FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

La Paradoja de *Banach-Tarki*

Alberto Raso Fernández
Trabajo dirigido por: Juan Carlos García Vázquez

Dedicado a todas aquellas personas que han hecho posible
que cumpliese mi sueño de estudiar matemáticas.
A los profesores, que pacientemente me han ayudado
a aprender y enamorarme más de ellas.
Finalmente, a los amigos y compañeros con los que he
compartido tanto risas como lagrimas a lo largo de la carrera.

Índice general

Resumen **6**

Abstract **8**

Introducción **10**

1. Prueba de *Stromberg* **12**

1.1. Introducción 12

1.2. Rotaciones 16

1.3. El grupo G 21

1.4. La paradoja de *Hausdorff* 33

1.5. La bola unidad 47

1.6. La paradoja de *Banach-Tarski* 51

2. Prueba de *Stan Wagon* **58**

2.1. Definiciones y preliminares 58

2.2. Paradoja de *Hausdorff*: matrices de *Sâto* 64

2.3. La paradója de *Banach-Tarski*. 68

3. La paradoja de *Banach-Tarski* en dimensiones 1 y 2: grupos amenables. **74**

3.1. Medida e integración respecto de medidas finitamente aditivas 74

3.2. Grupos amenables 80

3.3. Isometrías en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ 92

Bibliografía **100**

Resumen

En este TFG nuestro objetivo será probar la paradoja de *Banach-Tarski*, la cual nos dice que: dados dos subconjuntos acotados X e Y de $\mathbb{R}^3$, con interior no vacio, existirá un número natural n y particiones $\{X_j : 1 \leq j \leq n\}$ e $\{Y_j : 1 \leq j \leq n\}$ de X e Y respectivamente (cada una de n partes) de forma que X_j es congruente con Y_j para todo j. Que sean congruentes implica que existe una isometría en $\mathbb{R}^3$ que transforma X_j en Y_j. Para probarlo, usaremos como guía las versiones de la demostración de *Karl Stromberg* y *Stan Wagon*.

Finalmente, reservaremos el último capítulo para analizar el motivo por el que no existe una paradoja similar en in $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$.

Abstract

In this work the objetive will be the proof of the *Banach-Tarski* paradox. It states that given two bounded subsets X and Y of $\mathbb{R}^3$, each having nonempty interior, then there is a natural number n and partitions $\{X_j : 1 \leq j \leq n\}$ and $\{Y_j : 1 \leq j \leq n\}$ of X and Y respectively (into n pieces each) such that X_j is congruent to Y_j for all j. Congruent means that,for each j, there is an isometry of $\mathbb{R}^3$ that transform X_j to Y_j. To prove it, we will use as guide the *Karl Stromberg's* and *Stan Wagon's* versions of the proof.

Finally, the last chapter is reserved to analyze the reason why it is not possible a similar paradox in $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^2$.

Introducción

En este TFG, estudiaremos la demostración de la paradoja de *Banach-Tarski*, la cual nos dice que se puede dividir un conjunto acotado de $\mathbb{R}^3$ de forma que, mediante la reordenación de esas divisiones (mediante isometrías), podemos obtener otro conjunto acotado de forma que no hay restricción de tamaño de dichos conjuntos.

En el primer capítulo, utilizaremos como guía la demostración de Karl Stromberg, en la cual estudiaremos algunas propiedades de las isometrías en el espacio $\mathbb{R}^3$. Posteriormente seleccionaremos las siguientes matrices

$$\psi = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \phi = \begin{pmatrix} -\cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

y veremos que dichas matrices forman un subgrupo dentro de las isometrías en $\mathbb{R}^3$, al que llamaremos el grupo G, y veremos algunas propiedades de dicho subgrupo. Esto será para demostrar otra paradoja de conjuntos, la paradoja de *Hausdorff*, la cual emplearemos para la demostración de la existencia de una partición de la esfera unidad en diez partes disjuntas de forma que, mediante la aplicación a dichas partes de las isometrías que conforman el grupo G, obtenengamos dos esferas del tamaño de la esfera original.

Usando lo anteriorpodremos ampliar dicho resultado a la bola unidad, que denotaremos como B, teniendo en este caso que la partición la conforman 46 elementos, obteniendo finalmente dos bolas unidad.

Finalmente demostraremos que esta propiedad no se restringe únicamente a la bola unidad, sino que podemos ampliarlo a cualquier par de conjuntos acotados de $\mathbb{R}^3$, demostrando de esta forma la paradoja de *Banach-Tarski.* Para ello se introducirá el concepto de congruencia de conjuntos, teniendo que los conjuntos de la partición del conjunto origen, al que denominaremos X, son congruentes con los conjuntos de la partición del conjunto destino, al que denomiraremos Y.

En el segundo capítulo demostraremos de nuevo la paradoja, utilizando esta vez como guía el desarrollo que aparece en el libro de *Stan Wagon*, en el que introduciremos los conceptos de conjunto paradójico y de grupo libre. Estos conceptos se relacionarán gracias a los puntos fijos que tenga el grupo libre obteniéndose que, si no posee ninguno, el conjunto en el que actúa el grupo libre es paradójico.

Demostraremos nuevamente la paradoja de *Hausdorff*, empleando ahora las matrices de *Sâto*

$$\sigma = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad \tau = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

e introduciremos algunos conceptos de la teoría de la medida, como por ejemplo, que un conjunto sea G-despreciable, obteniendo como resultado que si un conjunto es paradójico respecto a G, se tiene que es G-despreciable. Esto será útil en la demostración de que la esfera es SO_3-despreciable.

Como clausura del segundo capítulo, definiremos el concepto de equidescomponibilidad de conjuntos y de congruencia de polígonos, demostrando que son equivalentes. Posteriormente y gracias a las propiedades obtenidas, podremos probar que si un conjunto es G-despreciable, será también paradójico. Como resultado se tendrá que la esfera unidad es un conjunto paradójico y, ampliando dicha propiedad a cualquier conjunto, demostrando nuevamente la paradoja de *Banach-Tarski.*

Finalmente, el tercer capítulo de este TFG consistirá en la prueba de que, para conjuntos que se encuentren en la primera y segunda dimensión, no se cumple la paradoja de *Banach-Tarski.*

Para ello trabajaremos con la teoría de la medida, más específicamente de medidas finitamente aditivas e introduciremos la definición de grupo amenable. Mediante el empleo de medidas finitamente aditivas, veremos que un grupo amenable no puede ser paradójico, por lo que finalizaremos demostrando que las isometrías en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ son grupos amenables.

Capítulo 1

Prueba de *Stromberg*

1.1. Introducción

La paradoja de *Banach-Tarski* es un famoso teorema que nos habla sobre la equivalencia de conjuntos. Para demostrar este teorema utilizaremos la versión de *Karl Stromberg* [1] como guía. Empezaremos enunciando el teorema para posteriormente demostrarlo.

Teorema 1.1 (Paradoja de *Banach-Tarski*) Sean X e Y dos conjuntos acotados de $\mathbb{R}^3$ con interior no vacío, entonces existe un número $n \in \mathbb{N}$ tal que existen particiones $\{X_j : 1 \leq j \leq n\}$ e $\{Y_j : 1 \leq j \leq n\}$ de X e Y respectivamente, tales que X_j es congruente con Y_j para todo j.

En resumen, si tenemos cuerpos acotados X e Y de $\mathbb{R}^3$ tal que X e Y contienen bolas cerradas, podemos descomponer X en un número finito de partes y reordenando dichas partes, mediante rotaciones y traslaciones, obtenemos Y. Lo curioso es que no tenemos condición alguna para X o Y, ni siquiera de tamaño.

Una consecuencia de este teorema sería que si tenemos dos bolas de radios 1 y 2 respectivamente, podemos crear particiónes de las bolas en n partes cada una, de forma que cada elemento de la partición de la bola de radio 1 sea congruente con un elemento de la partición de la esfera de radio 2. Empezaremos definiendo varios conceptos que serán necesarios a la hora de realizar la prueba.

Definición 1.2 Para $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ definimos la norma de x como:

$$|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$$

Definición 1.3 El conjunto $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x - a| \leq r\}$ es una bola cerrada de radio r centrada en $a \in \mathbb{R}^3$.

Definición 1.4 Una matriz ortogonal es una matriz $n \times n$ con coeficientes reales cuya transpuesta es igual a su inversa, es decir, dada A una matriz, esta será ortogonal si se cumple que:

$$AA^{-1} = AA^t = I_{n\times n}$$

Definición 1.5 Un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ es acotado si está contenido en una bola cerrada.

Definición 1.6 Un subconjunto $X \in \mathbb{R}^3$ tiene interior no vacío si contiene una bola cerrada.

Definición 1.7 Una rotación es una matriz ortogonal 3×3 ρ cuyo determinante es igual a 1. Podemos ver que ρ es también una función $\rho : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Denotamos $\rho(x)$ para representar al vector obtenido multiplicando ρ por el vector columna x:

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{33} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, la definición habitual de rotación es la de una función que preserva las distancias al mover los puntos de un cuerpo alrededor de un eje de rotación. Veremos más adelante que nuestra definición de rotación es equivalente a definición clásica.

Otra propiedad interesante de las rotaciones es que son un grupo. Recordemos que un conjunto de matrices forman un grupo si cumple las siguientes propiedades:

- Clausura: dados dos elementos X e Y, su producto también se encuentra en el conjunto
- Elem. Identidad: Existencia del elemento identidad en el conjunto (En este caso denotado por I)
- Elem. inverso: Para cada X perteneciente al conjunto, X^{-1} esta en el conjunto y se cumple que $XX^{-1} = I$

Teorema 1.8 El conjunto de las rotaciones forman un grupo. Es decir, el conjunto de las matrices ortogonales 3×3 con determinante igual a 1 satisface las condiciones de clausura y posee elementos identidad e inverso.

Demostración.

Empezaremos la demostración recordando algunas propiedades del álgebra lineal que serán útiles en la prueba. Sean α y β dos matrices, se cumple:

1. $\det(\alpha\,\beta)$ $=\det(\alpha)\,\det(\beta)$

2. Si α y β son invertibles, entonces $\alpha\,\beta$ es invertible y, además $(\alpha\,\beta)^{-1} = \beta^{-1}\,\alpha^{-1}$

3. $(\alpha\,\beta)^t = \beta^t\,\alpha^t$

Empezaremos ahora con la demostración del teorema propiamente dicha:

Clausura. Necesitamos probar que el producto de dos rotaciones cualesquiera sigue siendo rotación. Sean α y β dos rotaciones arbitrarias. Tenemos entonces que:

$$det(\alpha \cdot \beta) = det(\alpha) \cdot det(\beta) = 1 \cdot 1 = 1$$

Por tanto esto prueba que $\alpha \cdot \beta$ pertenece al conjunto de las rotaciones.

Elem. identidad. Es fácilmente comprobable que la matriz identidad será nuestro elemento identidad, ya que

$$I^{-1} = I^t$$

$$det(I) = 1$$

Elem. inverso. Tenemos que probar que el elemento inverso de una rotación es también una rotación. Por nuestra definición de rotación tenemos que, dada ρ rotación, $\rho^{-1} = \rho^t$. Veamos que $\det(\rho^{-1})$=1 y $(\rho^{-1})^{-1} = (\rho^{-1})^t$.

Sea α una rotación:

$$det(\alpha) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = 1$$

$$det(\alpha^{-1}) = det(\alpha^t) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) = 1$$

$$det(\alpha) = det(\alpha^{-1}) = 1$$

Sabemos ahora que $\alpha^{-1} = \alpha^t$. Realizando una trasposición en ambos lados, observamos que $(\alpha^{-1})^t = (\alpha^t)^t$. Como al trasponer dos veces una matriz se obtiene la matriz original, $(\alpha^{-1})^t = \alpha$. Finalmente, tenemos que $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$, lo que implica que $(\alpha^{-1})^{-1} = (\alpha^{-1})^t$ demostrando de esta forma que α^{-1} es una rotación. ■

Definición 1.9 Un movimiento rígido (también llamado transformación Euclídea) es una función $r: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de forma $r(x) = \rho(x) + a$ con $x \in \mathbb{R}^3$, con ρ una rotación y $a \in \mathbb{R}^3$. Es decir, un movimiento rígido es una transformación que incluye una rotación y una traslación.

Como las rotaciones, el conjunto de movimientos rígidos forma un grupo. Esto será importante más adelante, por lo que procederemos con la demostración de esta caracteristica del conjunto.

Teorema 1.10 El conjunto de los movimientos rígidos $r(x) = \rho(x)+a$ donde ρ es una rotación y $a \in \mathbb{R}^3$ es un grupo.

Demostración.

Clausura. Sea $r(x) = \rho(x) + a$ y $s(x) = \tau(x) + b$ dos movimientos rígidos donde ρ y τ son rotaciones y a, b puntos fijados de $\mathbb{R}^3$. Tenemos que demostrar que $(r \circ s)(x)$ es un movimiento rígido.

$$(r \circ s)(x) = r(\tau(x) + b) = \rho(\tau(x) + b) + a = \rho(\tau(x)) + \rho(b) + a$$

Como sabemos que el grupo de rotaciones es cerrado $\rho(\tau(x))$ es una rotación. Después, observamos que la rotación de un punto es un punto en $\mathbb{R}^3$. Entonces tenemos que $(r \circ s)(x)$ es composición de una rotación y una traslación de $\mathbb{R}^3$ y, por tanto, un movimiento rígido. Por tanto se cumple la condición.

Elem. identidad. Podemos probar fácilmente que el elemento identidad es aquel formado por $\rho = i$ y $a = 0$.

Elem. inverso. Sea $r(x) = \rho(x) + a$ donde ρ es una rotación y a un punto de $\mathbb{R}^3$. El elemento inverso de $r(x)$ es $r^{-1}(x) = \rho^{-1}(x) - \rho^{-1}(a)$, ya que

$$(r \circ r^{-1})(x) = r(\rho^{-1}(x) - \rho^{-1}(a)) = \rho(\rho^{-1}(x) - \rho^{-1}(a)) + a = x - a + a = x$$

Entonces simplemente tendremos que demostrar que $\rho^{-1}(x) - \rho^{-1}(a)$ es un movimiento rígido. Como ρ es una rotación y el conjunto de las rotaciones son un grupo, ρ^{-1} es también una rotación. Empleando ahora el mismo razonamiento que en el primer apartado, tenemos que $\rho^{-1}(a)$ es un punto de $\mathbb{R}^3$. Por tanto $r^{-1}(x)$ cumple las condiciones de ser un movimiento rígido.

■

Definición 1.11 Dos subconjuntos X e Y son congruentes, denotado por $X \cong Y$ si existe un movimiento rígido r tal que $r(X) = Y$. Entonces X es congruente con Y si y solo si hay una manera de transformar X en Y mediante movimientos rígidos.

Definición 1.12 Una partición de un conjunto X es una familia de conjunto cuya unión es X y son disjuntos dos a dos. Esto es, $\{X_j : 1 \leq j \leq n\}$ una partición de X de n elementos, cumple:

1. $X = \bigcup_{j=1}^{n} X_j$.
2. $X_i \cap X_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$.

Alguno de estos X_j pueden ser conjuntos vacios.

1.2. Rotaciones

Ahora que hemos establecido algunas definiciones básicas, probaremos algunas características de las rotaciones, que serán un pilar fundamental para la demostracion del teorema de *Banach-Tarski.* En el siguiente teorema demostraremos que nuestra definición de rotación es equivalente con la definición clásica de rotación.

Teorema 1.13 Todas las rotaciones tienen las siguientes propiedades:

1. La imagen de una línea al realizar una rotación sigue siendo una línea. Esto es, $\rho(b + tc) = \rho(b) + t\rho(c)$ para todo $b, c \in \mathbb{R}^3$ y $t \in \mathbb{R}$.
2. Las rotaciones conservan el producto interno. Es decir, dados dos puntos $x, x' \in \mathbb{R}^3$ tales que $\rho(x) = y, \rho(x') = y'$ se tiene que:
$$< y, y' >= \sum_{i=1}^{3} y_i y_i' = \sum_{i=1}^{3} x_i x_i' =< x, x' >$$
3. Las rotaciones conservan las distancias. Es decir, para cualquier $x \in \mathbb{R}^3$, $|\rho(x)| = |x|$
4. Si $\rho \neq I$, entonces el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : \rho(x) = x\}$ es una línea que pasa a través del origen. Es decir, existe un punto $p \in \mathbb{R}^3$ tal que $A = \{tp : t \in \mathbb{R}\}$ y $|p| = 1$. Llamamos a A eje de la rotación.
5. Si q es un punto cualquiera de $\mathbb{R}$ que tenga las características de p descritas en el apartado anterior, entonces $p = q$ o $q = -p$. Llamamos a p y a $-p$ polos de ρ.

Demostración.

1. Empezamos aplicando ρ a una línea de la forma $b + tc$ donde b,c son vectores de $\mathbb{R}^3$ y t un escalar de $\mathbb{R}$. Se tendrá entonces que:

$$\rho(b + tc) = \rho(b) + \rho(tc) = \rho(b) + t\rho(c)$$

que es una línea en $\mathbb{R}^3$.

2. Seas $x, x' \in \mathbb{R}^3$ tales que $\rho(x) = y, \rho(x') = y'$. Como ρ es ortogonal, sabemos que $\rho^t = \rho^{-1}$ de forma que el producto de ρ con su traspuesta es igual a la identidad. Sabemos también que las entradas de las columnas de ρ son las mismas que las filas de ρ^t.

   Usando esto, vemos que $\sum_{i=1}^3 \rho_{ij}\rho_{ik} = I_{jk}$. Como las entradas de la matriz identidad estan formadas por 1's en los elementos de la diagonal (j=k) y 0's en cualquier otro caso tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 y_i y_i' &= \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \rho_{ij} x_j \right) \left(\sum_{k=1}^3 \rho_{ik} x_k' \right) \\
&= \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 \rho_{ij}\rho_{ik} x_j x_k' \right) \right) \\
&= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 i_{jk} x_j x_k' \right) \\
&= \sum_{i=1}^3 x_i x_i'
\end{aligned}$$

3. Sabemos que la raiz cuadrada del producto de un vector consigo mismo es igual al tamaño del vector. Por tanto, como el producto interno es conservado por las rotaciones, por lo que como consecuencia se tiene que las distancias también son conservadas por las rotaciones. Podemos demostrar esto haciendo la sustitución de $x' = x$ en el cálculo de la prueba anterior:

$$|y|^2 = \sum_{i=1}^{3} y_i y_i' = \sum_{i=1}^{3} x_i x_i' = |x|^2$$

   Esto prueba que $|y|^2 = |x|^2$ o, lo que es equivalente, $|y| = |x|$ ya que ambos elementos son no negativos. Esto es lo mismo que decir que $|\rho(x)| = |x|$, concluyendo con la prueba de que las rotaciones conservan las distancias.

4. Sea A una matriz $k \times k$. Entonces:

   - Un autovalor de A es un escalar λ tal que existe un vector no nulo de forma que se cumple que $Ax = \lambda x$.

- λ es un autovalor de A si y solo si $(A - \lambda I) = 0$ tiene solución no nula.
- Definimos ecuación característica de A como $det(A - \lambda I) = 0$

Empezaremos fijando ρ una rotación cualquiera. Suponemos que $\rho \neq I$ ya que en caso contrario no habría nada que demostrar. El polinomio característico de ρ, escrito $f(\lambda)$ es $det(\rho - \lambda I)$. Empezaremos esta demostración viendo que esta matriz tiene un autovalor igual a 1, ya que esto es igual que decir que $\rho(x) = 1 \cdot x$ para algún $x \in \mathbb{R}^3$. Como estamos buscando un vetor no nulo tal que $\rho(x) = x$, el autovector asociado al autovalor 1 será x.

Como ρ es una matriz 3×3, sabemos que el polinomio característico es de orden cúbico con coeficientes reales. Como las funciones cúbicas recorren desde $-\infty$ a ∞ y son continuas, el teorema del valor intermedio nos dice que existe un valor tal que la función cúbica es igual a 0 en dicho valor, por lo que debe haber al menos una raiz real.

Sean λ_1, λ_2 y λ_3 las tres raíces del polinomio característico de ρ. Puede darse el caso de que algunas de estas raíces esten repetidas o que sean raíces complejas. Sean λ_1 la raiz con mayor parte real. La factorización del polinomio será:

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)$$

Observamos que, dándole a λ el valor 0, tenemos

$$f(0) = (\lambda_1 - 0)(\lambda_2 - 0)(\lambda_3 - 0) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = det(\rho - 0I) = det(\rho) = 1$$

Esto ya lo sabíamos ya que ρ es una rotación. Si λ_k es una raiz real, la ecuacion $(\rho - \lambda_k I)x = 0$ tiene una solución real $x \neq 0$. Esto es cierto ya que para un autovalor λ de ρ, existe su correspondiente autovector x tal que $(\rho - \lambda i)x = 0$ y $x \neq 0$. Esta solución x satisface que $\rho(x) = \lambda_k x$. Entonces, usando que ρ conserva las distancias, como hemos probado en el apartado anterior, tenemos que:

$$|x| = |\rho(x)| = |\lambda_k x| = |\lambda_k||x|$$

Para que esto sea cierto se tiene que dar que $|x| = |\lambda_k||x|$, por lo que $|\lambda_k| = 1$. Por consiguiente $\lambda_k = 1$ o $\lambda_k = -1$ al ser una raiz real. En particular, como habíamos escogido λ_1 como aquel con parte real en valor absoluto mayor, podemos deducir que $Re(\lambda_1) = 1$ o $Re(\lambda_1) = -1$, con lo que $\lambda_1 = 1$ o $\lambda_1 = -1$. Ahora dividiremos la demostración en casos, dependiendo de si las restantes raices del polinomio son reales o complejas:

a) Si λ_2 es complejo, implica entonces que λ_3 es su complejo conjugado y:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = f(0) = det(\rho) = 1$$

$$\lambda_1 \cdot |\lambda_2|^2 = 1$$

$$\lambda_1 = 1$$

Deducimos que $\lambda_1 = 1$ ya que $\lambda_2|^2 \geq 0$, lo que implica que $\lambda_1 \neq -1$. Con esto concluimos que existe un autovalor igual a 1 en este caso de la prueba.

b) Si λ_2 es real, entonces λ_3 también lo será, con lo que todas las raices son o -1 o 1, ya que son los únicos números tales que $|\lambda_k| = 1$. Dado que ya habíamos definido λ_1 como aquel que tiene mayor parte real, podemos decir que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = \lambda_3$ ya que :

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = f(0) = det(\rho) = 1$$

Esto prueba que existe un autovalor igual a 1 también en este caso, con lo que junto con el caso anterior obtenemos que se tiene siempre. Continuemos ahora con la demostración.

Como $\lambda_1 = 1$ podemos tomar $k = 1$ en el sistema de ecuaciones para encontrar el vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\rho(x) = x$ y $x \neq 0$. Podemos ahora definir un punto p que cumpla que $|p| = 1$ y $\rho(p) = p$ como $p = \frac{1}{|x|}x$. Entonces está claro que $|p| = 1$ y como p es el autovector asociado a $\lambda = 1$ ya que es un escalar que multiplica a x:

$$\rho(p) = \rho\left(\frac{1}{|x|}x\right) = \frac{1}{|x|}\rho(x) = \frac{1}{|x|}\lambda x = \lambda\frac{1}{|x|}x = \lambda p$$

Con lo que tenemos que existe un vector p que es invariante mediante la rotación ρ. Definimos ahora el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : \rho(x) = x\}$. Entonces, $p \in A$. Sea entonces t un escalar, se tendrá que $tp \in A$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ya que $\rho(tp) = t\rho(p) = tp$

Ahora, simplemente tendremos que demostrar que no hay otros vectores en A. Supongamos que existe otro vector $u \in A$ tal que $u \neq tp$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y sea v un vector no nulo perpendicular al plano que contiene a p,u y el origen, O. Como v es perpendicular a p y u, los dos siguientes productos son igual a cero:

$$\sum_{j=1}^{3} v_j p_j = \sum_{j=1}^{3} v_j u_j = 0$$

Como $p, u \in A$ y hemos visto que ρ conserva el producto interno, tenemos que $\rho(v)$ es también perpendicular a este plano. Por tanto, como mostramos en las siguentes ecuaciones, $\rho(v)$ es ortogonal a u y $\rho(v)$ es ortogonal a p:

$$0 = \rho(v) \cdot \rho(u) = \rho(v) \cdot u$$

$$0 = \rho(v) \cdot \rho(p) = \rho(v) \cdot p$$

Por tanto, del tercer apartado de este teorema, sabemos que $|\rho(v)| = |v|$. Como estamos en $\mathbb{R}^3$ y el plano formado por p y u tiene 2 dimensiones, hay una única línea que pasa por el origen que es ortogonal al plano. Por tanto, v y $\rho(v)$ están en la línea perpendicular al plano formado por p y u, con lo que tenemos que $\rho(v) = -v$ o $\rho(v) = v$.

Por otra parte, sabemos que tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ forman una base, con lo que podemos crear una base con los vectores p, u y v. Por tanto, cualquier vector x de $\mathbb{R}^3$ puede ser escrito como $x = \alpha p + \beta u + \gamma v$ para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Si $x = \alpha p + \beta u + \gamma v$, por el primer apartado del teorema, sabemos que $\rho(x) = \alpha p + \beta u + \gamma \rho(v)$. Como $\rho \neq i$, no podemos tener que $\rho(v) = v$, con lo que $\rho(v) = -v$. Podemos ahora construir una matriz 3×3 σ usando los vectores p,u y v, y consideraremos algunas propiedades de esta matriz para completar la demostración.

$$\sigma = \begin{pmatrix} p_1 & u_1 & v_1 \\ p_2 & u_2 & v_2 \\ p_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix}$$

Como estos vectores son linealmente independientes, tenemos que σ es una matriz invertible y por tanto tiene determinante no nulo. Consideraremos ahora el producto $\rho\sigma$, recordando que ρ mantiene p y u invariantes:

$$\rho\sigma = \begin{pmatrix} p_1 & u_1 & -v_1 \\ p_2 & u_2 & -v_2 \\ p_3 & u_3 & -v_3 \end{pmatrix}$$

Como podemos ver, la matriz σ difiere de $\rho\sigma$ únicamente en una columna, la cual está multiplicada por -1, con lo que se tiene que $det(\sigma) = -det(\rho\sigma)$. Pero gracias a esto podemos llegar a contradicción, ya que:

$$-det(\sigma) = det(\rho\sigma) = det(\rho)det(\sigma) = 1 \cdot det(\sigma) = det(\sigma)$$

Con lo que se tiene que esto es únicamente posible cuando el determinante de σ sea nulo, lo que contradice que los vectores p, u y v sean linealmente independientes. Esto prueba que no existe ningún vector $u \in A$ tal que $u \neq tp$ y por tanto todos los elementos de A pueden expresarse como tp, donde $t \in \mathbb{R}$.

5. Podemos demostrar mediante un cálculo rápido que si algún elemento q tiene las propiedades descritas para p en el apartado anterior, se tiene que $q = p$ o $q = -p$. Recordemos que estas propiedades para p son que si $\rho \neq I$ entonces hay un vector $p \in \mathbb{R}^3$ tal que el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : \rho(x) = x\}$ puede ser representado como $A = \{tp : t \in \mathbb{R}\}$y $|p| = 1$.

   Observemos que si $\{tp : t \in \mathbb{R}\} = \{tq : t \in \mathbb{R}\}$ y $|q| = |p| = 1$ entonces $q = tp$ para algún t ya que para que los conjuntos sean iguales, p y q deben pertenecer a ambos conjuntos. Vamos a ver esto:

$$t^2 = t^2|p|^2 = |tp|^2 = |q|^2 = 1$$

   Por lo que se tiene que $t = 1$ o $t = -1$, demostrando que $p = q$ o $p = -q$.

■

1.3. El grupo G

En el capítulo anterior, hemos probado varias propiedades acerca de las rotaciones en general. Consideraremos ahora las siguientes:

$$\psi = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \phi = \begin{pmatrix} -\cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

En la matriz de ϕ, θ es un numero real que escogeremos más tarde. Vamos primeramente a demostrar que las matrices son rotaciones.

Proposición 1.14 Las matrices anteriormente definidas son rotaciones.

Demostración.

Necesitamos demostrar que estas matrices son invertibles y se cumpla que son ortogonales y su determinante es igual a 1.

$$\psi \cdot \psi^t = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = i \Longrightarrow \psi^t = \psi^{-1}$$

$$\begin{aligned} det(\psi) &= 0 \cdot det \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot det \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot det \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ & \end{pmatrix} = \\ &= 0 - 0 + 1\left(\frac{1}{1} - \frac{-3}{4}\right) = 1 \end{aligned}$$

$$\phi \cdot \phi^t = \begin{pmatrix} -\cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = i \Longrightarrow \phi^t = \phi^{-1}$$

$$\begin{aligned} det(\phi) &= -0 \cdot det \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} - 1 \cdot det \begin{pmatrix} -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} - 0 \cdot det \begin{pmatrix} -\cos\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 \end{pmatrix} = \\ &= -1(-\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 1 \end{aligned}$$

Esto demuestra que ϕ y ψ son rotaciones. ■

Habiendo demostrado esto, nuesto siguiente paso será demostrar que $\psi^3 = \phi^2 = I$.

Proposición 1.15 Usando estas definiciones de ψ y ϕ, se tiene que $\psi^3 = \phi^2 = i$.

Demostración.

Dado que se tiene que $\phi = \phi^t = \phi^{-1}$ está claro que $\phi^2 = I$. Veamos la otra igualdad:

$$\begin{aligned} \psi \cdot \psi \cdot \psi &= \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

■

Sea ahora G el conjunto de matrices que se pueden obterner mediante el producto finito de las matrices ψ y ϕ. Demostraremos que este conjunto es un grupo bajo la operación de la multiplicación. Para demostrar esto, como anteriormente hicimos, veremos que el conjunto es cerrado, posee al elemento identidad y a los elementos inversos de cada elemento de G.

Teorema 1.16 El conjunto G definido anteriormente es un grupo.

Demostración.

Tenemos que probar que G cumple todas las condiciones para ser grupo.

Clausura: Esta propiedad es inmediata por la definición de G.

Elem. Identidad: Ya hemos demostrado que I pertenece G ya que $\psi^3 = \phi^2 = I$.

Elem. Inverso: De teoría de grupos, sabemos que si los elementos generadores de un grupo poseen inverso, entonces todos los elementos del grupo tendrán elemento inverso. Por tanto, tendremos que demostrar que ϕ ,ψ y ψ^2 tienen inversos para demostrar que todos los elementos de G tienen elemento inverso. Ya hemos visto anteriormente que ϕ es su propio inverso, y que $\psi^3 = I$. Como las matrices cumplen la propiedad asociativa con la operación multiplicación, podemos decir que:

$$I = \psi \cdot \psi \cdot \psi = \psi^2 \cdot \psi = \psi \cdot \psi^2$$

Por tanto, tenemos que ψ es el inverso de ψ^2 y viceversa. Con esto se puede concluir que todo elemento de G tendrá elemento inverso. ■

Como G es un grupo, cada elemento ρ de G tal que $\rho \neq i$ podrá ser escrito de manera única como producto finito de las matrices ϕ ,ψ y ψ^2. Por tanto, cada elementento de G distinto de I,ϕ ,ψ y ψ^2 puede ser escrito de las siguientes formas:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \psi^{T_1}\phi\psi^{T_2}\phi\ldots\psi^{T_m}\phi \\
\beta &= \phi\psi^{T_1}\phi\psi^{T_2}\phi\ldots\psi^{T_m} \\
\gamma &= \phi\psi^{T_1}\phi\psi^{T_2}\phi\ldots\psi^{T_m}\phi \\
\delta &= \psi^{T_1}\phi\psi^{T_2}\phi\ldots\psi^{T_m}
\end{aligned}$$

Donde los exponente T_j será igual a 1 o 2 (ya que para un exponente mayor, la palabra se podrá reducir). Llamaremos por tanto elementos generadores a I,ϕ ,ψ y ψ^2, asi como a las expresiones α,β,γ y δ como palabras reducidas. En el caso de δ, $m < 1$ o en caso contrario será igual a α. Daremos ahora una definición antes de empezar con un teorema acerca de los elementos de G.

Definición 1.17 Un número trascendente o trascendental es un número real que no es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros no todos nulos.

Teorema 1.18 Si $\cos\theta$ es un número trascendente, entonces cada elemento de G distinto de I tiene una única expresión reducida como palabra con las letras ϕ,ψ y ψ^2.

Demostración.

Si no hay una palabra irreducible igual a la identidad, entonces no hay ninguna palabra irreducible igual a otra palabra irreducible. Por tanto podemos completar esta demostración probando únicamente que no hay palabra irreducible igual a la identidad. Tendremos entonces varios casos, según el tipo de palabra con la que estemos tratando en cada caso:

Comencemos con el caso $\alpha = \psi^{T_1}\phi\psi^{T_2}\phi\ldots\psi^{T_m}\phi$

Denotaremos como σ_i a $\sigma_i = \psi\phi$ o $\sigma_i = \psi^2\phi$, dependiendo del caso en el que nos encontremos, de forma que $\alpha = \sigma_m\sigma_{m-1}\ldots\sigma_2\sigma_1$. Entonces tenemos que para $m = 1$

$$\sigma = \psi\phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\theta & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2}\operatorname{sen}\theta \\ \frac{-\sqrt{3}}{2}\cos\theta & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ o bien } \sigma = \psi^2\phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\theta & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2}\operatorname{sen}\theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Por tanto, podemos ver que $\sigma \neq I$ ya que en cada una de las dos matrices, el elemento a_{22} es igual a $\frac{1}{2}$ mientras que en la matriz identidad es igual a 1. Veamos entonces cuando $m > 1$.

Lo que queremos demostrar ahora es que si definimos $K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces

$$\sigma_m\sigma_{m-1}\ldots\sigma_2\sigma_1(K) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta P_{m-1}(\cos\theta) \\ \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta Q_{m-1}(\cos\theta) \\ R_m(\cos\theta) \end{pmatrix}$$

donde P_{m-1},Q_{m-1} y R_m están definidos como polinomios recursivos de la siguiente forma:

$$P_0(x) = \frac{-1}{2},\ Q_0 = (x) = \pm\frac{1}{2} \text{ y } R_1(x) = x$$

$$\begin{aligned}
P_m(x) &= \frac{1}{2}xP_{m-1}(x) \pm \frac{3}{2}Q_{m-1}(x) - \frac{1}{2}R_m(x) \\
Q_m(x) &= \mp\frac{1}{2}xP_{m-1}(x) + \frac{3}{2}Q_{m-1}(x) \pm \frac{1}{2}R_m(x) \\
R_{m+1}(x) &= (1-x^2)P_{m-1}(x) + xR_m(x)
\end{aligned}$$

Además, los símbolos $\pm$ y $\mp$ indican una dependencia a que $\sigma_m = \psi\phi$ o $\sigma_m = \psi^2\phi$. El siguiente paso será demostrar que

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta P_{m-1}(\cos\theta) \\ \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta Q_{m-1}(\cos\theta) \\ R_m(\cos\theta) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y por tanto que $\sigma_m\sigma_{m-1}\ldots\sigma_1$ es distinto de la identidad, sea cual sea la configuración de σ que estemos usando.

Caso base: Probaremos que es cierto cuando $m = 1$.

$$\sigma_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}\operatorname{sen}\theta \\ \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta P_0(\cos\theta) \\ \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta Q_0(\cos\theta) \\ R_1(\cos\theta) \end{pmatrix}$$

Esto demuestra que el caso base lo cumple.

Hipótesis de inducción: Suponiendo que la igualdad se cumple para m veremos que también se cumple para el caso $m+1$:

$$\sigma_m\sigma_{m-1}\ldots\sigma_2\sigma_1(K) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta P_{m-1}(\cos\theta) \\ \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta Q_{m-1}(\cos\theta) \\ R_m(\cos\theta) \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{m+1}\cdot\sigma_m\sigma_{m-1}\ldots\sigma_2\sigma_1(K) = \sigma_{m+1}\cdot \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta P_{m-1}(\cos\theta) \\ \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta Q_{m-1}(\cos\theta) \\ R_m(\cos\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\theta & \pm\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2}\operatorname{sen}\theta \\ \mp\frac{-\sqrt{3}}{2}\cos\theta & \frac{1}{2} & \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta P_{m-1}(\cos\theta) \\ \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta Q_{m-1}(\cos\theta) \\ R_m(\cos\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\theta \operatorname{sen}\theta P_{m-1}(\cos\theta) \pm \operatorname{sen}\theta Q_{m-1}(\cos\theta) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta R_m(\cos\theta) \\ \mp\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \operatorname{sen}\theta P_{m-1}(\cos\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta Q_{m-1}(\cos\theta) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta R_m(\cos\theta) \\ \operatorname{sen}^2\theta P_{m-1}(\cos\theta) + \cos\theta R_m(\cos\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta(\frac{1}{2}\cos\theta P_{m-1}(\cos\theta) \pm Q_{m-1}(\cos\theta) - \frac{1}{2}R_m(\cos\theta)) \\ \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta(\mp\frac{1}{2}\cos\theta P_{m-1}(\cos\theta) + \frac{1}{2}Q_{m-1}(\cos\theta) \pm \frac{1}{2}R_m(\cos\theta)) \\ (1-\cos^2\theta)P_{m-1}(\cos\theta) + \cos\theta R_m(\cos\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta P_m(\cos\theta) \\ \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta Q_m(\cos\theta) \\ R_{m+1}(\cos\theta) \end{pmatrix}$$

Esto demuestra por inducción que $\sigma_m\sigma_{m-1}\ldots\sigma_2\sigma_1(K) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta P_{m-1}(\cos\theta) \\ \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta Q_{m-1}(\cos\theta) \\ R_m(\cos\theta) \end{pmatrix}$

y por consiguiente no cabe la posibilidad de que $\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta P_{m-1}(\cos\theta) \\ \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta Q_{m-1}(\cos\theta) \\ R_m(\cos\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esto es trivial: como hemos escogido $\cos\theta$ como un número trascendente, este no puede ser raiz de ningún polinómio con coeficientes racionales. Por tanto, considerado los cálculos anteriores es imposible que $R_m(\cos\theta)$ sea igual a 1:

$$R_m(\cos\theta) = 1$$

$$R_m(\cos\theta) - 1 = 0$$

Si R_m es un polinomio con coeficientes racionales, entonces $R_m - 1$ es también un polinomio con coeficientes racionales. Por la definición de número trascendente, $\cos(\theta)$ no puede ser raiz de esta ecuación por lo que no se cumplirian las ecuaciones anteriores. Por tanto

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta P_{m-1}(\cos\theta) \\ \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta Q_{m-1}(\cos\theta) \\ R_m(\cos\theta) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esto demuestra que no hay combinaciones de los posibles valores de σ que sean equivalentes a i para este caso, ya que $\cos\theta$ es trascendente y R_m es un polinomio con coeficientes racionales.

Nos queda demostrar que para las palabras de la forma β, γ y δ. Para ello observemos que podemos escribir $\alpha = \phi\beta\phi$:

$$\phi\beta\phi = \phi\phi\psi^{T_1}\phi\psi^{T_2}\dots\phi\psi^{T_m}\phi = \phi^2\psi^{T_1}\phi\psi^{T_2}\dots\phi\psi^{T_m}\phi = \psi^{T_1}\phi\psi^{T_2}\dots\phi\psi^{T_m}\phi = \alpha$$

Entonces, si suponemos $\beta = I$, facilmente se puede llegar a contradicción ya que, como hemos demostrado anteriormente que $\alpha \neq I$, se tiene:

$$\alpha = \phi\beta\phi = \phi I\phi = \phi^2 = I$$

Por tanto tenemos que $\beta \neq I$.

Consideremos ahora el caso de δ. Supongamos $\delta = I$ y m el menor número tal que esto sea cierto y veamos que llegamos a contradicción. Recordemos que hemos definido δ como $\delta = \psi^{T_1}\phi\psi^{T_2}\phi\dots\psi^{T_m}$ para $m > 1$. Supongamos dicho m conocido. Consideraremos entonces dos casos diferentes:

- Caso 1: Supongamos que $T_1 = T_m$. Entonces ambos exponentes serán iguales a 1 o 2. Por tanto $\psi^{T_1+T_m} = \psi^2$ o ψ^4. Recordemos entonces que $\psi^4 = \psi \cdot \psi^3 = \psi \cdot I = \psi$. Se tiene entonces que $\psi^{T_1+T_m} = \psi^2$ o ψ. Utilizando la suposición de que $\delta = I$:

  $$I = \psi^{-T_1}i\psi^{T_1} = \psi^{-T_1}\delta\psi^{T_1} = \psi^{-T_1}\psi^{T_1}\phi\psi^{T_2}\phi\dots\psi^{T_m}\psi^{T_1} = \phi\psi^{T_2}\phi\dots\psi^{T_m+T_1} = \beta$$

  Llegando a contradicción, ya que hemos demostrado que $\beta \neq I$, probando que $\delta \neq I$ para este caso.

- Caso 2: Supongamos que $T_1 \neq T_m$. En este caso se tendrá que uno es igual a 1 mientras que el otro igual a 2, con lo que $T_1 + T_m = 3$ siempre.

  Supongamos que $m > 3$ y consideremos la siguiente igualdad siguiendo con la suposición de que $\delta = I$:

  $$\begin{aligned} I &= \psi^{-T_1}i\psi^{T_1} = \phi\psi^{-T_1}i\psi^{T_1}\phi = \phi\psi^{-T_1}\delta\psi^{T_1}\phi \\ &= \phi\psi^{-T_1}\psi^{T_1}\phi\psi^{T_2}\phi\dots\psi^{T_m}\psi^{T_1}\phi \\ &= \psi^{T_2}\phi\dots\psi^3\phi = \phi\phi\psi^{T_2}\phi\dots\psi^{T_{m-1}} \\ &= \psi^{T_2}\phi\dots\phi\psi^{T_{m-1}} \end{aligned}$$

  La fórmula final obtenida es de nuevo de la forma δ, pero habiamos supuesto que m era el menor número tal que $\delta = i$, llegando a contradicción para el caso de que $m > 3$. Por tanto solo nos quedará ver los casos en los que $m \leq 3$.

  Para $m = 2$ tenemos que:

  $$I = \psi^{T_2}i\psi^{T_1} = \psi^{T_2}\delta\psi^{T_1} = \psi^{T_2}\psi^{T_1}\phi\psi^{T_2}i\psi^{T_1} = \phi$$

Hemos usado el hecho de que ψ^{T_1} y ψ^{T_2} son inversos, ya que $T_1 \neq T_m$. Dado que $\phi \neq I$ llegamos a contradicción.

Para $m = 3$ tenemos que:

$$I = \psi^{T_3} i \psi^{T_1} = \phi\psi^{T_3} i \psi^{T_1}\phi = \phi\psi^{T_3}\delta\psi^{T_1}\phi = \phi\psi^{T_3}\psi^{T_1}\phi\psi^{T_2}\phi\psi^{T_3}\psi^{T_1}\phi = \phi\phi\psi^{T_2}\phi\phi = \psi^{T_2}$$

Hemos usado el hecho de que $\rho^2 = I$. Dado que, para cualquier valor de T_2 se tiene que $\psi^{T_2} \neq I$ llegamos a contradicción.

Por tanto habremos demostrado que para cualquier forma de δ, $\delta \neq I$.

Por último, consideraremos el caso de γ. Para ello, análogamente al caso de β podemos observar que $\delta = \phi\gamma\phi$, de donde fácilmente podemos deducir que, si $\gamma = I$:

$$\delta = \phi\gamma\phi = \phi i \phi = \phi^2 = I$$

Donde llegamos a contradicción ya que hemos demostrado que $\delta \neq I$. Por tanto, cuando $\cos\theta$ es un número trascendente, ninguna palabra irreducible de G es igual a I y, por tanto, ninguna palabra irreducible es igual a otra en G concluyendo asi la demostración del teorema.

■

Ahora, para utilizar el resultado del teorema, fijaremos un número para θ tal que $\cos\theta$ es un número trascendente. Si un elemento $\rho \in G$ es expresado como una palabra reducida $\rho = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n$ donde σ_i es ϕ, ψ y ψ^2(la cual tiene una unica expresión, como hemos demostrado), llamamos n a la longitud de ρ. Podemos denotar esta longitud como $\ell(\rho)$. Para la identidad, i, asignamos $\ell(i) = 0$. También llamamos a σ_1 la primera letra de ρ o, de igual manera, que ρ empieza por σ_1 por la izquierda.

Definición 1.19 Una partición de un conjunto X es una familia de conjuntos disjuntos cuya unión es X.

Demostraremos ahora un teorema acerca de una partición del grupo G y de los elementos de G que residen en dicha partición.

Teorema 1.20 Existe una partición $\{G_1, G_2, G_3\}$ de G en tres subconjuntos no vacios tales que para cada ρ de G tenemos:

- $\rho \in G_1 \iff \phi\rho \in G_2 \cup G_3$
- $\rho \in G_1 \iff \psi\rho \in G_2$

- $\rho \in G_1 \iff \psi^2\rho \in G_3$

En resumen, este teorema nos dice que existen algunas particiones en tres conjuntos de G tales que si "multiplicamos" una palabra por una letra, obtenemos una serie de cambios específicos de los elementos de dichas particiones. Antes de empezar con la demostración, podemos observar que si ρ empieza por ϕ, $\phi\rho$ empezará por ψ ya que $\phi^2 = i$.

Demostración.

Empezaremos asignando los elementos generadores de nuestro grupo. Enviaremos I al conjunto G_1. Por tanto, siguiendo las reglas deseadas, tendremos que $\phi \in G_2 \cup G_3$ y por tanto lo asignaremos a G_2. De manera similar podemos decir que $\psi \in G_2$ y $\psi^2 \in G_3$. Por tanto, ya habremos asignado los elementos de longitud 1 de la siguiente forma:

$$I \in G_1 \, , \, \phi \in G_2 \, , \, \psi \in G_2 \, , \, \psi^2 \in G_3$$

Consideraremos ahora los elementos de longitud n+1. Supongamos que todos los elementos σ tales que su longitud $\ell(\sigma) \leq n$ han sido asignados a uno de los distintos conjuntos que conforman la partición de G. Asignaremos ahora los elementos de longitud $n+1$.

Si $\ell(\sigma) = n$ y σ empieza por ψ o ψ^2, asignaremos el elemento de la siguiente manera:

$$\phi\sigma \in G_2 \text{ si } \sigma \in G_1$$

$$\phi\sigma \in G_1 \text{ si } \sigma \in G_2 \cup G_3$$

Si $\ell(\sigma) = n$ y σ empieza por ϕ , sea $j = 1, 2, 3$ y llamemos $G_4 = G_1$ y $G_5 = G_2$. De esta forma, asignaremos los elementos como sigue:

$$\psi\sigma \in G_{j+1} \text{ si } \sigma \in G_j$$

$$\psi^2\sigma \in G_{j+2} \text{ si } \sigma \in G_j$$

De esta forma ya hemos asignado cada elemento a un único conjunto, con lo que nuestra partición ya estará formada. La asignación de un elemento de longitud n puede ser calculada en n pasos. Ahora queremos comprobar que se cumplen las propiedades del teorema por la partición, es decir:

- $\rho \in G_1 \iff \phi\rho \in G_2 \cup G_3$

- $\rho \in G_1 \iff \psi\rho \in G_2$
- $\rho \in G_1 \iff \psi^2\rho \in G_3$

Lo haremos mediante un proceso de inducción.

Caso base: Necesitamos probar que se cumplen estas tres reglas para cada uno de los elementos generadores de G. Para I es trivial ya que hemos escogido los conjuntos tales que no se incumplen estas normas. Vamos a verlo:

- $I \in G_1$ y $\phi \in G_2$ con lo que tenemos que $I \in G_1 \iff \phi \in G_2 \cup G_3$
- $I \in G_1$ y $\psi \in G_2$ con lo que tenemos que $I \in G_1 \iff \psi \in G_2$
- $I \in G_1$ y $\psi^2 \in G_3$ con lo que tenemos que $I \in G_1 \iff \psi^2 \in G_3$

Veamos que se cumple ahora para ϕ. Tenemos que como $\phi \notin G_1$, demostraremos la negación en cada uno de los casos:

- $\phi \in G_2$ y por tanto $\phi \notin G_1$. Sabemos que $\phi\phi = I$ con lo que, como $I \in G_1$, podemos fácilmente deducir que $\phi\phi \notin G_2 \cup G_3$. Por tanto se cumple que $\phi \notin G_1 \iff \phi \notin G_2 \cup G_3$
- $\phi \in G_2$ y por tanto $\phi \notin G_1$. Usando que "$\psi\sigma \in G_{j+1}$ si $\sigma \in G_j$"sabemos que, como $\phi \in G_2$, $\psi\phi \in G_3$ y por tanto $\psi\phi \notin G_2$. En consecuencia tenemos que la afirmación "$\phi \notin G_1 \iff \psi\phi \notin G_2$" es cierta.
- $\phi \in G_2$ y por tanto $\phi \notin G_1$. Usando que "$\psi^2\sigma \in G_{j+2}$ si $\sigma \in G_j$"sabemos que, como $\phi \in G_2$, $\psi^2\phi \in G_1$ y por tanto $\psi^2\phi \notin G_3$. En consecuencia tenemos que la afirmación "$\phi \notin G_1 \iff \psi^2\phi \notin G_3$" es cierta.

Habiendo probado estos tres puntos para ϕ, consideraremos ahora ψ. De nuevo vemos que, como $\psi \notin G_1$, haremos la demostración de cada punto mediante el contrarrecíproco.

- $\psi \in G_2$ y por tanto $\psi \notin G_1$. Usando que "$\phi\sigma \in G_1$ si $\sigma \in G_2 \cup G_3$"sabemos que, como $\psi \in G_2$, $\phi\psi \in G_1$ y por tanto $\phi\psi \notin G_2 \cup G_3$. En consecuencia tenemos que la afirmación "$\psi \notin G_1 \iff \phi\psi \notin G_2 \cup G_3$" es cierta.
- $\psi \in G_2$ y por tanto $\psi \notin G_1$. Sabemos que $\psi\psi = \psi^2 \in G_3$ y por tanto $\psi^2 \notin G_2$. En consecuencia se tiene que la afirmación "$\psi \notin G_1 \iff \psi\psi \notin G_2$" es cierta.
- $\psi \in G_2$ y por tanto $\psi \notin G_1$. Como $\psi^2\psi = I \in G_1$ vemos que $\psi^2\psi \notin G_3$. En consecuencia se tiene que la afirmación "$\psi \notin G_1 \iff \psi^2\psi \notin G_3$" es cierta.

Veamos ahora que se cumple para ψ^2 mediante el uso del contrarecíproco ya que, al igual que en los casos anteriores $\psi^2 \notin G_1$.

- $\psi^2 \in G_3$, por lo tanto $\psi^2 \notin G_1$. Usando que "$\phi\sigma \in G_1$ si $\sigma \in G_2 \cup G_3$"sabemos que, como $\psi^2 \in G_3$, $\phi\psi^2 \in G_1$ y por tanto $\phi\psi^2 \notin G_2 \cup G_3$. En consecuencia tenemos que la afirmación "$\psi^2 \notin G_1 \iff \phi\psi^2 \notin G_2 \cup G_3$" es cierta.
- $\psi^2 \in G_3$, por lo tanto $\psi^2 \notin G_1$. Sabemos que $\psi\psi^2 = I \in G_1$ y por tanto $\psi\psi^2 \notin G_2$. En consecuencia se tiene que la afirmación "$\psi^2 \notin G_1 \iff \psi\psi^2 \notin G_2$" es cierta.
- $\psi^2 \in G_3$, por lo tanto $\psi^2 \notin G_1$.Sabemos que $\psi^2\psi^2 = \phi \in G_2$ y por tanto $\psi^2\psi^2 \notin G_3$. En consecuencia se tiene que la afirmación "$\psi^2 \notin G_1 \iff \psi^2\psi^2 \notin G_3$" es cierta.

Esto demuestra que cada uno de los casos bases cumple las hipótesis del teorema, por lo que ahora podremos proceder con la inducción.

Hipótesis de inducción: Supongamos que $n > 1$ es un entero tal que las tres condiciones del teorema se cumplen para todo $\rho \in G$ tal que $\ell(\rho) < n$. Ahora fijemos un ρ con $\ell(\rho) = n$. Consideraremos ahora diferentes casos para ρ dependiendo de la combinación de sus letras. Usaremos algunas de las reglas anteriores para asignar los posibles ρ:

Caso 1: Supongamos que ρ comienza por ϕ. Entonces, con $\sigma = \rho$ y consideramos

$$\psi\sigma \in G_{j+1} \text{ si } \sigma \in G_j$$

Por tanto, esto nos dice que:

$$\begin{aligned}
&\text{Si } \rho \in G_1, \text{ entonces } \psi\rho \in G_2\\
&\text{Si } \rho \in G_2, \text{ entonces } \psi\rho \in G_3\\
&\text{Si } \rho \in G_3, \text{ entonces } \psi\rho \in G_1
\end{aligned}$$

Esto nos dice que el único caso en el que $\rho \in G_1$ es cuando $\psi\rho \in G_2$. Por tanto, la afirmación "$\rho \in G_1 \iff \psi\rho \in G_2$" será cierta.

Si ahora consideramos para $\sigma = \rho$

$$\psi^2\sigma \in G_{j+2} \text{ si } \sigma \in G_j$$

Por tanto, esto nos dice que:

$$\begin{aligned}
&\text{Si } \rho \in G_1, \text{ entonces } \psi^2\rho \in G_3\\
&\text{Si } \rho \in G_2, \text{ entonces } \psi^2\rho \in G_1\\
&\text{Si } \rho \in G_3, \text{ entonces } \psi^2\rho \in G_2
\end{aligned}$$

Lo que nos dice que el único caso en el que $\rho \in G_1$ es cuando $\psi\rho \in G_3$, mostrandonos que la afirmación "$\rho \in G_1 \iff \psi^2\rho \in G_3$" será cierta.

Ahora bien, como el primer elemento de ρ es ϕ y $\phi^2 = 1$ sabemos que la palabra $\phi\rho$ tengrá longitud $n-1$ y por tanto ya cumplirá con las reglas al ser de una longitud menor. En este caso, podemos hacer la siguiente afirmación:

$$\phi\rho \in G_1 \Longleftrightarrow \phi(\phi\rho) \in G_2 \cup G_3 \Longleftrightarrow \rho \in G_2 \cup G_3$$

y usando la hipotesis de inducción llegaremos a que

$$\rho \notin G_1 \Longleftrightarrow \rho \in G_2 \cup G_3 \Longleftrightarrow \phi(\phi\rho) \in G_2 \cup G_3 \Longleftrightarrow \phi\rho \in G_1 \Longleftrightarrow \phi\rho \notin G_2 \cup G_3$$

y por tanto se tiene que "$\rho \notin G_1 \Longleftrightarrow \phi\rho \notin G_2 \cup G_3$" demostrando el contrarrecíproco.

Caso 2: Supongamos que ρ comienza por ψ. Entonces usaremos las siguientes afirmaciones:

$$\phi\sigma \in G_2 \text{ si } \sigma \in G_1$$

$$\phi\sigma \in G_1 \text{ si } \sigma \in G_2 \cup G_3$$

Si hacemos $\rho = \sigma$ tendremos que:

$$\text{Si } \rho \in G_1, \quad \phi\rho \in G_2$$

$$\text{Si } \sigma \in G_2 \cup G_3, \quad \phi\rho \in G_1$$

Esto nos dice que $\rho \in G_1 \Longleftrightarrow \phi\rho \in G_2$, demostrando la primera regla. Sea ahora $\rho = \psi\sigma$ donde σ comienza por ϕ, con lo que $\psi\rho = \psi^2\sigma$. Entonces σ tiene longitud $n-1$ ya que ρ tiene exactamente un elemento más que σ y por la hipótesis de inducción tenemos que se cumplen todas las reglas. Vamos a usar ahora las siguientes ecuaciones:

$$\psi\sigma \in G_{j+1} \text{ si } \sigma \in G_j$$

$$\psi^2\sigma \in G_{j+2} \text{ si } \sigma \in G_j$$

Usando tanto las reglas como el hecho de que $\psi\rho = \psi^2\sigma$ podemos hacer la siguiente observación:

$$\psi\rho = \psi^2\sigma \in G_2 \Longleftrightarrow \sigma \in G_3 \Longleftrightarrow \rho = \psi\sigma \in G_1 \Longleftrightarrow \psi^2\rho = \sigma \in G_3$$

Tendremos entonces que $\rho \in G_1 \Longleftrightarrow \psi^2\rho = \sigma \in G_2$ y $\rho \in G_1 \Longleftrightarrow \psi^2\rho \in G_3$, probando que las reglas son ciertas para este tipo de ρ.

Caso 3: Supongamos en este caso que ρ comienza por ψ^2. Usaremos entonces las siguientes afirmaciones:

$$\phi\sigma \in G_2 \text{ si } \sigma \in G_1$$

$$\phi\sigma \in G_1 \text{ si } \sigma \in G_2 \cup G_3$$

Dándole a ρ el valor σ en este caso, las afirmaciones anteriores se transforman en:

$$\text{Si } \rho \in G_1, \text{ entonces } \phi\rho \in G_2$$

$$\text{Si } \rho \in G_2 \cup G_3, \text{ entonces } \phi\rho \in G_1$$

Con lo que esto demuestra que $\rho \in G_1 \Longleftrightarrow \phi\rho \in G_2 \cup G_3$. Demosle ahora a σ el valor $\psi\rho$, con lo que, como $\psi\rho$ comienza por $\psi^3 = I$, se trata de una palabra con longitud $n - 1$ que empieza por ϕ. Podremos facilmente ver que se cumplen las siguientes afirmaciones:

$$\psi\rho = \sigma \in G_2 \Longleftrightarrow \rho = \psi^2\sigma \in G_1 \Longleftrightarrow \sigma \in G_2 \Longleftrightarrow \psi^2\rho = \psi\sigma \in G_3$$

$$\rho \in G_1 \Longleftrightarrow \psi\rho \in G_2$$

$$\rho \in G_1 \Longleftrightarrow \psi^2\rho \in G_3$$

Con lo que tenemos que también se cumplen las reglas en este último caso, finalizando de esta forma la prueba.

$\blacksquare$

1.4. La paradoja de *Hausdorff*

En la demostración del siguiente teorema usaremos conceptos que ya hemos probado y los aplicaremos a la esfera unidad. Este proceso principalmente incluirá un reetiquetado y la demostración de como podemos aplicar las rotaciones que hemos visto a unos conjuntos más concretos. Estas representaciones más concretas nos serán útiles posteriormente.

Teorema 1.21 (Paradoja de Hausdorff) Existe una partición en cuatro subconjuntos $\{P, S_1, S_2, S_3\}$ de la esfera unidad $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ de forma que:

- P es numerable.
- $\phi(S_1) = S_2 \cup S_3$
- $\psi(S_1) = S_2$
- $\psi^2(S_1) = S_3$

donde ϕ y ψ son las rotaciones definidas en la sección anterior.

Demostración.

Sea $P = \{p \in S : \rho(p) = p$ para algún $\rho \in G, \rho \neq I\}$. De esta forma definimos el conjunto P como el conjunto de todos los puntos fijos bajo rotaciones distintas de la identidad, es decir, los puntos cuya imagen son ellos mismos a la hora de apicarles alguna rotación $\rho \in G$ con $\rho \neq I$.

Como G está definido como el conjunto de todas las matrices que se obtienen mediante el producto finito de las matrices ϕ y ψ, G es numerable. El punto 4 del Teorema 1.13 nos dice que para cualquier rotación ρ existe algún $p \in \mathbb{R}^3$ con $|p| = 1$ tal que p es invariante por ρ. El punto 5 nos dice que solo existen dos puntos, p y $-p$, que cumplen las características descritas anteriormente. También debemos mencionar que, cuando pensamos en los elementos de longitud 1, estamos describiendo los puntos de la bola unidad.

Dado que sabemos que cada elemento de G es una rotación, si llamamos $\rho_1 \in G$ a una rotación distinta de la identidad, entonces de todos los elementos $p \in S$, el conjunto $P_1 = \{p \in S : \rho_1(p) = p\}$ solo contendrá dos elementos. Démonos cuenta de que P es la unión de todos los P_n, correspondiendose cada uno de ellos con un único $\rho_n \in G$. Dado que G es numerable, tenemos que P también será numerable y se cumple el primer apartado del teorema.

Para cada $x \in S \backslash P$, sea $G(x) = \{\rho(x) : \rho \in G\}$. Cada $G(x)$ es un subconjunto de $S \backslash P$, ya que si $\rho(x)$ se encontrase en P, entonces x deberá estar en P por definicion de P.

Podemos ver que $x \in G(x)$ ya que $I \in G$ y $x = I(x)$. Además tenemos que para cualquier par de conjuntos $G(x)$ y $G(y)$ se tiene que estos serán disjuntos o identicos. Esto se tiene ya que, si suponemos un elemento t perteneciente a ambos conjuntos, tenemos que cada elemento de $G(x)$ está en $G(y)$ y al contrario. Veamos que esto es cierto:

Supongamos $t \in G(x) \cap G(y)$ para ciertos $x, y \in S \backslash P$. Se tendrá entonces que $\rho(x) = t = \sigma(y)$ para ciertas rotaciones ρ y $\sigma \in G$. Supongamos también un elemento $z \in G(x)$ cualquiera.

Entonces, $z = \tau(x)$ para alguna rotación $\tau \in G$. Entonces, dado que $\rho(x) = t$ podemos decir que $x = \rho^{-1}(t)$ y por tanto:

$$z = \tau(x) = \tau\rho^{-1}(t) = \tau\rho^{-1}\sigma(y)$$

Está claro que $\tau\rho^{-1}\sigma \in G$ y por consiguiente $z \in G(y)$ para cualquier z arbitrario. Por tanto hemos probado que cualquier elemento de $G(x)$ se encontrará también en $G(y)$, $G(x) \subseteq G(y)$. Si cambiamos los roles de x e y tendremos que $G(y) \subseteq G(x)$, llegando de esta manera a que $G(x) = G(y)$. Por tanto se tiene que no puede existir ningún elemento perteneciente a $G(x)$ y a $G(y)$ al mismo tiempo sin que estos conjuntos sean el mismo.

Esto demustra que la familia de conjuntos $\mathcal{F} = \{G(x) : x \in S \backslash P\}$ es una partición de $S \backslash P$. Por tanto, solo nos queda demostrar que la partición es equivalente a la formada por S_1, S_2 y S_3. Empezaremos la siguiente parte del teorema eligiendo exactamente un punto de cada miembro de $\mathcal{F}$ y llamamos al conjunto de dichos puntos C. El conjunto C tendrá las siguientes propiedades:

a. $C \subset S \backslash P$.

b. $c_1 \neq c_2$ en $C \iff G(c_1) \cap G(c_2) = \emptyset$.

c. $x \in S \backslash P \iff x \in G(c)$ para algún $c \in G$.

Sabemos que el apartado (a) es cierto debido a que el conjunto C esta formado únicamente por elementos de $\mathcal{F}$ y cada punto de $\mathcal{F}$ se encuentra en $G(x)$ para algún $x \in S \backslash P$, con lo que tenemos que cada $G(x)$ es un subconjunto de $S \backslash P$.

Como hemos escogido un único elemento de cada uno de los distintos conjuntos que conforman $\mathcal{F}$, no hay dos puntos en C tales que se encuentren en el mismo $G(x)$, demostrando (b).

Como G es un grupo, si tenemos $s \in G(x)$ y $t \in G(x)$, entonces $s = \rho(x)$ y $t = \sigma(x)$ para ciertas rotaciones ρ y $\sigma \in G$. Por tanto, $\rho^{-1}(s) = x$ y $t = \sigma\rho^{-1}(x)$. Esto nos dice que podemos representar cualquier elemento de $G(x)$ en función de otro elemento del mismo conjunto $G(x)$. Por tanto se tiene que (c) es cierto.

Definimos ahora $S_j = G_j(C) = \{\rho(c) : \rho \in G_j, c \in C\}$ para $j = 1, 2, 3$ con G_1, G_2 y G_3 como en el Teorema 1.20. Usando que $C \subset S \backslash P$ y $G(x) \subset S \backslash P$ si $x \in S \backslash P$ podemos ver que $S_j \subset S \backslash P$ para cada j.

Redefinimos G como $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$, y utilizando (c), si $x \in S \backslash P$, entonces $x \in G(c)$ para algún $c \in C$. Por tanto $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Si $j \neq i$ para i, $j \in \{1, 2, 3\}$, entonces $S_j \cap S_i = \emptyset$.

En caso contrario, si $x \in S_j \cap S_i$, tendriamos $x \in \rho(c_1) = \sigma(C_2)$ para algunos c_1,$c_2 \in C$, $\rho \in G_j$ y $\sigma \in G_i$. De ser esto cierto, (b) nos dice que $c_1 = c_2 = c$ y por tanto $\sigma\rho^{-1}(x) = x$. Dado que hemos escogido c tales que $c \notin P$, esto significa que $\sigma^{-1}\rho = I$ y que, por tanto $\rho = \sigma$. Pero entonces, los elementos $\rho = \sigma$ existirían ambos en G_i y G_j, en contradicción con que los elementos G_1, G_2 y G_3 formen una partición disjunta de G.

Hemos determinado de esta forma que $\{S_1, S_2, S_3\}$ es una partición de $S \backslash P$ y por tanto $\{P, S_1, S_2, S_3\}$ será una partición de S. Utilizaremos ahora las relgas del Teorema 3.7 para decir que:

$$\phi(S_1) = \{\phi\rho(c) : c \in G_1, c \in C\} = \{\tau(c) : \tau \in G_2 \cup G_3, c \in C\} = S_2 \cup S_3$$

$$\psi(S_1) = \{\psi\rho(c) : c \in G_1, c \in C\} = \{\tau(c) : \tau \in G_2, c \in C\} = S_2$$

$$\psi^2(S_1) = \{\psi^2\rho(c) : c \in G_1, c \in C\} = \{\tau(c) : \tau \in G_3, c \in C\} = S_3$$

Con lo que concluimos con la demostración del teorema. ■

El siguiente teorema nos dice que, para cualquier conjunto numerable de la esfera unidad, podemos rotar dicho conjunto de manera que ninguno de los puntos caigan en el conjunto original. Esto será útil posteriormente para ver que, al emplear las rotaciónes, los conjuntos de la partición siguen siendo disjuntos.

Teorema 1.22 Si P es cualquier subconjunto numerable de S, entonces existe un conjunto numerable Q y una rotación ω tal que $P \subset Q \subset S$ y $\omega(Q) = Q \backslash P$.

Demostración.

Dado que P es numerable, solo puede haber un conjunto numerable de vectores de la forma $v = \begin{pmatrix} v_1, & v_2, & 0 \end{pmatrix}^t$ en S para los que v o $-v$ pertenecen a P. Por tanto, tenemos incontables vectores $v \in S$ tales que v, $-v \notin P$, de donde seleccionamos uno de ellos, al que llamaremos $v = \begin{pmatrix} v_1, & v_2, & 0 \end{pmatrix}^t$.

Sean ahora $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\sigma = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & 0 \\ -v_2 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Veamos que σ es una rotación.

$$det(\sigma) = 0(0+0) - 0(v_1 - 0) + 1(v_1^2 + v_2^2) = 1 \text{ (ya que } v \in S, |v| = v_1^2 + v_2^2 + 0^2 = 1)$$

$$\sigma\sigma^t = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & 0 \\ -v_2 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & -v_2 & 0 \\ v_2 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = i$$

Mediante calculos fáciles, podemos observar que $\sigma(v) = u$ y $\sigma(-v) = -u$:

$$\sigma(v) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & 0 \\ -v_2 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^2 + v_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = u$$

$$\sigma(-v) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & 0 \\ -v_2 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1^2 - v_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -u$$

Como $det(\sigma) \neq 0$, sabemos que σ es invertible y que por tanto σ es biyectiva. Esto quiere decir que solo existe un elemento en S cuya imagen sea u y un único elemento cuya imagen sea $-u$. Por tanto, ya que $\sigma(v) = u$ y $\sigma(-v) = -u$ y hemos escogido v y $-v$ que no perteneciesen en P, sabemos que no existe ningún punto $p \in P$ tal que $\sigma(p) = \pm u$. En consiguiente, el conjunto P no contiene ni a u ni a $-u$.

Ahora, para un número real t, consideremos la rotación:

$$\tau_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\operatorname{sen} t \\ 0 & \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$

Vamos a ver que, efectívamente, τ_t es una rotación para cualquier valor real t:

$$det(\tau_t) = 1(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) - 0(0+0) + 0(0+0) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\tau_t\tau_t^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\operatorname{sen} t \\ 0 & \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \operatorname{sen} t \\ 0 & -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = i$$

Veamos ahora que τ_t deja u fijo para todo t:

$$\tau_t(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\operatorname{sen} t \\ 0 & \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Recordemos que S es la esfera unidad, o el conjunto de todos los puntos que se encuentran a distancia 1 del origen. Entonces, u y $-u$ son dos puntos de la esfera unidad que se encuentran en el eje x. Sabemos que τ_t es una rotación que mantiene a u y $-u$ invariantes y, como estos se encuentran en el eje x podemos concluir que τ_t es una rotación sobre el eje x.

Fijemos ahora un t para ver que τ_t es una rotación positiva (antihoraria). Por simplicidad, sea $t = \frac{\pi}{2}$ y vamos a considerar los efectos de la rotación sobre el vector $\begin{pmatrix} 0, & 1, & 0 \end{pmatrix}^t$

$$\tau_{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ 0 & \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que $\begin{pmatrix} 0, & 1, & 0 \end{pmatrix}^t$ y $\begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}^t$ pertenecen a la esfera unidad, podemos ver que $\tau_{\frac{\pi}{2}}$ es una rotación positiva de $\frac{\pi}{2}$ grados alrededor del eje x de la esfera unidad.

Considerando el efecto de τ_t en nuestro conjunto S, vamos a continuar con la demostración. El siguiente paso será demostrar que solo hay un conjunto numerable de $t's$ tal que:

$$\sigma(P) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_t^n \sigma(P) \neq \emptyset$$

Hemos empezado suponiendo $x = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \end{pmatrix}^t$ e $y = \begin{pmatrix} y_1, & y_2, & y_3 \end{pmatrix}^t$ son dos vectores tales que $x,\ y \in \sigma(P)$. Esto no nos dice nada al principio, ya que $x,\ y \in \sigma(P)$, $x,\ y = u,\ -u$ ya que $u,\ -u \notin \sigma(P)$. Esto nos dice que $-1 < x_1, y_1 < 1$ y que $x_2, y_2 \neq 0$ o $x_3, y_3 \neq 0$ ya que en caso contrario no habría forma de que fuesen distintos de u o $-u$. Por tanto tenemos que $x_2^2 + x_3^2 > 0$, $y_2^2 + y_3^2 > 0$.

Supongamos que $x_1 \neq y_1$ y veamos que τ_t no afecta a la primera entrada de ningún vector:

$$\tau_t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\operatorname{sen} t \\ 0 & \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \cos t - a_3 \operatorname{sen} t \\ a_2 \operatorname{sen} t + a_3 \cos t \end{pmatrix}$$

Con lo que teniendo esto en cuenta, podemos decir que cuando $x_1 \neq y_1$, no existe $t \in [0, 2\pi)$ tal que $\tau_t^n(x) = y$ para cualquier $n \geq 1$.

Veamos ahora el caso en el que $x_1 = y_1$. Vamos a demostrar que en este caso habrán exactamente n valores de $t \in [0, 2\pi)$ para los que $\tau_t^n(x) = y$. Primero, es importante considerar la función τ compuesta consigo misma:

$$\tau_t^n(a) = \overbrace{\tau_t(\tau_t(\dots(\tau_t}^{\text{n veces}}(a))))$$

Escrito de esta forma es más facil ver que el procedimiento es aplicar una primera rotación, seguida de una segunda al resultado y así sucesivamente. Se tendrá entonces que es lo mismo aplicar la rotación τ_t n veces, que aplicar una única vez la rotación τ_{nt}, donde definimos dicha rotación como:

$$\tau_t^n(a) = \tau_{nt}(a)$$

Supongamos ahora $\alpha \in [0, 2\pi)$ es el ángulo en sentido antihorario para x e y tal que $\tau_\alpha(x) = y$. Supongamos entonces $t \in [0, 2\pi)$ y el correspondiente $\tau_{nt}(x) = y$. Lo siguiente nos dice que nt es un múltiplo de 2π mayor que α. Esto es, para algún entero no negativo m se tiene que:

$$nt = \alpha + 2\pi m$$

$$t = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi m}{n}$$

Primero usaremos el dominio de α para obtener más información acerca del valor de m. Dicho valor a encontrar será aquel que satisfaga la condición de que $0 < t < 2\pi$. Empezaremos con el hecho de que α se encuentra entre 0 y 2π por lo que:

$$0 \leq \alpha < 2\pi$$

$$0 \leq \frac{\alpha}{n} < \frac{2\pi}{n}$$

$$0 \leq \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi m}{n} < \frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi m}{n}$$

Démonos cuenta de que, en mitad de estas inecuaciones se encuentra una expresión que es equivalente a t como vimos anteriormente. Por tanto, ya que buscamos el valor de m tal que $0 < t < 2\pi$, se tiene que dar que la tercera expresión de la inecuación sea menor o igual a 2π:

$$\frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi m}{n} \leq 2\pi$$

$$\frac{1}{n} + \frac{m}{n} \leq 1$$

$$1 + m \leq n$$

$$m \leq n - 1$$

Como hemos definido m como un entero no negativo, esto nos dice que $m = 0, 1, \ldots, n-2, n-1$. Por tanto tendremos n posibles elecciones para el m, dandonos como conscuencia que hay n posibles valores de t. Obtenemos de esta forma estos valores de t dandole los diferentes valores de m:

$$t = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi m}{n}$$

$$t = \frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha + 2\pi}{n}, \frac{\alpha + 4\pi}{n}, \ldots, \frac{\alpha + 2\pi(n-1)}{n}$$

Por tanto hemos demostrado que para cualquier entero positivo n, hay exactamente n valores de t para los cuales los vectores x, $y \in \sigma(P)$ se tiene $\tau_{nt}(x) = y$. Como n es un entero positivo, tenemos una cantidad numerable de posibilidades para n. Por tanto, para cada n, tendremos varios valores de t. Esto significa que hay incontables valores para los que no se cumple, diciéndonos que hay incontables valores de t para lo que se cumple que:

$$\sigma(P) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_{nt}\sigma(P) = \emptyset$$

Vamos a fijar cualquier $t \in \mathbb{R}$ para el cual la ecuación anterior se cumple y denotaremos $\tau_t = \tau$ para dicho valor. Vamos ahora a definir lo siguientes términos:

$$\omega = \sigma^{-1}\tau\sigma$$

$$Q = P \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega^n(P)$$

Retomando la demostración, vamos a ver que hemos elegido ω y Q tal que para nuestro conjunto numerable fijado P tenemos que $P \subset Q \subset S$ y $\omega(P) = Q \backslash P$. En primer lugar podemos ver que hemos definido Q tal que $P \subset Q$. Además, podemos ver que ω es una rotación ya que es composición de las rotaciones σ^{-1}, σ y τ. Como el conjunto de las rotaciones forman un grupo, tenemos que $\omega^n(P) \subset S$. Por tanto $P \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega^n(P) \subset S$, lo que implica que $Q \subset P$. En resumen, tenemos que $P \subset Q \subset S$ y nos queda solo probar que $\omega(Q) = Q \backslash P$. Vamos a continuar la demostración manipulando la definición anterior de ω:

$$\overbrace{\omega \cdot \omega \cdot \cdots \cdot \omega}^{\text{n veces}} = \overbrace{\sigma^{-1}\tau\sigma \cdot \sigma^{-1}\tau\sigma \cdot \cdots \cdot \sigma^{-1}\tau\sigma}^{\text{n veces}}$$

$$\omega^n = \sigma^{-1}\tau^n\sigma$$

$$\sigma\omega^n = \tau^n\sigma$$

Usando esta equivalencia, podemos escribir la igualdad $\sigma(P) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_{nt}\sigma(P) = \emptyset$ como:

$$\sigma(P) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma\omega^n(P) = \emptyset$$

Como σ es una rotación, cumple la propiedad distributiva y podemos sacarla como factor común:

$$\sigma \left(P \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega^n(P) \right) = \emptyset$$

Como las rotaciones son funciones biyectivas, podemos decir que la siguiente afirmación es cierta:

$$P \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega^n(P) = \emptyset$$

Consideraremos ahora lo siguiente:

$$\omega(Q) = \omega \left(P \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma\omega^n(P) \right) = \omega(P) \cup \omega \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega^n(P) \right) = \omega(P) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega^{n+1}(P) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega^n(P)$$

Como P es numerable y Q es la unión de conjuntos numerables $\omega^n(P)$ para $n = 1, 2, \ldots, \infty$, tenemos que Q es también numerable. Además, está claro que $P \subset Q$, ya que hemos definido Q específicamente para ello. Finalmente podemos ver que como $\omega(Q) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega^n(P)$ y $Q =$

$P \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega^n(P)$, está claro que $\omega(Q) \subset Q$. Habiendo verificado estas condiciones con las que comenzamos el teorema, solo nos queda una cosa por probar.

Usando la conclusión de que $\omega(Q) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega^n(P)$ podemos decir que:

$$P \cap \omega(Q) = \emptyset$$

Por lo tanto hemos encontrado una rotación ω y un conjunto numerable Q que contiene a nuestro conjunto fijado P y que, a la hora de aplicar la rotación ω a Q, obtendremos como resultado un conjunto disjunto a P, da igual las veces que apliquemos ω. Por tanto concluye aqui la demostración. ■

En nuestra siguiente demostración, usaremos todo lo demostrado para rotaciones y subconjuntos de S para hallar una partición de S de diez partes, de manera que rotando seis de esas partes podemos obtener una partición de S y rotando las otras 4 partes obtendremos de nuevo una partición de S. Esto es interesante, ya que intuitivamente podriamos pensar que una vez obtuviesemos una partición de S, podriamos rotar todas las partes para obtener otra partición de S.

Teorema 1.23 Existe una partición $\{T_j : 1 \leq j \leq 10\}$ de la esfera unidad en diez subconjuntos disjuntos y un correspondiente conjunto $\{\rho_j : 1 \leq j \leq 10\}$ de rotaciones tales que $\{\rho_j(T_j) : 1 \leq j \leq 6\}$ es una partición de S en seis subconjuntos y $\{\rho_j(T_j) : 7 \leq j \leq 10\}$ es otra partición de S en cuatro subconjuntos.

Demostración.

En esta demostración usaremos las mismas definiciones para P, S_1, S_2,S_3, ϕ y ψ que las empleadas anteriormente. Además, definiremos los siguientes términos:

$$\begin{array}{lll} U_1 = \phi(S_2) & U_2 = \psi\phi(S_2) & U_3 = \psi^2\phi(S_2) \\ V_1 = \phi(S_3) & V_2 = \psi\phi(S_3) & V_3 = \psi^2\phi(S_3) \end{array}$$

Como estamos usando las mismas definiciones que en el Teorema 1.21, veremos en los siguientes cálculos que $\{U_j, V_j\}$ es una particion de S_j para $j = 1, 2, 3$. Veamos que $\{U_1, V_1\}$ es una partición de S_1, usando el hecho de que $\phi^2 = i$:

$$\phi(S_1) = S_2 \cup S_3$$

$$S_1 = \phi(S_2 \cup S_3)$$

$$S_1 = \phi(S_2) \cup \phi(S_3) = U_1 \cup V_1$$

Haremos ahora lo mismo para ver que $\{U_2, V_2\}$ es una partición de S_2:

$$S_1 = \phi(S_2) \cup \phi(S_3)$$

$$\psi(S_1) = \psi(\phi(S_2) \cup \phi(S_3))$$

$$S_2 = \psi\phi(S_2) \cup \psi\phi(S_3) = U_2 \cup V_2$$

Finalmente, veamos que $\{U_3, V_3\}$ es una partición de S_3:

$$S_1 = \phi(S_2) \cup \phi(S_3)$$

$$\psi^2(S_1) = \psi^2(\phi(S_2) \cup \phi(S_3))$$

$$S_3 = \psi^2\phi(S_2) \cup \psi^2\phi(S_3) = U_3 \cup V_3$$

Como las rotaciones son biyecciones, tenemos que si rotamos dos conjuntos disjuntos, su imagen será también disjunta. Como S_2 y S_3 son disjuntos, $\phi(S_2)$ y $\phi(S_3)$ también lo serán. Por tanto, U_1 y V_1 son disjuntos. Usando la misma lógica, tendremos que U_2 y V_2 también lo serán, así como U_3 y V_3. Finalmente, podemos ver que seis de estos subconjuntos son, de hecho, disjuntos, ya que U_j, $V_j \subset S_j$ para cada $j = 1, 2, 3$ y sabemos que S_1, S_2 y S_3 son disjuntos.

Definiremos ahora los siguientes conjuntos y rotaciones:

$$\begin{array}{cccc} T_7 = U_1 & T_8 = U_2 & T_9 = U_3 & T_{10} = P \\ \rho_7 = \psi^2\phi & \rho_8 = \phi\psi^2 & \rho_9 = \psi\phi\psi & \rho_{10} = i \end{array}$$

Tendremos entonces que $\rho_{10}(T_{10}) = i(P) = P$. Además, veamos que $\rho_7(T_7) = S_1$, usando que $\psi(S_1) = S_2$ y $\psi^3 = i$ implica que $S_1 = \psi^2(S_2)$:

$$\rho_7(T_7) = \psi^2\phi(\phi(S_2)) = \psi^2(S_2) = S_1$$

De manera similar, $\rho_8(T_8) = S_2$:

$$(\phi\psi^2)\psi\phi(S_2) = \phi^2(S_2) = S_2$$

De la misma forma, usando que $\psi(S_1) = S_2$ y $\psi^2(S_1) = S_3$, podemos ver que $\rho_9(T_9) = S_3$:

$$\psi\phi\psi(\psi^2\phi(S_2)) = \psi\phi^2(S_2) = \psi(S_2) = \psi(\psi(S_1)) = \psi^2(S_1) = S_3.$$

Por tanto, hemos probado que $\rho_7(T_7)$, $\rho_8(T_8)$, $\rho_9(T_9)$ y $\rho_{10}(T_{10})$ son equivalentes a S_1, S_2 S_3 y P respectivamente. Como probamos anteriormente que S_1, S_2 S_3 y P forman una partición de S, tendremos que $\rho_7(T_7)$, $\rho_8(T_8)$, $\rho_9(T_9)$ y $\rho_{10}(T_{10})$ también lo será.

Vamos a prestar atención ahora a las restantes porciones de la partición de S y veamos de nuevo que podemos nuevamente rotarlas para conseguir una partición de S. Hemos visto que $U_1 = T_7$,V_1 $U_2 = T_8$, V_2, $U_3 = T_9$ y V_3 forman una partición de $S \backslash P$ y además $T_{10} = P$. Por tanto, $S \backslash (T_7 \cup T_8 \cup T_9 \cup T_{10}) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$. Dividiremos estos conjuntos V_j para $j = 1, 2, 3$ en seis partes. Sean Q y ω con la misma definición que en el teorema anterior:

$$\omega = \sigma^{-1}\tau\sigma$$

$$Q = P \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega^n(P)$$

Recordemos que Q es un conjunto numerable que contiene a P de manera que cuando aplicamos ω a Q, los puntos resultantes se encuentran en $Q \backslash P$. Definiremos ahora el resto de nuestros conjuntos T:

$$\begin{array}{ccc} T_1 = \rho_8(S_1 \cap Q) & T_2 = \rho_9(S_2 \cap Q) & T_3 = \rho_7(S_3 \cap Q) \\ T_4 = \rho_8(S_1 \backslash Q) & T_5 = \rho_9(S_2 \backslash Q) & T_6 = \rho_7(S_3 \backslash Q) \end{array}$$

Sabemos que los conjuntos T_1, T_2 y T_3 deben ser numerables dado que Q es numerable. Ahora, observemos que:

$$\rho_8(S_1) = \phi\psi^2(S_1) = \phi(S_3) = V_1$$

$$\rho_9(S_2) = \psi\phi\psi(S_1) = \psi\phi(S_3) = V_2$$

$$\rho_7(S_3) = \psi^2\phi(S_3) = V_3$$

Debido a la forma en la que hemos definido los conjuntos T_j para $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, cuando observamos las igualdades anteriores, está claro que T_1 y T_4 forman una partición de V_1, T_2 y T_5 una partición de V_2, y T_3 y T_6 una partición de V_3. Como sabemos que $\{U_j, V_j, P : j = 1, 2, 3\}$ forman una partición de S y hemos visto que los conjuntos $\{T_j : 1 \leq j \leq 10\}$ y $\{U_j, V_j, P : j =$

$1, 2, 3\}$ son equivalentes, podemos decir que el conjunto $\{T_j : 1 \leq j \leq 10\}$ forma una partición de S.

El resto de la demostración consistirá en la definición de los restantes ρ_j de forma que cuando aplicamos cada ρ_j al correspondiente T_j para $1 \leq j \leq 6$, el conjunto resultante vuelve a ser una partición de S. Primero observaremos los T_j y ρ_j para $j = 4, 5, 6$ y veremos que el conjunto $\{\rho_j(T_j) : j = 4, 5, 6\} = S \backslash Q$. Definiremos por tanto las rotaciones ρ_j para $j = 4, 5, 6$ como:

$$\rho_4 = \rho_8^{-1} \qquad \rho_5 = \rho_9^{-1} \qquad \rho_6 = \rho_7^{-1}$$

Aplicaremos entonces cada rotación a su correspondiente conjunto T_j:

$$\rho_4(T_4) = \rho_8^{-1}\rho_8(S_1 \backslash Q) = S_1 \backslash Q$$

$$\rho_5(T_5) = \rho_9^{-1}\rho_9(S_2 \backslash Q) = S_2 \backslash Q$$

$$\rho_6(T_6) = \rho_7^{-1}\rho_7(S_3 \backslash Q) = S_3 \backslash Q$$

Recordando que $P \backslash Q$, las igualdades anteriores nos muestran que $\{\rho_j(T_j) : j = 4, 5, 6\} = S \backslash Q$ forma una partición de $S \backslash Q$. Vamos a definir ahora ρ_j para $j = 1, 2, 3$ y vamos a ver que, cuando aplicamos dichas rotaciones a sus correspondientes conjuntos T_j obtenemos una partición de Q:

$$\rho_1 = \omega^{-1}\rho_4 \qquad \rho_2 = \omega^{-1}\rho_5 \qquad \rho_3 = \omega^{-1}\rho_6$$

Aplicaremos entonces cada rotación a su correspondiente conjunto T_j:

$$\rho_1(T_1) = \omega^{-1}\rho_4\rho_8(S_1 \cap Q) = \omega^{-1}\rho_8^{-1}\rho_8(S_1 \cap Q) = \omega^{-1}(S_1 \cap Q)$$

$$\rho_2(T_2) = \omega^{-1}\rho_5\rho_9(S_2 \cap Q) = \omega^{-1}\rho_9^{-1}\rho_9(S_2 \cap Q) = \omega^{-1}(S_2 \cap Q)$$

$$\rho_3(T_3) = \omega^{-1}\rho_6\rho_7(S_3 \cap Q) = \omega^{-1}\rho_7^{-1}\rho_7(S_3 \cap Q) = \omega^{-1}(S_3 \cap Q)$$

Es inmediato ver que $\rho_1(T_1)$, $\rho_2(T_2)$ y $\rho_3(T_3)$ son conjuntos disjuntos debido a que los tres son rotaciones de tres conjuntos disjuntos $S_1 \cap Q$, $S_2 \cap Q$ y $S_3 \cap Q$, respectivamente. Nuestro objetivo será por tanto demostrar que la unión de estos conjuntos es, de hecho, Q:

$$\rho_1(T_1) \cup \rho_2(T_2) \cup \rho_3(T_3) = \omega^{-1}(S_1 \cap Q) \cup \omega^{-1}(S_2 \cap Q) \cup \omega^{-1}(S_3 \cap Q)$$

$$= \omega^{-1}((S_1 \cap Q) \cup (S_2 \cap Q) \cup (S_3 \cap Q)) = \omega^{-1}((S_1 \cup S_2 \cup S_3) \cap Q) = \omega^{-1}(Q \backslash P) = Q$$

En los cálculos anteriores, vemos que $(S_1 \cup S_2 \cup S_3) \cap Q = Q \backslash P$ debido a que $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = S \backslash P$. Además, podemos ver que $\omega^{-1}(Q \backslash P) = Q$ mediante cálculos fáciles sobre nuestra definición de ω:

$$\omega(Q) = Q \backslash P$$

$$\omega^{-1}\omega(Q) = \omega^{-1}(Q \backslash P)$$

$$Q = \omega^{-1}(Q \backslash P)$$

Por tanto, hemos probado que $\{\rho_j(T_j) : j = 1, 2, 3\}$ forma una partición de Q. Anteriormente demostramos que $\{\rho_j(T_j) : j = 4, 5, 6\}$ es una partición de $S \backslash Q$. Por tanto, tenemos que $\{\rho_j(T_j) : j = 1 \leq j \leq 6\}$ es una partición de S.

En resumen, hemos probado que somos capaces de hacer una partición de S en diez conjuntos que hemos llamado T_1,..., T_{10} disjuntos dos a dos que pueden ser rotados para formar particiónes de S. Primero, rotamos cuatro de estos conjuntos, T_7,T_8,T_9 y T_{10} para obtener una partición de S. Despues rotamos los conjuntos restantes, obteniendo de esta forma una segunda partición de S, finalizando de esta forma la demostración. ■

Este teorema se conoce como paradoja de *Hausdorff*, el cual lo escribió en 1914 de la siguiente manera:

Teorema 1.24 Sean $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, C_1, C_2\}$ una partición de la esfera unidad $\mathbb{S}^2$ de forma que A_i son congruentes entre sí para todo i, y C_1, C_2 son numerables. Entonces se tiene que podemos reordenar los elementos de la partición de forma que:

$$\mathbb{S}^2 = A_1 \cup A_2 \cup C_1 \qquad\qquad \mathbb{S}^2 = A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup C_2$$

Habiendo probado este teorema sobre la esfera unidad, vamos en la siguiente sección a demostrar un teorema similar aplicado sobre la bola unidad.

1.5. La bola unidad

Empezaremos a trabajar ahora con la bola unidad, denotada como B, la cual es el conjunto de todos los puntos con distancia al origen menor o igual a uno. Recordemos que un movimiento rígido es una función de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$, de forma $r(x) = \rho(x) + a$, donde ρ es una rotación de $x \in \mathbb{R}^3$ y $a \in \mathbb{R}^3$.

Teorema 1.25 Existe una partición $\{B_k : 1 \leq k \leq 40\}$ de la bola unidad cerrada B en cuarenta subconjuntos y el correspondiente conjunto $\{r_k : 1 \leq k \leq 40\}$ de movimientos rígidos tales que $\{r_k(B_k) : 1 \leq k \leq 24\}$ forman una partición de B en veinticuatro partes y $\{r_k(B_k) : 25 \leq k \leq 40\}$ forman otra de dieciseis.

Demostración.

Primero emplearemos el resultado del Teorema 1.22, el cual nos dice que si P es cualquier subconjunto de S, existe un conjunto numerable Q y una rotación ω tal que $P \subset Q \subset S$ y $\omega(Q) = Q \backslash P$. Vamos a aplicar dicho teorema en el caso en el que P es el conjunto cuyo único elemento es $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t \in S$ para obtener un conjunto numerable Q tal que $\{u\} \subset Q \subset S$ y una rotación ρ_0 tal que $\rho_0(Q) = Q \backslash \{u\}$.

Sea ahora $N_1 = \{\frac{1}{2}(q-u) : q \in Q\}$. Veamos en los siguientes calculos que, para $q \in Q$ se tiene que $N_1 \subseteq S$:

$$\left|\frac{1}{2}(q-u)\right| = \frac{1}{2}|q-u| \leq \frac{1}{2}(|q| + |u|) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

Por tanto, los elementos de N_1 tendrán longitud menor o igual a uno, con lo que satisfacen la definición de B.

Además, definiremos el movimiento rígido r_0 como $r_0(x) = \rho_0(x + \frac{1}{2}u) - \frac{1}{2}u$. Veamos que efectivamente, r_0 satisface nuestra definición de movimiento rigido:

$$r_0(x) = \rho_0(x + \frac{1}{2}u) - \frac{1}{2}u = \rho_0(x) + \rho_0(\frac{1}{2}u) - \frac{1}{2}u = \underbrace{\rho_0(x)}_{\text{mov. rígido}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho_0(u) - \frac{1}{2}u}_{\text{vector cte}}$$

Podemos ver que el vector nulo se encuentra en N_1 dado que $\{u\} \in Q$ y $\frac{1}{2}(u-u) = 0$. Completaremos los cálculos para ver que $r_0(N_1) = N_1 \backslash \{0\}$:

$$r_0\left(\frac{1}{2}(q-u)\right) = \rho_0\left(\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u\right) - \frac{1}{2}u = \rho_0\left(\frac{1}{2}q\right) - \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}\rho_0(q) - \frac{1}{2}u$$

Como hemos definido ρ_0 tal que $\rho_0(Q) = Q\backslash\{u\}$, sabemos que $\rho_0(q) \neq u$ y por tanto $\frac{1}{2}\rho_0\,(q) - \frac{1}{2}u \neq 0$. Por tanto $r_0(N_1) = N_1\backslash\{0\}$.

Definiremos ahora $N_2 = B\backslash N_1$, $s_1 = r_0$, $s_2 = I$, $M_1 = s_1(N_1)$, y $M_2 = s_2(N_2)$. Podemos ver que N_1 y N_2 son una partición de B. En los siguientes cálculos veremos que M_1 y M_2 forman una partición de $B\backslash\{0\}$:

$$\{M_1, M_2\} = \{r_0(N_1), i(N_2)\} = \{N_1\backslash\{0\}, N_2\}$$

Dado que $\{N_1, N_2\}$ es una partición de B, $\{N_1\backslash\{0\}, N_2\}$ es una partición de $B\backslash\{0\}$ tendremos que $\{M_1, M_2\}$ es una partición de $B\backslash\{0\}$. Definimos ahora $S' = \{y \in \mathbb{R}^3 : 0 < |y| \leq 1\}$ de forma que S' es la bola unidad sin el origen. Definimos también $T'_j = \{tx : x \in T_j, 0 < t \leq 1\}$. Como T_j con $1 \leq j \leq 10$ forman una partición de S, los T'_j con $1 \leq j \leq 10$ formarán una partición de S'. Estas expresiones las empearemos más formalmente para reescribir el Teorema 4.3 como sigue:

Teorema 1.26 Existe una partición $\{T'_j : 1 \leq j \leq 10\}$ de s' en diez subconjuntos disjuntos y un correspondiente conjunto $\{\rho_j : 1 \leq j \leq 10\}$ de rotaciones tales que $\{\rho_j(T'_j) : 1 \leq j \leq 6\}$ es una partición de S' en seis subconjuntos y $\{\rho_j(T'_j) : 7 \leq j \leq 10\}$ es otra partición de S' en cuatro subconjuntos.

Su demostración será identica a la demostración del teorema original, reemplazando S por S' y T_j por T'_j. Observemos que S' es el mismo conjunto que $B\backslash\{0\}$. Además, observemos que para cada $j = 1, 2, \ldots, 10$ la familia $\{T'_j \cap \rho_j^{-1}(M_i) : i = 1, 2\}$ forma una particion de T'_j. Esto ocurre debido a que M_1 y M_2 son una partición de S' y por tanto $\rho_j^{-1}(M_1)$ y $\rho_j^{-1}(M_2)$ es también una partición de S' ya que ρ es invertible e inyectiva con $\rho_j(0) = 0$. Por tanto:

$$T'_j = (T'_j \cap \rho_j^{-1}(M_1)) \cup (T'_j \cap \rho_j^{-1}(M_2)) \text{ y } \rho_j^{-1}(M_1) \cap \rho_j^{-1}(M_2) = \emptyset$$

Observemos también que para cada $j = 1, \ldots, 10$, $\{M_n \cap T'_j \cap \rho_j^{-1}(M_i) : n = 1, 2\}$ forma una partición de $T'_j \cap \rho_j^{-1}(M_i)$ para $i = 1, 2$. Esto ocurre debido a que M_1 y M_2 son una partición de S' y como $T'_j \cap \rho_j^{-1}(M_i)$ son subconjuntos de S'(para $i = 1, 2$ y $j = 1, \ldots, 10$), está claro que $\{M_n \cap T'_j \cap \rho_j^{-1}(M_i) : n = 1, 2\}$ forma una partición de $T'_j \cap \rho_j^{-1}(M_i)$ para $i = 1, 2$ y $j = 1, \ldots, 10$. Entonces $\{M_n \cap T'_j \cap \rho_j^{-1}(M_i) : 1 \leq n \leq 2, 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 10\}$ forman una partición de S' en cuarenta subconjuntos.

Recordemos que $M_1 = s_1(N_1)$, $M_2 = s_2(N_2)$ y que N_1 y N_2 forman una partición de B mientras que M_1 y M_2 lo son de $B\backslash\{0\} = S'$. Tomando entonces s_n^{-1} para nuestra partición en cuarenta conjuntos de S', tendremos una partición de cuarenta subconjuntos de B:

$$B_{nij} = s_n^{-1}\left(M_n \cap T'_j \cap \rho_j^{-1}(M_i)\right) \text{ para } 1 \leq n \leq 2,\ 1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq 10.$$

Mientras tanto, para cada j fijo, los cuatro conjuntos $\rho_j s_n(B_{nij}) = M_i \cap \rho(M_n \cap T'_j)$ para $n = 1, 2$ e $i = 1, 2$ forman una partición de $\rho_j(T'_j)$:

$$\rho_j s_n(B_{nij}) = \rho_j s_n s_n^{-1}\left(M_n \cap T'_j \cap \rho_j^{-1}(M_i)\right) = \rho_j(M_n) \cap \rho_j(T'_j) \cap M_i. \tag{1.1}$$

Ya hemos demostrado anteriormente que $\{M_1, M_2\}$ y $\{\rho_j(M_1), \rho_j(M_2)\}$ son ambos particiones de S'. También sabemos que M_1 y M_2 son disjuntos. En consecuencia se tiene que $\rho_j(M_1)$ y $\rho_j(M_2)$ también son disjuntos dado que ρ_j es una biyección y por tanto la imagen por ρ_j de una partición será también una partición. Además, para cada j fijo, $\rho_j(M_n) \cap \rho_j(T'_j) \cap M_i = \rho_j s_n(B_{nij})$ para $n = 1, 2$ e $i = 1, 2$ forman una partición de $\rho_j(T'_j)$.

Usando nuestra versión adaptada del Teorema 1.23, sabemos que $\{\rho_j(T'_j) : 1 \leq j \leq 6\}$ es una partición de S' y $\{\rho_j(T'_j) : 7 \leq j \leq 10\}$ es otra partición de S'. Debido a que para cada j fijo, los cuatro conjuntos $\rho_j s_n(B_{nij}) = M_i \cap \rho_j(M_n \cap T'_j)$ para $n = 1, 2$ e $i = 1, 2$ forman una partición de $\rho_j(T'_j)$, podemos usar el resultado del Teorema 1.23 para decir que las siguientes familias son también particiones de S':

$$\{\rho_j s_n(B_{nij}) : 1 \leq n \leq 2, 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 6\}$$

$$\{\rho_j s_n(B_{nij}) : 1 \leq n \leq 2, 1 \leq i \leq 2, 7 \leq j \leq 10\}$$

Ahora, fijemos i en las familias y utilizaremos la ecuación 1.1 para ver que las siguientes familias de doce y ocho conjuntos son cada una particiones de M_i:

$$\{\rho_j s_n(B_{nij}) : 1 \leq n \leq 2, 1 \leq j \leq 6\} = \{\rho_j(M_i) \cap \rho_j(T'_j) \cap M_i : 1 \leq n \leq 2, 1 \leq j \leq 6\}$$

$$\{\rho_j s_n(B_{nij}) : 1 \leq n \leq 2, 7 \leq j \leq 10\} = \{\rho_j(M_i) \cap \rho_j(T'_j) \cap M_i : 1 \leq n \leq 2, 7 \leq j \leq 10\}$$

Esto es cierto debido a que sin fijar i, cada familia es una partición de S' y por tanto fijándolo, tendremos inmediatamente una partición de M_i.

Posteriormente, como hicimos antes, podemos enviar estas particiones de M_i a particiones de N_i aplicando s_i^{-1}. En los siguientes cáculos, i estará fijado:

$$\{s_i^{-1}\rho_j s_n(B_{nij}) : 1 \leq n \leq 2, 1 \leq j \leq 6\}$$

$$\{s_i^{-1}\rho_j s_n \left(s_n^{-1}\left(M_n \cap T_j' \cap \rho_j^{-1}(M_i)\right)\right) : 1 \leq n \leq 2, 1 \leq j \leq 6\}$$

$$\{s_i^{-1}\rho_j(M_n) \cap s_n^{-1}(T_j') \cap s_n^{-1}(M_i) : 1 \leq n \leq 2, 1 \leq j \leq 6\}$$

$$\{s_i^{-1}\rho_j(M_n) \cap s_n^{-1}(T_j') \cap N_i : 1 \leq n \leq 2, 1 \leq j \leq 6\}$$

Usaremos el hecho de que s_i^{-1} es una biyección para saber que la expresión anterior es una partición de N_i. Que s_i^{-1} sea una función inyectiva nos asegura que la partición de M_i permanece disjunta cuando la proyectamos en N_i. Que s_i^{-1} sea sobreyectiva nos dice que la imagen de la partición cubre todo N_i. Por tanto, hemos formado una partición de N_i. Formaremos una segunda partición repitiendo los calculos para $j = 7, 8, 9, 10$. Definamos ahora $r_{nij} = s_i^{-1}\rho_j s_n$ de forma que podemos reescribir la siguiente ecuación como sigue:

$$\{r_{nij}(B_{nij}) : 1 \leq n \leq 2, 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 6\}$$

$$\{r_{nij}(B_{nij}) : 1 \leq n \leq 2, 1 \leq i \leq 2, 7 \leq j \leq 10\}$$

Dado que hemos fijado i, cada familia es una partición de N_i y como N_i para $i = 1, 2$ es una partición de B, las familias son particiones de B en veinticuatro y dieciséis conjutos. Finalmente cambiaremos de notación para nuestros conjuntos B_{nij} y movimientos rígidos r_{nij} como sigue:

$$r_{nij} = r_1, r_2, \ldots, r_{24} \text{ para } 1 \leq n \leq 2, 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 6$$

$$r_{nij} = r_{25}, \ldots, r_{40} \text{ para } 1 \leq n \leq 2, 1 \leq i \leq 2, 7 \leq j \leq 10$$

$$B_{nij} = B_1, B_2, \ldots, B_{24} \text{ para } 1 \leq n \leq 2, 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 6$$

$$B_{nij} = B_{25}, \ldots, B_{40} \text{ para } 1 \leq n \leq 2, 1 \leq i \leq 2, 7 \leq j \leq 10$$

Por tanto, tenemos cuarenta conjuntos B_k con $k = 1, \ldots, 40$ y cuarenta movimientos rígidos r_k con $k = 1, \ldots, 40$ de forma que $\{r_k(B_k) : 1 \leq k \leq 24\}$ forma una partición de B y $\{r_k(B_k) : 25 \leq k \leq 40\}$ forma otra. Con esto concluimos con la demostración. ■

En resumen, hemos encontrado una forma de realizar una partición en B en cuarenta partes y, definiendo cuarenta movimientos rígidos podemos obtener dos particiones de B utilizando únicamente estas partes y movimientos rígidos. Podemos ver entonces que hemos obtenido un conjunto del doble del tamaño original utilizando únicamente elementos del conjunto de origen sin realizar cambios de tamaño en él.

En la siguiente sección. buscaremos generalizar este concepto para la bola unidad a cualquier par de subconjuntos no vacios, acotados de $\mathbb{R}^3$.

1.6. La paradoja de *Banach-Tarski*

Empezaremos definiendo la conguencia por partes, para posteriormente dar propiedades de esta congruencia y, finalmente, utilizar estas propiedades para completar la prueba de la demostración de la Paradoja de Banach-Tarski en dos teoremas.

Definición 1.27 Dos subconjuntos X e Y de $\mathbb{R}^3$ se dira que son congruentes por partes, denotado $X \sim Y$ si, para algún número natural n, existe una partición $\{X_j : 1 \leq j \leq n\}$ de X en n subconjuntos y un correspondiente conjunto $\{f_j : 1 \leq j \leq n\}$ de movimientos rígidos (isometrías) tales que $\{f_j(X_j) : 1 \leq j \leq n\}$ es una partición de Y.

En otras palabras, tenemos que dos conjuntos son considerados conguentes por partes si somos capaces de, tomando una partición de X de un número finito de partes y utilizando movimientos rígidos, podemos transformar dicha partición en una partición de Y. Si X es congruente con un subconjunto de Y, lo denotaremos como $X \lesssim Y$.

Teorema 1.28 Sean X, Y y Z subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, tenemos:

1. $X \sim X$
2. $X \sim Y \Longrightarrow Y \sim X$
3. Si $X \sim Y$ e $Y \sim Z \Longrightarrow X \sim Z$
4. $X \sim Y \Longrightarrow X \lesssim Y$
5. $X \lesssim Y$ e $Y \lesssim Z \Longrightarrow X \lesssim Z$
6. $X \subseteq Y \Longrightarrow X \lesssim Y$
7. $X \lesssim Y$ e $Y \lesssim X \Longrightarrow X \sim Y$

Demostración.

Las propiedades (1)-(6) son fácilmente demostrables. Debido a estro centraremos nuestra demostración en la prueba de la propiedad (7).

Supongamos $X \sim Y_0$ e $Y \sim X_0$ donde $X_0 \subset X$ e $Y_0 \subset Y$. Sea $\{X_j : 1 \leq j \leq n\}$ y $\{Y_i : 1 \leq i \leq m\}$ particiones de X e Y respectivamente, y sea $\{f_j : 1 \leq j \leq n\}$ y $\{g_i : 1 \leq i \leq m\}$ conjuntos de movimientos rígidos tales que $\{f_j(X_j) : 1 \leq j \leq n\}$ es una partición de Y_0 y $\{g_j(Y_j) : 1 \leq j \leq m\}$ es una partición de X_0.

Primero definiremos f en X como $f(x) = f_j(x)$ si $x \in X_j$ y definiremos g en Y como $g(y) = g_i(y)$ si $y \in Y_i$. Por tanto, para un conjunto $E \subset X$, definiremos $E' \subset X$ como:

$$E' = X \backslash g[Y \backslash f(E)]$$

Observemos en los siguientes cálculos que si F es un subconjunto de X tal que $E \subset F \subset X$, entonces $E' \subset F'$:

$$\begin{aligned} E \subset F \Longrightarrow \ & f[E] \subset f[F] \\ \Longrightarrow \ & Y \backslash f[E] \supset Y \backslash f[F] \\ \Longrightarrow \ & g[Y \backslash f[E]] \supset g[Y \backslash f[F]] \\ \Longrightarrow \ & X \backslash g[Y \backslash f[E]] \subset X \backslash g[Y \backslash f[F]] \\ \Longrightarrow \ & E' \subset F' \end{aligned}$$

Ahora, sea $\mathfrak{D} = \{E : E \subset X, E \subset E'\}$. Podemos ver que $\emptyset \in \mathfrak{D}$ debido a que $\emptyset \in X$ y $\emptyset \in \emptyset'$ ya que $\emptyset$ se encuentra contenido en todos los conjuntos. Sea $D = \bigcup \mathfrak{D}$ unión de todos los conjuntos que pertenecen a $\mathfrak{D}$.

Para cada $E \in \mathfrak{D}$, sabemos que $E \subset D \subset X$, y por tanto $E' \subset D'$. Usando esto y sabiendo que hemos definido $\mathfrak{D}$ tal que solo contiene conjuntos E para los que $e \subset E'$, tendremos que $E \subset D'$.

Por consiguiente, una vez sabido esto, para cada $E \in \mathfrak{D}$, $E \subset D'$, y como D es la unión de todos los conjuntos que pertenecen a $\mathfrak{D}$, sabemos que $D \subset D'$. Tenemos que, como $D \subset D' \subset X$, $D' \subset (D')'$.

Tendremos entonces, debido a nuestra definición de $\mathfrak{D}$, que $D' \in \mathfrak{D}$ y por tanto $D' \subset D$ por ser D unión de todos los elementos de $\mathfrak{D}$. Concluimos de esta forma que $D' = D$. Usando esto y la definición de E', podemos reescribir D' y mediante calculos hallar $X \backslash D$:

$$D = D' = X\backslash g[Y\backslash f[D]]$$

$$D = (g[Y\backslash f[D]])^C$$

$$D^C = (g[Y\backslash f[D]])^{C^C}$$

$$X\backslash D = g[Y\backslash f[D]]$$

Debido a que hemos definido g para que su imagen sea siempre X_0, podemos decir que $X\backslash D \subset X_0$. Definiremos ahora lo siguiente para $1 \leq j \leq n$ y $1 \leq i \leq m$:

$$A_j = D \cap X_j \qquad A_{n+i} = g[Y_i\backslash f[D]] \qquad h_j = f_j \qquad h_{n+i} = g_i^{-1}$$

Como $D \subset X$, los conjuntos A_j para $1 \leq j \leq n$ son una partición de D. Además, como g es una biyección de Y a X_0 e Y_j es una partición de Y para $1 \leq i \leq m$, los conjuntos A_{n+i} son una partición de $X\backslash D$. Entonces:

$$h_j(A_j) = h_j(D \cap X_j) = f_j(D \cap X_j) = f_j(D) \cap f_j(X_j)$$

Esto nos dice que los conjuntos $h_j(A_j)$ para $1 \leq j \leq n$ son una partición de $f(D)$. Además:

$$h_{n+i}(A_{n+i}) = g_i^{-1}(g[Y_i\backslash f[D]]) = Y_i\backslash f[D],$$

podemos ver por tanto que $h_{n+i}(A_{n+i})$ es una partición de $Y\backslash f[D]$

Como D y $X\backslash D$ forman una partición de X mientras que $f(D)$ e $Y\backslash f(D)$ lo es de Y hemos encontrado n conjuntos, A_j y A_{n+i} para $1 \leq j \leq n$ y $1 \leq i \leq m$, los cuales forman una partición de X y, mediante la aplicación de los movimientos rígidos h_j y h_{n+i} respectivamente, podemos encontrar una partición de Y. Tenemos entonces que $X \sim Y$, concluyendo con la demostración.

■

Definición 1.29 Una bola cerrada en $\mathbb{R}^3$ es cualquier conjunto de la forma $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - a| \leq \varepsilon\}$ donde $a \in \mathbb{R}^3$ y $\varepsilon > 0$.

Definición 1.30 Llamaremos traslación de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ por $b \in \mathbb{R}^3$ al conjunto de la forma $A + b = \{x + b : x \in A\}$.

Teorema 1.31 Si $A \subset \mathbb{R}^3$ es una bola cerrada y si $A_1, \dots A_n$ son traslaciones de A, entonces:

$$A \sim \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

Demostración.

Supongamos que A es cualquier bola cerrada de $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen, es decir, sea $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq \varepsilon\}$ para algún $\varepsilon > 0$. Entonces, escojamos cualquier $a \in \mathbb{R}^3$ para el cual $|a| > 2\varepsilon$ y sea $A' = A + a = \{y \in \mathbb{R}^3 : |y - a| \leq \varepsilon\}$. Esto nos dice que A' es también una bola cerrada de $\mathbb{R}^3$ centrada en el punto a. Dado que $|a| > 2\varepsilon$, A y A' son disjuntos.

Lo siguiente que haremos será en pos de aplicar el Teorema 1.25 para mostrar que $A \sim (A \cap A')$. Sea B_k y r_k definidos de la misma forma que en el Teorema 1.25, es decir:

$$\{B_k : 1 \leq k \leq 40\}$$

$$\{r_k : 1 \leq k \leq 40\}$$

donde los B_k son una partición de la bola cerrada B y los r_k son un conjunto de rotaciones tales que $\{r_k(B_k) : 1 \leq k \leq 24\}$ forman una partición de B y $\{r_k(B_k) : 25 \leq k \leq 40\}$ forman otra.

Tomaremos ahora la siguiente notación. Para cualquier conjunto $D \subset \mathbb{R}^3$ y $\delta > 0$, sea $\delta D = \{\delta x : x \in D\}$. Consideremos ahora el conjunto $\{\varepsilon B_k : 1 \leq k \leq 40\}$. Observemos que tenemos exactamente una partición a escala de cuarenta partes de B para formar ahora una partición de A. Esto es, $\varepsilon B = A$ y los conjuntos εB_k son disjuntos para todo $k = 1, \dots, 40$.

Definiremos ahora los movimientos rígidos s_k como sigue:

$$s_k = \varepsilon r_k \left(\frac{1}{\varepsilon} x \right) \text{ si } 1 \leq k \leq 24$$

$$s_k = \varepsilon r_k \left(\frac{1}{\varepsilon} x \right) + a \text{ si } 25 \leq k \leq 40$$

Aquí estamos diciendo que para todo punto de A, escalándolo por $\frac{1}{\varepsilon}$ de forma que los puntos se encuentran en B, aplicándoles los movimientos rígidos r_k de forma que obtenemos dos particiones de B y reescalando el resultado por ε, tendremos dos particiones de A. Entonces, para $25 \leq k \leq 40$ estamos trasladando esta partición debido a a de forma que tenemos una partición de A'.

En resumen, cuando aplicamos los movimientos rigidos s_k a A obtenemos como resultado una partición de A y otra de A'.

Debido a que hemos escogido a tal que A y A' son disjuntos, hemos formado una partición de $A \cup A'$. Esto es, somos capaces de transformar una partición de A de cuarenta conjuntos en una partición de $A \cup A'$ mediante movimientos rígidos. Por tanto $A \sim A \cup A'$.

Emplearemos ahora inducción para completar la prueba para ver que si $A_1, \ldots, A_n$ son un número finito de traslaciones de A, entonces $A \sim \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} A_j$.

Caso base: Empezaremos probando que $A \sim \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ cuando $n = 1$, es decir, que A es congruente por partes a una traslación de sí mismo. Sea A_1 una traslación de A. El conjunto A_1 será de la forma $A_1 = \{a + x : a \in A, x \in \mathbb{R}^3\}$. En este caso estaremos trasladando A mediante el movimiento rígido $r_x = x + a$ y, debido a que estos mantienen las particiónes, aplicar r_x a cualquier partición de A resulta en una partición de A_1. De esta manera demostramos que $A \sim A_1$

Hipótesis de inducción: Supongamos ahora $n > 1$ de forma que A será congruente por partes a la unión de $n - 1$ traslaciones de él mismo y sean $A_1, \ldots, A_n$ traslaciones de A. Lo que queremos probar es que A es congruente por partes a todas estas n traslaciones.

Debido a la hipótesis de inducción, $A \sim A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}$, el cual es claramente un subconjunto de $A_1 \cup \cdots \cup A_n$, por lo que tendremos que $A \lesssim A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Usando los resultados del Teorema 1.28, solo tendremos que demostrar que $A_1 \cup \cdots \cup A_n \lesssim A$, concluyendo que $A \sim A_1 \cup \cdots \cup A_n$.

Observemos que dado que A' y A_n son ambos traslaciones de A, son traslaciones el uno del otro. Por tanto $A_n \sim A'$. Observemos también que $A_n \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \subseteq A_n$ (la igualdad se alcanzaría de no haber solapamientos entre A_n y $(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})$). Podemos ver por tanto:

$$A_n \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \lesssim A'$$

Usaremos la siguiente afirmación para completar la prueba:

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n = (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup (A_n \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}))$$

Recordemos que hemos supuesto $A \sim A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}$ y que $(A_n \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})) \lesssim A'$. Dado que A y A' son disjuntos, sabemos que lo siguiente es cierto:

$$(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup (A_n \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})) \precsim A \cup A'$$

En el caso base de la hipótesis de inducción, vimos que $A \cup A' \sim A$ por lo que podemos decir lo siguiente:

$$(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup (A_n \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})) \precsim A$$

Por tanto, hemos demostrado que $(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \precsim A$ y $A \precsim A_1 \cup \cdots \cup A_n$, con lo que $A_1 \cup \cdots \cup A_n \sim A$ debido al Teorema 1.28.

■

Nos encontramos ahora preparados para demostrar la parte final de la Paradoja de Banach-Tarski.

Teorema 1.32 Si X e Y son dos subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^3$ con interior no vacio, $X \sim Y$.

Demostración. Sean X e Y dos subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^3$ con interior no vacio. Empezaremos escogiendo dos puntos interiores $a \in X$ y $b \in Y$ y un $\varepsilon > 0$ tal que se tiene que $A + a \subset X$ y $A + b \subset Y$ con:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq \varepsilon\}$$

Por tanto, tenemos que A es una bola cerrada de radio ε centrada en el origen y hemos escogido a y b tales que al trasladar A por a obtenemos un subconjunto de X y al hacerlo por b obtenemos un subconjunto de Y.

Como X es acotado, X puede estar contenido en la unión finita de traslaciónes de A, las cuales escribiremos como $A_1, \ldots, A_n$. Por tanto:

$$X \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n$$

Usando que el conjunto A es congruente por partes con cualquier conjunto finito formado por traslaciones suyas, como hemos probado en el teorema anterior, llegamos a que:

$$X \precsim A$$

Dado que $A + a \subset X$ y $A \sim A + a$, ya que es una traslación de A, sabemos que :

$$A \precsim X$$

Usando el Teorema 1.28 podremos decir entonces que $X \sim A$. De manera análoga se puede comprobar que $Y \sim A$ y, utilizando nuevamente el Teorema 1.28, llegamos finalmente a que:

$$X \sim Y$$

■

Capítulo 2

Prueba de *Stan Wagon*

En el capítulo anterior, hemos demostrado la paradoja de *Banach-Tarski* siguiendo la versión de *Karl Stromberg*[1], en la que realizamos particiones en un conjunto del espacio $\mathbb{R}^3$ de forma que obteniamos dos particiones del mismo subconjunto sin alterar el tamaño de estas, sino mediante movimientos rígidos de las mismas. En este capítulo, veremos una demostración más técnica del mismo teorema, siguiendo en este caso la versión que aparece en el libro de *Stan Wagon*[3]. Empezaremos definiendo algunos conceptos para crear los fundamentos en los que nos basaremos para la resolución de las pruebas posteriores.

2.1. Definiciones y preliminares

Definición 2.1 Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto X y supongamos $E \subseteq X$ un subconjunto no vacío de X. Diremos que E es paradójico respecto a G si existen m, n enteros positivos tales que para subconjuntos disjuntos de E, $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$ y aplicaciones $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_n \in G$ tenemos que:

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} g_i(A_i), \quad E = \bigcup_{j=1}^{n} h_j(B_j)$$

En resumen, el conjunto E tendrá dos subconjuntos disjuntos $\{\bigcup A_i, \bigcup B_j\}$ de forma que podemos reordenarlos mediante elementos de G de forma que cubrimos E. Si E es paradójico respecto de G, los conjuntos que cumplen esto $\{g_i(A_i)\}$, $\{h_j(B_j)\}$, $\{A_i\}$ y $\{B_j\}$ son cada uno particiones de E.

Un ejemplo de conjunto paradójico será, en $\mathbb{R}^3$, cualquier bola con respecto al grupo de las funciones que mantienen las distancias, las isometrías.

Otro ejemplo de grupo paradójico serán los *grupos no abelianos libres.*

Definición 2.2 Un grupo G se dice libre si hay un subconjunto A de G tal que todo elemento de G puede escribirse en forma única como producto de finitos elementos de A y sus inversos.

Es decir, si el grupo libre F es generado por el conjunto M, será el grupo conformado por palabras cuyas letras serán $\{\sigma, \sigma^{-1} : \sigma \in M\}$, donde dos palabras se dirán equivalentes si se puede transformar una en otra mediante la adición o reducción de pares de letras adyacentes de la forma $\sigma\sigma^{-1}$ o $\sigma^{-1}\sigma$.

Ejemplo. Si tenemos $M = \{a, b\}$ los elementos del grupo libre generado por M serán de la forma:

$$\{a^{m_1}b^{m_2}a^{m_3}\cdots : a, b \in M, m_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots\}$$

Si una palabra no tiene este tipo de letras adyacentes diremos que es una palabra reducida y, utilizando clases de equivalencia, podemos decir que F estará formado por todas las clases de equivalencia de las palabras reducidas, con la operación de la concatenación. A partir de ahora supondremos que todas las palabras son reducidas, para simplificar la notación. Se denotará como I a la identidad en F, también llamado palabra vacía.

Definición 2.3 Un subconjunto S de un grupo F se llama libre si no podemos obtener el elemento identidad en F empleando elementos de S distintos de la identidad.

Definición 2.4 Dado G actuando sobre C, se dice órbita de G en C a las clases de equivalencia de la relación:

"Dados dos puntos c,$d \in C$, se dira que son equivalentes, denotado como $c \sim_{eq} d$, si existe $g \in G$ tal que $gc = d$."

Proposición 2.5 Si dos conjuntos libres generan el mismo grupo libre, estos tendrán el mismo tamaño, que definiremos como rango del grupo libre.

Corolario 2.6 Los grupos libres que tienen el mismo rango serán isomorfos. Además, cualquier grupo isomorfo a un grupo libre se dirá también que es un grupo libre.

Teorema 2.7 Un grupo libre F de rango 2 es paradójico respecto de F, donde F actúa sobre sí mismo mediante la multiplicación a izquierda.

Demostración.

Supongamos σ, τ dos generadores de F. Si ρ es igual a $\sigma^{\pm 1}$,$\tau^{\pm 1}$ definiremos $W(\rho)$ como los elementos de F cuya respesentación es una palabra compuesta por las letras $\sigma^{\pm 1}$,$\tau^{\pm 1}$ que empieza por ρ.

Tendremos entonces que $F = \{I\} \cup W(\sigma) \cup W(\sigma^{-1}) \cup W(\tau) \cup W(\tau^{-1})$ y estos subconjuntos son disjuntos dos a dos. Además, se puede ver facilmente que $W(\sigma) \cup \sigma W(\sigma^{-1}) = F$, de la misma forma que $W(\tau) \cup \tau W(\tau^{-1}) = F$.

En efecto, se observa que para $h \in F \backslash W(\sigma)$, tenemos $\sigma^{-1}h \in W(\sigma^{-1})$ y entonces $h = \sigma(\sigma^{-1}h) \in \sigma W(\sigma^{-1})$. Hemos encontrado de esta forma distintas particiones de F tales que, al aplicar a dichas particiones elementos del propio F y hacer la unión de ellas, obtenemos F. Por tanto tendremos que F será paradójico con respecto a F.

■

Definición 2.8 Un subsemigrupo libre de un grupo es un subconjunto del grupo que contiene a la identidad, es cerrado por la acción del grupo y es isomorfo a un semigrupo libre. Un semigrupo libre de conjunto generador T es el conjunto de palabras que se pueden construir utilizando como letras los elementos de T, siendo la concatenación la operación del semigrupo.

Teorema 2.9 Un semigrupo libre S de generadores $\{\sigma, \tau\}$ contiene dos conjuntos disjuntos A y B tales que $\sigma(S) = A, \tau(S) = B$. Como consecuencia cualquier grupo que contenga un subemigrupo libre de rango 2 contiene un conjunto paradójico.

Demostración.

Sea A el conjunto de las palabras del grupo S cuyo primer término es σ, y sea B el conjunto con primer término τ, obteniendo de esta forma que $\{A, B, I\}$ es una partición de S, donde I es el elemento identidad. Tendremos entonces que $\sigma S = A$ y $\tau S = B$. Por tanto, $\sigma^{-1}(A) = S = \tau^{-1}(B)$, con lo que hemos obtenido dos subconjuntos de S que, al aplicarle las palabras $\sigma^{-1}, \tau^{-1} \in S$, conseguimos de nuevo S, por lo que S será paradójico.

■

Teorema 2.10 Existen dos isometrías, σ y τ, de $\mathbb{R}^2$ que generan un subsemigrupo libre de G_2, el grupo de las isometrías en $\mathbb{R}^2$. Además, σ y τ se pueden escoger de forma que para cualesquiera dos palabras ω_1 y ω_2, formadas por las letras σ y τ, y con término a la izquierda igual a σ y τ, respectivamente, tenemos que $\omega_1(0,0) \neq \omega_2(0,0)$ (la aplicación de las palabras al origen de coordenadas).

Demostración.

Escogemos θ de forma que $\beta = e^{i\theta}$ es un número trascendental. Para simplificar los cálculos podemos tomar $\theta = 1$, la existencia de θ queda justificada porque el círculo unidad es un conjunto no numerable, mientras que el conjunto de los números algebráicos es numerable.

Sea entonces σ la rotación de ángulo θ tal que $e^{i\theta}$ es trascendente y τ la traslación mediante el vector $(1, 0)$. Tendremos que, en $\mathbb{C}$, σ será igual a la multiplicación por $\beta = e^{i\theta}$ mientras que τ será la adición de 1. Solo necesitamos entonces demostrar que σ y τ cumplen con la segunda afirmación. Si se cumple que $\omega_1 = \omega_2$ para dos palabras distintas de G_2 y una de ellas es (el elemento identidad o) el comienzo de la otra, empleando la cancelación a izquierda tenemos que $\nu = I$, para una palabra no trivial ν.

Si se tiene que ν comienza por σ, entonces tendremos que $\nu\tau(0) = \tau(0)$, mientras que si se tiene que comienza por τ, tendremos que $\nu\sigma(0) = \sigma(0)$, contradiciendo la segunda afirmación en cada uno de los casos.

Si por el contrario tenemos que ninguna de las dos palabras es el comienzo de la otra, la cancelación a izquierda genera en este caso ω_1 y ω_2, que son iguales en G_2 pero tienen distintas letras al comienzo. De esta forma, supongamos ω_1 y ω_2 de la forma:

$$\omega_1 = \tau^{j_1}\sigma^{j_2}\dots\tau^{j_m}$$
$$\omega_2 = \sigma^{k_1}\tau^{k_2}\dots\sigma^{k_\ell}$$

donde $m, \ell \geq 1$ y cada uno de los exponentes son números enteros positivos. Debido a que $\sigma(0) = 0$, podemos asumir que ω_1 y ω_2 terminan ambos en una potencia de τ, a no ser que ω_2 se pueda simplificar por σ^{k_1}. Tendremos que:

$$\omega_1(0) = j_1 + j_3u^{j_2} + j_5u^{j_2+j_4} + \dots + j_mu^{j_2+j_4+\dots+j_{m-1}}$$
$$\omega_2(0) = k_2u^{k_1} + k_4u^{k_1+k_3} + \dots + k_\ell u^{k_1+k_3+\dots+k_{\ell-1}}(= 0 \text{ si } \omega_2 = \sigma^{k_1})$$

Si $\omega_1(0) = \omega_2(0)$, estas dos expresiones forman un polinomio no constante con coeficientes enteros que se anula cuando la variable u toma el valor $e^{i\theta}$, lo que contradice que sea trascendental.

■

Teorema 2.11 (Paradoja de *Sierpinski-Mazurkiewicz*) Existen conjuntos G_2-paradójicos en el plano $\mathbb{R}^2$.

Demostración.

Usando las isometrías del teorema anterior podemos demostrar la paradoja de Sierpiński-Mazurkiewicz directamente construyendo un conjunto paradójico del plano. Podemos tomar E como el conjunto de los números complejos de la forma $a_0 + a_1\beta + \cdots + a_n\beta^n$ donde n es un entero no negativo. Definiremos entonces $A = \sigma(E)$, esto es, el conjunto de aquellos números complejos tales que $a_0 = 0$ y B el resto de ellos, $B = \tau(E)$.

$\blacksquare$

Los teoremas anteriores se pueden generalizar en los siguientes resultados que añadimos a continuación.

Proposición 2.12 Supongamos que un grupo G que actua sobre X contiene σ y τ de forma que para algún $x \in X$, para cualesquiera dos palabras con letras σ y τ, empezando por σ y τ respectivamente, se tiene que son distintas cuando se aplican a x. Entonces existe un subconjunto no vacio de X que es paradójico respecto a G.

Demostración.

Sea S un subsemigrupo de G generado por σ y τ y sea E la órbita de x por S. Tendremos que $E \supseteq \tau(E), \sigma(E)$. La hipótesis sobre x nos dice que para cualesquiera dos palabras ω_1, $\omega_2 \in S$, formadas por las letras σ y τ, empezando cada una por σ y τ, respectivamente, tenemos que $\omega_1(x) \neq \omega_2(x)$. Por tanto tenemos que $\tau(E) \cap \sigma(E) = \emptyset$, obteniendo de esta forma dos subconjuntos disjuntos de E.

Por otro lado tenemos que, como σ , $\tau \in G$, σ^{-1} , $\tau^{-1} \in G$ al ser G un grupo, por lo que $\tau^{-1}(\tau(E)) = E = \sigma^{-1}(\sigma(E))$, demostrando que E es un subconjunto no vacio de S que es paradójico respecto de G.

$\blacksquare$

Análogamente a la Proposición 2.12, vamos a ver ahora que una descomposición paradójica de un grupo se puede trasladar fácilmente a la de un conjunto en el que el grupo actúa sin puntos fijos no triviales (lo que significa que ningún elemento distinto de la identidad fija un punto del conjunto).

Teorema 2.13 Si un grupo G es paradójico y actúa en X sin puntos triviales fijos, entonces X es paradójico con respecto a G. Por lo tanto X es paradójico con respecto a F para cualquier F un grupo libre de rango 2 que actúa en X sin puntos fijos no triviales.

Demostración.

Supongamos $A_i, B_j \subseteq G$ y g_1, h_j tales que G es paradójico. Sea M un conjunto que contiene exactamente un elemento de cada orbita de G en X. Por tanto $\{g(M) : g \in G\}$ es una partición de X disjunta dos a dos. Esta partición nos sirve como medio para transformar cualquier subconjunto $S \in G$ en un subconjunto de X, $S^* = \{g(M) : g \in S\}$.

De esta forma, podemos decir por ejemplo que $G = \bigcup g_i A_i$ se convierte en $X = \bigcup g_i(S^*)$ de forma que siguen siendo disjuntos. Del mismo modo ocurrirá con los B_j. Por tanto los conjuntos A_i^*,B_j^* forman una partición de X, de forma que tendremos que X será paradójico con respecto a G. Entonces, se tendrá como consecuencia del Teorema 2.7 que X es paradójico respecto a F con F un grupo libre de rango 2. Observemos que el número de conjuntos empleados para X es el mismo número que de A_i, B_j dados para G.

■

Como complemento, comentaremos algunos conceptos ya definidos en el caso de que se tenga numerabilidad y, además, nombraremos algunas propiedades de los mismos. La propiedad de numerabilidad lo que posibilita es la relación de dichos conceptos con la teoría de la medida, aunque no entraremos en ellos con profundidad.

Definición 2.14 Diremos que E es G-numerablemente paradójico si existen subconjuntos numerables disjuntos de E, $\{A_j\}, \{B_j\}$ con $j = 1, 2, \ldots$ y aplicaciones $\{g_j\}, \{h_j\} \in G$ con $j = 1, 2, \ldots$ tenemos que:

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} g_j A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} h_j B_j$$

Teorema 2.15 $\mathcal{S}^1$ es numerablemente $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$-paradójico. Equivalentemente, si G es el grupo de traslaciones módulo 1 actuando en $[0, 1)$, entonces $[0, 1)$ es G-numerablemente paradójico.

Como consecuencia de este resultado de existencia de conjuntos paradójicos podemos deducir el siguiente teorema sobre existencia de medidas.

Teorema 2.16 Se tienen los siguientes resultados:

1. No puede existir una medida numerablemente aditiva, invariante por rotaciones, dedinida sobre todos los conjuntos de $\mathcal{S}^1$ que asigme medida 1 a $\mathcal{S}^1$
2. Existe en $[0, 1]$ un conjunto que no es medible Lebesgue.
3. No puede existir una medida numerablemente aditiva que sea invariante por traslaciones definida sobre todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que normalice el cubo unidad.

2.2. Paradoja de *Hausdorff*: matrices de *Sâto*

Construiremos un subgrupo libre no abeliano de G_3, las isometrías en $\mathbb{R}^3$, y veremos las paradojas que esta causa.

Definición 2.17 Sea G un grupo, diremos que un subconjunto $S \in G$ es independiente si S es un conjunto libre que genera H subgrupo contenido en G. H será por tanto un grupo libre de rango $|S|$.

Definiremos ahora las siguientes rotaciones en $\mathcal{S}^2$, la esfera unidad en $\mathbb{R}^3$:

$$\sigma = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad \tau = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Denominadas rotaciones de *Sâto*, debido a *Ken-iti Sâto*.

Teorema 2.18 Las dos rotaciones de *Sâto* son independientes.

Demostración.

Debemos demostrar que no existe ninguna palabra no trivial de términos $\sigma^{\pm 1}$, $\tau^{\pm 1}$ que sean iguales a la identidad. Lo haremos por reducción al absurdo.

Supongamos ω una palabra igual a la identidad formada por términos $\sigma^{\pm 1}$, $\tau^{\pm 1}$. Si conjugamos por una potencia de σ lo suficientemente grande y, si es necesario, invirtiendo, podemos asumir que ω tiene como termino a la derecha σ. Definiremos ahora estas cuatro matrices:

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}, M_\tau = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$M_\sigma^- = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}, M_\tau^- = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Será más simple trabajar con estas matrices, ya que la única diferencia con las de las rotaciones es que las de las rotaciones estan divididas entre 7. Vamos a analizar la primera columna de ω, es decir, la primera columna de $M_\sigma^{k_n} M_\tau^{k_{n-1}} \ldots M_\tau^{k_2} M_\sigma^{k_1} M_\sigma$, donde $k_1 \leq 0$, $k_n \in \mathbb{Z}$, y k_n son no nulos para los demás n. Una potencia negativa será una potencia de $M^{-}_{\sigma,\tau}$. Definiremos ahora el siguiente conjunto de vectores:

$$
\begin{aligned}
V_\sigma &= \{(3,1,2),(5,4,1),(6,2,4)\}\\
V_\sigma^- &= \{(3,2,6),(5,1,3),(6,4,5)\}\\
V_\tau &= \{(3,5,1),(5,6,4),(6,3,2)\}\\
V_\tau^- &= \{(1,5,4),(2,3,1),(4,2,6)\}
\end{aligned}
$$

Para empezar, tenemos que $M_\sigma(1,0,0) = (6,2,-3) = (6,2,4)(mod\ 7) \in V_\sigma$. Se tendrán las siguientes propiedades, que nos muestran que el conjunto de los vectores es invariante para las matrices:

1. Para cualquier $\nu \in V_\sigma \cup V_\tau \cup V_\tau^-, \sigma\nu \in V_\sigma$.
2. Para cualquier $\nu \in V_\sigma^- \cup V_\tau \cup V_\tau^-, \sigma^-\nu \in V_\sigma^-$.
3. Para cualquier $\nu \in V_\tau \cup V_\sigma \cup V_\sigma^-, \tau\nu \in V_\tau$.
4. Para cualquier $\nu \in V_\tau^- \cup V_\sigma \cup V_\sigma^-, \tau^-\nu \in V_\tau^-$.

Trabajaremos ahora con la palabra $(6,2,4)$. Por (1.) tenemos que, como $(6,2,4) \in V_\sigma$, $M_\sigma^{k_1}(6,2,4) \in V_\sigma$. Ahora bien, dependiendo del signo de k_2, tenemos que por (3.) o (4.) que, al multiplicar el vector por $M_\tau^{k_2}$, este pertenecerá a $V_\tau \cup V_\tau^-$. De nuevo, dependiendo del signo de k_3, tenemos que por (1.) o (2.) que, al multiplicar el vector por $M_\tau^{k_3}$, este pertenecerá a $V_\sigma \cup V_\sigma^-$. Siguiendo con este proceso tenemos que el resultado será uno de los vectores pertenecientes a los distintos conjuntos V's. Por lo que este no será nunca igual a $(1,0,0)$.

■

Cada elemento del grupo libre generado por σ y τ al actuar sobre $\mathbb{R}^3$ deja una recta que pasa por el origen invariante y por ello no vamos a poder aplicar el teorema que demostramos al final de la sección anterior. Vamos a llamar F al grupo libre generado por las rotaciones de Sato. F es un conjunto numerable. Cada elemento del grupo distinto de la identidad fija dos puntos sobre $\mathcal{S}^2$. Sea D la unión de todos los puntos de $\mathcal{S}^2$ que son fijados por algún elemento de F. Es claro que D es un conjunto numerable. Ahora, si $P \in \mathcal{S}^2 \setminus D$ y $g \in F$ entonces $g(P) \in \mathcal{S}^2 \setminus D$ puesto que si h fuese un elemento del grupo F que fijase $g(P)$ entonces $h(g(P)) = g(P)$ y de aquí que $P = g^{-1}hg(P)$, una contradicción.

De este modo hemos probado que F actúa sobre $\mathcal{S}^2 \setminus D$ y los elementos del grupo F distintos de la identidad no tiene puntos puntos fijos. Ahora sí podemos aplicar el teorema.

Teorema 2.19 *Existe $D \subset \mathcal{S}^2$ numerable de modo que $\mathcal{S}^2 \setminus D$ es $SO_3(\mathbb{R})$ paradójico.*

Demostración. Esta demostración es inmediata. ■

Ahora vamos a ver la relación de ser paradójico con la existencia de medidas invariantes sobre grupos.

La siguiente demostracion es una de las tantas construcciones de un grupo libre no abeliano de rotaciones en $\mathbb{R}^3$. Esta la dió *Hausdorff* en 1914. Demostró que si ϕ y ρ son dos rotaciones de 180º y 120º respectivamente, sobre los ejes que contienen al origen, y si $\cos 2\theta$ es un número trascendente donde θ es el angulo entre los ejes, entonces ϕ y ρ es un conjunto libre de generadores de $\mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}^3$.

Definición 2.20 Sea G un conjunto que actúa sobre X. Diremos que el conjunto $E \subseteq X$ es G-despreciable si para toda medida finitamente aditiva $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$, G-invariante tal que $\mu(E) < \infty$, se tiene que $\mu(E) = 0$.

Proposición 2.21 Si E es un conjunto paradójico respecto a G, se tiene que E es G-despreciable.

Demostración.

Supongamos que μ es una medida finitamente aditiva definida en $\mathcal{P}(X)$ que se mantiene invariante por G tal que $\mu(E) < \infty$. El hecho de que E sea paradójico respecto a G nos dice que existen $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$ disjuntos y aplicaciones $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_n \in G$ tales que:

$$E = \bigcup_{i=1}^m g_i(A_i), \quad E = \bigcup_{j=1}^n h_j(B_j)$$

Tendremos por tanto que

$$\begin{aligned} \mu(E) &\geq \sum \mu(A_i) + \sum \mu(B_j) = \sum \mu(g_i A_i) + \sum \mu(h_j B_j) \\ &\geq \mu(\bigcup g_i A_i) + \mu(\bigcup h_j B_j) = \mu(E) + \mu(E) = 2\mu(E) \end{aligned}$$

Como $\mu(E) < \infty$, esto implicará que $\mu(E) = 0$

■

El siguiente teorema tiene como consecuencia que $\mathcal{S}^2$ es $SO_3(\mathbb{R})$-despreciable probando que al menos hay un conjunto numerable despreciable respecto de una medida finita en $\mathcal{P}(\mathcal{S}^2)$.

Teorema 2.22 La esfera $\mathcal{S}^2$ es $SO_3(\mathbb{R})$-despreciable. Por tanto, no hay una medida finitamente aditiva que sea invariante mediante rotaciones en $\mathcal{P}(\mathcal{S}^2)$. Además, para cualquier $n \geq 3$ no existe ninguna medida finitamente aditiva que sea invariante mediante isometrías en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ que asigne medida 1 al cubo unidad.

Demostración.

Supongamos μ una medida finitamente aditiva, invariante mediante $SO_3(\mathbb{R})$ en $\mathcal{P}(\mathbb{S}^2)$ con $\mu(\mathcal{S}^2) < \infty$. Si D es el conjunto numerable de la paradoja de *Hausdorff*, por la Proposición 2.21, tendremos que $\mu(\mathcal{S}^2 \backslash D) = 0$. Por tanto tendremos que demostrar que $\mu(D) = 0$.

Sea ℓ una línea que pasa por el origen disjunta con D. Para cada punto $P \in D$, sea $A(P)$ el conjunto de ángulos θ tales que la rotación de P alrededor de ℓ de θ^j radianes, de forma que j es un número entero positivo tal que se envia P a otro punto de D. De la numerabilidad de D y del conjunto de los posibles j's, tenemos que $A(P)$ es numerable y por tanto podemos tomar $A = \bigcup\{A(P) : P \in D\}$, siendo A nuevamente numerable.

Si tomamos una rotación ρ de eje ℓ cuyo ángulo no pertenece A, ρ tendrá la propiedad de que, para cualquier j, $\rho^j(D)$ es disjunto con D. De aquí podemos decir que la unión $D \cup \rho(D) \cup \rho^2(D) \cup \ldots$ es una unión disjunta.

Supongamos ahora que $\mu(D) > 0$. Podremos escoger entonces un entero k de forma que $k\mu(D) > 1$. Esto significa que $\mu(D) + \mu(\rho(D)) + \mu(\rho^2(D)) + \cdots + \mu(\rho^k(D)) > 1 = \mu(\mathbb{S}^2)$, con lo que llegamos a contradicción, por lo que se tiene que $\mu(D) = 0$. Esto prueba que $\mathcal{S}^2$ es despreciable.

Para demostrar la afirmación sobre $\mathbb{R}^3$, consideraremos $n = 3$, ya que una medida en una mayor dimensión induce una medida en $\mathbb{R}^3$. Ahora, si μ es una medida finitamente aditiva invariante para las isometrías de $\mathbb{R}^3$ que asigna medida 1 al cubo unidad, se tiene que deberá ser nula en aquellos conjuntos que sean unitarios. Esto es debido a que, dos conjuntos unitarios cualesquiera serán congruentes uno con el otro y por tanto recibirán la misma medida. Por tanto, si la medida de un conjunto unitario es positiva se tiene que la medida del cubo unidad deberá ser infinita. Además, como es invariante por traslaciones, esto implica que cualquier cubo tendrá medida finita no nula, y de aquí obtenemos que $0 < \mu(B) < \infty$, donde B es la bola unidad.

Definiremos ahora ν en $\mathcal{P}(\mathcal{S}^2)$ como $\nu(A) = \mu\{\alpha P : P \in A, 0 < \alpha \leq 1\}$. Debido a que $\mu(\{0\}) = 0$, $\nu(\mathcal{S}^2) = \mu(B)$. Además, ν es finitamente aditiva y $SO_3(\mathbb{R})$-invariante debido a que μ lo es. Llegamos de esta forma a una contradicción con que la esfera sea $SO_3(\mathbb{R})$-despreciable. $\blacksquare$

2.3. La paradója de *Banach-Tarski*.

En este punto, redefiniremos la congruencia por partes para el ámbito de los poligonos en el plano $\mathbb{R}^2$, ya que será necesaria posteriormente.

Definición 2.23 Diremos que dos polígonos F y H en el plano son congruentes por partes si F puede ser descompuesto en un número finito de polígonos y pueden ser reordenadas usando isometrías para formar H. Es decir, se cumple que:

- Los polígonos $F_1, F_2, \ldots, F_k$ y $H_1, H_2, \ldots, H_k$, si se intersecan, lo hacen en los vertices o los lados.
- Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ se tiene que $F_i \sim H_i$.(Es decir, son congruentes)

Definición 2.24 Sean dos conjuntos F y H. Diremos que F y H son equidescomponibles si existen conjuntos $F_1, F_2, \ldots, F_k$ y $H_1, H_2, \ldots, H_k$ de forma que:

$$F = \bigcup_{i=1}^{k} F_i \ , \ H = \bigcup_{i=1}^{k} H_i$$

Se dirá que dos poligonos son G- equidescomponibles si existen $g_1, \ldots, g_k \in G$ de forma que para cada i se tiene que $g_i(F_i) = H_i$. Se denotará como $F \sim_G H$. Diremos que $F \preccurlyeq H$ si F es G-equidescomponible con un subconjunto de H.

Teorema 2.25 La relación $\sim_G$ es una relación de equivalencia.

Demostración.

Tendremos que demostrar que se cumplen las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva:

- $A \sim_G A$: Esto se tiene debido a que, al ser G un grupo, $I \in G$ y por tanto, $A = \bigcup_j I(A_i)$, donde los A_j forman una partición de A.
- $A \sim_G B$, entonces $B \sim_G A$: Al ser A equidescomponible con B, se tiene que existe una partición $A_1, \ldots, A_n$ de forma que $B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j = \bigcup_{j=1}^{n} g_j(A_j)$. Por tanto, al ser G un grupo, tenemos que $g_j^{-1} \in G$, con lo que $A_j = g_j^{-1}(B_j)$. Por tanto, podemos ver fácilmente que $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{n} g_j^{-1}(B_j)$. Tenemos entonces que $B \sim_G A$.

- $A \sim_G B$ y $B \sim_G C$, entonces $A \sim_G C$:Al ser A equidescomponible con B, se tiene que existe una partición $A_1, \ldots, A_n$ de forma que $B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j = \bigcup_{j=1}^{n} g_j(A_j)$. De la misma forma, al ser B equidescomponible con C, se tiene que exite una partición $B_1, \ldots, B_n$ de forma que $C = \bigcup_{j=1}^{n} C_j = \bigcup_{j=1}^{n} h_j(B_j)$. Por tanto, al ser G un grupo, se tiene que $h_j \circ g_j \in G$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Podemos ver facilmente que $C = \bigcup_{j=1}^{n} C_j = \bigcup_{j=1}^{n} h_j(B_j) = \bigcup_{j=1}^{n} h_j(g_j(A_j))$. Tendremos entonces que $A \sim_G C$.

Se tiene entonces que la relación $\sim_G$ es, efectivamente, de equivalencia.

■

Proposición 2.26 Supongamos que G actúa en X y sean E, E' de X subconjuntos G-equidescomponible. Se tiene que si E es paradójico con respecto a G, E' también lo será.

Demostración

Supongamos que E es paradójico respecto a G. Existirán entonces m, n enteros positivos tales que para subconjuntos disjuntos de E, $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$ y aplicaciones $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_n \in G$ tenemos que:

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} g_i(A_i), \quad E = \bigcup_{j=1}^{n} h_j(B_j)$$

Por otro lado, como E y E' son congruentes por partes, existiran una partición $\{C_k : 1 \leq k \leq l\}$ de E y unas isometrías $\{f_k : 1 \leq k \leq l\}$ tales que $\{f_k(C_k) : 1 \leq k \leq l\}$ es una partición de E'. Si definimos los conjuntos

$$\{D_{ik} = A_i \cap C_k : 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq l\},$$

$$\{D'_{jk} = B_j \cap C_k : 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq l\},$$

se puede ver fácilmente que D_{ik} y D'_{jk} serán ambos subconjuntos disjuntos de E debido a que los elementos A_i, B_j y C_k son todos disjuntos dos a dos. Estos subconjuntos cumplirán que:

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} g_i(\bigcup_{k=1}^{l} D_{ik}), \quad E = \bigcup_{j=1}^{n} h_j(\bigcup_{k=1}^{l} D'_{jk})$$

Al aplicarle a cada parte la correspondiente función f_k obtendremos particiónes de E' tales que:

$$E' = \bigcup_{k=1}^{l}(f_k(\bigcup_{i=1}^{m} g_i(D_{ik})) \quad E' = \bigcup_{k=1}^{l}(f_k(\bigcup_{j=1}^{n} h_j(D'_{jk}))$$

Con lo que hemos obtenido dos subconjuntos de E' y funciones $\{f_k \circ g_i : 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq l\}$ y $\{f_k \circ h_j : 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq l\}$ tal que podemos afirmar que E' es paradójico respecto a G.

No es inmediato ver que existe cierta relación entre la congruencia por partes en los polígonos y la equidescomposicion. En esencia, difieren principalmentente en que no hay ninguna restricción en los subconjuntos a la hora de decir que $A \sim B$, sin embargo no se garantiza que A y B deban tener el mismo área (o misma medida de Lebesgue) y, por tanto, que sean equidescomponibles.

Teorema 2.27 (Teorema de *Banach-Shröder-Bernstein*) Supongamos que G actúa en X y sean A, $B \subseteq X$. Si $A \preccurlyeq B$ y $B \preccurlyeq A$, entonces $A \sim_G B$. Por tanto $\preccurlyeq$ es una ordenación parcial de las clases de equivalencia en $\mathcal{P}(X)$ de la relación $\sim_G$.

Demostración.

Se puede comprobar facilmente las siguientes propiedades de la relación $\sim_G$:

- Si $A \sim B$, entonces existe una biyección $g : A \longrightarrow B$ de forma que para cualquier C subconjunto de A se tiene que $C \sim g(C)$.
- Si $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$ y además se tiene que $A_1 \sim B_1$ y $A_2 \sim B_2$, se tiene que $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.

El resto de la demostración consistirá en demostrar que $\sim_G$ es una relación de equivalencia que cumple las propiedades anteriores.

Sean dos conjuntos A, B y $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$. Sean $f : A \longrightarrow B_1$, $g : A_1 \longrightarrow B$, las biyecciones definidas en (a.). Sea $C_0 = A \backslash A_1$ y, por inducción, definimos C_{n+1} como $g^{-1}f(C_n)$. Sea $C = \cup C_n$. Podemos entonces ver facilmente que $g(A\backslash C) = B\backslash f(C)$, y por tanto la elección de g implica que $A\backslash C \sim_G B\backslash f(C)$. Además, por la elección de $(A\backslash C) \cup C \sim (B\backslash f(C)) \cup f(C)$, o lo que es lo mismo, que $A \sim_G B$.

$\blacksquare$

Este teorema simplifica mucho la comprobación de la equidescomponibilidad. Supongamos que E es un subconjunto de X paradójico respecto a G y sean A y B subconjuntos disjuntos de E tales que $A \sim_G E \sim_G B$. Entonces se tiene que $E \sim_G B \subseteq E\backslash A \subseteq E$, son lo que por el teorema anterior se tiene que $E\backslash A \sim E$. Esto demuestra el siguiente resultado.

Corolario 2.28 Un subconjunto E de X es paradójico respecto a G si y solo si existen conjuntos disjuntos A, $B \subseteq E$ tales que $A \cup B = E$ y $A \sim_G E \sim_G B$.

Teorema 2.29 Si los polígonos P_1 y P_2 son congruentes, entonces se tiene que son equidescomponibles.

Demostración.

Sean Q_1 y Q_2 la unión de todos los polígonos contenidos en P_1 y P_2 necesarios para la hipótesis de la congruencia. Se tiene que $Q_1 \sim Q_2$ y, para completar la demostración, veremos que $Q_1 \sim P_1$, $Q_2 \sim P_2$, es decir, que podemos obviar los segmentos de la frontera de los polígonos.

Para ello emplearemos la siguiente afirmación: Si A es un conjunto acotado del plano con interior no vacío y T es un conjunto disjunto de A, formado por un conjunto numerable de segmentos, entonces $A \sim A \cup T$.

Para probar esto, sea D un disco contenido en A de radio r. Subdividiendo los segmentos de T, podemos suponer que cada uno tiene longitud menor que r. Sea θ una rotación de D sobre su centro y sea R uno de los radios de D (excluyendo el centro), y sea $\overline{R} = R \cup \theta(R) \cup \theta^2(R) \ldots$.

Si tomamos $s \in T$, entonces tenemos que $D \cup s \preccurlyeq D$. Esto es debido a que $\theta(\overline{R})$ es disjunto de R y $D \backslash \overline{R}$, por tanto $D \cup s = (D \backslash \overline{R}) \cup \overline{R} \cup s \sim (D \backslash \overline{R}) \cup \theta(\overline{R}) \cup \sigma(s) \subset D$, donde σ es una isometría que envía s a un subconjunto de R. Debido a que $D \preccurlyeq D \cup s$, el Teorema 2.27 nos dice que $D \sim D \cup s$.

Como hemos escogido s arbitratio, podemos decir que $S \sim D \cup T$. Añadiendo $A \backslash D$ a ambos lados de la congruencia y aplicando la propiedad (b.) utilizada en el Teorema 2.27, tenemos que $A \sim A \cup T$, como queriamos ver. Concluimos de esta forma la demostración tomando $A = Q_1$ y $T = P_1 \backslash Q_1$.

■

Teorema 2.30 Si D es un subconjunto numerable de $\mathcal{S}^2$, entonces $\mathcal{S}^2$ y $\mathcal{S}^2 \backslash D$ son equidescomponibles usando dos partes.

Demostración.

Buscamos una rotación ρ aplicada en la esfera tales que los conjuntos $D, \rho(D), \rho^2(D), \ldots$ son disjuntos dos a dos. Esto nos bastará, dado que se tendrá entonces que $\mathcal{S}^2 = D^* \cup (\mathcal{S}^2 \backslash D^*) \sim \rho(D^*) \cup (\mathcal{S}^2 \backslash D)$, donde $D^* = \bigcup \{\rho^n(D) : n = 0, 1, 2, \ldots\}$. La construccion de ρ será similar a la empleada en el Teorema 2.22 . Sea ℓ una linea que pasa por el origen sin tocar el conjunto D. Sea además A el conjunto de todos los ángulos θ de forma que para algún $n > 0$ y algún

$P \in D$, se tiene que $\rho(P) \in D$ donde ρ es la rotación de ángulo $n\theta$ que tiene como eje ℓ. Entonces A es un conjunto numerable, de forma que podemos escoger un ángulo no perteneciente a él. Sea entonces ρ la correspondiente rotación de eje ℓ de dicho ángulo. Entonces se tiene que $\rho^n(D) \cap D = \emptyset$ para todo $n > 0$, de donde podemos decir que para cualquier $0 \leq m < n$ se tiene que $\rho^m(D) \cap \rho^n(D) = \emptyset$. Tendremos entonces que ρ cumple lo que buscabamos.

$\blacksquare$

Corolario 2.31 (Paradoja de *Banach-Tarski*) La esfera unidad $\mathcal{S}^2$ es paradójica respecto el grupo de las isometrías con orientación positiva, SO_3, así como cualquier esfera centrada en el origen. Es más, cualquier esfera sólida en $\mathbb{R}^3$ es paradójica respecto al grupo de las isometrías en $\mathbb{R}^3$, G_3, y $\mathbb{R}^3$ es paradójico.

Demostración.

La paradoja de *Hausdorff* nos dice que $\mathcal{S}^2 \backslash D$ es paradójico respecto a SO_3 para algún conjunto numerable D. Combinando esto con la proposición 2.26 tenemos que $\mathcal{S}^2$ es paradójico respecto a SO_3. Dado que ninguno de los resultados previos depende del tamaño de la esfera, tenemos que cualquier esfera admite una descomposición paradójica.

Nos bastará entonces considerar las bolas centradas en el origen, ya que mediante G_3 podremos trasladarlas a las esferas centradas en un punto cualquiera de $\mathbb{R}^3$. Para simplificar, consideraremos la bola unidad B, pero la misma prueba servirá para una bola de distinto tamaño. La descomposición de $\mathcal{S}^2$ nos ofrece una descomposición de $B \backslash \{0\}$ si usamos la correspondecia radial, que a un punto cualquiera p lo envía al conjunto $\{\alpha p : 0 < \alpha \leq 1\}$.

Será suficiente probar que B es equidescomponible respecto las isometrías en $\mathbb{R}^3$ con $B \backslash \{0\}$, es decir, que podemos omitir un punto sin perdida de generalidad. Sea $P = (0, 0, \frac{1}{2})$ y sea ρ una rotación alrededor de la linea horizontal al plano XZ que contiene a P. Entonces tendremos podemos usar el conjunto $D = \{\rho^n(0) : n \geq 0\}$ para omitir 0, de forma que $\rho(D) = D \backslash \{0\}$, con lo que $B \sim B \backslash \{0\}$.

Por tanto, podremos usar la correspondencia radial de $\mathcal{S}^2$ con $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, de donde obtenemos una descomposición paradójica de $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ usando las rotaciones. Por tanto, tendremos que, de igual manera que para las bolas, $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \sim \mathbb{R}^3$ respecto el grupo de las isometrías.

$\blacksquare$

Teorema 2.32 (Paradoja de *Banach-Tarski* fuerte) Si A y B son dos subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^3$ de interior no vacio, entonces A y B son equidescomponibles.

Demostración.

Será suficiente con demostrar que $A \preccurlyeq B$ para posteriormente, utilizando el mismo argumento, probar que $B \preccurlyeq A$, con lo que, por el Teorema 2.27, se tendría que $A \sim B$. Sean las bolas K y L tales que $A \subseteq K$ y $L \subseteq B$. Tomaremos ahora n suficientemente grande como para que podamos cubrir K utilizando n copias de L (pudiendo solaparse dichas copias). Entonces, si S es un conjunto de n copias disjuntas de L, mediante la paradoja de *Banach-Tarski*, podremos duplicar L y, mediante traslaciones, obtenemos que $L \preccurlyeq S$. Por tanto $A \subseteq K \preccurlyeq S \preccurlyeq L \subseteq B$, por lo que $A \preccurlyeq B$. Obtendremos de forma análoga que $B \preccurlyeq A$ y, por tanto, $A \sim B$.

$\blacksquare$

Capítulo 3

La paradoja de *Banach-Tarski* en dimensiones 1 y 2: grupos amenables.

El objetivo del capítulo es demostrar que no se puede cumplir paradoja de Banach-Tarski en dimensiones 1 y 2. Como veremos esto está relacionado con que los grupos de isometrías G_1 y G_2 son mucho más simples en cierto sentido que G_3.

En la primera sección tenemos que aprender a integrar funciones acotadas respecto de una medida finitamente aditiva definida sobre todos los subconjuntos de un conjunto. Es una herramienta que se utiliza en la segunda sección.

En la segunda sección estudiamos los llamados grupos amenables: aquellos en los que existe una medida finitamente aditiva, normalizada e invariante por la izquierda respecto del grupo. Se prueban ciertas propiedades de este concepto y que ciertos grupos son amenables. Los grupos amenables no pueden dar lugar a comportamientos paradójicos.

En la tercera sección probamos que G_1 y G_2, los grupos de isometrías en dimensiones 1 y 2, son amenables, lo que imposibilitará la existencia de la paradoja de Banach-Tarski en estas dimensiones.

3.1. Medida e integración respecto de medidas finitamente aditivas

En esta sección vamos a introducir la teoría necesaria para poder hablar de la integral de una función acotada $f : X \to \mathbb{R}$ respecto de una medida finitamente aditiva μ definida sobre todos los subconjuntos de X y normalizada $\mu(X) = 1$.

Sea pues X un conjunto cualquiera no vacío.

Definición 3.1 Un anillo $\mathcal{R}$ es una clase de subconjuntos de X tal que $\emptyset \in \mathcal{R}$ y para cualesquiera $A, B \in \mathcal{R}$, $A \cup B$ y $A \setminus B$ también están en $\mathcal{R}$.

Ejemplo. El conjunto formado por todas las posibles uniones de intervalos disjuntos de $\mathbb{R}$ es un anillo.

Definición 3.2 Un álgebra $\mathcal{A}$ es un anillo en el que $X \in \mathcal{A}$.

Definición 3.3 Un σ-anillo $\mathcal{S}$ es un anillo para el que la unión numerable de elementos del anillo vuelve a pertenecer al anillo.

Definición 3.4 Una σ-álgebra es un álgebra para la cual la unión numerable de elementos del algebra vuelve a pertenecer al álgebra.

Ejemplo. La familia de subconjuntos acotados del plano es un anillo, pero no un álgebra.

Definición 3.5 Una medida finitamente aditiva es una función

$$\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$$

de modo que $\mathcal{R}$ es un anillo, $\mu(\emptyset) = 0$ y para cualquier colección finita $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de elementos del anillo disjuntos dos a dos:

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$$

Comentario 1 A partir de aquí emplearemos únicamente medidas finitamente aditivas, de forma que cuando digamos medida a secas nos referimos a medida finitamente aditiva.

Definición 3.6 Un espacio de medida $(X, \mathcal{R}, \mu)$ es una terna donde X es un conjunto, $\mathcal{R}$ un anillo de subconjuntos de X y μ una medida finitamente aditiva sobre $\mathcal{R}$.

Comentario 2 Un subconjunto de X es medible si pertenece a $\mathcal{R}$.

Definición 3.7 $B(X)$ es el conjunto de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ acotadas. Diremos que $f \in B(X)$ es medible si $f^{-1}(I)$ es medible para cualquier intervalo abierto I de $\mathbb{R}$.

Nuestro espacio de medida natural será del tipo $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$, donde $\mathcal{P}(X)$ es la colección de todos los subconjuntos de X, con lo que los problemas de medibilidad no serán importantes: toda función de $B(X)$ es medible. También vamos a suponer que μ está normalizada: $\mu(X) = 1$.

Definición 3.8 Si $A \subset X$, χ_A es la función caracteristica o indicadora del conjunto $A \subset X$.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in A \\ 0, & si\ x \notin A \end{cases}$$

Definición 3.9 Una función f es simple si se puede escribir así

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}(x)$$

donde los a_j son números reales y (A_j) es una partición de X (disjuntos dos a dos y la unión es X).

Definición 3.10 La integral de una función simple f respecto de μ viene dada por

$$\int f(x)d\mu(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j)$$

Comentario 3 Se puede probar que el valor de la integral no depende de la escritura de f que se haga como función simple.

Comentario 4 Toda función simple está evidentemente en $B(X)$.

Teorema 3.11 Sean f, g funciones simples y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

1. $\alpha f + \beta g$ es simple y además
$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))d\mu(x) = \alpha \int f(x)d\mu(x) + \beta \int g(x)d\mu(x)$$
.

2. $|f|$ también es simple y
$$\left| \int f(x)d\mu(x) \right| \leq \int |f(x)|d\mu(x).$$

3. Si $f(x) \geq 0$ entonces $\displaystyle\int f(x)d\mu \geq 0$ y si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$ entonces $\int f(x)d\mu(x) \leq \int g(x)d\mu(x)$.

Demostración.

La prueba es sencilla. No la escribire debido a que puede verse en SFIL. ■

Definición 3.12 Dada dos funciones simples f, g se define

$$\|f - g\|_1 = \int |f(x) - g(x)|d\mu(x).$$

Definición 3.13 Una sucesión de funciones simples (f_n) se dice de Cauchy en $\|\cdot\|_1$ si $\|f_n - f_m\|_1 \to 0$ cuando $m, n \to +\infty$.

Definición 3.14 Una sucesión de funciones $(f_n) \subset B(X)$ se dice convergente en medida a $f \in B(X)$ si para cada $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0$$

Definición 3.15 Una sucesión $(f_n) \subset B(X)$ está uniformemente acotada si existe $M > 0$ de modo que $-M \leq f_n(x) \leq M$ para todo $x \in X$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.16 Sea $f \in B(X)$. Existe una sucesión (f_n) de funciones simples y uniformemente acotadas tales que (f_n) converge a f en medida y además (f_n) es una sucesión de Cauchy en $\|\cdot\|_1$.

Demostración.

Sea $M > 0$ de modo que $-M < f(x) < M$ para todo $x \in X$. Para cada número natural n y para cada $k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ consideramos los conjuntos

$$X_{n,k} = f^{-1}\left[\frac{2M}{2^n}k - M, \frac{2M}{2^n}(k+1) - M\right)$$

y consideramos los coeficientes

$$\alpha_{n,k} = \frac{2M}{2^n}k - M.$$

Consideramos la colección de funciones simples

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \alpha_{n,k}\chi_{X_{n,k}}(x).$$

Es claro que $|f_n(x)| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in X$. Si tomamos dos naturales $n < m$ entonces cada intervalo asociado a la función f_m del tipo $\left[\frac{2M}{2^m}k - M, \frac{2M}{2^m}(k+1) - M\right)$ está incluido en exactamente un intervalo de la forma $\left[\frac{2M}{2^n}k - M, \frac{2M}{2^n}(k+1) - M\right)$ y por lo tanto $X_{m,k}$ está incluido en uno de los $X_{n,l}$. Cada uno de los conjuntos $X_{n,l}$ queda dividido en exactamente 2^{m-n} conjuntos de la forma $X_{m,k}$. Más aún, si k, l son índices para los que se producen dicha inclusión claramente ocurre lo siguiente:

$$|\alpha_{m,k} - \alpha_{n,l}| \leq \frac{2M}{2^n}.$$

Esto prueba que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{2M}{2^n}$$

para todo $x \in X$ y por lo tanto

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int |f_n(x) - f_m(x)| d\mu(x) \leq \frac{2M}{2^n}$$

(recordemos que asumimos que $\mu(X) = 1$).

Esto prueba que (f_n) es una sucesión de Cauchy en $\|\cdot\|_1$. Queda por demostrar la convergencia en medida de (f_n) a f.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces si $n > \log_2(2M/\varepsilon)$ tenemos que $\varepsilon > \dfrac{2M}{2^n}$ y

$$\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = \emptyset$$

luego $\mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0$. Esto prueba la convergencia en medida y termina la demostración del teorema. ■

Teorema 3.17 Sean (f_n) y (g_n) dos sucesiones de funciones simples y uniformemente acotadas tales que las dos son sucesiones de Cauchy en $\|\cdot\|_1$ y ambas convergen en medida a la misma función $f \in B(X)$. Entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n(x) d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty} \int g_n(x) d\mu(x)$$

Demostración.

Sea $M > 0$ tal que $-M \leq f(x) \leq M$, $-M \leq f_n(x) \leq M$ y $-M \leq g_n(x) \leq M$ para todo $x \in X$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

De la acotación

$$\left| \int f_n(x) d\mu(x) - \int f_m(x) d\mu(x) \right| \leq \int |f_n(x) - f_m(x)| d\mu(x)$$

se deduce inmediatamente que como (f_n) es de Cauchy en $\|\cdot\|_1$ la sucesión $\left(\int f_n(x) d\mu(x) \right)$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por ello es convergente. Lo mismo ocurre con la sucesión $\left(\int g_n(x) d\mu(x) \right)$.

Pongamos

$$L = \lim_{n\to+\infty} \int f_n(x) d\mu(x) - \lim_{n\to+\infty} \int g_n(x) d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty} \int (f_n(x) - g_n(x)) d\mu(x).$$

Supongamos, por reducción al absurdo, que $L \neq 0$. Pongamos entonces

$$\varepsilon_0 = \frac{|L|}{8(M+1)} > 0$$

Consideremos los conjuntos

$$A_n = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0\}, \; B_n = \{x : |g_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0\}.$$

Como ambas sucesiones convergen en medida a f claramente

$$\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n)=\lim_{n\to+\infty}\mu(B_n)=0.$$

Podemos encontrar un natural n de modo que

$$\mu(A_n)<\varepsilon_0 \ \text{ y que } \ \mu(B_n)<\varepsilon_0$$

y además

$$\left|L-\int(f_n(x)-g_n(x))d\mu(x)\right|<\varepsilon_0$$

Si tomo $x\in X\setminus(A_n\cup B_n)$ tenemos

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon_0, |g_n(x)-f(x)|<\varepsilon_0$$

y también

$$|f_n(x)-g_n(x)|<2\varepsilon_0.$$

Para $x\in A_n\cup B_n$ tenemos la acotación $|f_n(x)-g_n(x)|<2M$ y $\mu(A_n\cup B_n)<2\varepsilon_0$.

Teniendo en cuenta lo anterior tenemos

$$\begin{aligned}\left|\int(f_n(x)-g_n(x))d\mu(x)\right| &\le 2\varepsilon_0+2M2\varepsilon_0\\ &=\frac{|L|}{4(M+1)}+\frac{M}{M+1}\frac{|L|}{2}\\ &\le\frac{3}{4}|L|.\end{aligned}$$

Entonces

$$\left|L-\int(f_n(x)-g_n(x))d\mu(x)\right|\ge|L|-\frac{3}{4}|L|=\frac{1}{4}|L|$$

Sin embargo

$$\left|L-\int(f_n(x)-g_n(x))d\mu(x)\right|<\varepsilon_0=\frac{|L|}{8(M+1)}<\frac{1}{4}|L|.$$

Esto es una contradicción y por ello $L=0$. ■

Definición 3.18 Sea $f\in B(X)$. Se define la integral de f respecto de μ mediante la fórmula

$$\int f(x)d\mu(x)=\lim_{n\to+\infty}\int f_n(x)d\mu(x)$$

siendo (f_n) cualquier sucesión de funciones simples y uniformemente acotada, convergente en medida a f y de Cauchy en $\|\cdot\|_1$.

Comentario 5 La definición es correcta y no depende de la sucesión elegida.

Teorema 3.19 Sean $f, g \in B(X)$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces $\alpha f + \beta g \in B(X)$ y

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) d\mu(x) = \alpha \int f(x) d\mu(x) + \beta \int g(x) d\mu(x).$$

Demostración.

No incluiremos la pueba debido a que podemos encontrarla en la asignatura SFIL.

■

Teorema 3.20 Sea $f \in B(X)$, con $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$. Entonces

$$\int f(x) d\mu(x) \geq 0$$

Demostración.

Si $f(x) \geq 0$ es fácil construir la sucesión de funciones simples (f_n) del teorema 2 de modo que $f_n(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

3.2. Grupos amenables

Definición 3.21 Sea G un grupo. Si existe una medida finitamente aditiva $\mu : P(G) \longrightarrow [0, 1]$ tal que $\mu(G) = 1$ y para cualquier $A \subset G$, $g \in G$ se tiene que $\mu(g(A)) = \mu(A)$, diremos que G es un grupo amenable.

Proposición 3.22 Si G es un grupo amenable, no puede ser paradójico

Demostración.

Supongamos que G es un grupo amenable, es decir, existe una medida finitamente aditiva tal que $\mu(G) = 1$ y para cualquier $A \subset G$ y $g \in G$, $\mu(g(A)) = \mu(A)$. Supongamos ahora que G es, además, paradójico. Por tanto existe una partición $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$ y aplicaciones $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_n \in G$ tales que:

$$G = \bigcup_{i=1}^{m} g_i(A_i), \quad G = \bigcup_{j=1}^{n} h_j(B_j)$$

Tendremos entonces que:

$$\begin{aligned}
\mu(G) &= \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_m) + \mu(B_1) + \cdots + \mu(B_n) \\
&= \mu(g_1(A_1)) + \cdots + \mu(g_m(A_m)) + \mu(h_1(B_1)) + \cdots + \mu(h_n(B_n)) \\
&= \mu(G) + \mu(G)
\end{aligned}$$

llegando de esta forma a una contradicción, por lo que G no puede ser paradójico. ■

Definición 3.23 Sea G un grupo que actúa sobre $\mathcal{X}$, y sea el espacio medible $(\mathcal{X}, \overline{\mu}, \mathcal{R})$

a. Diremos que $\overline{\mu}$ es invariante por la izquierda respecto a G si:

- $g(A) \in \mathcal{R}$ para cada $A \in \mathcal{R}$ y $g \in G$.
- $\overline{\mu}(g(A)) = \overline{\mu}(A)$.

b. Diremos que $\mathcal{R}$ es invariante por la izquierda respecto a G si:

$$g \in G, \quad A \in \mathcal{R} \Longrightarrow g(A) \in \mathcal{R}$$

Teorema 3.24 Sea G un grupo amenable que actua sobre $\mathcal{X}$. Si existe una medida finitamente aditiva en $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ invariante por la izquierda respecto a G, entonces para cualquier $X \in \mathcal{X}$ tal que $\overline{\mu}(X) \in (0, \infty)$, X no es paradójico.

Demostración.

Sea G un grupo amenable que actúa sobre el espacio $\mathcal{X}$. Existe entonces una medida finitamente aditiva, invariante por la izquierda $\mu : \mathcal{P}(G) \longrightarrow [0, 1]$ con medida total 1. Sea también $\overline{\mu}$ una medida finitamente aditiva $\mu : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \longrightarrow [0, \infty]$ invariante por la izquierda respecto a G.

Supongamos que existe $X \in \mathcal{X}$ tal que $\overline{\mu}(X) \in (0, \infty)$ es paradójico, es decir, existen $A_1, \ldots, A_m$, $B_1, \ldots, B_n$ y aplicaciones $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_n \in G$ tales que:

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} g_i(A_i), \quad X = \bigcup_{j=1}^{n} h_j(B_j)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}(X) &= \overline{\mu}(A_1 \cup \cdots \cup A_m \cup B_1 \cup \cdots \cup B_n) \\
&= \overline{\mu}(A_1) + \cdots + \overline{\mu}(A_m) + \overline{\mu}(B_1) + \cdots + \overline{\mu}(B_n) \\
&= \overline{\mu}(g_1(A_1)) + \cdots + \overline{\mu}(g_m(A_m)) + \overline{\mu}(h_1(B_1)) + \cdots + \overline{\mu}(h_n(B_n)) \\
&= \overline{\mu}(X) + \overline{\mu}(X) = 2\overline{\mu}(X)
\end{aligned}$$

En contradicción con que $\overline{\mu}(X) \in (0, \infty)$. Por tanto no existe $X \subset \mathcal{X}$ paradójico tal que $\overline{\mu}(X) \in (0, \infty)$. ■

Teorema 3.25 Sea $\mathcal{A}_0$ un subanillo de un álgebra $\mathcal{A}$ y G un grupo amenable que actua sobre $\mathbb{X}$. Supongamos además que $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{A}$ son invariantes por la izquierda respecto a G. Si existe una medida μ finitamente aditiva en $\mathcal{A}_0$ que sea invariante por la izquierda, entonces se puede extender μ en $\mathcal{A}$, de forma que tenemos una medida finitamente aditiva $\overline{\mu}$ invariante por la izquierza.

Demostración.

Que la medida finitamente aditiva μ puede ser extendida a una medida ν finitamente aditiva sobre toda el álgebra $\mathcal{A}$ es un teorema conocido y lo vamos a dar por demostrado. Aquí ponemos la referencia.

Supongamos entonces la existencia de tal extensión y demostremos a continuación que existe una que es además G-invariante por la izquierda.

Sea θ la medida finitamente aditiva definida sobre $\mathcal{P}(G)$ por ser G amenable, tal que $\theta(G) = 1$ y θ es G-invariante por la izquierda. Sea ν la extensión de μ a toda $\mathcal{A}$. Sabemos que μ es G-invariante por la izquierda respecto de G, luego para cualquier $A \in \mathcal{A}_0$ y cualquier $g \in G$ se tiene $\mu(g(A)) = \mu(A)$.

Sea $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ la colección de conjuntos siguiente

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{A} : \exists B \in \mathcal{A}_0 : A \subset B, \mu(B) < +\infty\}$$

Sea $A \in \mathcal{A}$ cualquier elemento del álgebra. Pongamos

$$f_A : G \to [0, +\infty]$$

definida como

$$f_A(g) = \nu(g^{-1}A).$$

Observemos que si $A \in \mathcal{S}$ entonces existe B en $\mathcal{A}_0$ tal que

$$f_A(g) = \nu(g^{-1}A) \leq \nu(g^{-1}B) = \mu(g^{-1}(B)) = \mu(B) < +\infty$$

y eso para todo $g \in G$, lo que demuestra que $f_A \in B(G)$.

Definimos entonces $\overline{\mu}$ como la función de conjuntos siguiente:

$$\overline{\mu}(A) = \begin{cases} \int f_A(g) d\theta(g), & \text{si } A \in \mathcal{S} \\ +\infty, & \text{si } A \notin \mathcal{S} \end{cases}.$$

Hay que comprobar que $\overline{\mu}$ es una medida finitamente aditiva bien definida sobre $\mathcal{A}$, que extiende a μ y que ademáss es G-invariante por la izquierda.

Primero, $\overline{\mu}$ está bien definida pues si $A \in \mathcal{S}$ entonces f_A está acotada y tiene perfecto sentido la integral de f_A respecto de θ según hemos estudiado en la sección anterior.

También es claro que $\overline{\mu}$ toma valores en $[0, +\infty]$.

Si A_1, A_2 son elementos de $\mathcal{S}$, disjuntos, entonces $A_1 \cup A_2$ también está obviamente en $\mathcal{S}$ y además

$$f_{A_1}(g) + f_{A_2}(g) = \nu(g^{-1}A_1) + \nu^{-1}(g^{-1}A_2) = f_{A_1 \cup A_2}(g)$$

de aquí inmediatamente sigue que $\overline{\mu}(A_1) + \overline{\mu}(A_2) = \overline{\mu}(A_1 \cup A_2)$. Los casos $A_1 \in \mathcal{S}, A_2 \notin \mathcal{S}$, $A_2 \in \mathcal{S}, A_1 \notin \mathcal{S}$, $A_1 \notin \mathcal{S}, A_2 \notin \mathcal{S}$ se gestionan fácilmente. $\overline{\mu}$ es finitamente aditiva.

Queda por demostrar que es una extensión de μ y que $\overline{\mu}$ es G-invariante por la izquierda.

Que es una extensión es muy sencillo, pues si $A \in \mathcal{A}_0$, entonces $\nu(g^{-1}A) = \mu(g^{-1}A) = \mu(A)$ para todo g y es claro que si $A \in \mathcal{S}$ entonces $\overline{\mu}(A) = \mu(A)$. Si $A \notin S$ entonces es claro que $+\infty = \mu(A) = \overline{\mu}(A)$

Probemos ahora que es G-invariante por la izquierda. Sea $A \in \mathcal{S}$. Entonces para cualquier $h \in G$ también $hA \in \mathcal{S}$. Entonces

$$f_{hA}(g) = \nu(g^{-1}hA) = \nu((h^{-1}g)^{-1}A) = f_A(h^{-1}g)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}(hA) &= \int f_{hA}(g)d\theta(g) \\
&= \int f_A(h^{-1}g)d\theta(g) \\
&= \int f_A(g)d\theta(g) \\
&= \overline{\mu}(A).
\end{aligned}$$

Si $A \notin \mathcal{S}$, entonces también es claro que $\overline{\mu}(hA) = \overline{\mu}(A) = +\infty$.

■

Vamos a ver ahora algunas propiedades sobre los grupos amenables que nos ayudaran a la prueba

Teorema 3.26 Sea G un grupo. Si G es finito, es amenable.

Demostración.

Sea G un grupo finito de forma que $|G| = n$. Para $A \subset G$, definiremos la medida $\mu : G \longrightarrow [0, 1]$ como:

$$\mu(A) = \frac{|A|}{n}$$

Podemos ver fácilmente entonces que $\mu(G) = 1$. Veamos ahora que μ es finitamente aditiva. Para ello, sean A_1, $A_2 \subset G$ tales que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Entonces:

$$\mu(A_1) + \mu(A_2) = \frac{|A_1|}{n} + \frac{|A_2|}{n} = \frac{|A_1 \cup A_2|}{n} = \mu(A_1 \cup A_2)$$

Por tanto, tenemos que es finitamente aditiva. Veamos la invarianza a izquierda. Sea $A \subseteq G$ y $g \in G$ se tiene que:

$$\mu(gA) = \frac{|gA|}{n} = |A|n = \mu(A)$$

Por lo tanto, μ es una medida finitamente aditiva, invariante a izquierda y de medida total 1, por lo que G es amenable. ■

Teorema 3.27 Sea G un grupo y H un subgrupo de G. Si G es amenable, H también lo será.

Demostración.

Sea H un subgrupo de G y supongamos que G es amenable. Entonces existirá una medida μ finitamente aditiva, invariante a izquierda sobre G de medida total 1. Sea M una selección de las clases lateral derecha de H tal que para todo $g \in G$, $|M \cap Hg| = 1$. Definimos ahora $\nu : \mathcal{P}(H) \longrightarrow [0,1]$ como

$$\nu(A) = \mu\left(\bigcup_{g \in M} Ag\right)$$

Observemos que:

$$\nu(H) = \mu\left(\bigcup_{g \in M} Hg\right) = \nu(G) = 1$$

Para probar que ν es finitamente aditiva, sean A_1, $A_2 \subseteq H$ tales que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Entonces los conjuntos $\bigcup\limits_{g \in M} A_1 g$ y $\bigcup\limits_{g \in M} A_2 g$ serán disjuntos, cumpliéndose que:

$$
\begin{aligned}
\nu(A_1)+\nu(A_2) &= \mu\left(\bigcup_{g\in M} A_1 g\right)+\mu\left(\bigcup_{g\in M} A_2 g\right)=\mu\left(\bigcup_{g\in M} A_1 g+\bigcup_{g\in M} A_2 g\right)= \\
&= \mu\left(\bigcup_{g\in M}(A_1 g\cup A_2 g)\right)=\mu\left(\bigcup_{g\in M}(A_1\cup A_2)g\right)= \\
&= \nu(A_1\cup A_2)
\end{aligned}
$$

Veamos finalmente que ν es invariante a izquierda. Sea $A\subseteq H$ y $h\in G$. Entonces:

$$
\nu(hA)=\mu\left(\bigcup_{g\in M}(hA)g\right)=\mu\left(\bigcup_{g\in M} h(Ag)\right)=\mu\left(\bigcup_{g\in M} Ag\right)=\nu(A)
$$

Por tanto, ν es invariante a izquierda y finitamente aditiva en H con medida total 1 por lo que H será amenable. ■

Teorema 3.28 Sea H un subgrupo normal de un grupo G. Si G es amenable, entonces G/H es amenable.

Demostración.

Supongamos H un subgrupo normal de un grupo amenable G, y sea μ una medida finitamente aditiva e invariante a izquierda sobre G con medida total 1. Definimos entonces $\nu:\mathcal{P}(G/H)\longrightarrow[0,1]$ como $\nu(\mathcal{B})=\mu(\bigcup\mathcal{B})$.

Se tiene entonces que:

$$
\nu(g/H)=\mu\left(\bigcup G/H\right)=\mu(G)=1
$$

Para probar que ν es finitamente aditiva, sean $\mathcal{B}_1$,$\mathcal{B}_2\subseteq G/H$ tal que $\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2=\emptyset$. Se tiene entonces que $\bigcup\mathcal{B}_1\cap\bigcup\mathcal{B}_2=\emptyset$ y, además,

$$
\nu(\mathcal{B}_1)+\nu(\mathcal{B}_2)=\mu\left(\bigcup\mathcal{B}_1\right)+\mu\left(\bigcup\mathcal{B}_2\right)=\mu\left(\bigcup\mathcal{B}_1\cup\bigcup\mathcal{B}_2\right)=\mu\left(\bigcup(\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2)\right)=\nu(\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2)
$$

Finalmente, para demostrar la invarianza a izquierda, sean $\mathcal{B}\subseteq G/H$ y $h\in G$. Sea C tal que $\mathcal{B}=\{gH:g\in C\}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\nu((hH)\mathcal{B}) &= \mu\left(\bigcup (hH)\mathcal{B}\right) = \mu\left(\bigcup_{g\in C} hHg\right) = \mu\left(h\bigcup_{g\in C}(Hg)\right) = \\ &= \mu\left(h\bigcup_{g\in C}(gH)\right) = \mu\left(\bigcup_{g\in C}(gH)\right) = \mu\left(\bigcup \mathcal{B}\right) = \nu(\mathcal{B})\end{aligned}$$

Por tanto, ν es invariante a izquierda y finitamente aditiva en G/H con medida total 1 por lo que G/H será amenable.

■

Teorema 3.29 Sea H un subgrupo normal de un grupo G. Si H y G/H son amenables, entonces G será amenable.

Demostración.

Sea H un subgrupo normal de G y supongamos que tanto H como G/H son amenables. Existiran entonces dos medidas μ_1 y μ_2 finitamente aditivas e invariantes a izquierda sobre H y G/H respectivamente con medida total 1. Para $A \subseteq G$ definimos $f_A : G \longrightarrow [0,1]$ como

$$f_A(g) = \nu_1(H \cap g^{-1}A)$$

Supongamos $g_1H = g_2H$. Entonces $g_2^{-1}g_1H = H$ y, por tanto, $g_2^{-1}g_1 = h \in H$. Se tiene:

$$\begin{aligned}f_A(g_2) &= \nu_1(H\cap g_2^{-1}A) = \nu_1(hH \cap hg_1^{-1}A) = \nu_1(h(H\cap g_1^{-1}A)) = \\ &= \nu_1(H\cap g_1^{-1}A) = f_A(g_1)\end{aligned}$$

Por tanto, f_A es constante para cada una de las clases laterales de H y podremos definir $f_A^* : G/H \longrightarrow [0,1]$ como

$$f_A^*(gH) = f_A(g)$$

Definimos ahora $\mu : \mathcal{P}(G/H) \longrightarrow [0,1]$ como

$$\mu(A) = \int f_A^*(gH)d\nu_2(gH)$$

Observemos que $f_G(g) = 1$ para todo $g \in G$ y, por tanto $f_G^*(gH) = 1$ para todo $gH \in G/H$. Entonces

$$\mu(G) = \int f_A^*(gH)d\nu_2(gH) = \int 1 d\nu_2(gH) = \nu_2(G/H) = 1$$

Para demostrar que μ es finitamente aditiva, sean A_1, $A_2 \subseteq G$ tal que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Observemos que si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, entonces $g^{-1}A_1 \cap g^{-1}A_2 = \emptyset$, por lo que

$$\begin{aligned}
f_{A_1}(g) + f_{A_2}(g) &= \nu_1(N \cap g^{-1}A_1) + \nu_1(N \cap g^{-1}A_2) = \\
&= \nu_1((N \cap g^{-1}A_1) \cup (N \cap g^{-1}A_2)) = \\
&= \nu_1(N \cap (g^{-1}A_1 \cup g^{-1}A_2)) = \\
&= \nu_1(N \cap g^{-1}(A_1 \cup A_2)) = f_{A_1 \cup A_2}(g)
\end{aligned}$$

Tendremos de esta forma que

$$\begin{aligned}
\mu(A_1) + \mu(A_2) &= \int f^*_{A_1}(gH)d\nu_2(gH) + \int f^*_{A_2}(gH)d\nu_2(gH) = \\
&= \int (f^*_{A_1}(gH) + f^*_{A_2}(gH))d\nu_2(gH) = \\
&= \int (f^*_{A_1 \cup A_2}(gH))d\nu_2(gH) = \mu(A_1 \cup A_2)
\end{aligned}$$

Finalmente, para ver que μ es invariante por la izquierda, tomamos $A \subseteq G$ y $h \in G$. Observemos que

$$f_{hA}(g) = \nu_1(H \cap g^{-1}hA) = \nu_1(H \cap (g^{-1}g)^{-1}A) = f_A(h^{-1}g)$$

Por lo que obtenemos que $f^*_{hA}(gH) = f^*_A((h^{-1}g)H) = f^*_A(h^{-1}H)(gH))$ y

$$\mu(hA) = \int f^*_{hA}(gH)d\nu_2(gH) = \int f^*_A(h^{-1}H)(gH))d\nu_2(gH) = \int f^*_A(gH)d\nu_2(gH) = \mu(A)$$

Por tanto tenemos que μ es invariante por la izquierda, finitamente aditiva sobre G y con medida total 1, por lo que G es amenable. ■

Teorema 3.30 Si G es un grupo abeliano, G es amenable.

Demostración.

Sea G un grupo abeliano. Sea $[0,1]^{\mathcal{P}(G)}$ el espacio de todas las funciones $f : \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ dotado de la topología producto. Una base de abiertos para este espacio topológico es de la forma

$$\{f \in [0,1]^{\mathcal{P}(G)} : f(A_1) \in U_1, \ldots, f(A_n) \in U_n\}$$

donde los A_j son subconjuntos de G y los U_j son abiertos del intervalo $[0,1]$.

Sabemos por el teorema de Tychonoff (hay que poner referencia) que el conjunto $[0,1]^{\mathcal{P}(G)}$ es un compacto dotado de la topología producto y por lo tanto tiene la propiedad de la intersección finita: cualquier familia de subconjuntos tal que la intersección de cualquier cantidad finita de elementos sea no vacía, ha de tener intersección no vacía.

Para $\varepsilon > 0$ y para $X \subset G$ conjunto finito cualquiera podemos definir los conjuntos

$$\begin{aligned} M_{\varepsilon,X} = \{f \in [0,1]^{\mathcal{P}(G)} : f(G) = 1, f(A_1) + f(A_2) = f(A_1 \cup A_2), A_1 \text{ y } A_2 \text{ disjuntos}, \\ \text{y } |f(A) - f(gA)| \leq \varepsilon \text{ para todo } g \in X, \text{para todo } A \subset G\} \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{F} = \{M_{\varepsilon,X} : \varepsilon > 0, X \subset G, X \text{ finito}\}$. Queremos demostrar que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

Sea $M_{\varepsilon,X}$ un elemento cualquiera de la familia. Vamos a demostrar que es no vacío. Sea $N \geq 2/\varepsilon$. Consideremos una enumeración cualquiera de los elementos de $X = \{g_1, \ldots, g_n\}$. Para cualquier subconjunto $A \subset G$ definimos

$$Y_A = \{(i_1, \ldots, i_n) : i_j \in \{1, \ldots, N\}, j \in \{1, \ldots, n\}, g_1^{i_1} g_2^{i_2} \ldots g_n^{i_n} \in A\}.$$

Entonces definimos

$$\mu_\varepsilon(A) = \frac{|Y_A|}{N^n}.$$

Es claro que $\mu_\varepsilon(G) = 1$. También es fácil de comprobar que μ_ε es finitamente aditiva. Además vamos a probar que es casi invariante por la izquierda para los elementos de X. Sea pues $A \subset G$ cualquiera y sea $g_k \in X$ un elemento cualquiera de X. Debido a que G es un grupo abeliano se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} Y_{g_kA} &= \{(i_1, \ldots, i_n) : g_1^{i_1} \ldots g_n^{i_n} \in g_kA\} \\ &= \{(i_1, \ldots, i_n) : g_1^{i_1} \ldots g_k^{i_k-1} \ldots g_n^{i_n} \in A\} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} Y_A \Delta Y_{g_kA} &= (Y_A \setminus Y_{g_kA}) \cup (Y_{g_kA} \setminus Y_A) \\ &= \{(i_1, \ldots, i_n) : g_1^{i_1} \ldots g_k^{N} \ldots g_n^{i_n} \in A\} \\ &\cup \{(i_1, \ldots, i_n) : g_1^{i_1} \ldots g_{k-1}^{i_{k-1}} g_{k+1}^{i_{k+1}} \ldots g_n^{i_n} \in A\} \end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$\begin{aligned} |\mu_\varepsilon(A) - \mu_\varepsilon(g_kA)| &= \frac{||Y_A| - |Y_{g_kA}||}{N^n} \\ &\leq \frac{|Y_A \Delta Y_{g_kA}|}{N^n} \\ &= \frac{2N^{n-1}}{N^n} \\ &= \frac{2}{N} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto hemos demostrado que $\mu_\varepsilon \in M_{\varepsilon,X}$ y por ello $M_{\varepsilon,X}$ es no vacío.

Ahora vamos a demostrar que $M_{\varepsilon,X}$ es un conjunto cerrado. Sea $\nu \in [0,1]^{\mathcal{P}(G)} \setminus M_{\varepsilon,X}$. Entonces o bien ν no tiene medida total 1, o no es finitamente aditiva o no es casi invariante respecto de todos los elemntos de X. Vamos a probar que en cualquiera de estos casos existe un abierto que contiene a ν y que no corta a $M_{\varepsilon,X}$, demostrando así que $M_{\varepsilon,X}$ es un conjunto cerrado pues su complemento es abierto.

Pongamos que $\nu(G) < 1$. Entonces podemos encontrar como abierto

$$\{f \in [0,1]^{\mathcal{P}(G)} : f(G) \in [0, 1-(1-\nu(G))/2)\}$$

que obviamente es disjunto con $M_{\varepsilon,X}$ y contiene a ν.

Si ν no es finitamente aditiva entonces existen dos conjuntos A_1, A_2 contenidos en G tales que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ y $\nu(A_1 \cup A_2) \neq \nu(A_1) + \nu(A_2)$. Sea entonces

$$\varepsilon_0 = |(\nu(A_1) - \nu(A_2)) - \nu(A_1 \cup A_2)|.$$

Entones el conjunto

$$\begin{aligned}\{f \in [0,1]^{\mathcal{P}(G)} :& \nu(A_1) - \varepsilon_0/4 < f(A_1) < \nu(A_1) + \varepsilon_0/4,\\ &\nu(A_2) - \varepsilon_0/4 < f(A_2) < \nu(A_2) + \varepsilon_0/4\\ &\nu(A_1 \cup A_2) - \varepsilon_0/4 < f(A_1 \cup A_2) < \nu(A_1 \cup A_2) + \varepsilon_0/4\}\end{aligned}$$

es un abierto que no corta a $M_{\varepsilon,X}$ y contiene a ν.

Vamos con el último caso, si ν no es casi invariante respecto de algún elemento de X, entonces existe $A \subset G$ y existe $g_k \in X$ tal que $|\nu(A) - \nu(g_k A)| > \varepsilon$. Pongamos

$$\varepsilon_0 = |\nu(A) - \nu(g_k A)| - \varepsilon > 0.$$

Entonces el conjunto

$$\{f \in [0,1]^{\mathcal{P}(G)} : \nu(A) - \varepsilon_0/4 < f(A) < \nu(A) + \varepsilon_0/4, \nu(g_k A) - \varepsilon_0/4 < f(g_k A) < \nu(g_k A) + \varepsilon_0/4\}$$

es un abierto que no corta a $M_{\varepsilon,X}$ y contiene a ν.

Hemos demostrado que en cualquier caso ν está contenido en un abierto disjunto con $M_{\varepsilon,X}$, luego $M_{\varepsilon,X}$ es un conjunto cerrado.

Finalmente debemos probar que cualquier intersección finita de la forma

$$\bigcap_{j=1}^{n} M_{\varepsilon_j, X_j}$$

donde los $\varepsilon_j > 0$ y los X_j son conjuntos finitos de G, es no vacía. Con esto habremos probado que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

Para ello consideramos $X = \bigcup_{j=1}^{n} X_j$ y $\varepsilon = \text{mín}\{i_j : j = 1, 2, \ldots, n\}$. Es claro que con esta elección

$$M_{\varepsilon,X} \subset \bigcap_{j=1}^{n} M_{\varepsilon_j,X_j}$$

luego la intersección es no vacía.

Hemos probado que la familia $\mathcal{F}$ satisface la propiedad de la intersección finita y por ello

$$\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$$

pues el conjunto $[0,1]^{\mathcal{P}(G)}$ es compacto.

Es fácil comprobar que todo elemento de la intersección $\mu \in \bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ es una medida finitamente aditiva definida sobre $\mathcal{P}(G)$, $\mu(G) = 1$ y G-invariante por la izquierda. Queda probado que G es amenable. ■

Teorema 3.31 Sea $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$, donde G_α es un subgrupo amenable de G para cualquier $\alpha \in I$. Si existen $\beta, \gamma \in I$ tales que $G_\alpha \leq G_\gamma$ y $G_\beta \leq G_\gamma$, entonces G es amenable.

Demostración.

Sea $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ donde G_α es un subgrupo amenable de G para cualquier $\alpha \in I$. Como cada G_α es amenable, existirán medidas μ_α finitamente aditivas e invariantes por la izquierda sobre G_α con medida total 1 para cada α. Sea $[0,1]^{\mathcal{P}(G)}$ el espacio de todas las funciones $f : \mathcal{P}(G) \longrightarrow [0,1]$ con la topología producto, de forma que los conjuntos abiertos serán de la forma:

$$\{f \in [0,1]^{\mathcal{P}(G)} : f(A_1) \in U_1, f(A_2) \in U_2, \ldots, f(A_n) \in U_n\}$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(G)$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ son subconjuntos abiertos de $[0,1]$. Tenemos que $[0,1]^{\mathcal{P}(G)}$ es compacto, por lo que posee la siguiente propiedad para la intersección finita:

Sea una familia de conjuntos $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$. Se dirá que posee la propiedad de la intersección finita si para cada subfamilia finita no vacía de $\mathcal{F}$, su intersección es no vacía.

Sea entonces $\alpha \in I$, ponemos

$$\begin{aligned} M_\alpha = \{f \in [0,1]^{\mathcal{P}(G)} : \;& f(G) = 1, \text{ para cualquier } A_1, A_2 \subseteq G \text{ tal que } A_1 \cap A_2 = \emptyset, \\ & f(A_1) + f(A_2) = g(A_1 \cup A_2), \\ & \text{y para cualquier } g \in G_\alpha \text{ y } A \subseteq G, f(gA) = f(A)\} \end{aligned}$$

Lo que tenemos que ver ahora es que la familia $\mathcal{F}_M$ de todos los conjuntos M_α satisface las condiciones de la propiedad de la intersección finita. Sea $A \subseteq G$. Definiremos $f_\alpha(A) =$

$\mu_\alpha(A\cap G_\alpha)$. Se puede ver fácilmente que $f_\alpha(G) = \mu_\alpha(G_\alpha) = 1$. Para demostrar que es finitamente aditiva, sean A_1, $A_2 \subseteq G$ de forma que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Entonces $(A_1 \cup A_2) \cap G_\alpha = (A_1 \cap G_\alpha) \cup (A_2 \cap G_\alpha)$ y $(A_1 \cap G_\alpha) \cap (A_2 \cap G_\alpha) = \emptyset$.

Entonces

$$f_\alpha(A_1 \cup A_2) = \mu_\alpha((A_1 \cup A_2) \cap G_\alpha) = \mu_\alpha(A_1 \cap G_\alpha) + \mu_\alpha(A_2 \cap G_\alpha) = f_\alpha(A_1) + f_\alpha(A_2)$$

Para probar que f_α es invariante por la izquierda respecto a G, para cierto $g \in G_\alpha$

$$\begin{aligned} f_\alpha(gA) &= \mu_\alpha(gA \cap G_\alpha) = \mu_\alpha(gA \cap gG_\alpha) \\ &= \mu_\alpha(g(A \cap G_\alpha)) = \mu_\alpha(A \cap G_\alpha) = f_\alpha(A) \end{aligned}$$

Por tanto tenemos que es invariante por la izquierda. Además, tenemos que $f_\alpha \in M_\alpha$, por lo que M_α es no vacío.

Para probar que M_α es cerrado, sea $\nu \in [0,1]^{\mathcal{P}(G)}/M_\alpha$. Supongamos que $\nu(G) < 1$, entonces

$$\left\{f \in [0,1]^{\mathcal{P}(G)} : \nu(G) \in \left[0, \nu(G) + \frac{1-\nu(G)}{2}\right]\right\}$$

es un conjunto abierto de M_α y ν está contenido en él. Si ν no es finitamente aditiva, entonces existirán A_1, $A_2 \subseteq G$ tal que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ y $\nu(A_1) + \nu(A_2) \neq \nu(A_1 \cup A_2)$. Tomaremos entonces:

$$\varepsilon_0 = |[\nu(A_1) + \nu(A_2)] - \nu(A_1 \cup A_2)|$$

Entonces

$$\begin{aligned} \{f \in [0,1]^{\mathcal{P}(G)} :\ & \nu(A_1) \in \left(\nu(A_1) - \tfrac{\varepsilon_0}{4}, \nu(A_1) + \tfrac{\varepsilon_0}{4}\right), \\ & \nu(A_2) \in \left(\nu(A_2) - \tfrac{\varepsilon_0}{4}, \nu(A_2) + \tfrac{\varepsilon_0}{4}\right), \\ & \nu(A_1 \cup A_2) \in \left(\nu(A_1 \cup A_2) - \tfrac{\varepsilon_0}{4}, \nu(A_1 \cup A_2) + \tfrac{\varepsilon_0}{4}\right)\} \end{aligned}$$

es un conjunto abierto de M_α y ν está contenido en él. Si para algún $g \in G$ y $A \subseteq G$, $\nu(gA) \neq \nu(A)$, tomamos entonces $\varepsilon = |\nu(gA) - \nu(A)|$. Entonces:

$$\left\{f \in [0,1]^{\mathcal{P}(G)} : \nu(gA) \in \left(\nu(gA) - \frac{\varepsilon}{4}, \nu(gA) + \frac{\varepsilon}{4}\right)\right\}$$

es un conjunto abierto de M_α y ν está contenido en él. Por tanto, M_α es cerrado.

Finalmente, para cualquier $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in I$ existirá $\gamma \in I$ de forma que $G_{\alpha_1} \leq G_\gamma, G_{\alpha_2} \leq G_\gamma, \dots, G_{\alpha_n} \leq G_\gamma$, por lo que

$$\emptyset \neq M_\gamma \subseteq M_{\alpha_1} \subseteq M_{\alpha_2} \subseteq \cdots \subseteq M_{\alpha_n}$$

con lo que $\bigcap_{k=1}^{n} M_{\alpha_k} \neq \emptyset$. Por tanto, la familia $\mathcal{F}_M$ satisface las condiciones de la propiedad de la intersección finita, con lo que:

$$\bigcap \mathcal{F}_M \neq \emptyset$$

Por tanto, existirá una medida $\mu : G \longrightarrow [0,1]$ que sea finitamente aditiva, invariante a izquierda y de medida total 1, con lo que G es amenable. ■

3.3. Isometrías en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$

En esta sección veremos que las isometrías en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ son grupos amenables y, como consecuencia de ello, no existen subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ que sean paradójicos. Para ello empezaremos recordando la definición de isometría en un espacio $\mathbb{R}^n$ para todo $n \geq 1$:

Definición 3.32 Una isometría $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función que conserva las distancias. Además, se puede probar que una isometría en $\mathbb{R}^n$ es de la forma:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}^{b}$$

donde A es la matriz de una rotación, con lo que $|A| = \pm 1$, y b es un vector de traslación.

Llamaremos G_n al grupo de las isometrías en $\mathbb{R}^n$. Además, llamaremos T_n al grupo de las traslaciones de G_n, es decir, aquellas isometrías cuya matriz de rotación es la identidad. Nos centraremos en aquellas isometrías que preservan la orientación, denotando dicho grupo de isometrías como SG_n.

Teorema 3.33 El grupo de las isometrías G_1 es amenable.

Demostración.

Observemos en primer lugar que:

$$G_1 = \{f : f(x) = ax + b, |a| = 1, b \in \mathbb{R}\}$$
$$T_1 = \{f : f(x) = x + b\}$$

Vamos a ver que T_1 es un subgrupo normal de G_1, demostrando que $fT_1 = T_1 f$ para cualquier $f \in G_1$. Sea $f' \in G_1$ tal que $f'(x) = a'x + b'$, y $f_1 \in T_1$ tal que $f_1(x) = x + b_1$. Entonces:

$$\begin{aligned} f'(f_1(x)) &= f'(x+b_1) = a'(x+b_1) + b' = a'x + a'b_1 + b' \\ &= (a'x+b') + a'b_1 = f_2(f'(x)) \end{aligned}$$

donde $f_2(x) = x + a'b_1$, con lo que $f_2 \in T_1$. Tendremos entonces que $f'T_1 \subseteq T_1 f'$. Veamos la contención contraria. Supongamos ahora $f' \in G_1$ tal que $f'(x) = a'x + b'$, y $f_1 \in T_1$ tal que $f_1(x) = x + b_1$. Entonces:

$$\begin{aligned} f_1(f'(x)) &= f_1(a'x+b') = (a'x+b') + b_1 = a'x + b' + b_1 \\ &= a'(x + a'b_1) + b' = f'(f_2(x)) \end{aligned}$$

donde $f_2(x) = x + a'b_1$, con lo que $f_2 \in T_1$. Tendremos entonces que se cumple la otra implicación, $T_1 f' \subseteq f'T_1$ y, por tanto, que $T_1 f' = f'T_1$. Por tanto T_1 es un subgrupo normal de G_1.

Observemos que $T_1 \cong \mathbb{R}$ mediante el isomorfismo $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow T_1$, definido como $\phi(n) = x + n$. Como $\mathbb{R}$ es un grupo abeliano, T_1 es también un grupo abeliano y, por tanto, amenable.

Observemos ahora que $G_1/T_1 = \{x, -x\}$. Entonces $G_1/T_1 \cong \mathbb{Z}_2$, con lo que G_1/T_1 es también abeliano y por tanto amenable. Se tiene entonces que, como consecuencia del Teorema 3.29, G_1 es amenable. ■

Teorema 3.34 El grupo de las isometrías G_2 es amenable.

Demostración.

Para demostrar este teorema, probaremos que SG_2 y G_2/SG_2 son amenables. Observemos en primer lugar que:

$$\begin{aligned} G_2 = &\left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : 0 \le \theta \le 2\pi,\ \ a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &\cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : 0 \le \theta \le 2\pi,\ \ a, b \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Mientras que

$$SG_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : 0 \le \theta \le 2\pi,\ \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Para demostrar que SG_2 es amenable, veremos que T_2 y SG_2/T_2 son amenables. Primero, demostraremos que T_2 es un subgrupo normal de SG_2, probando, de la misma forma que en el teorema anterior, que $fT_2 = T_2 f$ para cualquier $f \in T_2$. Sean $f' \in SG_2$ y $f_1 \in T_2$ tales que:

$$f'\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\binom{x}{y} + \binom{a'}{b'}$$

$$f_1\binom{x}{y} = \binom{x}{y} + \binom{a_1}{b_1}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
f' \circ f_1\binom{x}{y} &= f'\left(\binom{x}{y} + \binom{a_1}{b_1}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\left(\binom{x}{y} + \binom{a_1}{b_1}\right) + \binom{a'}{b'} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\binom{x}{y} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\binom{a_1}{b_1} + \binom{a'}{b'} \\
&= \left(\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\binom{x}{y} + \binom{a'}{b'}\right) + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\binom{a_1}{b_1} \\
&= f_2 \circ f'\binom{x}{y}
\end{aligned}$$

donde

$$f_2\binom{x}{y} = \binom{x}{y} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\binom{a_1}{b_1}$$

con $f_2 \in T_2$, teniendo de esta forma que $f'T_2 \subseteq T_2 f'$. Veamos la implicación contraria. Tomemos $f' \in SG_2$ y $f_1 \in T_2$ iguales que antes. Se tendrá que:

$$\begin{aligned}
f_1 \circ f'\binom{x}{y} &= f_1\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\binom{x}{y} + \binom{a'}{b'}\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\binom{x}{y} + \binom{a'}{b'}\right) + \binom{a_1}{b_1}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\binom{x}{y} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\binom{a_1}{b_1} + \binom{a'}{b'}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\left(\binom{x}{y} + \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\binom{a_1}{b_1}\right) + \binom{a'}{b'} = f' \circ f_3\binom{x}{y}$$

donde

$$f_3\binom{x}{y} = \binom{x}{y} + \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\binom{a_1}{b_1}$$

con $f_3 \in T_2$, teniendo de esta forma que $T_2 f' \subseteq f' T_2$ y, por tanto, que $T_2 f' = f' T_2$. Por tanto, T_2 es un subgrupo normal de SG_2. Vamos a probar ahora que T_2 es amenable. Sean f_1, $f_2 \in T_2$ tales que:

$$f_1\binom{x}{y} = \binom{x}{y} + \binom{a_1}{b_1}$$
$$f_2\binom{x}{y} = \binom{x}{y} + \binom{a_2}{b_2}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} f_1 \circ f_2\binom{x}{y} &= f_1\left(\binom{x}{y} + \binom{a_2}{b_2}\right) + \binom{a_1}{b_1} = \left(\binom{x}{y} + \binom{a_2}{b_2}\right) + \binom{a_1}{b_1} \\ &= \left(\binom{x}{y} + \binom{a_1}{b_1}\right) + \binom{a_2}{b_2} = f_2 \circ f_1\binom{x}{y} \end{aligned}$$

Por tanto T_2 es un grupo abeliano y, por tanto, amenable. Vamos a probar ahora que SG_2/T_2 es amenable. Observemos que $SG_2/T_2 \cong SO_2$, donde

$$SO_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\binom{x}{y} : 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

mediante el isomorfismo $\phi : SG_2/T_2 \longrightarrow SO_2$, definido por

$$\phi\left(\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\binom{x}{y} + \binom{a}{b}\right)T_2\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\binom{x}{y}$$

Veamos ahora que SO_2 es un grupo abeliano. Sean θ_1, $\theta_2 \in [0, 2\pi]$. Se tiene que:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 & -\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que SO_2 es un grupo abeliano y, por tanto, también lo será SG_2/T_2. Entonces, por el Teorema 3.29, SG_2 será amenable, ya que lo son SG_2/T_2 y T_2.

Vamos a ver ahora que SG_2 es un subgrupo normal de G_2, demostrando que para $f \in G_2$, $fSG_2 = SG_2f$. Sea $f \in G_2$, se tiene que:

$$f \in \overbrace{\left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : 0 \le \theta \le 2\pi, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}}^{SG_2}$$
$$\cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : 0 \le \theta \le 2\pi, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Como SG_2 es un grupo, si $f \in SG_2$ tenemos que $fSG_2 = SG_2f$. Supongamos por tanto que $f \notin SG_2$ y sea $f' \in SG_2$ de la forma:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & -\cos\theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$f'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$f \circ f'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & -\cos\theta_1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 & \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 & -(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \end{pmatrix} =$$

$$= A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \end{pmatrix}$$

Observemos que:

$$\begin{aligned} det(A) &= -(\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2 + 2\cos\theta_1\cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_1\operatorname{sen}^2\theta_2) \\ &\quad -(\operatorname{sen}^2\theta_1\cos^2\theta_2 + 2\cos\theta_1\cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + \cos^2\theta_1\operatorname{sen}^2\theta_2) \\ &= -(\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_1\operatorname{sen}^2\theta_2) - (\operatorname{sen}^2\theta_1\cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_1\operatorname{sen}^2\theta_2) \\ &= -(\cos^2\theta_1(\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_2) + \operatorname{sen}^2\theta_1(\operatorname{sen}^2\theta_2 + \cos\theta_2)) \\ &= -(\cos^2\theta_1 + \operatorname{sen}^2\theta_1) = -1 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $f \circ f' \in G_2/SG_2$ y, por ser SO_2 un grupo abeliano, $f' \circ f \in G_2/SG_2$. En cualquier caso, tendremos que $fSG_2 = SG_2f$, por lo que SG_2 es un subgrupo normal de G_2.

Por último, observemos que:

$$G_2/SG_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{Z}_2$$

Con lo que tenemos que G_2/SG_2 es un grupo abeliano al serlo $\mathbb{Z}_2$ y, por tanto, amenable. Se tiene de este modo, por el Teorema 3.29, que G_2 es un grupo amenable, al serlo G_2/SG_2 y SG_2. ■

Habiendo probado que G_1 y G_2 son grupos amenables, lo que tendremos que hacer ahora será encontrar una medida invariante por la izquierda en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, para demostrar que no existe ningún subconjunto acotado, no vacío de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$ que sea paradójico respecto a G_1 y G_2 respectivamente.

Definiremos como $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ como el anillo formado por $\emptyset$ y la unión de cualquier número finito de intervalos disjuntos. $\mathcal{R}_1$ es, efectivamente, un anillo, debido a que la unión de dos intervalos es, o un intervalo o la unión de intervalos. Además, la diferencia de intervalos es, o bien el vacío, o un intervalo, o bien la unión de intervalos.

Definición 3.35 Sea $\mu_1 : \mathcal{R}_1 \longrightarrow [0, \infty]$ definida como

$$\mu_1(I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n) = \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

donde $I_i = [a_i, b_i]$, con $a_i \leq b_i$, cumpliendo que $I_i \cap I_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

Observemos que

- Para cualquier X, $Y \in \mathcal{R}_1$ tal que $X \cap Y = \emptyset$,

$$\mu_1(X) + \mu_1(Y) = \mu_1(X \cup Y)$$

- Para cualquier $g \in G_1$ y $X \in \mathcal{R}_1$,

$$\mu_1(gX) = \mu_1(X)$$

Corolario 3.36 Ningún subconjunto acotado $X \subseteq \mathbb{R}$ con interior no vacío es paradójico.

Demostración.

Por el Teorema 3.25, existe una medida $\overline{\mu} : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$ finitamente aditiva e invariante por la izquierda que extiende μ_1. Sea $X \in \mathbb{R}$ un conjunto acotado con interior no vacío. Existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que

$$[a, b] \subseteq X \subseteq [c, d]$$

Por tanto

$$0 < \overline{\mu}([a, b]) \leq \overline{\mu}(X) \subseteq \overline{\mu}([c, d]) < \infty$$

con lo que $\overline{\mu}(X) \in (0, \infty)$. Por tanto, por el Teorema 3.24, tenemos que X no es paradójico.
■

Sea $\mathcal{R}_2$ el anillo de conjuntos del plano que son medibles Jordan. Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ es medible Jordan si es acotado y su frontera tiene medida de Lebesgue nula. Es equivalente a decir que la función característica χ_A sea integrable Riemann. Es equivalente a que el contenido interior y exterior de Jordan de C sean iguales (el valor común se llama contenido de Jodan de C, $c(C)$, que es el valor de la integral de Riemann de χ_A). El contenido de Jordan c es una medida initamente aditiva definida sobre $\mathcal{R}_2$, y es G_2-invariante. Todo esto lo vamos a dar por demostrado. Es muy parecido a lo que se hace en la integración de funciones de varias variables.

Corolario 3.37 Ningún subconjunto acotado $X \subseteq \mathbb{R}^2$ con interior no vacío es paradójico.

Demostración.

Sea c la medida de Jordan, y sea $M(c) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ la clase de todos los conjuntos medibles Jordan. Entonces $M(c)$ será un subanillo de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Además, c es invariante por la izquierda respecto de G_2. Por tanto, por el Teorema 3.25, existe una medida finitamente aditiva e invariante por la izquierda $\overline{c} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow [0, \infty]$ que extiende c. Por tanto, sea $X \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto acotado con interior no vacío. Entonces existen intervalos tales que:

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subseteq X \subseteq [c_1, d_1] \times [c_2, d_2]$$

Por tanto:

$$0 < \overline{c}([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) \subseteq \overline{c}(X) \subseteq \overline{c}([c_1, d_1] \times [c_2, d_2]) < \infty$$

con lo que $\overline{c}(X) \in (0, \infty)$. Por tanto, por el Teorema 3.24, tenemos que X no es paradójico. ■

En conclusión hemos demostrado que, por ser el grupo de las isometrías en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ grupos amenables, no existen paradojas en dichos espacios como la paradoja de *Banach-Tarski* como la que demostramos en los primeros capítulos.

Bibliografía

[1] Stromberg, K. (1979). The Banach-Tarski Paradox, American Mathematical Monthly 86.

[2] Tremblay, M.(2017).The Banach-Tarski Paradox.

[3] Tomkowicz, G., & Wagon, S. (2016). The Banach–Tarski Paradox (Encyclopedia of Mathematics and its Applications). Second Edition, Cambridge University Press.

[4] Lee, J. (2010). Paradoxical descompositions of groups and the sets they act upon. University of Nebraska at Omaha.