



CURSOS DE VERANO 2014

GEOGEBRA COMO RECURSO PARA UNAS NUEVAS MATEMÁTICAS

MATEMÁTICA DISCRETA CON GEOGEBRA

RAÚL MANUEL FALCÓN GANFORNINA (rafalgan@us.es)

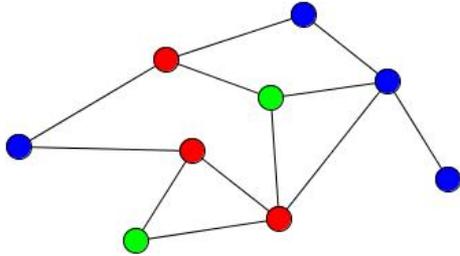
ÍNDICE

- ▣ **NOCIONES BÁSICAS.**
- ▣ **PROBLEMAS.**
- ▣ **HERRAMIENTAS DE GEOGEBRA.**
- ▣ **GENERANDO NUEVAS HERRAMIENTAS.**

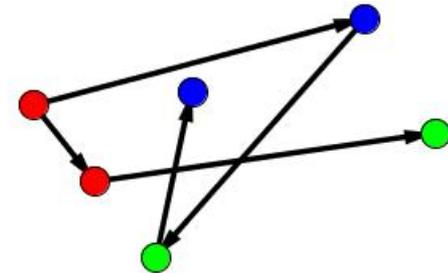
NOCIONES BÁSICAS

NOCIONES BÁSICAS

- **Grafo $G = (V, A)$:** Par formado por un conjunto de vértices V y un conjunto de aristas A .

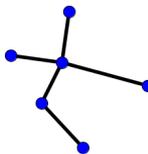


Grafo no dirigido



Grafo dirigido

- **Grafo conexo:** Todo par de vértices se puede conectar por aristas.
- **Grafo ponderado:** Sus vértices y/o aristas tienen asociados pesos.
- **Valencia de un vértice:** Número de aristas que inciden en el vértice.
- **Árbol:** Grafo con vértices de valencia menor o igual a dos.



PROBLEMAS

Red de coste mínimo

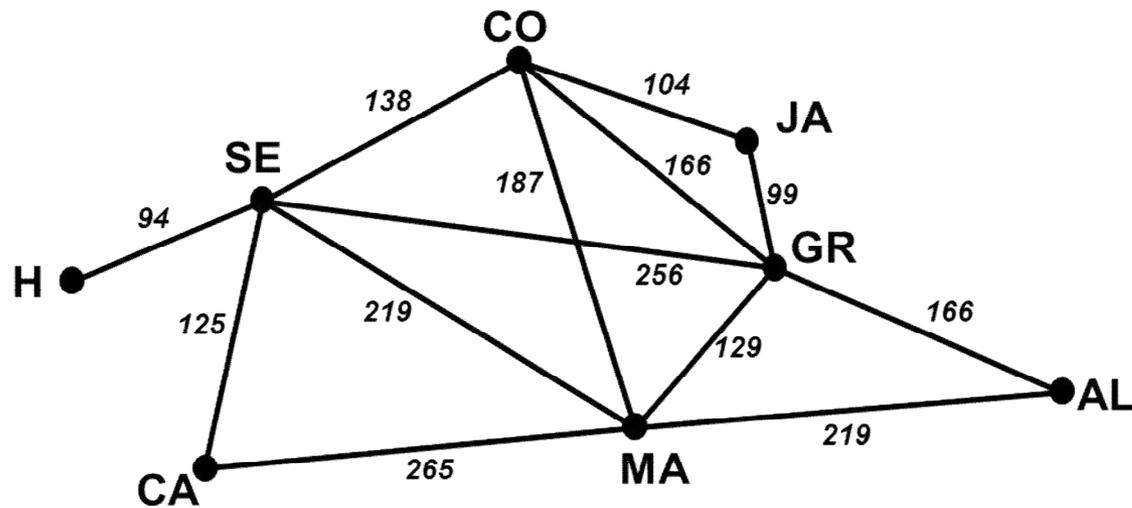
Se quiere crear una red de carreteras que una las diez poblaciones que determinan la red judicial de Jaén con el menor coste posible.

¿Cuál sería la longitud total de dicha red?



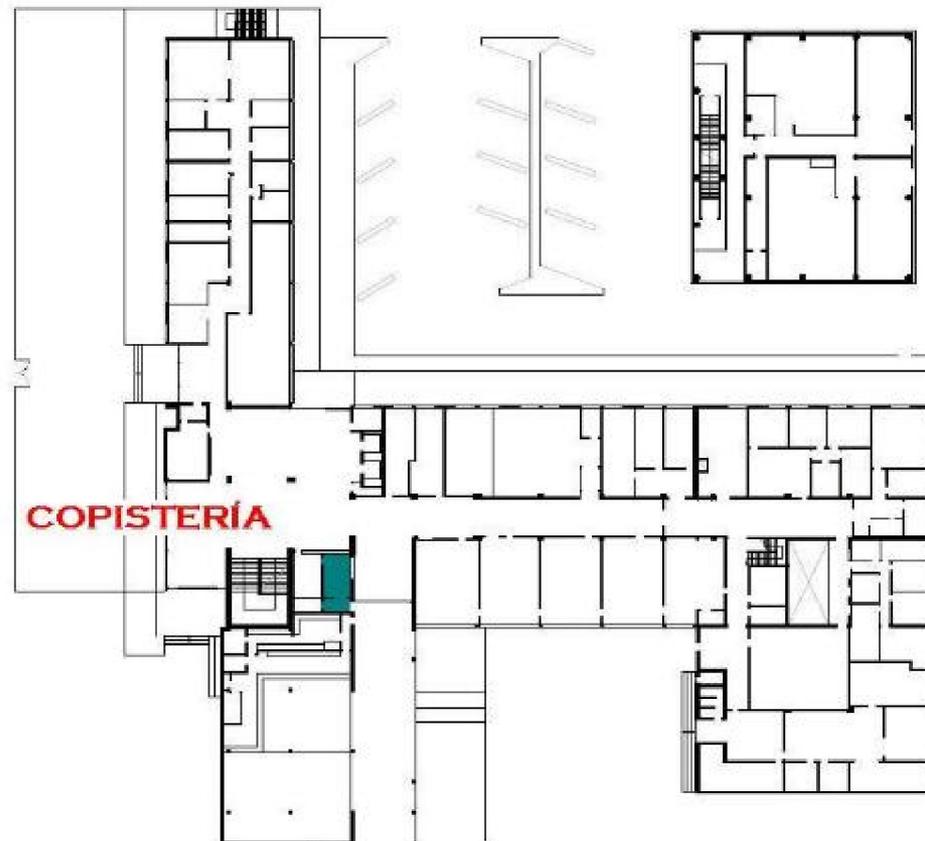
La ruta más corta

¿Cuál es la ruta más corta para ir de Huelva a Jaén?



Recorridos de evacuación

¿Cómo diseñar un plan de evacuación de forma interactiva?



El viajante

Un representante de comercio, con sede en una ciudad A, debe visitar una serie de clientes establecidos en distintas ciudades de manera que su itinerario tenga como principio y fin la ciudad de residencia.

¿Que ruta deberá seguir con el fin de minimizar costes, es decir pasar una sola vez por cada ciudad haciendo el menor número de kilómetros?



La central de residuos

Se quiere colocar una central incineradora de residuos sólidos urbanos que recoja la basura de diez poblaciones, distribuidas en el mapa según el dibujo inferior.

¿Cuál sería el punto más justo para colocar la central?



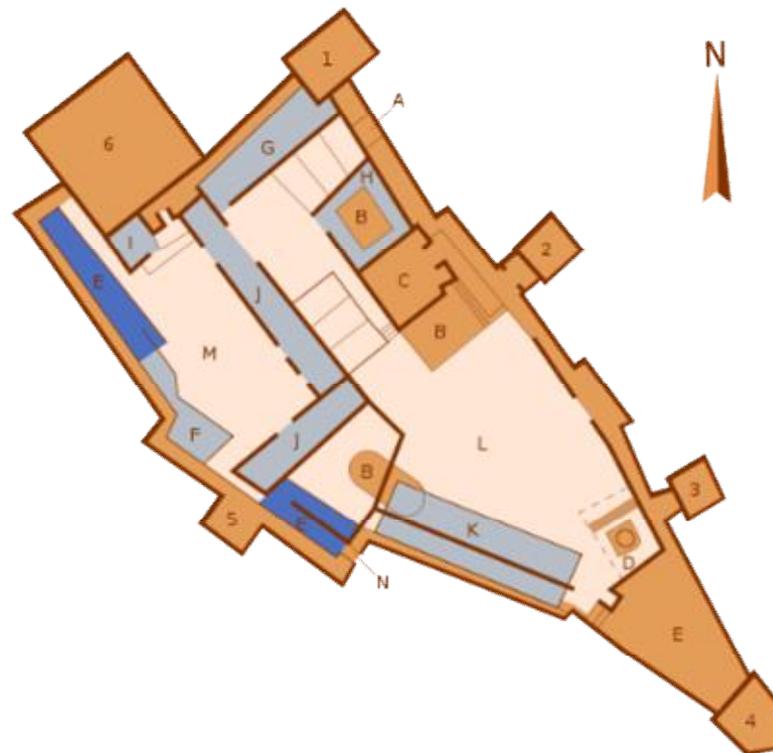
Los cuatro colores

¿Se puede colorear el mapa de España usando cuatro colores sin que dos provincias que sean limítrofes estén coloreadas con el mismo color?



La galería de arte

¿Cuántos guardianes son suficientes y ocasionalmente necesarios para cubrir la vigilancia del interior del Castillo de Santa Catalina en Jaén?



HERRAMIENTAS DE GEOGEBRA

HERRAMIENTAS DE GEOGEBRA

Árbol Recubridor Mínimo.

Cierre.

Cierre convexo.

Delaunay.

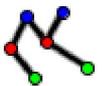
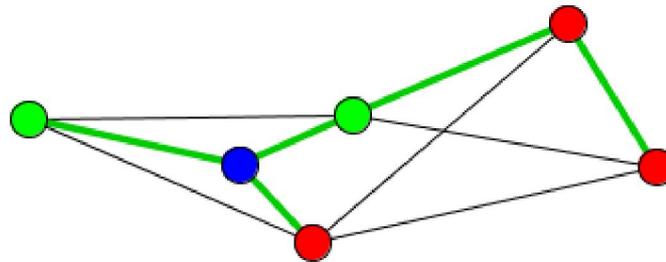
Menor Distancia.

Viajante.

Voronoi.

Árbol Recubridor Mínimo

Un **árbol** contenido en un *grafo conexo y no dirigido* se denomina **recubridor** si contiene a todos los vértices del grafo. Si el grafo tiene aristas ponderadas, entonces un **árbol recubridor** es **mínimo** si la suma de los pesos de sus aristas es la menor posible.



ÁrbolRecubridorMínimo[<Lista de puntos>]

- Utiliza como peso la distancia euclídea.
- Genera un árbol desde un conjunto de puntos, no desde un grafo.

Red de coste mínimo

Se quiere crear una red de carreteras que una las diez poblaciones que determinan la red judicial de Jaén con el menor coste posible.

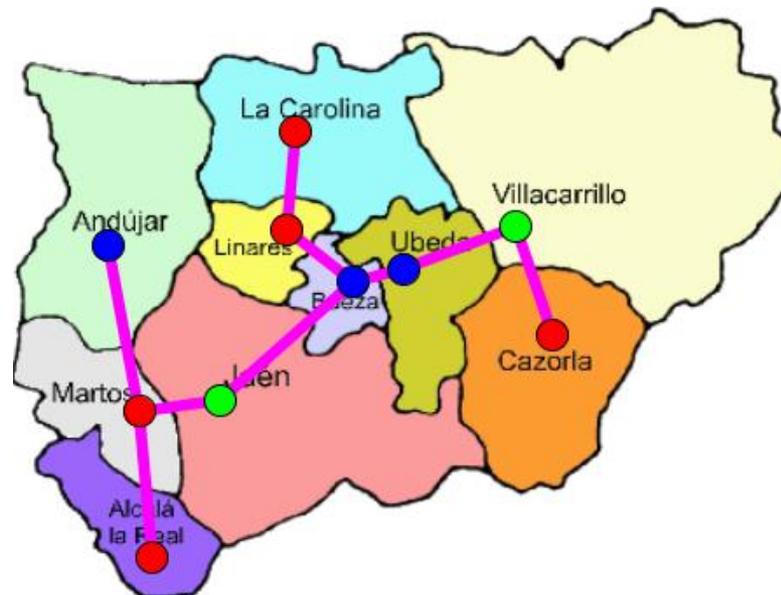
¿Cuál sería la longitud total de dicha red?



Red de coste mínimo

Se quiere crear una red de carreteras que una las diez poblaciones que determinan la red judicial de Jaén con el menor coste posible.

¿Cuál sería la longitud total de dicha red?



Cierre Convexo

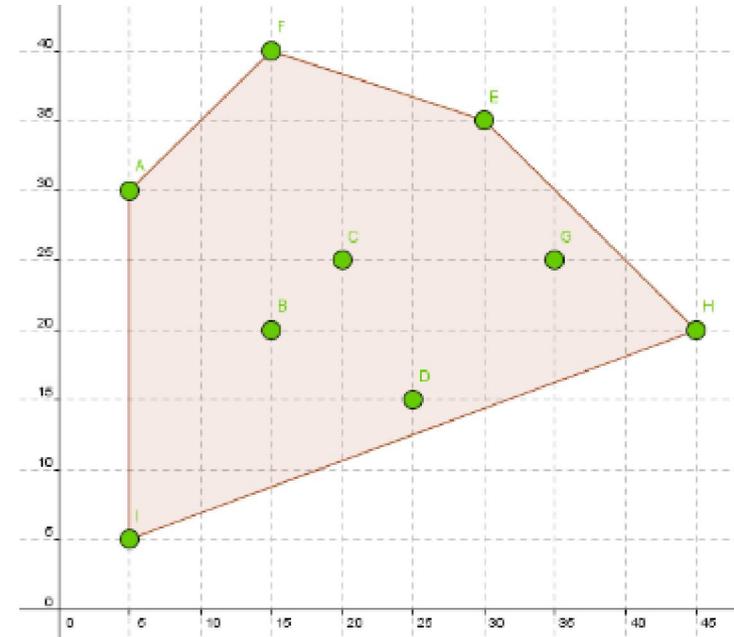
La **envolvente convexa** del conjunto de puntos $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ es el polígono convexo de menor área que contiene todos estos puntos.

 **Cierre[<Lista de Puntos>, <Porcentaje>]**

Muestra una envolvente cuya área depende del porcentaje indicado.

 **CierreConvexo[<Lista de Puntos>]**

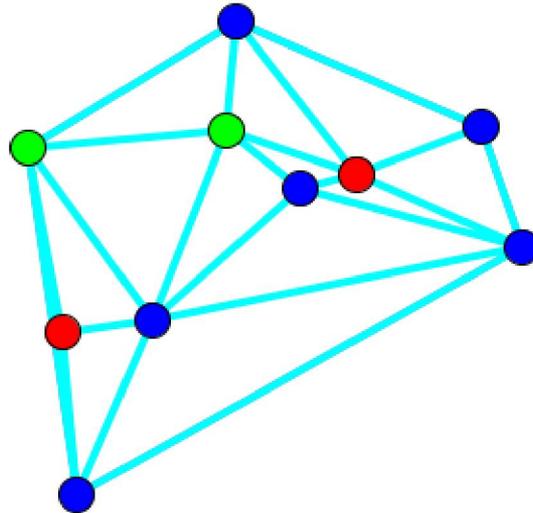
Muestra la envolvente convexa de un conjunto de puntos.



Triangulación de Delaunay

Se llama **triangulación de Delaunay** de un conjunto de puntos en el plano a una subdivisión en triángulos de la envolvente convexa de dicho conjunto, de tal forma que ninguna circunferencia circunscrita a uno de esos triángulos contiene un vértice de otro de los triángulos.

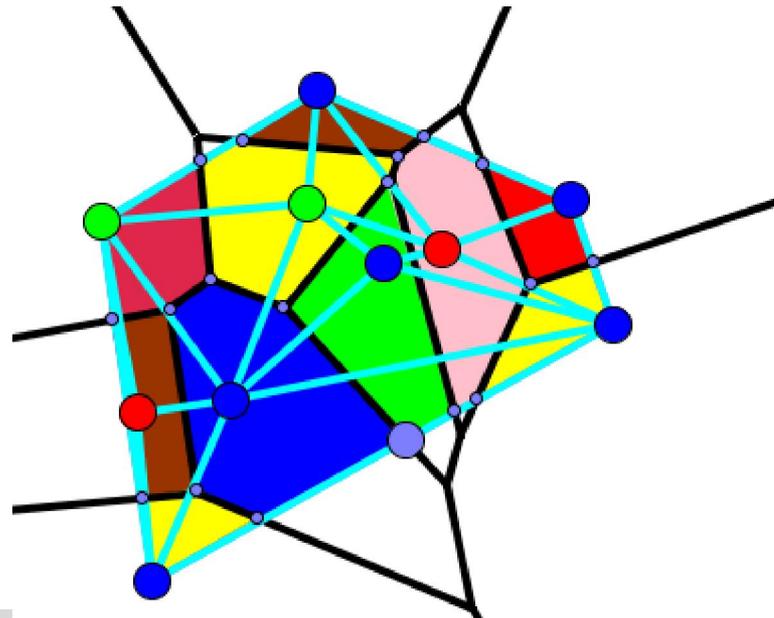
 **Delaunay[<Lista de Puntos>]**



Triangulación de Delaunay

Se llama **triangulación de Delaunay** de un conjunto de puntos en el plano a una subdivisión en triángulos de la envolvente convexa de dicho conjunto, de tal forma que ninguna circunferencia circunscrita a uno de esos triángulos contiene un vértice de otro de los triángulos.

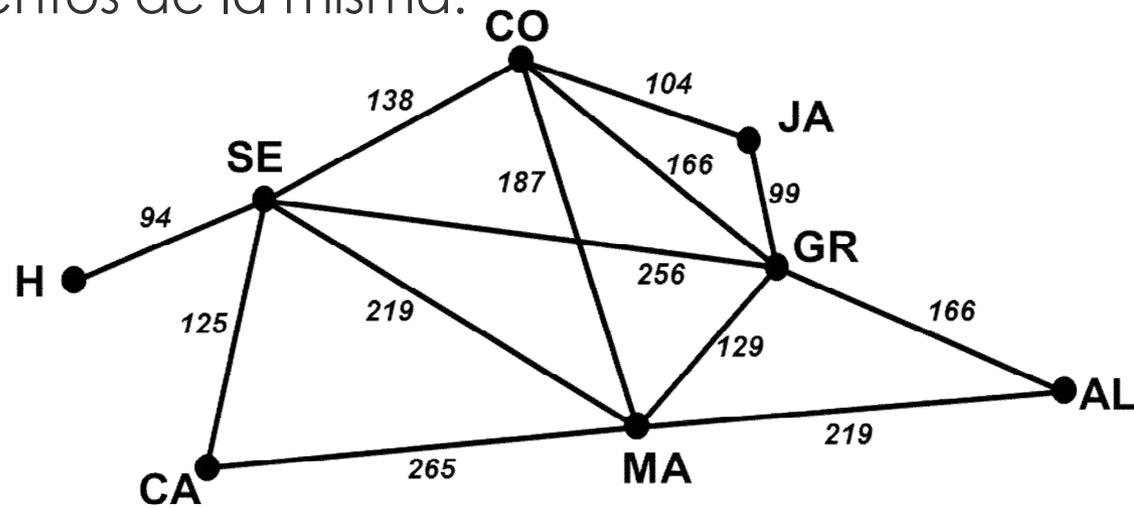
 **Delaunay[<Lista de Puntos>]**



Dual del diagrama
de Voronoi

Menor Distancia

Dada una red de transporte, hallar la ruta óptima entre un determinado par de elementos de la misma.

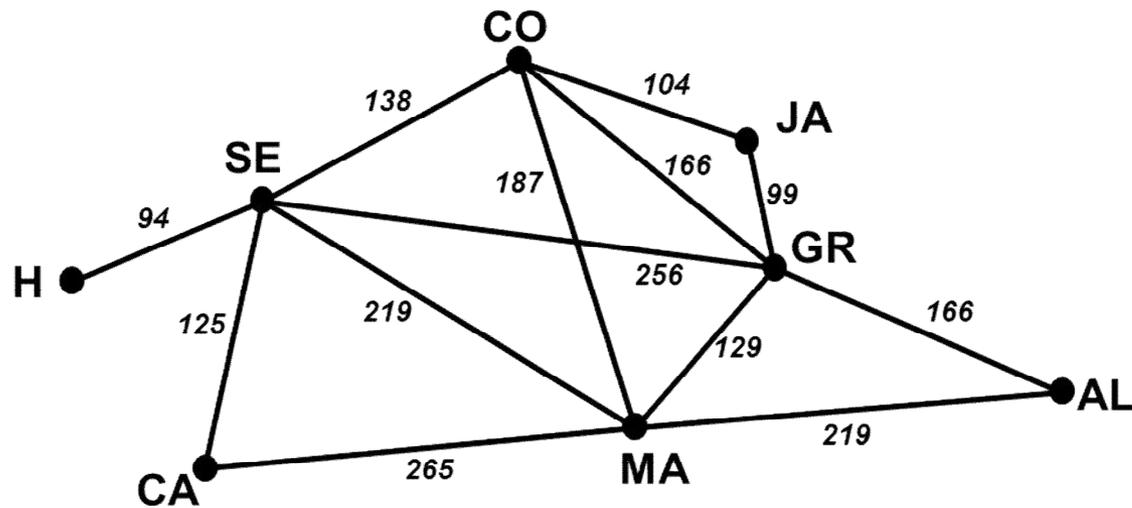


MenorDistancia[<Lista de segmentos>, <Punto inicial>, <Punto final>, <Baremo o no (true/false)>]

- **True:** Se tiene en cuenta la distancia entre aristas.
- **False:** Se tiene en cuenta el número de aristas entre vértices.

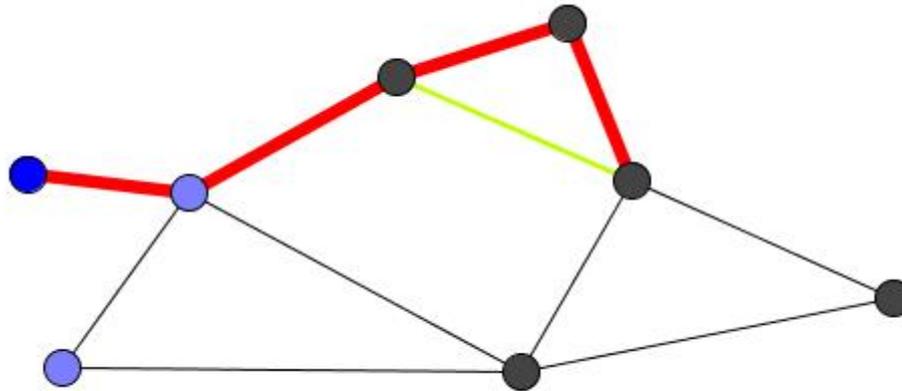
La ruta más corta

¿Cuál es la ruta más corta para ir de Huelva a Jaén?



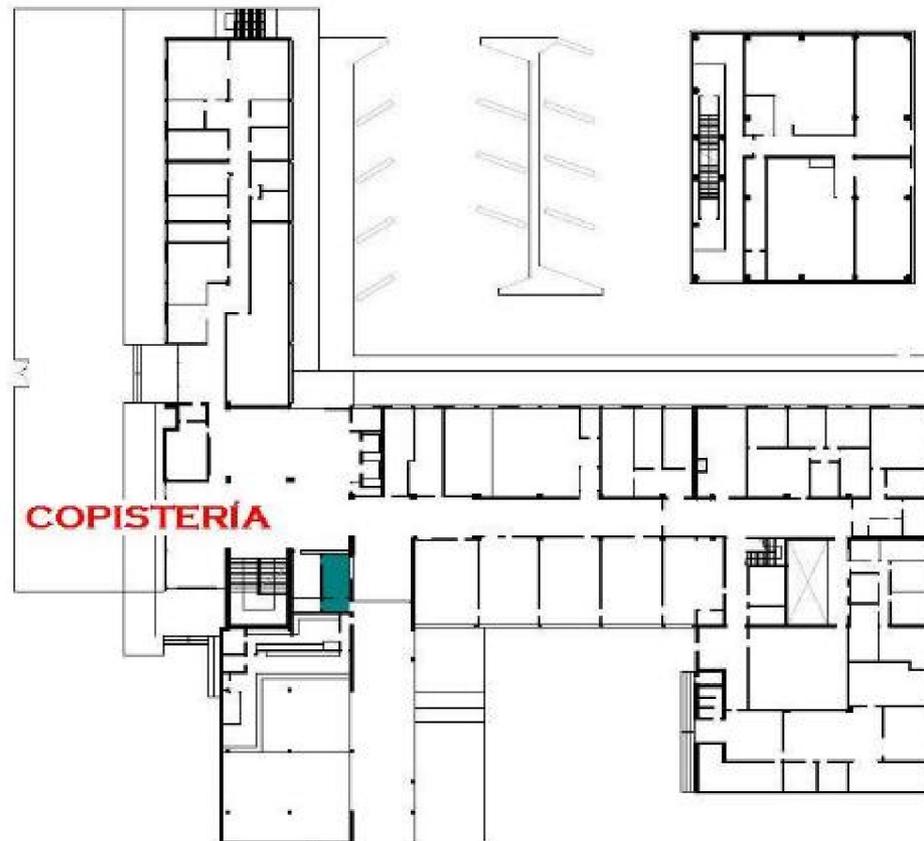
La ruta más corta

¿Cuál es la ruta más corta para ir de Huelva a Jaén?



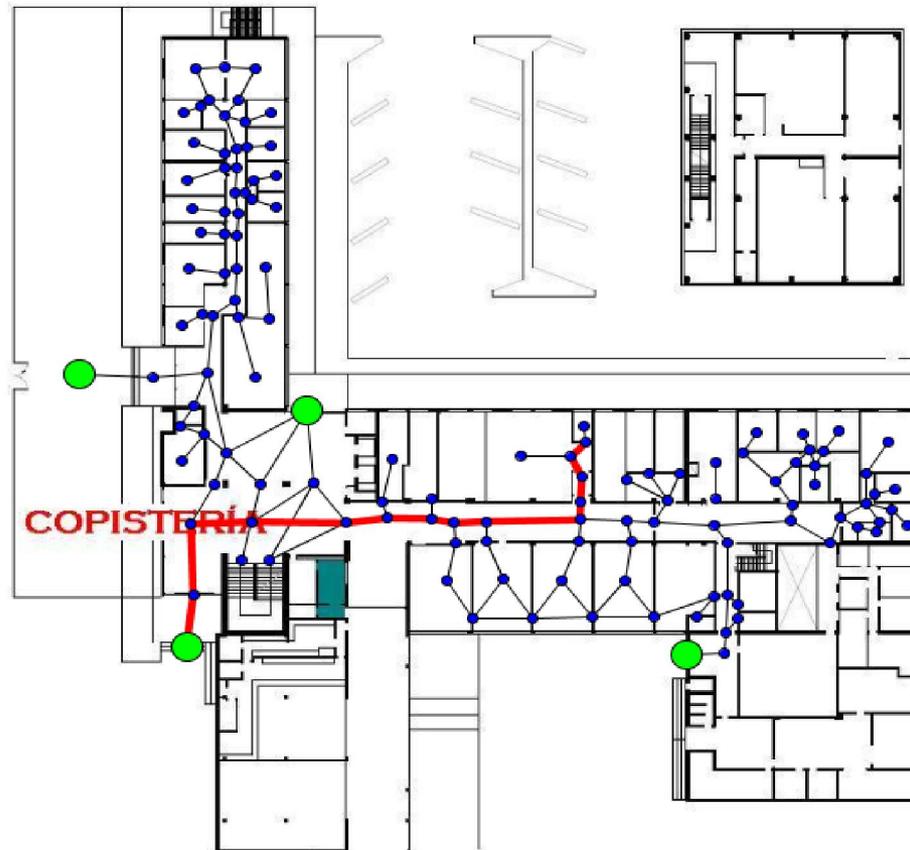
Plan de evacuación

DISEÑO DE UN PLAN DE EVACUACIÓN DE UN CENTRO EDUCATIVO



Plan de evacuación

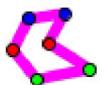
DISEÑO DE UN PLAN DE EVACUACIÓN DE UN CENTRO EDUCATIVO



Problema del viajante

Un representante de comercio, con sede en una ciudad A, debe visitar una serie de clientes establecidos en distintas ciudades de manera que su itinerario tenga como principio y fin la ciudad de residencia.

¿Que ruta deberá seguir con el fin de minimizar costes, es decir pasar una sola vez por cada ciudad haciendo el menor número de kilómetros?

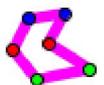


Viajante[<Lista de Puntos>]

Problema del viajante

Un representante de comercio, con sede en una ciudad A, debe visitar una serie de clientes establecidos en distintas ciudades de manera que su itinerario tenga como principio y fin la ciudad de residencia.

¿Que ruta deberá seguir con el fin de minimizar costes, es decir pasar una sola vez por cada ciudad haciendo el menor número de kilómetros?



Viajante[<Lista de Puntos>]

Diagrama de Voronoi

Se quiere colocar una central de residuos que recoja la basura de nueve poblaciones, distribuidas en el mapa según el dibujo inferior.

¿Cuál sería el punto más justo para colocar la central?



Voronoi [<Lista de Puntos>]



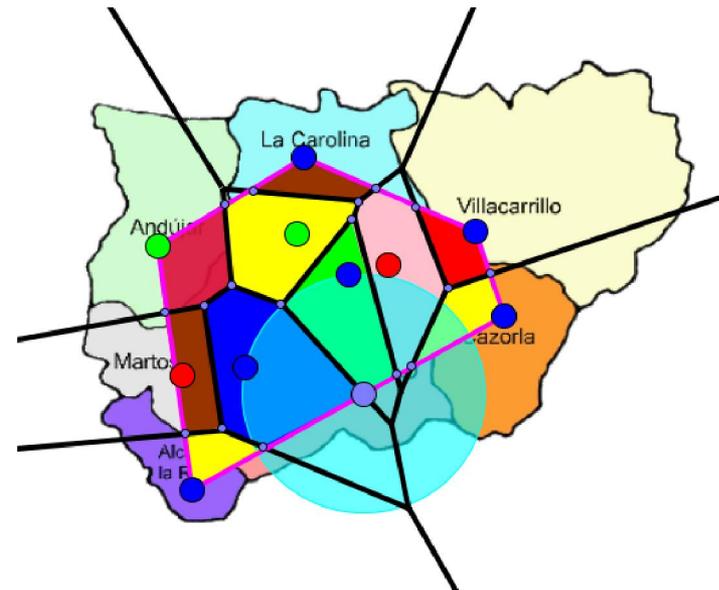
Diagrama de Voronoi

Se quiere colocar una central de residuos que recoja la basura de nueve poblaciones, distribuidas en el mapa según el dibujo inferior.

¿Cuál sería el punto más justo para colocar la central?



Voronoi [<Lista de Puntos>]

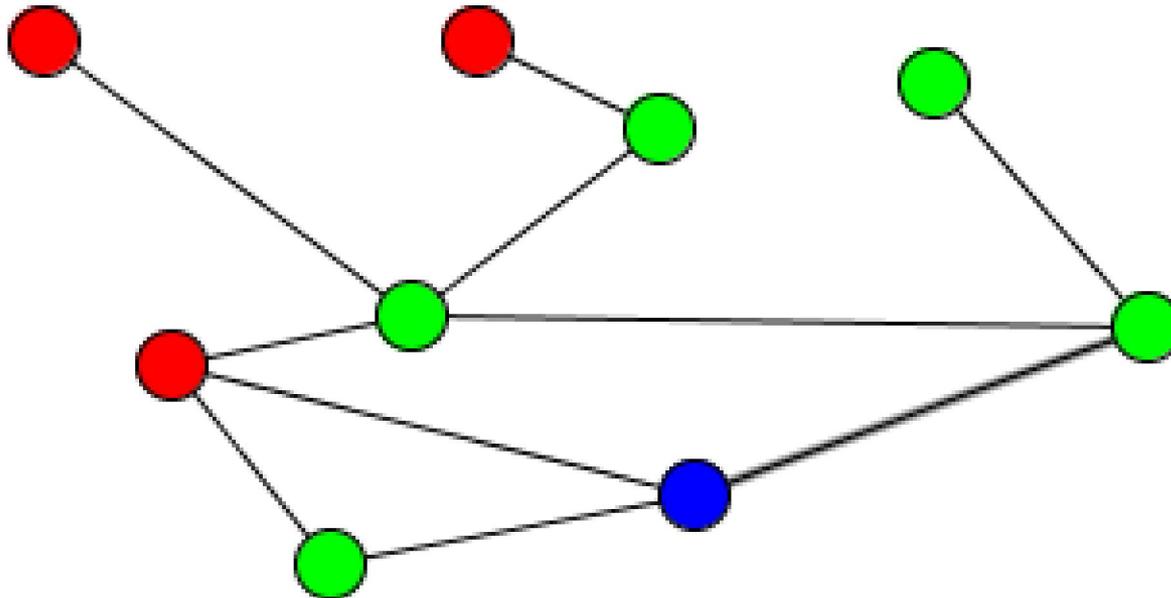


GENERANDO NUEVAS HERRAMIENTAS

GENERANDO NUEVAS HERRAMIENTAS

- Coloreado de grafos.
- Grafos aleatorios.
- Curvas de Bézier.
- Algoritmo de Dijkstra.

Coloreado de grafos



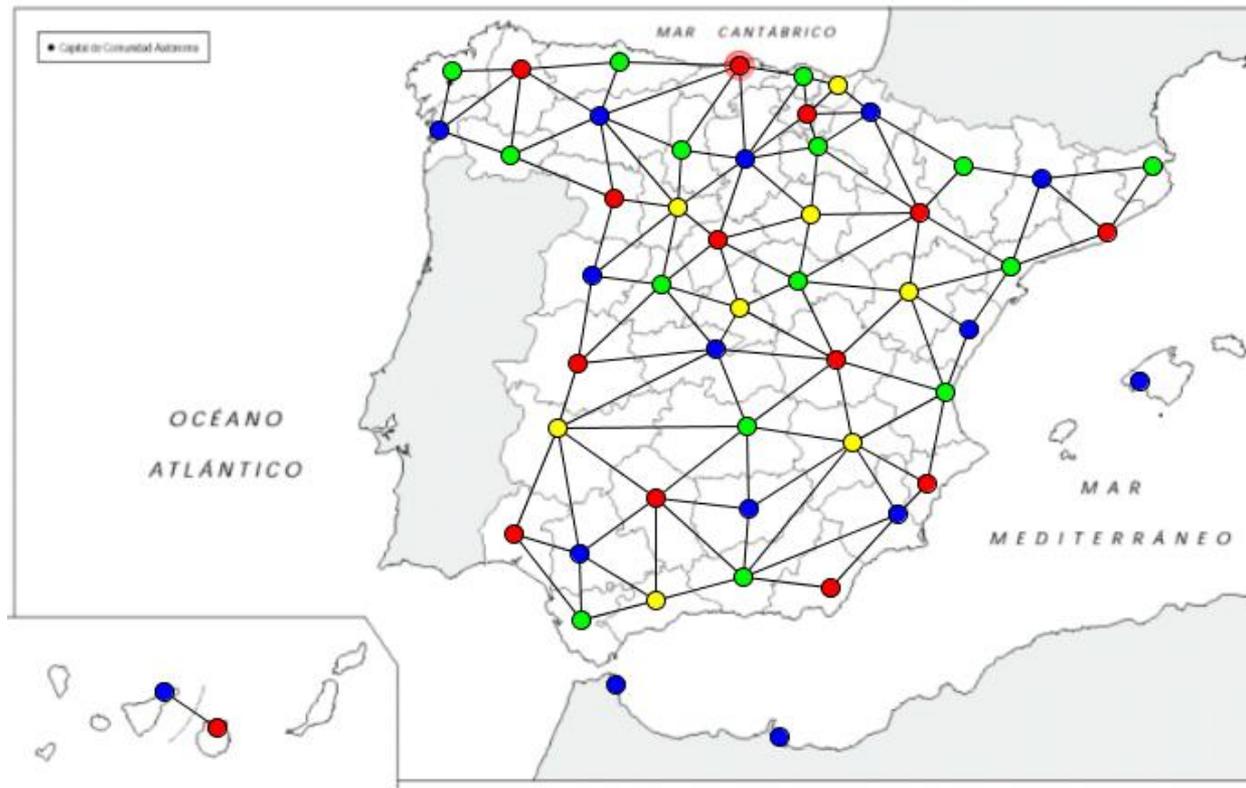
Los cuatro colores

¿Se puede colorear el mapa de España usando cuatro colores sin que dos provincias que sean limítrofes estén coloreadas con el mismo color?



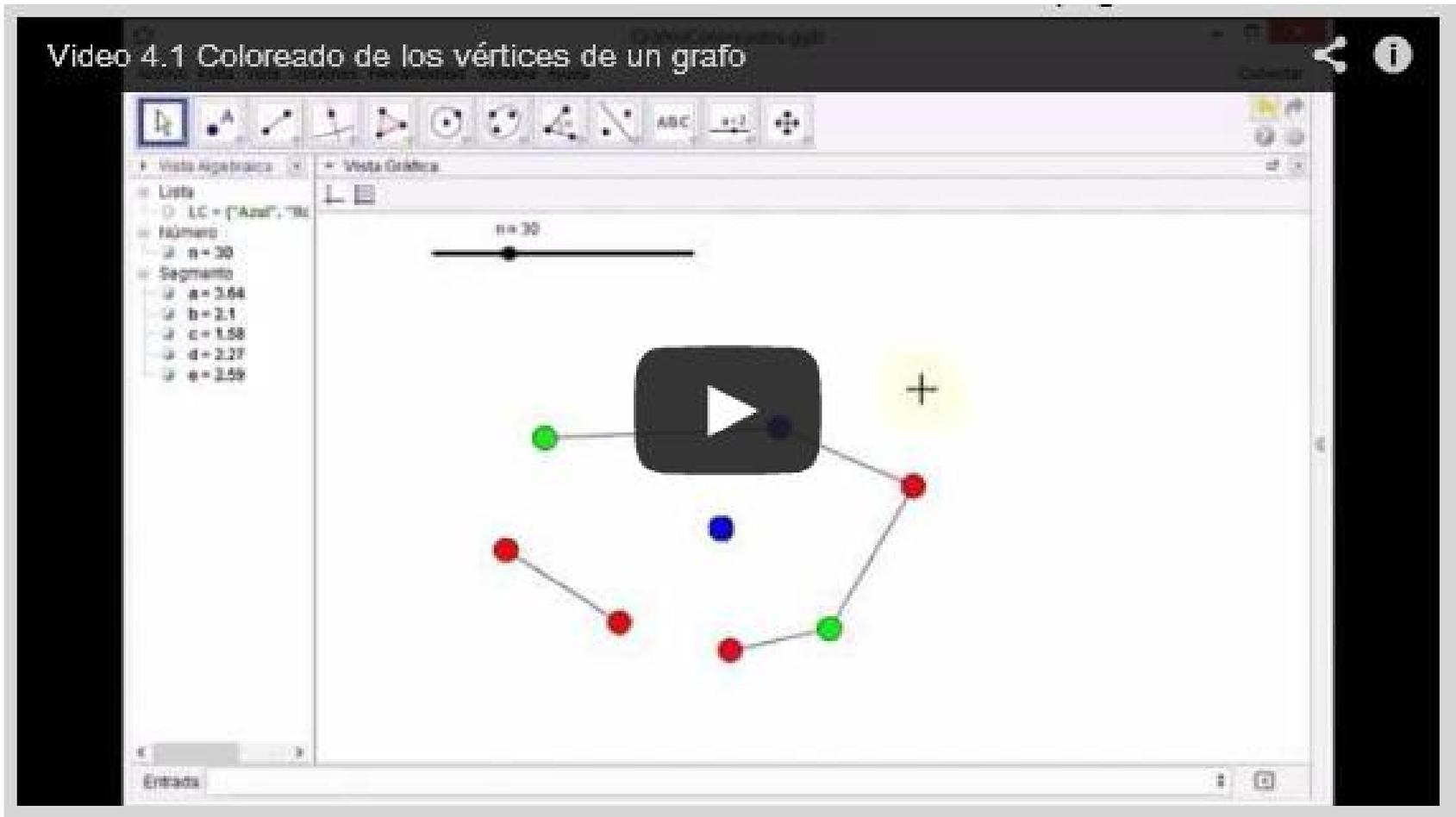
Los cuatro colores

¿Se puede colorear el mapa de España usando cuatro colores sin que dos provincias que sean limítrofes estén coloreadas con el mismo color?



Coloreado de grafos

Video 4.1 Coloreado de los vértices de un grafo



Coloreado de grafos

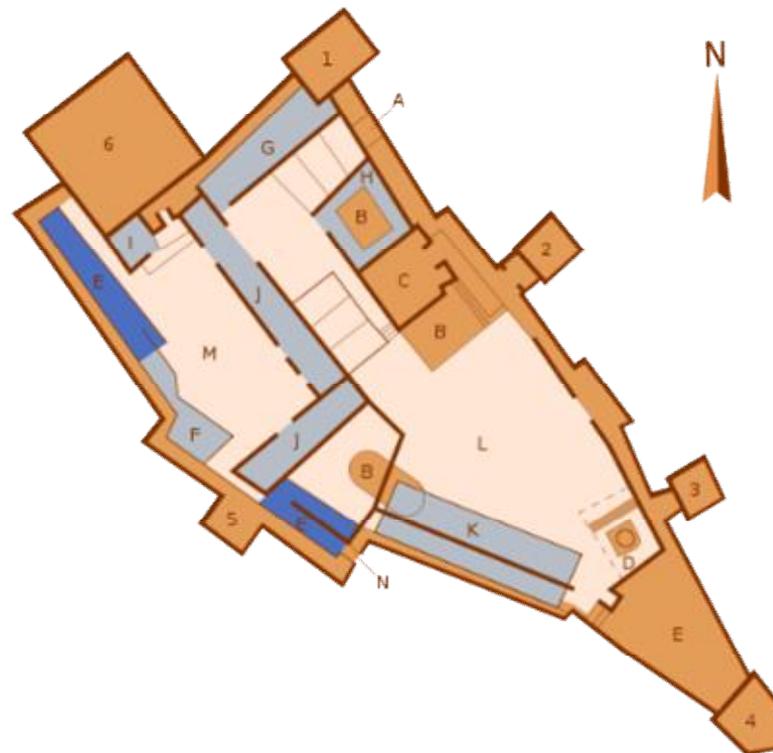
- Crear un deslizador n con enteros de 1 a 100.
- Definir el punto (0,0) en la casilla A1 de la hoja de cálculo.
- Escribir el valor 0 en la casilla B1.
- Crear una lista $LC=\{\text{"Azul"}, \text{"Rojo"}, \text{"Verde"}\}$.
- En la solapa "Al hacer clic" del punto A1 escribir el guión scripting

$B1 = \text{Resto}[B1+1, \text{Longitud}[LC]]$
 $\text{Color}[A1, \text{Elemento}[LC, B1+1]]$

- Seleccionar las casillas A1 y B1 y estirar el control de relleno hasta la fila 100.

La galería de arte

¿Cuántos guardianes son suficientes y ocasionalmente necesarios para cubrir la vigilancia del interior del Castillo de Santa Catalina en Jaén?

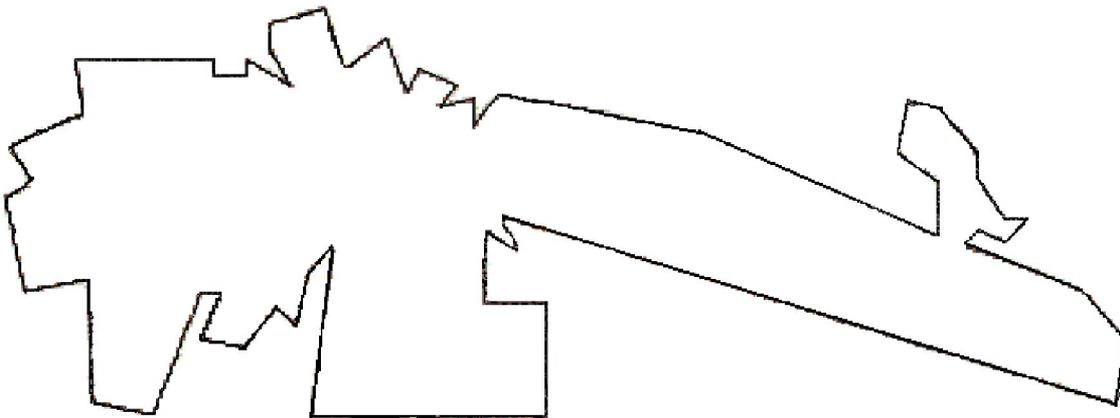


La galería de arte

Teorema de la Galería de Arte:

Son ocasionalmente necesarios y siempre suficientes para ver todo el interior de un polígono de n lados.

$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ guardianes

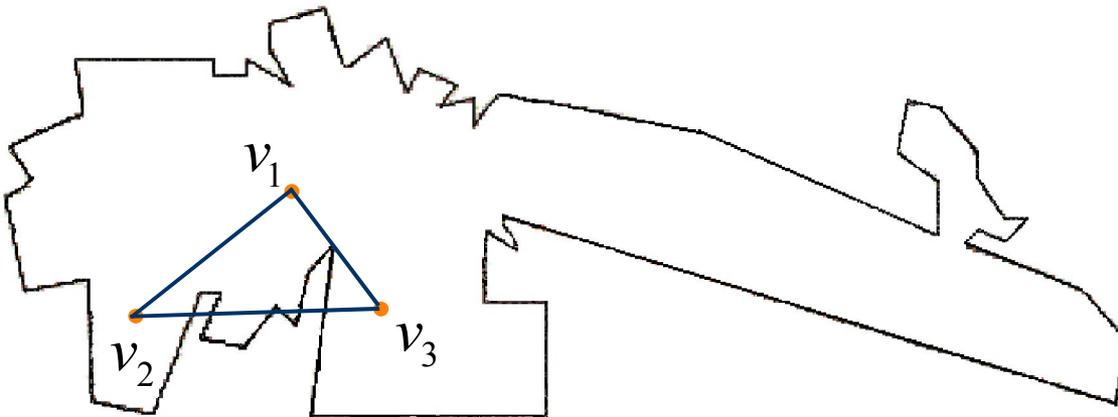


La galería de arte

Teorema de la Galería de Arte:

Son ocasionalmente necesarios y siempre suficientes para ver todo el interior de un polígono de n lados.

$\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ guardianes



v_1 y v_2 se ven

v_2 y v_3 no se ven

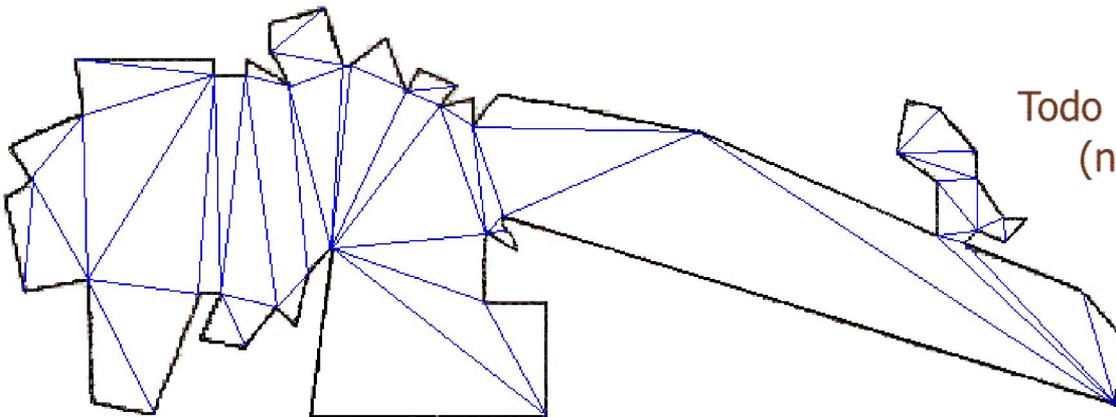
v_1 y v_3 se ven

La galería de arte

Teorema de la Galería de Arte:

Son ocasionalmente necesarios y siempre suficientes $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ guardianes para ver todo el interior de un polígono de n lados.

a) Triangulación del polígono.



Todo polígono admite una triangulación
($n-2$ triángulos y $n-3$ diagonales)

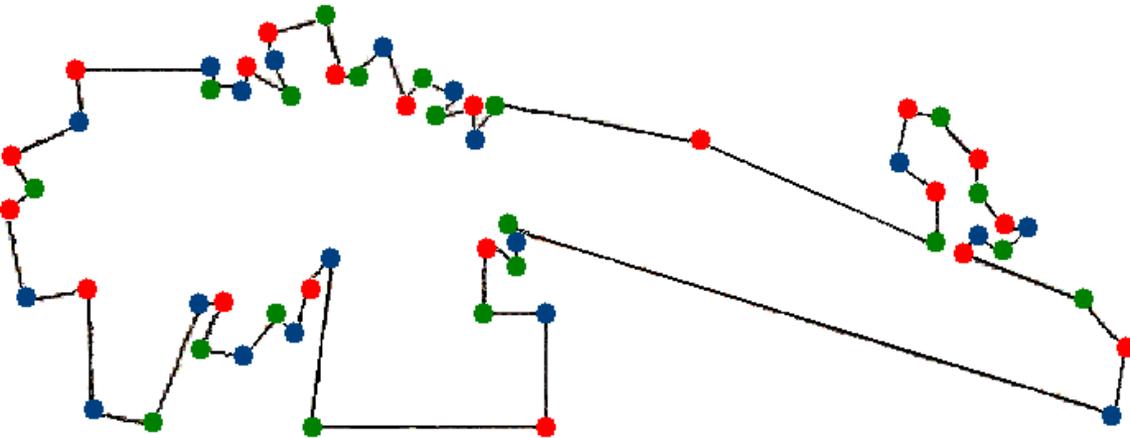
En el ejemplo, polígono de 59 vértices

La galería de arte

Teorema de la Galería de Arte:

Son ocasionalmente necesarios y siempre suficientes $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ guardianes para ver todo el interior de un polígono de n lados.

b) 3-vértice-coloración del grafo de triangulación del polígono.

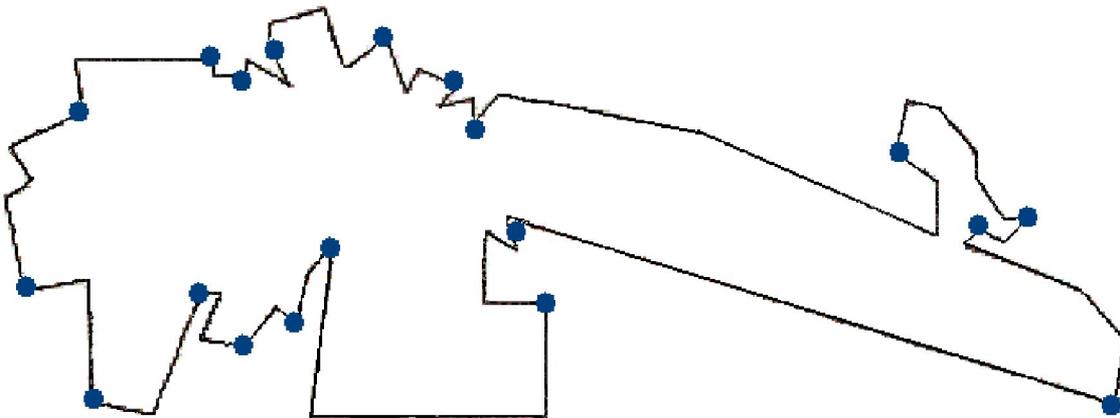


La galería de arte

Teorema de la Galería de Arte:

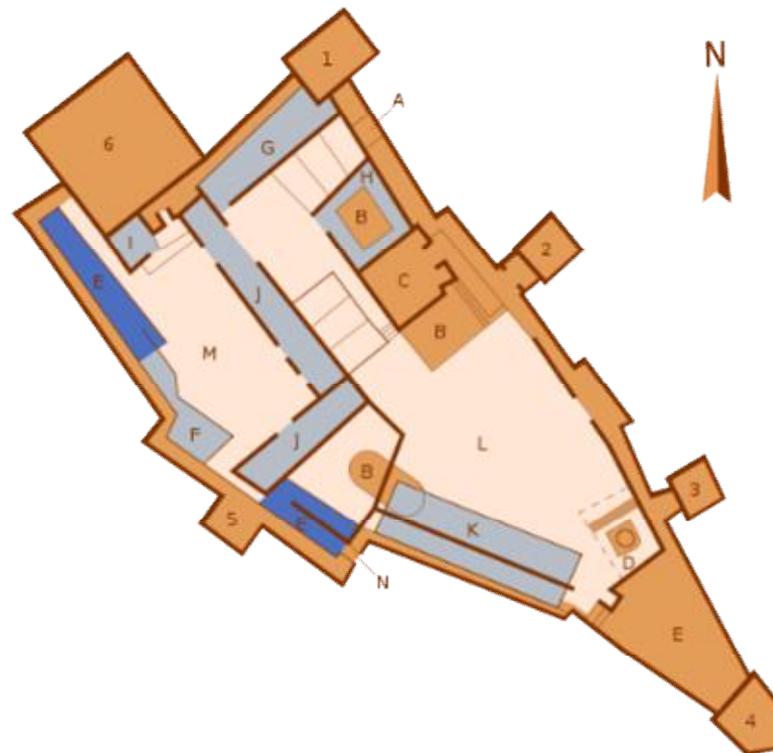
Son ocasionalmente necesarios y siempre suficientes $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ guardianes para ver todo el interior de un polígono de n lados.

c) Elección del color menos popular.



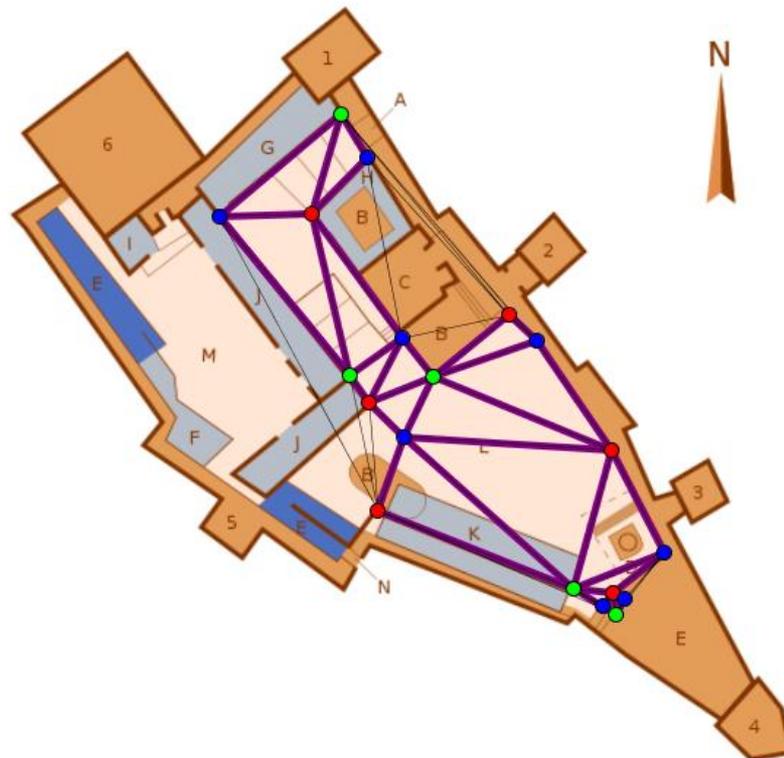
La galería de arte

¿Cuántos guardianes son suficientes y ocasionalmente necesarios para cubrir la vigilancia del interior del Castillo de Santa Catalina en Jaén?



La galería de arte

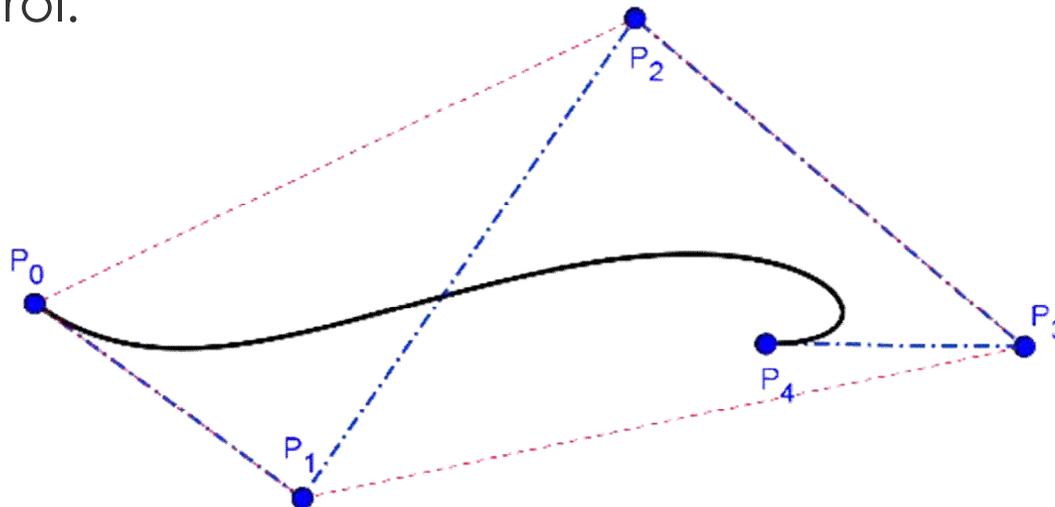
¿Cuántos guardianes son suficientes y ocasionalmente necesarios para cubrir la vigilancia del interior del Castillo de Santa Catalina en Jaén?



Curvas de Bézier

En los sistemas CAD se hace uso de las denominadas **curvas de Bézier**, que son un tipo de curvas *splines* o curvas definidas a trozos mediante polinomios, basadas en unos puntos de control tales que cualquier transformación afín de la curva coincide con la curva de Bézier de los transformados de estos puntos.

Las curvas de Bézier se encuentran en la envolvente convexa de sus puntos de control.

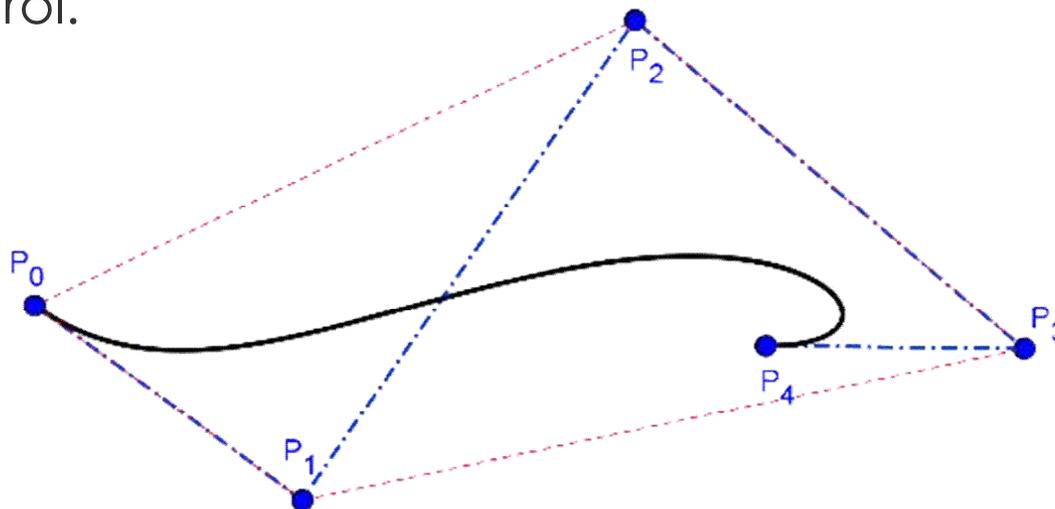


Curvas de Bézier

$$B_n(t) = \sum_{i=0}^n P_i \cdot \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

En los sistemas CAD se hace uso de las denominadas **curvas de Bézier**, que son un tipo de curvas *splines* o curvas definidas a trozos mediante polinomios, basadas en unos puntos de control tales que cualquier transformación afín de la curva coincide con la curva de Bézier de los transformados de estos puntos.

Las curvas de Bézier se encuentran en la envolvente convexa de sus puntos de control.



Curvas de Bézier

$$B_n(t) = \sum_{i=0}^n P_i \cdot \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

- Definir una lista de puntos: **Puntos={A,B,...}**
- Definir el número **n = Longitud[Puntos]**
- Definir las listas siguientes:

T = Secuencia[NúmeroCombinatorio[n - 1, i] xⁱ (1 - x)^(n - 1 - i), i, 0, n - 1]

Px = Secuencia[x(Elemento[Puntos, i]) Elemento[T, i], i, 1, n]

Py = Secuencia[y(Elemento[Puntos, i]) Elemento[T, i], i, 1, n]

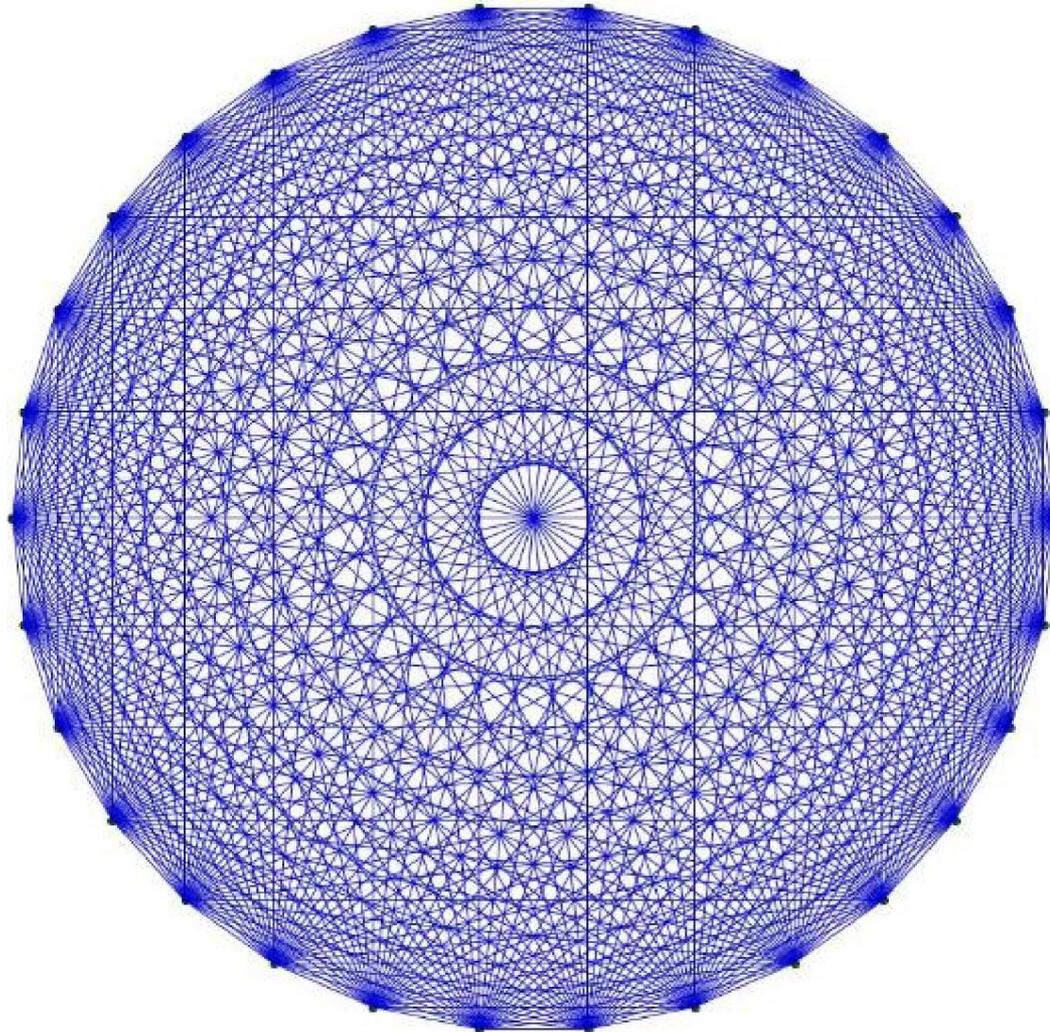
- Definir las funciones siguientes:

Sx(x) = Suma[Px]

Sy(x) = Suma[Py]

- Definir la curva de Bézier: **b=Curva[Sx(t), Sy(t), t, 0, 1]**

Generación de grafos aleatorios



Generación de grafos aleatorios

- Crear un deslizador **n** asociado al número de vértices.
- Definir la secuencia de vértices:

$$\mathbf{V} = \text{Secuencia}[\cos(2k \pi / n) + i \text{sen}(2k \pi / n), k, 0, n].$$

- Crear un deslizador **p** con valores en $[0, 1]$, asociado a la probabilidad de que exista una arista entre un par de vértices dado.
- Definir las secuencia aleatoria asociada a la matriz de:

$$\mathbf{M} = \text{Secuencia}[\text{Secuencia}[\text{Si}[i=j, 0, \text{BinomialAleatoria}[1, p]], j, 1, n], i, 1, n]$$

- Definir las secuencia de aristas del grafo:

$$\mathbf{A} = \text{Secuencia}[\text{Secuencia}[\text{Si}[\text{Elemento}[\mathbf{M}, i, j] \neq 0, \text{Vector}[\text{Elemento}[\mathbf{V}, i], \text{Elemento}[\mathbf{V}, j]]], j, 1, n], i, 1, n]$$

Algoritmo de Dijkstra



REFERENCIAS

- M. Á. Garrido, M. J. Chávez y R. M. Falcón. *Técnicas de Optimización de Recursos en Edificación*. Asignaturas en la Red 2012-2013. Universidad de Sevilla, 2013. Código editorial 5697-2013.
- R. M. Falcón y R. Ríos. *Usando GeoGebra en teoría de grafos*. Actas del II Encuentro en Andalucía de GeoGebra en el Aula. Córdoba, 2013.