



FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

**FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA  
RELATIVIDAD GENERAL:  
ALGUNOS MODELOS COSMOLÓGICOS**

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Julián María Galindo Álvarez

---

Tutorizado y dirigido por

Dr. Alfonso Carriazo Rubio



# Resumen

En este trabajo vamos a desarrollar los conceptos, formalismos y herramientas matemáticas, propios de la Geometría Diferencial, que sirven de base para la teoría de la Relatividad. Comenzaremos con un breve repaso sobre las variedades diferenciables y tensores, continuaremos introduciendo las *formas bilineales* con el fin de definir las variedades *semi-Riemannianas*. En el estudio de este tipo de variedades introduciremos la *conexión de Levi-Civita*, los *productos warped*, las *geodésicas* y los *tensores de curvatura*. Además, nos centraremos brevemente en un tipo concreto de estas variedades: las *variedades de Lorentz*. Una vez expuesto y desarrollado lo anterior, introduciremos el formalismo de la Relatividad General y veremos tres modelos cosmológicos en los que haremos uso de los conceptos previamente desarrollados: los espacio-tiempos de Lorentz-Minkowski, Schwarzschild y Robertson-Walker.

# Abstract

In this work we are going to introduce the concepts, formalisms and mathematical tools of Differential Geometry in which the theory of Relativity is based. We will start with a brief review about smooth manifolds and tensors, followed by bilinear forms in order to define *semi-Riemannian* manifolds. During the study of this kind of manifolds, we will introduce the *Levi-Civita connection*, *warped products*, *geodesics* and *curvature tensors*. Also, we will focus in a specific type of this manifolds: *Lorentz manifolds*. After developing all this structure, we will establish the formalism of General Relativity and apply the previous concepts in three different cosmological models: Lorentz-Minkowski, Schwarzschild and Robertson-Walker spacetimes.

**Nota del autor sobre las referencias y la bibliografía:**

El texto contiene numerosas referencias coloreadas. En **azul** se encuentran las referencias a elementos del propio documento y en **morado** las bibliográficas.

En la bibliografía, los números finales indican las páginas de este documento en las que se ha hecho la referencia y no las consultadas en los textos.

**Para el lector del documento en formato digital:** Las referencias y elementos del índice pueden ser visitados haciendo click sobre ellos. Se recuerda que tras acceder a ellos, puede volver a la página en la que se encontraba con el comando **Alt + ←** en Adobe Acrobat Reader de Windows o con **cmd + ←** en Mac.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. Variedades diferenciables y tensores</b>	<b>11</b>
1.1. Variedades diferenciables . . . . .	11
1.2. Aplicaciones diferenciables . . . . .	13
1.3. Espacio tangente y aplicación diferencial . . . . .	14
1.4. Campos vectoriales . . . . .	15
1.5. 1-formas y diferencial . . . . .	16
1.6. Campos tensoriales . . . . .	17
<b>2. Formas bilineales y producto escalar</b>	<b>23</b>
2.1. Formas bilineales simétricas . . . . .	23
2.2. Producto escalar . . . . .	25
<b>3. Variedades semi-Riemannianas</b>	<b>29</b>
3.1. Variedades semi-Riemannianas . . . . .	29
3.2. Conexión de Levi-Civita . . . . .	32
3.3. Transporte paralelo y geodésicas . . . . .	38
3.4. Cambio de tipo y contracción métrica . . . . .	41
3.5. Tensor curvatura de Riemann . . . . .	42
3.6. Tensor de Ricci, curvatura escalar y seccional . . . . .	46
3.7. Variedades de Lorentz. Orientación temporal . . . . .	49

<b>4. Teoría de la Relatividad</b>	<b>53</b>
4.1. Partículas en un espacio-tiempo . . . . .	54
4.2. Ecuación de campo de Einstein . . . . .	57
<b>5. Modelos cosmológicos simples</b>	<b>61</b>
5.1. Espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski . . . . .	61
5.2. Espacio-tiempo de Schwarzschild . . . . .	68
5.3. Espacio-tiempo de Robertson-Walker . . . . .	73
<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>

# Introducción

Cuando uno piensa en la teoría de la Relatividad parece inevitable que la figura de Albert Einstein le venga a la cabeza, pero lo cierto es que esta teoría no habría llegado muy lejos sin el trabajo de los matemáticos que desarrollaron todo el cuerpo teórico en el que se sustenta. La teoría de la Relatividad es una teoría *geométrica*, y el camino a ella requirió del cruce de un formalismo matemático que apenas se estaba desarrollando, junto a una intuición y conocimientos sobre Física que permitiera unirlos.

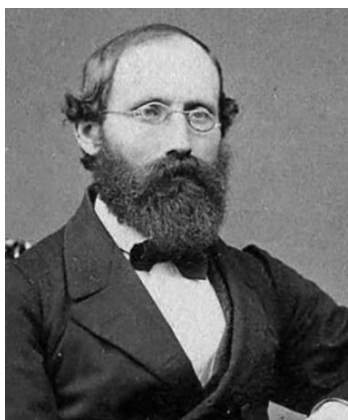


Figura 1. B. Riemann.

El matemático alemán Carl F. Gauss (1777-1855) revolucionó el análisis de curvas y superficies, estudiándolas de forma *intrínseca*, independientemente del espacio ambiente en el que se encontraran ( $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ ). Así, desarrolló conceptos como la *curvatura*, invariante bajo isometrías tal y como él mismo demostró, el cálculo de longitudes y áreas, y en definitiva, el análisis intrínseco de las superficies [7]. En 1854, Bernhard Riemann (1826-1866), alumno de Gauss, estableció en su tesis de habilitación *Sobre las hipótesis en que se funda la geometría* (1854) [16] las bases para generalizar el trabajo de Gauss a dimensiones superiores, dando las primeras pinceladas de lo que hoy conocemos como Geometría Diferencial.

Sin embargo, el estudio de Riemann era lo suficientemente complejo como para que sus contemporáneos no fueran capaces de ver la nueva revolución de la geometría que se avecinaba. Gracias a los trabajos de Elwin B. Christoffel (1829-1900) sobre *formas cuadráticas*, los matemáticos italianos Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) y su ex-alumno Tullio Levi-Civita (1873-1941) comenzaron a formalizar los conceptos que planteó Riemann, dotándolos de la rigurosidad matemática que necesitaba esta nueva teoría para poder ser puesta en práctica. Este fue el nacimiento del *Cálculo Diferencial Absoluto*

de Ricci y Levi-Civita, que apoyándose en Riemann y Christoffel, generalizaba el cálculo diferencial en estas nuevas superficies de más dimensiones, las *variedades* [9].



Figura 2. Gregorio Ricci-Curbastro y Tullio Levi-Civita.

Paralelamente, el físico alemán Albert Einstein (1879-1955) publicó en 1905 su teoría de la Relatividad Especial, en la que generalizaba la relatividad de Galileo Galilei, explicando que al igual que las velocidades y posiciones medidas por un observador dependen de su movimiento relativo (respecto a otro observador), el tiempo también es relativo. Además, establecía que la velocidad de la luz es la máxima alcanzable en la naturaleza y de valor constante para todos los observadores independientemente de su movimiento. Interesado por esta teoría física, el matemático Hermann Minkowski (1864-1909) la formalizó a través de conceptos geométricos bien conocidos en matemáticas.

Intentando incorporar la fuerza gravitatoria en la teoría de Einstein, su compañero y matemático Marcel Grossman le recomendó estudiar los trabajos de Ricci y Levi-Civita y su Cálculo Diferencial Absoluto, pues le parecía el marco matemático perfecto para las ideas que Einstein planteaba. Tras años de trabajo junto a Grossman y un intenso cartero con Levi-Civita [9], Einstein publicó en 1916 su *Teoría de la Relatividad General*, donde la *ecuación de campo* describía el espacio y el tiempo como una variedad semi-Riemanniana en la que la gravedad no era una fuerza, sino la consecuencia de que las trayectorias de los cuerpos libres fueran geodésicas de esta variedad, curvada por la presencia de materia y energía.

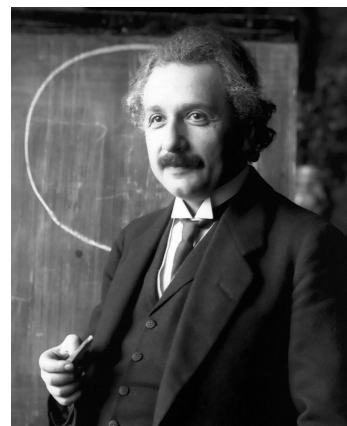


Figura 3. A. Einstein.





Figura 4. G. Lemaître.

Cuando en 1919 Arthur Eddington midió la desviación que sufría un rayo de luz al pasar cerca del Sol (hecho inexplicable con la hasta entonces reinante teoría de Newton), junto a la concordancia con los datos predichos por la teoría de Einstein, el físico alemán se consolidó como uno de los más importantes de su época. A raíz de la comprobación experimental, numerosos científicos intentaron encontrar distintas soluciones a la ecuación de campo. Poco después de la publicación de la teoría, Karl Schwarzschild (1873-1916) publicó la primera solución no trivial de la ecuación, apareciendo por primera vez lo que hoy conocemos como *agujeros negros*. Más adelante, los trabajos de Aleksandr Fridman (1888-1925) y Georges Lemaître (1894-1966) sobre soluciones dinámicas de la ecuación de campo, junto con la evidencia experimental de Edwin Hubble y el apoyo matemático de Howard P. Robertson (1901-1963) y Arthur G. Walker (1909-2001), concluían que nuestro universo nació a raíz de una rapidísima expansión (*big bang*) y se expande desde entonces.

Este largo camino que involucró a físicos y matemáticos fue el nacimiento de la *cosmología moderna*, que tras haber confirmado una y otra vez la teoría de la Relatividad, sigue enfrentándose a problemas aún sin explicación como la expansión *acelerada* del universo o la *energía oscura*.

En este trabajo pretendo exponer todo el sustento matemático de la teoría de la Relatividad, la Geometría Diferencial, que en esencia es el trabajo de Ricci-Curbastro y Levi-Civita de formalización de las ideas de Riemann y Christoffel, para luego introducir las ideas de la Relatividad General a partir del desarrollo previo, aplicando además las nociones expuestas en tres modelos cosmológicos simples: en el modelo de Lorentz-Minkowski veremos algunos elementos puramente geométricos de la Relatividad Especial como la *desigualdad de Schwarz* o el *teorema de Pitágoras*, en el modelo de Schwarzschild usaremos las propiedades de los tensores de curvatura para llegar a la *métrica* de la variedad buscada; y en el modelo de Robertson-Walker usaremos la noción de *producto warped* para construir el espacio-tiempo que modela la evolución del universo.

Puesto que el foco principal del documento es el fundamento geométrico, me tomaré la libertad de simplificar ligeramente el marco físico. Con esto me refiero a que a la hora de plantear el formalismo de la teoría de la Relatividad, me centraré únicamente en la materia como fuente de densidad de energía,

obviando densidades de radiación. Además, denominaré a las partículas sin masa que viajan a la velocidad de la luz como *fotones*, pero realmente este concepto no solo abarca el de fotón tal y como lo conocemos en Física, pues el teorizado *gravitón* debería enmarcarse en esta categoría o incluso, de forma aproximada, los *neutrinos*.

Por otro lado, comentar que para este trabajo se ha seguido el desarrollo expuesto principalmente en O'Neill [15], apoyándome en otros textos, tanto de ámbito matemático como físico, como lo son Chen [4], Bishop [3] o Scheck [20].

No quisiera acabar esta introducción sin mostrar mi más sincero agradecimiento al director de este trabajo y actual decano de la Facultad de Matemáticas, D. Alfonso Carriazo Rubio, por su predisposición y detalle en todo lo que hace, y en especial, en este proyecto. Aprovecho también para dedicarle este trabajo a mis compañeros del Doble Grado en Matemáticas y Física, algunos de los cuales han echado en falta cierta profundización y rigurosidad matemática en algunas de las ramas de la Física estudiadas a lo largo de nuestra formación académica.

Sin más detenimiento, espero que este texto sirva como una interesante introducción a la Geometría Diferencial y la teoría de la Relatividad General para aquel lector con una predisposición matemática y curiosidad por estas ramas del conocimiento, al que invito a profundizar en la literatura sobre las nociones y consecuencias de los modelos que comentaremos aquí.

Atentamente, el autor.

# Capítulo 1

## Variedades diferenciables y tensores

En términos coloquiales, una variedad es un espacio topológico que visto “de cerca” (localmente) se asemeja al espacio Euclídeo habitual, pero que “visto desde lejos” (globalmente) puede tener una estructura mucho más compleja. La formulación de la Teoría de la Relatividad de Einstein se basa en las llamadas variedades diferenciables, variedades “suaves” donde podemos generalizar el concepto de diferenciación. Por ello vamos a centrarnos en este capítulo en revisar conceptos y resultados tanto de variedades diferenciables como de tensores, objetos que permitirán darle una estructura aún más rica a las variedades. Puesto que el objetivo de este capítulo es revisar conceptos fundamentales, vistos en su gran mayoría en la asignatura de *Variedades Diferenciables*, omitiremos las demostraciones de los resultados, que pueden encontrarse en [12] o [15].

### 1.1. Variedades diferenciables

Podemos pensar en una variedad como un conjunto de mapas (*cartas*) cada uno de ellos con un cierto sistema de coordenadas que “pegamos” para formar un mapa mayor (*atlas*). La diferenciabilidad de la variedad vendrá dada por la suavidad (*diferenciabilidad*) de ese cambio entre cartas.

Salvo que se indique lo contrario, en lo que sigue  $(M, \mathcal{T})$  denotará un espacio topológico  $2^{\circ}$  numerable con la propiedad de Hausdorff.

**Definición 1.1.1.** Una *carta* (o *sistema de coordenadas*) de dimensión  $m$  es un par  $(U, \varphi)$  donde  $U \in \mathcal{T}$  es un abierto de  $M$  y  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  es un homeomorfismo tal que  $\varphi(U)$  es abierto de  $\mathbb{R}^m$ .

Para cada  $p \in U$ , podemos escribir  $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$ . A cada una de las anteriores funciones  $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$  se le denomina  *$i$ -ésima función coordenada de  $\varphi$* .

**Definición 1.1.2.** Dadas  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi)$  cartas  $m$ -dimensionales de  $M$ , se dice que son *compatibles* si se tiene uno de los siguientes casos:

1.  $U \cap V = \emptyset$ .
2.  $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  y  $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$  son diferenciables.

**Definición 1.1.3.** Un *atlas  $\mathcal{A}$  sobre  $M$  de dimensión  $m$*  es una colección  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \Lambda}$  de cartas  $m$ -dimensionales de  $M$  compatibles dos a dos tales que  $M = \bigcup_{i \in \Lambda} U_i$ .

**Definición 1.1.4.** Dos atlas  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$   $m$ -dimensionales sobre  $M$  son *compatibles* si  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  es un atlas sobre  $M$ .

**Proposición 1.1.5.** *La relación de compatibilidad entre atlas es una relación de equivalencia.*

**Definición 1.1.6.** Dado un atlas  $\mathcal{A}$  sobre  $M$ , se denomina *estructura diferenciable* a la clase de equivalencia de  $\mathcal{A}$  por la relación de compatibilidad entre atlas.

**Definición 1.1.7.** Una *variedad diferenciable de dimensión  $m$*  es un par  $(M, \mathcal{A})$  donde  $M$  es un espacio topológico de Hausdorff  $2^\circ$  numerable y  $\mathcal{A}$  es un atlas de dimensión  $m$  sobre  $M$ .

**Definición 1.1.8.** Dada una variedad diferenciable  $(M, \mathcal{A})$ , decimos que  $(U, \varphi)$  es una *carta de  $M$*  si es una carta de  $\mathcal{A}$ .

**Notación 1.1.9.** Abusando del lenguaje y cuando no haya confusión, denotaremos por  $M$  a la variedad diferenciable (o  $M^m$ , donde  $m$  indica la dimensión). Además, en lo que sigue, siempre que hablemos de una variedad nos referiremos a una variedad diferenciable.

**Definición 1.1.10.** Sean  $M^m$  y  $N^n$  variedades y  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$ ,  $(V, \phi = (y^1, \dots, y^n))$  cartas en  $M$  y  $N$  respectivamente. Llamamos *carta producto* a  $(U \times V, \varphi \times \phi)$ , donde

$$\begin{aligned} \varphi \times \phi : U \times V &\longrightarrow \mathbb{R}^{m+n} \\ (p, q) &\longmapsto (x^1(p), \dots, x^m(p), y^1(q), \dots, y^n(q)). \end{aligned}$$

Es sencillo comprobar que las cartas así dadas son compatibles, dando a  $M \times N$  estructura de variedad diferenciable que llamamos *variedad producto*.

## 1.2. Aplicaciones diferenciables

El paso natural una vez definidos los espacios sobre los que trabajaremos es preguntarse por las aplicaciones entre estos.

**Definición 1.2.1.** Sean  $M$  y  $N$  variedades. Se dice que una aplicación continua  $f : M \rightarrow N$  es *diferenciable en*  $p \in M$  si para toda carta  $(V, \psi)$  de  $N$  con  $f(p) \in V$  existe una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  tal que  $p \in U$  y se tiene que la aplicación  $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$  es diferenciable en  $\varphi(p)$ . Se dice que  $f$  es *diferenciable* si lo es para cada  $p \in M$ .

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \varphi(U) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \psi(V) \end{array}$$

Figura 1.1. Diagrama de una aplicación diferenciable.

**Lema 1.2.2.** *La definición anterior no depende de las cartas entorno elegidas para  $p$  y  $f(p)$ .*

**Notación 1.2.3.** El conjunto de todas las funciones diferenciables de una variedad  $M$  a otra  $N$  se denota por  $\mathfrak{F}(M, N)$ . En el caso  $N = \mathbb{R}$  se escribirá simplemente  $\mathfrak{F}(M)$ .

**Ejemplo 1.2.4.** Consideremos una carta  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  en una variedad  $M^m$ . Para cada  $i = 1, \dots, m$  se tiene que  $x^i \in \mathfrak{F}(U)$ .

**Ejemplo 1.2.5.** Consideremos una variedad producto  $M \times N$ . Las proyecciones sobre las variedades  $\pi : M \times N \rightarrow M$  y  $\sigma : M \times N \rightarrow N$  cumplen que  $\pi \in \mathfrak{F}(M \times N, M)$  y  $\sigma \in \mathfrak{F}(M \times N, N)$ .

**Proposición 1.2.6.**  $\mathfrak{F}(M)$  es un anillo conmutativo con la suma y producto habituales de funciones.

**Definición 1.2.7.** Una aplicación entre variedades  $f : M \rightarrow N$  es un *difeomorfismo* si es biyectiva y tanto  $f$  como  $f^{-1}$  son diferenciables.

**Lema 1.2.8** (Lema de extensión de funciones diferenciables). Sean  $M$  una variedad,  $p \in U$  con  $U$  un abierto de  $M$  y  $h \in \mathfrak{F}(U)$ . Entonces existen un entorno abierto  $V$  de  $p$ , con  $\bar{V} \subseteq U$  y una función  $f \in \mathfrak{F}(M)$  tales que  $h = f$  en  $V$  y  $f = 0$  en  $M \setminus U$ .

### 1.3. Espacio tangente y aplicación diferencial

El cálculo en  $\mathbb{R}^m$  surge de la idea de “aproximación”, y de ésta nacieron conceptos como la derivada o la diferenciabilidad. En esta sección veremos cómo el espacio tangente a una variedad busca asemejarse a ella localmente, siendo éste el primer paso a la hora de generalizar el cálculo en  $\mathbb{R}^m$ .

**Definición 1.3.1.** Sean  $M$  una variedad y  $p \in M$ . Un *vector tangente a  $M$  en  $p$*  es una función  $v : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

- Es  $\mathbb{R}$ -lineal:  $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$  para cada  $a, b \in \mathbb{R}$  y cada  $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ .
- Es Leibniziana:  $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$  para cada  $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ .

**Definición 1.3.2.** Dado  $p \in M$ , el *espacio tangente a  $M$  en  $p$* , denotado  $T_p(M)$ , es el conjunto de vectores tangentes a  $M$  en  $p$ . Usualmente llamaremos *vector contravariante* a todo  $v \in T_p(M)$ . Se llama *fibrado tangente* a  $T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$ .

**Lema 1.3.3.** Se tiene que  $T_p(M^m)$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión  $m$  para cada  $p \in M$ .

**Ejemplo 1.3.4.** Dada  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  una carta de  $M^m$  tal que  $p \in U$ , se tiene que  $\partial_i|_p$  es un vector tangente a  $M$  en  $p$  para cada  $1 \leq i \leq m$ , donde

$$\partial_i|_p = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p = \left. \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} \right|_{\varphi(p)}.$$

**Lema 1.3.5.** Dada  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  carta de  $M^m$ , para cada  $p \in U$ ,  $\{\partial_1|_p, \dots, \partial_m|_p\}$  es base de  $T_p(U)$  y cada  $v \in T_p(U)$  puede expresarse como

$$v = \sum_{i=1}^n v(x^i) \partial_i|_p.$$

**Definición 1.3.6.** Sea  $f : M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable. Para cada  $p \in M$  se define la *aplicación diferencial de  $f$  en  $p$*  como

$$\begin{aligned} df_p : T_p(M) &\longrightarrow T_{f(p)}(N) \\ v &\longmapsto df_p(v) \end{aligned}$$

donde para cada  $g \in \mathfrak{F}(N)$ ,  $df_p(v)(g) = v(g \circ f)$ .

**Lema 1.3.7.** Toda aplicación diferencial es lineal. Además, si tenemos que  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  es una carta de  $M^m$  tal que  $p \in U$  y  $(V, \phi = (y^1, \dots, y^n))$  es una carta de  $N^n$  tal que  $f(p) \in V$ , entonces la matriz de  $df_p$  en las bases de  $T_p(U)$  y  $T_{f(p)}(V)$  dadas por el Lema 1.3.5, es la matriz jacobiana de la aplicación  $\tilde{f}$  de la Definición 1.2.1:

$$df_p = \left( \frac{\partial(y_j \circ f)}{\partial x_i} \Big|_p \right) = J_p(f).$$

Para no cargar la notación y siempre que no induzca a confusión, será habitual que omitamos el subíndice  $p$  cuando nos refiramos a este tipo de objetos, salvo que lo consideremos necesario.

## 1.4. Campos vectoriales

Un campo vectorial es una asignación de un vector a cada punto de la variedad. Como veremos, estos objetos conforman uno de los pilares de nuestro estudio sobre las variedades.

**Definición 1.4.1.** Se denomina *campo vectorial sobre la variedad  $M$*  a toda aplicación  $V : M \rightarrow T(M)$  que asocia a cada  $p \in M$  un vector tangente  $V_p \in T_p(M)$ . Equivalentemente, un campo vectorial puede verse como una aplicación  $V : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$  tal que para cada  $p \in M$ ,  $(Vf)(p) = V_p(f)$  donde  $V_p \in T_p(M)$ .

**Definición 1.4.2.** Un campo vectorial  $V$  sobre  $M$  se dice *diferenciable* si  $Vf$  es diferenciable para cada  $f \in \mathfrak{F}(M)$ .

**Notación 1.4.3.** El conjunto de todos los campos vectoriales diferenciables sobre  $M$  se denota por  $\mathfrak{X}(M)$ .

**Lema 1.4.4.**  $\mathfrak{X}(M)$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y un  $\mathfrak{F}(M)$ -módulo.

**Lema 1.4.5.** Dados  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  carta en  $M^m$  y un campo vectorial  $V$  sobre  $M^m$ ,  $\{\partial_1, \dots, \partial_m\}$  es base de  $\mathfrak{X}(U)$  y por tanto, cada  $V \in \mathfrak{X}(U)$  puede expresarse como

$$V = \sum_{i=1}^m V x^i \partial_i.$$

**Definición 1.4.6.** Sea  $M$  variedad diferenciable. Se denomina *producto corchete* a la aplicación

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y] = XY - YX. \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.4.7.** Sean  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  carta de  $M^m$  y  $f \in \mathfrak{F}(U)$ . Para cada  $i, j = 1, \dots, m$  tenemos que

$$[\partial_i, \partial_j](f) = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = 0.$$

## 1.5. 1-formas y diferencial

Las 1-formas sobre una variedad son los elementos duales de los campos vectoriales. La introducción de estos elementos será fundamental para la construcción de los tensores.

**Definición 1.5.1.** Dada una variedad  $M$ , se denomina *espacio cotangente* al espacio dual de  $T_p(M)$ , esto es,  $T_p(M)^* = \{\omega : T_p(M) \rightarrow \mathbb{R} \mid \omega \text{ es lineal}\}$ . Llamamos *vector covariante* o *covector* a todo  $\omega \in T_p(M)^*$ . Se denomina *fibrado cotangente* a  $T(M)^* = \bigcup_{p \in M} T_p(M)^*$ .

**Definición 1.5.2.** Se denomina *1-forma sobre  $M$*  a cualquier aplicación  $\omega : M \rightarrow T(M)^*$  tal que a cada punto  $p \in M$  le asocia un vector covariante  $\omega_p \in T_p(M)^*$ . Equivalentemente, las 1-formas pueden verse como aplicaciones  $\omega : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$  que asocian  $V$  a  $\omega V$  para cada  $p \in M$ , donde  $\omega V$  envía cada  $p \in M$  a  $\omega_p V_p$ .



**Definición 1.5.3.** Una 1-forma  $\omega$  sobre  $M$  se dice *diferenciable* si  $\omega V$  es diferenciable para todo  $V \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Notación 1.5.4.** El conjunto de todas las 1-formas diferenciables sobre  $M$  se denota por  $\mathfrak{X}^*(M)$ .

**Lema 1.5.5.**  $\mathfrak{X}^*(M)$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y un  $\mathfrak{F}(M)$ -módulo.

**Definición 1.5.6.** Llamamos *diferencial* a la aplicación  $d : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^*(M)$  que envía cada función diferenciable  $f$  a  $df$ , donde  $(df)(V) = Vf$  para todo  $V \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Ejemplo 1.5.7.** Dada  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  una carta de  $M^m$ , las 1-formas coordenadas  $dx^i \in \mathfrak{X}^*(U)$  con  $i = 1, \dots, m$  cumplen que

$$dx^i \partial_j = \partial_j x^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i,$$

donde  $\delta_j^i$  es la *delta de Kronecker*, cuyo valor es 1 si  $i = j$  y 0 en caso contrario.

**Lema 1.5.8.** Dada  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  carta en  $M^m$ , el conjunto de 1-formas coordenadas  $\{dx^1, \dots, dx^m\}$  es base de  $\mathfrak{X}^*(U)$  y por tanto, cada  $\omega \in \mathfrak{X}^*(U)$  puede expresarse como

$$\omega = \sum_{i=1}^m \omega_i dx^i.$$

## 1.6. Campos tensoriales

Los campos tensoriales sobre una variedad pretenden generalizar los conceptos de campo vectorial y 1-formas. Estos objetos permitirán dotar a la variedad diferenciable de una estructura más amplia. Comenzaremos definiéndolos para un  $K$ -módulo  $V$ .

**Definición 1.6.1.** Sea  $V$  un módulo sobre un anillo  $K$ . Decimos que la aplicación  $A : (V^*)^r \times V^s \rightarrow K$  con  $r, s \geq 0$  no simultáneamente nulos es un *tensor de tipo  $(r, s)$  sobre  $V$*  si es  $K$ -multilineal.

**Notación 1.6.2.** El conjunto de todos los tensores sobre  $V$  de tipo  $(r, s)$  lo denotaremos por  $\mathfrak{T}_s^r(V)$ .

**Nota 1.6.3.** Por convenio,  $\mathfrak{T}_0^0(V) = K$ .

**Proposición 1.6.4.** *Se tiene que  $\mathfrak{T}_s^r(V)$  es un  $K$ -módulo.*

**Definición 1.6.5.** Un campo tensorial  $T$  en una variedad  $M$  de tipo  $(r, s)$  es un tensor sobre el  $\mathfrak{F}(M)$ -módulo  $\mathfrak{X}(M)$ , esto es,  $T : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{F}(M)$  es  $\mathfrak{F}(M)$ -multilineal.

**Notación 1.6.6.** Por simplicidad se denotará el conjunto de todos los campos tensoriales sobre la variedad  $M$  de tipo  $(r, s)$  como  $\mathfrak{T}_s^r(M)$ .

**Proposición 1.6.7.** *Dada una variedad  $M$  se cumple que:*

1.  $\mathfrak{T}_1^0(M) = \mathfrak{X}^*(M)$ .
2.  $\mathfrak{T}_0^1(M) = \mathfrak{X}(M)$ .
3. Si  $T : \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  es  $\mathfrak{F}(M)$ -multilineal entonces la aplicación:

$$\begin{aligned} \tilde{T} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^s &\longrightarrow \mathfrak{F}(M) \\ (\omega, V_1, \dots, V_s) &\longmapsto \omega T(V_1, \dots, V_s) \end{aligned}$$

es un campo tensorial de tipo  $(1, s)$ .

**Definición 1.6.8.** Un campo tensorial  $T$  sobre  $M$  se dice *covariante* si es de tipo  $(0, s)$  y *contravariante* si es de tipo  $(r, 0)$ .

**Definición 1.6.9.** Sean  $T_1 \in \mathfrak{T}_s^r(M)$  y  $T_2 \in \mathfrak{T}_{s'}^{r'}(M)$ . Definimos el *producto tensorial* de  $T_1$  y  $T_2$  como  $T_1 \otimes T_2 : \mathfrak{X}^*(M)^{r+r'} \times \mathfrak{X}(M)^{s+s'} \rightarrow \mathfrak{F}(M)$  dado por:

$$\begin{aligned} (T_1 \otimes T_2)(\omega^1, \dots, \omega^{r+r'}, V_1, \dots, V_{s+s'}) \\ = T_1(\omega^1, \dots, \omega^r, V_1, \dots, V_s) T_2(\omega^{r+1}, \dots, \omega^{r+r'}, V_{s+1}, \dots, V_{s+s'}). \end{aligned}$$

**Definición 1.6.10.** Dados  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  carta de  $M^m$  y  $T \in \mathfrak{T}_s^r(U)$ , llamamos *componentes de  $T$  relativos a  $\varphi$*  a las funciones

$$T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s}) \in \mathfrak{F}(U)$$

donde  $i_k, j_l \in \{1, \dots, m\}$  para cada  $k = 1, \dots, r$  y  $l = 1, \dots, s$ .

**Lema 1.6.11.** *Dados  $(U, (x^1, \dots, x^m))$  carta de  $M^m$  y  $T \in \mathfrak{T}_s^r(U)$ , se tiene que*

$$T = \sum T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s},$$

donde la suma se mueve en  $i_k, j_l \in \{1, \dots, m\}$  para cada  $k = 1, \dots, r$  y  $l = 1, \dots, s$ .

Los siguientes resultados nos permitirán dar una interpretación más intuitiva de lo que es un tensor, que a su vez se asemeja más a la concepción que la Física tiene sobre los mismos: objetos abstractos que adquieren “forma” al fijar una base del espacio vectorial de partida, con las consecuentes reglas de cambio de base.

**Lema 1.6.12.** Sean  $(U, \varphi)$  carta en  $M^m$  con  $p \in U$ ,  $T \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ ,  $\omega^1, \dots, \omega^r \in \mathfrak{X}^*(U)$  y  $V_1, \dots, V_s \in \mathfrak{X}(U)$  tales que  $\omega_i(p) = 0$  para algún  $1 \leq i \leq r$  ó  $V_j(p) = 0$  para algún  $1 \leq j \leq s$ . Entonces  $T(\omega^1, \dots, \omega^r, V_1, \dots, V_s)(p) = 0$ .

**Proposición 1.6.13.** Sean  $p \in M$  y  $T \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ . Consideremos  $\omega^1, \dots, \omega^r$  y  $\theta^1, \dots, \theta^r \in \mathfrak{X}^*(M)$  tales que  $\omega^i(p) = \theta^i(p)$  para  $i = 1, \dots, r$ ;  $X_1, \dots, X_s$  y  $Y_1, \dots, Y_s \in \mathfrak{X}(M)$  tales que  $X_j(p) = Y_j(p)$  para  $j = 1, \dots, s$ . Entonces

$$T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)(p) = T(\theta^1, \dots, \theta^r, Y_1, \dots, Y_s)(p).$$

De la proposición anterior se deduce que podemos interpretar un campo tensorial  $T \in \mathfrak{T}_s^r(M)$  como una aplicación que a cada punto  $p \in M$  le asocia el tensor  $T_p \in \mathfrak{T}_s^r(T_p(M))$  dado por

$$\begin{aligned} T_p : (T_p(M)^*)^r \times (T_p(M))^s &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\theta^1, \dots, \theta^r, v_1, \dots, v_s) &\longmapsto T(\omega^1, \dots, \omega^r, V_1, \dots, V_s)(p) \end{aligned}$$

donde cada  $\omega^i$  con  $i = 1, \dots, r$  es cualquier 1-forma con  $\omega^i(p) = \theta^i$  y  $V_j$  con  $j = 1, \dots, s$  es cualquier campo vectorial con  $V_j(p) = v_j$ .

Un campo tensorial sobre una variedad es efectivamente un *campo*, en el sentido de que asocia cierto objeto (tensor) a cada punto de la variedad. Ésta será la interpretación más común que haremos sobre los tensores.

**Ejemplo 1.6.14** (Regla de cambio de base). Veamos cómo cambian las componentes de un tensor  $T \in \mathfrak{T}_2^1(U)$  relativas al sistema de coordenadas  $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$  al pasar a un sistema de coordenadas  $\phi = (y^1, \dots, y^m)$ . Denotemos por  ${}^{(\varphi)}T_{jk}^i = T(dx^i, \partial_j^x, \partial_k^x)$  a las componentes de  $T$  relativas a  $\varphi$  y por  ${}^{(\phi)}T_{jk}^i = T(dy^i, \partial_j^y, \partial_k^y)$  a las relativas a  $\phi$ . Por un lado tenemos los cambios de base

$$\begin{aligned} \partial_i^y &= \sum_{j=1}^m \partial_i^y x^j \partial_j^x = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \partial_j^x = \sum_{j=1}^m a_j^i \partial_j^x, \\ dy^i &= \sum_{j=1}^m dy^i \partial_j^x dx^j = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j = \sum_{j=1}^m b_j^i dx^j. \end{aligned}$$

Entonces, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
 {}^{(\phi)}T_{jk}^i &= T(dy^i, \partial_j^y, \partial_k^y) \\
 &= T\left(\sum_{l=1}^m b_l^i dx^l, \sum_{r=1}^m a_j^r \partial_r^x, \sum_{s=1}^m a_k^s \partial_s^x\right) \\
 &= \sum_{j,r,s=1}^m b_l^i a_j^r a_k^s T(dx^l, \partial_r^x, \partial_s^x) \\
 &= \sum_{j,r,s=1}^m b_l^i a_j^r a_k^s {}^{(\varphi)}T_{rs}^l \\
 &= \sum_{j,r,s=1}^m {}^{(\varphi)}T_{rs}^l \frac{\partial y^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^r}{\partial y^j} \frac{\partial x^s}{\partial y^k}.
 \end{aligned}$$

**Definición 1.6.15.** Sean  $(U, (x^1, \dots, x^m))$  carta de  $M^m$  y  $T \in \mathfrak{T}_s^r(U)$ . Llamamos *contracción*  $(i, j)$  del tensor  $T$  al campo tensorial  $C_j^i(T) \in \mathfrak{T}_{s-1}^{r-1}(U)$  tal que

$$\begin{aligned}
 C_j^i(T)(\omega^1, \dots, \omega^{r-1}, V_1, \dots, V_{s-1}) \\
 = \sum_{k=1}^m T(\omega^1, \dots, \omega^{i-1}, dx^k, \omega^i, \dots, \omega^{r-1}, V_1, \dots, V_{j-1}, \partial_k, V_j, \dots, V_{s-1}).
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.6.16.** Consideremos  $T \in \mathfrak{T}_1^1(\mathbb{R}^m)$  que podemos identificarlo con una matriz. La única contracción posible  $C_1^1(T) \in \mathbb{R}$  es la que da la traza de  $T$  ya que

$$C_1^1(T) = \sum_{k=1}^m T(dx^k, \partial_k) = \sum_{k=1}^m dx^k \sum_{j=1}^m t_k^j \partial_j = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m t_k^j dx^k \partial_j = \sum_{k=1}^m t_k^k.$$

**Definición 1.6.17.** Sean  $M$  y  $N$  variedades y  $f : M \rightarrow N$  diferenciable. Dado  $T \in \mathfrak{T}_s^0(N)$  con  $s$  no nulo, llamamos *pullback* de  $T$  por  $f$  al campo tensorial definido por

$$(f^*T)_p(V_1, \dots, V_s) = T_{f(p)}(df_p V_1, \dots, df_p V_s) \in \mathfrak{T}_s^0(M)$$

para todos  $V_i \in T_p(M)$ ,  $p \in M$ .

**Definición 1.6.18.** Sea  $M$  una variedad. Una *derivación tensorial* en  $M$  es un conjunto de aplicaciones  $\mathbb{R}$ -lineales  $\mathcal{D} = D_s^r : \mathfrak{T}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{T}_s^r(M)$  con  $r, s \geq 0$  tal que para cualesquiera  $T_1, T_2, T \in \mathfrak{T}_s^r(M)$  se tiene que

- $\mathcal{D}(T_1 \otimes T_2) = \mathcal{D}T_1 \otimes T_2 + T_1 \otimes \mathcal{D}T_2$ ,
- $\mathcal{D}(CT) = C(\mathcal{D}T)$  con  $C$  contracción.

**Lema 1.6.19.** Sean  $M$  variedad y  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$  dos derivaciones tensoriales en  $M$  tales que  $\mathcal{D}_1 f = \mathcal{D}_2 f$  y  $\mathcal{D}_1 V = \mathcal{D}_2 V$  para todo  $f \in \mathfrak{F}(M)$  y  $V \in \mathfrak{X}(M)$ . Entonces  $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$ .

**Proposición 1.6.20.** Sean  $M$  variedad,  $V \in \mathfrak{X}(M)$  y la aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal  $\mathfrak{D} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  tal que  $\mathfrak{D}(fX) = (Vf)X + f\mathfrak{D}X$  para todo  $f \in \mathfrak{F}(M)$  y  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Entonces existe una única derivación  $\mathcal{D}$  en  $M$  tal que  $\mathcal{D}_0^0 = V$  y  $\mathcal{D}_0^1 = \mathfrak{D}$ .

**Proposición 1.6.21** (Regla de la cadena). Sean  $\mathfrak{D}$  una derivación en una variedad  $M$  y  $T \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(T(\omega^1, \dots, \omega^r, V_1, \dots, V_s)) &= (\mathfrak{D}T)(\omega^1, \dots, \omega^r, V_1, \dots, V_s) \\ &+ \sum_{i=1}^r T(\omega^1, \dots, \mathfrak{D}\omega^i, \dots, \omega^r, V_1, \dots, V_s) \\ &+ \sum_{j=1}^s T(\omega^1, \dots, \omega^r, V_1, \dots, \mathfrak{D}V_j, \dots, V_s). \end{aligned}$$



# Capítulo 2

## Formas bilineales y producto escalar

Hasta ahora la noción de producto escalar en un espacio vectorial consistía en una forma bilineal simétrica definida positiva sobre dicho espacio vectorial. En este capítulo generalizaremos dicho concepto tratando las formas bilineales desde el punto de vista tensorial y relajando la condición de ser definida positiva, imponiendo en su lugar que sea *no degenerada*. En [4] y [15] puede profundizarse en los conceptos que van a presentarse.

### 2.1. Formas bilineales simétricas

Las formas bilineales son un tipo de tensores que constituyen el paso previo a la noción de producto escalar, y por tanto, al concepto de medida tal y como ocurre en  $\mathbb{R}^m$ .

**Definición 2.1.1.** Sean  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y  $b \in \mathfrak{T}_2^0(V)$ . Se dice que  $b$  es una *forma bilineal simétrica* si  $b(u, v) = b(v, u)$  para cada  $u, v \in V$ .

**Definición 2.1.2.** Sea  $b$  una forma bilineal simétrica sobre  $V$ . Se dice que  $b$  es:

- *Definida positiva (negativa)* si se cumple que  $b(v, v) > 0 (< 0)$  para todo  $v \in V \setminus \{0\}$ .
- *Semidefinida positiva (negativa)* si se cumple que  $b(v, v) \geq 0 (\leq 0)$  para todo  $v \in V \setminus \{0\}$ .

- *No degenerada* si se cumple que  $b(u, v) = 0$  para todo  $u \in V$  implica que  $v = 0$ . En caso contrario se denomina *degenerada*.

Además se dice *definida (semidefinida)* si se da alguno de los dos casos del primer (segundo) punto.

**Definición 2.1.3.** Sea  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal simétrica en  $V$ . La función  $q : V \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $q(v) = b(v, v)$  se denomina *forma cuadrática asociada a  $b$* .

Una propiedad interesante de la forma cuadrática es que nos permite reconstruir la forma bilineal a partir de ella gracias a la *identidad de polarización*:

$$b(u, v) = \frac{1}{2} [q(u + v) - q(u) - q(v)].$$

**Definición 2.1.4.** Sean  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  una base de  $V$  y  $b$  una forma bilineal simétrica en  $V$ . La *matriz de  $b$  en la base  $\mathcal{B}$*  es la matriz

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & \cdots & b(e_1, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b(e_n, e_1) & \cdots & b(e_n, e_n) \end{pmatrix}.$$

Notemos que esta matriz es claramente simétrica por serlo  $b$ .

Puesto que la interpretación matricial de este tipo de tensores supone facilidades a la hora de trabajar con ellos, vamos a demostrar el siguiente resultado.

**Proposición 2.1.5.** *Sea  $b$  una forma bilineal simétrica sobre  $V$ . Entonces  $b$  es no degenerada si y sólo si la matriz de  $b$  en cualquier base de  $V$  es invertible.*

*Demostración.* Consideremos  $\{e_1, \dots, e_n\}$  base de  $V$  y  $u, v \in V$ . Por la linealidad de  $b$  se tiene que

$$b(u, v) = b\left(\sum_{i=1}^n u^i e_i, v\right) = \sum_{i=1}^n u^i b(e_i, v).$$

Por tanto  $b(u, v) = 0$  para cada  $u \in V$  si y sólo si  $b(e_i, v) = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .



Equivalentemente

$$b(e_i, v) = b\left(e_i, \sum_{j=1}^n v^j e_j\right) = \sum_{j=1}^n v^j b_{ij} = 0.$$

Es decir,  $b$  es degenerada si y sólo si existen  $v^1, \dots, v^n$  no simultáneamente nulos tal que se tiene lo anterior para cada  $i$ , lo que es equivalente a decir que las columnas de la matriz asociada a  $b$  son linealmente independientes y en consecuencia, que dicha matriz es invertible.  $\square$

**Definición 2.1.6.** Sea  $b$  una forma bilineal simétrica sobre  $V$ . Llamamos *índice  $\nu$  de  $b$  en  $V$*  a la dimensión del mayor subespacio  $W \subset V$  tal que la restricción de  $b$  a  $W$ ,  $b|_{W \times W}$ , es definida negativa.

En la definición anterior, nos referimos con *mayor subespacio* al subespacio de dimensión mayor.

## 2.2. Producto escalar

Un producto escalar es un tipo de forma bilineal simétrica. Comenzaremos viendo ciertos aspectos en un espacio vectorial genérico.

**Definición 2.2.1.** Dado un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita, decimos que  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  es un *producto escalar en  $V$*  si es una forma bilineal simétrica no degenerada. Al par  $(V, g)$  lo llamamos *espacio vectorial con producto escalar*.

**Definición 2.2.2.** Sean  $(V, g)$  un espacio vectorial con producto escalar,  $u, w \in V$  y  $U, W \subseteq V$  subespacios vectoriales. Se dice que:

1.  $u$  y  $w$  son *ortogonales* si  $g(u, w) = 0$ ,
2.  $U$  y  $W$  son *ortogonales* si  $u$  y  $w$  son ortogonales para todos  $u \in U$  y  $w \in W$ .

Como es habitual, denotaremos la relación de ortogonalidad por  $u \perp w$ . Además, si  $W$  es un subespacio de un espacio vectorial  $V$ , notaremos por  $W^\perp$  al conjunto  $\{v \in V \mid w \perp v \text{ para todo } w \in W\}$ . Es sencillo comprobar que  $W^\perp$  es un subespacio de  $V$ .

**Observación 2.2.3.** Notemos que a diferencia de la definición usual de producto escalar, ésta permite la existencia de vectores no nulos ortogonales a sí mismos o vectores ortogonales que no son perpendiculares entre sí en el sentido Euclídeo. Por ejemplo, consideremos en  $\mathbb{R}^2$  el producto escalar  $g = -dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2$  en la base canónica. Los vectores de la forma  $u = (c, \pm c)$  con  $c \in \mathbb{R}$  son ortogonales a sí mismos y los vectores  $v_2 = (b, a)$  y  $v_3 = (-b, -a)$  son ortogonales a  $v_1 = (a, b)$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  (véase la Figura 2.1).

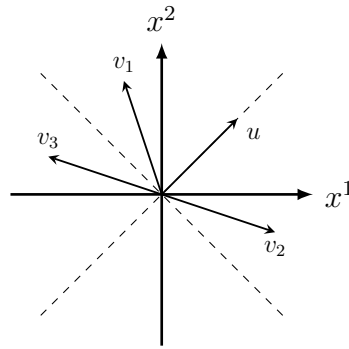


Figura 2.1. La noción Euclídea de perpendicularidad se pierde al generalizar el concepto de producto escalar.

**Lema 2.2.4.** Sean  $(V, g)$  un espacio vectorial con producto escalar y  $W \subseteq V$  subespacio vectorial. Entonces  $(W^\perp)^\perp = W$  y  $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$ .

*Demostración.* Sean  $n = \dim V$ ,  $k = \dim W$  y  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base de  $V$  tal que  $\{e_1, \dots, e_k\}$  es base de  $W$ , que sabemos que existe. Un vector  $v \in V$  pertenece a  $W^\perp$  si y sólo si  $g(v, e_i) = 0$  para  $i = 1, \dots, k$ . Por tanto  $\sum_{j=1}^n g_{ij} v^j = 0$  para  $i = 1, \dots, k$ . Esto es un sistema de  $k$  ecuaciones con  $n$  incógnitas. Por el Lema 2.1.5 la matriz de coeficientes métricos es invertible y por tanto las filas de la matriz de coeficientes del sistema son linealmente independientes, luego debe tener rango  $k$ . Así, el espacio de soluciones, que es precisamente  $W^\perp$ , tiene dimensión  $n - k$ . Por otro lado, si  $v \in (W^\perp)^\perp$  entonces  $v \perp W^\perp$  y  $W \subset (W^\perp)^\perp$ . Por la relación entre las dimensiones tenemos que  $\dim W = \dim (W^\perp)^\perp$  y los subespacios coinciden.  $\square$

**Definición 2.2.5.** Sea  $(V, g)$  un espacio vectorial con producto escalar. Decimos que el subespacio  $W \subseteq V$  es *no degenerado* si  $g|_W$  es no degenerado.

**Lema 2.2.6.** Sean  $(V, g)$  un espacio vectorial con producto escalar y  $W \subseteq V$  subespacio vectorial. Entonces  $W$  es no degenerado si y sólo si  $V$  es suma directa de  $W$  y  $W^\perp$ .

*Demostración.* Puesto que  $W$  y  $W^\perp$  tienen dimensión finita, por el Lema 2.2.4 se tiene que

$$\dim(W + W^\perp) + \dim(W \cap W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp = n,$$

con  $n = \dim V$ . Por tanto  $W + W^\perp = V$  si y sólo si  $W \cap W^\perp = \{0\}$ , lo que es equivalente a  $V = W \oplus W^\perp$ . Por otro lado, puesto que  $W \cap W^\perp = \{w \in W \mid w \perp W\}$ , la condición  $W \cap W^\perp = \{0\}$  equivale a la no degeneración de  $W$ .  $\square$

**Definición 2.2.7.** Sea  $(V, g)$  un espacio vectorial con producto escalar. La norma de  $v \in V$  se define como  $\|v\| = \sqrt{|g(v, v)|}$ . Se dice que  $v$  es un *vector unitario* si  $g(v, v) = \pm 1$ , esto es,  $\|v\| = 1$ .

**Definición 2.2.8.** Sea  $(V, g)$  un espacio vectorial con producto escalar y  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base de  $V$ . Se dice que es una *base ortonormal* si está formada por vectores unitarios mutuamente ortogonales. Llamamos *signatura* de  $(V, g)$  a  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  donde  $\varepsilon_i = g(e_i, e_i) = \pm 1$  para cada  $1 \leq i \leq n$ .

Cuando nos refiramos a la signatura, reordenaremos los vectores de la base de forma que, de haber signos negativos, éstos queden primeros en la signatura.

**Proposición 2.2.9.** Sea  $(V, g)$  un espacio vectorial con producto escalar. Sea  $k$  el número de signos negativos en la signatura de cualquier base ortonormal de  $V$ . Entonces  $k$  coincide con el índice  $\nu$  de  $g$  en  $V$ .

*Demostración.* Consideremos una base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $V^n$ , y supongamos que los  $k$  primeros elementos de la signatura de la base son los signos negativos.

Si  $g$  es definida hemos acabado, porque de ser definida positiva  $k = \nu = 0$  y de serlo negativa  $k = \nu = n$ . Supongamos entonces que  $0 < k < n$ . Sea  $W = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$ , entonces  $g|_W$  es definida negativa claramente, por tanto  $k \leq \nu$ .

Por otro lado, sea  $U \subset V$  un subespacio tal que  $g|_U$  sea definida negativa y sea

$$\begin{aligned} \pi : U &\longrightarrow W \\ u &\longmapsto - \sum_{i=1}^k g(u, e_i) e_i \end{aligned}$$

la aplicación que asocia cada  $u \in U$  con su proyección ortogonal en  $W$ . Claramente,  $\pi$  es lineal por ser  $g$  lineal en  $u$ . Veamos que es inyectiva. Como es lineal, basta comprobar que  $\text{Ker}(\pi) = \{0\}$ . Sea  $u \in U$  tal que  $\pi(u) = 0$ . Entonces

$$u = \sum_{i=k+1}^n g(u, e_i) e_i.$$

Por tanto

$$g(u, u) = \sum_{i=k+1}^n g(u, e_i)^2 \leq 0,$$

ya que  $g|_U$  era definida negativa, lo que conduce a  $g(u, e_i) = 0$  para todo  $k+1 \leq i \leq n$  y tenemos que  $u = 0$ . Puesto que  $\pi$  es inyectiva, tenemos que  $\dim U \leq \dim W$  y por tanto  $\nu \leq k$ . Como  $k \leq \nu$  y  $\nu \leq k$ , concluimos que  $\nu = k$ .  $\square$

Del resultado anterior se deduce que la signatura de  $(V, g)$ , y por tanto el índice  $\nu$ , sólo dependen del producto escalar  $g$ , y no de la base.

Todas estas propiedades nos permiten hacer la siguiente clasificación de los vectores de un espacio vectorial con producto escalar.

**Definición 2.2.10.** Sea  $v \in V$  con  $(V, g)$  un espacio vectorial con producto escalar. Decimos que el *tipo causal* de  $v$  es

1. *espacial* si  $g(v, v) > 0$  o  $v = 0$ ,
2. *nulo o luminoso* si  $g(v, v) = 0$  y  $v \neq 0$ ,
3. *temporal* si  $g(v, v) < 0$ .

Además, decimos que  $v$  es *causal* si no es espacial.

En términos de la definición anterior, el índice será entonces el número de vectores temporales de cualquier base ortonormal del espacio vectorial.

Los nombres de los tipos causales provienen históricamente de la Física. Comentaremos su interpretación física y el por qué de esta nomenclatura en el Capítulo 5.

# Capítulo 3

## Variedades semi-Riemannianas

El siguiente paso en la generalización de la geometría clásica consiste en trasladar a las variedades los conceptos geométricos que manejamos en el espacio Euclídeo (longitudes, líneas rectas, paralelismo, etc.). En  $\mathbb{R}^m$  todas estas nociones derivan de la definición de producto escalar y precisamente la generalización de este concepto es la que permite dotar a la variedad de una *métrica*, es decir, una idea de medida sobre la misma. A partir de aquí veremos cómo generalizar conceptos conocidos en superficies como lo es la *curvatura*, definiendo el *tensor de curvatura de Riemann* [3], [4], [15].

### 3.1. Variedades semi-Riemannianas

La nueva estructura con la que dotaremos una variedad se debe a la *métrica*, una regla que da una herramienta para medir (producto escalar) a cada punto de la variedad. Concretamente nos interesará un cierto tipo de métrica, la *Lorentziana*, pues veremos que el espacio-tiempo puede modelarse a través de este tipo de variedad.

**Definición 3.1.1.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Un *tensor métrico* (o *métrica*)  $g$  sobre  $M$  es un campo tensorial covariante  $g \in \mathfrak{T}_2^0(M)$  que a cada punto  $p \in M$  le asocia un producto escalar  $g_p$  en  $T_p(M)$  tal que el índice  $\nu_p$  de  $g_p$  es el mismo para cada  $p$ .

**Definición 3.1.2.** Una *variedad semi-Riemanniana* es un par  $(M, g)$  donde  $M$  es una variedad diferenciable y  $g$  es un tensor métrico sobre  $M$ .

En adelante, las variedades que consideremos serán semi-Riemannianas. Normalmente denotaremos a la variedad  $(M, g)$  como  $M$ . También usaremos

la notación  $g(u, w) = \langle u|w \rangle$  cuando se sobreentienda la métrica. Además, diremos que el *índice de  $M$*  es  $\nu$ , el propio índice característico de  $g$ .

Fijada una carta  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  de  $M^m$ , el tensor métrico viene determinado por las funciones coordenadas de la forma

$$g = \sum_{i,j=1}^m g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

donde los  $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = \langle \partial_i | \partial_j \rangle$ , denominados *coeficientes métricos*, son las componentes de la matriz asociada a  $g$  en ese sistema de coordenadas.

Entonces, si  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$  podemos expresar  $X = \sum_i X^i \partial_i$ ,  $Y = \sum_j Y^j \partial_j$  y por tanto

$$\begin{aligned} \langle X|Y \rangle &= g \left( \sum_{i=1}^m X^i \partial_i, \sum_{j=1}^m Y^j \partial_j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^m g(X^i \partial_i, Y^j \partial_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^m X^i Y^j g(\partial_i, \partial_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^m g_{ij} X^i Y^j. \end{aligned}$$

Además, por ser  $g$  no degenerado, en cada punto de  $U$  la matriz  $(g_{ij})$  es invertible por la Proposición 2.1.5. Dicha inversa se denota usualmente como  $(g^{ij})$ .

**Definición 3.1.3.** Sea  $M$  una variedad semi-Riemanniana de dimensión  $m$ . Decimos que  $M$  es:

1. *Riemanniana* si tiene índice  $\nu = 0$ .
2. *Lorentziana* si  $m > 1$  y tiene índice  $\nu = 1$ .

**Ejemplo 3.1.4.** Consideremos en  $\mathbb{R}^m$  el tensor métrico que cambia el signo de los  $\nu$  primeros términos del producto escalar habitual de  $\mathbb{R}^m$  dado por

$$g = - \sum_{i=1}^{\nu} dx^i \otimes dx^i + \sum_{i=\nu+1}^m dx^i \otimes dx^i, \quad \text{donde } 1 \leq \nu \leq m.$$

El espacio  $(\mathbb{R}^m, g)$  es una variedad semi-Riemanniana de índice  $\nu$  denominado espacio semi-Euclídeo  $\mathbb{R}^m_{\nu}$ .

- En el caso  $\nu = 0$ , el espacio semi-Euclídeo se reduce a la variedad Riemanniana  $\mathbb{R}^m$  con el producto escalar habitual.
- El espacio semi-Euclídeo  $\mathbb{R}_1^m$  se denomina *m-espacio de Lorentz-Minkowski* y se denota por  $\mathbb{L}^m$ .

El 4-espacio de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^4$  es el modelo más simple de espacio-tiempo (una coordenada temporal y tres espaciales) y en él se enmarca toda la Relatividad Especial, como veremos en el Capítulo 5.

**Definición 3.1.5.** Sea  $M^m$  una variedad. Llamamos *elemento de línea* a la forma cuadrática asociada al producto escalar  $g_p$  para cada  $p \in M$ , denotada por  $ds^2$ . Fijada una carta  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  de  $M$ , se tiene que

$$q = ds^2 = \sum_{i,j=1}^m g_{ij} dx^i dx^j.$$

**Definición 3.1.6.** Sean  $(M, g_M)$  y  $(N, g_N)$  variedades. Una *isometría* de  $M$  en  $N$  es un difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  tal que  $f^*g_N = g_M$ , esto es,  $g_M$  es el pullback de  $g_N$  por  $f$ . Cuando existe una isometría entre variedades, éstas se dicen *isométricas*.

Una isometría conserva los tensores métricos entre variedades, lo que es equivalente a que conserve sus elementos de línea  $f^*(ds_N^2) = ds_M^2$ . Intuitivamente, las isometrías son los difeomorfismos que no producen deformaciones entre las variedades y dan lugar a la misma forma de medir sobre ellas, y por tanto, a las mismas geometrías.

Haciendo uso de las variedades producto, podemos construir variedades semi-Riemannianas con diversas estructuras a partir de otras, como son los denominados *productos warped*. Como veremos en el Capítulo 5, varios modelos físicos que describen el espacio-tiempo pueden expresarse a través de este producto.

**Definición 3.1.7.** Sean  $(B, g_B)$  y  $(F, g_F)$  variedades, que llamamos *base* y *fibra* respectivamente, y  $f \in \mathfrak{F}(B)$  una función positiva. El *producto warped*  $M = B \times_f F$  es la variedad producto  $B \times F$  dotada del tensor métrico

$$g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F),$$

donde  $\pi^*$  y  $\sigma^*$  son los pullbacks por las proyecciones  $\pi : B \times F \rightarrow B$  y  $\sigma : B \times F \rightarrow F$  respectivamente.

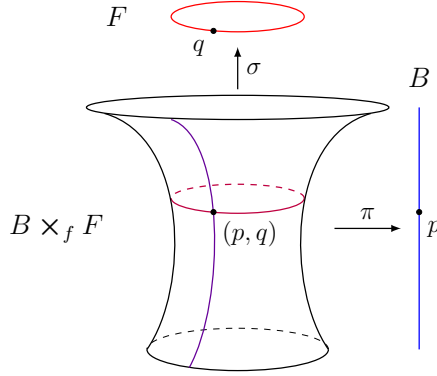


Figura 3.1. Producto warped. La idea intuitiva consiste en que para cada punto de la base  $B$  se obtiene una copia de la fibra  $F$ , deformada mediante la función  $f$ .

### 3.2. Conexión de Levi-Civita

Buscando generalizar el concepto de *derivada* sobre una variedad semi-Riemanniana, vamos a introducir la *conexión*, una aplicación que buscará “medir” cuánto varía un campo vectorial a lo largo de la dirección que indique otro campo vectorial. Además veremos que de entre todas las conexiones, existe una única de ellas que posee propiedades claves en relación a la métrica de la variedad: la conexión de Levi-Civita.

Comenzamos esta sección viendo un par de lemas técnicos que serán de utilidad.

**Lema 3.2.1.** Sean  $M$  una variedad y  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ . Si  $\langle V|X \rangle = \langle W|X \rangle$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , entonces  $V = W$ .

*Demostración.* La no degeneración del tensor métrico implica que para cada  $p \in M$ , se tiene que  $(V - W)_p = 0$  ya que  $\langle (V - W)_p | X_p \rangle = 0$ .  $\square$

**Lema 3.2.2.** Sea  $M$  una variedad. Dada cualquier 1-forma  $\omega \in \mathfrak{X}(M)$  existe un único campo  $V \in \mathfrak{X}(M)$  tal que  $\omega(X) = \langle V|X \rangle$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

*Demostración.* Consideremos una carta  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  de  $M$ . Sea  $\omega = \sum_{i=1}^m \omega_i dx^i$  y definamos el campo vectorial  $V = \sum_{i,j=1}^m g^{ij} \omega_i \partial_j$ . Entonces

$$\langle V|\partial_k \rangle = \sum_{i,j=1}^m g^{ij} \omega_i \langle \partial_j|\partial_k \rangle = \sum_{i,j=1}^m \omega_i g^{ij} g_{jk} = \sum_{i=1}^m \omega_i \delta_k^i = \omega_k = \omega(\partial_k).$$



Por tanto  $\omega(X) = \langle V|X \rangle$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  por linealidad. Para ver la unicidad supongamos que existen dos campos vectoriales  $V, W$  tales que  $\omega(X) = \langle V|X \rangle = \langle W|X \rangle$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Por el Lema 3.2.1 tenemos que  $V = W$  y hemos acabado.  $\square$

**Definición 3.2.3.** Una *conexión*  $D$  sobre una variedad  $M$  es una aplicación  $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  tal que para  $V, X \in \mathfrak{X}(M)$

- P1.  $D_V X$  es  $\mathfrak{F}(M)$ -lineal en  $V$ ,
- P2.  $D_V X$  es  $\mathbb{R}$ -lineal en  $X$ ,
- P3.  $D_V(fX) = (Vf)X + fD_V X$  para toda  $f \in \mathfrak{F}(M)$ .

A cada  $D_V X \in \mathfrak{X}(M)$  se le llama *derivada covariante* de  $X$  con respecto de  $V$  para la conexión  $D$ .

El siguiente lema muestra el carácter local de la conexión, permitiéndonos hacer cálculos con ella dada una carta de la variedad.

**Lema 3.2.4.** Sean  $D$  una conexión sobre una variedad  $M$ ,  $p \in M$  y  $V, V', X, X' \in \mathfrak{X}(M)$  tales que  $V = V'$  y  $X = X'$  en un entorno  $U$  de  $p$ . Entonces  $(D_V X)_p = (D_{V'} X')_p$ .

*Demostración.* Como  $X = X'$  en el entorno  $U$  de  $p$ , se tiene que  $X - X' = 0$  en dicho entorno. Entonces, por el Lema de Extensión 1.2.8, existen  $f \in \mathfrak{F}(M)$  y un abierto  $W$  con  $p \in W \subseteq U$ , tales que:

$$f(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \in M \setminus U \\ 0 & \text{si } q \in W \end{cases}$$

Tenemos entonces que  $X - X' = f(X - X')$ , por lo que aplicando la conexión a esta expresión llegamos a:

$$\begin{aligned} D_V(X - X') &= D_V fX - D_V fX' \\ &= (Vf)X - (Vf)X' + fD_V X - fD_V X'. \end{aligned}$$

Puesto que  $(Vf)_p = V_p f$ ,  $f = 0$  en  $W$  entorno de  $p$  y en particular  $f(p) = 0$ , tenemos que

$$(D_V X)_p - (D_V X')_p = (Vf)_p X_p - (Vf)_p X'_p + f(p)(D_V X - D_V X')_p = 0,$$

y por tanto  $(D_V X)_p = (D_V X')_p$ .

Ahora, puesto que  $V - V' = 0$  en  $U$ , de manera análoga a lo anterior existen una función  $g \in \mathfrak{F}(M)$  y un abierto  $W' \subseteq U$  de forma que  $(D_V X')_p = (D_{V'} X')_p$ , por lo que  $(D_V X)_p = (D_V X')_p = (D_{V'} X')_p$ .  $\square$

**Teorema 3.2.5** (Teorema fundamental de la geometría semi-Riemanniana). *Sea  $M$  una variedad. Entonces existe una única conexión, que denotaremos por  $\nabla$ , tal que para cada  $V, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  se tiene que*

$$P4. [V, X] = \nabla_V X - \nabla_X V,$$

$$P5. V \langle X|Y \rangle = \langle \nabla_V X|Y \rangle + \langle X|\nabla_V Y \rangle.$$

*Dicha conexión se denomina conexión de Levi-Civita de  $M$  y viene caracterizada por la fórmula de Koszul:*

$$\begin{aligned} 2 \langle \nabla_V X|Y \rangle &= V \langle X|Y \rangle + X \langle Y|V \rangle - Y \langle V|X \rangle \\ &\quad - \langle V|[X, Y] \rangle + \langle X|[Y, V] \rangle + \langle Y|[V, X] \rangle. \end{aligned}$$

*Demostración.* Denotemos por  $K(V, X, Y)$  el lado derecho de la fórmula de Koszul. Es fácil comprobar que, fijados los campos vectoriales  $V, X \in \mathfrak{X}(M)$  la aplicación  $Y \rightarrow K(V, X, Y)$  es  $\mathfrak{F}(M)$ -lineal en  $Y$  y por tanto es 1-forma. Por el Lema 3.2.2 existe un único campo vectorial que denotaremos por  $\nabla_V X$  tal que  $2 \langle \nabla_V X|Y \rangle = K(V, X, Y)$  para todo  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  y tenemos la fórmula de Koszul. Veamos que tal campo vectorial cumple las cinco propiedades mencionadas. Para ello, sólo vamos a indicar ciertos pasos pues aunque no es complicado, hay cálculos engorrosos y todos se basan en la fórmula de Koszul. Sea  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  arbitrario.

Para probar (P1) y (P2) consideremos  $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ ,  $U, W \in \mathfrak{X}(M)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} 2 \langle \nabla_{fU+gW}(\lambda X)|Y \rangle &= K(fU + gW, \lambda X, Y) \\ &= 2\lambda f K(U, X, Y) + 2\lambda g K(W, X, Y) \\ &= 2\lambda (f \langle \nabla_U X|Y \rangle + g \langle \nabla_W X|Y \rangle) \\ &= 2 \langle \lambda (f \nabla_U X + g \nabla_W X)|Y \rangle. \end{aligned}$$

Para probar (P3) consideremos

$$\begin{aligned} 2 \langle \nabla_V(fX)|Y \rangle &= V \langle fX|Y \rangle + fX \langle Y|V \rangle - Y \langle V|fX \rangle \\ &\quad - \langle V|[fX, Y] \rangle + \langle fX|[Y, V] \rangle + \langle Y|[V, fX] \rangle. \end{aligned}$$

Por la  $\mathfrak{F}(M)$ -linealidad del tensor métrico y teniendo en cuenta que  $[fX, Y] = f[X, Y] - (Xf)Y$  llegamos a que

$$2\langle \nabla_V(fX)|Y \rangle = 2\langle (Vf)X + f\nabla_V X|Y \rangle.$$

Para probar (P4) consideramos

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_V X - \nabla_X V|Y \rangle &= K(V, X, Y) - K(X, V, Y) \\ &= \langle Y|[V, X] \rangle - \langle Y|[X, V] \rangle \\ &= 2\langle [V, X]|Y \rangle. \end{aligned}$$

Para probar (P5) consideramos

$$2(\langle \nabla_V X|Y \rangle + \langle X|\nabla_V Y \rangle) = K(V, X, Y) + K(V, Y, X) = 2V\langle X|Y \rangle.$$

Por la arbitrariedad en la elección de  $Y$  y el Lema 3.2.1, tenemos el resultado que buscábamos demostrar.  $\square$

En lo que sigue, toda conexión que consideremos será la de Levi-Civita. Observemos que de las propiedades que definen una conexión, (P3) nos asegura que  $\nabla$  no es un tensor pues no es  $\mathfrak{F}(M)$ -lineal en  $X$ . Debido a la propiedad (P4), se suele decir que  $\nabla$  es *libre de torsión* y por (P5) que es *compatible con la métrica*.

**Definición 3.2.6.** Sea  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  una carta de  $M$ . Llamamos *símbolos de Christoffel* a las funciones  $\Gamma_{ij}^k \in \mathfrak{F}(U)$  componentes de  $\nabla_{\partial_i} \partial_j$  en la base  $\{\partial_1, \dots, \partial_m\}$ , esto es

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Puesto que  $[\partial_i, \partial_j] = 0$  como vimos en el Ejemplo 1.4.7, por la propiedad (P4) de la conexión de Levi-Civita tenemos que  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ .

Aunque la notación utilizada para  $\Gamma_{ij}^k$  parezca indicar que se tratan de componentes de un tensor, recordemos que  $\nabla$  no lo es y por tanto los símbolos no siguen las reglas de transformación que vimos en el Ejemplo 1.6.14.

**Lema 3.2.7.** Sea  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  una carta de  $M^m$ . Los símbolos de Christoffel se expresan de la forma

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m g^{kn} \left[ \frac{\partial g_{jn}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{in}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^n} \right].$$

*Demostración.* Consideremos la fórmula de Koszul. Haciendo el cálculo directo obtenemos

$$2 \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j | \partial_n \rangle = K(\partial_i, \partial_j, \partial_n) = \frac{\partial g_{jn}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{in}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^n}.$$

Por otro lado, usando la definición de  $\Gamma_{ij}^k$ ,

$$2 \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j | \partial_n \rangle = 2g \left( \sum_{r=1}^m \Gamma_{ij}^r \partial_r, \partial_n \right) = 2 \sum_{r=1}^m \Gamma_{ij}^r g_{rn}.$$

Igualando las expresiones, multiplicando en ambos miembros por  $g^{kn}$  y sumando en  $n$  (lo que equivale a multiplicar en ambos miembros por la matriz inversa del tensor métrico), obtenemos el resultado.  $\square$

**Lema 3.2.8.** Sean  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  una carta de  $M^m$  y el campo vectorial  $V = \sum_{j=1}^m V^j \partial_j$ . Entonces se tiene que

$$\nabla_{\partial_i}(V) = \sum_{k=1}^m \left[ \frac{\partial V^k}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^m \Gamma_{ij}^k V^j \right] \partial_k,$$

*Demostración.* A partir de la propiedad (P3) de la conexión se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_i} \left( \sum_{j=1}^m V^j \partial_j \right) &= \sum_{j=1}^m \left[ (\partial_i V^j) \partial_j + V^j \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \partial_k \right] \\ &= \sum_{k=1}^m \left[ \frac{\partial V^k}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^m \Gamma_{ij}^k V^j \right] \partial_k, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar  $\square$

Por tanto el tensor métrico determina la conexión de Levi-Civita a través de los símbolos de Christoffel por el Lema 3.2.7. Así, gracias a la expresión del Lema 3.2.8, junto con la propiedad (P1), podemos calcular cualquier derivada covariante  $\nabla_V X$  dada una carta de  $M$ . Por otro lado, podemos ver que en cualquier espacio semi-Euclídeo (o Euclídeo)  $\mathbb{R}_\nu^m$ , todos los símbolos de Christoffel se anulan ya que la métrica es constante ( $g_{ij}$  es o bien 1 ó  $-1$ ) y la derivada covariante se reduce a la derivada direccional.

Haciendo uso del concepto de derivación de un campo tensorial que vimos en la Definición 1.6.18 y la Proposición 1.6.20, podemos dar una definición más amplia de derivada covariante que permita actuar sobre campos tensoriales en general.

**Definición 3.2.9.** Sean  $M$  una variedad y  $V \in \mathfrak{X}(M)$ . La *derivada covariante (de Levi-Civita)*  $\nabla_V$  es la única derivación tensorial  $\nabla_V : \mathfrak{T}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{T}_s^r(M)$  tal que

1.  $\nabla_V f = Vf$  para todo  $f \in \mathfrak{F}(M)$ ,
2.  $\nabla_V X$  es la derivada covariante de  $X$  respecto de  $V$  para la conexión de Levi-Civita para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Definición 3.2.10.** Sea  $T \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ . Se denomina *diferencial covariante del tensor*  $T$  al tensor  $\nabla T \in \mathfrak{T}_{s+1}^r(M)$  tal que

$$(\nabla T)(\omega^1, \dots, \omega^r, V_1, \dots, V_s, X) = (\nabla_X T)(\omega^1, \dots, \omega^r, V_1, \dots, V_s)$$

para todos  $V_i, X \in \mathfrak{X}(M)$  y  $\omega^j \in \mathfrak{X}^*(M)$ .

La diferencial covariante es una forma compacta de escribir todas las derivadas covariantes de un elemento.

Observemos que en el caso  $r = s = 0$  se tiene que  $\mathfrak{T}_0^0(M) = \mathfrak{F}(M)$  y por tanto la diferencial covariante de una función  $f \in \mathfrak{F}(M)$  es la diferencial  $df \in \mathfrak{X}^*(M)$  ya que

$$(\nabla f)(V) = \nabla_V f = Vf = df(V) \quad \text{para todo } V \in \mathfrak{X}(M).$$

**Definición 3.2.11.** Sea  $M$  una variedad. Un campo tensorial  $T$  se dice *paralelo* si  $\nabla_V T = 0$  para todo  $V \in \mathfrak{X}(M)$ , lo que se expresa como  $\nabla T = 0$ .

**Proposición 3.2.12.** La propiedad (P5) de la conexión de Levi-Civita (Teorema 3.2.5) es equivalente al paralelismo del tensor métrico.

*Demostración.* Sean  $X, Y, V \in \mathfrak{X}(M)$ . Por la regla de la cadena de la Proposición 1.6.21:

$$\nabla_V \langle X|Y \rangle = (\nabla_V g)(X, Y) + g(\nabla_V X, Y) + g(X, \nabla_V Y),$$

que es equivalente a

$$V \langle X|Y \rangle = (\nabla_V g)(X, Y) + \langle \nabla_V X|Y \rangle + \langle X|\nabla_V Y \rangle.$$

Como los campos vectoriales eran arbitrarios, se cumple (P5) si y sólo si  $\nabla_V g = 0$  para todo  $V \in \mathfrak{X}(M)$ .  $\square$

Así, la propiedad (P5) de la conexión de Levi-Civita se suele escribir como  $\nabla g = 0$ , y por eso decimos que la conexión es *compatible con la métrica*.

**Notación 3.2.13.** Sean  $M^m$  variedad,  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  una carta de  $M$  y  $T \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ . Las componentes de  $\nabla T \in \mathfrak{T}_{s+1}^r(M)$  respecto de  $\varphi$  se denotan por  $T_{j_1 \dots j_s; k}^{i_1 \dots i_r}$ .

### 3.3. Transporte paralelo y geodésicas

Una vez definidas la conexión y la derivada covariante nos preguntamos por los campos vectoriales sobre una variedad que, restringidos a una curva sobre la misma, parecen no variar conforme nos movemos a lo largo de dicha curva. Esto nos permitirá generalizar el concepto de “línea recta” que tenemos en el espacio Euclídeo: las geodésicas.

Una curva sobre  $M$  es una aplicación diferenciable  $\alpha : I \rightarrow M$  con  $I$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ . Su vector velocidad

$$\alpha'(t) = d\alpha \frac{d}{dt} \Big|_p \in T_p(M)$$

da lugar a un campo vectorial sobre  $\alpha$ . Denotemos por  $\mathfrak{X}(\alpha)$  al conjunto de todos los campos vectoriales sobre  $\alpha$ . La siguiente proposición nos dará una forma de cuantificar el cambio de un campo vectorial sobre  $\alpha$  a lo largo de la curva.

**Proposición 3.3.1.** *Sea  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva en  $M$ . Entonces existe una única aplicación*

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} : \mathfrak{X}(\alpha) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\alpha) \\ Z &\longmapsto Z' = \frac{DZ}{dt} \end{aligned}$$

denominada derivada covariante inducida, tal que si  $Z, Y \in \mathfrak{X}(\alpha)$

1.  $(aZ + bY)' = aZ' + bY'$  para todos  $a, b \in \mathbb{R}$ ,
2.  $(fZ)' = \frac{df}{dt}Z + fZ'$  para todo  $f \in \mathfrak{F}(I)$ ,
3.  $(V|_\alpha)'(t) = \nabla_{\alpha'(t)}(V)$  para todos  $t \in I$ ,  $V \in \mathfrak{X}(M)$ ,
4.  $\frac{d}{dt} \langle Z|Y \rangle = \langle Z'|Y \rangle + \langle Z|Y' \rangle$ .

*Demostración.* Para la unicidad supongamos por ahora que existe una aplicación que satisface las tres primeras propiedades. Consideremos una carta  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  de  $M$  tal que la imagen de  $\alpha$  se encuentra en  $U$  (en caso de necesitar varias cartas sería análogo). Sea  $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ , entonces en

cada  $\alpha(t)$  podemos expresar  $Z(t) = \sum_i (Zx^i)(t)\partial_i = \sum_i Z^i(t)\partial_i$ . A partir de las propiedades se tiene que

$$Z' = \sum_{i=1}^m \left[ \frac{dZ^i}{dt} \partial_i|_{\alpha} + Z^i (\partial_i|_{\alpha})' \right] = \sum_{i=1}^m \left[ \frac{dZ^i}{dt} \partial_i|_{\alpha} + Z^i \nabla_{\alpha'} (\partial_i) \right].$$

Esto prueba la unicidad pues  $Z'$  quedaría completamente determinado por la conexión  $\nabla$ . Para demostrar la existencia basta con definir  $Z'$  como en la expresión anterior para cada subintervalo de  $I$  tal que su imagen por  $\alpha$  se encuentre en las distintas cartas de  $M$ . Las pruebas de las cuatro propiedades se limitan a una comprobación.  $\square$

La introducción de los símbolos de Christoffel en la expresión de  $Z'$  da lugar al siguiente resultado.

**Corolario 3.3.2.** Sean  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  una carta de  $M^m$ ,  $\alpha : I \rightarrow U$  una curva sobre  $U$  y  $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ . Entonces podemos expresar  $Z'$  como

$$Z' = \frac{DZ}{dt} = \sum_{k=1}^m \left[ \frac{dZ^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt} Z^j \right] \partial_k.$$

**Definición 3.3.3.** Sean  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva en  $M$  y  $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ . Se dice que  $Z$  es *paralelo* si  $Z' \equiv 0$ .

Observemos que el hecho de que los vectores  $\{\partial_i\}_{i=1}^m$  sean linealmente independientes implica que el paralelismo de  $Z$  es equivalente a un sistema de  $m$  ecuaciones diferenciables ordinarias. Los resultados de existencia y unicidad sobre *ecuaciones diferenciables ordinarias* [6] permiten asegurar que dados  $t_0 \in I$  y  $z \in T_{\alpha(t_0)}(M)$  existe un único campo vectorial paralelo  $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$  tal que  $Z(t_0) = z$ . Esto nos permite definir el transporte paralelo.

**Definición 3.3.4.** Sean  $M$  una variedad y  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva en  $M$ . Consideremos  $t_0, t \in I$ ,  $z \in T_{\alpha(t_0)}(M)$  y el campo vectorial paralelo  $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$  que cumple que  $Z(t_0) = z$ . Denotemos por  $p = \alpha(t_0)$  y  $q = \alpha(t)$ . La aplicación  $P_{p,q}^{\alpha} : T_p(M) \rightarrow T_q(M)$  que envía cada  $z$  a  $Z(t)$  se denomina *transporte paralelo a lo largo de  $\alpha$  de  $p$  a  $q$* .

Observemos que la unicidad del transporte paralelo a lo largo de una curva implica que  $P_{p,q}^{\alpha}$  es un difeomorfismo cuya inversa es precisamente  $P_{q,p}^{\alpha}$ .

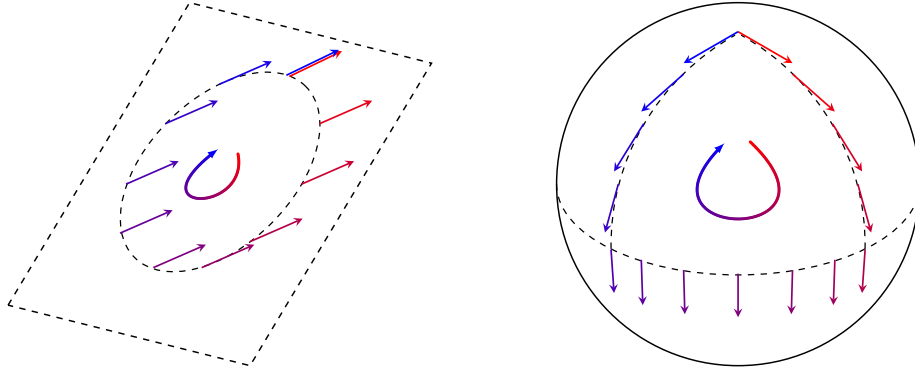


Figura 3.2. Ejemplos conocidos de *Geometría y Topología de Superficies* de transporte paralelo en un plano y una esfera. El transporte paralelo a lo largo de un ciclo en una superficie curva puede que no conserve los vectores inicial y final. El ángulo entre estos vectores se denomina *ángulo de holonomía* y está directamente relacionado con la curvatura de la región.

**Definición 3.3.5.** Una *geodésica* de una variedad  $M$  es una curva  $\gamma : I \rightarrow M$  cuyo campo de velocidades  $\gamma'$  es paralelo.

El Corolario 3.3.2 nos proporciona directamente las ecuaciones diferenciales de las geodésicas.

**Corolario 3.3.6.** Sea  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  una carta de  $M^m$ . Una curva en  $M$   $\gamma : I \rightarrow U$  es una geodésica de  $M$  si y sólo si sus funciones coordenadas  $x^i \circ \gamma$  cumplen que

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = 0$$

para todo  $k = 1, \dots, m$ .

Así, por el mismo motivo que mencionamos anteriormente, fijados  $p \in M$  y  $z \in T_p(M)$ , existe una única geodésica  $\gamma : I \rightarrow M$  tal que  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma'(0) = z$ .

**Ejemplo 3.3.7.** Las ecuaciones de las geodésicas en el espacio semi-Euclídeo  $\mathbb{R}_\nu^m$  se reducen a

$$\frac{d^2(x^i \circ \gamma)}{dt^2} = 0 \quad i = 1 \dots, m.$$

Estas ecuaciones tienen soluciones de la forma  $x^i(\gamma(t)) = p^i + tv^i$  y por tanto, podemos describir las geodésicas vectorialmente como  $\gamma(t) = p + tv$ . Como era de esperar, las geodésicas en un espacio semi-Euclídeo son líneas rectas.



### 3.4. Cambio de tipo y contracción métrica

Los Lemas 3.2.1 y 3.2.2 nos permiten establecer una relación unívoca entre campos vectoriales y 1-formas. Esta relación nos permitirá definir unas operaciones entre campos tensoriales de *subida* y *bajada de índices* que consistirá en un cambio de tipo, así como una nueva definición de contracción para el caso de una variedad semi-Riemanniana.

**Corolario 3.4.1.** Sean  $M$  una variedad,  $V \in \mathfrak{X}(M)$  y  $V^* \in \mathfrak{X}^*(M)$  dado por  $V^*(X) = \langle V|X \rangle$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Entonces la aplicación que envía cada  $V$  en  $V^*$  es un isomorfismo  $\mathfrak{F}(M)$ -lineal de  $\mathfrak{X}(M)$  a  $\mathfrak{X}^*(M)$ .

*Demostración.* Por la linealidad del tensor métrico,  $V^*$  es  $\mathfrak{F}(M)$ -lineal y por tanto es 1-forma, y la aplicación  $V \rightarrow V^*$  está bien definida y es también  $\mathfrak{F}(M)$ -lineal. El Lema 3.2.2 nos asegura que es un isomorfismo.  $\square$

Los campos vectoriales y 1-formas relacionados por el isomorfismo anterior se dicen *métricamente equivalentes*.

**Definición 3.4.2.** Sean  $M$  una variedad,  $r, s, a$  y  $b$  enteros positivos con  $1 \leq a \leq r$  y  $1 \leq b \leq s$ . Definimos la operación *bajar índice* como la aplicación  $\downarrow_b^a: \mathfrak{T}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{T}_{s+1}^{r-1}(M)$  dada por

$$\begin{aligned} (\downarrow_b^a T)(\omega^1, \dots, \omega^{r-1}, V_1, \dots, V_{s+1}) \\ = T(\omega^1, \dots, \underbrace{V_b^*}_{\text{entrada } a}, \dots, \omega^{r-1}, V_1, \dots, V_{b-1}, V_{b+1}, \dots, V_{s+1}). \end{aligned}$$

De igual modo que podemos subir índices, podemos *bajarlos*. El Corolario 3.4.1 proporciona directamente el siguiente resultado.

**Corolario 3.4.3.** La operación *bajar índice* es un isomorfismo  $\mathfrak{F}(M)$ -lineal cuya operación inversa *subir índice*  $\uparrow_b^a: \mathfrak{T}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{T}_{s-1}^{r+1}(M)$  viene dada por

$$\begin{aligned} (\uparrow_b^a T)(\omega^1, \dots, \omega^{r+1}, V_1, \dots, V_{s-1}) \\ = T(\omega^1, \dots, \omega^{a-1}, \omega^{a+1}, \dots, \omega^{r+1}, V_1, \dots, \underbrace{\omega_*^a}_{\text{entrada } b}, \dots, V_{s-1}), \end{aligned}$$

donde  $\omega_*^a$  denota el campo vectorial métricamente equivalente a la 1-forma  $\omega^a$ .

Veamos un ejemplo concreto de bajada de índice que usaremos más adelante.

**Ejemplo 3.4.4.** Sean  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  una carta de  $M$  y  $T \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ . Del Lema 3.2.2 sabemos que  $\partial_i^* = \sum_{r=1}^m g_{ir} dx^r$ . Por tanto las componentes de  $\downarrow_1^1 T \in \mathfrak{T}_4^0(M)$  relativas a  $\varphi$  son

$$T_{ijkl} = (\downarrow_1^1 T)(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = T \left( \sum_{r=1}^m g_{ir} dx^r, \partial_j, \partial_k, \partial_l \right) = \sum_{r=1}^m g_{ir} T_{jkl}^r.$$

Las operaciones de subida y bajada de índices nos permiten contraer dos entradas covariantes o contravariantes gracias a la métrica.

**Definición 3.4.5.** Sean  $M$  variedad,  $r, s, a, b, c, d$  enteros positivos con  $1 \leq a < b \leq s$ ,  $1 \leq c < d \leq r$  y  $T \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ . Definimos la *contracción métrica covariante* como  $C_{ab}T = C_b^a(\uparrow_a^a T) \in \mathfrak{T}_{s-2}^r(M)$  y la *contracción métrica contravariante* como  $C^{cd}T = C_d^c(\downarrow_d^d T) \in \mathfrak{T}_s^{r-2}(M)$ .

### 3.5. Tensor curvatura de Riemann

De forma natural surge la pregunta de cómo describir la curvatura de una variedad. En el caso de superficies embebidas en  $\mathbb{R}^3$ , Gauss definió este concepto y demostró en su *Theorema Egregium* [7] que dicha curvatura es intrínseca a la superficie, esto es, sólo depende de los coeficientes métricos y por tanto es invariante bajo isometrías. Bernhard Riemann, pupilo de Gauss, generalizó este concepto [16], mientras que Ricci-Curbastro y Levi-Civita lo formalizaron matemáticamente [9].

**Definición 3.5.1.** Sea  $M$  una variedad con la conexión de Levi-Civita  $\nabla$ . Se denomina *tensor de curvatura de Riemann* de  $M$  a la aplicación

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M)^3 &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (V, W, X) &\longmapsto R_{VW}X = \nabla_{[V,W]}X - [\nabla_V, \nabla_W]X. \end{aligned}$$

La motivación de esta definición podemos verla fundamentada en la idea de que el transporte paralelo a lo largo de un ciclo no conserva los vectores inicial y final en una variedad “curva”, reflejándose en la conmutatividad de la derivada covariante. El tensor de curvatura de Riemann pretende cuantificar dicha variación.

La definición propuesta de tensor de curvatura no es la única razonable pues lo podríamos haber definido como  $R_{VW}X = [\nabla_V, \nabla_W]X - \nabla_{[V,W]}X$ , es decir, con el signo contrario, y todo el desarrollo sería análogo. Hemos escogido este signo ya que es el usado por Bishop y O’Neill en [3] y [15].

**Lema 3.5.2.** *El tensor de curvatura de Riemann de una variedad  $M$  es un campo tensorial de tipo  $(1,3)$ , esto es,  $R \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ .*

*Demostración.* Por la Proposición 1.6.7, basta comprobar que la aplicación es  $\mathfrak{F}(M)$ -lineal en cada componente. Usando que  $[fV, W] = f[V, W] - (Wf)V$  y que  $[V, fW] = f[V, W] + (Vf)W$  con  $f \in \mathfrak{F}(M)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} R_{(fV)W}Z &= \nabla_{[fV, W]}X - [\nabla_{fV}, \nabla_W]X \\ &= f\nabla_{[V, W]}X - (Wf)\nabla_VX - f\nabla_V\nabla_WX + \nabla_W(f\nabla_VX) \\ &= f(\nabla_{[V, W]}X - [\nabla_V, \nabla_W]X) - (Wf)\nabla_VX + (Wf)\nabla_VX \\ &= fR_{VW}X. \end{aligned}$$

Análogamente,  $R_{V(fW)}X = fR_{VW}X$ . Por último, es sencillo comprobar que

$$\begin{aligned} R_{VW}(fZ) &= \nabla_{[V, W]}(fX) - [\nabla_V, \nabla_W](fX) \\ &= fR_{VW}X + ([V, W]f)X - ([V, W]f)X \\ &\quad + (Wf)\nabla_VX - (Wf)\nabla_VX + (Vf)\nabla_WX - (Vf)\nabla_WX \\ &= fR_{VW}X \end{aligned}$$

y gracias a las propiedades de la conexión tenemos el resultado.  $\square$

**Definición 3.5.3.** Una variedad  $M$  tal que su tensor de curvatura de Riemann  $R$  es idénticamente nulo se dice *llana*.

Como vimos en el Capítulo 1, podemos considerar el tensor de curvatura  $R$  como una aplicación  $\mathbb{R}$ -multilineal sobre vectores tangentes. Si  $u, v \in T_p(M)$ , la aplicación lineal

$$R_{uv} : T_p(M) \longrightarrow T_p(M)$$

que envía cada  $x \in T_p(M)$  a  $R_{uv}x$  se denomina *operador curvatura*. Esta aplicación tiene las siguientes propiedades de simetría.

**Proposición 3.5.4.** *Sean  $M$  variedad y  $u, v, w, x, y \in T_p(M)$ . Entonces*

1.  $R_{uv} = -R_{vu}$ ,
2.  $\langle R_{uv}x|y \rangle = -\langle R_{uv}y|x \rangle$ ,
3.  $R_{uv}w + R_{wu}v + R_{vw}u = 0$  ( $1^a$  identidad de Bianchi),
4.  $\langle R_{uv}x|y \rangle = \langle R_{xy}u|v \rangle$  (simetría por pares),
5.  $(\nabla_u R)_{vw} + (\nabla_w R)_{uv} + (\nabla_v R)_{wu}$  ( $2^o$  identidad de Bianchi).

*Demostración.* Demostraremos sólo las cuatro primeras propiedades. Una demostración de la segunda identidad de Bianchi puede encontrarse en [15].

Recordemos que por el Lema 3.2.4,  $\nabla$  tiene carácter local y por tanto también  $R$ . Así, podemos centrarnos en una carta de  $M$  en la que extender los vectores  $u, v, w, x$  e  $y$  a campos vectoriales  $U, V, W, X$  e  $Y$  sobre la carta de modo que sus componentes relativas a la misma sean constantes, consiguiendo así que el producto corchete se anule dos a dos para los campos mencionados. Por tanto, el tensor de curvatura se reduce a  $R_{AB}Z = -[\nabla_A, \nabla_B]Z$  con  $A, B, Z$  cualesquiera de los campos vectoriales descritos.

(1) es directo ya que en este caso

$$R_{UV}Z = -[\nabla_U, \nabla_V]Z = [\nabla_V, \nabla_U]Z = -R_{VU}Z.$$

Para demostrar (2) basta comprobar que  $\langle R_{UV}X|X \rangle = 0$  por la identidad de polarización. Usando la propiedad (P5) de la conexión y la fórmula de Koszul tenemos que

$$\begin{aligned} \langle R_{UV}X|X \rangle &= \langle \nabla_V \nabla_U X|X \rangle - \langle \nabla_U \nabla_V X|X \rangle \\ &= V \langle \nabla_U X|X \rangle - \langle \nabla_U X|\nabla_V X \rangle - U \langle \nabla_V X|X \rangle + \langle \nabla_V X|\nabla_U X \rangle \\ &= V \langle \nabla_U X|X \rangle - U \langle \nabla_V X|X \rangle \\ &= \frac{1}{2}VU \langle X|X \rangle - \frac{1}{2}UV \langle X|X \rangle = \frac{1}{2}[V, U] \langle X|X \rangle = 0. \end{aligned}$$

Para demostrar (3) denotemos por  $G(F_{UV}W)$  a la suma de permutaciones cíclicas de las entradas de una aplicación  $F : \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ . En el caso de  $F = R$  se corresponde con el lado izquierdo de (3) evaluado en los correspondientes campos vectoriales. Puesto que una permutación cíclica deja  $G(F_{UV}W)$  invariante, y usando la propiedad (P4) tenemos que

$$\begin{aligned} G(R_{UV}W) &= G(\nabla_V \nabla_U W - \nabla_U \nabla_V W) \\ &= G(\nabla_V \nabla_U W) - G(\nabla_U \nabla_V W) \\ &= G(\nabla_U \nabla_W V) - G(\nabla_U \nabla_V W) \\ &= G(\nabla_U \nabla_W V - \nabla_U \nabla_V W) = G(\nabla_U[W, V]) = 0. \end{aligned}$$

Para demostrar (4), a partir de (3) se tiene que

$$\langle G(R_{UV}X)|Y \rangle + \langle G(R_{VX}Y)|U \rangle + \langle G(R_{XY}U)|V \rangle + \langle G(R_{YU}V)|X \rangle = 0.$$

Desarrollando cada  $G$  y usando las propiedades de simetría (1) y (2), se comprueba que ocho de los doce términos que aparecen se cancelan y se llega a  $2 \langle R_{UV}X|Y \rangle - 2 \langle R_{XY}U|V \rangle = 0$ , con lo que tenemos el resultado.  $\square$

**Lema 3.5.5.** Sean  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  una carta de  $M^m$  y  $R$  su tensor de curvatura de Riemann. Entonces

$$R_{\partial_k \partial_l} \partial_j = \sum_{i=1}^m R_{jkl}^i \partial_i,$$

donde las componentes de  $R$  vienen dadas por

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{kj}^i - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{lj}^i + \sum_{r=1}^m \Gamma_{kj}^r \Gamma_{lr}^i - \sum_{r=1}^m \Gamma_{lj}^r \Gamma_{kr}^i.$$

*Demostración.* Por un lado tenemos que  $R_{\partial_k \partial_l} \partial_j = \nabla_{\partial_l} (\nabla_{\partial_k} \partial_j) - \nabla_{\partial_k} (\nabla_{\partial_l} \partial_j)$  ya que  $[\partial_k, \partial_l] = 0$ . Por otro lado,

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_l} (\nabla_{\partial_k} \partial_j) &= \nabla_{\partial_l} \left( \sum_{r=1}^m \Gamma_{kj}^r \partial_r \right) \\ &= \sum_{r=1}^m [(\partial_l \Gamma_{kj}^r) \partial_r + \Gamma_{kj}^r \nabla_{\partial_l} \partial_r] \\ &= \sum_{r=1}^m \left[ (\partial_l \Gamma_{kj}^r) \partial_r + \sum_{s=1}^m \Gamma_{kj}^r \Gamma_{lr}^s \partial_s \right] \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{kj}^i + \sum_{r=1}^m \Gamma_{kj}^r \Gamma_{lr}^i \right] \right\} \partial_i. \end{aligned}$$

Análogamente

$$\nabla_{\partial_k} (\nabla_{\partial_l} \partial_j) = \left\{ \sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{lj}^i + \sum_{r=1}^m \Gamma_{lj}^r \Gamma_{kr}^i \right] \right\} \partial_i.$$

Restando ambas expresiones tenemos el resultado.  $\square$

Es usual que las componentes del tensor de curvatura se expresen en su forma completamente covariante bajando el primer índice como en el Ejemplo 3.4.4:

$$R_{ijkl} = \sum_{r=1}^m g_{ir} R_{jkl}^r.$$

Las propiedades de simetría del tensor de curvatura nos permiten trasladar estas simetrías a sus componentes relativas a una carta de  $M$ . A partir de las propiedades (1) y (4) se tiene que

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}.$$

### 3.6. Tensor de Ricci, curvatura escalar y seccional

En la expresión más importante de la Relatividad General, la *ecuación de campo de Einstein*, la curvatura de la variedad no aparece a través del tensor de curvatura de Riemann sino de contracciones de éste: el *tensor de Ricci* y la *curvatura escalar*.

**Definición 3.6.1.** Sean  $M^m$  una variedad y  $R$  el tensor de curvatura de Riemann. Llamamos *tensor de curvatura de Ricci*,  $\text{Ric}$ , de  $M$  a la contracción  $C_3^1(R) \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ , cuyas componentes relativas a una carta  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  son

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^m R_{ijk}^k.$$

Es sencillo comprobar que el tensor de Ricci es simétrico a partir de sus componentes y las simetrías del tensor de curvatura de Riemann:

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^m R_{ijk}^k = \sum_{k,r=1}^m g^{kr} R_{rijk} = \sum_{k,r=1}^m g^{kr} R_{kjir} = \sum_{r=1}^m R_{jir}^r = R_{ji}.$$

**Definición 3.6.2.** Una variedad  $M$  tal que su tensor de Ricci es idénticamente nulo se dice *Ricci llana*.

**Definición 3.6.3.** Sean  $M^m$  una variedad y  $\text{Ric}$  el tensor de Ricci de  $M$ . Llamamos *curvatura escalar*  $S$  de  $M$  a la única contracción métrica de  $\text{Ric}$ ,  $C_{12}(\text{Ric}) = C(\text{Ric}) \in \mathfrak{F}(M)$ , cuyas componentes relativas a una carta  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  son

$$S = \sum_{i,j=1}^m g^{ij} R_{ij} = \sum_{i,j,k=1}^m g^{ij} R_{ijk}^k.$$

**Definición 3.6.4.** Sean  $M$  variedad y  $T \in \mathfrak{T}_2^0(M)$  simétrico. Definimos la *divergencia* de  $T$  como  $\text{div } T = C_{23}(\nabla T) \in \mathfrak{X}^*(M)$ . Sus componentes relativas a una carta  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  son

$$(\text{div } T)_i = \sum_{j,k=1}^m g^{jk} T_{ij;k} = \sum_{k=1}^m T_{i;k}^k.$$

Notemos que podríamos haber definido la divergencia como  $C_{13}(\nabla T)$  debido a la simetría del tensor  $T$ . Para verlo mejor basta con fijarnos en la expresión coordenada:

$$(\operatorname{div} T)_i = \sum_{j,k=1}^m g^{jk} T_{ij;k} = \sum_{k=1}^m T_{i;k}^k = \sum_{k=1}^m T_{j;k}^k = \sum_{i,k=1}^m g^{ik} T_{ij;k} = (\operatorname{div} T)_j.$$

Además, podemos observar que todo campo tensorial  $T$  paralelo en una variedad  $M$  tiene divergencia nula, pues cumple que  $\nabla T = 0$  y por tanto  $C_{23}(\nabla T) = 0$ . En concreto, el tensor métrico  $g$ , que vimos que era paralelo en la Proposición 3.2.12, cumple que  $\operatorname{div} g = 0$ .

El siguiente resultado, que relaciona el tensor de Ricci y la curvatura escalar, es crucial en la Teoría de la Relatividad de Einstein.

**Proposición 3.6.5.** *Sean  $M$  una variedad,  $\operatorname{Ric}$  su tensor de Ricci y  $S$  su curvatura escalar. Entonces:*

$$dS = 2 \operatorname{div} \operatorname{Ric}.$$

*Demostración.* Evaluando la segunda identidad de Bianchi en  $u = \partial_i$ ,  $v = \partial_j$ ,  $w = \partial_k$  obtenemos

$$R_{ijk;l}^r + R_{ikl;j}^r + R_{ilj;k}^r = 0.$$

Contraemos en  $r$  y  $l$  tras intercambiar  $l$  y  $j$  en el tercer sumando:

$$\sum_{r=1}^m R_{ijk;r}^r + R_{ik;j} - R_{ij;k} = 0.$$

Contraemos métricamente en  $i$  y  $j$ :

$$\sum_{r,i,j=1}^m g^{ij} R_{ijk;r}^r + \sum_{i,j=1}^m g^{ij} R_{ik;j} - \sum_{i,j=1}^m g^{ij} R_{ij;k} = 0.$$

Para calcular el primer término vemos que

$$\sum_{i,j=1}^m g^{ij} R_{ijk}^r = \sum_{l,i,j=1}^m g^{ij} g^{lr} R_{lijk} = \sum_{l,i,j=1}^m g^{ij} g^{lr} R_{ilkj} = \sum_{l=1}^m g^{lr} R_{lk}.$$

Aplicando la diferencial covariante,

$$\sum_{r,i,j=1}^m g^{ij} R_{ijk;r}^r = \sum_{r,l=1}^m g^{lr} R_{lk;r} = \sum_{r=1}^m R_{k;r}^r = (\operatorname{div} \operatorname{Ric})_k$$

El segundo término es por definición  $(\operatorname{div} \operatorname{Ric})_k$ , por tanto, observando que el tercer término es la diferencial covariante de la curvatura escalar,

$$2(\operatorname{div} \operatorname{Ric})_k - S_{;k} = 0.$$

Teniendo en cuenta que  $\nabla S = dS$ , la relación anterior es la expresión coordenada de  $2 \operatorname{div} \operatorname{Ric} = dS$ , como queríamos demostrar.  $\square$

Para acabar este capítulo introducimos una última noción de curvatura, que será de utilidad a la hora de modelar el universo como veremos en el Capítulo 5: la *curvatura seccional*.

**Proposición 3.6.6.** Sean  $M$  una variedad,  $p \in M$ ,  $\Pi$  un subespacio bidimensional de  $T_p(M)$  (que llamamos *sección plana de  $M$  en  $p$* ) y  $\{u, v\}$  una base de  $\Pi$ . Entonces:

1. La sección plana  $\Pi$  es no degenerada si y sólo si  $Q(u, v) = \langle u|u \rangle \langle v|v \rangle - \langle u|v \rangle^2 \neq 0$ .
2. Si  $\Pi$  es no degenerado entonces el número  $k = \langle R_{uv}u|v \rangle / Q(u, v)$  es independiente de la base  $\{u, v\}$  y se denomina *curvatura seccional de  $\Pi$* , denotándose  $k(\Pi)$ .

*Demostración.* (1) es directo de la Proposición 2.1.5 ya que  $Q(u, v)$  es el determinante de la matriz de la forma bilineal simétrica en la base  $\{u, v\}$ . Por tanto dicha matriz es invertible si y sólo si  $Q(u, v) \neq 0$ .

Para demostrar (2) consideremos otra base  $\{x, y\}$  de  $\Pi$ . Entonces existen  $a, b, c$  y  $d \in \mathbb{R}$  tales que  $u = ax + by$ ,  $v = cx + dy$  y  $ad - bc \neq 0$ . Por otro lado, por las propiedades del producto escalar se comprueba que

$$\begin{aligned} Q(u, v) &= \langle ax + by|ax + by \rangle \langle cx + dy|cx + dy \rangle - \langle ax + by|cx + dy \rangle^2 \\ &= (ad - bc)^2 Q(x, y). \end{aligned}$$

Y por las propiedades del tensor de curvatura de Riemann que

$$\langle R_{uv}u|v \rangle = (ad - bc)^2 \langle R_{xy}x|y \rangle.$$

Por tanto

$$\frac{\langle R_{uv}u|v \rangle}{Q(u, v)} = \frac{(ad - bc)^2 \langle R_{xy}x|y \rangle}{(ad - bc)^2 Q(x, y)}.$$

Como  $ad - bc \neq 0$ , tenemos el resultado.  $\square$



La curvatura seccional depende por tanto de la propia sección plana. La siguiente definición da un nuevo tipo de variedades en relación con este tipo de curvatura.

**Definición 3.6.7.** Una variedad  $M$  tiene *curvatura constante*  $k$  si  $k(\Pi)$  es constante, esto es, si  $k = k(\Pi_1) = k(\Pi_2)$  para cualesquiera  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  secciones planas de  $M$ .

Los ejemplos más sencillos y representativos de variedades de curvatura constante son:

- El espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^n$  dotado de métrica Euclídea, con  $k = 0$ .
- La  $n$ -esfera unidad  $\mathbb{S}^n$  con la métrica inducida del espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^{n+1}$ , esto es, el pullback de la métrica Euclídea a través de la inclusión, con  $k = 1$ .
- El  $n$ -espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^n$  (hiperboloide unidad imbuido en  $\mathbb{R}^{n+1}$ ), dotado de la métrica inducida del espacio de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^{n+1}$ , de curvatura  $k = -1$ .

### 3.7. Variedades de Lorentz. Orientación temporal

Como hemos mencionado anteriormente, la Relatividad General se construye sobre las variedades Lorentzianas. En concreto vamos a ver cómo podemos dotar a este tipo de variedades de una noción de orientación: la *orientación temporal*.

**Definición 3.7.1.** Sea  $(V, g)$  un espacio vectorial con producto escalar de dimensión  $\dim V \geq 2$ . Decimos que  $V$  es un *espacio vectorial de Lorentz* si tiene índice 1.

Por razones históricas, la base de un espacio vectorial de Lorentz suele numerarse con los índices empezando en 0 y no en 1, siendo el primer vector, digamos  $e_0$ , el vector temporal de la base. Notemos además que en una variedad de Lorentz, los espacios tangentes son espacios vectoriales de Lorentz.

Los tipos causales que vimos en la Definición 2.2.10 pueden trasladarse a subespacios de éstos.

Si  $W \subseteq V$  es un subespacio de un espacio vectorial de Lorentz  $(V, g)$ , el tipo causal de  $W$  es

1. *espacial* si  $g|_W$  es definida positiva,
2. *luminoso* si  $g|_W$  es degenerada,
3. *temporal* si  $g|_W$  es no degenerada de índice 1.

Si  $v \in V$ , su tipo causal es el que le corresponde a  $\text{span}(v)$ . Además decimos que  $v$  es *causal* si no es espacial.

**Lema 3.7.2.** Sean  $(V, g)$  un espacio vectorial de Lorentz y  $v \in V$  un vector temporal. Entonces el subespacio  $v^\perp$  es espacial y  $V = \text{span}(v) \oplus v^\perp$ .

*Demostración.* Como  $\text{span}(v)$  es no degenerado con índice 1 por ser  $v$  temporal, por el Lema 2.2.6 se tiene que  $v^\perp$  es no degenerado y por tanto  $V = \text{span}(v) \oplus v^\perp$ . Además, el índice de  $v^\perp$  es 0, por lo que es espacial.  $\square$

La siguiente definición busca dotar al espacio vectorial de una noción de orientación debida al carácter temporal que posee al tener índice 1.

**Definición 3.7.3.** Sean  $(V, g)$  un espacio vectorial de Lorentz y  $\mathcal{T}$  el conjunto de vectores temporales de  $V$ . Llamamos *cono temporal* de  $v \in \mathcal{T}$  al conjunto  $C(v) = \{u \in \mathcal{T} \mid \langle v|u \rangle < 0\}$ . El *cono temporal opuesto* de  $v$  es  $C(-v) = -C(v) = \{u \in \mathcal{T} \mid \langle v|u \rangle > 0\}$ .

**Proposición 3.7.4.** Dos vectores temporales  $u$  y  $v$  de un espacio vectorial de Lorentz  $(V, g)$  pertenecen a un mismo cono temporal si y sólo si  $\langle u|v \rangle < 0$ .

*Demostración.* Consideremos el cono temporal  $C(w)$  con  $w \in V$  vector temporal tal que  $u \in C(w)$ . Por el Lema 3.7.2, podemos expresar

$$u = aw + x \qquad v = bw + y,$$

donde  $x, y \in w^\perp$ . Como  $u$  y  $v$  son temporales se cumple que  $-a^2 + \|x\|^2 < 0$ ,  $-b^2 + \|y\|^2 < 0$  y  $|\langle x|y \rangle| \leq \|x\|\|y\| < |ab|$  por la desigualdad de Schwarz. Por otro lado  $\langle u|v \rangle = -ab + \langle x|y \rangle$ , por lo que el signo de  $\langle u|v \rangle$  es el de  $ab$ . Como  $u \in C(w)$ , tenemos que  $-a = \langle u|w \rangle < 0$  por definición, y por tanto el signo de  $\langle u|v \rangle$  es el contrario al de  $b = -\langle v|w \rangle$ . Es decir,  $v \in C(w)$  si y sólo si  $b > 0$  si y sólo si  $\langle u|v \rangle < 0$ .  $\square$

**Definición 3.7.5.** Sean  $(V, g)$  espacio vectorial de Lorentz,  $v$  un vector temporal y  $\mathcal{C}$  el conjunto de vectores causales de  $V$ . Llamamos *cono causal de*  $v \in \mathcal{T}$  al conjunto  $\overline{C}(v) = \{u \in \mathcal{C} \mid \langle v|u \rangle < 0\}$ .

Más adelante veremos por qué estos objetos que acabamos de definir se denominan “conos” y cuál es su interpretación.

**Definición 3.7.6.** Sea  $M$  una variedad Lorentziana. Una *orientación temporal* de  $M$  es una aplicación  $\mathcal{T}$  que a cada  $p \in M$  le asocia un cono temporal  $C_p$  en  $T_p(M)$  de forma que existe algún campo vectorial  $V$  en un entorno  $U$  de  $p$  tal que  $V_q \in C_q$  para cada  $q \in U$ . Decimos que  $M$  es *orientable temporalmente* si admite una orientación temporal.

**Definición 3.7.7.** Fijado en un espacio vectorial de Lorentz  $(V, g)$  un cono causal  $\overline{C}(v)$  con  $v \in V$ , decimos que un vector  $u \in V$  *apunta al futuro* si  $u \in \overline{C}(v)$ . Por otro lado, en una variedad Lorentziana  $M$  orientada temporalmente diremos que una curva  $\alpha : I \rightarrow M$  *apunta al futuro* si  $\alpha'(t)$  apunta al futuro en cada  $T_{\alpha(t)}$  para todo  $t \in I$ .

El concepto de cono temporal es el que nos permitirá darle una estructura más compleja a las variedades Lorentzianas. Hemos definido también el cono causal, conteniendo los vectores temporales y luminosos, para definir las curvas que apuntan al futuro. Como veremos en el siguiente capítulo, a partir de estas curvas modelizaremos las *partículas*.



## Capítulo 4

# Teoría de la Relatividad

El primer modelo gravitacional de la humanidad se debe a Isaac Newton, con la conocida *Ley de Gravitación Universal*, enunciada en su libro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687). Esta ley ha resultado ser precisa en multitud de experimentos; sin embargo, era incapaz de explicar ciertos hechos como por ejemplo el avance del perihelio de Mercurio. No fue hasta 1916 que Albert Einstein publicó su *Teoría de la Relatividad General* [13], una nueva forma de entender la gravedad que desecha el concepto de *fuerza gravitatoria* introducida por Newton, basándose en dos principios: El primero establece que *la velocidad de la luz en el vacío es la máxima posible e igual para todos los observadores*, lo que automáticamente acaba con la fuerza instantánea de Newton, y el *Principio de Equivalencia Fuerte* [20], que afirma que *un sistema sujeto a la acción de la gravedad es indistinguible de un sistema uniformemente acelerado*. Dicho de otra forma, *estar en reposo es indistinguible de una caída libre en el seno gravitatorio* (como les ocurre por ejemplo a los astronautas de la Estación Espacial Internacional, que flotan tranquilamente en la nave mientras ésta orbita la Tierra). Estos dos principios llevaron a Einstein a interpretar la gravedad no como una fuerza, sino como el resultado de la curvatura de una variedad por la que los objetos libres se mueven siguiendo las geodésicas de la misma [13].

En Relatividad General es habitual usar un sistema de unidades distinto del Sistema Internacional: el *Sistema de Unidades Geométricas*. Las dos principales constantes que aparecen en la Teoría de la Relatividad son la velocidad de la luz y la constante de gravitación universal

$$c = 299.792.458 \text{ m s}^{-1}, \quad G = 6,67191 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}.$$

El sistema de Unidades Geométricas se basa en considerar estas dos constantes adimensionales e iguales a 1. Como resultado de esta elección, longitud,

masa y tiempo son la misma magnitud ( $L = M = T$ ), lo que simplifica considerablemente las expresiones resultantes. En la Tabla 4.1 vemos cómo quedan representadas las principales magnitudes en el Sistema Internacional y en Unidades Geométricas.

	S.I.	U.G.		S.I.	U.G.
Longitud	$L$	$X$	Momento lineal	$ML/T$	$X$
Superficie	$L^2$	$X^2$	Momento angular	$ML^2/T$	$X^2$
Volumen	$L^3$	$X^3$	Fuerza	$ML/T^2$	-
Tiempo	$T$	$X$	Tensión	$M/T^2$	$1/X$
Velocidad	$L/T$	-	Presión	$M/LT^2$	$1/X^2$
Aceleración	$L/T^2$	$1/X$	Energía	$ML^2/T^2$	$X$
Masa	$M$	$X$	Potencia	$ML^2/T^3$	-

Tabla 4.1. Unidades de las magnitudes expresadas en el Sistema Internacional y en Unidades Geométricas, donde  $X$  representa  $L$ ,  $M$ , o  $T$ .

## 4.1. Partículas en un espacio-tiempo

En primer lugar, vamos a definir gracias a todo lo que hemos visto hasta ahora una variedad genérica sobre la que se sustenta la teoría, el *espacio-tiempo*, y veremos cómo podemos modelar los conceptos de *partícula* y *observador* en ella [18].

**Definición 4.1.1.** Un *espacio-tiempo* es una terna  $(M, g, \mathcal{T})$  donde  $(M, g)$  es una variedad de Lorentz 4-dimensional con la conexión de Levi-Civita y  $\mathcal{T}$  una orientación temporal. Los puntos de un espacio-tiempo se denominan *sucesos* o *eventos*, la orientación temporal se denomina *futuro* y la orientación negativa *pasado*.

De aquí en adelante, para simplificar la notación denotaremos un espacio-tiempo simplemente como  $M$ .

**Definición 4.1.2.** Se define *partícula* en un espacio-tiempo  $M$  como una curva  $\alpha : I \rightarrow M$  que apunta al futuro tal que  $\langle \alpha'(u) | \alpha'(u) \rangle = -m^2$  con  $m \geq 0$  para todo  $u \in I$ . Si  $m > 0$  decimos que  $m$  es la *masa en reposo* de la partícula (*material*) y si  $m = 0$  decimos que es una *partícula sin masa*. En el caso de que  $m = 1$  decimos que la partícula es un *observador* y en este caso y el parámetro  $u$  se denomina *tiempo propio*.

Notemos que para un observador, nos encontramos con la parametrización natural de la curva y en ese caso el parámetro  $u$  es la longitud de arco.

La *línea de universo* de una partícula  $\alpha : I \rightarrow M$  es  $\alpha(I)$  y representa todos los *sucesos* por los que transcurre la partícula, esto es, el conjunto de las posiciones y tiempos concretos.

**Definición 4.1.3.** Una partícula  $\alpha$  en un espacio-tiempo  $M$  cae libremente si  $\alpha$  es una geodésica de  $M$ , esto es,

$$\frac{D\alpha'}{du} \equiv 0.$$

**Definición 4.1.4.** Un *fotón* en un espacio-tiempo  $M$  es una partícula sin masa que cae libremente.

**Definición 4.1.5.** Un *observador instantáneo* en un espacio-tiempo  $M$  es un par  $(p, Z)$  donde  $p \in M$  y  $Z \in T_p(M)$  tal que  $\langle Z|Z \rangle = -1$  y  $Z$  apunta al futuro.

Un observador instantáneo representa la velocidad de un observador en un instante de tiempo propio.

Si consideramos un observador instantáneo  $(p, Z)$ , entonces podemos hacer la siguiente descomposición ortogonal por el Lema 3.7.2:

$$T_p(M) = \text{span}(Z) \oplus Z^\perp$$

El subespacio 3-dimensional  $Z^\perp$  se llama *espacio físico observado* por  $(p, Z)$  y representa el espacio Euclídeo que ve instantáneamente este observador.

Si consideramos ahora una partícula  $\alpha$  de masa  $m$  en un espacio-tiempo  $M$  que para cierto  $u$  cumple que  $\alpha(u) = p$ , por la descomposición anterior podemos escribir

$$\alpha'(u) = EZ + \vec{P} \quad E \in \mathbb{R}, \vec{P} \in Z^\perp.$$

**Definición 4.1.6.** Sean  $M$  un espacio-tiempo,  $(p, Z)$  un observador instantáneo y  $\alpha$  una partícula que cumple que  $\alpha(u) = p$  para cierto  $u$ . Se definen la *energía*  $E \in \mathbb{R}$  y el *momento*  $\vec{P} \in Z^\perp$  de la partícula medidos por el observador instantáneo como aquellos elementos que cumplen que  $\alpha'(u) = EZ + \vec{P}$ . Definimos también la *velocidad*  $\vec{v}$  de la partícula medida por el observador instantáneo como  $\vec{v} = \frac{1}{E}\vec{P} \in Z^\perp$ .

Para el momento y la velocidad hemos utilizado la notación  $\vec{P}$  y  $\vec{v}$  para indicar que  $P$  y  $v$  son sus respectivas normas.

**Teorema 4.1.7.** *Sean  $M$  un espacio-tiempo,  $(p, Z)$  un observador instantáneo y  $\alpha$  una partícula de masa  $m$  que cumple que  $\alpha(u) = p$  para cierto  $u$ . Entonces se cumple que*

1.  $E > 0$ ,
2.  $E^2 = m^2 + P^2$ ,
3.  $0 \leq v \leq 1$  y  $v = 1$  si y sólo si  $m = 0$ ,
4.  $E = m/\sqrt{1 - v^2}$  si  $m > 0$ ,
5.  $E = P$  si  $m = 0$ .

*Demostración.* De la descomposición ortogonal  $\alpha'(u) = EZ + \vec{P}$  tenemos que  $\langle \alpha'(u)|Z \rangle = E \langle Z|Z \rangle + \langle P|Z \rangle$  y entonces  $E = -\langle \alpha'(u)|Z \rangle$ . Como ambos vectores apuntan al futuro, se encuentran en mismo cono y  $\langle \alpha'(u)|Z \rangle < 0$  por la Proposición 3.7.4, por tanto  $E > 0$ . De igual modo  $\langle \alpha'(u)|\alpha'(u) \rangle = E \langle Z|\alpha'(u) \rangle + \langle P|\alpha'(u) \rangle$  y se tiene que  $E^2 - m^2 = \langle P|\alpha'(u) \rangle$ . Por último,  $\langle \alpha'(u)|P \rangle = E \langle Z|P \rangle + \langle P|P \rangle$  da lugar a  $P^2 = \langle \alpha'(u)|P \rangle$  y por tanto  $E^2 = m^2 + P^2$ . De la expresión anterior,  $E^2 = m^2 + E^2v^2$  y despejando llegamos a  $v^2 = 1 - m^2/E^2$ , por tanto  $v = 1$  si y sólo si  $m = 0$ . En otro caso  $v < 1$  y despejando de la expresión anterior,  $E = m/\sqrt{1 - v^2}$ . Si  $m = 0$  entonces  $E = P$  directamente a partir de (2).  $\square$

En las unidades habituales donde la velocidad de la luz es  $c$ , las expresiones anteriores toman la forma  $E^2 = (mc^2)^2 + (Pc)^2$ ,  $E = mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ,  $E = Pc$  y la velocidad de cualquier partícula está limitada a  $c$ . En el caso de que  $P = 0$  y por tanto  $v = 0$ , llegamos a  $E = mc^2$ , la famosa expresión de Einstein que relaciona la energía y masa de una partícula. Esta energía en ausencia de momento medido se llama *energía en reposo* de la partícula.

En el caso de que el observador sea la propia partícula (material), la descomposición ortogonal da lugar a

$$T_{\alpha(u)}M = \text{span}(\alpha'(u)) \oplus \alpha'(u)^\perp.$$

Lo anterior puede interpretarse como que el espacio físico observado por la partícula cambia a medida que *transcurre* su tiempo propio.



## 4.2. Ecuación de campo de Einstein

Definir el concepto “materia” no es sencillo. Hasta ahora hemos interpretado una partícula con masa como una curva en una variedad, pero el hecho de que hablemos de “masa” no dota de significado físico alguno al concepto de partícula ni define el de *materia*. La idea de Einstein consistía en que, visto el espacio-tiempo como una variedad, la “materia” en dicha variedad (signifique lo que signifique) debería determinar la curvatura y a su vez, dicha curvatura debe determinar cómo se mueve la “materia”.

En analogía con los resultados clásicos en medios continuos donde encontramos el *tensor momento-energía* [8], en cuyas componentes quedan representadas las densidades de energía y momento, podemos generalizar este concepto a modo de primer acercamiento a la hora de definir un *modelo de materia*.

**Definición 4.2.1.** Un *tensor momento-energía*  $T$  en un espacio-tiempo  $M$  es un campo tensorial simétrico de tipo  $(0,2)$  en  $M$  tal que :

1.  $T(v, v) \geq 0$  para todo vector causal de  $T_p(M)$  y para todo  $p \in M$ .
2.  $\operatorname{div} T = 0$ .

La primera condición se justifica en que  $T(v, v)$  representa la *densidad de energía* y hasta donde conocemos, siempre es positiva para todo tipo de materia. La segunda condición expresa la conservación del momento-energía.

En particular, podemos definir un *modelo material* en un espacio-tiempo  $M$  como un par  $(\mathcal{M}, T)$ , donde  $\mathcal{M}$  es un conjunto de partículas en  $M$  y  $T$  es un tensor momento-energía. Por simplicidad denotaremos los modelos materiales simplemente como  $\mathcal{M}$ .

Con el fin de relacionar la curvatura y la materia existente en un espacio-tiempo, Einstein definió el siguiente tensor.

**Definición 4.2.2.** Sea  $M$  un espacio-tiempo. Se define el *tensor gravitacional de Einstein*  $G$  como:

$$G = \operatorname{Ric} - \frac{1}{2}Sg.$$

**Proposición 4.2.3.** *El tensor gravitacional de Einstein en un espacio-tiempo  $M$  es un campo tensorial de tipo  $(0,2)$  simétrico con divergencia nula. Además se tiene que*

$$\operatorname{Ric} = G - \frac{1}{2}C(G)g.$$

*Demostración.*  $G$  es simétrico de tipo  $(0,2)$  por serlo  $\text{Ric}$  y  $g$ . Por la Proposición 3.6.5:

$$\text{div } G = C_{23} \left[ \nabla \text{Ric} - \frac{1}{2} \nabla(Sg) \right] = \text{div Ric} - \frac{1}{2} \text{div}(Sg) = \frac{1}{2} [dS - \text{div}(Sg)].$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que  $\nabla g = 0$  y que  $\nabla S = dS$ :

$$\text{div}(Sg) = C_{23}[\nabla(Sg)] = C_{23}[(\nabla S)g + S\nabla g] = C_{23}[(dS)g] = dS.$$

Esta última igualdad podemos verla por componentes:

$$\{C_{23}[(dS)g]\}_k = \sum_{i,j} g^{ij} g_{ik} S_{;j} = \sum_j \delta_k^j S_{;j} = S_{;k}$$

Por tanto,  $\text{div } G = \frac{1}{2}(dS - dS) = 0$ .

Para demostrar la igualdad, vemos primero que la contracción del tensor métrico de una variedad coincide con la dimensión de la misma ya que

$$C(g) = \sum_{i,j=1}^m g^{ij} g_{ij} = \sum_{i=1}^m 1 = m.$$

En este caso  $m = 4$  y por tanto  $C(g) = 4$ . De la definición de  $G$  tenemos la relación  $C(G) = C(\text{Ric}) - \frac{1}{2}SC(g) = S - 2S = -S$ , por tanto:

$$\text{Ric} = G + \frac{1}{2}Sg = G - \frac{1}{2}C(G)g,$$

como queríamos demostrar.  $\square$

**Definición 4.2.4.** Sea  $M$  un espacio-tiempo y  $\mathcal{M}$  un modelo material. La ecuación de campo de Einstein es:

$$G = 8\pi T.$$

La ecuación de campo de Einstein establece la relación entre la curvatura de la variedad y el modelo material. Éste es un postulado de la Física basado en la experiencia y los principios de la Relatividad, y por tanto no es demostrable como tal. La definición de  $G$  se basa en la búsqueda de una expresión de la forma  $G \propto T$ , donde el tensor  $G$  que vendría a representar la curvatura del espacio-tiempo sería alguna variante del tensor de Ricci, de tipo  $(0,2)$  como  $T$  y  $g$ . Así, la divergencia de  $G$  debía ser nula al igual que la de  $T$ , y el resultado de la Proposición 4.2.3 motivó su definición.

Como veremos, algunos modelos no consideran materia o energía alguna en el espacio-tiempo. En este caso se dice que el espacio-tiempo es *vacío*, lo que matemáticamente queda representado como  $T = 0$ . Bajo esta condición, la ecuación de campo adquiere la forma

$$G = 0,$$

y nos referiremos a ella como la *ecuación de campo de vacío*. Por la Proposición 4.2.3, un espacio-tiempo vacío cumple que  $\text{Ric} = 0$ , por lo que es Ricci llana. Aquí vemos el primer significado físico de los tensores de curvatura: Si no hay masa alguna en el espacio-tiempo, la variedad es Ricci llana, sin embargo no tiene por que ser completamente llana, como ocurre por ejemplo en el espacio-tiempo de Schwarzschild que veremos en el Capítulo 5.

La forma de la ecuación de campo original descrita por Einstein no era exactamente igual a la aquí expuesta. Einstein pensaba que el universo era eterno, sin principio ni final, lo que se interpreta como un universo *estático en el tiempo*. Para llegar a una solución aproximada de las ecuaciones que cumplían esta condición se vio obligado a introducir un nuevo término a la ecuación, la *constante cosmológica*  $\Lambda$  [13], resultando

$$G + \Lambda g = 8\pi T.$$

Las evidencias experimentales indican que el universo es *dinámico* y se expande, lo que llevó a Einstein a desechar la constante cosmológica, que en palabras de él mismo, fue el “*mayor error de su vida*” [21].



# Capítulo 5

## Modelos cosmológicos simples

Un *modelo relativista* es un par  $(M, \mathcal{M})$  donde  $M$  es un espacio-tiempo y  $\mathcal{M}$  un modelo material tal que se cumple la ecuación de campo de Einstein. En este capítulo vamos a usar los conceptos y resultados desarrollados para acercarnos a los tres modelos relativistas que han constituido la base de la cosmología moderna: La Relatividad Especial, el modelo de Swarzschild del espacio-tiempo resultante de la presencia de un cuerpo y el modelo Fridman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) del universo.

En este capítulo, igual que en los espacios vectoriales de Lorentz, usaremos la notación usual en Relatividad para numerar las coordenadas  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ .

### 5.1. Espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski

Como modelo relativista, la teoría de la Relatividad Especial desarrollada por Einstein gracias a los trabajos de H. Lorentz y H. Minkowski [13], no considera materia alguna en el espacio-tiempo (entendida como densidades de momento y energía), responsable de la curvatura de la variedad. Dicho de otro modo, este espacio-tiempo es vacío. Como vimos en el capítulo anterior, este hecho da lugar a la ecuación de campo de vacío  $G = 0$  y por tanto el espacio-tiempo debe ser Ricci llano. El modelo va más allá y considera una variedad completamente llana, de forma que el resto de espacio-tiempos curvos genéricos se aproximen localmente a ella, de igual modo que el espacio Euclídeo aproxima a las variedades Riemannianas de forma local.

**Definición 5.1.1.** Un *espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski* es un espacio-tiempo  $M$  isométrico al 4-espacio de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^4$ .

Observemos que con esta definición, este tipo de espacio-tiempo cumple automáticamente la ecuación de campo de vacío, pues sabemos que en  $\mathbb{L}^4$  se tiene que  $\Gamma_{ij}^k = 0$  para cualesquiera  $i, j, k = 0, \dots, 3$ , por lo que el tensor de Ricci y la curvatura escalar son directamente nulos, luego  $G = \text{Ric} - \frac{1}{2}Sg = 0$ .

El tensor métrico de un espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski viene dado por  $g = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^3 dx^i \otimes dx^i$ . Por tanto, el elemento de línea es

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2.$$

En lo que sigue de sección,  $M$  denotará siempre un espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski. Notemos que en este caso podemos identificar la variedad  $M$  con  $T_p(M)$  en cada punto de la variedad. Podríamos decir que  $M$  visto desde  $p$  es “geoméricamente equivalente” a  $T_p(M)$  visto desde el origen. También sabemos que las geodésicas de este tipo de espacios son líneas rectas, por tanto para cada par de puntos  $p$  y  $q$  de  $M$  podemos definir el *vector desplazamiento*

$$\vec{p}q = \sum_{i=0}^3 [x^i(q) - x^i(p)] \partial_i \in T_p(M).$$

Podemos redefinir los conos causales relativos al evento  $p \in M$ :

- El *cono temporal futuro* es el conjunto

$$\{q \in M : \vec{p}q \text{ es temporal y apunta al futuro}\}.$$

- El *cono de luz futuro* es el conjunto

$$\{q \in M : \vec{p}q \text{ es luminoso y apunta al futuro}\},$$

que coincide con la frontera del cono temporal futuro.

La unión de los conos anteriores da lugar al *cono causal futuro* de  $p$ . Análogamente se definen el *cono temporal pasado* y el *cono de luz pasado*. El *cono de luz* de  $p$  consiste en la unión de los conos de luz pasado y futuro. El resto de eventos que no se encuentran en ninguno de los conos causales son aquellos en los que  $\vec{p}q$  es espacial.

La interpretación física de los conos reside en que los únicos eventos que pueden ser *influenciados* por un evento  $p$  son aquellos que se encuentran en el cono causal futuro de  $p$ , y aquellos eventos que pueden *influenciar* a  $p$  son

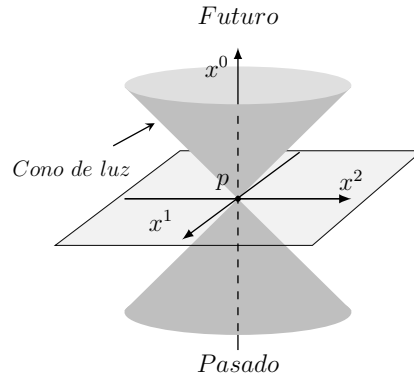


Figura 5.1. Representación del cono de luz de un evento  $p$  en un espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski tridimensional. El hiperplano representado consiste en el conjunto de eventos simultáneos a  $p$ .

aquellos que se encuentran en su cono causal pasado. En este contexto, tanto *ser influenciado* como *influenciar* deben entenderse como la existencia de una partícula entre los sucesos. La posible existencia o no de dicha partícula está condicionada por el límite en la velocidad de la luz. Veámoslo a partir del siguiente concepto.

**Definición 5.1.2.** Llamamos *separación entre los sucesos  $p$  y  $q$* , que denotamos  $pq$ , a la norma del vector  $\vec{p}\vec{q}$ , esto es

$$pq = \|\vec{p}\vec{q}\| = \left| -[x^0(q) - x^0(p)]^2 + \sum_{i=0}^3 [x^i(q) - x^i(p)]^2 \right|^{1/2}.$$

En el caso de que  $\vec{p}\vec{q}$  sea temporal,  $pq$  coincide con el tiempo propio transcurrido del único observador que une  $p$  y  $q$  ya que precisamente habíamos definido dicho parámetro como la longitud de arco (recordemos que un observador es una partícula de masa unidad). Si  $\vec{p}\vec{q}$  es luminoso entonces  $pq = 0$ , por lo que existe un fotón que une  $p$  y  $q$ .

**Lema 5.1.3.** Sean  $o$ ,  $p$  y  $q$  eventos de  $M$  tales que  $\vec{o}\vec{p}$  es espacial y  $\vec{o}\vec{q}$  es temporal. Entonces dos cualesquiera de las afirmaciones siguientes implican la tercera.

1.  $\vec{p}\vec{q}$  es luminoso,
2.  $\vec{o}\vec{p}$  es ortogonal a  $\vec{o}\vec{q}$ ,
3.  $op = oq$ .

*Demostración.* Tenemos que  $\vec{p}\vec{q} = \vec{o}\vec{q} - \vec{o}\vec{p}$ . Entonces:

$$\begin{aligned} pq^2 &= |\langle \vec{p}\vec{q} | \vec{p}\vec{q} \rangle| \\ &= |\langle \vec{o}\vec{q} - \vec{o}\vec{p} | \vec{o}\vec{q} - \vec{o}\vec{p} \rangle| \\ &= |\langle \vec{o}\vec{q} | \vec{o}\vec{q} \rangle + \langle \vec{o}\vec{p} | \vec{o}\vec{p} \rangle - 2 \langle \vec{o}\vec{p} | \vec{o}\vec{q} \rangle| \\ &= |op^2 - oq^2 - 2 \langle \vec{o}\vec{p} | \vec{o}\vec{q} \rangle|. \end{aligned}$$

Si se dan (1) y (2) entonces  $|op^2 - oq^2| = 0$ , con lo que tenemos (3). Si se dan (1) y (3) entonces  $|\langle \vec{o}\vec{p} | \vec{o}\vec{q} \rangle| = 0$ , teniendo (2). Por último, si se dan (2) y (3), necesariamente  $pq = 0$  y tenemos (1).  $\square$

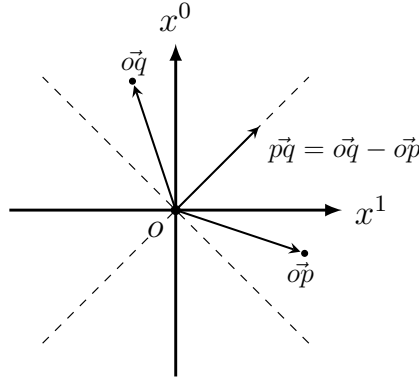


Figura 5.2. Representación del Lema 5.1.3 en un espacio-tiempo de Lorentz Minkowski bidimensional visto desde  $o$  en  $T_o(M)$ . La línea discontinua indica el cono de luz de  $o$ .

Continuando con la geometría de este espacio, introducimos el *ángulo hiperbólico* y la que equivaldría a la bien conocida *desigualdad de Schwarz*.

**Proposición 5.1.4.** Sean  $o, p$  y  $q$  eventos de  $M$  tales que  $p$  y  $q$  se encuentran en el mismo cono temporal de  $o$ . Entonces  $|\langle \vec{o}\vec{p} | \vec{o}\vec{q} \rangle| \geq op\ oq$  y existe un único número  $\phi \geq 0$  tal que  $\langle \vec{o}\vec{p} | \vec{o}\vec{q} \rangle = op\ oq \cosh \phi$ .

*Demostración.* Podemos descomponer  $\vec{o}\vec{p}$  ortogonalmente como  $\vec{o}\vec{p} = a \vec{o}\vec{q} + \vec{v}$  donde  $a \in \mathbb{R}$  y  $\vec{v} \in \vec{o}\vec{q}^\perp$ .

Por ser  $\vec{o}\vec{p}$  temporal se tiene que  $0 > \langle \vec{o}\vec{p} | \vec{o}\vec{p} \rangle = a^2 \langle \vec{o}\vec{q} | \vec{o}\vec{q} \rangle + \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle$ . Por el Lema 3.7.2 sabemos que  $\vec{v}$  es espacial y  $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle \geq 0$ . Por otro lado

$$\begin{aligned} \langle \vec{o}\vec{p} | \vec{o}\vec{q} \rangle^2 &= (a \langle \vec{o}\vec{q} | \vec{o}\vec{q} \rangle + \langle \vec{v} | \vec{o}\vec{q} \rangle)^2 \\ &= a^2 \langle \vec{o}\vec{q} | \vec{o}\vec{q} \rangle^2 \\ &= (\langle \vec{o}\vec{p} | \vec{o}\vec{p} \rangle - \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle) \langle \vec{o}\vec{q} | \vec{o}\vec{q} \rangle \\ &= \langle \vec{o}\vec{p} | \vec{o}\vec{p} \rangle \langle \vec{o}\vec{q} | \vec{o}\vec{q} \rangle - \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle \langle \vec{o}\vec{q} | \vec{o}\vec{q} \rangle. \end{aligned}$$



Puesto que  $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle \geq 0$  y  $\langle \vec{oq} | \vec{oq} \rangle < 0$  por ser  $\vec{oq}$  temporal, se tiene que  $\langle \vec{op} | \vec{oq} \rangle^2 \geq op^2 oq^2$ . La igualdad se alcanza cuando  $\vec{v} = 0$  y en tal caso  $\vec{op}$  y  $\vec{oq}$  son proporcionales. Por último, del hecho de que ambos vectores pertenezcan al mismo cono y la desigualdad tenemos que

$$-\frac{\langle \vec{op} | \vec{oq} \rangle}{op oq} \geq 1.$$

Por tanto existe un único  $\phi \geq 0$  tal que  $\cosh \phi$  coincide con el miembro izquierdo de la desigualdad, con lo que tenemos el resultado.  $\square$

Es decir, en este tipo de espacios, la desigualdad de Schwarz cambia de sentido, lo que lleva a que en lugar de aparecer el habitual coseno en la expresión del producto escalar, aparezca un coseno hiperbólico. De ahí que al  $\phi$  anterior se le denomine *ángulo hiperbólico* entre  $\vec{op}$  y  $\vec{oq}$ , que denotaremos por  $\widehat{poq}$ .

**Proposición 5.1.5.** *Sean  $o, p$  y  $q$  eventos de  $M$  tales que  $p$  y  $q$  se encuentran en el mismo cono temporal de  $o$  y  $\vec{op}$  es ortogonal a  $\vec{pq}$ . Entonces*

1.  $oq^2 = op^2 - pq^2$ ,
2.  $op = oq \cosh \phi$  y  $pq = oq \sinh \phi$ , donde  $\phi = \widehat{poq}$ .

*Demostración.* Sabemos que  $\vec{oq} = \vec{op} + \vec{pq}$ , por tanto:

$$-oq^2 = \langle \vec{oq} | \vec{oq} \rangle = \langle \vec{op} | \vec{op} \rangle + \langle \vec{pq} | \vec{pq} \rangle - 2 \langle \vec{op} | \vec{oq} \rangle = -op^2 + pq^2$$

Con lo que tenemos (1). Para demostrar (2), por un lado tenemos que  $\langle \vec{op} | \vec{oq} \rangle = -op oq \cosh \phi$ , pero también  $\langle \vec{op} | \vec{oq} \rangle = \langle \vec{op} | \vec{op} + \vec{pq} \rangle = -op^2$ , por lo que  $op = oq \cosh \phi$ . Usando (1) tenemos que  $pq^2 = oq^2 (\cosh^2 \phi - 1) = oq^2 \sinh^2 \phi$  y por tanto  $pq = oq \sinh \phi$  ya que  $\sinh \phi \geq 0$  por ser  $\phi \geq 0$ .  $\square$

Lo que acabamos de ver es el correspondiente *Teorema de Pitágoras* en este tipo de espacios. En la Figura 5.3 vemos un ejemplo de cómo quedan representadas estas relaciones.

Veamos algunas implicaciones físicas de este modelo. En el Capítulo 4 comentamos que para un *observador*, el espacio físico observado dependía del propio observador. Vamos a generalizar este concepto con el fin de estudiar las relaciones entre observador y partícula observada.

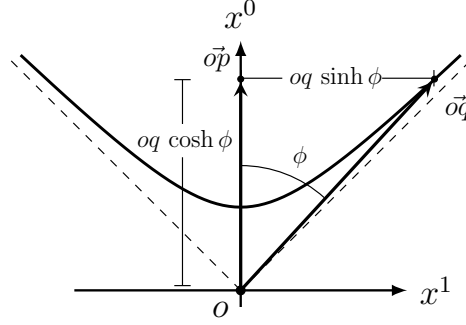


Figura 5.3. Representación del Lema 5.1.5. La curva representa el conjunto de eventos que están separados  $oq$  de  $o$ . Es sencillo comprobar que es una hipérbola.

**Definición 5.1.6.** Un *sistema de coordenadas inercial o Lorentziano* en un espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski  $M$  es una isometría  $\xi = (x^0, \dots, x^3) : M \rightarrow \mathbb{L}^4$  que preserva la orientación temporal.

Si  $\{e_0, \dots, e_3\}$  es una base de  $T_p(M)$  tal que  $e_0$  apunta al futuro, entonces existe un único sistema de coordenadas inercial  $\xi$  tal que  $\partial_i|_p = e_i$  para  $i = 0, \dots, 3$ . Una demostración de este resultado puede encontrarse en [15].

La idea es considerar la línea de universo de una partícula observadora  $A$  que cae libremente (y por tanto la imagen de  $A$  es una línea recta como vimos en el Ejemplo 3.3.7) como la dirección del eje  $x^0$  de cierto sistema inercial  $\xi$ , buscando interpretar  $A$  como un “observador” en el sentido habitual de la palabra. El observador que cae libremente generaliza el concepto de observador instantáneo que vimos en el Capítulo 4.

**Definición 5.1.7.** Sea  $\xi$  un sistema de coordenadas inercial en  $M$ . Para cada evento  $p \in M$  decimos que  $x^0(p)$  es el *tiempo de  $p$  medido en el sistema  $\xi$*  y que  $\vec{x}(p) = (x^1(p), x^2(p), x^3(p)) \in \mathbb{R}^3$  es la *posición de  $p$  medida en el sistema  $\xi$* .

Si consideramos ahora una partícula en  $\alpha : I \rightarrow M$ , para cada  $u \in I$  el tiempo del evento  $\alpha(u)$  medido en un sistema  $\xi$  sería  $t = x^0(\alpha(u))$  y su posición  $\vec{\alpha}(u) = (x^1(\alpha(u)), x^2(\alpha(u)), x^3(\alpha(u)))$ . Como  $\alpha$  es una partícula,  $\alpha'$  apunta al futuro y se tiene que

$$0 < -\langle \alpha' | \partial_0 \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^3 \frac{d(x^i \circ \alpha)}{du} \partial_i \mid \partial_0 \right\rangle = -\frac{d(x^0 \circ \alpha)}{du} \langle \partial_0 | \partial_0 \rangle = \frac{d(x^0 \circ \alpha)}{du}.$$

Puesto que  $x^0 \circ \alpha$  es un difeomorfismo del intervalo  $I$  a algún intervalo  $J$  de  $\mathbb{R}$ , existe su función inversa que denotaremos por  $z : J \rightarrow I$ . Por tanto, en un tiempo  $t$  medido en  $\xi$ , la posición de  $\alpha$  medida en  $\xi$  define la siguiente curva en  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} : J &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (x^1 \circ \alpha \circ z(t), x^2 \circ \alpha \circ z(t), x^3 \circ \alpha \circ z(t)), \end{aligned}$$

que llamamos *partícula  $\alpha$  medida en  $\xi$*  y es lo que el observador  $A$  realmente ve de la partícula. El *vector velocidad de  $\alpha$  medido en  $\xi$*  es  $d\vec{\alpha}/dt$  y es la velocidad de la partícula que el observador  $A$  mediría.

Si la partícula que observa  $A$  es un fotón  $\gamma : I \rightarrow M$  entonces

$$\frac{d\gamma}{du} = \frac{dt}{du} \partial_0 + \sum_{i=1}^3 \frac{d(x^i \circ \alpha)}{du} \partial_i.$$

Este vector es luminoso por ser el fotón una partícula sin masa, por lo que

$$0 = \langle \gamma' | \gamma' \rangle = - \left( \frac{dt}{du} \right)^2 + \left\| \frac{d\vec{\gamma}}{du} \right\|^2.$$

Además hemos visto que  $dt/du > 0$  y se tiene que  $|dt/du| = \|d\vec{\gamma}/du\|$ . Por tanto, la velocidad que  $A$  mide del fotón es

$$\left\| \frac{d\vec{\gamma}}{dt} \right\| = \left\| \frac{d\vec{\gamma}/du}{dt/du} \right\| = \frac{\|d\vec{\gamma}/du\|}{|dt/du|} = 1.$$

Tal y como esperábamos,  $A$  mide que los fotones viajan a la velocidad de la luz independientemente de su movimiento, es decir, la velocidad de la luz es la misma para todos los observadores.

La teoría de la Relatividad Especial predice hechos sorprendentes como la *contracción de Lorentz*, la *dilatación del tiempo*, la relatividad del concepto de *simultaneidad* o la famosa *paradoja de los gemelos* entre otros. Aquí no abordaremos estos elementos, pues en este capítulo pretendemos ver algunos ejemplos y aplicaciones de los conceptos matemáticos que se han desarrollado, pero en la literatura pueden encontrarse numerosas explicaciones y desarrollos sobre estas interesantes consecuencias de este modelo, como por ejemplo en [8].

## 5.2. Espacio-tiempo de Schwarzschild

La primera solución no trivial de las ecuaciones de campo de Einstein se debe al físico Karl Schwarzschild, publicada en 1916. Esta solución proviene de la búsqueda de la descripción del espacio-tiempo en un entorno de un cuerpo masivo, como puede ser una estrella, bajo ciertas suposiciones de simetría. Sus trabajos fueron pioneros en la predicción de lo que hoy conocemos como *agujeros negros*.

En este apartado vamos a ver cómo la *métrica de Schwarzschild* aparece de forma natural bajo algunas hipótesis. Optaremos por la notación  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$  ó  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \varphi)$  si trabajamos en coordenadas cartesianas o esféricas (realmente sólo nos interesarán las coordenadas esféricas).

En primer lugar consideraremos un cuerpo de masa  $m$ , causante de la curvatura. Sin embargo, no modelaremos el cuerpo en sí, sólo el espacio-tiempo que produce. Así, el modelo surge de las siguientes condiciones sobre el espacio-tiempo:

1. Es *estático*. Esto quiere decir que las componentes del tensor métrico no dependen del tiempo.
2. Presenta *simetría esférica*.
3. Es una solución de la ecuación de campo de Einstein de vacío ( $G = 8\pi T = 0$  y por tanto es Ricci llana).
4. Es asintóticamente plano, en el sentido de que el espacio-tiempo debe aproximarse al de Lorentz-Minkowski conforme nos alejamos del cuerpo. Es más, debe coincidir con éste en el caso de que la masa del cuerpo sea nula (es decir, que no haya cuerpo).

A partir de las dos primeras condiciones, podemos optar por considerar la variedad  $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  con el elemento de línea de la forma

$$ds^2 = f(r)dt^2 + g(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones en  $\mathfrak{F}(M)$  no idénticamente nulas a determinar. Para expresar el anterior elemento de línea hemos usado las coordenadas esféricas usuales de  $\mathbb{R}^3$  sin el origen, visto como  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2$ , donde  $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$  y  $\mathbb{S}^2$  es la 2-esfera unidad:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta.$$

Es más, el elemento de línea descrito puede verse como el del producto warped  $P \times_r \mathbb{S}^2$ , donde  $P = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  dotado del elemento de línea  $f(r)dt^2 + g(r)dr^2$ .

Para satisfacer la tercera condición, debe cumplirse que  $\text{Ric} = 0$ . Puesto que los elementos del tensor de Ricci los podemos expresar en función de los símbolos de Christoffel, y estos a su vez en función de los componentes métricos, obtendremos un sistema de ecuaciones.

A partir de la expresión coordenada de los símbolos de Christoffel del Lema 3.2.7, obtenemos los siguientes símbolos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{f'}{2f}, \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{-f'}{2g}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{g'}{2g}, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{-r}{g}, \quad \Gamma_{33}^1 = \frac{-r \sin^2 \theta}{g}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{\tan \theta}. \end{aligned}$$

El resto de símbolos son nulos y la notación  $f'$  y  $g'$  indica la derivada respecto de  $r$ . Por otro lado, a partir de la Definición 3.6.1 y el Lema 3.5.5 tenemos las componentes del tensor de Ricci en función de los símbolos de Christoffel, que deben anularse por la condición de vacío. Para cada  $0 \leq i, j \leq 3$ , debe cumplirse que

$$R_{ij} = \sum_{k=0}^3 R_{ijk}^k = \sum_{k=0}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^k + \sum_{r=0}^3 \Gamma_{ij}^r \Gamma_{rk}^k - \sum_{r=0}^3 \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^k \right] = 0.$$

En principio, lo anterior da lugar a 10 ecuaciones por la simetría del Ricci, pero únicamente tres son independientes<sup>1</sup>.

$$R_{11} = 0 \implies -2rf''gf + rg'f'f + r(f')^2g - 4f'gf = 0, \quad (5.2.1)$$

$$R_{22} = 0 \implies 4g'f^2 - 2rf''gf + rg'f'f + r(f')^2g = 0, \quad (5.2.2)$$

$$R_{33} = 0 \implies rg'f + 2g^2f - 2gf - rf'g = 0. \quad (5.2.3)$$

Restando la Ecuación (5.2.1) a la Ecuación (5.2.2) tenemos que

$$4f(g'f + fg') = 4f(gf)' = 0.$$

<sup>1</sup>Tanto los símbolos de Christoffel como las componentes  $R_{ij}$  han sido computados con el sistema de cálculo simbólico Maxima.

Puesto que  $f$  no es idénticamente nula, debe cumplirse que  $(gf)' = 0$  y por tanto  $gf = K$ , donde  $K$  es una constante no nula. Sabiendo que  $f'g = -gf'$ , tenemos a partir de la Ecuación (5.2.3) que  $2f[rg' + g(g-1)] = 0$ , lo que por el mismo motivo de antes implica

$$g^2 - g + rg' = 0.$$

Esta ecuación diferencial puede resolverse fácilmente a través del cambio de variable  $g(r) = 1/u(r)$  ya que entonces  $g' = -u'/u^2$ , y la ecuación anterior queda:

$$\frac{du}{dr} = \frac{1-u}{r}.$$

Esta es una ecuación de variables separables que se integra directamente, dando lugar a una solución general de la forma  $1-u = r_S/r$ , donde  $r_S$  es una constante. Desahaciendo el cambio de variable tenemos que

$$g(r) = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} = \frac{r}{r - r_S}.$$

Esta función cumple que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow r_S} g(r) = \infty, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} g(r) = 1.$$

Por tanto, la función  $f$  es

$$f(r) = \frac{K}{g(r)} = K \left(1 - \frac{r_S}{r}\right).$$

En este caso se cumple lo siguiente:

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r) = \infty, \quad f(r_S) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} f(r) = K.$$

La condición de que el espacio-tiempo sea asintóticamente plano se traduce en que en el límite de  $r$  tendiendo a infinito,  $f$  debe tender a  $-1$  y  $g$  a  $1$  (obteniendo la métrica de Lorentz-Minkowski). La condición sobre  $f$  implica que  $K = -1$  mientras que la condición sobre  $g$  ya hemos visto que se cumple. Indirectamente, esto implica que la información sobre la masa  $m$  del cuerpo está representada en la constante  $r_S$ . La condición de que en caso de no haber ningún cuerpo ( $m = 0$ ) se tenga la métrica de Lorentz-Minkowski implica que la constante  $r_S$  depende de la masa  $m$  de tal forma que  $r_S = 0$  si y sólo si  $m = 0$ .

Finalmente, el elemento de línea de  $M \cong P \times_r \mathbb{S}^2$  es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

El hecho de que  $1 - r_S/r$  se anule en  $r = r_S$  resulta en que hemos determinado no uno, sino dos espacios distintos.

**Definición 5.2.1.** Sea  $r_S > 0$ . Consideremos las regiones en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ ,  $P_1 = \{(t, r) \mid 0 < r < r_S\}$  y  $P_2 = \{(t, r) \mid r_S < r\}$ , cada una dotada del elemento de línea

$$-h dt^2 + h^{-1} dr^2, \quad \text{donde } h(r) = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right).$$

Si  $\mathbb{S}^2$  es la 2-esfera unidad, llamamos

- *agujero negro de Schwarzschild* al producto warped  $N = P_1 \times_r \mathbb{S}^2$ ,
- *exterior de Schwarzschild* al producto warped  $E = P_2 \times_r \mathbb{S}^2$ .

La constante  $r_S$  se denomina *radio de Schwarzschild*.

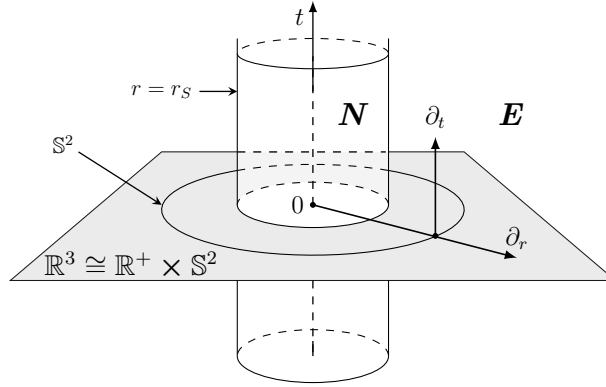


Figura 5.4. Representación del *exterior de Schwarzschild* y del *agujero negro de Schwarzschild*.

Hemos visto que en los casos  $r \rightarrow 0$  y  $r \rightarrow r_S$  la métrica obtenida falla. Sin embargo, las variedades  $N$  y  $E$  pueden extenderse a una variedad mayor en la que la métrica es no degenerada en  $r \in (0, +\infty)$  tal y como demuestran Hawking y Ellis en [10].

En cualquier caso, en la región  $E$  es la coordenada  $t$  la que da lugar a vectores temporales  $\partial_t$  puesto que  $-h < 0$ , mientras que los vectores  $\partial_r$  son espaciales. En este caso podemos pensar en  $t$  y  $r$  como *tiempo* y *distancia*

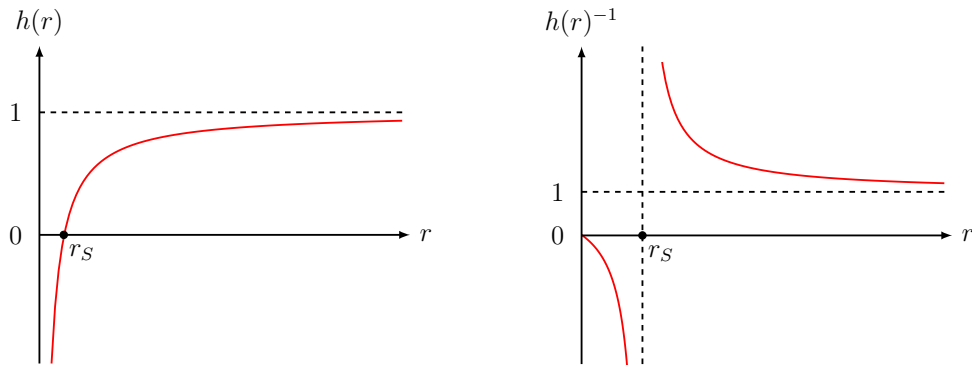


Figura 5.5. Funciones  $h(r)$  y  $h(r)^{-1}$ .

*radial* respectivamente. Sin embargo, en el agujero negro  $N$ , los caracteres causales se intercambian y no podemos realizar la interpretación anterior (véase la Figura 5.5).

La denominación *agujero negro* proviene de una de las propiedades más famosas de estos objetos, recogida en la siguiente proposición, cuya demostración puede encontrarse en [15].

**Proposición 5.2.2.** *Ninguna partícula, material o fotón, puede escapar de la región de agujero negro. Es más, cualquier partícula en esta región se dirige hacia la singularidad central  $r = 0$ , alcanzándola en un intervalo de parámetro finito.*

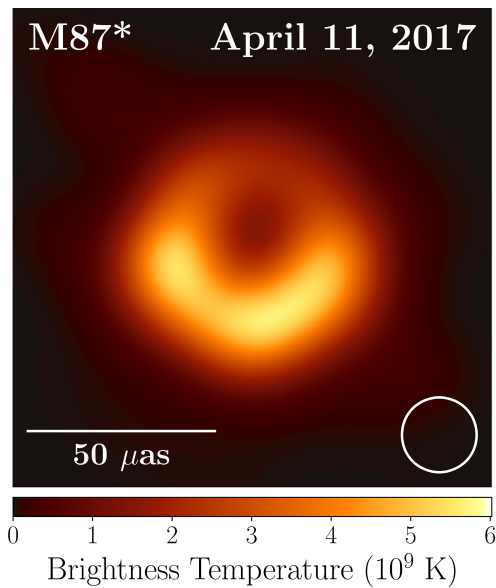


Figura 5.6. Primera fotografía realizada a un agujero negro, tomada por el Event Horizon Telescope y publicada en 2019 [2]. La radiación captada se debe principalmente a aquella emitida por las partículas que orbitan el agujero en la región  $E$  a enormes velocidades, cercanas a la de la luz (*radiación del disco de acreción*).



Para que se forme un agujero negro es necesario que toda la masa del cuerpo se concentre en una región de radio menor al radio de Schwarzschild. Las estrellas que vemos tienen un radio de Schwarzschild bastante menor al de la propia estrella. Por ejemplo, el radio de Schwarzschild de nuestro sol es de apenas 3 km [5].

### 5.3. Espacio-tiempo de Robertson-Walker

Cuando Einstein intentó modelar el universo gracias a la Teoría de la Relatividad General, supuso sin evidencia física que éste debía ser estático [13]. Aleksandr Fridman y Georges Lemaître encontraron soluciones dinámicas de la ecuación de campo, que daban lugar a universos que se podían contraer o expandir en el tiempo. Junto con el apoyo teórico de los matemáticos H. P. Robertson y A. G. Walker y las evidencias experimentales aportadas por el astrónomo Edwin Hubble, se consolidó el modelo Fridman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) como un modelo capaz de describir la evolución de nuestro universo. Este es el nacimiento de conceptos como el de *big bang* tal y como lo conocemos hoy, que llevaron a Einstein a rechazar su prejuicio de universo estático, desechando la constante cosmológica de las ecuaciones de campo [14].

El primer paso a la hora de modelar el universo es dar una forma del tensor momento-energía. Para ello, podemos imaginar que todo el universo es un gran flujo de partículas, que aproximamos como un continuo en lugar de partículas discretas. La velocidad de este flujo vendrá dada por un campo vectorial temporal unitario que representa el promedio de las velocidades de las partículas. Esta entidad la podemos imaginar como un *fluido*.

**Definición 5.3.1.** Un *fluido perfecto* en un espacio-tiempo  $M$  es una terna  $(U, \rho, \mathcal{P})$  tal que

1.  $U \in \mathfrak{X}(M)$  es un campo de vectores temporales unitarios que apuntan al futuro, denominado *campo vectorial de flujo*.
2.  $\rho \in \mathfrak{F}(M)$  cumple que  $\rho(p) \geq 0$  para todo  $p \in M$  y se llama *función de densidad de energía*.
3.  $\mathcal{P} \in \mathfrak{F}(M)$  se denomina *función de presión*.
4. Definen un tensor momento-energía  $T = (\rho + \mathcal{P})U^* \otimes U^* + \mathcal{P}g$ .

Como es habitual,  $U^*$  indica la 1-forma métricamente equivalente a  $U$ .

La cuarta condición de la definición anterior es equivalente a que se cumplan las siguientes relaciones. De aquí en adelante  $X$  e  $Y$  denotarán campos vectoriales ortogonales a  $U$ .

- $T(U, U) = (\rho + \mathcal{P})U^* \otimes U^*(U, U) + \mathcal{P}g(U, U) = (\rho + \mathcal{P}) - \mathcal{P} = \rho,$
- $T(X, Y) = (\rho + \mathcal{P})U^* \otimes U^*(X, Y) + \mathcal{P}g(X, Y) = \mathcal{P} \langle X|Y \rangle,$
- $T(U, X) = (\rho + \mathcal{P})U^* \otimes U^*(U, X) + \mathcal{P}g(U, X) = 0,$

La herramienta matemática que nos permite modelar el universo dinámico es el producto warped.

**Definición 5.3.2.** Sean  $F$  una variedad Riemanniana conexa de dimensión 3 con curvatura constante  $k \in \{-1, 0, 1\}$  y  $f \in \mathfrak{F}(I)$  una función positiva donde  $I$  es un intervalo abierto de  $\mathbb{L}^1$ . El producto warped

$$M(k, f) = I \times_f F$$

se denomina *espacio-tiempo de Robertson-Walker*.

De manera estándar suelen escogerse los espacios  $\mathbb{H}^3$ ,  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{S}^3$ , de curvaturas constantes  $-1$ ,  $0$  y  $1$  respectivamente como candidatos para la fibra  $F$  de la definición. Modelos más complejos no exigen que la curvatura deba ser constante, dando lugar al *espacio-tiempo de Robertson-Walker generalizado* [19].

En la definición anterior hemos mencionado que el espacio resultante es un *espacio-tiempo*, pero no hemos comprobado que cumpla la ecuación en campo, que lo dota de estructura de modelo relativista. Aquí nos encontramos con una de las mayores dificultades de esta teoría: el desconocimiento a priori del tensor momento-energía  $T$ . En los modelos anteriores imponíamos la condición de vacío como parte del modelo, pero en este caso no se va a cumplir esta condición. Por ello vamos desarrollar el modelo material de forma constructiva en esta sección, imponiendo que el espacio-tiempo de Robertson-Walker satisfice la ecuación de campo y construyendo el tensor  $T$  necesario para ello, gracias al concepto de fluido perfecto.

El siguiente lema nos dará la forma del tensor de Ricci y la curvatura escalar de un espacio-tiempo de Robertson-Walker en función de  $k$  y  $f$ .

**Lema 5.3.3.** *Para un espacio-tiempo de Robertson-Walker  $M(k, f)$  con  $U = \partial_t$  campo vectorial de flujo se tiene que*

1.  $\text{Ric}(U, U) = -3f''/f$ ,
2.  $\text{Ric}(U, X) = 0$ ,
3.  $\text{Ric}(X, Y) = 2(f'/f)^2 + k/f^2 + f''/f$ ,
4.  $S = 6[(f'/f)^2 + k/f^2 + f''/f]$ .

La demostración del lema anterior es técnica y la omitiremos, pues se aleja de los objetivos de este apartado. En cualquier caso encontramos una demostración de este lema en [4].

**Teorema 5.3.4.** *Consideremos el campo vectorial de flujo  $U = \partial_t$  en un espacio-tiempo de Robertson-Walker  $M(k, f)$ . Entonces  $(U, \rho, \mathcal{P})$  es un fluido perfecto donde*

$$\rho = \frac{3}{8\pi} \left[ \left( \frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} \right], \quad \mathcal{P} = -\frac{1}{4\pi} \frac{f''}{f} - \frac{1}{3}\rho.$$

*Demostración.* De la ecuación de campo de Einstein y el Lema 5.3.3:

$$\begin{aligned} T(U, U) &= \frac{1}{8\pi} (\text{Ric}(U, U) - \frac{1}{2} Sg(U, U)) \\ &= \frac{1}{8\pi} \left\{ -3 \frac{f''}{f} + 3 \left[ \left( \frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} + \frac{f''}{f} \right] \right\} \\ &= \frac{3}{8\pi} \left[ \left( \frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} \right] \\ &= \rho. \end{aligned}$$

Si  $X$  e  $Y$  son campos vectoriales ortogonales a  $U$ , entonces

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= \frac{1}{8\pi} (\text{Ric}(X, Y) - \frac{1}{2} Sg(X, Y)) \\ &= \frac{1}{8\pi} \left\{ \left[ 2 \left( \frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} + \frac{f''}{f} \right] - 3 \left[ \left( \frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} + \frac{f''}{f} \right] \right\} \langle X|Y \rangle \\ &= \left\{ -\frac{1}{4\pi} \frac{f''}{f} - \frac{1}{8\pi} \left[ \left( \frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} \right] \right\} \langle X|Y \rangle \\ &= \left\{ -\frac{1}{4\pi} \frac{f''}{f} - \frac{1}{3}\rho \right\} \langle X|Y \rangle \\ &= \mathcal{P} \langle X|Y \rangle. \end{aligned}$$

La condición  $T(U, X) = 0$  se cumple por el lema anterior. Por tanto el tensor momento-energía viene dado por  $T = (\rho + \mathcal{P})U^* \otimes U^* + \mathcal{P}g$  y la terna descrita es un fluido perfecto.  $\square$

Así, el tensor  $T$  definido como en el teorema anterior es el que da lugar al modelo material del espacio-tiempo de Robertson-Walker, de forma que por construcción se satisface la ecuación de campo de Einstein.

**Corolario 5.3.5.** *Para un fluido perfecto de Robertson-Walker se tiene que*

$$\frac{f''}{f} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3\mathcal{P})$$

En 1929 el astrónomo Edwin Hubble confirmó experimentalmente la conjetura de Lemaître que afirmaba que las galaxias se alejan de nosotros a una velocidad proporcional a la distancia que nos separa de ellas (*Ley de Hubble*) [14].

**Definición 5.3.6.** Definimos el *parámetro de Hubble* de un espacio-tiempo de Robertson-Walker  $M(k, f)$  en el *tiempo actual*  $t_0$  como

$$H_0 = \frac{f'(t_0)}{f(t_0)}.$$

De los resultados de las mediciones del telescopio Hubble en 2018 [17] se concluyó que

$$H_0 = 73,24 \pm 1,7 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}.$$

Lo que más nos interesa de este resultado es que el parámetro de Hubble es positivo, lo que indica que las galaxias se *alejan* de nosotros.

**Proposición 5.3.7.** *Sea  $M(k, f) = I \times_f F$ . Si  $H_0 > 0$  para algún  $t_0$  y  $\rho + 3\mathcal{P} > 0$ , entonces  $I$  tiene un extremo inicial  $t_*$  tal que  $t_0 - 1/H_0 < t_* < t_0$  y se da uno de los siguientes casos:*

1.  $f' > 0$ ,
2.  $f$  tiene un máximo en algún  $t > t_0$  e  $I$  es un intervalo finito de la forma  $(t_*, t^*)$ .

*Demostración.* Por el corolario anterior se tiene que  $f'' < 0$  y entonces o bien  $f'$  es siempre positiva o bien  $f'$  se anula en algún punto tras  $t_0$ , puesto que  $f'(t_0) = H_0 f(t_0) > 0$  por ser  $H_0 > 0$  y  $f > 0$ . Necesariamente el intervalo  $I$  debe comenzar en algún  $t_* < t_0$  ya que  $f$  es positiva (y no se anula). En caso de que  $f$  tenga un máximo,  $f'$  se vuelve negativa a partir de éste, por lo que por el mismo motivo que antes, el intervalo  $I$  debe acabar en algún  $t^* > t_0$ .

Para acotar  $t_*$  podemos usar que la tangente de  $f$  en  $t_0$  es mayor que  $f$  para todo  $t < t_0$  ya que  $f'' < 0$ . Esta recta es  $r(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) = f(t_0) + H_0 f(t_0)(t - t_0)$ , que se anula en  $t_0 - f(t_0)/f'(t_0) = t_0 - 1/H_0$ . Por tanto  $t_0 - 1/H_0 < t_* < t_0$ .  $\square$

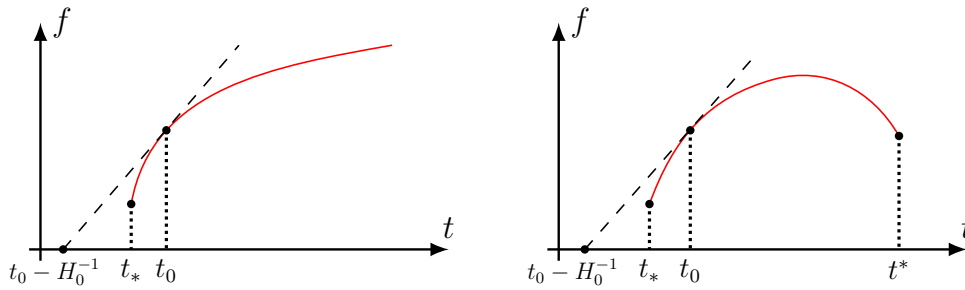


Figura 5.7. Posibles comportamientos de  $f$  y forma del intervalo  $I$  bajo las hipótesis de la Proposición 5.3.7.

**Definición 5.3.8.** En las condiciones de la proposición anterior:

- Decimos que  $M(k, f)$  tiene una *singularidad física* en  $t_*$  si  $\lim_{t \rightarrow t_*} \rho = \infty$ . Análogamente se define en  $t^*$ .
- Una singularidad inicial de  $M(k, f)$  en  $t_*$  es un *big bang* si  $\lim_{t \rightarrow t_*} f = 0$  y  $\lim_{t \rightarrow t_*} f' = \infty$ .
- Una singularidad final de  $M(k, f)$  en  $t^*$  es un *big crunch* si  $\lim_{t \rightarrow t^*} f = 0$  y  $\lim_{t \rightarrow t^*} f' = -\infty$ .

Llegamos así al resultado fundamental de este apartado, que describe bajo las hipótesis anteriores no sólo el origen de nuestro universo, sino además sus posibles finales.

**Teorema 5.3.9.** *Sea  $M(k, f) = I \times_f F$  un espacio-tiempo de Robertson-Walker tal que únicamente tiene singularidades físicas e  $I$  es maximal, en el sentido de que  $f$  no puede extenderse a una función positiva en un intervalo estrictamente mayor que  $I$ . Si  $H_0 > 0$  para algún  $t_0$ ,  $\rho > 0$  y se tiene que  $-1/3 < a \leq \mathcal{P}/\rho \leq A$  para ciertos  $a, A \in \mathbb{R}$ , entonces:*

- *La singularidad inicial es un big bang.*
- *Si  $k \in \{0, -1\}$  entonces  $I = (t_*, \infty)$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} f = \infty$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = 0$ .*
- *Si  $k = 1$  entonces  $I = (t_*, t^*)$  finito,  $f$  alcanza un máximo y se tiene un big crunch en cierto  $t^* > t_0$ .*

Una demostración de este teorema que hace uso de los resultados expuestos puede encontrarse en [15]. El teorema anterior predice que nuestro universo comenzó en un big bang, partiendo todo de un único punto en  $t_*$  (que no forma parte del modelo), expandiéndose instantáneamente. Dependiendo de la geometría de nuestro espacio físico, su final puede ser un big crunch, en el que el universo vuelve a colapsar en un punto tan rápidamente como se formó o bien una *muerte térmica*, en la que el universo se expande indefinidamente y la densidad de materia y energía se disipa, dando lugar a un universo virtualmente vacío.

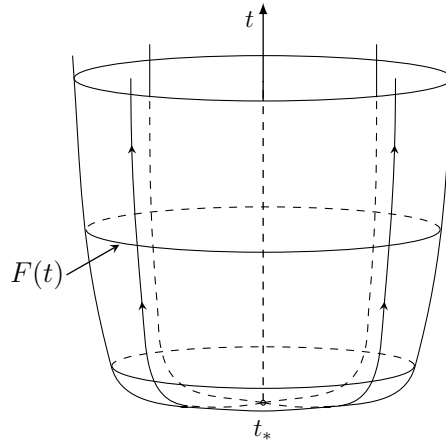


Figura 5.8. Representación del universo en el modelo FLRW.

Los datos obtenidos en 2018 por el telescopio espacial Planck de la Agencia Espacial Europea (ESA) dan como resultado un valor de la curvatura [1]

$$k = 0,0007 \pm 0,0019.$$

Este valor se calcula a través de distintos parámetros relacionados con la distribución de materia y energía y parece indicarnos que nuestro espacio físico es Euclídeo, expandiéndose indefinidamente. Sin embargo, se debe tener en cuenta el error inevitable de la medida. Es posible que o bien el universo no sea exactamente plano y el signo de la curvatura pueda variar, o incluso que nuestro *universo observable* sea tan “pequeño” que nos parezca plano, al igual que nos parece plana la Tierra desde la superficie. Por ello es necesario que este valor se calcule frecuentemente y esté en constante revisión.

Los avances en este tipo de medidas han permitido determinar que actualmente, tras haber pasado por un período de desaceleración como el descrito, el universo se expande *aceleradamente* con una razón entre presión y densidad  $\mathcal{P}/\rho \approx -1$  [1]. Para darle sentido a esta *expansión acelerada* se introdujo el concepto de *energía oscura*, representada en las ecuaciones de campo a través de una reincorporada constante cosmológica, ahora con un significado físico distinto al que le dio Einstein. Los resultados obtenidos por el telescopio Planck arrojan un valor de la constante cosmológica  $\Lambda$  positivo y muy próximo a cero [1], por lo que la ecuación de campo actualmente se expresa de la forma

$$G + \Lambda g = 8\pi T.$$

Uno de los mayores problemas que presenta la Física actual reside en parte en la predicción del valor de la constante cosmológica. Los modelos de la Relatividad General han logrado predecir con éxito numerosos resultados experimentales, respaldando la teoría hasta donde se conoce, por lo que cabe esperar que el valor de  $\Lambda$  sea correcto. Sin embargo, la otra gran teoría de la Física, la *Teoría Cuántica de Campos*, en su intento de estimar el valor de  $\Lambda$  predice un resultado de 120 órdenes de magnitud mayor que el observado [11].

A día de hoy, físicos y matemáticos de todo el mundo pretenden llegar a una *teoría unificada*, donde este tipo de incompatibilidades entre Relatividad y Cuántica sean salvadas para dar lugar a un modelo capaz de explicar la totalidad de nuestra realidad.





# Bibliografía

- [1] Aghanim, N., et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *arXiv preprint arXiv:1807.06209* (2018). [78](#), [79](#)
- [2] Akiyama, K., et al. First M87 Event Horizon Telescope results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal Letters*. **875.1** (2019), p. 5. [72](#)
- [3] Bishop, R. L. y Goldberg, S. I. *Tensor analysis on manifolds*. Dover Publications, Nueva York, 1980. [10](#), [29](#), [42](#)
- [4] Chen, B. *Pseudo-Riemannian geometry, [delta]-invariants and applications*. World Scientific, Singapur, 2011. [10](#), [23](#), [29](#), [75](#)
- [5] Deng, H., Garriga, J., y Vilenkin, A. Primordial black hole and worm-hole formation by domain walls. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. **4** (2017), p. 50. [73](#)
- [6] Dettman, J. W. *Introduction to linear algebra and differential equations*. Dover Publications, Nueva York, 1986. [39](#)
- [7] Gauss, K. F. y Morehead J. C. *General investigations of curved surfaces*. Princeton University Press, Princeton, 1902. [7](#), [42](#)
- [8] Goldstein, H. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1953. [57](#), [67](#)
- [9] Goodstein, J. R. *Einstein's Italian mathematicians: Ricci, Levi-Civita, and the birth of general relativity*. American Mathematical Society, Estados Unidos, 2018. [8](#), [42](#)
- [10] Hawking, S. W. y Ellis, G. F. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, Cambridge, 1973. [71](#)

- [11] Hobson, M. P., Efstathiou, G. P. y Lasenby, A. N. *General Relativity: An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press, Cambridge, 2014. [79](#)
- [12] Lee, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, Nueva York, 2013. [11](#)
- [13] Lorentz, H. A., Einstein, A., Minkowski, H., Weyl, H., y Sommerfeld, A. *The principle of relativity: a collection of original memoirs on the special and general theory of relativity*. Courier Corporation, Estados Unidos, 1952. [53](#), [59](#), [61](#), [73](#)
- [14] Nussbaumer, H. Einstein's conversion from his static to an expanding universe. *European Physics Journal-History*. **39** (2014), p. 37-62. [73](#), [76](#)
- [15] O'Neill, B. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic Press, Londres, 1983. [10](#), [11](#), [23](#), [29](#), [42](#), [44](#), [66](#), [72](#), [78](#)
- [16] Riemann, B. On the hypotheses which lie at the foundation of geometry. *A source book in mathematics*. **2**, (1854) 411-425. [7](#), [42](#)
- [17] Riess, A. G., et al. Milky Way Cepheid standards for measuring cosmic distances and application to Gaia DR2: implications for the Hubble constant. *The Astrophysical Journal*. **861.2** (2018), p. 126. [76](#)
- [18] Romero, A. Geometría de Lorentz: de lenguaje a herramienta básica en Relatividad General. *Facultat de Matemàtiques i Estadística, UPC, Conferències FME, Curs Einstein*. (2005) 127-151. [54](#)
- [19] Sánchez, M. On the Geometry of Generalized Robertson- Walker Spacetimes: Geodesics. *General Relativity and Gravitation*. **30.6** (1998), p. 915-932. [74](#)
- [20] Scheck, F. *Classical Field Theory: On Electrodynamics, Non-Abelian Gauge Theories and Gravitation*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Heidelberg, 2012. [10](#), [53](#)
- [21] Taylor, E. F. y Wheeler, J. A. *Exploring black holes*. CA: Addison Wesley Longman, San Francisco, 2000. [59](#)

