# El Teorema de Kahane-Katznelson-de Leeuw

Ignacio García Rosa

# El Teorema de Kahane-Katznelson-de Leeuw

Ignacio García Rosa

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

Luis Rodríguez Piazza

# Índice general

# Introducción

A lo largo de este trabajo, nuestro objetivo será estudiar el tamaño de los coeficientes de Fourier en diferentes espacios de funciones. Para ello, en el primer capítulo recordamos definiciones y nociones básicas del Análisis Funcional y, en particular, del Análisis de Fourier.

Una vez hecho esto, en el segundo capítulo nos centramos en el primer espacio con el que trabajaremos: el espacio de las funciones integrables. Por un lado, gracias al Lema de Lebesgue-Riemann, tenemos que los coeficientes de Fourier de funciones integrables convergen a cero, pero ¿se puede decir algo mejor sobre el tamaño de los coeficientes? Aunque se puede probar que las sucesiones que son coeficientes de Fourier de funciones integrables no cubren todo $\mathbf{c}_0(\mathbb{Z})$, veremos que, en cuanto al tamaño, no podemos decir nada mejor. La forma de la que abordaremos esto será probando que, dada una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de números positivos verificando que $\lim_{|n|\to+\infty} a_n = 0$, existe una sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ formada por los coeficientes de Fourier de cierta función integrable, de manera que $b_n \geq a_n$. De este modo veremos que la respuesta a este problema es negativa y, por tanto, no podemos decir nada mejor sobre el tamaño de los coeficientes de Fourier que el Lema Riemann-Lebesgue.

En el capítulo 3, nos centraremos en analizar el tamaño de los coeficientes de Fourier en el espacio de funciones continuas. Por la desigualdad de Bessel, sabemos que éstos están en $l^2(\mathbb{Z})$, pero ¿se puede decir algo mejor? Veremos a lo largo de esta sección que, de nuevo, la respuesta es negativa. Para ello haremos uso del llamado Teorema de Kahane-Katznelson-de Leeuw, teorema que da nombre al trabajo y del que, en este capítulo, daremos la demostración original, que apareció en [6] publicado en el año 1977. Este resultado nos dice que dada cualquier sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de números positivos y de cuadrado sumable, existe una sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ formada por los coeficientes de Fourier de cierta función continua $2\pi$-periódica, de manera que $|b_n| \geq a_n$. Aquí no podemos exigir que los $b_n$ sean positivos, pues es bien conocido que si los coeficientes de Fourier de una función acotada son positivos, entonces dichos coeficientes están en $l^1(\mathbb{Z})$.

Para demostrar este teorema usaremos herramientas basadas en métodos probabilísticos y series de Fourier aleatorias. Entre dichas herramientas se encuentra la llamada "Desigualdad de Khintchine", la cual usaremos para obtener un resultado menos general para los espacios $L^p$, es decir, veremos que, fijado $2 \leq p < +\infty$, y dada cualquier sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de números positivos y de cuadrado sumable, existe una sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ formada por los coeficientes de Fourier de cierta función de $L^p$ verificando $|b_n| \geq a_n$. Más tarde, resolveremos el problema anterior para $p = +\infty$. Para ello realizaremos una demostración constructiva basada en la siguiente propiedad: a partir de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ dada, y mediante una elección adecuada de signos $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, veremos que la función $f$ cuyos coeficientes de Fourier verifican $\widehat{f}(n) = \varepsilon_n a_n$, puede descomponerse como $f = g + h$, donde $g$ es una función acotada y $h$ es otra función con una norma 2 pequeña. Gracias a esta propiedad realizaremos un proceso iterativo que nos llevara a la solución. Finalmente, haciendo uso de la convolución, extenderemos este resultado al caso de funciones continuas, probando así nuestro objetivo.

En el capítulo 4, usando las ideas del artículo de Nazarov [8], empezaremos definiendo el llamado "Problema del Soporte". Este problema dice lo siguiente: Dado $A$ un subconjunto del Toro de medida positiva, y fijado $p \geq 2$, ¿Es cierto que dada una cualquier sucesión de números positivos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ existe $F \in L^p(A)$ tal que, para todo $n$, se tiene que $\widehat{F}(n) \geq a_n$? (Entendiéndose $L^p(A)$ como el conjunto de las funciones de $L^p(\mathbb{T})$ cuyo soporte está contenido en $A$) A lo largo del capítulo daremos una respuesta afirmativa a dicha cuestión abordándolo con diversos métodos analíticos, en especial, maximizando un funcional adecuado en cierto conjunto compacto. Además el "Problema del Soporte" nos dará pie a una nueva generalización para el caso de los espacios $L^p$, en la cual pasaremos de trabajar con los coeficientes de Fourier (producto escalar con la base trigonométrica) a productos escalares con sistemas de funciones $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ que simplemente verifican la condición de Bessel.

A lo largo del capítulo 5, volveremos a plantearnos los problemas de la sección anterior, pero esta vez desde un punto de vista geométrico. Con esta nueva visión del problema extenderemos las generalizaciones anteriores al caso del espacio funciones continuas.

Para finalizar, en el último capítulo nos centraremos en dos nuevos espacios: el espacio de funciones continuas con coeficientes de Fourier negativos nulos ($A(\mathbb{T})$), y el espacio de funciones cuyas series de Fourier convergen uniformemente ($\mathbb{U}(\mathbb{T})$). Como introducción de estos espacios, los relacionaremos con espacios de funciones analíticas, dando así nombre al capítulo. El resto del mismo nos centraremos sobre todo en el primer espacio, resolviendo el siguiente problema: Dada una sucesion de números positivos $\{a_n\}_{n\geq 0}$ de cuadrado sumable, ¿existe alguna función continua $f$ que verifique $\widehat{f}(n) = 0$ para todo $n < 0$, y $|\widehat{f}(n)| \geq a_n$ para todo $n \geq 0$? Para abarcar este problema nos basaremos en el artículo de Kislyakov [5], en el cual se generalizan muchas de las ideas usadas en la prueba del Teorema de Kahane-Katznelson-de Leeuw para extenderlo a nuevos espacios de funciones. Así concluiremos que de los coeficientes de Fourier de las funciones de $A(\mathbb{T})$ tampoco se puede decir nada mejor que el hecho de que son de cuadrado sumable.

# 1 | Conceptos y resultados básicos

Empezaremos dando una breve descripción de los espacios en los que vamos a trabajar.

**Definición 1.1.** *Denotamos $\mathbb{R}$ como el grupo aditivo de los números reales y $\mathbb{Z}$ como el subgrupo de los enteros. Llamamos $\mathbb{T}$ al grupo cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Podemos considerar como modelo el intervalo $[0, 2\pi)$ y considerar la medida de Lebesgue en $\mathbb{T}$ como la restricciòn de la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$ a $[0, 2\pi)$ normalizada, es decir, dividiendo por $2\pi$. De hecho, este espacio se puede identificar con $\partial\mathbb{D}$ (donde $\mathbb{D}$ denota el disco unidad abierto del plano complejo) mediante el homomorfismo dado por $t \mapsto e^{it}$. Las funciones definidas en $\mathbb{T}$ se identifican de manera natural con las funciones $2\pi$-periódicas en $\mathbb{R}$.*

**Definición 1.2.** *Sea $L^1(\mathbb{T})$ el espacio de todas las funciones (como clases de equivalencia por la relación "ser igual en casi todo") con valores complejos que son Lebesgue-integrables sobre $\mathbb{T}$. En este contexto definimos la siguiente norma:*

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt.$$

*Es bien sabido que $L^1(\mathbb{T})$ con $\|.\|_1$ es un espacio de Banach.*

**Definición 1.3.** *Sea $L^2(\mathbb{T})$ el espacio de todas las funciones (como clases de equivalencia por la relación "ser igual en casi todo") con valores complejos que son de cuadrado Lebesgue-integrable sobre $\mathbb{T}$. En este contexto, si definimos:*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\bar{g}(t)\, dt.$$

*se tiene que es un producto escalar bien definido, y que $L^2(\mathbb{T})$ es un espacio de Hilbert con dicho producto.*

**Definición 1.4.** *En general, dado $p \in [1, \infty)$, definimos $L^p(\mathbb{T})$ como el espacio de todas las funciones (como clases de equivalencia por la relación "ser igual en casi todo")* *tales que* $\int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt < +\infty$. *Éstos son espacios de Banach con la norma:*

$$\|f\|_p = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Definición 1.5.** *Definimos* $L^\infty(\mathbb{T})$ *como el espacio de las funciones (como clases de equivalencia por la relación "ser igual en casi todo") acotadadas en casi todo* $\mathbb{T}$. *Éste también es un espacio de Banach con la norma del supremo esencial :*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{T}} \text{ess } |f(t)| = \text{mín} \{ C \geq 0 \ : \ |f(t)| \leq C \text{ en casi todo } t \in \mathbb{T} \}.$$

**Definición 1.6.** *Denotaremos* $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ *como el espacio de las funciones continuas sobre* $\mathbb{T}$*, que es un espacio de Banach con la norma* $\|.\|_\infty$*, que, en este caso, se puede expresar como*

$$\|f\|_\infty = \text{máx}_{t \in \mathbb{T}} |f(t)|.$$

*Como comentamos antes,* $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ *se identifica con el espacio de las funciones continuas en* $\mathbb{R}$ *y* $2\pi$*-periódicas.*

**Definición 1.7.** *Definimos el espacio* $l^2(\mathbb{Z})$ *como el espacio vectorial formado las sucesiones* $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ *tales que*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < +\infty.$$

*De nuevo es bien sabido que* $l^2(\mathbb{Z})$ *es un espacio de Banach con la norma*

$$\|\{a_n\}\|_2 = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A continuación expondremos algunas de las características básicas de los espacios de Hilbert.

**Definición 1.8.** *Se dice que una sucesión de vectores* $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ *en un espacio de Hilbert* $H$ *es un sistema ortonormal si* $\langle u_n, u_m \rangle = 0$*, siempre que* $m \neq n$*, y* $\langle u_n, u_n \rangle = 1$ *para todo n entero. Si además la variedad lineal generada por* $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ *es densa en* $H$*, se dice que es una base ortonormal de* $H$*.*

*Proposición* 1.1. Dado $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sistema ortonormal en un espacio de Hilbert $H$, y dada $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un sucesión de escalares, si $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n u_n$, entonces se verifica que

$$\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2.$$

**Definición 1.9.** *Diremos que una sucesión de funciones $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en un espacio Hilbert verifican la condición de Bessel si, para toda sucesión de escalares $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, se verifica:*

$$\left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n u_n\right\| \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

*Proposición* 1.2. Dado $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sistema ortonornal en un espacio de Hilbert $H$, y $v \in H$ se verifica la llamada "Desigualdad de Bessel":

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle u_n, v\rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Si además el conjunto es base ortonormal, se tiene la llamada "Igualdad de Parseval":

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle u_n, v\rangle|^2 = \|v\|^2.$$

Es más, si un conjunto ortonormal verifica la igualdad de Parseval para todo $v \in H$, entonces es base ortonormal.

*Proposición* 1.3. Se tiene que el conjunto $\{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$ es base ortonormal de $L^2(\mathbb{T})$.

Empecemos con algunas definiciones y resultados básicos del análisis de Fourier:

**Definición 1.10.** *Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$ definimos el n-ésimo coeficiente de Fourier de $f$ como*

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

*A la serie formal S[f] $\sim \sum_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)e^{int}$ se le llama serie de Fourier de f.*

*Observación* 1.1. Si $f \in L^2(\mathbb{T})$, se observa que dichos coeficientes son los productos escalares de $f$ con las funciones $\{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$ .

Como primeras propiedades de lo coeficientes de Fourier tenemos la siguiente proposición:

*Proposición* 1.4. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ , entonces:

a) $\widehat{(f+g)}(n) = \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n)$.
b) Para todo número complejo $\alpha$, se tiene que $\widehat{(\alpha f)} = \alpha\widehat{f}(n)$.
c) $\widehat{(\overline{f})}(n) = \overline{\widehat{f}(-n)}$.
d) Si, dada $\tau \in \mathbb{T}$, denotamos $f_\tau = f(t-\tau)$, entonces $\widehat{f_\tau}(n) = \widehat{f}(n)e^{-in\tau}$.

e) Se tiene que $|\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_1$. En consecuencia, si la sucesión de funciones $\{f_k\}_k$ converge a $f$ en $L^1$, entonces, para todo $n$ entero, la sucesión $\left\{\widehat{f_k}(n)\right\}_k$ converge a $\widehat{f}(n)$. Como para espacios de medida finita la convergencia uniforme implica la convergencia en $L^1$, para este tipo de convergencia se mantiene el resutado.

*Demostración.* Las propiedades a) y b) son consecuencia de la linealidad de la integral, c) proviene de que $\overline{e^{int}} = e^{-int}$, d) resulta de de la propia definición de $\mathbb{T}$, pues $\int_0^{2\pi} f(t-\tau)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt$ para toda $f$ definida en $\mathbb{T}$. Finalmente e) es resultado de aplicar de la desiguldad triangular integral y de que $|e^{int}| = 1$. ∎

Introducimos ahora la convolución entre funciones, una herramienta muy útil a la hora de obtener funciones con más regularidad a partir de funciones ya dadas.

**Definición 1.11.** *Dadas $f, g$ funciones medibles, entonces, para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que la función $\tau \mapsto f(t-\tau)g(\tau)$ sea integrable, se define:*

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau.$$

*A esta nueva función la llamamos la convolución en $f$ con $g$.*

*Observación 1.2.* Si la convolución de $f$ con $g$ está bien definida en el punto $t$, entonces mediante el cambio de variables $\tau = t - y$ se tiene que $g * f$ también está bien definida en el punto $t$ y, de hecho, $(f * g)(t) = (g * f)(t)$, lo cual muestra la conmutatividad del producto de convolución.

*Observación 1.3.* Si $f(t) = e^{int}$ entonces $\widehat{g}(n) = (f * g)(0)$, de hecho, $f * g = \widehat{g}(n)f$.

*Proposición 1.5.* Sean $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $g \in L^p(\mathbb{T})$, dónde $1 \leq p \leq \infty$, entonces:

a) $(f * g) \in L^p(\mathbb{T})$ , es más, $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.
b) Si además $g \in C(\mathbb{T})$, entonces $f * g \in C(\mathbb{T})$.
c) $\widehat{(f * g)}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$ para todo $n$ entero.

**Definición 1.12.** *Se define el $n$-ésimo núcleo de Diritchlet como*

$$D_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} e^{ijt}.$$

Recogemos las primeras propiedades en siguiente lema:

*Lema* 1.1. Se tiene que:

a) $D_n(t) = 1 + 2\sum_{j=1}^n \cos(jt)$ .

b) $D_n(t) = \dfrac{\operatorname{sen}((n+\frac{1}{2})t)}{\operatorname{sen}(\frac{t}{2})}$ .

c) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} D_n(t)\,dt = 1$ para todo $n$ .

*Demostración.* a) Mediante un cálculo directo

$$\begin{aligned}\sum_{j=-n}^{n} e^{ijt} =& 1 + \sum_{j=1}^{n} e^{ijt} + \sum_{j=1}^{n} e^{-ijt} = 1 + \sum_{j=1}^{n} e^{ijt} + \overline{\sum_{j=1}^{n} e^{ijt}} \\ =& 1 + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n} e^{ijt}\right) = 1 + 2\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Re}(e^{ijt}) \\ =& 1 + 2\sum_{j=1}^{n}\cos(jt).\end{aligned}$$

b) Usando la suma geométrica $\sum_{j=1}^n e^{ijt}$ y multiplicando por el conjugado del denominador obtengo:

$$\begin{aligned}1 + \sum_{j=1}^{n}\cos(jt) =& \frac{\cos(nt) - \cos((n+1)t) + 1 - \cos(t)}{2(1-\cos(t))} \\ =& \frac{1}{2} + \frac{\cos(nt) - \cos((n+1)t)}{2(1-\cos(t))}.\end{aligned}$$

Usando las conocidas fórmulas trigonométricas

1. $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$.
2. $2\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = 1 - \cos(\alpha)$.

llegamos a que

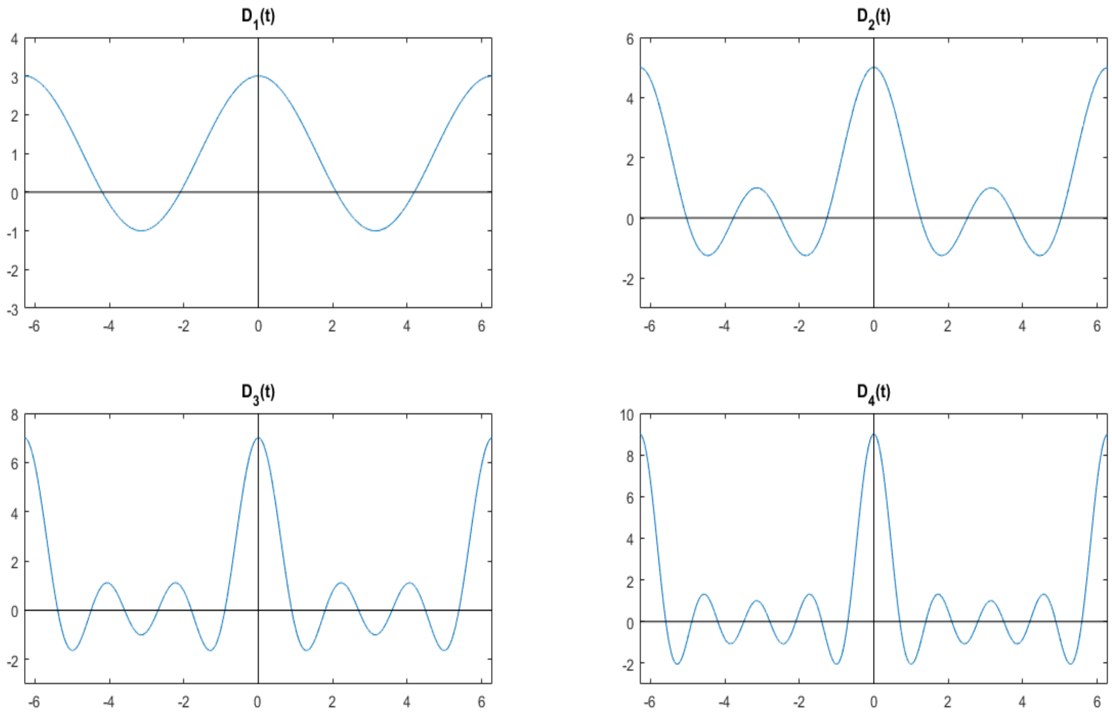
$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{\cos(nt) - \cos((n+1)t)}{2(1-\cos(t))} =& \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{1-\cos(t)} \\ =& \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\ =& \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}.\end{aligned}$$

De donde deducimos el resutado.
c) Basta notar que para todo $j$

$$\int_0^{2\pi} \cos(jt)\, dt = 0$$

e integrar usando a).

Gráficas del núcleo de Diritchlet en $[-2\pi, 2\pi]$ para distintos valores de $n$:




*Observación* 1.4. Si denotamos $S_n f$ como la $n$-ésima suma parcial de la serie de Fourier asociada a la función $f$, se verifica que:

$$S_n f = D_n * f$$

lo cual es interesante de cara al estudio de la convergencia puntual de la serie.

Usando el núcleo de Diritchlet definimos ahora el núcleo de Féjer:

**Definición 1.13.** *Se define el $n$-ésimo núcleo de Fejér como*

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} D_j(t) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijt}.$$

*Lema* 1.2. Se tiene que:

a) $K_n(t) = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{\operatorname{sen}^2((n+1)\frac{t}{2})}{\operatorname{sen}^2(\frac{t}{2})}$.
b) $K_n(t) \geq 0$.
c) $\|K_n\|_1 = 1$, para todo $n$.

*Demostración.* a) Usando la identidad trigonométrica

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

obtenemos la siguiente igualdad

$$2\operatorname{sen}((2j+1)u)\operatorname{sen}(u) = \cos(2ju) - \cos(2(j+1)u)$$

y despejando:

$$\operatorname{sen}((2j+1)u) = \frac{1}{2\operatorname{sen}(u)}[\cos(2ju) - \cos(2(j+1)u)].$$

Si sumamos aquí en $j$, teniendo en cuenta la suma en cosenos es telescópica, obtenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}\operatorname{sen}((2j+1)u) &= \frac{1}{2\operatorname{sen}(u)}\sum_{j=0}^{n}[\cos(2ju) - \cos(2(j+1)u)] \\ &= \frac{1-\cos(2(n+1)u)}{2\operatorname{sen}(u)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2((n+1)u)}{\operatorname{sen}(u)}.\end{aligned}$$

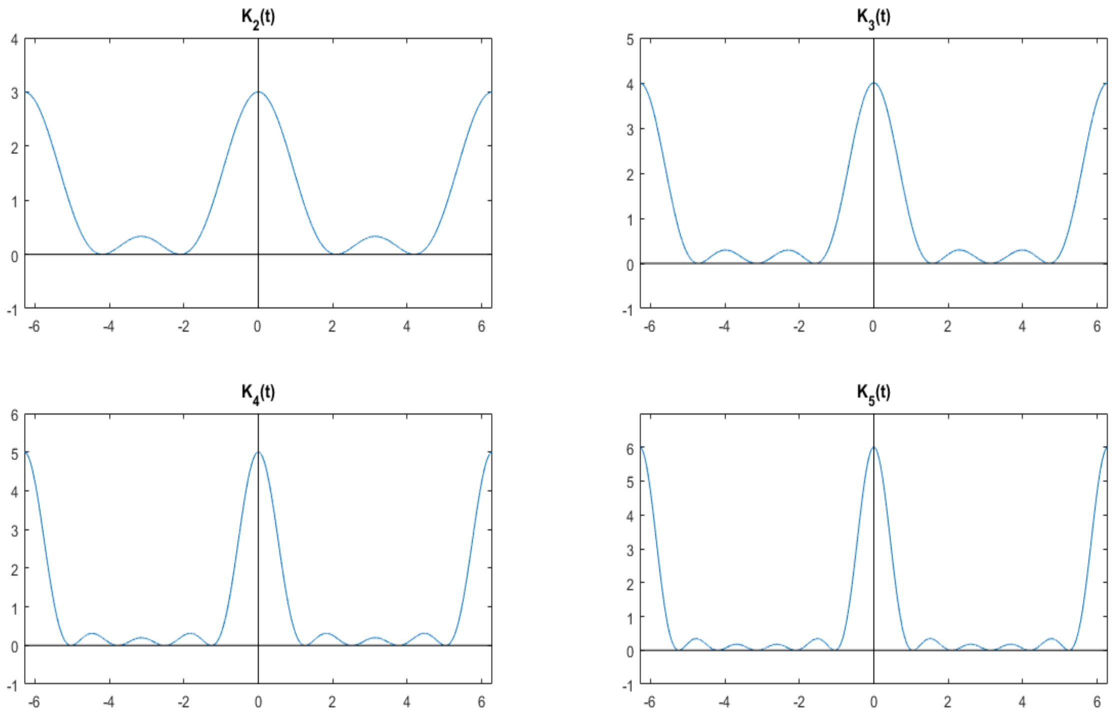
(en la última igualdad usamos que $2\operatorname{sen}^2(\alpha) = 1 - \cos(2\alpha)$)
Si ahora tomamos $u = \frac{t}{2}$ y dividimos a cada lado de la ecuación por $\operatorname{sen}(u)$, usando la expresión en senos del núcleo de Diritchlet vista en el Lema 1.1 obtenemos el resultado.
b) Consecuencia directa de c).
c) Puesto que $K_n \geq 0$, se tiene

$$\|K_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(t)\,dt$$

luego basta integrar usando la primera definición de $K_n(t)$.

∎

Gráficas del núcleo de Féjer en $[-2\pi, 2\pi]$ para distintos valores de $n$:




Introducimos también el núcleo de Poisson como sigue:

**Definición 1.14.** *Dado $r \in (0,1)$, se define el Núcleo de Poisson asociado a $r$ como*

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{-int}.$$

*Lema* 1.3. Para todo $r \in (0,1)$, se tiene que

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{|1-re^{it}|^2}$$

y, por tanto, $P_r(t) \geq 0$.

*Demostración.* Basta notar, usando la suma geométrica, que:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} = 1 + \frac{re^{it}}{1-re^{it}} + \frac{re^{-it}}{1-re^{-it}} = \frac{1-r^2}{|1-re^{it}|^2}.$$

A lo largo de nuestro curso de Variable Compleja, vimos que dada una función continua $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$, podíamos usar el núcleo de Poisson para definir la función conocida como "Integral de Poisson de $\varphi$":

**Definición 1.15.** *Sea $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces se define la integral de Poisson de $\varphi$ como*

$$P[\varphi](re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\alpha - t)\varphi(e^{it})\ dt, \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ 0 \leq r \leq 1.$$

Recordamos algunas de sus propiedades en la siguiente proposición:

*Proposición* 1.6. Sea $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces tenemos que:

a) $P[\varphi]$ es una función armónica en $\mathbb{D}$, es decir, su laplaciano es nulo en $\mathbb{D}$.
b) Para todo $z \in \mathbb{D}$, se tiene que

$$P[\varphi](z) = \widehat{\varphi}(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{\varphi}(m)z^m + \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{\varphi}(-m)\bar{z}^m.$$

c) Dado $z_0 \in \partial\mathbb{D}$, se verifica que $\lim_{z\to z_0} P[\varphi](z) = \varphi(z_0)$, por tanto, la integral de Poisson extiende toda función continua sobre $\partial\mathbb{D}$ a $\mathbb{D}$ de manera armónica.

Sigamos con alguno de los resultados clásicos del análisis de Fourier.

**Definición 1.16.** *Dada una serie de funciones cuya sucesión de sumas parciales viene dada por $\{S_n(x)\}_n$, entonces decimos que $\{S_n(x)\}_n$ converge en Media-Cesaro a f unifomemente si*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} S_i(x)$$

*converge uniformemente a f.*

*Observación* 1.5. En el caso en que $S_n(f)$ denota la $n$-ésima suma parcial de la serie de Fourier asociada a $f$, se verifica que

$$\sigma_n(f) = f * K_n.$$

**Teorema 1.1 (Fejer).** *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ y además es continua en cada punto de un intervalo cerrado I, entonces la sucesión de las sumas parciales asociada a la serie de Fourier de f converge en Media-Cesaro a f uniformemente en I.*

Este resultado se encuentra probado en [4], y nos permite probar la unicidad de los coeficientes de Fourier:

*Corolario* 1.1. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $\widehat{f}(n) = 0$ para todo $n$ entero, entonces $f = 0$. En consecuencia, si $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ y $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ para todo $n$ entero, entonces $f = g$.

*Demostración.* Como $f$ es integrable, podemos definir

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

Entonces $F$ es continua, y además, por ser $\widehat{f}(0) = 0$, $F$ es $2\pi$-periódica. Por tanto, dado $n \neq 0$, por el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}\widehat{F}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^x f(t)e^{-inx}\, dtdx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\int_t^{2\pi} f(t)e^{-inx}\, dxdt \\ &= \frac{1}{2\pi in}\int_0^{2\pi} f(t)(e^{-int} - 1)\, dt = \frac{1}{in}(\widehat{f}(n) - \widehat{f}(0)) = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, por el teorema de Féjer, $F(x) = \widehat{F}(0)$ para todo $x$, y aplicando el teorema de diferenciación de Lebesgue obtenemos que $f = 0$ en casi todo. ▌

**Teorema 1.2 (Lema de Lebesgue-Riemann).** *Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$, entonces* $\lim_{|n|\to+\infty} \widehat{f}(n) = 0$.

*Demostración* (Idea). Paso 1: Si $f$ es una funcion indicadora $f = \chi_{[p,q]}$ de un intervalo $[p,q] \subseteq \mathbb{T}$, el resultado se tiene simplemente integrando.
Paso 2: Si $f = \sum_{i=1}^k b_i\chi_{[p_i,q_i]}$ es una función escalonada, se mantiene el resultado por linealidad.
Paso 3: Aprovechando que es bien conocido que las funciones escalonadas son densas en $L^1(\mathbb{T})$, tenemos que, dada $f \in L^1(\mathbb{T})$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ ,existe $\varphi$ escalonda tal que $\|f - \varphi\|_1 < \varepsilon/2\pi$. Por ello:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\, dt\right| &\leq \left|\int_0^{2\pi} (f(t) - \varphi(t))e^{-int}\, dt\right| + \left|\int_0^{2\pi} \varphi(t)e^{-int}\, dt\right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |f(t) - \varphi(t)|\, dt + \left|\int_0^{2\pi} \varphi(t)e^{-int}\, dt\right| \\ &< \varepsilon + \left|\int_0^{2\pi} \varphi(t)e^{-int}\, dt\right|\end{aligned}$$

y tomando límites usando el paso dos concluimos que, para todo $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{|n|\to+\infty} |\widehat{f}(n)| < \epsilon$$

de lo cual deducimos el resultado. ▌

El Lema de Riemman-Lebesgue nos dice, como primera aproximación sobre el tamaño de los coeficientes de Fourier de las funciones de $L^1(\mathbb{T})$, que tienden a cero. En el siguiente capítulo nuestro objetivo será ver si, para las funciones integrables, se puede decir algo mejor que esto.

# 2 Coeficientes de Fourier de funciones integrables

Por el Lema de Riemann-Lebesgue, hemos visto que los coeficientes de Fourier de las funciones de $L^1(\mathbb{T})$ están en $\mathbf{c}_0$ veamos si podemos decir algo más sobre el tamaño. Para ello nos plantemos ahora el siguiente problema:

**Dada una sucesión $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ positiva, tal que $\lim_{|j|\to+\infty} a_j = 0$, ¿existe $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que, para todo $j$ entero, $|\hat{f}(j)| \geq a_j$?**

A lo largo de este capítulo veremos que la respuesta a esto es afirmativa, por tanto lo mejor resultado que podemos tener sobre el tamaño de los coeficientes de Fourier de una función integrable es el Lema de Riemann-Lebesgue.
Vayamos con algunos resultados previos, necesarios para la construcción que vamos a realizar.

*Observación 2.1.* Si $f$ es una función par y real, entonces tenemos $\widehat{f}(j) = \widehat{f}(-j)$, y por tanto su desarrollo de Fourier es $S[f] \sim \sum_{j=0}^{+\infty} a_j \cos(jt)$, donde $a_0 = \widehat{f}(0)$ y $a_j = 2\widehat{f}(j)$ para todo $j \geq 1$.
Por otro lado, si dada $f \in L^1(\mathbb{T})$ tenemos un desarrollo de la forma

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j cos(jt)$$

entonces se verifica que

$$\widehat{f}(j)=\widehat{f}(-j)=\begin{cases}\frac{b_j}{2}, & \text{si } j>1\\ 0, & \text{si } j=0.\end{cases}$$

En efecto, como

$$\cos(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},$$

entonces se tiene que

$$f(t)=\sum_{j=0}^{\infty}b_j\frac{e^{ijt}+e^{-ijt}}{2}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{b_j}{2}e^{ijt}+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{b_j}{2}e^{-ijt}=b_0+\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_{|j|}}{2}e^{ijt}.$$

Por tanto, a la hora de trabajar en nuestro problema, podremos trabajar con desarrollos en cosenos. Basta definir la sucesión $\{b_j\}_{j=0}^{\infty}$, donde $b_j=\text{máx}\{a_j,a_{-j}\}$, entonces, si encontramos

$$f(t)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j cos(jt)$$

verificando $|c_j|\geq b_j$, los coeficientes de Fourier de $g(t)=2f(t)$ verificarán

$$|\widehat{g}(j)|\geq a_j,\ \text{para todo } j.$$

Aunque las funciones de la sucesión $\{\cos(jt)\}_{j=0}^{\infty}$ dejan de tener norma 1, se mantiene la ortogonalidad y, además, verifican la condición de Bessel:

$$\left\|\sum_{j=0}^{\infty}c_j\cos(jt)\right\|_2\leq\left(\sum_{j=0}^{\infty}|c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

siendo $\{c_j\}_{j=0}^{\infty}$ es una sucesión de escalares. Cuando tengamos un desarrollo en cosenos notaremos

$$f\sim\sum_{j=0}^{\infty}\check{f}(j)\cos(jt)$$

es decir, se tiene que $2\check{f}(j)=\widehat{f}(j)=\widehat{f}(-j)$ si $j>1$, y $\check{f}(0)=\widehat{f}(0)$.

*Lema 2.1.* $\widehat{K_n}(j)=1-\frac{|j|}{n+1}$, si $n\geq|j|$ , y 0 en caso contrario.

*Demostración.* Calculando directamente

$$\widehat{K_n}(j)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_{n-1}(t)e^{ijt}dt=\sum_{m=-n}^{n}\left(1-\frac{|m|}{n+1}\right)\int_0^{2\pi}e^{imt}e^{-ijt}dt$$

y, por ser base ortonormal, $\int_0^{2\pi}e^{imt}e^{-ijt}dt=1$, si $m=j$, y 0 en caso contrario, pero sólo hay un sumando donde $m=j$ si $n\geq|j|$. ∎

*Lema 2.2.* Dada cualquier sucesión de números positivos $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ decreciente y tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$, se tiene que $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$

*Demostración.* Por hipótesis, $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n$. Ahora, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0$ natural tal que, para todos $p$ y $n$ números naturales natural con $n \geq n_0$, se tiene:

$$\left|\sum_{j=n}^{n+p} a_j\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Si $p = n \geq n_0$ obtenermos que

$$(n+1)a_{2n} \leq a_n + \ldots + a_{2n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $p = n+1, n \geq n_0$ obtenemos

$$(n+2)a_{2n+1} \leq a_n + \ldots + a_{2n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

y por tanto si $n \geq n_0$ tenemos

$$2na_{2n} \leq 2(n+1)a_{2n} < \varepsilon$$
$$(2n+1)a_{2n+1} \leq (2n+4)a_{2n+1} < \varepsilon$$

de donde deducimos que, para $m$ par o impar con $m \geq 2n_0$, se tiene $ma_m < \varepsilon$ .

**Teorema 2.1.** *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión par (es decir, $a_n = a_{-n}$ para todo n entero) de números reales y positivos que tiende a cero en el infinito. Asumamos que para todo $n \geq 1$ tenemos:*

$$a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n \geq 0 \tag{2.1}$$

*entonces existe $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\widehat{f}(n) = a_n$ para todo n entero.*

*Demostración.* Primero observamos $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_0$ por ser una suma telescópica, ya que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Por otro lado la condición de convexidad (2.1) implica directamente que la sucesión $\{a_n - a_{n+1}\}_{n\geq 0}$ es decreciente, luego por el Lema 2.2 tenemos que $\lim_{n\to+\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0$.

Por otro lado, mediante una simple inducción, se comprueba que

$$\sum_{n=1}^{N}(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) = a_0 - a_1 - a_N + a_{N+1}$$

y que

$$\sum_{n=1}^{N} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) = a_0 - a_N - N(a_N - a_{N+1})$$

y por tanto, tomando límites, tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)=a_0-a_1$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)=a_0.$$

En particular, restando las anteriores sumas llegamos a que, para todo $k$:

$$\sum_{n=k}^{\infty}(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)=a_{k-1}-a_k \tag{2.2}$$

y

$$\sum_{n=k}^{\infty}n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)=a_{k-1}+(k-1)(a_{k-1}-a_k). \tag{2.3}$$

Defino ahora

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)K_{n-1}(t)$$

como por el Lema 1.2 tenemos que $\|K_n\|_1=1$, entonces:

$$\|f\|_1\le\sum_{n=1}^{\infty}\|n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)K_{n-1}(t)\|_1=\sum_{n=1}^{\infty}n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)<+\infty$$

y por tanto $f\in L^1(\mathbb{T})$. Usando ahora la desigualdad anterior, por el Teorema de la convergencia dominada podemos intercambiar la suma con la integral, y obtenemos que, aplicando el Lema 2.1 para calcular $\widehat{K_{n-1}}(j)$:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(j)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)K_{n-1}(t)\right)e^{-ijt}dt\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)K_{n-1}(t))e^{-ijt}dt\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)\widehat{K_{n-1}}(j)\\
&=\sum_{n=|j|+1}^{\infty}n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)\left(1-\frac{|j|}{n}\right)\\
&=\sum_{n=|j|+1}^{\infty}n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)-|j|\sum_{n=|j|+1}^{\infty}(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)\\
&=a_{|j|}+|j|(a_{|j|}-a_{|j|+1})-|j|(a_{|j|}-a_{|j|+1})=a_{|j|}.
\end{aligned}$$

(donde hemos usado las sumas (2.2) y (2.3) para $k = |j| + 1$)
Finalmente, por ser la sucesión par, $\widehat{f}(n) = a_n$ para todo $n$ entero. ∎

*Proposición 2.1.* Dada una sucesión de números positivos $\{w_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $w_n$ tiende a cero cuando $|n| \to +\infty$, entonces existe $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ verificando las condiciones del teorema anterior tal que $a_n \geq w_n$ para todo $n$.

*Demostración.* Sea $c_n = \text{máx}\{w_n, w_{-n}\}$ , defino para toda $n$:

$$f_n(t) = \left(2c_n - \frac{c_n t}{n}\right)\chi_{[0,2n]}(t)$$

y defino también, para $n \geq 0$:

$$a_n = \sup_{k\in\mathbb{N}}\{f_k(n)\}$$
$$a_{-n} = a_n.$$

Como $f_n(n) = c_n$, se tiene que $a_n \geq c_n$. Además, dado $\varepsilon > 0$, como $c_n$ tiende a 0, existe $n_0$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene $2c_n < \varepsilon$. Por tanto para todo $n \geq n_0$ se cumple que $f_n(t) < \varepsilon$ en todo $t \in [0, 2n]$. Por otro lado, para toda $k \leq n_0$ y todo $t > 2n_0$, tenemos que $f_k(t) = 0$ por definición y, en consecuencia, también tenemos que para todo $n \geq n_0$ se da:

$$a_n = \sup_{k\in\mathbb{N}}\{f_k(n)\} = \sup_{k\geq n_0}\{f_k(n)\} < \sup_{k\geq n_0}\{\varepsilon\} = \varepsilon$$

y por tanto $\{a_n\}$ tiende a 0. Por otro lado por ser $f_m$ convexa en $[0, +\infty)$:

$$f_m\left(\frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{2}(n+1)\right) = f_m(n) \leq \frac{1}{2}f_m(n-1) + \frac{1}{2}f_m(n+1).$$

Luego, para todo $n \geq 1$

$$2f_m(n) \leq f_m(n-1) + f_m(n+1).$$

Tomamos ahora supremos en la ecuación anterior, entonces, como el supremo de la suma es menor que la suma de los supremos, se obtiene que $2a_n \leq a_{n-1} + a_{n+1}$, por tanto la sucesión verifica la condición de convexidad (2.1). ∎

*Corolario 2.1.* Dada una sucesión de números positivos $\{w_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tendiendo a cero cuando $|n| \to +\infty$, existe $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\widehat{f}(n) \geq w_n$ , para todo $n$ entero.

*Demostración.* Por la proposición anterior, existe $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ con $a_n \geq w_n$, a la cual puedo aplicarle el Teorema 2.1. De este modo obtengo $f \in L^1(\mathbb{T})$ verificando

$$\widehat{f}(n) = a_n \geq w_n, \text{ para todo } n \text{ entero}$$

quedando probado el teorema. ∎

Con esto obtenemos la respuesta planteada al principio del capítulo, viendo que no hay nada mejor que el Lema de Riemann-Lebesgue para funciones en $L^1$. Lo siguiente ahora sería preguntarse si se puede decir algo más para funciones de algún subconjunto de $L^1$, cuestión que abordamos en el siguiente capítulo.

# 3 Coeficientes de Fourier de funciones continuas

En este capítulo daremos la demostración clásica del teorema de Kahane-Katznelson-De Leeuw, que da solución a siguiente problema:

**Dada una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de números positivos tal que $\sum_n a_n^2 < +\infty$, ¿existe $F \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ tal que, para todo $n$ entero, $|\widehat{F}(n)| \geq a_n$?**

Para ello usaremos algunos métodos probabilísticos basados en series de Fourier aleatorias. Antes de dar la propia demostración del Teorema, como primera aplicación de estos métodos, resolveremos un caso menos restrictivo en el cual simplemente exigimos que $F \in L^p(\mathbb{T})$ para cierto $p \in [1, +\infty)$ usando la llamada desigualdad de Khintchine. Finalmente procederemos con el caso en que $F \in L^\infty(\mathbb{T})$, a partir del cual probaremos nuestro objetivo. Introducimos algunos conceptos básicos de la Teoría de la probabibidad.

**Definición 3.1.** *Un espacio de probabilidad es una tripleta $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, donde $\Omega$ es un conjunto llamado el espacio de eventos, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es un $\sigma$-álgebra sobre $\Omega$, a cuyos elementos llamamos conjuntos medibles, y $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ es una medida positiva, con $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ llamada probabilidad. Asumimos que la probabilidad $\mathbb{P}$ es completa respecto a $\mathcal{A}$, es decir, si $B \subseteq C \in \mathcal{A}$ con $\mathbb{P}(C) = 0$, entonces $B \in \mathcal{A}$.*

**Definición 3.2.** *Una variable aleatoria real sobre $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ es una aplicacion $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ que es medible para el $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ y el $\sigma$-álgebra de Borel, es decir,*

*$X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo $B$ boreliano de $\mathbb{R}$. Podemos definir una probabilidad en $\mathbb{R}$ asociada a $X$ dada por*

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}[X^{-1}(B)].$$

*A $\mathbb{P}_X$ se le llama distribución de $X$.*

**Definición 3.3.** *Cuando $X$ es integrable, llamamos esperanza de $X$ a*

$$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} x \ d\mathbb{P}_X(x).$$

**Definición 3.4.** *Una familia de subconjuntos medibles $\{B_i\}_{i\in I}$ se dice independiente si, para cada elección de índices distintos $i_1, ..., i_p \in I$ (con $p \in \mathbb{N}$), tenemos que*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{p} B_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{p} \mathbb{P}(B_{i_j}).$$

*Decimos que una familia de variables aleatorias $\{X_i\}_{i\in I}$ es independiente si es independiente cada familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$, donde cada $A_i$ está en el $\sigma$-álgebra generada por $X_i$, es decir, para cada $i$ existe $B_i$ boreliano de $\mathbb{R}$ con $A_i = X_i^{-1}(B_i)$.*

*Proposición 3.1.* La familia de variables aleatorias $X_1, ..., X_n$ es independiente si, y sólo si, la distribución del vector aleatorio $(X_1, ..., X_n)$ es igual a la medida producto de las distribuciones de $X_1, ..., X_n$.

*Proposición 3.2.* Sea $X$ e $Y$ variables aleatorias independientes, entonces se tiene que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

**Definición 3.5.** *Dada una variable aleatoria $X$, y dado $p \in [1, +\infty)$ definimos la norma $p$ de $X$ como*

$$\|X\|_p = (\mathbb{E}(|X|^p))^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega |X(\omega)|^p \, d\mathbb{P}(\omega)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Introducimos ahora la llamada sucesión de Rademacher, necesaria para la construcción que llevaremos a cabo.

**Definición 3.6.** *Denotaremos $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ como la sucesión de funciones de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$ dadas por las fórmulas*

$$r_n(t) = \operatorname{sgn}\ \sin(2^n \pi t)$$

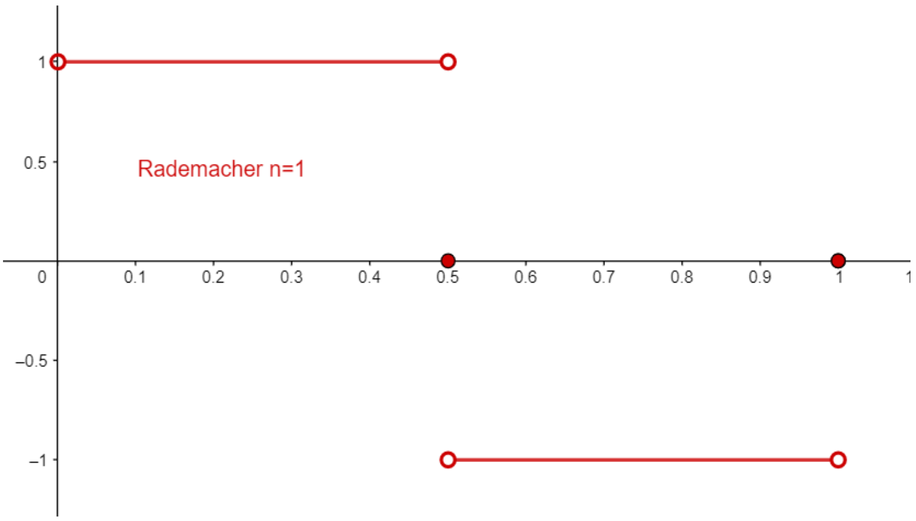
*donde sgn denota la función signo, dada por*

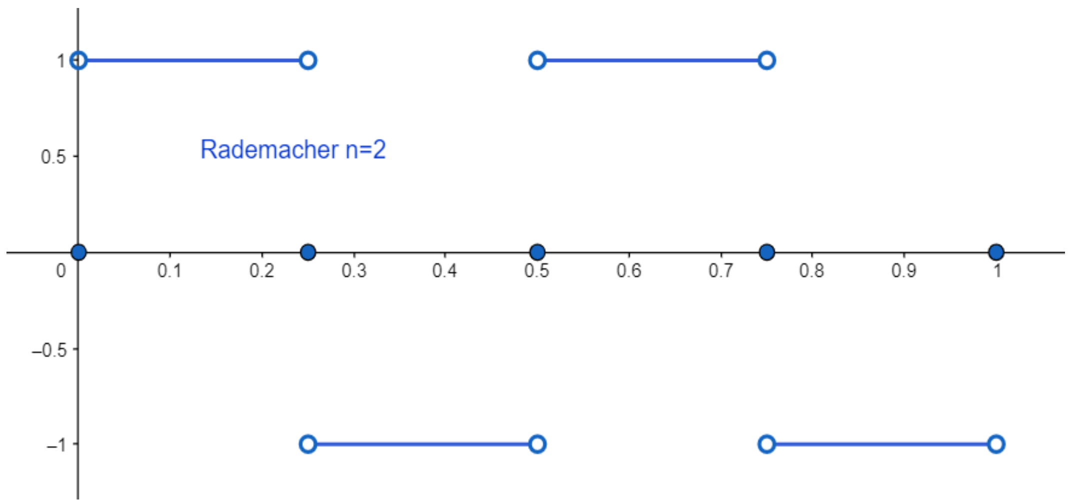
$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

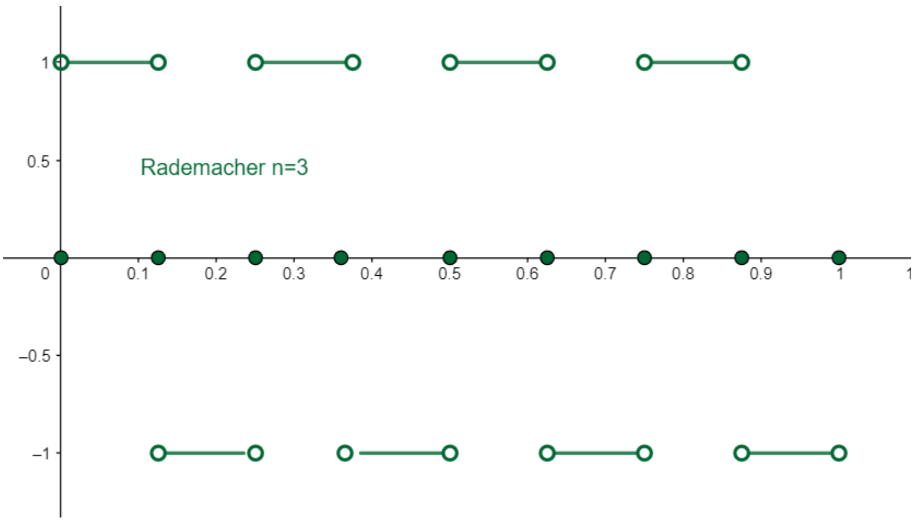
*La sucesión anterior es conocida como la sucesión de Rademacher.*

*Observación* 3.1. De hecho la sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ forma una familia de variables aleatorias independientes. Para cada $n$, la distribucion del vector aleatorio $(r_1, ..., r_n)$ es la probabilidad que asigna $\frac{1}{2^n}$ a cada elección de signos, es decir, a cada $n$-tupla $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$, donde $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$ para $j = 1, ..., n$.

A continuación, adjuntamos las gráficas de $r_1$, $r_2$ y $r_3$:






*Observación* 3.2. Las funciones de Rademacher toman los valores 1 y -1 en dos conjuntos cada uno de medida $\frac{1}{2}$ , y el valor cero en un conjunto finito en puntos por lo cual

$$\int_0^1 |r_n(t)|^2 \, dt = 1.$$

Además, si $i \neq j$ se comprueba que

$$m\left(\{t \in [0,1], \;\; r_i(t)r_j(t) = 1\}\right) = m\left(\{t \in [0,1], \;\; r_i(t)r_j(t) = -1\}\right)$$

de donde deducimos

$$\int_0^1 r_i(t)r_j(t) \, dt = 0.$$

Por tanto $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ forma un sistema ortonormal en $L^2([0,1])$.

*Observación* 3.3. Sea ahora $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = r < +\infty.$$

Denotamos entonces

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} b_n r_n. \tag{3.1}$$

Como la sucesión de Rademacher forma un sistema ortonormal, se verifica la condición de Bessel, por lo que:

$$\|F\|_2 = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} b_n r_n\right\|_2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{r} < +\infty.$$

Por tanto $F \in L^2([0,1])$.

Introducimos ahora la llamada "Desigualdad de Khintchine":

**Teorema 3.1 (Desigualdad de Khintchine).** *Para cada $p \geq 2$, existe una constante $B_p > 0$ tal que, para todo $N \in \mathbb{N}$, y toda $(u_1, ..., u_N)$ $N$-upla de números reales, si consideramos la variable aleatoria $X = \sum_{n=1}^{N} u_n r_n$, entonces:*

$$\|X\|_p \leq B_p \|X\|_2 .$$

*Demostración.* Primero asumamos que $p = 2q$, con $q$ número entero. Por el teorema multinomial tenemos que

$$|X|^p = \left(\sum_{n=1}^{N} u_n r_n\right)^{2q} = \sum \frac{(2q)!}{\alpha_1!...\alpha_N!} r_1^{\alpha_1}...r_N^{\alpha_N} u_1^{\alpha_1}...u_N^{\alpha_N}$$

(donde la última suma se realiza en todas las $N$-uplas de enteros $(\alpha_1, ..., \alpha_N)$ que suman $2q$ ).
Por independencia, al calcular la esperanza obtenemos:

$$\mathbb{E}(r_1^{\alpha_1}...r_N^{\alpha_N}) = \mathbb{E}(r_1^{\alpha_1})...\mathbb{E}(r_N^{\alpha_N}) = \begin{cases} 1, & \text{si todos los } \alpha_i \text{ son pares} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

pues $\mathbb{E}(r_i^{2m}) = 1$ y $\mathbb{E}(r_i^{2m+1}) = 0$ para todo $m$ entero. Por tanto

$$\mathbb{E}(|X|^p) = \sum \frac{(2q)!}{2\beta_1!...2\beta_N!} u_1^{2\beta_1}...u_N^{2\beta_N}$$

(esta vez realizando la suma en todas las $N$-uplas de enteros $(\beta_1, ..., \beta_N)$ que suman $q$)
Si ahora usamos que, para todo $\beta \in \mathbb{N}$, se tiene $(2\beta)! \geq 2^\beta \beta!$, llegamos a que:

$$\mathbb{E}(|X|^p) \leq \sum \frac{(2q)!}{2^{\beta_1+...+\beta_N}\beta_1!...\beta_N!} u_1^{2\beta_1}...u_N^{2\beta_N} = \frac{(2q)!}{2^q} \sum \frac{1}{\beta_1!...\beta_N!} (u_1^2)^{\beta_1}...(u_N^2)^{\beta_N}.$$

Multiplicando y dividiendo por $q!$, y usamos la desigualdad

$$\frac{(2q)!}{2^q q!} = \frac{(q+1)...2q}{2^q} \leq \frac{(2q)^q}{2^q} = q^q$$

obtenemos:

$$\mathbb{E}(|X|^p) \leq \frac{(2q)!}{2^q q!} \sum \frac{q!}{\beta_1!...\beta_N!} (u_1^2)^{\beta_1}...(u_N^2)^{\beta_N} \leq q^q \left(\sum_{n=1}^{N} u_n^2\right)^q = q^q \mathbb{E}(X^2)^q = q^q \|X\|_2^{2q} .$$

Por tanto, tomando raíz $2q$-ésima:

$$\|X\|_{2q} \leq \sqrt{q}\,\|X\|_2 .$$

Si ahora $p$ es un número real mayor que dos cualquiera, existe $q$ entero tal que $p \leq 2q$. Como estamos en un espacio de probabilidad, basta usar la desigualdad de Cauchy-Schwartz para finalmente obtener:

$$\|X\|_p \leq \|X\|_{2q} \leq \sqrt{q}\,\|X\|_2 .$$

*Observación* 3.4. Como hemos visto en la anterior demostración, la constante $B_p$ es del orden de $\sqrt{p}$.

*Observación* 3.5. Sin más que aplicar el Lema de Fatou, podemos considerar en la desigualdad de Khintchine variables aleatorias de la forma $X = \sum_{n=1}^{\infty} u_n r_n$

Como primera aplicación de este tipo de series aleatorias y de la desigualdad Khintchine, resolveremos el siguiente problema:

**Sea $p \in [1, +\infty)$, y dada sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de números positivos tal que $\sum_n a_n^2 < +\infty$, ¿existe $F \in L^p(\mathbb{T})$ tal que, para todo $j$ entero, $|\widehat{F}(j)| \geq a_j$?**

Para ello, tenemos la siguiente proposición:

*Proposición* 3.3. Dado $p \geq 2$, existe una constante $C_p$ tal que, para toda sucesión de números positivos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ verificando que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^2 = r < +\infty$, existe una función $f$ tal que:

1. $f \in L^p(\mathbb{T})$
2. $\|f\|_p \leq C_p\sqrt{r}$
3. $|\widehat{f}(j)| \geq a_j$ para todo $j$ entero

*Demostración.* Seguiremos el razonamiento expuesto en la observación 2.1, para ello defino la sucesión $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, donde $b_n = \text{máx}\,\{a_n, a_{-n}\}$. Defino entonces la siguiente serie aleatoria:

$$G(t,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n r_{n+1}(\omega)\cos(nt) \quad ; \quad t \in \mathbb{T}.$$

Entonces, para todo $t \in \mathbb{T}$:

$$\|G(t,\cdot)\|_2 \leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} b_n r_n \right\|_2 \leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{r} < +\infty,$$

luego $G(t,\cdot) \in L^2([0,1])$. Por otro lado fijada una elección de signos $\omega_0 = \{\varepsilon_n\}_n$ (dónde $\varepsilon_n = \pm 1$) tenemos que:

$$\|G(\cdot,\omega_0)\|_2 = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon_n \cos(nt) \right\|_2 \leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{r} < +\infty,$$

luego $G(\cdot,\omega_0) \in L^2(\mathbb{T})$. Aplicando ahora la desigualdad de Khintchine obtengo:

$$\|G(t,\cdot)\|_p \leq B_p \|G(t,\cdot)\|_2 \leq B_p\sqrt{r}.$$

Teniendo esto en cuenta, y aplicando el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\omega(\|G(\cdot,\omega)\|_p^p) =& \mathbb{E}_\omega \left[ \int_{\mathbb{T}} |G(t,\omega)|^p \, dt \right] = \int_0^1 \int_{\mathbb{T}} |G(t,\omega)|^p \, dt \, d\omega \\
=& \int_{\mathbb{T}} \int_0^1 |G(t,\omega)|^p \, d\omega \, dt = \int_{\mathbb{T}} \|G(t,\cdot)\|_p^p \, dt \\
\leq& \int_{\mathbb{T}} (B_p\sqrt{r})^p \, dt = (B_p\sqrt{r})^p.
\end{aligned}$$

Esto impica que existe una elección de signos $\omega_0 = \{\varepsilon_n\}_n$ tal que verifica

$$\|G(\cdot,\omega_0)\|_p^p = \int_{\mathbb{T}} |G(t,\omega_0)|^p \, dt \leq (B_p\sqrt{r})^p. \tag{3.2}$$

Defino $C_p := \frac{B_p}{2}$ y tomo

$$f(t) = 2G(t,\omega_0) = 2\sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon_n \cos(nt).$$

Por (3.2) se verifican las condiciones 1 y 2, y además, como vimos en la observación 2.1, como $|\varepsilon_n| = 1$ para todo $n$, también verifica la condición 3. ∎

*Observación* 3.6. Como la desigualdad de Khintchine no es validad para $p = \infty$ , en ese caso no se puede aplicar este última razonamiento, y por ello habrá que buscar otras formas de abarcarlo.

Sea ahora $F$ definida como (3.1), veamos algunas propiedades más de este tipo de series:

*Lema* 3.1. Se tiene que $\cosh(u) \leq e^{\frac{u^2}{2}}$ para todo $u$ número real.

*Demostración.* Como $(2n)! \geq 2^n n!$ para todo $n$ natural, se tiene que

$$\cosh(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} u^{2n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} u^{2n} = e^{\frac{u^2}{2}}$$

∎

Este Lema nos permite probar la siguiente proposición, que es un resultado más fuerte aún que la desigualdad de Khintchine:

*Proposición* 3.4. Sea $F$ definida como en (3.1), entonces, dado $\lambda > 0$, se tiene que

$$\mathbb{E}_\omega(e^{\lambda F}) \leq e^{\frac{\lambda^2 r}{2}}$$

*Demostración.* Si vemos primero el caso finito, usando la independencia obtenemos

$$\mathbb{E}_\omega \left( \exp \left( \lambda \sum_{n=1}^{N} b_n r_n \right) \right) = \mathbb{E}_\omega \left( \prod_{n=1}^{N} \exp(\lambda b_n r_n) \right) = \prod_{n=1}^{N} \mathbb{E}_\omega(\exp(\lambda b_n r_n))$$

notando que

$$\mathbb{E}_\omega(\exp(\lambda b_n r_n)) = \frac{1}{2} \exp(-\lambda b_n) + \frac{1}{2} \exp(\lambda b_n) = \cosh(\lambda b_n)$$

y aplicando el lema anterior:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\omega(\exp(\lambda \sum_{n=1}^{N} b_n r_n)) &= \prod_{n=1}^{N} \cosh(\lambda b_n) \leq \prod_{n=1}^{N} \exp\left(\frac{\lambda^2 b_n^2}{2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{\lambda^2}{2} \sum_{n=1}^{N} b_n^2\right) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2 r}{2}\right). \end{aligned}$$

Si aplicamos el lema de Fatou en la desigualdad anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\omega(e^{\lambda F}) &= \mathbb{E}_\omega \left( \liminf_{N\to+\infty} \left( \exp \left( \lambda \sum_{n=1}^{N} b_n r_n \right) \right) \right) \\ &\leq \liminf_{N\to+\infty} \mathbb{E}_\omega \left( \exp \left( \lambda \sum_{n=1}^{N} b_n r_n \right) \right) \\ &\leq \exp\left(\frac{\lambda^2 r}{2}\right). \end{aligned}$$

∎

*Observación* 3.7. Veamos que, en efecto, la proposición anterior nos permite dar una nueva prueba de la desigualdad de Khintchine:
Dados $\lambda > 0$ y $p \geq 2$, consideramos la función

$$g(y) = \exp(\lambda y) y^{-p}.$$

Si ahora derivamos obtenemos que

$$g'(y) = e^{\lambda y} y^{-p-1}(\lambda y - p).$$

Si igualamos a cero, como $e^{\lambda y} y^{-p-1} \geq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$, llegamos a que la función $g$ tiene un mínimo relativo en $y = \frac{p}{\lambda}$, además, como

$$\begin{cases} g'(y) > 0, & \text{si } y > \frac{p}{\lambda} \\ g'(y) < 0, & \text{si } y < \frac{p}{\lambda} \end{cases}$$

por la monotonía de la función, dicho mínimo es un mínimo global. Por tanto, para todo $y \in \mathbb{R}$, y para todo $\lambda > 0$ tenemos:

$$g(y) = \exp(\lambda y) y^{-p} \geq g\left(\frac{p}{\lambda}\right) = \left(\frac{\lambda}{p}\right)^p e^p.$$

Luego despejando obtenemos, para todo $y \in \mathbb{R}$, y para todo $\lambda > 0$, la siguiente desigualdad:

$$e^{\lambda y} \geq \left(\frac{\lambda y}{p}\right)^p.$$

Normalizando, supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = 1$. Defino entonces

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} b_n r_n$$

Aplicando la proposición 1.1, como las funciones de Rademacher forman un sistema ortonormal obtenemos que $\|F\|_2 = 1$. Ahora aplicando la desigualdad anterior:

$$\left(\frac{\lambda |F|}{p}\right)^p \leq e^{\lambda |F|} \leq e^{\lambda F} + e^{-\lambda F}.$$

Si integramos, por la Proposición 3.4 llegamos a que:

$$\int_0^1 \left(\frac{\lambda |F|}{p}\right)^p d\omega \leq 2 \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \tag{3.3}$$

Si tomamos $\lambda = \sqrt{p}$ y despejamos en (3.3):

$$\int_0^1 |F|^p \, d\omega \leq 2e^{\frac{p}{2}} p^{\frac{p}{2}}.$$

Finalmente si tomamos raíz $p$-ésima tenemos:

$$\|F\|_p \leq \sqrt[p]{2}\sqrt{e}\sqrt{p} \leq 2\sqrt{e}\sqrt{p} = 2\sqrt{e}\sqrt{p}\,\|F\|_2$$

consiguiendo así una constante del mismo orden que la obtenida en la desigualdad de Khintchine.

*Proposición 3.5.* Sea $F$ definida como en (3.1). Entonces, dado $\mu > 0$ y tomando $\lambda = \sqrt{2\mu r}$, se tiene que

$$\mathbb{E}_\omega \left[ ((|F(\omega)| - \lambda)^+)^2 \right] \leq r\gamma(\mu),$$

donde $\gamma(\mu) = 4\mu^{-1}e^{-2}e^{-\mu}$ y $(\cdot)^+$ denota la parte positiva.

*Demostración.* Primero veamos que :

$$((F-\lambda)^+)^2 \leq 4\lambda^{-2}e^{-2-\lambda^2}e^{\lambda F}.$$

Notemos que si $\lambda \geq F$ es trivial. Veamos en el caso $F > \lambda$:
Consideremos, para todo $y > \lambda$, la función

$$f(y) = (y-\lambda)^2 e^{-\lambda y}.$$

Si derivamos e igualamos a cero tenemos:

$$\begin{aligned} -\lambda(y-\lambda)^2 e^{-\lambda y} + 2e^{-\lambda y}(y-\lambda) &= 0 \\ e^{-\lambda y}(y-\lambda)[-\lambda y + \lambda^2 + 2] &= 0 \\ y &= \frac{2+\lambda^2}{\lambda}. \end{aligned}$$

Además, en la anterior ecuación fácilmente vemos el signo de $f'$, teniéndose:

$$\begin{cases} f'(y) < 0, & \text{si } y > \frac{2+\lambda^2}{\lambda} \\ f'(y) > 0, & \text{si } y < \frac{2+\lambda^2}{\lambda}, \end{cases}$$

por lo que llegamos a que $f$ tiene un máximo absoluto en $y = \frac{2+\lambda^2}{\lambda} > \lambda$. Esto implica que

$$\begin{aligned} ((F-\lambda)^+)^2 = (F-\lambda)^2 &= (F-\lambda)^2 e^{\lambda F} e^{-\lambda F} \\ &\leq e^{\lambda F} \sup_{y>\lambda} ((y-\lambda)^2 e^{-\lambda y}) \\ &\leq e^{\lambda F} \left( \frac{2+\lambda^2}{\lambda} \right) \\ &= 4\lambda^{-2} e^{-2-\lambda^2} e^{\lambda F}. \end{aligned}$$

Como la esperanza es monótona y por la Proposición 3.4 obtenemos

$$\mathbb{E}_\omega[((F-\lambda)^+)^2] \leq 4\lambda^{-2}e^{-2}e^{-\lambda^2}\mathbb{E}_\omega(e^{\lambda F}) = 4\lambda^{-2}e^{-2}e^{-\lambda^2}e^{\frac{\lambda^2 r}{2}}.$$

Aplicando ahora la desigualdad anterior a $\tilde{F}(t) = \frac{1}{\sqrt{r}}F(t)$ y $\tilde{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{r}}\lambda$, como $\tilde{r} = 1$ obtengo:

$$\mathbb{E}_\omega[((\tilde{F}-\tilde{\lambda})^+)^2] \leq 4r\lambda^{-2}e^{-2}e^{\frac{-\lambda^2}{2r}}.$$

Luego:

$$\mathbb{E}_\omega[((F-\lambda)^+)^2] = rE[((\tilde{F}-\tilde{\lambda})^+)^2] \leq 4r^2\lambda^{-2}e^{-2}e^{\frac{-\lambda^2}{2r}}.$$

Si ahora cambio $F$ por $-F$ obtengo la misma desigualdad, por lo que:

$$\mathbb{E}_\omega[((|F|-\lambda)^+)^2] \leq \mathbb{E}_\omega[((F-\lambda)^+)^2] + \mathbb{E}_\omega[((-F-\lambda)^+)^2] \leq 2\cdot 4r^2\lambda^{-2}e^{-2}e^{\frac{-\lambda^2}{2r}}.$$

Así, si recordamos la fórmula de $\gamma$:

$$\mathbb{E}_\omega[((|F|-\lambda)^+)^2] \leq r\gamma(\mu).$$

Concluyendo así la prueba. ∎

Como hicimos en la prueba del caso $L^p$, consideraremos el siguiente caso de serie aleatoria: Dada una sucesión $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 = r < +\infty.$$

Defino la siguiente serie aleatoria:

$$G(t,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n r_{n+1}(\omega) cos(nt)\ ; \quad t \in \mathbb{T}. \tag{3.4}$$

Tal como vimos en dicha prueba, fijado $t$ tenemos $G(t,\cdot) \in L^2([0,1]$, y fijada una elección de signos $\omega_0$, se tiene que $G(\cdot,\omega_0) \in L^2(\mathbb{T})$.

*Observación* 3.8. Sea $G$ definida como en (3.4), como

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 \cos^2(nt) \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 = r < +\infty$$

Se comprueba facilmente que las Proposiciones 3.4 y 3.5 se mantienen para para $G_t(\omega) = G(t,\omega)$, con $r = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2$.

Vamos a centrarnos ahora en el siguiente problema:

**Dada sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de números positivos tal que $\sum_n a_n^2 < +\infty$, ¿existe $F \in L^\infty(\mathbb{T})$ tal que, para todo $j$ entero, $|\hat{F}(j)| \geq a_j$?**

Si recordamos que $\gamma(\mu) = 4\mu^{-1}e^{-2}e^{-\mu}$, tenemos el siguiente Lema, necesario para probar nuestro Teorema:

*Lema* 3.2. Dada $\{b_n\}_{n=0}^{+\infty}$ de términos positivos con $r = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2 < \infty$, y dado $\mu > 0$, si denotamos $\lambda = \sqrt{2\mu r}$, existe al menos una elección de signos $\omega_0 = \{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ tal que a serie $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n b_n cos(nt)$ está definida en casi todo y satisface:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}((|f(t)| - \lambda)^+)^2 dt \leq r\gamma(\mu).$$

*Demostración.* Supongamos que no existe dicha elección, si consideramos $G(t,\omega)$ definida como en (3.3) entonces tenemos que :

$$\mathbb{P}_\omega\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}((|G(t,\omega)| - \lambda)^+)^2 dt > r\gamma(\mu)\right] = 1.$$

Lo que implica que

$$r\gamma(\mu) < \mathbb{E}_\omega\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}((|G(t,\omega)| - \lambda)^+)^2 dt\right].$$

Por otro lado, por la observación 3.8 tenemos que:

$$\mathbb{E}_\omega\left[((|F(\omega)| - \lambda)^+)^2\right] \leq r\gamma(\mu).$$

Integrando y aplicando el teorema de Fubini:

$$\mathbb{E}_\omega\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}((|G(\omega)| - \lambda)^+)^2\, dt\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\mathbb{E}[((|G(\omega)| - \lambda)^+)^2]\, dt$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} r\gamma(\mu)\, dt = r\gamma(\mu)$$

llegando así a una contradicción. ∎

Esta propiedad de $f$ nos permite ver, usando la proyección

$$g = \begin{cases} \lambda, & \text{si } f(t) > \lambda \\ f(t), & \text{si } f(t) \in [-\lambda, \lambda] \\ -\lambda, & \text{si } f(t) < -\lambda \end{cases}$$

y definimos $h = f - g$, vemos que "$f$ casi pertenece a $L^\infty$", es decir, que dado $\mu > 0$ podemos descomponer $f = g + h$, donde se verifica que $\|h\|_2 \leq r\gamma(\mu)$ y $\|g\|_\infty \leq \lambda$. Este hecho será vital en el razonamiento que haremos.

*Observación* 3.9. Veamos que se puede obtener un resultado parecido para el sistema $\{e^{ijt} : j \in \mathbb{Z}\}$:
Usando la biyección $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$\Phi(n) = \begin{cases} \quad m \text{ si } n \text{ es par de la forma } n = 2m, m \geq 1 \\ -m \text{ si } n \text{ es par de la forma } n = 2m+1, m \geq 0 \end{cases}$$

entonces, si para cada $j$ entero defino $R_j = r_{\Phi^{-1}(j)}$, obtengo la sucesión de Rademacher indexada sobre $\mathbb{Z}$. Dada entonces una sucesión de términos positivos $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ verificando que $\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j^2 = r$, si definimos

$$F(t, \omega) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j R_j(\omega) \cos(jt).$$

Entonces, con un razonamiento igual al realizado hasta ahora, obtenemos:

$$\mathbb{E}_\omega \left[ ((|F(\omega)| - \lambda)^+)^2 \right] \leq r\gamma(\mu).$$

Definiendo

$$G(t, \omega) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j R_j(\omega) \text{sen}(jt)$$

análogamente tenemos

$$\mathbb{E}_\omega \left[ ((|F(\omega)| - \lambda)^+)^2 \right] \leq r\gamma(\mu).$$

Por lo cual, juntando las dos ultimas ecuaciones obtengo

$$\mathbb{E}_\omega \left[ ((|F(\omega)| - \lambda)^+)^2 + ((|G(\omega)| - \lambda)^+)^2 \right] \leq 2r\gamma(\mu).$$

Usando esto, y repitiendo la prueba del Lema 3.2, llegamos a que existe una elección de signos $\varepsilon = \{\varepsilon_j\}$ tal que, tomando las series $f(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \varepsilon_j a_j cos(jt)$ y $g(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \varepsilon_j a_j \text{sen}(jt)$, se cumple simultáneamente que:

1. $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}((|f(t)|-\lambda)^+)^2dt \le 2r\gamma(\mu)$.
2. $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}((|g(t)|-\lambda)^+)^2dt \le 2r\gamma(\mu)$.

Luego con esta elección de signos, dado $\mu > 0$ podemos descomponer $f = s_1 + h_1$ y $g = s_2 + h_2$, dónde $\|h_i\|_2 \le 2r\gamma(\mu)$ y $\|s_i\|_\infty \le \lambda$ para $i = 1, 2$. Por lo tanto, con esta elección de signos:

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varepsilon_j a_j e^{ijt} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \varepsilon_j a_j cos(jt) + i\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varepsilon_j a_j \text{sen}(jt) &= (s_1+h_1) + i(s_2+h_2)\\ &= (s_1+is_2) + (h_1+ih_2).\end{aligned}$$

Finalmente, por la desigualdad triángular:

$$\|s_1+is_2\|_\infty \le 2\lambda \quad \text{y} \quad \|h_1+ih_2\| \le 4r\gamma(\mu).$$

**Teorema 3.2.** *Dada $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ de términos positivos con $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = r < +\infty$, entonces existe una sucesión de números reales $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que $|c_n| \ge a_n$ para todo n, y tal que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n cos(nt)$ es una función acotada.*

*Demostración.* Vamos a empezar con $b_n = a_n$ y $\mu = \mu_0 = 4$ (y por tanto $\lambda_0 = \sqrt{8r}$). Sea $f_0(t)$ la función definida por el Lema anterior y sea $g_0(t)$ su proyección en el intervalo $[-\lambda_0, \lambda_0]$, es decir:

$$g_0(t) = \begin{cases} f_0(t), & \text{si } f_0(t) \in [-\lambda_0, \lambda_0] \\ -\lambda_0, & \text{si } f_0(t) \le -\lambda_0 \\ \lambda_0, & \text{si } f_0(t) \ge \lambda_0 \end{cases}.$$

Entonces tenemos que

$$\|f_0 - g_0\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f_0(t)-g_0(t))^2dt \le r_0\gamma(\mu_0)$$

ya que $(f_0(t) - g_0(t))^2 = ((|f_0(t)| - \lambda_0)^+)^2$. Si escribimos ahora los desarrollos en cosenos:

$$f_0 \sim \sum_{n=0}^{\infty} \check{f}_0(n)cos(nt)$$

$$g_0 \sim \sum_{n=0}^{\infty} \check{g}_0(n)cos(nt)$$

donde $|f_0(n)| = b_n = a_n$, pues $\epsilon_n = \pm 1$.
Además, por la Observación 2.1, se tiene que $\check{f}_0(n) = 2\,\widehat{f}_0(n) = 2\,\hat{f}_0(-n)$, para $n \geq 1$, y $\check{f}_0(0) = \widehat{f}_0(0)$. Aplicando ahora la desigualdad de Parseval:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\check{f}_0(n) - \check{g}_0(n))^2 \leq r_0\gamma(\mu_0).$$

Vamos a escribir ahora $n \in \mathfrak{B}_0$ ($n$ malo) si $|\check{g}_0(n)| \leq a_n(1 - \frac{1}{3})$. Entonces, si $n \in \mathfrak{B}_0$ tenemos

$$|\check{f}_0(n) - \check{g}_0(n)| \geq ||\check{f}_0(n)| - |\check{g}_0(n)|| \geq \frac{1}{3}a_n.$$

Definimos ahora

$$r_1 = \sum_{n\in\mathfrak{B}_0}\left(2a_n\left(1 - \frac{1}{3}\right)\right)^2 \leq 16\sum_{n\in\mathfrak{B}_0}(\check{f}_0(n) - \check{g}_0(n))^2 \leq 32r_0\gamma(\mu_0).$$

Entonces aplico el Lema a $b_n = 2a_n(1 - \frac{1}{3})$, si $n \in \mathfrak{B}_0$, y $b_n = 0$ en caso contrario, y $\mu = \mu_1 = 8$. De nuevo obtenemos $f_1(t)$ la función definida por el lema anterior y sea $g_1(t)$ su proyección en el intervalos $[-\lambda_1, \lambda_1]$ (donde $\lambda_1 = \sqrt{2\mu_1 r_1}$). Razonando del mismo modo

$$\|f_1 - g_1\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f_1(t) - g_1(t))^2 dt \leq r_1\gamma(\mu_1)$$

y por la desigualdad de Parseval:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\check{f}_1(n) - \check{g}_1(n))^2 \leq r_1\gamma(\mu_1).$$

También se tiene que:

$$|\check{g}_0(n) + \check{f}_1(n)| \geq a_n\left(1 - \frac{1}{3}\right). \tag{3.5}$$

En efecto, pues si $n \in \mathfrak{B}_0$ tenemos que $|\check{f}_1(n)| = 2\,a_n\left(1 - \frac{1}{3}\right)$, y que $|\check{g}_0(n)| \leq a_n\left(1 - \frac{1}{3}\right)$, luego:

$$|\check{g}_0(n) + \check{f}_1(n)| \geq \big||\check{g}_0(n)| - |\check{f}_1(n)|\big| = \left||\check{g}_0(n)| - 2a_n\left(1 - \frac{1}{3}\right)\right| \geq a_n\left(1 - \frac{1}{3}\right).$$

Si $n \notin \mathfrak{B}_0$, entonces $\check{f}_1(n) = 0$ y $|\check{g}_0(n)| > a_n\left(1 - \frac{1}{3}\right)$, por lo que:

$$|\check{g}_0(n) + \check{f}_1(n)| = |\check{g}_0(n)| > a_n\left(1 - \frac{1}{3}\right).$$

Ahora ponemos $n \in \mathfrak{B}_1$ si $|\hat{g}_0(n) + \hat{g}_1(n)| \leq a_n(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2})$, entonces, si $n \in \mathfrak{B}_1$, tenemos por (3.5) que:

$$|\check{f}_1(n) - \check{g}_1(n)| \geq ||\check{f}_1(n) + \hat{g}_0(n)| - |\check{g}_0(n) + \check{g}_1(n)|| \geq \frac{1}{3^2} a_n.$$

Tomo entonces

$$\begin{aligned} r_2 &= \sum_{n \in \mathfrak{B}_1} \left(2a_n \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}\right)\right)^2 = \sum_{n \in \mathfrak{B}_1} \left(\frac{2a_n}{3^2}\left(3^2 - 3 - 1\right)\right)^2 \\ &\leq 4 \cdot 9 \left(3 - 1 - \frac{1}{3}\right)^2 \sum_{n \in \mathfrak{B}_1} (\check{f}_1(n) - \check{g}_1(n))^2 \leq 16 \cdot 9 \sum_{n \in \mathfrak{B}_1} (\check{f}_1(n) - \check{g}_1(n))^2 \\ &\leq 32 \cdot 9 r_1 \gamma(\mu_1). \end{aligned}$$

La idea de la demostración es repetir este proceso de forma iterativa. En general, tomando $\mu_j = 4(1 + j)$ y dados $f_1, ..., f_{j-1}, g_1, ..., g_{j-1}, \mathfrak{B}_{j-1}, r_j$ donde

$$n \in \mathfrak{B}_{j-1} \text{ si } |\check{g}_0(n) + \check{g}_1(n) + ... + \check{g}_{j-1}(n)| \leq a_n \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} - ... - \frac{1}{3^j}\right)$$

y

$$r_j = \sum_{n \in \mathfrak{B}_{j-1}} \left(2a_n \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} - ... - \frac{1}{3^j}\right)\right)^2.$$

Aplicamos de nuevo el Lema a $b_n = 2a_n((1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} - ... - \frac{1}{3^j})$, si $n \in \mathfrak{B}_{j-1}$, y $b_n = 0$ en caso contrario. Entonces obtenemos $f_j(t)$ y definimos $g_j(t)$ como la proyección de ésta en $[-\lambda_j, \lambda_j]$. Por Parseval:

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |\check{f}_j(n) - \check{g}_j(n)|^2 \leq \|f_j - g_j\|_2^2 \leq 2r_j\gamma(\mu_j).$$

Decimos ahora que $n \in \mathfrak{B}_j$ si $|\check{g}_0(n) + \check{g}_1(n) + ... + \check{g}_j(n)| \leq a_n(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} - ... - \frac{1}{3^{j+1}})$ y defino

$$r_{j+1} = \sum_{n \in \mathfrak{B}_j} \left(2a_n \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} - ... - \frac{1}{3^{j+1}}\right)\right)^2.$$

Del mismo modo que en las primeras iteraciones, se obtiene que

$$|\check{g}_0(n) + ... + \check{g}_{j-1}(n) + \check{f}_j(n)| \geq a_n(2a_n(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} - ... - \frac{1}{3^j}))^2. \tag{3.6}$$

En efecto, pues si $n \in \mathfrak{B}_{j-1}$

$$|\check{f}_j(n)| = 2a_n\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} - \dots - \frac{1}{3^j}\right)$$

y

$$|\check{g}_0(n) + \check{g}_1(n) + \dots + \check{g}_{j-1}(n)| \leq a_n\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} - \dots - \frac{1}{3^j}\right),$$

y el resultado se sigue directamente de la desigualdad:

$$|\check{g}_0(n) + \dots + \check{g}_{j-1}(n) + \check{f}_j(n)| \geq \big||\check{f}_j(n)| - |\check{g}_0(n) + \dots + \check{g}_{j-1}(n)|\big|.$$

Por otro lado si $n \notin \mathfrak{B}_{j-1}$, entonces el resultado es directo pues $\check{f}_j(n) = 0$ y

$$|\check{g}_0(n) + \check{g}_1(n) + \dots + \check{g}_{j-1}(n)| > a_n\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} - \dots - \frac{1}{3^j}\right).$$

Además usando (3.6) tenemos que, si $n \in \mathfrak{B}_j$, se cumple:

$$\begin{aligned}
|\check{f}_j(n) - \check{g}_j(n)| &= |(\check{g}_0(n) + \dots + \check{g}_{j-1}(n) + \check{f}_j(n)) - (\check{g}_0(n) + \dots + g_{j-1}(n) + \check{g}_j(n))| \\
&\geq ||\check{g}_0(n) + \dots + \check{g}_{j-1}(n) + f_j(n)| - |\check{g}_0(n) + \dots + \check{g}_{j-1}(n) + \check{g}_j(n)|| \\
&\geq \frac{1}{3^{j+1}}a_n,
\end{aligned}$$

por lo que:

$$\begin{aligned}
r_{j+1} &= \sum_{n\in\mathfrak{B}_j}\left(2a_n\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} - \dots - \frac{1}{3^{j+1}}\right)\right)^2 = \sum_{n\in\mathfrak{B}_j}\left(\frac{2a_n}{3^{j+1}}\left(3^{j+1} - 3^j - \dots - 1\right)\right)^2 \\
&\leq \left(2\cdot 3^j\left(3 - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{3^j}\right)\right)^2 \sum_{n\in\mathfrak{B}_j}(\check{f}_j(n) - \check{g}_j(n))^2 \leq 16\cdot 9^j \sum_{n\in\mathfrak{B}_j}(\check{f}_j(n) - \check{g}_j(n))^2 \\
&\leq 32\cdot 9^j r_j\gamma(\mu_j).
\end{aligned}$$

La elección de los $\mu_j$ garantiza que $r_j$ decrece exponencialmente, ya que

$$\begin{aligned}
r_{j+1} \leq 32\cdot 9^j r_j\gamma(\mu_j) &= 32\cdot 9^j r_j\frac{4}{\mu_j}e^{-2}e^{-\mu_j}\frac{32 r_j 9^j}{(j+1)e^2 e^{4(j+1)}} \\
&= \left(\frac{32}{e^6}\right)\left(\frac{9}{e^4}\right)^j r_j\frac{1}{j+1} \leq \frac{1}{2^j}r_j.
\end{aligned}$$

Y por tanto también lo hace $\lambda_j = \sqrt{2\mu_j r_j}$, hecho que implica la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_n$ aplicando, por ejemplo, el criterio de comparación por paso al límite. Si usamos ahora el criterio M de Weierstrass, como $|g_n(t)| \leq \lambda_n$, tenemos que

$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)$ converge uniformemente a una función $h(t)$ que, además, es acotada pues:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |g_n(t)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n < +\infty$$

De donde se deduce que $\|h\|_\infty < +\infty$. Si desarrollamos en cosenos, tenemos que $h(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \check{h}(n)\cos(nt)$. Por otro lado como

$$|\check{f}_j(n)| = |2a_n(1 - \frac{1}{3} - ... - \frac{1}{3^j})| \leq r_j,$$

y $r_j$ tiende a cero cuando $j$ tiende a infinto, entonces existirá $j_0$ natural tal que $n \notin \mathfrak{B}_j$ para toda $j \geq j_0$ , y por tanto $\hat{f}_j(n) = 0$ para toda $j \geq j_0$. Por tanto tomamos límites en (3.6) con $j$ tendiendo a infinito, por lo anterior obtenemos

$$|\check{h}(n)| = |\check{g}_0(n) + \check{g}_1(n) + ... + \check{g}_j(n) + ....| \geq a_n(1 - \frac{1}{3} - ... - \frac{1}{3^j} - ...) = \frac{1}{2}a_n$$

mediante la fórmula de la suma geométrica.
Bastaría por tanto tomar $c_n = 2\check{h}(n)$. ∎

*Observación* 3.10. Usando de nuevo la observación 2.1, del resutado anterior obtenemos que, dada un sucesión $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, existe $F \in L^\infty(\mathbb{T})$ tal que, para todo $n$ entero se verifica $|\widehat{F}(n)| \geq a_n$.

Para pasar a un resultado de funciones continuas y así resolver el problema con el que empezamos el capítulo, partiremos del resultado para funciones acotadas, y usaremos la convolución apoyándonos en el siguiente Lema:

*Lema* 3.3. Dada una sucesión $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ de cuadrado sumable, entonces existen $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ de cuadrado sumable y $\{c_k\}_{k=0}^{\infty} \in \mathbf{c}_0$ tales que $a_k = b_k c_k$ para todo $k$ entero no negativo.

*Demostración.* Como $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty$, dado $\varepsilon = \frac{1}{n^4}$ existe $k_n \in \mathbb{N}$ (podemos tomarlos estrictamente crecientes respecto $n$) tal que $\sum_{k=k_n}^{\infty} a_k^2 < \frac{1}{n^4}$. Defino

$$b_k = \begin{cases} n, \text{ si } k_n \leq k < k_{n+1} \\ 1, \text{ en caso contrario, es decir, si } k < k_1 \end{cases}$$

Como para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $k_n$, tenemos que $b_k \to +\infty$, además $a_k b_k$ es de cuadrado sumable pues:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 b_k^2 &= \sum_{k=1}^{k_1} a_k^2 b_k^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=k_n}^{k=k_{n+1}-1} a_k^2 b_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^{k_1} a_k^2 b_k^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sum_{k=k_n}^{k=k_{n+1}-1} a_k^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_1} a_k^2 b_k^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.\end{aligned}$$

Luego me basta tomar $a_k = (a_k b_k)\left(\dfrac{1}{b_k}\right)$. ∎

**Teorema 3.3 (Teorema Kahane-Katznelson-De Leeuw).** *Dada $\{a_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ de números positivos con $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^2 < +\infty$, entonces existe una suesión de números reales $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que sus términos son los coeficientes de Fourier de una función continua, y tal que $|b_n| \geq a_n$ para todo n.*

*Demostración.* Por el Lema anterior existen $\{c_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ de cuadrado sumable y $\{d_n\}_{-\infty}^{+\infty} \in \mathbf{c}_0$, tales que $a_n = c_n d_n$ para todo $n$. Por del Teorema 3.2 podemos deducir que existe $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ tal que $|\widehat{f}(n)| \geq |c_n|$ y por el Corolario 2.1, existe $g \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $|\hat{g}(n)| \geq |d_n|$, por tanto:

$$|a_n| = |c_n||d_n| \leq |\widehat{f}(n)||\widehat{g}(n)| = |\widehat{f * g}(n)|.$$

Y como la convolución de un función integrable con una acotada es continua , se tiene que $f * g$ es continua y por tanto nos basta tomar $b_n = \widehat{f * g}(n)$ . ∎

Así queda demostrado el Teorema de Kahane-Katznelson-De Leeuw, y el problema que planteamos al comienzo de este capítulo. En los siguientes capítulos intentaremos obtener generalizaciones de los resultados obtenidos hasta ahora.

# 4 Generalización del caso $L^p$ . El problema del soporte

En el capítulo anterior, dado $p \in [2, +\infty]$ resolvimos el problema:

**Dado $p \geq 2$, y dada una sucesión positiva $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$, existe una función $F \in L^p(\mathbb{T})$ de manera que, para toda $j$, se tiene que $|\hat{F}(j)| \geq a_j$**

Recordemos ahora que $\widehat{F}(j) = \langle F, e^{ijt}\rangle$, y que $\{e^{ijt}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ forma una base ortonormal en $L^2(\mathbb{T})$, teniendo esto en cuenta, empezamos planteando la siguiente generalización, a la que denominaremos como "El problema del soporte":

**Dado $A \subseteq \mathbb{T}$ de medida positiva, y dado $p \geq 2$, ¿Dada una sucesión positiva $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$, existe $F \in L^p(A)$ tal que, para todo $j$, se tiene que $\widehat{F}(j) \geq a_j$? Entendiéndose $L^p(A)$ como el conjunto de las funciones de $L^p(\mathbb{T})$ cuyo soporte está contenido en $A$, y los coeficientes de Fourier como**

$$\widehat{F}(n) = \int_A F(t)e^{-int}\, dt$$

Lo primero que pensamos es en, usando la base ortogonal $\{e^{ijt}\}_{\{j\in\mathbb{Z}\}}$ en $L^2(\mathbb{T})$, considerar el sistema de funciones $\{\psi_j\}_{\{j\in\mathbb{Z}\}}$, dónde $\psi_j = \sqrt{m(A)}e^{ijt}|_A$. Sin embargo éstas nuevas funciones, en general, dejan de ser ortogonales y lo único que se puede decir de ellas es que siguen verificando la que hemos llamado condición de Bessel, es decir, dada una sucesión $\{c_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de escalares, se cumple:

$$\left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\psi_j\right\|_2 \leq \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Esto hace que las técnicas aplicadas anteriormente dejen de ser válidas. Por tanto de forma natural nos planteamos resolver la siguiente cuestión:

**Sea $A$ un espacio de medida de probabilidad. Sean $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ un sistema de funciones reales que verifican la condición de Bessel, $p \geq 2$ y $X = L^p(A)$, entonces, dada una sucesión $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ de números positivos, ¿existe $F \in X$ tal que, para todo $j$, se verifique $\langle F, \psi_j\rangle = \left|\int_A F\psi_j \, dm\right| \geq a_j$?**

A la cuestión anterior la denotaremos como ($\bigstar$), y por supuesto su solución depende del sistema $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ considerado. A lo largo de esté capítulo usaremos la hipótesis de que $\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j^2 = 1$. Aunque todos los cálculos se realicen suponiendo que los $j$ están indexados en $\mathbb{Z}$, todos los argumentos siguen siendo válidos para $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

*Observación* 4.1. Si la respuesta a la cuestión ($\bigstar$) es afirmativa, hay una solución $F$ con norma uniformemente acotada, es decir, $\|F\|_X \leq C$, dónde $C$ no depende de la sucesión $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Veamoslo por reducción al absurdo:
Supongamos lo contrario, entonces para $k = 1, 2, \ldots$ podemos elegir un sucesión $\left\{a_j^{(k)}\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ verificando $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(a_j^{(k)}\right)^2 = 1$ y tal que no existe $F \in X$ verificando simultaneamente que:

1. $\|F\|_X \leq 4^k$.
2. $|\langle F, \psi_j\rangle| \geq a_j$ para todo $j$.

Defino entonces la sucesión $\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ dada por

$$b_j = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} a_j^{(k)}.$$

Entonces afirmamos que para dicha sucesión no hay solución respecto a la cuestión (★), y por tanto la respuesta de la misma no podría ser positiva. En efecto, de nuevo por reducción al absurdo, si existiera $F \in X$ solución asociada a $\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, como $b_j \geq 2^{-k}a_j^{(k)}$ para todo $k$, se tiene que:

$$|\left\langle 2^k F, \psi_j \right\rangle| \geq 2^k b_j \geq a_j^{(k)}.$$

Luego, de nuevo para todo $k$, $F$ verifica 1, por tanto no se puede dar 2, lo que implicaría que $\|F\|_X \geq 2^k$ para todo $k$, llegando así a contradicción, y por tanto no existiría dicha $F$, y sin embargo $\sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j^2 \leq 1$, pues, recordando la norma de $l^2$, por la desigualdad de Minkowski:

$$\left\| \{b_j\}_j \right\|_2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \left\| \left\{ a_j^{(k)} \right\} \right\|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

Introducimos ahora la siguiente notación: Dada una función $\varphi \in L^2(A)$, denotaremos como $\nu_\varphi$ al elemento de $(L^p(A))^*$ dado por:

$$\nu_\varphi(f) = \langle \varphi, f \rangle = \int_{\mathbb{T}} \varphi f \, dm, \qquad \text{para todo } f \in L^p(A).$$

Con esta notación en cuenta, recordando que $X = L^p(A)$ tenemos la siguiente condición necesaria:

*Proposición 4.1.* Supongamos que la respuesta a la cuestión (★) es afirmativa, entonces necesariamente debe existir $\beta > 0$ tal que $\left\|\nu_{\varphi_j}\right\|_{X^*} \geq \beta$ para todo $j$.

*Observación 4.2.* Como $X^*$ es isomorfo a $L^q(A)$ $\left(\text{donde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ para $p > 1$, entonces la condición $\left\|\nu_{\varphi_j}\right\|_{X^*} \geq \beta > 0$ es equivalente a

$$\left( \int_A |\psi_j|^q \, dm \right)^{\frac{1}{q}} \geq \beta > 0, \qquad \text{para todo } j. \tag{4.1}$$

*Demostración.* Por la observación anterior, existe $C > 0$ tal que, para toda $F$ asociada a una solución de (★), se tiene que $\|F\|_X \leq C$. Fijado $k$ entero, consideramos la sucesión $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ dada por:

$$a_j = \begin{cases} 1, & \text{si } j = k \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}.$$

Entonces, por hipótesis existe $F \in L^p(A)$ con $\|F\|_X \leq C$ y verificando que:

$$|\left\langle F, \psi_k \right\rangle| \geq 1.$$

Y por tanto, si tomo $G = \frac{F}{C}$ tenemos que $\|G\|_X \leq 1$, y que verifica que:

$$|\langle G, \psi_k \rangle| \geq \frac{1}{C}.$$

Si recordamos la caracterización de la norma del espacio dual que nos dice que

$$\|\nu_\varphi\|_{X^*} = \sup_{\|f\|_X \leq 1} |\langle \varphi, f \rangle|,$$

tendríamos :

$$\frac{1}{C} \leq |\langle G, \psi_k \rangle| \leq \sup_{\|f\|_X \leq 1} |\langle f, \psi_k \rangle| = \|\nu_{\varphi_k}\|_{X^*}.$$

Luego $\beta = \frac{1}{C}$ nos sirve para todo $k$ entero. ∎

Nuestro objetivo a partir de ahora será probar que la condición (4.1) sorprendentemente también es condición suficiente. Para ello necesitaremos un par de resultados previos:

*Lema* 4.1. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una funcion en $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ verificando:

1. $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0.$
2. $0 \leq \varphi''(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Entonces el operador $I : L^2(A) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(f) = \int_A \varphi \circ f \, dm$$

está bien definido y es continuo.

*Demostración.* Como $0 \leq \varphi''(0) \leq 1$, integrando obtenemos que $|\varphi'(t)| \leq |t|$. Por otro lado, como $\varphi(0) = 0$ tenemos que

$$\varphi(x) = \int_0^x \varphi'(t) \, dt.$$

Y por tanto, volviendo a integrar

$$|\varphi(x)| \leq \int_0^{|x|} |t| \, dt \leq \frac{|x|^2}{2}.$$

Gracias a esto obtenemos que $I$ está bien definido, pues:

$$\left| \int_A \varphi(f) \, dm \right| \leq \int_A |\varphi(f)| \, dm \leq \int_A \frac{|f|^2}{2} \, dm < +\infty.$$

De nuevo, como $|\varphi'(t)| \leq |t|$, dados $x \leq y$ reales:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \int_x^y |\varphi'(t)| \ dt \leq |y - x| \max\{|x|, |y|\},$$

y por tanto usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, dadas dos funciones $f$ y $h$ tenemos:

$$\begin{aligned} |I(f) - I(h)| &\leq \int_A |\varphi(f) - \varphi(h)| \ dm \leq \int_A |f - h| \max\{|f|, |h|\} \ dm \\ &\leq \left(\int_A |f - g|^2 \ dm\right)^{\frac{1}{2}} (\|f\|_2 + \|h\|_2) \\ &= \|f - h\|_2 (\|f\|_2 + \|h\|_2) \end{aligned}$$

desigualdad de la cual obtenemos la continuidad . ∎

*Observación* 4.3. De hecho, por lo visto en la prueba anterior, el operador $I$ sería localmente lipschitziano, pues para funciones en la bola de radio $r$, podríamos acotar $\|f\|_2 + \|h\|_2$ por una constante $K$.

*Lema* 4.2. Fijemos una sucesión de números positivos $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ verificando $\sum_j a_j^2 = 1$.Para toda elección posible de signos $\varepsilon = \{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}}$ definamos

$$f_\varepsilon = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \varepsilon_j a_j \psi_j.$$

Entonces el conjunto $K = \left\{f_\varepsilon \ ; \ \varepsilon \in \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}}\right\}$ es compacto en $L^2(A)$.

*Demostración.* Notemos que $\{-1, 1\}^{\mathbb{Z}}$ es compacto por el teorema de Tychonoff, ya que es resultado el producto del conjunto $\{-1, 1\}$ consigo mismo, el cual es compacto. Por otro lado, la función que asigna $\varepsilon \mapsto \varepsilon_j a_j \psi_j$ es continua de $\{-1, 1\}^{\mathbb{Z}}$ con la topología producto a $L^2(A)$ con la topología usual, pues es resultado de la composición de la proyección sobre la $j$-ésima coordenada, que es continua, y de la función $\theta : \mathbb{R} \to L^2(A)$ dada por $\theta(t) = a_j \psi_j t$, que también es continua. Del mismo modo como la suma de la estructura de espacio vectorial es continua en la topología producto, luego dado $N \in \mathbb{N}$, la función que asigna $\varepsilon \mapsto \rho_N(\varepsilon) = \sum_{-N}^{N} \varepsilon_j a_j \psi_j$ es continua. Definamos ahora la función

$$\rho(\varepsilon) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \varepsilon_j a_j \psi_j.$$

Como la serie $\sum_j a_j^2$ es convergente, dado $\delta > 0$ existe $m_0$ natural tal que, para todos

$m, n$ naturales con $m \geq n \geq m_0$ se verifica:

$$\left( \sum_{n \leq |j| \leq m} a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \delta.$$

Luego por la condición de Bessel, dado $\delta > 0$, existe $m_0$ natural tal que, para todos $m, n$ naturales con $m \geq n \geq m_0$, se verifica:

$$\|\rho_m - \rho_n\|_2 = \left\| \sum_{n \leq |j| \leq m} \varepsilon_j a_j \psi_j \right\|_2 \leq \left( \sum_{n \leq |j| \leq m} a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \delta.$$

Esto implica que la sucesión $\{\rho_n\}$ verifica la condición de Cauchy uniformemente, y por tanto, $\rho_n \to \rho$ uniformemente en $K$, luego la función $\rho$ es continua. Finalmente como $K = \rho(\{-1, 1\}^{\mathbb{Z}})$, se tiene que es compacto, por ser imagen a través de un función continua de un compacto. ∎

Procedamos, ahora sí, con la demostración de que (4.1) es condición suficiente:

**Teorema 4.1.** *Sea $A$ un espacio de medida de probabilidad y $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ un sistema de funciones reales que verifican la condición de Bessel. Sea $p \geq 2$ y $X = L^p(A)$. Supongamos que el sistema de funciones verfica (4.1), entonces, para toda sucesión de números positivos $\{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ satisfaciendo $\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j^2 = 1$, podemos encontrar $F \in X$ tal que*

$$\left| \int_A F \psi_j \, dm \right| \geq a_j, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

*Es más, podemos estimar la norma de $F$ por:*

$$\|F\|_X \leq \left( \frac{3\pi}{2} \right)^{1 - \frac{2}{p}} \beta^{-2} \leq 5\beta^{-2}.$$

*Demostración.* Como hemos hecho anteriormente, para toda elección posible de signos $\varepsilon = \{\varepsilon_j\}_j$, definimos:

$$f_\varepsilon = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varepsilon_j a_j \psi_j.$$

Como para toda $j$ se verifica que $\varepsilon_j^2 = 1$, la condición de Bessel implica que:

$$\left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varepsilon_j a_j \psi_j \right\|_2 \leq \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Luego $f_\varepsilon \in L^2(A)$ y, de hecho, $\|f_\varepsilon\|_2 \leq 1$. Sea ahora $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ con $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ verificando

1. $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.
2. $0 \leq \varphi''(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sea el operador $I$ definido como en el Lema 4.1, entonces tenemos que $I$ está bien definido y es continuo. Además por el Lema 4.2 la familia $\{f_\varepsilon\}$ es compacta. Por tanto, por el teorema de Weirstrass, existe $\bar{\varepsilon}$ tal que $I(f_{\bar{\varepsilon}})$ es máximo. Llamamos $f = f_{\bar{\varepsilon}}$ y consideramos $f_j = f - 2\bar{\varepsilon}_j a_j \psi_j$. Dado un punto $t$ fijo, usando la aproximación de Taylor de $\varphi$ centrada en $f(t)$ y evaluadada en $f_j(t)$:

$$0 \leq \varphi(f) - \varphi(f_j) = \varphi'(f)(f - f_j) - \varphi''(c)\frac{(f_j - f)^2}{2} \tag{4.2}$$

(donde $c(t)$ está entre $f(t)$ y $f_j(t)$).
Supongamos que podemos elegir $\varphi$ de forma que $\varphi'(f) \in L^p(A)$ para toda $f \in L^2(A)$, y $\varphi''(c)$ sea medible, entonces tomando integrales en la expresión anterior:

$$0 \leq \int_A \varphi(f)\, dm - \int_A \varphi(f_j)\, dm = \int_A \varphi'(f)(f - f_j)\, dm - \int_A \varphi''(c)\frac{(f_j - f)^2}{2}\, dm.$$

En este caso, observando ahora el valor de $f - f_j$, se deduciría que, para todo $j$:

$$\bar{\varepsilon}_j \int_A \varphi'(f)\psi_j\, dm \geq a_j \int_A \varphi''(c)\psi_j^2\, dm.$$

Luego si consiguiéramos acotar inferiormente la integral de la izquierda por una constante que dependa solo de $\beta$, nos bastaría tomar como solución $F = K\varphi'(f)$ con $K$ constante suficientemente grande.
Si $p = 2$, nos basta tomar $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, entonces $\varphi'(f) = f$ y $\varphi''(c) = 1$, de donde deducimos que, por (4.1), podemos acotar la integral izquierda:

$$a_j \int_T \varphi''(c)\psi_j^2 \; = a_j \int_A \psi_j^2\, dm \geq a_j\beta^2,$$

y por tanto bastaría tomar $F = \beta^{-2} f$ .
Para $p > 2$, tomemos $\varphi$ como la solución de la ecuación $\varphi''(x) = (1 + x^2)^{\frac{2}{p} - 1}$ con los datos iniciales $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. Obsérvese que para el caso $p = \infty$ se tiene $\varphi''(x) = (1 + x^2)^{-1}$ Definimos ahora

$$R(t) = \varphi''(c(t))\frac{(f_j(t) - f(t))^2}{2}.$$

Entonces tenemos que, mirando (4.2), $R$ es medible, ya que

$$R = \varphi'(f)(f - f_j) - \varphi(f) + \varphi(f_j).$$

Además, en este caso particular tenemos que:

$$R(t) = (1+c^2)^{\frac{2}{p}-1}\frac{(f(t)-f_j(t))^2}{2}$$

Luego en el caso $f(t)-f_j(t)=0$, se cumple $c(t)=f(t)$, mientras que para los $t$ en los que $f_j(t)\neq f(t)$ podemos despejar de la anterior ecuación obteniendo

$$\varphi''(c(t)) = \frac{2R(t)}{(f(t)-f_j(t))^2}.$$

Por tanto en ambos casos $\varphi''(c)$ resulta ser una función medible. Además, como $p\geq 2$ se tiene que $0\leq \varphi''(x)\leq 1$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Ahora, usando la desigualdad de Hölder aplicada con los números conjugados $\frac{p}{2}$ y $\frac{1}{1-\frac{2}{p}}$, llegamos a que:

$$|\varphi'(x)| \leq \int_0^{|x|}(1+s^2)^{\frac{2}{p}-1}ds \leq \left(\int_1^{|x|} 1^{\frac{p}{2}}\,ds\right)^{\frac{2}{p}}\left(\int_0^{|x|}(1+s^2)^{-1}\,ds\right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-\frac{2}{p}}|x|^{\frac{2}{p}}.$$

De aquí, si integramos y usamos que $\left(\int_A |f|^2\,dm\right)^{\frac{1}{p}}\leq \|f\|_2\leq 1$, deducimos que:

$$\|\varphi'(f)\|_p \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-\frac{2}{p}}\left(\int_A \left|f^2\right|\,dm\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-\frac{2}{p}}. \tag{4.3}$$

Denotemos $q$ como el conjugado de $p$, entonces vemos que:

$$1-\frac{q}{2}+\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{q}{2} = 1-\frac{q}{2}+\frac{q}{p}-\frac{q}{2} = 1-q+\frac{q}{p} = 1-q+(q-1)=0,$$

por tanto los números $\frac{2}{q}$ y $\frac{1}{1-\frac{q}{2}}$ son conjugados. Si denotamos $\alpha = 1-\frac{q}{2}$ y aplicamos la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_A |\psi_j|^q\,dm &\leq \int_A (1+c^2)^{\alpha}|\psi_j|^q(1+c^2)^{-\alpha}\,dm\\ &\leq \left(\int_A (1+c^2)\,dm\right)^{1-\frac{q}{2}}\int_A |\psi_j|^2(1+c^2)^{\left(\frac{q}{2}-1\right)\frac{2}{q}}\,dm \qquad (4.4)\\ &= \left(\int_A (1+c^2)\,dm\right)^{1-\frac{q}{2}}\int_A |\psi_j|^2(1+c^2)^{\left(\frac{2}{p}-1\right)}\,dm,\end{aligned}$$

ya que

$$1-\frac{2}{q} = \frac{2}{p}-1.$$

Recordando que $c$ está entre $f$ y $f_j$ , podemos usar la cota $r^2 \leq f^2 + f_j^2$ , y a partir de esto:

$$\int_A (1+c^2)\, dm \leq \int_A (1+f^2+f_j^2)\, dm = m(A) + \int_A f^2\, dm + \int_A f_j^2\, dm \leq 1+1+1 = 3,$$

pues usamos la medida normalizada, y tanto la norma 2 de $f_j$ como la de $f$ valen menos de 1.
Aplicando ésto a (4.4) obtengo

$$3^{1-\frac{q}{2}} \left( \int_A (1+c^2)^{\frac{2}{p}-1} \psi_j^2 \, dm \right) \geq \int_A |\psi_j|^q \, dm,$$

y viendo como estaba definida $\varphi$, despejando en la desigualdad anterior y elevando a $\frac{2}{q}$:

$$\int_A \varphi''(c)\psi_j^2 \, dm = \int_A (1+c^2)^{\frac{2}{p}-1} \psi_j^2 \, dm \geq 3^{1-\frac{2}{q}} \left( \int_A |\psi_j|^q \, dm \right)^{\frac{2}{q}}.$$

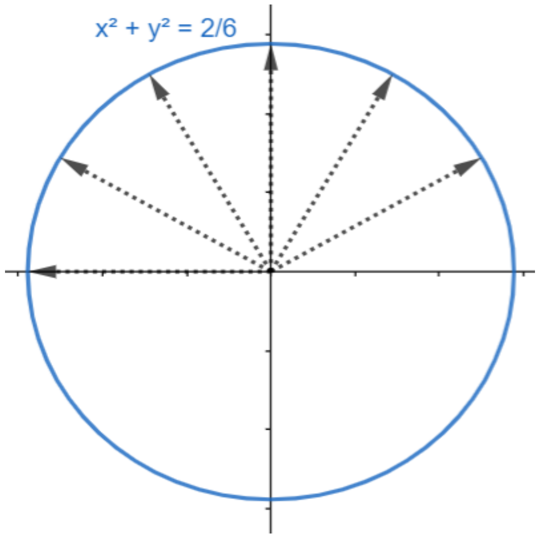
Por tanto usando (4.1):

$$\int_A \varphi''(c)\psi_j^2 \, dm \geq 3^{1-\frac{2}{q}} \beta^2 = 3^{\frac{2}{p}-1}\beta^2.$$

Luego basta tomar $F = 3^{1-\frac{2}{q}}\beta^2\varphi'(f)$ y por (4.3) obtenemos la cota del enunciado. ▮

*Observación* 4.4. Sin hacer suposiciones adicionales sobre los $\psi_j$, la cota de la norma anterior es casi la mejor posible para $\beta$ pequeño, veámoslo mediante el siguiente ejemplo:
Sea $A = \{1, 2\}$ con la medida $m(1) = m(2) = \frac{1}{2}$, entonces, como cada función se caracteriza por la imagen de los únicos dos puntos, podemos identificar $L^p(A)$ con $\mathbb{R}^2$ con la norma $\|(x_1, x_2)\|_p = \left(\frac{|x_1|^p+|x_2|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$ (la cual se desprende de la propia definición de la integral en $A$). Dado ahora $n$ entero positivo, defino:

$$\psi_j = \sqrt{\frac{2}{n}} \left( \cos\left(\frac{\pi j}{n}\right), \mathrm{sen}\left(\frac{\pi j}{n}\right) \right) \quad \text{para } j = 1, ..., n.$$




Conjunto de vectores $\{\psi_j\}$ para $n = 6$

Por un lado se tiene que $\|\psi_j\|_2 = \sqrt{\frac{2}{n}}\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{n}}$ y además, usando desigualdad triangular junto con la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} c_j \psi_j\right\|_2 \leq \sqrt{\frac{1}{n}}\sum_{j=1}^{n}|c_j| \leq \sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{n}}\left(\sum_{j=1}^{n}|c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{n}|c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por otro lado, si $1 \leq q \leq 2$, entonces en el espacio $\mathbb{R}^2$ se verifica que $\|.\|_q \geq \|.\|_2$ y, por tanto, para toda $j$:

$$\begin{aligned}\|\psi_j\|_q &= \sqrt{\frac{2}{n}}\left(\frac{\left|\cos\left(\frac{\pi j}{2}\right)\right|^q + \left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi j}{2}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\geq 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\sqrt{\frac{2}{n}}\left(\frac{\left|\cos\left(\frac{\pi j}{2}\right)\right|^2 + \left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi j}{2}\right)\right|^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{\frac{1}{2n}}.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Tomo entonces $\beta = \sqrt{\frac{1}{2n}}$ para la condición (4.1). Pongamos ahora $a_j = n^{\frac{-1}{2}}$, para $j = 1, \ldots, n$. Si aplico ahora directamente el teorema del valor medio, obtengo que

$$\|\psi_j - \psi_{j+1}\|_2 \leq \sqrt{\frac{1}{n}}\frac{\pi}{n}$$

para $j = 1, ..., n-1$, y por tanto, para $p \geq 2$, y usando de nuevo la desigualdad triangular junto a la desigualdad Cauchy-Schwarz:

$$\left| \int_A F\psi_j \, dm - \int_A F\psi_{j+1} \, dm \right| \leq \int_A |F||\psi_j - \psi_{j+1}| dm \leq \|F\|_2 \|\psi_j - \psi_{j+1}\|_2 \leq \sqrt{\frac{1}{n}\frac{\pi}{n}} \|F\|_2$$

y, como $\|F\|_2 \leq \|F\|_p$, llegamos a que:

$$\left| \int_A F\psi_j \, dm - \int_A F\psi_{j+1} \, dm \right| \leq \sqrt{\frac{1}{n}\frac{\pi}{n}} \|F\|_p .$$

De lo anterior deducimos que, si los signos de $\int_A F\psi_j \, dm$ y $\int_A F\psi_{j+1} \, dm$ son diferentes, entonces al menos una de las dos integrales no sobrepasa $\sqrt{\frac{1}{n}\frac{\pi}{n}} \|F\|_p$, de donde obtenemos por (4.5) que

$$\|F\|_p \geq \frac{2n}{\pi} = \frac{1}{\pi}\beta^{-2}. \tag{4.6}$$

Consideremos la siguiente desigualdad:

$$\|\psi_1 + \psi_n\|_2 \leq \sqrt{\frac{2}{n}\frac{\pi}{n}}. \tag{4.7}$$

En efecto, usando las desigualdades $|1 - \cos(x)| \leq |x|$ y $|\text{sen}(x)| \leq |x|$:

$$\|\psi_1 + \psi_n\|_2 = \sqrt{\frac{1}{n}} \left( \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{1}{n}} \left(2\frac{\pi^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{n}\frac{\pi}{n}}$$

Si vemos ahora el caso en que todos los signos se mantienen, usando a la desigualdad triangular (que en este caso resulta una igualdad), junto a (4.6), y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, como antes, tenemos que:

$$\begin{aligned}\left| \int_A F\psi_1 \, dm \right| - \left| \int_A F\psi_n \, dm \right| &= \left| \int_A F\psi_1 \, dm + \int_A F\psi_n \, dm \right| \\ &\leq \|F\|_2 \|\psi_1 + \psi_n\|_2 \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{n}\frac{\pi}{n}} \|F\|_p .\end{aligned}$$

Por tanto para este caso también tenemos (4.6).
Observamos entonces que, aunque aumentando el valor de $n$ podemos conseguir un valor de $\beta$ arbitrariamente pequeño, por (4.6) seguimos conservando el orden $\beta^{-2}$ de la cota, por tanto para valores pequeños de $\beta$ no se puede afinar esta cota la norma de $F$ mucho más.

*Observación* 4.5. En el teorema anterior, si no nos procupamos por el valor exacto de $\beta$, la condición (3.2) es equivalente para todos los espacios $L^p$ para $2 < p \leq +\infty$, veamoslo:
Sean $1 \leq q < q_1 < 2$, entonces, si $\|\psi_j\|_q \geq \beta$ para todo $j$, se tiene

$$\|\psi_j\|_{q_1} \geq \|\psi_j\|_q \geq \beta, \text{ para todo } j.$$

Supongamos ahora que $\beta \leq \|\psi_j\|_{q_1}$, como $\|\psi_j\|_2 \leq 1$, interpolando se tiene que:

$$\beta \leq \|\psi_j\|_{q_1} \leq \|\psi_j\|_q^{\theta} \|\psi_j\|_2^{1-\theta} \leq \|\psi_j\|_2^{1-\theta}$$

para cierto $\theta \in (0,1)$.
Luego si nuestro problema tiene solución en uno de estos espacios, tiene solución en todos.

*Observación* 4.6. Consideremos el sistema $\{\cos(jt)\}_{j=0}^{\infty}$, veamos que estas funciones verifican (4.1):
Sea $A \subseteq \mathbb{T}$ de medida positiva, y sea $1 \leq q \leq 2$. Como $|\cos(jt)| \leq 1$, se verifica que:

$$\int_A |\cos(jt)|^q \, dm \geq \int_A |\cos(jt)|^2 \, dm.$$

Luego podemos restringirnos al caso $q = 2$, ahora, si recordamos que
$\cos(jt) = \frac{e^{ijt}+e^{-ijt}}{2}$:

$$\begin{aligned} \int_A \cos^2(jt)\, dm &= \int_0^{2\pi} \chi_A(t) \left(\frac{e^{ijt}+e^{-ijt}}{2}\right)^2 dt \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \chi_A(t)(2+e^{2ijt}+e^{-2ijt})\, dt \\ &= \frac{1}{4}(\widehat{\chi_A}(2j)+\widehat{\chi_A}(-2j)+2m(A)). \end{aligned}$$

Si denotamos $\alpha_j = \frac{1}{4}(\widehat{\chi_A}(2j)+\widehat{\chi_A}(-2j)+2m(A))$, por el Lema de Riemann-Lebesgue sabemos que

$$\lim_{j\to+\infty} \alpha_j = \frac{2m(A)}{4}.$$

Luego existirá $j_0$ natural tal que $\alpha_n \geq \frac{m(A)}{8}$ para todo $j \geq j_0$. Por otro lado, como
$2 + e^{2ijt} + e^{-2ijt} = 2(1+\cos(jt)$, y, además, para todo $j$, se verifica que
$m\{\cos(jt) = -1\} = 0$, tenemos que $\alpha_j > 0$ para todo $j$. Por tanto si denotamos

$$\beta_1 = \text{mín}\left\{\alpha_0, \alpha_1, .., \alpha_{j_0-1}, \frac{m(A)}{4}\right\} > 0,$$

se verificará

$$\int_A |\cos(jt)|^q \ dm \geq \beta_1,$$

luego bastará tomar $\beta = \sqrt[q]{\beta_1}$.

*Observación* 4.7. Veremos entonces como resolver el problema del soporte. Fijemos $p \geq 2$. Usando lo anterior, y el Teorema 4.1 (para índices en $\mathbb{N} \cup \{0\}$), obtenemos que dada una sucesión $\{b_j\}_{j=0}^{+\infty}$ positiva tal que $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j^2 \leq 1$, existe $F \in L^p(A)$ de manera que

$$\int_A F \cos(jt) \, dt \geq b_j, \quad \text{para todo } j.$$

Sea ahora una sucesión $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ positiva tal que $\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j^2 \leq 1$, entonces definiendo la sucesión $\{b_j\}_{j=0}^{+\infty}$ dada por $b_j = \text{máx}\,\{a_j, a_{-j}\}$. Claramente $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j^2 \leq 1$, luego existe $F \in L^p(A)$ verificando

$$\int_A F \cos(jt) \, dt \geq b_j \geq a_j, \quad \text{para todo } j.$$

Por ello:

$$\left| \int_A F e^{ijt} \, dm \right| \geq \left| \int_A Re(F e^{ijt}) \, dm \right| = \left| \int_A F \cos(jt) \, dt \right| \geq a_j.$$

Y $F$ sería solución del problema del soporte.

# 5 Una solución geométrica .

El objetivo en este capítulo será extender la idea de la generalización del problema del soporte, vista en el capítulo anterior, al espacio de funciones continuas y acotadas sobre $A$ con valores reales (al que denotamos como $\mathcal{C}_b(A)$), es decir, queremos resolver el siguiente problema:

**Sea $A$ un espacio métrico y $m$ una probabilidad en los Borel de $A$. Sean $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ un sistema de funciones que verifica la condición de Bessel. Entonces, dada una sucesión de números reales $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$, ¿existe $F \in \mathcal{C}_b(A)$ tal que, para todo $j$, se verifique $\langle F, \psi_j\rangle = \left|\int_A F\psi_j \, dm\right| \geq a_j$?**

Para probarlo realizaremos una construcción geométrica, con la cual daremos una prueba del caso $L^\infty(A)$, y, a partir de ésta, se obtendrá el caso continuo, quizás perdiendo sobre la cota de la norma de $F$ respecto al capítulo anterior. A lo largo de este capítulo de nuevo conservaremos la hipótesis de que $\sum_j a_j^2 = 1$.

**Definición 5.1.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$, y sea $B$ un conjunto convexo, cerrado y conteniendo al origen. A este tipo de conjuntos los llamaremos conjuntos "stándard". Denotaremos $P_B$ a la proyección sobre $B$. Dado un punto $f \in H$ entendemos como $P_B(f)$ como el punto $f' \in B$ verificando $\|f - f'\|_H = \text{mín}_{g\in B} \|f - g\|_H$. Gracias a los resultados vistos en la asignatura de Ánalisis Funcional, para conjuntos stándard esta proyección existe y está bien definida.*

*Lema* 5.1. Para todos $f$ , $f' \in H$ , tenemos $\|P_B f - P_B f'\| \leq \|f - f'\|$ .

*Demostración.* Como $B$ es convexo, por las propiedades de la proyección se tiene

$$\langle f - P_B f, g - P_B f \rangle \leq 0, \text{ para todo } g \text{ en } B.$$

En particular,

$$\langle f - P_B f, P_B f' - P_B f \rangle \leq 0.$$

De manera análoga se tiene

$$\langle f' - P_B f', P_B f - P_B f' \rangle \leq 0,$$

por tanto se tendría que:

$$\begin{aligned}\langle f - f', P_B f - P_B f' \rangle &= \|P_B f - P_B f'\|^2 - \langle f - P_B f, P_B f' - P_B f \rangle \\ &\quad - \langle f' - P_B f', P_B f - P_B f' \rangle \\ &\geq \|P_B f - P_B f'\|^2 .\end{aligned}$$

Usando esto y que por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

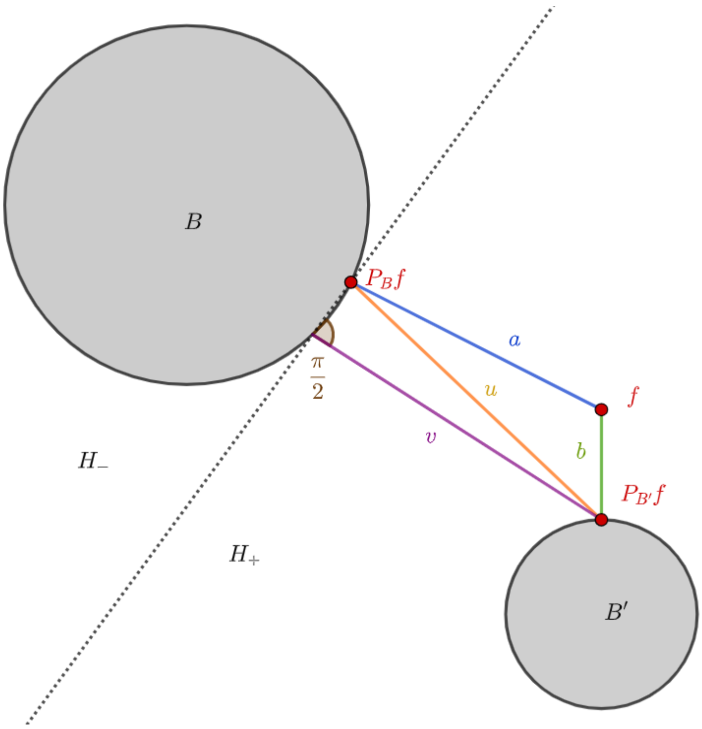
$$\langle f - f', P_B f - P_B f' \rangle \leq \|f - f'\| \, \|P_B f - P_B f'\| ,$$

obtenemos el resultado. ∎

*Lema* 5.2. Sea $B_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ la bola unidad en $H$. Sean $\delta > 0$, $f \in H$. Sean dos conjuntos stándard $B$ y $B'$ verifican $P_{B'} f \in B + \delta B_H$ y $P_B f \in B' + \delta B_H$ (es decir, tanto la distancia de $P_B f$ a $B'$ como la de $P_{B'} f$ a $B$ son a lo sumo $\delta$), entonces:

$$\|P_B f - P_{B'} f\| \leq \sqrt{2 \|f\| \delta}.$$

*Demostración.* Sean $a = \|f - P_B f\|$ y $b = \|f - P_{B'} f\|$. Supongamos que $b \leq a$ (en caso contrario es análogo). Si $a = 0$, entonces $P_B f = P_{B'} f = f$ y no hay nada que probar. Si esto no ocurre, entonces $f$ y $B$ se encuentran en semiespacios diferentes relativos al hiperplano ortogonal a $f - P_B f$ y conteniendo al punto $P_B f$. Sea $H_+$ el semiespacio que contiene a $f$, y $H_-$ el semiespacio que contiene a $B$. Como $a \geq b$, se tiene que $P_{B'} f \in H_+$, pues $P_B f$ esta en el hiperplano separador. Sea ahora $u = \|P_{B'} f - P_B f\|$, y $v$ la distacia de $P_{B'} f$ a $H_-$. Por el teorema de Pitágoras, obtenemos $b^2 - (a - v)^2 = u^2 - v^2$, que es equivalente si despejamos a que $u^2 = b^2 - a^2 + 2av$. Como $v$ es menor que la distancia de $P_{B'} f$ a $B$ (pues $B$ está en $H_-$), y ésta a su vez es a lo sumo $\delta$ por hipótesis, al ser $b \leq a$ tenemos que $u \leq \sqrt{2a\delta}$. Como ahora $0 \in B$ por ser stándard, se tiene que $a = \|f - P_B f\| \leq \|f - 0\| = \|f\|$, con lo cual queda probado el resultado.




**Definición 5.2.** *Sea $B$ un conjunto stándard en $H$, definimos el funcional de Bang $\Phi_B : H \to \mathbb{R}$ como*

$$\Phi_B(f) = \|f\|^2 - \|f - P_B f\|^2 = 2\langle f, P_B f\rangle - \|P_B f\|^2 .$$

Este funcional se llama así debido al matemático que lo introdujo, Thøger Bang (1950-1951) , quien también dió solución al llamado "Problema de las Planchas" [1]. Veamos algunas propiedades de este funcional:

*Lema* 5.3. $\Phi_B(f) - \Phi_B(f') \leq 2\langle P_B f, f - f'\rangle - \|P_B f - P_B f'\|^2$.

*Demostración.* Por definición

$$\Phi_B(f) - \Phi_B(f') = 2\langle f, P_B f\rangle - 2\langle f', P_B f'\rangle - \|P_B f\|^2 + \|P_B f'\|^2 ,$$

si ahora sumamos y restamos $2(P_B f, f')$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
&= 2\langle P_B f, f - f'\rangle + 2\langle f', P_B f - P_B f'\rangle - \langle P_B f + P_B f', P_B f - P_B f'\rangle \\
&= 2\langle P_B f, f - f'\rangle + \langle 2f' - P_B f - P_B f', P_B f - P_B f'\rangle \\
&= 2\langle P_B f, f - f'\rangle + \langle 2f' - P_B f - P_B f' + P_B f - P_B f', P_B f - P_B f'\rangle \\
&= 2\langle P_B f, f - f'\rangle + 2\langle f' - P_B f', P_B f - P_B f'\rangle - \|P_B f - P_B f'\|^2 .
\end{aligned}$$

Y basta ver que el segundo sumando de la última ecuación es no positivo. ∎

*Observación* 5.1. Sean $\{\psi_j\}$ un sistema de vectores en $H$, $B$ un conjunto stándard , y $\{a_j\}$ una sucesión de números positivos. Supongamos que para toda elección de signos $\varepsilon = \{\varepsilon_j\}$, la serie $\sum_j \varepsilon_j a_j \psi_j$ converge en $H$ a un elemento $f_\varepsilon$. Como razonamos en el capítulo anterior, $\{f_\varepsilon\}$ es un compacto, por tanto al ser $\Phi_B$ continua existirá una elección de signos $\bar{\varepsilon}$ tal que $\Phi\left(f_{\bar{\varepsilon}}\right)$ es el valor máximo sobre $\{f_\varepsilon\}$. Denotamos entonces $f = f_{\bar{\varepsilon}}$. Arreglando algunos $j$, consideramos las series en las cuales que reemplazamos $\bar{\varepsilon}_j$ por $-\bar{\varepsilon}_j$. Denotaremos $f'_j = f - 2\bar{\varepsilon}_j a_j \psi_j$ a las sumas de estas series.

En esta tesitura, tenemos el siguiente resultado :

*Proposición* 5.1. Se verfica que

$$|\langle P_B f, \psi_j\rangle| \geq \frac{\left\|P_B f - P_B f'_j\right\|^2}{4a_j}.$$

*Demostración.* Tenemos que, por el Lema anterior:

$$0 \leq \Phi_B(f) - \Phi_B(f'_j) \leq 2\left\langle P_B f, f - f'_j\right\rangle - \left\|P_B f - P_B f'_j\right\|^2 .$$

Por tanto,

$$\left\|P_B f - P_B f'_j\right\|^2 \leq 2\left\langle P_B f, f - f'_j\right\rangle .$$

Recordando que $f - f'_j = 2\bar{\varepsilon}_j a_j \psi_j$ , obtenemos :

$$\bar{\varepsilon}_j \langle P_B f, \psi_j\rangle \geq \frac{\left\|P_B f - P_B f'_j\right\|^2}{4a_j},$$

y usando que

$$\bar{\varepsilon}_j \langle P_B f, \psi_j\rangle \leq |\bar{\varepsilon}_j \langle P_B f, \psi_j\rangle| = |\langle P_B f, \psi_j\rangle|$$

ya estaría probado el resultado. ∎

Una vez están todos los preparativos listos, comenzamos con la prueba del caso $L^\infty(A)$:

**Teorema 5.1.** *Sean $X = L^\infty(A)$, $H = L^2(A)$, siendo Sea $A$ un espacio métrico y $m$ una probabilidad en los Borel de $A$. Sea ahora $\{\psi_j\}$ un sistema de vectores verificando la condición de Bessel:*

$$\left\| \sum_j c_j \psi_j \right\|_2 \leq \left( \sum_j c_j^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

*así como la condición:*

$$\int_A |\psi_j| \, dm \geq \beta > 0. \tag{5.1}$$

*Finalmente, supongamos $\{a_j\}$ una sucesión positiva verificando que $\sum_j a_j^2 = 1$. Entonces, existe $F \in X$ tal que, para todo $j$, se verifica $\langle F, \psi_j \rangle = \left| \int_A F\psi_j \, dm \right| \geq a_j$. Además podemos conseguir que*

$$\|F\|_\infty \leq \frac{16}{\beta^3}.$$

*Observación 5.2.* La condición (5.1) se obtiene de manera análoga a condición (4.1), pues, aunque no sea cierto que el dual de $L^1$ se isomorfo a $L^\infty$, si sabemos que se puede inyectar en el mediante la aplicación $T : L^\infty(A) \to (L^1(A))^*$ dada por

$$f \mapsto T_f(g) = \int_A fg \, dm, \text{ para toda } g \in L^1(A).$$

*Demostración.* Como vimos en el capítulo anterior, a cada elección de signos $\varepsilon$ le corresponde una serie $f_\varepsilon$ convergente en $L^2(A)$ verificando $\|f_\varepsilon\|_2 \leq 1$. Sea $s > 0$, entonces denotemos $B = sB_{L^\infty(A)}$ (denotando $B_{L^\infty(A)}$ la bola unidad de $L^\infty(A)$). Para cualquier $f \in H$ la proyección ortogonal $P_B f$ puede ser facilmente calculada siendo:

$$(P_B f)(t) = \begin{cases} -s, & \text{si } f(t) \leq -s \\ f(t), & \text{si } -s \leq f(t) \leq s \\ s, & \text{si } f(t) \end{cases}.$$

Veamoslo, denotamos $h(t)$ a nuestro candidato, es decir, a la proyección en el intervalo $[-s, s]$. Sea $g \in B$ cualquiera, entonces se tiene que
$-s \leq g(t) \leq s$, comprobemos que se verifica

$$|f(t) - g(t)| \geq |f(t) - h(t)|, \text{ para todo } t \in A.$$

Vamos con el primer caso, supongamos que $f(t) \leq -s$, entonces se verifica

$$|f(t) - g(t)| \geq |f(t) + s| = |g(t) - h(t)|,$$

obteniendose así que la proyeccion toma el valor $-s$. Vayamos al segundo caso, si $-s \leq f(t) \leq s$ se tiene directamente $f \in B$, luego no hay nada que probar. Finalmente, como tercer caso supongamos que $f(t) \geq s$, entonces se verifica

$$|f(t) - g(t)| \geq |f(t) - s| = |f(t) - h(t)|,$$

obteniéndose así que la proyeccion toma el valor $s$ y, efectivamente, $P_B f = h$.
Si tomamos de nuevo $f$ y $f_j'$, y denotamos $E = \big\{t \in A \,:\, |f(t)| \leq s\,, |f_j'(t)| \leq s\big\}$ por la expresión anterior obtenemos, recordando el valor de $f - f_j'$, que

$$\left\|P_B f - P_B f_j'\right\|^2 = \int_A |f(t) - f_j'(t)|^2 \, dm \geq \int_E |f(t) - f_j'(t)|^2 \, dm \geq 4a_j^2 \int_E \psi_j^2 \; dm.$$

Si ahora usamos la desigualdad de Chebyshev:

$$\begin{aligned} m(A/E) &= m(\big\{t \in A \,:\, |f(t)| \geq s\,, \text{ó } |f_j'(t)| \geq s\big\}) \\ &\leq m(\big\{t \in A \,:\, |f(t)|^2 + |f_j'(t)|^2 \geq s^2\big\}) \\ &\leq \frac{1}{s^2} \int_E |f(t)|^2 + |f_j'(t)|^2 \, dm \\ &= \frac{1}{s^2} \left( \|f\|_2^2 + \|f_j'\|_2^2 \right) \\ &\leq \frac{2}{s^2}. \end{aligned}$$

Por otro lado si $m(A/E) \leq \frac{\beta^2}{4}$, entonces aplicando Cauchy-Schwarz a las funciones $|\psi_j|$ y $\chi_{A/E}$, obtenemos:

$$\int_{A/E} |\psi_j| \, dm \leq m(A/E)^{\frac{1}{2}} \left( \int_A \psi_j^2 \, dm \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\beta}{2}$$

(pues $\|\psi_j\|_2 \leq 1$).
Teniendo en cuenta que $\|.\|_1 \leq \|.\|_2$ en espacios de medida menor o igual que 1:

$$\int_E \psi_j^2 \, dm \geq \left( \int_E |\psi_j| \, dm \right)^2 \geq \frac{\beta^2}{4}.$$

En efecto, pues por la condición (5.1):

$$\int_E |\psi_j| \, dm = \int_A |\psi_j| \, dm - \int_{A/E} |\psi_j| \, dm \geq \int_A |\psi_j| \, dm - \frac{\beta}{2} \geq \beta - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2}.$$

En definitiva, hemos llegado a que, si tomamos $s = \frac{4}{\beta}$, entonces $m(A/E) \leq \frac{2}{s^2} \leq \frac{\beta^2}{4}$ y por tanto

$$| \langle P_B f, \psi_j \rangle | \geq \frac{\left\| P_B f - P_B f_j' \right\|^2}{4a_j} \geq \frac{4a_j^2 \int_E \psi_j^2 \, dm}{4a_j} \geq \frac{\beta^2}{4} a_j.$$

Tomando $F = \frac{4}{\beta^2} P_B f$ verifica las condiciones del enunciado, pues además, como $s = \frac{4}{\beta}$ y $P_B f \in sB_{L^\infty}$, se tiene que $\|P_B f\|_\infty \leq \frac{4}{\beta}$, por lo que $\|F\|_\infty \leq \frac{16}{\beta^3}$ .

A partir del Teorema anterior, usando un razonamiento análogo al usado en la observación 4.7, podemos resolver el problema del soporte para $L^\infty$. Ahora, una vez resuelto el caso $L^\infty$ lo siguiente sería plantearnos si podemos extender esta solución al caso de las funciones continuas acotadas. Esto se resuelve en el siguiente Teorema:

**Teorema 5.2.** *Sean $X = \mathcal{C}_b(A)$, $H = L^2(A)$, siendo $A$ un espacio métrico con $m$ probabilidad en los Borel de $A$. Sea ahora $\{\psi_j\}$ un sistema de vectores verificando la condición de Bessel:*

$$\left\| \sum_j c_j \psi_j \right\|_2 \leq \left( \sum_j c_j^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

*así como la condición (5.1):*

$$\int_A |\psi_j| \, dm \geq \beta > 0.$$

*Finalmente supongamos $\{a_j\}$ una sucesión positiva verificando que $\sum_j a_j^2 = 1$. Entonces existe $G \in X$ tal que, para todo $j$, se verifica $\langle G, \psi_j \rangle = \left| \int_A G\psi_j \, dm \right| \geq a_j$. Además, podemos conseguir*

$$\|G\|_\infty \leq \frac{16C}{\beta^3}$$

*siendo $C > 0$ una constante positiva que no depende de $\{a_j\}$.*

*Demostración.* Como antes, consideramos $\{a_j\}$ una sucesión positiva verificando que $\sum_j a_j^2 = 1$ y $P_B f \in B = sB_{L^\infty}$, con $s = \frac{4}{\beta}$. De nuevo $\{f_\varepsilon\}$ es un compacto, y por tanto lo es $\{P_B f_\varepsilon\}$, todo esto en la topología de $L^2$. Puesto que estamos en un espacio métrico, sabemos que en la topología dada por la métrica se tiene que $sB_{\mathcal{C}_b(A)}$ es denso en $B$, luego, dado $\delta > 0$, podemos encontrar un colección finita de elementos $g_1, ..., g_N \in sB_{\mathcal{C}_b(A)}$ tales que, para toda elección de signos $\varepsilon$, el elemento $P_B f_\varepsilon$ esta a una distancia de a lo sumo $\delta$ de un elemento $g_m \in \{g_1, .., g_N\}$, veamos esto:

Tomemos el recubrimiento formado por las bolas de radio $\frac{\delta}{2}$ centradas en las funciones de $L^2$ con norma menor que $s$. Entonces, por compacidad:

$$\{P_B f_\varepsilon\} \subseteq \bigcup_{n=0}^{N} B(g'_n, \frac{\delta}{2}), \text{ con } g'_1, ..., g'_N \in L^2(A).$$

Ahora, como también se tiene $sB_{\mathcal{C}_b(A)}$ es denso en $sB_{L^2(A)}$, por densidad, para cada $g'_m$, existe $g_m \in sB_{C(A)}$ tal que $\|g'_m - g_m\|_2 \leq \frac{\delta}{2}$, luego por la desigualdad triangular $g_1, ..., g_N$ verifican lo deseado.

Sea ahora $B(\delta)$ la envolvente convexa del origen (en este caso la constante cero) y de las funciones $g_1, ..., g_N$. Entonces, $B(\delta)$ es un conjunto estándar para todo $\delta > 0$ y se verifica que, al ser $sB_{\mathcal{C}_b(A)}$ convexa, por la definición de envolvente convexa : $B(\delta) \subset sB_{\mathcal{C}_b(A)} \subset B$.

La principal ventaja de trabajar con $B(\delta)$ en lugar de $sB_{\mathcal{C}_b(A)}$ es que es un subespacio cerrado en la topología de $L^2$ . Por construcción tenemos que cada función $P_B f_\varepsilon$ está a una distancia de a lo sumo $\delta$ de $B(\delta)$ . Reparando algunos $\varepsilon_j$ , análogo a como hicimos antes, consideramos el par de funciones $f = f_\varepsilon$ y $f'_j = f - 2\varepsilon_j a_j \psi_j$ . Tenemos entonces que, por la desigualdad triangular y sobreentendiendo la norma como la norma 2:

$$\left\|P_{B(\delta)} f - P_{B(\delta)} f'_j\right\| \geq \left\|P_B f - P_B f'_j\right\| - \left\|P_{B(\delta)} f - P_B f\right\| - \left\|P_{B(\delta)} f'_j - P_B f'_j\right\|.$$

Como hemos visto antes, el primer término de la derecha es al menos $\beta a_j$. Si ahora aplicamos el Lema 5.2 junto con que $\|f\|, \left\|f'_j\right\| \leq 1$, llegamos a que los otros dos términos no exceden $\sqrt{2\delta}$ . Por tanto tomando $\delta \leq \frac{\beta^2 a_j^2}{32}$ se mantiene que:

$$\left\|P_{B(\delta)} f - P_{B(\delta)} f'_j\right\| \geq \frac{\beta}{2} a_j$$

A continuación introducimos una sucesión $\delta_k \to 0$, y definimos el funcional $\Phi : H \to \mathbb{R}$ dado por la fórmula:

$$\Phi(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \Phi_{B(\delta_k)}(f).$$

Veamos que este funcional es continuo:

Primero notemos que cada uno de los sumandos que forman la serie son funcionales continuos. Ademas, si $||f|| = 1$, se tiene que

$$|\Phi_{B(\delta_k)}| = ||f||^2 - ||f - P_{B(\delta_k)}||^2 \leq ||f||^2 = 1,$$

por tanto, tomando supremo, llegamos a que $||\Phi_{B(\delta_k)}|| \leq 1$ para todo $k$ y toda $f$, lo cual implica que

$$\left\|\frac{1}{k(k+1)} \Phi_{B(\delta_k)}(f)\right\| \leq \frac{1}{k(k+1)}.$$

Al ser $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} < +\infty$, aplicando el criterio M de Weierstrass obtenemos que $\Phi(f)$ es continuo.
Por ello, de nuevo por compacidad, existe una elección de signos $\bar{\varepsilon}$ que maximiza $\Phi(f_\varepsilon)$. Sean $f = f_{\bar{\varepsilon}}$ y $f'_j = f - 2\bar{\varepsilon}_j a_j \psi_j$ . Entonces por alcanzarse el máximo en $f$, y usando el Lema 5.3:

$$0 \leq \Phi(f) - \Phi(f'_j) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} [2(P_{B(\delta_k)} f, f - f'_j) - \left\| P_{B(\delta_k)} f - P_{B(\delta_k)} f'_j \right\|^2].$$

De aquí deducimos que, si definimos

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} P_{B(\delta_k)}(f),$$

entonces $F$ es claramente continua porque, si recordamos que $B(\delta) \subset sB_{\mathcal{C}_b(A)}$ :

$$\left| \frac{1}{k(k+1)} P_{B(\delta_k)}(f) \right| \leq \frac{s}{k(k+1)},$$

y al ser $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s}{k(k+1)} < +\infty$, por el criterio M obtenemos la continuidad, pues cada sumando continuo.
Además se cumple:

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} [2(P_{B(\delta_k)} f, f - f'_j) - \left\| P_{B(\delta_k)} f - P_{B(\delta_k)} f'_j \right\|^2] = \\ 2(F, 2\bar{\varepsilon}_j a_j \psi_j) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \left\| P_{B(\delta_k)} f - P_{B(\delta_k)} f'_j \right\|^2 \end{gathered} .$$

Por ello:

$$\bar{\varepsilon}_j (F, \psi_j) \geq \frac{1}{4a_j} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \left\| P_{B(\delta_k)} f - P_{B(\delta_k)} f'_j \right\|^2 .$$

Pero por el Lema 4.2 :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \left\| P_{B(\delta_k)} f - P_{B(\delta_k)} f'_j \right\|^2 \geq \sum_{k\,:\,\delta_k \leq \frac{\beta^2 a_j^2}{32}} \frac{1}{k(k+1)} \frac{\beta^2}{4} a_j^2 \geq \frac{\beta^2 a_j^2}{4k(a_j)}$$

$\Big($donde para todo $a > 0, k(a)$ se define como el menor de los índices $k$ tales que $\delta_k \leq \frac{\beta^2 a^2}{32}\Big)$.

Usando las anteriores deigualdades y tomando valor absoluto llegamos a que, para todo $j$:

$$|\langle F, \psi_j \rangle| \geq \frac{\beta^2}{16} \frac{a_j}{k(a_j)}. \tag{5.2}$$

Como $\delta_k$ puede tender a cero tan rápido como queramos, $k(a)$ es simplemente una función decreciente arbitraria que toma valores en $\{1, 2, 3, 4, ...\}$ y que tiende a $+\infty$ cuando $a$ tiende a 0. Por tanto la sucesión $\left\{\frac{a_j}{k(a_j)}\right\}_j$ es una sucesión de números positivos que, denotando $b_j = \frac{a_j}{k(a_j)}$, verifican $\sum_j b_j^2 < 1$, veamos que esto es suficiente para probar el Teorema:
Sea $\{a_j\}_j$ una sucesión de números positivos verificando $\sum_j a_j^2 = 1$, entonces, como vimos en el Lema 3.3, existe una sucesión $\{b_j\}_j$ de números naturales y tendiendo a infinito, tal que $\{a_j b_j\} \in l^2(\mathbb{Z})$. Normalizando podemos suponer que $\sum_j a_j^2 b_j^2 \leq 1$. Siguiendo entonces el razonamiento anterior para esta nueva sucesión, llegamos por (5.2) a que:

$$|\langle F, \psi_j \rangle| \geq \frac{\beta^2}{16} \frac{a_j b_j}{k(a_j b_j)}. \tag{5.3}$$

Pero como podemos elegir los $\delta_k$ de manera que decrezca arbitrariamente rápido, podemos conseguir que $k(a_j b_j) \leq b_j$, obteniendo por tanto que:

$$|\langle F, \psi_j \rangle| \geq \frac{\beta^2}{16} \frac{a_j b_j}{k(a_j b_j)} \geq \frac{\beta^2}{16} a_j.$$

Recordando que $s = \frac{4}{\beta^2}$, conseguimos que:

$$\|F\|_\infty \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)} \leq \frac{C}{\beta^2}.$$

Luego si tomamos $G = \frac{16}{\beta^2} F$, entonces $G$ da solución a nuestro problema por (5.3), y verifica que $\|G\|_\infty \leq \frac{16C}{\beta^4}$. ∎

De nuevo con una razonamiento análogo al expuesto en la Observación 4.7 resolveríamos el problema del soporte para el caso continuo.

# 6 Espacios de funciones analíticas.

En este capítulo buscaremos solución a nuestro problema en otros espacios de funciones, basándonos en las ideas de la demostración que dimos del teorema de Kahane-Katznelson-de Leeuw. Sobre todo nos centraremos en el caso del espacio $A(\mathbb{T})$ y comentaremos el caso $\mathbb{U}(\mathbb{T})$. Empecemos definiendo los espacios en los que vamos a trabajar.

**Definición 6.1.** *Dado $1 \leq p \leq \infty$, se define el espacio $H^p(\mathbb{T})$ como*
$H^p(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}) \ : \ \widehat{f}(n) = 0, \ \textit{para todo}\ n < 0 \right\}$.

A los espacios anteriores se los denomina espacios de Hardy, en honor al matemático británico Godfrey Harold Hardy (1877-1947).

**Definición 6.2.** *Se define el espacio $A(\mathbb{T})$ como*
$A(\mathbb{T}) = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \ : \ \widehat{f}(n) = 0, \ \textit{para todo}\ n < 0 \right\}$.

Como primeras propiedades de estos espacios, tenemos la siguiente proposición:

*Proposición 6.1.* Se tiene que :

a) $H^p(\mathbb{T})$ es cerrado en $L^p(\mathbb{T})$, por tanto es un espacio de Banach con la norma $||.||_p$. En particular, $H^2(\mathbb{T})$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar de $H^2(\mathbb{T})$.
b) $A(\mathbb{T})$ es cerrado en $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, luego es un espacio de Banach con la norma $||.||_\infty$.

*Demostración.* Empecemos por b), sea $\{f_k\}_k$ en $A(\mathbb{T})$ convergiendo a $f$ en norma $||.||_\infty$. Bastará ver que, dado $n < 0$, se tiene $\widehat{f}(n) = 0$. Entonces por la convergencia uniforme:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-imt}\, dt = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(t) e^{-imt}\, dt = \lim_{k \to \infty} 0 = 0.$$

Para a) de nuevo bastará ver que, dado $n < 0$, se tiene $\widehat{f}(n) = 0$. Como $|e^{-imt}| = 1$, por la desigualdad triangular

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt = \|f\|_1 \leq \|f\|_p \,.$$

De donde deducimos que si $\{f_k\}_k$ tiende a $f$ en norma $p$ se tiene que $\left\{\widehat{f_k}(n)\right\}_k$ converge a $\widehat{f}(n)$, y por tanto si $\{f_k\}_k$ está en $H^p(\mathbb{T})$, entonces $\widehat{f}(n) = 0$ al ser este límite de un sucesión nula.

**Definición 6.3.** *Se define el espacio $A(\mathbb{D})$ como el espacio de funciones $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ verificando que $f$ es analítica en $\mathbb{D}$, y $f$ es continua en $\overline{\mathbb{D}}$. Este espacio también es una espacio de Banach con la norma infinito.*

*Lema* 6.1. Dada $f \in A(\mathbb{D})$, si definimos $f_r : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ dada por $f_r = f(re^{it})$, se cumple que $f_r$ converge uniformemente (cuando $r \to 1^-$ ) a $f$ en $\partial\mathbb{D}$.

*Demostración.* Por ser $\overline{\mathbb{D}}$ un espacio compacto, tenemos que $f$ es en realidad uniformemente continua, luego dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $z, w \in \overline{\mathbb{D}}$ verifican que $|z - w| < \delta$, entonces se cumple que $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$. En particular, dado $\varepsilon > 0$, existe $r_0$ tal que para todo $r \geq r_0$ se verifica $|re^{it} - e^{it}| < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y en consecuencia, para todo $r \geq r_0$ obtenemos que $|f(re^{it}) - f(e^{it})| < \varepsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}$, de donde se desprende la convergencia uniforme.

En la siguiente proposición veremos que podemos identificar a los espacios $A(\mathbb{T})$ y $A(\mathbb{D})$ mediante isometría:

*Proposición* 6.2. Definamos el operador $T : A(\mathbb{D}) \to A(\mathbb{T})$ como $T(f) = f_{|\partial\mathbb{D}}$, entonces se verifica que $T$ es una isometría biyectiva.

*Demostración.* Por continuidad, tenemos que

$$T(f)(e^{it}) = f_{|\partial\mathbb{D}}(e^{it}) = f(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$$

Si de nuevo defino $f_r(e^{it}) = f(re^{it})$, al ser $f$ analítica en $\mathbb{D}$, también lo será $f_r$, y como consecuencia podemos escribir

$$f_r(e^{it}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m e^{imt}$$

(donde $a_m$ denota el $m$-ésimo coeficiente de Taylor de $f_r$ ).
De aquí, usando la unicidad de los coeficientes de Fourier, obtenemos que

$$\widehat{f_r}(m) = \begin{cases} 0, & \text{si } m < 0 \\ a_m r^m, & \text{si } m \geq 0 \end{cases}.$$

Por tanto, como $f_r$ converge uniformemente a $f$ por el Lema anterior, llegamos a que

$$\widehat{T(f)}(m) = \lim_{r\to 1^-} \hat{f}_r(m) = \begin{cases} 0, & \text{si } m < 0 \\ a_m, & \text{si } m \geq 0 \end{cases},$$

y por tanto $T$ está bien definida.
Veamos que es sobreyectiva: Sea $f \in A(\mathbb{T})$, tomamos $f = u + iv$, y abusando de notación definimos $P[f] = P[u] + iP[v]$, ( donde entendemos $P[u]$ y $P[v]$ como las integrales de Poisson asociadas a la parte real e imaginaria de $f$ ). Entonces, tendremos que

$$P[f](z) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{f}(m) z^m + \sum_{m=1}^{\infty} \hat{f}(-m) \bar{z}^m.$$

Pero como $f \in A(\mathbb{T})$, todos los términos de la segunda suma son cero, y por tanto, $P[f](z)$ define una función analítica en $\mathbb{D}$, luego si defino si defino

$$F(z) = \begin{cases} P[f](z), & \text{si } z \in \mathbb{D} \\ f(z), & \text{si } z \in \partial\mathbb{D} \end{cases},$$

entonces $F \in A(\mathbb{D})$, y verifica que $T(F) = f$.
Para la inyectividad, si existieran $f, g \in A(\mathbb{D})$ con $T(f) = T(g)$, entonces se verificaría que $(f - g)_{|\partial\mathbb{D}} = 0$, de donde gracias al Principio del módulo máximo obtenemos que $(f - g) = 0$ en $\mathbb{D}$, y por tanto se tendría $f = g$.
Finalmente el hecho de $T$ es isometría lo obtenemos de nuevo del Principio del módulo máximo, pues dada $f \in A(\mathbb{D})$ se verifica que:

$$||T(f)||_\infty = \sup_{z\in\partial\mathbb{D}} |f(z)| = \sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |f(z)| = ||f||_\infty.$$

❙

*Observación* 6.1. La proposición anterior justifica el hecho de que denotemos por $\widehat{f}(m)$ tanto los coeficientes de Fourier de $f$ como los coeficientes de Taylor.

**Definición 6.4.** *Llamamos $\mathbb{U}(\mathbb{T})$ al espacio de todas las funciones en $\mathbb{T}$ tales que las series $\sum_{n\geq 0} \widehat{f}(n) z^n$ y $\sum_{n<0} \widehat{f}(n) z^n$ convergen uniformemente . Se tiene que $\mathbb{U}(\mathbb{T})$ es un espacio de Banach con la norma*

$$\|f\|_U = \sup_{k,l\in\mathbb{Z}; l\leq k; z\in\mathbb{T}} \left\{ \left| \sum_{n=l}^{k} \widehat{f}(n) z^n \right| \right\}.$$

Queremos resolver el siguiente problema:

**Dada una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ verificando que $a_n = 0$, para todo $n$ negativo, y que $\sum_j a_n^2 \leq K$, entonces existe $G \in A(\mathbb{T})$ verificando:**

1. $|\widehat{G}(n)| \geq a_n$, **para todo** $n$.
2. $\|G\|_\infty \leq C\sqrt{K}$, **donde** $C$ **es una constante que no depende de los** $a_n$.

Para ello, usaremos una generalización del razonamiento expuesto en la demostración del Teorema de Kahane-Kaznelson-de Leeuw:

**Definición 6.5.** *Sean $H \subseteq L^2(\mathbb{T})$ un espacio de Hilbert (con el producto escalar de $L^2$), y $X \subseteq H$ un espacio de Banach tal que la inclusión de $X$ en $H$ es continua. Sea también $\{\psi_n\}_{n\in J}$ un sistema ortonormal en $H$. Se dice entonces que la dupla $(X, H)$ posee la propiedad ($\blacklozenge$) (para $\{\psi_n\}_{n\in J}$) si existe $R_0$ tal que, para cualquier sucesión $\{a_n\}_{n\in J}$ verificando que $(\sum_n a_n^2)^{\frac{1}{2}} \leq K$, y para cualquier $R \geq KR_0$, existen unos vectores $g \in X$, $h \in H$ y un elección de signos $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$ para la cual, si definimos*

$$f_\varepsilon = \sum_{n\in J} \varepsilon_n a_n \psi_n,$$

*se verifica:*

1. *$f_\varepsilon = g + h$.*
2. *$\|g\|_X \leq R$.*
3. *$\|h\|_H \leq K\omega(R/K)$.*

*Siendo $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una función no creciente, verificando $\lim_{t\to+\infty} \omega(t) = 0$, y tal que existe una sucesión de números positivos $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ estrictamente creciente y con $\lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty$, para la cual se cumple:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}\frac{\omega(c_n)}{c_n} < +\infty. \tag{6.1}$$

**Teorema 6.1.** *Supongamos que la dupla $(X, H)$ posee la propiedad ($\blacklozenge$) para $\{\psi_n\}_{n\in J}$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que para toda sucesión $\{a_n\}_{n\in J}$ de números positivos y de cuadrado sumable, existe $G \in X$ de manera que*

1. *$|\langle G, \psi_n\rangle| \geq a_n$, para todo $n$.*
2. *$\|G\|_X \leq C\,(\sum_n a_n^2)^{\frac{1}{2}}$.*

*Demostración.* Como $\omega$ verifica (6.1), podemos encontrar $\{c_j\}_{j=0}^{\infty}$ tal que $c_j \geq R_0$ para todo $j$ y tal que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{j+1}\omega(c_j)}{c_j} < \frac{1}{2}.$$

Veamoslo:
Como las $c_j$ de la definición tienden a infinito, y verifican (5.1), existirá $j_0$ tal que, para todo $j \geq j_0$, se verifica que $c_j \geq R_0$ y que

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{c_{j+1}\omega(c_j)}{c_j} < \frac{1}{2},$$

por tanto basta reindexar y considerar $c_j$ como $c_{j+j_0}$.
Vamos a construir dos sucesiones $\{d_j\}_{j=0}^{\infty}$ y $\{\eta_j\}_{j=0}^{\infty}$, que mediante razonamiento inductivo, nos llevaran al vector $G$ buscado.
Defino por un lado $d_0 = (2c_0)^{-1}$, y $d_{j+1} = \frac{\omega(c_j}{c_j}$ para $j \geq 0$. Por otro lado defino $\eta_0 = 0$, y $\eta_{j+1} = d_j c_j$ para $j \geq 0$. Entonces $\eta_{j+2} = \frac{c_{j+1}\omega(c_j)}{c_j}$ para $j \geq 0$ y $\eta_1 = \frac{1}{2}$. Por tanto se verifica:

$$\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + ... = \eta_1 + \sum_{j=2}^{\infty} \eta_j = \eta_1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{j+1}\omega(c_j)}{c_j} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Además, como se cumple que

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_{j+1}d_{j+1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{j+1}\omega(c_j)}{c_j} < +\infty,$$

y al tender los $c_j$ a infinito, por la condición necesaria de convergencia de series numéricas debe ser $\lim_{j\to+\infty} d_j = 0$. También, como $c_j \geq R_0$ , se tiene que $\eta_{j+1} \geq d_j R_0$.

Dada ahora una sucesión arbitraria $\{a_n\}_{n\in J}$ de números positivos y de cuadrado sumable, multiplicando por constante podemos suponer que

$$\sum_{n\in J} a_n^2 = d_0.$$

Entonces encontraremos $G \in X$ verificando que

$$||G||_X \leq \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j$$

y que

$$|\langle G, \psi_n \rangle| \geq \left(1 - \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j\right) a_n,$$

con lo cual el teorema estará probado. Para ello construiremos por inducción tres sucesiones de vectores : $\{F_j\}_{j=0}^{\infty}$ y $\{H_j\}_{j=0}^{\infty}$ sucesiones en $H$ y $\{G_j\}_{j=0}^{\infty}$ sucesión en $X$, tales que $G_0 = 0$, $F_j = G_j + H_j$ para todo $j$ y cumpliendo:

1. $|\langle F_j, \psi_n \rangle| \geq (1 - \sum_{k=0}^{j} \eta_k) a_n$, para todo $j \geq 0$.
2. $\|G_j - G_{j-1}\|_X \leq \eta_j$, para todo $j \geq 1$.
3. $\|H_j\|_H \leq d_j$.
4. $H_j$ puede representarse como $H_j = g_j + h_j$, donde:
   - $\|g_j\|_X \leq \eta_{j+1}$
   - $\|h_j\|_H \leq d_j \omega\left(\frac{\eta_{j+1}}{d_j}\right)$.

Una vez hecho esto nos bastará tomar $G = \lim_{j\to\infty} G_j$ (límite en el sentido de la convergencia en $X$ , que es garantizada por la condición 2, pues como se verifica que $\sum \eta_j < +\infty$ obtenemos que la sucesión $\{G_j\}_{j=0}^{\infty}$ es de Cauchy. Entonces tendremos $\|G\|_X \leq \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j$, de nuevo por la condición 2 y el hecho de que $G_0 = 0$, ya que, usando la suma telescópica:

$$\|G\|_X = \left\|\lim_{j\to+\infty} G_j\right\|_X = \left\|\sum_{j=1}^{\infty} G_j - G_{j-1}\right\|_X \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|(G_j - G_{j-1})\|_X \leq \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j.$$

Por 3, como los $d_j$ también tendían a cero, deducimos que la $H_j$ converge a cero en $H$. Si usamos ésto junto con la igualdad $F_j = G_j + H_j$ obtenemos que $\lim_{j\to+\infty} F_j = G$, con lo cual, directamente de 1 conseguimos que

$$|\langle G, \psi_n \rangle| \geq (1 - \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j) a_n,$$

y por tanto $G$ es el vector buscado.
Construyamos entonces dichas sucesiones. Primero supongamos $j = 0$, tomamos entonces $F_0 = H_0 = \sum_{n\in J} \varepsilon_n a_n \psi_n$. Ésta elección existe debido a la propiedad (♦) para $R = \eta_1$ y $K = d_0$. Entonces las propiedades 1 y 4 se sostienen obviamente para $j = 0$. Ahora supongmos que para algún $j$ tenemos ya construidos vectores $F_j$,$H_j$ y $G_j$ verificando las Propiedades 1 y 4. Por 4 tendremos que $H_j = g_j + h_j$,

con $\|g_j\|_X \le \eta_{j+1}$ y $\|h_j\|_H \le d_j\omega\left(\frac{\eta_{j+1}}{d_j}\right)$. Pongamos $G_{j+1} = G_j + g_j$, entonces tendríamos obviamente

$$\|G_{j+1} - G_j\|_X = \|g_j\|_X \le \eta_{j+1},$$

es decir, 2 se cumple para $j+1$. Así obtenemos la forma de construir todos los $G_j$ a partir $G_0$.
Para construir los $H_j$ echemos un vistazo a los conjuntos, que se basan en la idea de los $n$ malos:

$$P = \{n \in J \ : |\langle G_{j+1}, \psi_j\rangle| \ge a_n(1 - \eta_0 - \ldots - \eta_{j+1})\} \text{ y } Q = J \setminus P.$$

Por hipótesis de inducción se cumple 1 para todo $n$, luego en particular para cada $n$ en $Q$ tenemos:

$$|\langle F_j, \psi_n\rangle - \langle G_{j+1}, \psi_n\rangle| \ge \Big| |\langle F_j, \psi_n\rangle| - |\langle G_{j+1}, \psi_n\rangle| \Big| \ge a_n\eta_{j+1}.$$

Como $F_j - G_{j+1} = F_j - G_j - g_j = H_j - g_j = h_j$, la última desigualdad nos da que, usando la igualdad de Parseval:

$$\sum_{n\in Q} a_n^2 \le \frac{1}{\eta_{j+1}^2}\sum_{n\in Q}|\langle h_j, \psi_n\rangle|^2 \le \frac{1}{\eta_{j+1}^2}\sum_{n\in J}|\langle h_j, \psi_n\rangle|^2 \le \frac{1}{\eta_{j+1}^2}\|h_j\|_H^2$$

Por tanto

$$\left(\sum_{n\in Q} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\eta_{j+1}}\|h_j\|_H.$$

Pongamos $H_{j+1} = \sum_{n\in Q}\varepsilon_n 2a_n(1 - \eta_0 - \ldots - \eta_{j+1})\psi_n$, dónde la elección de signos $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$ se realizará de forma especial, y sea $F_{j+1} = G_{j+1} + H_{j+1}$. Entonces, sin importar la elección de signos tomada, se tiene que, por la condición de Bessel:

$$\|H_{j+1}\|_H \le 2(1 - \eta_0 - \ldots - \eta_{j+1})\left(\sum_{n\in Q} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando la desigualdad anterior, junto con las propiedades de $h_j$:

$$\begin{aligned}
\|H_{j+1}\|_H &\le 2(1 - \eta_0 - \ldots - \eta_{j+1})\frac{1}{\eta_{j+1}}\|h_j\|_H \\
&\le 2(1-\eta_1)\frac{1}{\eta_{j+1}}\|h_j\|_H \\
&\le 2(1-\eta_1)\frac{1}{\eta_{j+1}}d_j\omega\left(\frac{\eta_{j+1}}{d_j}\right) \\
&= \frac{\omega(c_j)}{c_j} = d_{j+1}.
\end{aligned}$$

por la definición de los $\eta_j$. También sin importar la elección de signos se mantiene, para todo $n \in J$

$$|\langle F_{j+1}, \psi_n \rangle| \geq a_n(1 - \eta_0 - \ldots - \eta_{j+1}).$$

En efecto, si $n \in Q$, por definición:

$$\begin{aligned} |\langle F_{j+1}, \psi_n \rangle| &= |\langle G_{j+1}, \psi_n \rangle + \langle H_{j+1}, \psi_n \rangle| \\ &\geq |\langle H_{j+1}, \psi_n \rangle| - |\langle G_{j+1}, \psi_n \rangle| \\ &\geq 2a_n(1 - \eta_0 - \ldots - \eta_{j+1}) - a_n(1 - \eta_0 - \ldots - \eta_{j+1}) \\ &= a_n(1 - \eta_0 - \ldots - \eta_{j+1}), \end{aligned}$$

y si $n \notin Q$, debido a la definición de $H_{j+1}$, por ortogonalidad se tendría $\langle H_{j+1}, \psi_n \rangle = 0$, lo que implica que:

$$|\langle F_{j+1}, \psi_n \rangle| = |\langle G_{j+1}, \psi_n \rangle + \langle H_{j+1}, \psi_n \rangle| = |\langle G_{,+1}, \psi_n \rangle| \geq a_n(1 - \eta_0 - \ldots - \eta_{j+1}).$$

Por tanto, sólo quedaría elegir los $\varepsilon_j$ de forma que se verifique 4 (reemplazando $j+1$ por $j$) lo cual es posible por la propiedad (♦) usada para $R = \eta_{j+2}$ y $K?d_{j+1}$. ∎

Por tanto para resolver nuestro problema bastará ver que la dupla $(A(\mathbb{T}), H^2(\mathbb{T}))$ verifica la propiedad (♦) para $\{e^{int}\}_{n \geq 0}$ .

*Observación 6.2.* Veamos que podemos suponer que $\sum_n a_n^2 = 1$ a la hora de probar la propiedad (♦):
Supongamos existe $R_0$ tal que, para cualquier sucesión $\{a_n\}_{n \in J}$ verificando que $\sum_n a_n^2 = 1$, y para cualquier $R' \geq R_0$, existen unos vectores $g_1 \in X$, $h_1 \in H$ y un eleccion de signos $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$ para la cual, si definimos

$$f_\varepsilon(t) = \sum_{n \in J} \varepsilon_n a_n \psi_n,$$

se verifica:

1. $f_\varepsilon = g_1 + h_1$.
2. $\|g_1\|_X \leq R'$.
3. $\|h_1\|_H \leq \omega(R')$ .

Entonces, sea ahora $\{a_n\}_{n \in J}$ verificando que $(\sum_n a_n^2)^{\frac{1}{2}} = K$, donde $K > 0$, entonces se verificará que $\sum_j \left(\frac{a_j}{K}\right)^2 = 1$, luego si $R$ verificara que $R \geq KR_0$, se cumpliría que $\frac{R}{K} \geq R_0$, luego tomando $R' = \frac{R}{K} \geq R_0$ en la propiedad anterior obtendremos fácilmente que:

$$\sum_n \varepsilon_n a_n \psi_n = Kg_1 + Kh_1,$$

y definiendo $g = Kg_1$, y $h = Kh_1$ se verificará que :

1. $f_\varepsilon = g + h$.
2. $\|g\|_X \leq R$.
3. $\|h\|_H \leq K\omega(R/K)$ .

En el capítulo 2, gracias a la observación 3.9, vimos que, dada $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, y dado $\mu > 0$, existía una elección de signos $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$, tal que:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_n a_n e^{int} = g + h,$$

con $\|g\|_\infty \leq \mu$ y $\|2\|_2 \leq \omega(\mu)$; donde $\omega(\mu)$ era del orden de $e^{-\delta\sqrt{\mu}}$, con $\delta > 0$. Veamos si podemos extender un poco éste resultado:

*Proposición 6.3.* Dada $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ con $\sum_n a_n^2 = 1$, y dado $s > 0$, existe una elección de signos $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$, tal que se puede descomponer la función $f_\varepsilon = \sum_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_n a_n e^{int}$ como $f_\varepsilon = g + h$, donde $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ y $h \in L^2(\mathbb{T})$, con

$$||g||_\infty \leq s \quad , \quad ||h||_2 \leq 2\omega(s)$$

siendo $\omega(s)$ del orden de $e^{-\delta\sqrt{s}}$.

*Demostración.* Sabemos por el comentario anterior que existe una elección de signos tal que se puede descomponer $f_\varepsilon = g_1 + h_1$, dnde $g_1 \in L^\infty(\mathbb{T})$ con $||g_1||_\infty \leq s$ y $h_1 \in L^2(\mathbb{T})$ con $||h_1||_2 \leq \omega(s)$. Sea ahora $\{F_N\}$ la sucesión regularizante formada por los núcleos de Féjer. Tomamos $F_N * g_1$, entonces la función definida por la convolución es continua para todo $N$, y de hecho, como la norma 1 de $F_N$ toma el valor 1 para todo $N$, se tiene:

$$\|F_N * g_1\|_\infty \leq \|F_N\|_1 \|g_1\|_\infty = \|g_1\|_\infty \leq s.$$

Además, como $F_N * g$ converge (en norma 2) a $g$ , existirá $N_0$ tal que, para todo $N \geq N_0$

$$\|g_1 - F_N * g_1\|_2 \leq \omega(s).$$

Luego

$$\|g_1 - F_N * g_1 + h_1\|_2 \leq \|g_1 - F_N * g_1\|_2 + \|h_1\|_2 \leq 2\omega(s),$$

por tanto nos basta tomar $g = F_N * g_1$ y $h = g_1 - F_N * g_1 + h_1$ con $N \geq N_0$. ∎

Nos centramos ahora en probar la propiedad (♦). Para ello necesitaremos algunos resultados previos:
El primero es un conocido Teorema del Análisis Funcional, consecuencia del Teorema de Hahn-Banach y que puede encontrarse en [9], página 59, Theorem 3.4:

**Teorema 6.2.** *Sea $B$ un espacio de Banach, y sea $A \subset B$ convexo cerrado, entonces dado $g \in B$ se tiene que $g \in A$ si, y solo si, para todo $\lambda \in B^*$, se cumple*

$$\mathrm{Re}(\lambda(g)) \leq \sup_{f \in A} \mathrm{Re}(\lambda(f)).$$

El teorema en el que se centrará el resultado es el siguiente:

**Teorema 6.3.** *Existe una constante $C > 0$ tal que si dado $\lambda \in (\mathcal{C}(\mathbb{T}))^*$ definimos*

$$F_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\lambda(e^{int})} z^n$$

*se tiene, para todo $s > 0$, y todo $r \in (0,1)$:*

$$m\left(\left\{|F_\lambda(re^{it})| > s, \ \ t \in \mathbb{T}\right\}\right) \leq \frac{C\,\|\lambda\|}{s}.$$

Incluimos la demostración de dicho resultado al final de esta sección.
También nos será útil el siguiente teorema de integración:

*Proposición 6.4.* Sea $f : \mathbb{T} \to [0, +\infty]$ medible, sea $\mu(t) := m\{s \ : |G(s)| > t\}$, y sea $\varphi : [0, +\infty] \to [0, \infty]$ una función monótona, absolutamente continua en $[0, T]$ para todo $T$, y verificando que $\varphi(0) = 0$. Entonces se cumple que:

$$\int_{\mathbb{T}} (\varphi \circ f)\, dm = \int_0^{+\infty} \mu(t) \varphi'(t)\, dt. \tag{6.2}$$

*Demostración.* Consideraremos la medida producto, que en este caso coincide con la medida de Lebesgue 2-dimensional. Definimos, dada la función $f$, el siguiente conjunto:

$$E_f = \{(x,t)\,; x \in \mathbb{T}\,,\ f(x) > t\} \subseteq \mathbb{T} \times [0, +\infty).$$

Veamos que $E_f$ es medible:

1. En primer lugar la función $\pi : (x,t) \mapsto t$ es medible, pues es simplemente la proyección.
2. Por otro lado la función $\phi : (x,t) \mapsto f(x)$ de nuevo es medible, por serlo $f$.

3. Por tanto $u = \phi - \pi$ es medible, pues es diferencia de medibles
4. Finalmete $E_f$ será medible, pues $E_f = u^{-1}((0, +\infty))$, es decir, es la antimagen de un abierto a través de una función medible.

Si ahora dado $t \in [0, +\infty)$ defino

$$E_f^t = \{x \in \mathbb{T}\,; (x,t) \in E_f\}$$

Entonces, por el Principio de Cavalieri, $E_f^t$ es medible, pues $E_f$ es medible. Además

$$m(E_f^t) = \int_{\mathbb{T}} \chi_{E_f}\, dm.$$

Por tanto el lado derecho de (6.2) se puede escribir como

$$\int_0^{+\infty} m(E_f^t)\varphi'(t)\, dt,$$

pues si usamos el teorema de Fubini:

$$\int_0^{+\infty} \mu(t)\varphi'(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \varphi'(t) \int_{\mathbb{T}} \chi_{E_f}(x,t)\, dm\, dt = \int_{\mathbb{T}} dm \int_0^{+\infty} \chi_{E_f}(x,t)\varphi'(t)\, dt.$$

Como, para cada $x \in \mathbb{T}$, se tiene que

$$\chi_{E_f}(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{si } f(x) > t \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases},$$

usando la regla de Barrow (lo cual es posible por la continuidad absoluta) obtenemos:

$$\int_0^{+\infty} \chi_{E_f}(x,t)\varphi'(t)\, dt = \int_0^{f(x)} \varphi'(t)\, dt = \varphi(f(x))$$

(pues $\varphi(0) = 0$).
De donde se deduce el resultado. ▮

Finalmente necesitaremos el siguiente Lema:

*Lema 6.2.* Sea $G \in L^2(\mathbb{T})$, con $||G||_2 \leq R$ y con $\mu(t) := m\{s\ : |G(s)| > t\} \leq \frac{\delta}{t}$, entonces, si $0 < \delta \leq R$, se tiene que

$$\|G\|_1 \leq 2\delta(1 + \log(R/\delta)).$$

*Demostración.* De las hipótesis se sigue que, además $\mu(t) \leq \frac{R^2}{t^2}$. En efecto,usando la desigualdad Chebyshev para la norma 2:

$$\mu(t) = m\{s \ : |G(s)| > t\} \leq \frac{\|G\|_2^2}{t^2} \leq \frac{R^2}{t^2}.$$

Por otro lado, al trabajar con la medida normalizada, se tiene que $\mu(t) \leq 1$. Sean ahora $0 < a \leq b$, entonces, usando la proposición anterior tomando $\varphi$ como la identidad, tenemos:

$$\begin{aligned} ||G||_1 &= \int_0^\infty \mu(t)\, dt \\ &= \int_0^a \mu(t)\, dt + \int_a^b \mu(t)\, dt + \int_b^\infty \mu(t)\, dt \\ &\leq \int_0^a 1\, dt + \int_a^b \frac{\delta}{t}\, dt + \int_b^\infty \frac{R^2}{t^2}\, dt \\ &= a + \delta \log\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{R^2}{b}, \end{aligned}$$

luego basta tomar $a = \delta$ y $b = \frac{R^2}{\delta}$, elección posible siempre que $\delta \leq R$ . ∎

Procedamos ya a demostrar el Teorema:

**Teorema 6.4.** *Existe $R_0$ tal que, para todo $R \geq R_0$, y para toda sucesión $\{a_n\}_{n\geq 0}$ con $\sum_n a_n^2 = 1$, existe una elección de signos $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$, tal que se puede descomponer la función $f_\varepsilon = \sum_{n=0}^\infty \varepsilon_n a_n e^{int}$ como $f_\varepsilon = g_2 + h_2$, donde:*

1. *$g_2 \in A(\mathbb{T})$ con $||g_2||_\infty \leq R$*
2. *$h_2 \in H^2(\mathbb{T})$ con $||h_2||_2 \leq D\omega(R)$, siendo $D$ es una constante positiva y $\omega(R)$ del orden de $\exp(-\delta\sqrt{R})$.*

*Demostración.* Tomando $s = \sqrt{R}$ en la Proposición 6.3, sabemos que existe una elección de signos $\varepsilon = \{\varepsilon_j\}$, tal que se puede descomponer la función $f_\varepsilon(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_j a_j e^{ijt}$ como $f_\varepsilon = g + h$, donde

1. $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ con $||g||_\infty \leq \sqrt{R}$.
2. $h \in L^2(\mathbb{T})$ con $||h||_2 \leq 2\omega(\sqrt{R})$.

Sea la proyección $P : L^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$, como $H^2(\mathbb{T})$ es subespacio vectorial, se tiene la proyección es lineal y que, por tanto, $Pg + Ph = Pf_\varepsilon = f_\varepsilon \in H^2(\mathbb{T})$.

Además como $||P|| \leq 1$ , se tiene que $||Ph||_2 \leq 2\omega(\sqrt{R})$. Bastará por tanto descomponer $Pg = g_1 + h_1$ , con $g_1 \in A(\mathbb{T})$ y $h_1 \in H^2(\mathbb{T})$, de manera que $||g_1||_\infty \leq R$ y $||h_1||_2 \leq 2\omega(R)$ .
Denoto $V_1 = \{g \in A(\mathbb{T}) \ : \ \|g\|_{\mathbb{A}} \leq R\}$ y $V_2 = \{h \in H^2(\mathbb{T}) \ : \ \|h\|_{H^2} < \omega(R)\}$. Sería sufiente ver que $Pg \in \overline{V_1 + V_2}$, ya que, como $V_2$ es abierto de $H^2(\mathbb{T})$ y $0 \in V_2$, se cumple que

$$\overline{V_1 + V_2} \subseteq V_1 + V_2 + V_2 = V_1 + 2V_2.$$

Al ser estos conjuntos convexos, usando el teorema 6.2 comprobaremos que, dado $\Phi \in (H^2(\mathbb{T}))^*$, entonces

$$\mathrm{Re}(\Phi(Pg)) \leq \sup_{g \in V_1} \mathrm{Re}(\Phi(g)) + \sup_{g \in V_2} \mathrm{Re}(\Phi(g)) = R \left\|\Phi\right\|_{\mathbb{A}^*} + \omega(R) \left\|\Phi\right\|_{(H^2)^*}.$$

Por el teorema de Riesz, existe $\varphi \in H^2(\mathbb{T})$ tal que para todo $g \in H^2(\mathbb{T})$ se tiene que $\Phi(g) = \langle g, \varphi \rangle$, con además $||\varphi||_{H^2(\mathbb{T})} = ||\Phi||_{(H^2(\mathbb{T}))^*}$. Defino

$$F(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{\Phi(e^{ijt})} z^j.$$

Defino tambien , dado $r \in (0,1)$ :

$$F_r(e^{i\theta}) := F(re^{i\theta}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{\Phi(e^{ijt})} r^n e^{in\theta}.$$

Como, usando el criterio M, la anterior suma es absolutamente convergente, y
$\Phi \in (H^2(\mathbb{T}))^*$, obtenemos que

$$\widehat{F_r}(j) = \begin{cases} 0, & \text{si } j < 0 \\ \overline{\Phi(e^{ijt})} r^j, & \text{si } j \geq 0 \end{cases}.$$

Luego dada $g \in L^2(\mathbb{T})$, si usamos la convergencia absoluta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{F(re^{i\theta})} g(\theta) \, d\theta = \langle F_r, g \rangle_{L^2} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{g}(j) \overline{\widehat{F_r}(j)} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} r^j \widehat{g}(j) \Phi(e^{ijt}) \\ &= \Phi\left( \sum_{j=0}^{+\infty} r^j \widehat{g}(j) e^{ijt} \right). \end{aligned}$$

Luego tomando límite cuando $r \to 1^{-}$, por las propiedades de la integral de Poisson:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{F(re^{i\theta})} g(\theta)\, d\theta = \Phi\left(\sum_{j=0}^{\infty} r^j \widehat{g}(j) e^{ijt}\right), \to \Phi(Pg)$$

pues la proyección consiste simplemente en eliminar los coeficiente de Fourier asocidos enteros negativos.
Por tanto, para acotar $\Phi(Pg)$ nos bastará acotar los $\langle g, F_r\rangle_{L^2}$ por una cota independiente de $r$. Por un lado, por la desigualdad de Bessel:

$$\begin{aligned}\|F_r\|_2^2 \le \sum_{j=0}^{+\infty} |\Phi(e^{ijt})|^2 |r|^{2j} &\le \sum_{j=0}^{\infty} |\Phi(e^{ijt})|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\left\langle \varphi, e^{ijt}\right\rangle|^2 \\ &\le \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\left\langle \varphi, e^{ijt}\right\rangle|^2 = \|\varphi\|_2^2 = \|\Phi\|_{(H^2)^*}^2 .\end{aligned} \tag{6.3}$$

Por otro lado usando el Teorema 6.3 junto al teorema de Hanh-Banach (existe $\lambda \in (\mathcal{C}(\mathbb{T}))^*$ tal que $\lambda_{|A(\mathbb{T})} = \Phi$ y $\|\lambda\|_{(\mathcal{C}(\mathbb{T}))^*} = \|\Phi\|_{(A(\mathbb{T}))^*}$) vemos que, para todo $r \in (0,1)$ se verifica:

$$t\, m\left(\left\{\theta \ : |F_r(e^{i\theta})| > t\right\}\right) \le C\, \|\Phi\|_{\mathbb{A}^*} .$$

Buscábamos que $|\Phi(Pg)| \le R\,\|\Phi\|_{A^*} + D\omega(R)\,\|\Phi\|_{(H^2)^*}$. Denotemos de nuevo $A := \|\Phi\|_{A^*}$ y $B := \|\Phi\|_{(H^2)^*}$, teníamos entonces, denotando $\Lambda_r(\theta) := \overline{F_r(e^{i\theta})}$, que:

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \Lambda_r(\theta) g(\theta)\, d\theta = \Phi(Pg).$$

Además, por (6.3) se tiene que $\|\Lambda_r\|_2 \le B$. Veamos ahora los siguientes casos:
• Si $2A > B$:
Como podemos elegir de forma arbitraria $R_0$, podemos obtener que:

$$\frac{B^2}{A^2} \le 4 \le R_0 \le R.$$

Entonces ocurriría que, por las propiedades de la norma del dual:

$$|\Phi(Pg)| \le B\,\|Pg\|_2 \le B\,\|g\|_2 \le B\,\|g\|_\infty \le B\sqrt{R} \le a\sqrt{R}\sqrt{R} = AR,$$

y por tanto habríamos acabado.
• Si $2A \le B$:
Entonces aplicando el Lema 6.2:

$$|\Phi(Pg)| \le \|g\|_\infty \|\Lambda_r\|_1 \le 4A\left(1 + \log\left(\frac{B}{2A}\right)\right) \le \sqrt{R}\left(4A + 4A\log\left(\frac{B}{2A}\right)\right).$$

Distingimos ahora dos subcasos:
$*$ Si $8\log\left(\frac{B}{2A}\right) < \sqrt{R}$:
En este caso, para $R > R_0$, con $R_0$ suficientemente grande:

$$|\Phi(Pg)| \leq \sqrt{R}\left(4A + 4A\log\left(\frac{B}{2A}\right)\right) \leq \sqrt{R}\,2\left(2A + \frac{A}{2}\sqrt{R}\right)$$
$$\leq \frac{R}{8}4A + \frac{A}{2}R = AR.$$

$*$ Si $8\log\left(\frac{B}{2A}\right) \geq \sqrt{R}$:
Entonces, suponiendo $R_0 \geq 16$

$$|\Phi(Pg)| \leq \sqrt{R}\left(4A + 4A\log\left(\frac{B}{2A}\right)\right) \leq AR + 2\,\frac{2A}{B}\log\left(\frac{B}{2A}\right)B\sqrt{R}.$$

Si analizamos ahora la función $f(x) = \frac{\log x}{x}$, vemos que esta decrece para $x > e$, luego ajustando $R_0$, y, puesto que

$$x = \frac{B}{2A} \geq \exp\left(\frac{\sqrt{R}}{8}\right) = x_1 \geq e,$$

para $R_0$ suficientemente grande, y tomando un $\delta$ adecuado obtenemos:

$$|\Phi(Pg)| \leq AR + 2\,\frac{2A}{B}\log\left(\frac{B}{2A}\right)B\sqrt{R} \leq AR + 2\exp\left(\frac{-\sqrt{R}}{8}\right)\frac{\sqrt{R}}{8}B\sqrt{R}$$
$$\leq AR + B\exp(-\delta\sqrt{R}).$$

Con lo cual tenemos que $Pg \in V_1 + V_2 \in \overline{V_1 + V_2} \subseteq V_1 + 2V_2$, y bastará tomar $g_2 = g + g_1$ y $h_2 = h_1 + Ph$ ▮

*Observación 6.3.* Como tomando $c_n = 2^n$ y considerando $\omega_1 = D\exp(-\delta\sqrt{R})$ claramente se cumple (6.1), por el Teorema anterior obtenemos que $(A(\mathbb{T}), H^2(\mathbb{T}))$ posee la propiedad (♦) para $\{e^{int}\}_{n\geq 0}$, y sin más que aplicar el Teorema 6.1 conseguimos resolver nuestro problema.

Procedamos con la demostración del Teorema 6.3, para ello necesitaremos algunas definiciones y resultados previos:

**Definición 6.6.** *Sea $\lambda : \mathcal{C}(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ funcional, decimos que es real si $\lambda(f) \in \mathbb{R}$, para toda $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ continua.*

*Observación 6.4.* Esta última definición es equivalente a que se verifique
$\lambda(\bar{f}) = \overline{\lambda(f)}$ para toda $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$.

**Definición 6.7.** *Decimos además que $\lambda : \mathcal{C}(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ funcional real, es positivo si $\lambda(f) \geq 0$, para toda $f : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ continua.*

*Observación* 6.5. Si $f, g$ son funciones continuas tales que $f \leq g$, entonces si $\lambda$ es un funcional positivo se tiene $\lambda(g - f) \geq 0$, y por linealidad $\lambda(f) \leq \lambda(g)$.

*Observación* 6.6. Como para toda $f$ continua real se tiene que $f = (f)^+ - (f)^-$, el espacio vectorial generado por $\{f : \mathbb{T} \to \mathbb{R} \quad \text{continuas}\}$ es el mismo que el generado por $\{f : \mathbb{T} \to [0, +\infty) \quad \text{continuas}\}$.

Veamos algunas propiedades:

*Proposición* 6.5. Tenemos que:

a) Si es positivo, entonces $||\lambda|| = \lambda(1)$, dónde $1$ denota la función constante 1.
b) Dado un funcional $\lambda \in \mathcal{C}(\mathbb{T})^*$, existen $\lambda_1$ y $\lambda_2$ reales, tales que $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ y $||\lambda_j|| \leq ||\lambda||$, para $j = 1, 2$.
c) Dado un funcional $\lambda \in \mathcal{C}(\mathbb{T})^*$ real, existen $\lambda_1$ y $\lambda_2$ positivos, tales que $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, y $||\lambda_j|| \leq ||\lambda||$, para $j = 1, 2$.

*Demostración* (Idea). a) La desigualdad $\geq$ es trivial por la definición de norma, veamos la otra desigualdad. Sea $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ continua con $|f(t)| \leq 1$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{C}$ de módulo 1 tal que:

$$|\lambda(f)| = \alpha\lambda(f) = \lambda(\alpha f) = \lambda(\mathrm{Re}(\alpha f)),$$

pues $|\lambda(f)|$ es real y, por tanto, $\lambda(\mathrm{Im}(\alpha f)) = 0$.
Como

$$-||f|| \leq \mathrm{Re}(\alpha f) \leq ||f||$$

tenemos que, por monotonía,

$$|\lambda(f)|\lambda(\mathrm{Re}(\alpha f)) \leq ||f||\lambda(1) \leq \lambda(1),$$

pues $|f(t)| \leq 1$.

b) Defino $\beta(f) = \overline{\lambda(\overline{f})}$, entonces claramente $\beta$ sigue siendo lineal y continuo, con $||\beta|| = ||\lambda||$. Por tanto me basta tomar

$$\lambda_1 = \frac{\lambda + \beta}{2} \quad y \quad \lambda_2 = \frac{\lambda - \beta}{2i}.$$

c) Dada $f \geq 0$, defino

$$\lambda_1(f) = \sup_{0 \leq g \leq f} \lambda(g).$$

Como $0 \leq 0 \leq f$:

$$\lambda_1(f) \geq \lambda(0) = 0.$$

Se comprueba que $\lambda_1$ es lineal, Además es continuo ya que, si $0 \leq g \leq f$ entonces $\|g\| \leq \|f\|$, y por tanto

$$|\lambda(g)| \leq \|\lambda\| \|f\|, \quad \text{para } 0 \leq g \leq f.$$

Luego

$$\lambda_1(f) \leq \|\lambda\| \|f\|,$$

obteniéndose así la continuidad y que $\|\lambda_1\| \leq \|\lambda\|$. Defino ahora

$$\lambda_2 = \lambda_1 - \lambda,$$

que resulta ser también un funcional positivo, ya que como $0 \leq f \leq f$:

$$\lambda_1(f) \geq \lambda(f)$$

luego

$$(\lambda_1 - \lambda)(f) \geq 0.$$

Además es lineal y continuo, por serlo $\lambda$ y $\lambda_1$. Finalmente, como se verifica que

$$\lambda_2(f) = \sup_{-f \leq h \leq 0} \lambda(h)$$

de nuevo se comprueba que $||\lambda_2|| \leq ||\lambda||$.

∎

*Corolario* 6.1. Dado un funcional $\lambda : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$, existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ funcionales positivos tales que $\lambda = (\lambda_1 - \lambda_2) + i(\lambda_3 - \lambda_4)$ con $||\lambda_j|| \leq ||\lambda||$ para $j = 1, 2, 3, 4$.

*Demostración* (Teorema 6.3). Dada $\lambda \in (\mathcal{C}(\mathbb{T}))^*$, defino

$$F_\lambda(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\lambda(e^{ijt})} z^n.$$

Como hemos visto previamente, podemos descomponer

$$F_\lambda = (F_{\lambda 1} - F_{\lambda 2}) + i(F_{\lambda 3} - F_{\lambda_4}),$$

con los $\lambda_j$ positivos, y de norma menor o igual que la de $\lambda$. Entonces se tiene que:

$$\{\theta \ : |F_\lambda(re^{i\theta})| > t\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{4} \left\{\theta \ : |F_{\lambda_j}(re^{i\theta})| > \frac{t}{4}\right\}. \tag{6.4}$$

Comprobemos ahora que si $\lambda$ es positivo, se verifica:

$$m\left\{\theta\ : |F_\lambda(re^{i\theta})| > t\right\} \leq \frac{2\lambda(1)}{t}.$$

Si $\lambda$ es positivo, se tiene que $||\lambda||_{(\mathcal{C}(\mathbb{T}))^*} = \lambda(1) := A$, entonces por la convergencia absoluta:

$$\mathrm{Re}(F_\lambda(re^{i\theta})) = \lambda(1) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\overline{\lambda(e^{ijt})}r^j e^{ij\theta} + \lambda(e^{ijt})r^j e^{-ij\theta}\right)$$

Ahora, por ser $\lambda$ un funcional real, tenemos

$$\overline{\lambda(e^{ijt})} = \lambda(\overline{e^{ijt}}) = \lambda(e^{-ijt})$$

luego $\mathrm{Re}(F_\lambda(re^{i\theta})) = \lambda(h)$, siendo $h$ la función continua dada por:

$$h(x) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} r^j e^{ij(\theta-x)} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} r^j e^{-ij(\theta-x)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P_r(\theta - x) > 0$$

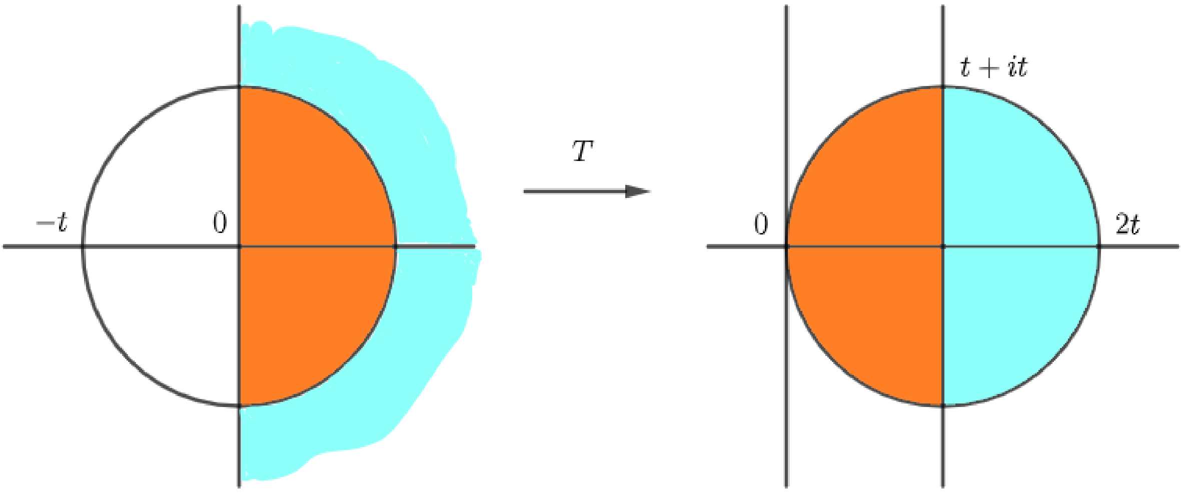
(donde $P_r$ denota el núcleo de Poisson, que es positivo).
En conclusión, tenemos que $\mathrm{Re}(F_\lambda(re^{i\theta})) > 0$, es decir, $F_\lambda : \mathbb{D} \to \{z \in \mathbb{C}\ :\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$ con $F_\lambda(0) = \lambda(1) = A$. Cabe destacar que deberemos acotar para $t > A$, pues la medida siempre es menor que 1. Fijemos $t > A$, y tomemos ahora $T$ como la transformación de Möebius tal que:

$$\begin{cases} T(t) = t \\ T(-t) = \infty \\ T(\infty) = 2t \end{cases}$$

Así obtenemos que $Tz = \frac{2tz}{z+t}$. Además como

$$\begin{cases} T(0) = 0 \\ T(-it) = t - it\infty \\ T(it) = t + it \end{cases}$$

vemos que se tiene:




Transformación $T$

Entonces tenemos:

$$m\left(\left\{\theta\ : |F_\lambda(re^{i\theta})| > t\right\}\right) = m\left(\left\{\theta\ :\ \mathrm{Re}(T(F(re^{i\theta}))) > t\right\}\right) \leq \frac{1}{t}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(T(F(re^{i\theta})))d\theta$$

(en la última desigualdad hemos aplicado la desigualdad de Chebyshev).
Pero, por el Teorema de la Media:

$$\frac{1}{t}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(T(F(re^{i\theta})))\,d\theta = \frac{1}{t}\mathrm{Re}(T(A)) = \frac{1}{t}\frac{2tA}{t+A} = \frac{2A}{t+A} \leq \frac{2A}{t}$$

Por tanto se puede concluir que

$$m\left\{\theta\ : |F_\lambda(re^{i\theta})| > t\right\} \leq \frac{2A}{t}$$

y por tanto, por (6.4), en particular obtenemos que, para $r \in (0,1)$, y $\lambda \in \mathcal{C}(\mathbb{T})^*$ cualquiera:

$$m\left\{\theta\ : |F_\lambda(re^{i\theta})| > t\right\} \leq \frac{32A}{t}$$

∎

*Observación 6.7.* Para el caso $\mathbb{U}(\mathbb{T})$ se puede obtener un Teorema análogo al Teorema 6.2. Para demostrarlo se usaría un razonamiento similar, sin embargo, a la hora de probar la cota $m\left\{\theta\ : |F_r(e^{i\theta})| > t\right\} \leq \frac{C\|\Phi\|_{\mathbb{U}^*}}{t}$ necesitaríamos aplicar el Teorema de Carleson, que se aleja bastante del nivel de matemáticas usado en el trabajo.

# Bibliografía


[1] Bang, T. *A solution of the "plank problem"*

Proc. Amer. Math. Soc. 2, 1951, 990–993.

[2] Brezis, Haim *Análisis Funcional, Teoria y Aplicaciones*

Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[3] Kahane, Jean-Pierre *Some Random Series of Functions.*

Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[4] Katznelson, Yitzhak *An Introduction to Harmonic Analysis.*

Second Edition. Dover Publications Inc.,New York, 1976.

[5] Kislyakov, S. V. *The Fourier coefficients of the boundary values of functions analytic in the disk and the bidisk*

Trudy Mat. Inst. Steklov. 155, 1981, 77–94, 183–185.

[6] K. de Leeuw, Y. Katznelson, and J.-P.Kahane *Sur les coefficients de Fourier des fonctions continues*

C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 285, 1977.

[7] Li, Daniel and Queffélec, Hervé *Introduction to Banach Spaces: Analysis and Probability Vol. I*

Cambridge University Press, Cambridge, 2018.

[8] Nazarov, F. L. *The Bang solution of the coefficient problem*

Algebra i Analiz 9, 1997, no. 2, 272-287, translation in St. Petersburg Math. J. 9, 1998, no. 2, 407-419.

[9] Rudin, Walter *Functional Analysis.*
Second Edition. McGraw-Hill Inc., New York, 1991.

[10] Rudin, Walter *Análisis Real y Complejo*
McGraw-Hill, Madrid, 1988.