renueva la temperatura con respecto al tiempo anterior
35 uold = uh;
36 // Se realiza un salto de tiempo y se resuelve
37 heatstep;
38 //Se dibuja la solución
39 plot(uh, nbiso=50, fill=1, value=1, wait=1, ps="res"+it+".eps");
40
41 }

```

## Código Difusión en Habitación y Pared

```

1 // Susana Perez Martinez
2 // Temperatura en las paredes de una habitacion con radiador
3 // La pared esta compuesta por dos materiales: uno caro y uno
4 // barato.
5 // Parametros
6 real Lx = 4, Ly=5, lr=1, lx=0.3; // longitud horizontal, y
7 // vertical de la planta, del radiador y anchura de la pared.
8 real Tr=20, Text = -5; // temperaturas del radiador y externa
9 // respectivamente
10 real hy = 0.1;
11 real hx = 0.1;
12 real mu = 0.2;
13 real kappaa = 0.032; //conductividad del aire
14 real kappac = 0.017; //conductividad del material barato
15 real kappae = 0.008; //conductividad del material caro
16 real V = lx*Ly; //volumen de la pared
17 real Ve = mu * V; //volumen del material caro
18 real xem = Lx + hx;
19 real deltaxe = Ve / (Ly-2*hy);
20 // Definimos los bordes de la habitacion
21 border c1(t=0,Lx){x=t; y=0;} //borde inferior
22 border c1p(t=Lx,Lx+lx){x=t; y=0;} //borde inferior pared
23 border cext(t=0,Ly){x=Lx+lx; y=t;} //borde exterior (pared derecha
24 // )
25 border c3p(t=Lx+lx,Lx){x=t; y=Ly;} //borde superior pared
26 border c3(t=Lx,0){x=t; y=Ly;} //borde superior pared
27 border c4(t=Lx,Ly/2+lr/2){x=0; y=t;} //borde superior al radiador
28 // pared izquierda
29 border cr(t=Lx,Ly/2+lr/2,Ly/2-lr/2){x=0; y=t;} //borde donde esta el
30 // radiador
31 border c5(t=Lx,Ly/2-lr/2,0){x=0; y=t;} //borde inferior al radiador
32 // pared izquierda

```

```

26 border c0(t=0,Ly){x=Lx; y=t;} //borde interno de la pared derecha
27 //
28 border ce1(t=xem, xem+deltaxe){x=t; y=hy;} //bode superior de la
    pared ocupada por material caro
29 border ce2(t=hy,Ly-hy){x=xem+deltaxe; y=t;} //borde derecho de la
    pared ocupada por material caro
30 border ce3(t=xem+deltaxe, xem){x=t; y=Ly-hy;} //borde inferior
    de la pared ocupada por material caro
31 border ce4(t=Ly-hy,hy){x=xem; y=t;} //borde izquierdo de la pared
    ocupada por material caro
32 // Construccion de la malla
33 mesh Th = buildmesh(c1(30)+c1p(10)+cext(100)
34 +c3p(10)+c3(30)+c4(15)+cr(15)+c5(15)+c0(100)
35 +ce1(15)+ce2(500)+ce3(15)+ce4(500));
36 // Dibujo de la malla
37 plot(Th, ps="mesh.eps", wait=1);
38 mesh Th2=buildmesh( c1(30)+c0(100)+c3(30)+c4(15)
39 +cr(15)+c5(15) );
40 // Discretizacion del espacio
41 fespace Vh(Th, P1);
42 Vh kappa, th, vh;
43 real region1 = Th(Lx/2,Ly/2).region;
44 real region2 = Th(xem+deltaxe/2, Ly/2).region;
45 kappa = kappac + (kappaa-kappac)*(region==region1)
46 +(kappae-kappac)*(region==region2);
47 plot(kappa, nbiso=60, fill=1, value=1,wait=1);
48 // Definicion del problema
49 problem thermal(th, vh) =
50 int2d(Th)(kappa*dx(th)*dx(vh)+kappa*dy(th)*dy(vh))
51 +on(cext, th=Text)
52 +on(cr, th=Tr);
53 //Resolucion del problema
54 thermal;
55 real[int] colorhsv=[ // color hsv model
56 4./6., 1 , 0.5, // azul oscuro
57 4./6., 1 , 1, // azul
58 5./6., 1 , 1, // magenta
59 1, 1. , 1, // rojo
60 1, 0.5 , 1 // rojo claro
61 ];
62 real[int] viso(26);
63 for (int i=0; i<viso.n; i++)
64 viso[i] = -5+i;
65 plot(th,viso=viso(0:viso.n-1), value=1, fill=1,wait=1,
66 ps="tfield.eps");
67 // Indicadores
68 fespace Vh2(Th2, P1);
69 Vh2 th2 = th;
70 real J1, J2, J3;
71 J1 = int2d(Th2)(th2)/Th2.area; // valor medio
72 J2 = th2[.min]; // valor minimo
73 J3 = sqrt(int2d(Th2)((th2-J1)^2)/Th2.area); //desviacion tipica
74 // Impresion en pantalla
75 cout << "Mean temperature = " << J1 << endl;
76 cout << "Min temperature = " << J2 << endl;
77 cout << "Standard deviation = " << J3 << endl;
78 cout << "Done." << endl;

```



# Bibliografía

- [1] E.CASAS, *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales*, Universidad de Cantabria, 1992.
- [2] F.GALINDO, *Introducción a los espacios de funciones*, Universidad de Valladolid, 2016.
- [3] R.A.ADAM, *Sobolev Spaces* Academic Press, New York, 1975 .
- [4] H.BREZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York Inc., 2010.
- [5] S.SALSA, *Partial Differential Equations in Action:From Modelling to Theory*, Springer, Verlag Italia srl, 2008.
- [6] L.A.CÁRDENAS PENA, *El Teorema de Lax-Milgram y su aplicación al Método de Elementos Finitos*, Universidad de Málaga, 2017.
- [7] CRISTINEL MARDARE, *Méthodes Mathématiques en Élasticité*.
- [8] L.EVANS, *Partial Differential Equations*, AMS, Providence, 1998.
- [9] NECAS, J., *Sur une methode pour resoudre les equations aux derivees partielles de type elliptique, voisine de la variationnelle.*, nn. Scuola Norm. Sup. Pisa 16 (1962) 305-326.
- [10] BABUSKA, 1., AND AZIZ, A., *Survey lectures on the mathematical foundation of the finite element method. In The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, pp. 1-359. Academic Press, New York, 1972.
- [11] L. SCHWARTZ, *Analyse: Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, 1993.
- [12] LAX, P.D., AND MILGRAM, A.N., *Parabolic equations. In Contributions to the theory of partial differential equations.*, Annals of Mathematics Studies, no. 33, pp. 167-190. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1954.
- [13] CIARLET, P.G., *Mathematical Elasticity, Volume I: Three-Dimensional Elasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1988.

- [14] RIVLIN R.S.; ERICKSEN J.L., *Stress-deformation relations for isotropic materials*, Arch. rational Mech. Anal. 4 (1955), 323-425.
- [15] GURTIN M.E.; MARTINS L.C., *Cauchy's theorem in classical physics* Arch.Rational Mech. Anal 60 (1976), 305-328.
- [16] ERN, ALEXANDRE Y GUERMOND, JEAN-LUC, *Theory and Practice of Finite Elements*, Springer-Verlag New York Inc.; 2004 ed. edition (April 29, 2004).
- [17] HADAMARD, J., *Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques*. Hermann, Paris, 1932.
- [18] F.HECHT, *FreeFem++ Documentation* Paris, 2019.
- [19] F.HECHT, *FreeFem - An open-source PDE Solver using the Finite Element Method*, <https://www.freefem.org>, Paris, 2019.
- [20] CEA, J., *Approximation variationnelle des problemes aux limites* . Ann. Inst. Fourier, Grenoble 14 (1964) 345-444.
- [21] KITTEL, CH., *Introducción a la Física del estado Sólido* Reverté, 1975.