UNIVERSIDAD DE SEVILLA - FACULTAD DE CIENCIAS

HIPERGRAFOS ORIENTADOS

Visado en

Sevilla, Junio 1974

EL CATEDRATICO DIRECTOR

Fdo. Antonio de Castro Brzezicki

Tesis que presenta Manuel Francisco Ariza Granados, para optar al grado de -- Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas.

Sevilla, Junio 1974

Fdo. Manuel Francisco Ariza Granados

Quiero expresar mi agradecimiento a mi maestro D. Antonio de Castro Brzezicki director del presente trabajo, por su constante ayuda y estímulo.

Así mismo, deseo agradecer a los Licenciados: Dª Cándida Fernandez Salinas, D. José María Alba Riesco y D. Rafael Martín de Agar y Valverde, por su valiosa colaboración.

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

INTRODUCCION .-

La teoría que presentamos arranca de una idea que, embrionariamente, apareció en la tesina que expusimos en esta Universidad para optar al grado de Licenciado. Se trataba de estudiar los hipergrafos por medio de las hipermatrices asociadas, siguiendo un proceso paralelo al que se realiza en teoría de grafos y que permite, en ésta, no solo un estudio teórico de algunos de sus aspectos, sino, lo que es más importante, un tratamiento por medio de ordenadores de muchos de los problemas prácticos que se presentan. Incluimos en nuestra Bibliografía algunas obras que tratan este tema (*).

(*) Vease, por ejemplo: Faure R. (9), Picard C. (26).

Había, pues, en primer lugar, que desarrollar o, si se nos permite la expresión, desenterrar la teoría de hipermatrices o n-matrices, iniciada por Cayley en 1843 y que se había abandonado hacia 1925 por no encontrarse aplicaciones prácticas y por la aparición y desarrollo de nuevos instrumentos matemáticos, merced a los trabajos de Ricci y Levi Civita en 1900 sobre tensores, que venían a llenar uno de los huecos que, primitivamente, pretendían cubrir las n-matrices. Tal trabajo se realizó en nuestra tesina, basandonos en una obra de Muir (*) y completandola en algunos aspectos, y de él incluimos un resumen con los resultados obtenidos para facilitar al lector la búsqueda de algunos de los conceptos allí definidos y que se utilizan en este trabajo.

El método que utilizabamos para definir un hipergrafo por medio de una de tales n-matrices no era otro que hacer corresponder a cada arista de aquel un cierto número de elementos no nulos en la n-matriz booleana asociada, de tal modo que si la arista en cuestión era, en particular, de dimensión k se le hacía corresponder k! elementos no nulos situados en lugares convenientes.

Hasta aquí la idea que comentabamos.

El problema adopta otra versión cuando se plantea la pregunta de qué sentido tendrá el asignar, en vez de k! elementos no nulos, a cada arista un único elemento no nulo. Evidentemente ello lleva consigo una elección y, ligada a ella,

(*) Vease Muir T. (22) cap. XXIV

una ordenación puesto que, en último extremo, lo que se elige es una ordenación determinada de las k! ordenaciones posibles correspondientes a los k vértices que constituyen la arista. Se ha llegado, pues, a una orientación de las aristas y, de esta forma, al concepto de hipergrafo orientado.

En el análisis "a posteriori" de este nuevo concepto, hipergrafo orientado, en relación con el ya existente de hipergrafo, se pone en evidencia el hecho, a todas luces ilógico, de que al generalizar la teoría de grafos, para llegar a los hipergrafos, se haya despreciado u olvidado una propiedad tan consustancial a aquella como es la orientación. Cuanto más si hacemos notar que nuestra teoría no responde tan solo a un afán teorizante sino que, de hecho, pueden encontrarse situaciones reales que sean unicamente susceptibles de traducirse en los términos de la teoría que exponemos.

Pensemos, insistiendo en esta idea, en un grupo de n personas y supongamos que una de ellas quiere transmitir a otra una información valiendose de las restantes personas como intermediarios, pero sin que éstas se enteren de dicha información,(tal ocurriría si la información se realizara utilizando un sobre cerrado y el orden viniera condicionado, por ejemplo, por la colocación de unas mesas). Es este un modelo real que no puede formularse en términos de grafos, puesto que no se trata de una relación binaria, ni en términos de hipergrafos, ya que, si bien intervienen un grupo de elementos, éstos vienen ordenados. Otros ejemplos, sin duda, podrían formularse, sobre todo en Teoría de la Informcación, Física, Electrónica y Economía.

Queremos advertir que hemos cambiado el nombre de la teoría conocida de hipergrafos por el de teoría de esquemas y hemos reservado aquel nombre para la nuestra. En tal decisión han influido las razones que se exponen en el capitulo primero.

El orden que hemos adoptado en nuestra exposición es el siguiente:

En el capítulo I se tratan, junto a la definición axiomática de hipergrafos, aquellas generalidades y definiciones necesarias para un desarrollo posterior, constituyendose un glosario base para la teoría de hipergrafos. Al mismo tiempo se abordan, específicamente, temas tales como: representaciones de un hipergrafo, planaria y lineal, (esta última de notable sencillez), funciones de orden y n-matrices asociadas.

Si, en el capítulo I, se tratan las definiciones y propiedades básicas que van a permitir el desarrollo de la teoría, en el segundo se aborda el estudio específico de los ciclos.

Se divide el capítulo en tres apartados. En el primero se dan los conceptos más importantes: cadenas, ciclos, circuitos, etc., apareciendo implícitos en ellos, de forma velada, la idea de transitividad, idea que se estudia, de manera precisa, en el segundo apartado; mención especial merce, dentro de éste, el teorema relativo al análisis de la transitividad

de [illegible]

de un hipergrafo por medio de la n-matriz asociada, teorema que proporciona un claro ejemplo de que la idea que postulabamos al principio no es vana y que cabe un tratamiento de los hipergrafos mediante el ordenador. En este sentido, y basándonos en el teorema citado, incluimos, en el Apendice IV, un programa elaborado a tal fín, en lenguage FORTRAN V, para el ordenador UNIVAC 11 30.

En el último apartado, se estudian las diferentes formas de conexión y se establecen condiciones necesarias y suficientes, en algunos casos, para que un hipergrafo con un determinado tipo de conexión carezca de ciclos o tenga un número concreto de ellos. La importancia de estos teoremas resulta clara ya que sientan las bases necesarias para el estudio de determinados carentes de ciclos: hiperárboles, hiperbosques, etc.

El capitulo III es, en cierta manera, continuación del anterior. En el se introduce el concepto de cociclo y se da un tratamiento vectorial al espacio de ciclos y cociclos. Teoremas esenciales para ello son los relativos a la descomposición de ciclos y cociclos como suma,respectivamente, de ciclos y cociclos elementales, que permiten demostrar que por un arco dado pasa o un ciclo elemental o un cociclo elemental, teorema, este último, que nos lleva a probar la ortogonalidad de ambos espacios y encontrar el número de ciclos y cociclos de sus respectivas bases.

En el último capitulo, IV, se tratan unos hipergrafos es peciales, los hipergrafos conformes, dándose dos condiciones necesarias y suficientes para que un hipergrafo dado sea conforme.

Resumiendo:

Dos son las bases de nuestra tesis:

- De una parte la creación de una teoría que engloba a las teorías de grafos y de esquemas.
- De otra, la aplicación de las n-matrices como útil matemático que permite un estudio de los hipergrafos con ordenador.

Dentro de la primera se han sentado las ideas principales y se ha profundizado en un tema específico: los ciclos, estudiándose, al mismo tiempo, una clase de hipergrafos especiales: los hipergrafos conformes.

Dentro de la segunda nos hemos limitado a demostrar su viabilidad mediante el teorema de la transitividad como botón de muestra.

Hemos pretendido, pues, hacer de nuestra tesis una tesis abierta ya que, en ambos caminos, son amplias las posibilidades que se ofrecen a la investigación.

CAPITULO I : G E N E R A L I D A D E S

CAPITULO I :

GENERALIDADES

DEFINICION.-

Llamamos HIPERGRAFO ORIENTADO(*) a una dupla, $H = (X,E)$, constituida por:

1º.- Un conjunto finito de elementos,

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

llamados VERTICES.

2º.- Una familia finita de conjuntos,

$$E = \{E_1, E_2, \ldots, E_h\} \qquad h \leq n$$

(*) Usaremos, simplemente, la palabra HIPERGRAFO, haciendo exclusión del calificativo de orientado, aún cuando con aquel término se designa, en la actualidad, a otro tipo de estructura que nosotros llamaremos ESQUEMA.

estando cada conjunto no vacío formado por elementos,

$$E_s = \{e_s^1, e_s^2, \ldots, e_s^m\} \qquad 0 \leq s \leq h,$$

llamados ARCOS, que verifican:

a) Pertenecen al conjunto

$X^s = X \times \overset{s}{\ldots} \times X = \{(x_1,\ldots,x_s)/\ x_i \in X,\ \forall i, 1 \leq i \leq s\}$

b) $x_i \neq x_j,\ \forall\ i,j.$

verificandose, además, que todo pertenece, al menos, a algún arco.

Los vértices del arco e_s constituyen las COORDENADAS del mismo. Notaremos por $\{e_s\}$ al conjunto de dichas coordenadas, que llamaremos tambien, a veces, CONJUNTO BASE de e_s.

Las coordenadas inicial y final de un arco se llaman EXTREMIDADES.

Se denominará CONJUNTO DE VERTICES TERMINALES del hipergrafo $H = (X,E)$ al subconjunto, X_T, de X formado por aquellos elementos que verifican ser extremos de algún arco de H.

Llamaremos DIMENSION de un arco a la dimensión de la s-dupla que lo define.

Cada elemento o arco e_s^j, de dimensión s, puede estar repetido $p_{s,j}$ veces en el conjunto E_s.

Sea

$$p_s = \max_j \{p_{s,j}\} ,$$

entonces el hipergrafo se llama un p_s- HIPERGRAFO para la dimensión s.

Si

$$p = \max_{s} \{p_s\}$$

el hipergrafo se llamará un p-HIPERGRAFO.

RANGO.-

Llamamos RANGO de un hipergrafo al máximo de las dimensiones de sus arcos, y lo notaremos por [E].

ORDEN.-

Llamamos ORDEN de un hipergrafo al número de vértices sobre los que está definido. Se notará en la forma [X].

BUCLES.-

Se llaman así a los arcos pertenecientes al conjunto de dimensión 1, E_1.

REPRESENTACION PLANARIA DE UN HIPERGRAFO.-

Si la diemensión del arco es la unidad se representará tal arco mediante una linea, orientada en cualquier sentido, que parta del punto que representa el vértice considerado y termine en él.

Si la dimensión es igual a 2, se representará mediante una linea orientada que se inicie en la primera coordenada y termine en la segunda.

Si la dimensión del arco es mayor que 2, adoptaremos los siguientes criterior aplicables, indistintamente, para cada caso y aún para un mismo hipergrafo.

Envolveremos, en todos los casos, mediante una linea continua cerrada y orientada, las coordenadas del arco considerado, pudiendo, a continuación, adoptar algunos de los siguientes criterios:

1º A.- Unir, sucesiva y ordenadamente, las coordenadas del arco mediante una linea, de un determinado color o punteado, orientada en el sentido inducido por el orden de las coordenadas.

2º A.- Escribir sobre la linea cerrada orientada, pero no a la altura del símbolo (flecha) que indica el sentido, el nombre del arco que consideramos, y, al margen de la representación, indicar como está constituido.

3º A.- Disponer,circular y ordenadamente, las coordenadas, escribiendo el nombre del arco y el simbolo que indica el sentido de su orientación (flecha) sobre la linea que lo envuelve y a la altura de la primera coordenada.

Cuando se consideran varios arcos definidos sobre los mismos vértices podremos:

1º B.- Representar cada arco según 1º A mediante un color o punteado distinto para cada uno de ellos.

2º B.- Representar uno o varios arcos cualesquiera según 1º A, (incluso cabría no representar ninguno en es ta fôrma), y:

a) Escribir al margen los restantes, según 2º A.

b) Desdoblar, dentro de la linea cerrada, una o varias veces, cada coordenada, (notandolas con primas), y representar sobre éstas, según 1º A, los arcos que resten.

3º B.- Si los arcos dados pueden adoptar una representación circular, (directa o inversa), analoga a la 3º A, válida para todos ellos simultaneamente, bastará escribir, sobre la misma linea cerrada que envuelve sus coordenadas, convenientemente, tantas veces el signo indicador del sentido de orientación de cada arco, acompañado del nombre correspondiente, como arcos dados; y todo ello a la altura de la primera coordenada de cada arco.

Tal representación puede combinarse con 1º B y 2º B si ello es conveniente.

4º B.- Si figuran en el hipergrafo una, y solo una, vez todos los arcos de dimensión s que se pueden definir sobre sus coordenadas, se suprimiran todos los simbolos de orientación y sobre la linea cerrada envolvente se escribirán los nombres de los s! arcos dados o bien el nombre del conjunto que los represente.

EJEMPLOS.-

1º.- Sea el hipergrafo $H = (X,E)$, con

$$X = \{x_1, x_2, x_3\}$$

y $$E = \{E_1, E_2, E_3\}$$

donde

$$E_1 = \{e_1^1, e_1^2, e_1^3\}$$

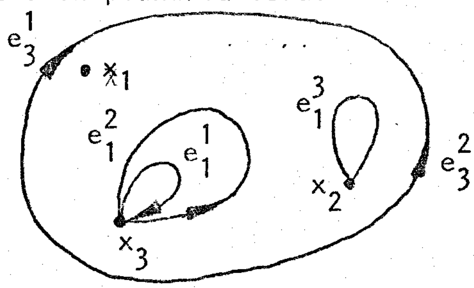
$$E_2 = \emptyset$$

$$E_3 = \{e_3^1, e_3^2\}$$

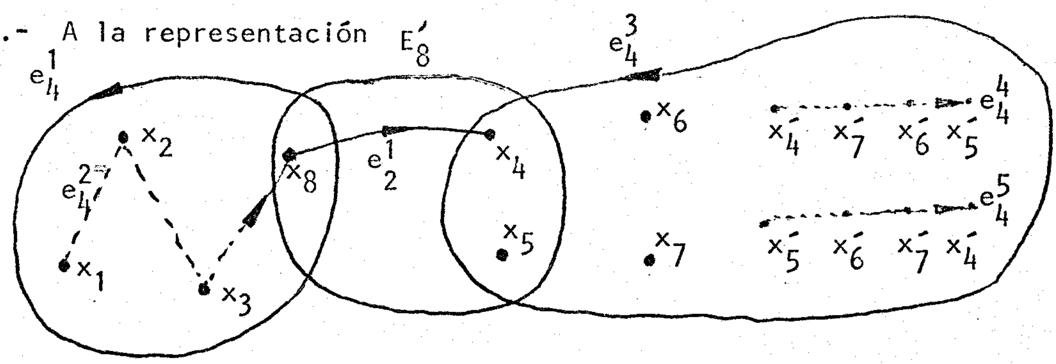
siendo:

$$e_1^1 = e_1^2 = (x_3) \quad , \; e_1^3 = (x_2) \quad , \; e_3^1 = (x_1, x_2, x_3), \; e_3^2 = (x_2, x_1, x_3)$$

Su representación planaria será:



2.- A la representación



corresponde el hipergrafo $H = (X,E)$, donde

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ y $E = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$

siendo:

$E_1 = \emptyset$, $E_2 = \{e_2^1\}$, donde $e_2^1 = (x_8, x_4)$,

$E_3 = E_8' = \{e_3^1, e_3^2, e_3^3, e_3^4, e_3^5, e_3^6\}$, donde

$e_3^1 = (x_8, x_4, x_5)$, $e_3^2 = (x_8, x_5, x_4)$, $e_3^3 = (x_5, x_8, x_4)$

$e_3^4 = (x_5, x_4, x_8)$, $e_3^5 = (x_4, x_5, x_8)$, $e_3^6 = (x_4, x_8, x_5)$

$E_4 = \{e_4^1, e_4^2, e_4^3, e_4^4, e_4^5\}$, donde

$e_4^1 = (x_2, x_1, x_3, x_8)$, $e_4^2 = (x_1, x_2, x_3, x_8)$,

$e_4^3 = (x_6, x_4, x_5, x_7)$, $e_4^4 = (x_4, x_7, x_6, x_5)$,

$e_4^5 = (x_5, x_6, x_7, x_4)$.

MATRICES ASOCIADAS A UN HIPERGRAFO.-

Consideraremos tres tipos:

1.- Matriz de incidencia.

2.- n-Matriz asociada.

3.- Diccionario de un hipergrafo.

Las dos primeras se definiran a continuación. La última se expondrá posteriormente.

MATRIZ DE INCIDENCIA.-

Dado el hipergrafo $H=(X,E)$, llamaremos así a aquella matriz $\| a_{ij} \|$ con m vectores filas, representando los arcos de E, numerados desde 2 hasta m+1, y n vectores columnas representando los vértices de X, numerados desde 2 hasta n+1, y de coeficientes

$$a_{ij} = (b_i, c_{ij}),$$

donde:

b_i = Constante para todos los arcos definidos sobre el mismo conjunto base. Tomando el valor 1 para el primer arco y el valor b_i+1 para el arco e_{i+1} si, y solo si, tal arco está definido sobre el mismo conjunto base. De aquí: $1 < b_i < m$.

$$c_{ij} = \begin{cases} k & \text{si } x_{j+1} \text{ es la coord. k-sima de } e_{i+1} \\ 0 & \text{si } x_{j+1} \text{ no pertenece a } e_{i+1}. \end{cases}$$

Si en la matriz de incidencia de un hipergrafo aparece b_i repetido en $t!$ filas distintas, siendo $t = \text{máx}\{c_{ij}\}$, podremos, opcionalmente, agrupar las $t!$ filas en una sola, que notaremos por $E_t' = \{ e_t^1, \ldots, e_t^{t!} \}$, y sustituir las duplas (b_i, c_{ij}) por el número 1.

Con este criterio, la matriz de incidencia de un hipergrafo (en el sentido clásico) será un caso particular de ésta.

Ejemplo:

Al hipergrafo $H = (X,E)$, con $X = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ y $E = \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ donde $e_2 = (x_2, x_3, x_5)$, $e_3 = (x_5, x_3, x_2)$, $e_4 = (x_3, x_6)$, $e_5 = (x_6, x_3)$, $e_6 = (x_6, x_4)$, corresponde la matriz de incidencia:

	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
e_2	(1,1)	(1,2)		(1,3)	
e_3	(1,2)	(1,3)		(1,1)	
e_4		(2,1)			(2,2)
e_5		(2,2)			(2,1)
e_6			(3,2)		(3,1)

que en forma reducida puede ponerse:

	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
e_2	(1,1)	(1,2)		(1,3)	
e_3	(1,2)	(1,3)		(1,1)	
E_4'		1			1
e_6			(3,2)		(3,1)

con $E_4' = \{e_4, e_5\}$.

Reciprocamente, dada una matriz de incidencia es fácil representar el hipergrafo correspondiente.

n-MATRIZ ASOCIADA A UN HIPERGRAFO.-

A todo hipergrafo orientado $H=(X,E)$, com

$$X = \{x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}\},$$

de orden n y rango r, le hacemos corresponder una r-matriz homogenea(*) booleana A, de dimensión r y de orden n+1, de la siguiente forma:

Sea $e_h^i = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_h})$ un arco del hipergrafo H; formemos a partir de los h subindices de e_h^i, y de r-h elementos unidad, la r-epla

a $$(i_1, i_2, \ldots, i_{h-1}, 1, \overset{r-h}{\ldots}, 1, i_h).$$

Tomaremos, por definición, igual a 1 el elemento de A:

$$a_{i_1, \ldots, i_{h-1}, 1, \ldots, 1, i_h}$$

Reciprocamente, el elemento

$$a_{i_1, \ldots, i_{s-1}, 1, \overset{r-s}{\ldots}, 1, i_s} \qquad (i_j \leq n+1,\ \forall j)$$

(*) Vease Apendice.

será igual a 1 si existe un arco e_s^i tal que $e_s^i=(x_{i_1},\ldots,x_{i_s})$ que pertenezca a E_s, y será igual a cero en otro caso.

De todo ello se deduce que el número de arcos del hipergrafo H es igual al número de elementos no nulos de la r-matriz booleana asociada.

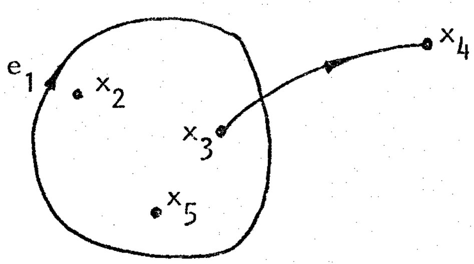
Lógicamente en todo lo que precede nos hemos referido al caso en que H es un 1-hipergrafo.

No obstante podemos extender tal correspondencia a un p-hipergrafo cualquiera asociandole una n-matriz B análoga a la anteriormente definida, pero sin ser booleana, y de elementos tales que:

$$a_{i_1,\ldots,i_{h-1},\overbrace{1,\ldots\ldots,1}^{r-h},i_h}=\begin{cases} k \text{ si } (x_{i_1},\ldots,x_{i_h}) \text{ está repetido } k \text{ veces en } E_h. \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo:

Dado el hipergrafo H = (X,E), de orden 4 y rango 3, cuya representación es la siguiente



le corresponde una 3-matriz homogenea de orden 5 y de elementos:

$$a_{2,3,5} = 1 \quad , \; a_{3,1,4} = 1 \; ,$$

siendo nulos los restantes elementos.

Llamamos ELEMENTO SIMETRICO del $a_{i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_h,\ldots,i_r} \in A$, respecto del córte diagonal (h,k), véase Apendice, al elemento

$$a_{i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_h,\ldots,i_r}$$

En el caso de ser el hipergrafo orientado que consideramos tal que, dado $e_s \in E_s$, pertenezcan a él los s! arcos distintos definido sobre el conjunto base de e_s, se tendrá que si, en la n-matriz asociada, es

$$a_{i_1,\ldots,i_{s-1},1,\overset{m}{\ldots},1,i_s} = 1 \text{ , con } m + s = r,$$

tambien seran iguales a 1 los s! elementos obtenidos mediante las simetrías sucesivas respecto de los cortes diagonales $C_{h,k}$, con $h,k \in \{1,..,s-1\} \cup \{r\}$ y $h \neq k$.

REPRESENTACION LINEAL DE UN HIPERGRAFO.-

Dentro de este paragrafo estudiaremos dos temas:

1.- Reducción de subindices en una variable subindicada.

2,- La representación lineal.

I.- REDUCCION DE SUBINDICES DE UNA VARIABLE SUBINDICADA.

Aparte la aplicación que daremos en el apartado II, resulta conveniente, a menudo, para no rebasar la capacidad de memoria del ordenador así como para facilitar los cálculos y el manejo de variables subindicadas, reducir el número de estos subindices a uno solo.

Sea la h-matriz de orden n, $\|A\|$. Consideremos un elemento cualquiera perteneciente a ella

$$a_{i_1,\ldots,i_h} \in \|A\|$$

Sea s el subindice que va a definir univocamente este mismo elemento una vez efectuada la reducción.

Se plantean dos problemas:

1º .- Dada la h-pla, $(i_1,\ldots,i_h)$ y el orden de la h-matriz, calcular s.

2º .- Dado s y el orden de la h-matriz, calcular la h-pla $(i_1,\ldots,i_h)$

Pasemos a su resolución:

1º .- La fórmula que nosotros emplearemos, (puesto que, sin duda, existirán otras ordenaciones), será:

$$s = (i_1-1)\, n^{h-1} + \ldots + (i_{h-1}-1)\, n + i_h.$$

Tal operación se puede realizar haciendo

$$i_j-1 = \lambda_j, \text{ para } j< h \text{ , e } i_h = \lambda_h ,$$

dividiendo, a continuación, por Ruffini, el polinomio

$$\sum_{t=1}^{h} {}_t\, x^{h-t}$$

por x - n, y tomando el resto.

Ejemplo:

Dada la 4-pla de subindices,

$$(5,6,3,1)$$

siendo igual a 6 el orden de la 4-matriz a la que pertenece el elemento $a_{5,6,3,1}$, el elemento a_s correspondiente será:

	4	5	2	1
6)		24	174	1056
	4	29	176	(1057

con lo cual

$$a_{5,6,3,1} = a_{1057}$$

2º.- El problema reciproco, dados $s \leq n^h$, el orden n y la dimensión h de A, encontrar la h-pla $i_1, .., i_h$ se resuelve así:

Dividimos s sucesivamente por n y se toman los restos y el último cociente en sentido inverso a como han ido apareciendo, aumentando todos ellos, (exeepto el último), en una unidad; se completarán, si fuera necesario, los t números obtenidos, con h-t términos iguales a la unidad, que se colocarán entre los lugares t-1 y t, para que el número total de coordenadas sea h.

Si el primer resto fuera igual a cero se tomará el cociente disminuido en una unidad.

Ejemplos:

1.- Sea s= 1057, n=6 y h=5, se tendrá

1057	$\lfloor$ 6			
45	176	$\lfloor$ 6		
37	56	29	$\lfloor$ 6	
1	2	5	4	

con lo cual

$$a_{1057} = a_{1,5,6,3,1}$$

2.- Sea s = 125, n=5, y h=5, se tendrá

$$\begin{array}{llll} 125 & \underline{|\ 5\ } & & \\ 25 & 24 & \underline{|\ 5\ } & \\ 5 & 4 & 4 & \end{array}$$

con lo cual

$$a_{125} = a_{1,1,5,5,5}$$

II.- REPRESENTACION LINEAL DE UN HIPERGRAFO.

Consideremos la h-matriz, de orden n, asociada a un hipergrafo orientado de rango h y orden n-1. Consideremos los elementos de la n-matriz A notados en su forma reducida.

Sea $q = n^h$ el entero correspondiente al subindice reducido del elemento $a_{\underbrace{n,\ldots,n}_{h}}$, y consideremos el conjunto de enteros $\{1,\ldots,q\} = Q$.

Vamos a definir una función

$$f : Q \to \{0,1\}$$

de tal manera que, $\forall\ s \in Q$, se tiene

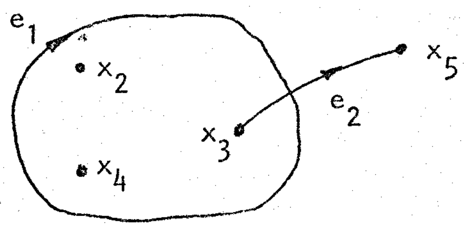
$$f(s) = \begin{cases} 1 & \text{si el elemento } a_s \text{ de A es igual a 1} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dada,pues, la dimensión ó el rango h ,la representación lineal del hipergrafo estará univocamente determinada por el conjunto Q y la función sobre él definida, ya que el orden de la h-matriz será $\sqrt[h]{q}$, y el orden del hipergrafo $\sqrt[h]{q}$ -1.

En tal representación se tendrá que el número de arcos es igual al número de veces que la función toma el valor 1.

Ejemplos:

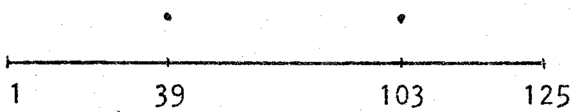
1.- Al hipergrafo de representación planaria



corresponde la 3-matriz de orden 5 y elementos todos nulos excepto los

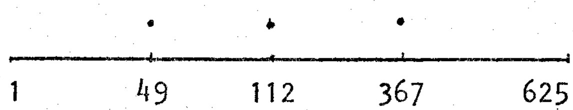
$$a_{2,3,4} = a_{39} = 1 \ , \quad a_{5,1,3} = a_{103} = 1.$$

La representación lineal será:



$h=3 \rightarrow n=5.$

2.- A la representación lineal



$h=4 \rightarrow n=5$

corresponde la n-matriz de elementos todos nulos excepto los

$$a_{49} = a_{2,5,1,4} = 1 \ , \ a_{112} = a_{5,3,1,2} = 1, a_{367} = a_{3,5,4,2} = 1,$$

y a ella, el hipergrafo de rango 4 y orden 4, de vértices

$$\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

y arcos

$$(x_2, x_5, x_4) \ , \ (x_5, x_3, x_2) \ , \ (x_3, x_5, x_4, x_2).$$

La representación lineal que se ha tratado ha sido para un 1-hipergrafo, no obstante cabría una representación analoga para un p-hipergrafo cualquiera, haciendo que el valor de f en el punto correspondiente al arco considerado sea igual a k, siendo k el número de veces que tal arco pertenece al p-hipergrafo.

. Por otro lado, podría lograrse, para el caso de un 1-hipergrafo, dando a f(s) el valor $1/[E]$ que la función f fuera del tipo de una función de densidad y se podría tratar de obtener, bien por éste o por otro camino, un método analítico para el estudio de los hipergrafos.

Del mismo modo, podría pensarse en definir una serie de operaciones entre hipergrafos,biena a partir de estas funciones asociadas, bien a partif de la representación lineal misma, e, incluso, tratar de inducir algun tipo de estructura. Nosotros abandonamos, momentaneamente, tales caminos para en su dia, si nos parece conveniente, volver a ellos.

GENERALIDADES SOBRE LA TEORIA DE HIPERGRAFOS.-

ANTERIOR Y POSTERIOR.-

Se dice que un vértice x_j es un ANTERIOR, de dimensión s y grado p, de x_i si x_j y x_i son coordenadas de algún arco perteneciente a E_s tales que $i = j+p$. También diremos que x_i es un POSTERIOR de x_j.

Notaremos por

$$\alpha(x_i)$$

el conjunto de los anteriores de x_i. Y por

$$\pi(x_i)$$

el conjunto de los posteriores.

Si queremos precisar la dimensión, notaremos por

$$\alpha^s(x_i) \quad y \quad \alpha^s(x_i)$$

el conjunto de los anteriores y posteriores de dimensión s.

PREDECESOR Y SUCESOR.-

Se dice que x_j es un SUCESOR o SEGUIDOR, de dimensión s, de x_i si existe un arco, perteneciente a E_s, que tenga como extremidades, inicial y final, x_i y x_j, respectivamente. Tambien se dirá que x_i es un PREDECESOR o PRECEDENTE, de dimensión s, de x_j.

Los vértices de los arcos de dimensión unidad son predecesores y sucesores de si mismos.

Observese que puede tambien definirse el conjunto de predecesores y de sucesores, de dimensión s, de un vértice x_i como el conjunto de anteriores y posteriores de grados p_A y p_P tales que

$$p_A + p_P = s.$$

El conjunto de sucesores, de dimensión s, de x_i en el hipergrafo H se nota por

$$\Gamma_H^{+s}(x_i)$$

y el de predecesores,

$$\Gamma_H^{-s}(x_i) \ .$$

Llamamos CONUUNTO DE SUCESORES de x_i, al conjunto

$$\Gamma_H^{+}(x_i) = \bigcup_{s=1}^{s=h} \Gamma_H^{+s}(x_i)$$

Analogamente, llamamos CONJUNTO DE PREDECESORES de x_i, al junto,

$$\Gamma_H^-(x_i) = \bigcup_{s=1}^{s=h} \Gamma_H^{-s}(x_i) .$$

El CONJUNTO DE VECINOS, de dimensión s, de x_i será, por definición,

$$\Gamma_H^s(x_i) = \Gamma_H^{+s}(x_i) \cup \Gamma_H^{-s}(x_i)$$

Llamaremos VECINOS de x_i al conjunto

$$\Gamma_H(x_i) = \bigcup_{s=1}^{h} \Gamma_H^s(x_i) = \Gamma_H^+(x_i) \cup \Gamma_H^-(x_i) .$$

Si $\Gamma_H^s(x_i) = \emptyset$, el vértice x_i se dirá s-DIMENSIONALMENTE AISLADO. Si ello ocurre para todo valor de s, el vértice x_i se dice AISLADO.

El conjunto de vértices aislados lo notaremos en la forma

$$X_A$$

y podría tambien definirse como el conjunto complementario, respecto de X, del conjunto de vértices terminales, X_T, que definimos en la pag.2. Esto es:

$$X = X_T \cup X_A.$$

El hecho de que un vértice sea aislado no implica, obviamente, quenno pertenezca a ningún arco, ya que esto iría en contra de la definición de hipergrafo dada al principio, sino que significa que no es extremidad de ninguno de los arcos que constituyen el hipergrafo.

Sea A un subconjunto de X. Se definirá el conjunto de vecinos,de dimensión s,de A, y se notará en la forma $\Gamma_H^s(A)$,como

$$\Gamma^{s}_{H}(A) = \bigcup_{x_j \in A} \Gamma^{s}_{H}(x_j)$$

Analogamente, el conjunto de vecinos- será:

$$\Gamma^{s}_{H}(A) = \bigcup_{x_j \in A} \Gamma_{H}(x_j) = \bigcup_{x_j \in A} (\Gamma^{+}_{H}(x_j) \cup \Gamma^{-}_{H}(x_j)).$$

Si $x_i \in \Gamma_H(A)$, y se verifica que $x_i \notin A$, el vértice x_i se dice ADYACENTE al conjunto A.

Ejemplo:

Consideremos el hipergrafo $H=(X,E)$, con

$$X = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$$

y

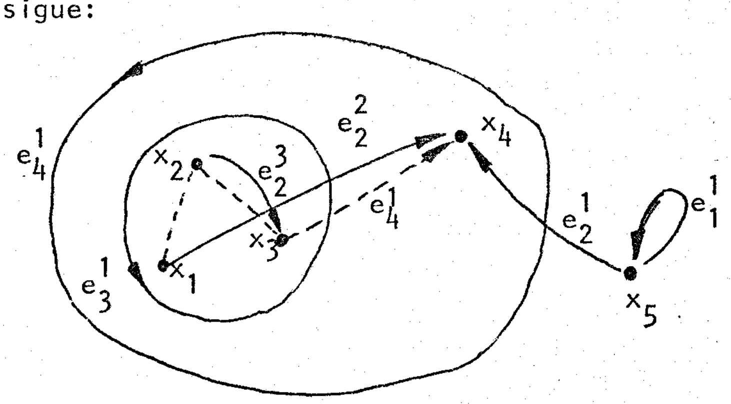
$$E = \{E_1,E_2,E_3,E_4\}$$

siendo: $E_1= \{e_1^1\}$, $E_2 =\{e_2^1,e_2^2,e_2^3\}$, $E_3=\{e_3^1\}$, $E_4=\{e_4^1\}$

con: $e_1^1= (x_5)$, $e_2^1= (x_5,x_4)$, $e_2^2= (x_1,x_4)$, $e_2^3= (x_2,x_3)$,

$e_3^1= (x_1,x_3,x_2)$, y, $e_4^1 = (x_1,x_2,x_3,x_4)$

Este hipergrafo tendrá como representación planaria la - que sigue:



Resumamos los sucesores de los distintos órdenes en la - siguiente tabla:

Sucesores de:	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
dimensión 1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{x_5\}$
dimensión 2	$\{x_4\}$	$\{x_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
dimensión 3	$\{x_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
dimensión 4	$\{x_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
CONJUNTO DE SUCESORES	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{x_5, x_4\}$

Los vértices x_3 y x_4 constituyen, en este caso, el conjunto de vértices sin sucesores.

CONSIDERADIONES ACERCA DE LA APLICACION Γ^+.-

En lo que sigue, si no hay lugar a confusión, notaremos la correspondencia Γ^+ por la letra Γ, y la correspondencia Γ^- p por Γ^{-1}.

Obviamente, se verificará:

1.- Si $\Gamma(x) \neq \emptyset$, se tendrá

$$\Gamma^{-1}(\Gamma(x)) \quad \{x\}.$$

Analogamente, si $\Gamma^{-1}(x) \neq \emptyset$,

$$\Gamma(\Gamma^{-1}(x)) \quad \{x\}.$$

Notese que los conjuntos $\Gamma\Gamma^{-1}(x)$ y $\Gamma^{-1}\Gamma(x)$ no son, necesariamente, iguales.

2.- Supuesto que

$$\Gamma(y) \neq \emptyset \neq \Gamma^{-1}(x)$$

se tendrá que

$$x \in \Gamma(y) \text{ si y solo si } y \in \Gamma^{-1}(x)$$

LA APLICACIÔN $\vec{\gamma}$.-

Dado el hipergrafo H=(X,E), de rango h, definimos sobre - él una aplicación vectorial multiforme, $\vec{\gamma}$, cuyo dominio es X, con h componentes, cada una de las cuales es una aplicación multiforme, de manera que, $\forall\ x_i \in X$, se tiene:

$$\vec{\gamma}(x_i) = (\Gamma^{+1},\Gamma^{+2},..,\Gamma^{+h})(x_i) = (\Gamma^{+1}(x_i),...,\ \Gamma^{+h}(x_i)\ ).$$

Es obvio que si $\vec{\gamma}(x_i) = \emptyset$ el vértice x_i es un vértice aislado.

LA APLICACION $\vec{\Gamma}$.-

Sobre el hipergrafo H=(X,E), de rango h, definimos una aplicación vectorial multiforme, $\vec{\Gamma}$, de h componentes, con dominio en X, de manera que dado $x_i \in X$, se define

$$\vec{\Gamma}\ (x_i) = (\Gamma_1,\Gamma_2,..,\Gamma_h)\ (x_i) = \ (\Gamma_1(x_i),\ \Gamma_2(x_i),...,\Gamma_h(x_i)\ ),$$

donde $\Gamma_k(x_i)$, con $k \geqslant 2$, es el conjunto de vectores formados por las k-1 últimas coordenadas de los arcos que tiene como primera coordenada el vértice x_i y que pertenecen a la familia E_k.

Si k=1, se tiene que $\Gamma_1 = \Gamma^{+1}$.

Así, por ejemplo, el hipergrafo correspondiente a la aplicación vectorial multiforme, $\vec{\Gamma}$, que sigue,

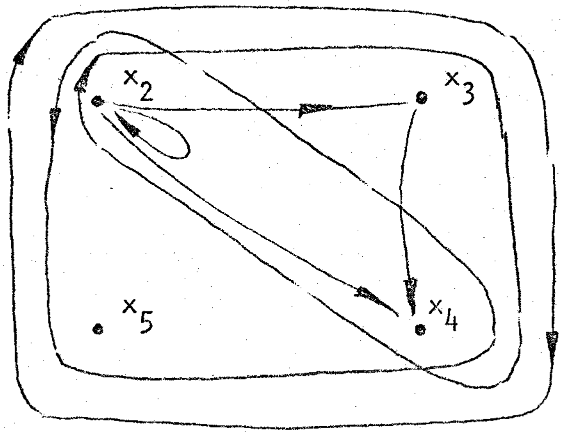
$$\vec{\Gamma}\ (x_2) = (\ x_2,\ (x_3),(x_4),\ \ (x_3,x_4),(x_5,x_4)\ ,\ (x_3,x_4,x_5))$$

$$\vec{\Gamma}\ (x_3) = (\ \emptyset\ ,\ (x_4),\ \ \emptyset\ ,\ \emptyset\ )$$

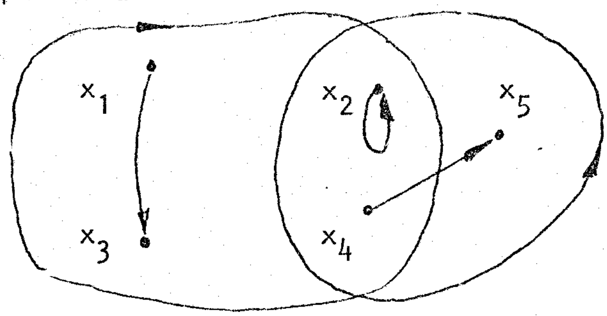
$$\vec{\Gamma}\ (x_4) = (\ \emptyset\ ,\ \emptyset\ ,\ \emptyset,\ (x_5,x_2,x_3))$$

$$\vec{\Gamma}\ (x_5) = (\ \emptyset\ ,\ \emptyset\ ,\ \emptyset\ ,\ \emptyset\ )$$

tiene como representación planaria



Reciprocamente, dado, por ejemplo, el hipergrafo de representación planaria



la tabla correpondiente a la aplicación vectorial multiforme, $\vec{\Gamma}$, definida sobre él, será:

x	$\Gamma_1(x)$	$\Gamma_2(x)$	$\Gamma_3(x)$	$\Gamma_4(x)$	$\vec{\Gamma}(x)$
x_1	$\emptyset$	$\{(x_3)\}$	$\emptyset$	$\{(x_2,x_3,x_4)\}$	$(\emptyset,\{(x_3)\},\emptyset,\{(x_2,x_3,x_4)\})$
x_2	$\{x_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$(\{x_2\},\emptyset,\emptyset,\emptyset)$
x_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
x_4	$\emptyset$	$\{(x_5)\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$(\emptyset,\{(x_5)\},\emptyset,\emptyset)$
x_5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(x_2,x_4)\}$	$\emptyset$	$(\emptyset,\emptyset,\{(x_2,x_4)\},\emptyset)$

tabla que, reducida a sus, primera y última, columnas recibe el nombre de DICCIONARIO del hipergrafo.

Obviamente, un hipergrafo

$$H = (X,E)$$

quedará completamente determinado por el conjunto de sus -- vértices X, y por la aplicación vectorial multiforme $\vec{\Gamma}$ definida sobre él, y podrá, por consiguiente, notarsele también mediante la dupla

$$H = (X,\vec{\Gamma}).$$

ESQUEMA.-

Definimos una ARISTA como el conjunto de coordenadas de un arco, esto es, como el conjunto base del mismo. Evidentemente, varios arcos pueden generar la misma arista.

Consideremos la familia

$$A = \{A_i\}$$

de todas las aristas.

La familia A será, por consiguiente, una subfamilia del conjunto de las partes de X, tal que verificará:

$$\bigcup_i A_i = X.$$

La dupla (X,A) se denominará ESQUEMA.

Dado el arco

$$(x_{i_1},\ldots,x_{i_s})$$

notaremos la arista correspondiente en la forma

$$x_{i_1},\ldots,x_{i_s} .$$

A todo esquema podemos hacerle corresponder un hipergrafo, orientando cada una de sus aristas de dimensión s, en las $s!$ orientaciones posibles. Tal hipergrafo se llamará -- HIPERGRAFO MATRIZ del esquema dado.

Con ligeras diferencias, puesto que se exige, además,que $A_i \neq \emptyset$ $(\forall i)$, se conoce en la actualidad (*), con el nombre de hipergrafo, la estructura que nosotros hemos definido -- con el nombre de esquema.

Podríamos, dejandonos llevar por la costumbre, no modificar el nombre de tal estructura y adoptar cualquier otro para la nuestra. No haremos tal cosa por la siguiente razón : Si en teoría de grafos la orientación es esencial, otro tanto ocurre en la nuestra, y, parece lógico que al generalizar totalmente,(orientación incluida), el concepto de grafo se reserve para él la palabra hipergrafo. De otro modo, para nosotros será reiterativo decir hipergrafo orientado puesto - que todo hipergrafo, por naturaleza, lo es.

Ahora bien, para ciertos tipos de problemas, resulta,a - menudo,cómodo prescindir de la orientación, cuanto más cuando, de hecho, existen, junto a conceptos que són, claramente, orientados, (arco, sucesor,etc.), conceptos que no lo - son, (arista, adyacente,etc.). Cuando se apliquen estas dos clases de conceptos, conjuntamente, a un mismo hipergrafo , ha de tenerse en cuenta que, cada vez que se haga uso de un concepto no orientado en un hipergrafo deberá considerarse que se aplica al esquema correspondiente, deducido mediante la supresión de la orientación. De la misma forma, cuando -

(*) Berge (3) pag.373.

se aplique un concepto orientado en un esquema deberá considerarse que se aplica al hipergrafo matriz correspondiente.

GLOSARIO BASE PARA LA TEORIA DE HIPERGRAFOS.-

ARCOS ADYACENTES, ARISTAS ADYACENTES.-

Dos arcos o dos aristas se dicen ADYACENTES si tienen,al menos, una extremidad común.

MULTIPLICIDAD DE UN PAR x,y .-

Número de arcos que tengan el vértice x como extremidad inicial e y como extremidad final. Se nota este número por $m_H^+(x,y)$ y se pone:

$$m_H^+(x,y) = m_H^-(x,y)$$

donde $m_H^-(x,y)$ es el número de arcos que tienen y como extremidad inicial e y como extremidad final.

Analogamente,

$$m_H(x,y) = m_H^+(x,y) + m_H^-(x,y),$$

donde, si $x \neq y$, $m_H(x,y)$ designa el número de arcos que tienen como primera coordenada x ó y, y como última y ó x. Si x=y, por definición, es igual a dos veces el numero de bucles ligados al vértice x.

Si A y B son dos subconjuntos disjuntos de X, se notará, igualmente; por

$$m_H^+ (A,B)$$

al número de arcos cuya primera coordenada pertenece a A y cuya última pertenece a B.

Analogamente,

$$m_H(A,B) = m_H^+(A,B) + m_H^-(A,B).$$

ARCO INCIDENTE A UN VERTICE.-

Si un vértice x_i es la extremidad inicial de un arco e_j, se dice que tal arco e_j es INCIDENTE a x_i HACIA EL EXTERIOR.

En un hipergrafo el número de arcos incidentes a x_i hacia el exterior se nota por $d_H^+(x_i)$, y se llama SEMIGRADO EXTERIOR de x_i.

Analogamente se definen el ARCO INCIDENTE a x_i HACIA EL INTERIOR y el SEMIGRADO INTERIOR $d_H^-(x_i)$.

GRADO DE UN VERTICE.-

Es el número de arcos que tienen como extremidad tal vértice, x_i. Se notará por $d_H(x_i)$.

Cada buble habrá sido contado dos veces.

Se tiene:

$$d_H(x_i) = d_H^+(x_i) + d_H^-(x_i).$$

ARCO INCIDENTE A UN SUBCONJUNTO.-

Consideremos un subconjunto A de X. Si la extremidad inicial de un arco e_i pertenece a A, y no ocurre así con su extremidad final, se dice que e_i es INCIDENTE CON A HACIA EL EXTERIOR, y se nota

$$e_i \in \omega^+(A)$$

De forma análoga se define cuando un arco es INCIDENTE CON A HACIA EL INTERIOR, y al conjunto de todos ellos se les designa por

$$\omega^-(A).$$

Por último el CONJUNTO DE ARCOS INCIDENTES CON A, se expresará en la forma

$$\omega(A) = \omega^+(A) \cup \omega^-(A).$$

HIPERGRAFO COMPENSADO.-

Si para cualesquiera vértices ,x_i,x_j, se tiene:

$$m_H^+(x_i,x_j) = m_H^-(x_i,x_j),$$

el hipergrafo H se denominará HIPERGRAFO COMPENSADO.

HIPERGRAFO INVERSO.-

Dado un hipergrafo $H = (X,E)$, de rango r, consideremos - la dupla

$$H^{-1} = (X,E^{-1})$$

donde,

$$E^{-1} = \{E_1^{-1}, E_2^{-1},\dots,E_r^{-1}\}$$

siendo E_s^{-1} el conjunto de las s-uplas

$$(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_s}) \qquad (1)$$

tales que

$$(x_{i_s},\dots,x_{i_2},x_{i_1}) \in E_s. \qquad (2)$$

La dupla $H^{-1} = (X,E^{-1})$ es, evidentemente, un hipergrafo, y se llama HIPERGRAFO INVERSO DE H.

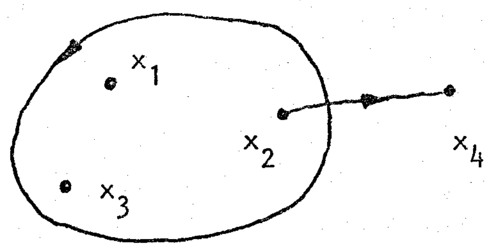
Los arcos (1) y (2) se denominan ARCOS INVERSOS.

Obviamente;

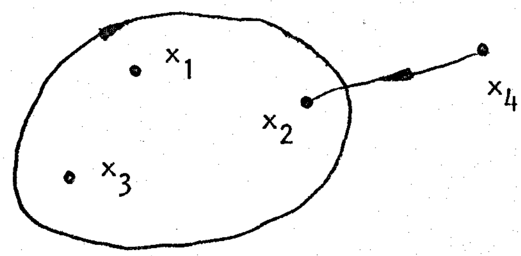
- El inverso del inverso coincide consigo mismo.
- La condición necesaria y suficiente para que un arco sea un bucle es que coincida con su inverso.

La aplicación vectorial multiforme $\vec{\Gamma}^{-1}$ que determina unívocamente el hipergrafo H^{-1} se llama APLICACION INVERSA de la aplicación multiforme $\vec{\Gamma}$ que determina univocamente el hipergrafo H.

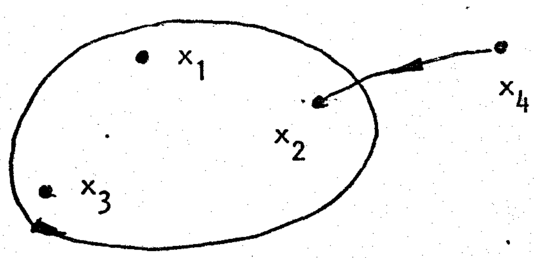
Ha de evitarse caer en el error de considerar que el hipergrafo inverso de uno dado se obtiene, simplemente, cambiando el sentido de orientación. Así, por ejemplo, el hipergrafo inverso del:



no es el



sino



HIPERGRAFO SIMETRICO.-

Es aquel que coincide con su inverso.

· Proposición:

" Todo hipergrafo simétrico es compensado".

Se deduce inmediatamente de las definiciones.

El reciproco no es cierto, excepto en el caso de que el hipergrafo sea de rango 2, en que ambas definiciones coinciden.

HIPERGRAFO DESCOMPENSADO.-

Si para todo par de vértices x_i y x_j, con $x_i \neq x_j$, se tiene

$$m_H^+(x_i,x_j) + m_H^-(x_i,x_j) \leq 1$$

el hipergrafo H se llama DESCOMPENSADO.

Un hipergrafo descompensado carece de bucles.

HIPERGRAFO ANTISIMETRICO.-

Se llama así a aquel que no contiene, simultaneamente, a un arco y a su inverso.

Un hipergrafo antisimétrico carece de bucles.

Proposición.-

" Todo hipergrafo descompensado es antisimetrico ".

Sigue de las definiciones.

El reciproco solo se cumple si se trata de un 1-hipergrafo,

HIPERGRAFO COMPLETO.-

Un hipergrafo se dirá COMPLETO si entre dos vértices distintos existe, al menos, un arco.

HIPERGRAFO TOTAL.-

Un hipergrafo H, de rango h, se llama TOTAL si, $\forall s \leqslant h$,y para todo elemento del producto cartesiano

$$(x_{i_1},\ldots,x_{i_s}) \in X \times \overset{s}{\ldots} \times X \text{ , con } x_{i_j} \neq x_{i_k} \text{ ,} \forall\, j,k \leqslant s \text{ ,}$$

se verifica que existe, al menos, un $e_s \in E_s$ tal que

$$e_s = (x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_s}).$$

Evidentemente, todo hipergrafo total es completo.

FUNCION RANGO.-

En un hipergrafo,$H = (X,E)$, definimos la FUNCION RANGO,r, como aquella que hace corresponder a todo subconjunto S de X, el número entero positivo r(S), siendo

$$r(S) = \max_i \left[S \cap \{e_i\} \right] .$$

El número r(X) se llama RANGO del hipergrafo y coincide, evidentemente, con la definición que de él dimos al principio de este capitulo.

Si, para todo i, se tiene

$$r(X) = \left[\{e_i\}\right]$$

se dice que H es un HIPERGRAFO UNIFORME de rango r(X).

Obviamente, la función r, cuyo dominio es la σ-algebra

$\mathcal{P}(X)$, verifica:

1.- No negativa. Esto es

$$r(S) \geqslant 0 \quad y \quad r(S) = 0 \text{ si, y solo si, } S = \emptyset.$$

2.- Monotona no decreciente.

3.- Acotada

4.- Subaditiva.

En efecto, si $A \cap B = \emptyset$, se tiene

$$r(A\ B) = \max_i \left[A \cup B \cap \{e_i\}\right] = \max_i \{ \left[A \cap \{e_i\}\right], \left[B \cap \{e_i\}\right] \}$$

$$\leqslant \max_i \left[A \cap \{e_i\}\right] + \max_i \left[B \cap \{e_i\}\right] = r(A) + r(B).$$

HIPERGRAFO PARCIAL.-

Dado el hipergrafo $H = (X,E)$ y la familia $F \subset E$, llamamos HIPERGRAFO PARCIAL generado por la familia F, al hipergrafo $H = (X_F, F)$, donde

$$X_F = \{ x_i \in X \ / \ x_i \in e_j^i \in F_j \subset F \}.$$

SUBHIPERGRAFO.-

Dado el hipergrafo $H = (X,E)$ y un subconjunto A de X, llamaremos, por definición, SUBHIPERGRAFO generado por A, al hipergrafo $H_A = (A, E_A)$, donde

$$E_A = \{ e_i^j \cap A \ / \ e_i^j \in E_i \ , \ e_i^j \cap A \neq \emptyset \}$$

entendiendo por $e_i^j \cap A$ el arco que tiene como coordenadas la intersección del conjunto $\{e_i^j\}$ con A, colocadas en el mismo orden relativo que ocupaban en e_i^j.

Se tiene inmediatamenye:

Proposición 1.-

" Si $H=(X,E)$ es un hipergrafo con una función rango r, el subhipergrafo $H_A = (A,E_A)$, engendrado por un subconjunto A de X, es un hipergrafo con una función rango r_A, definida por

$$r_A(S) = r(S) \quad , \quad (S\subset A) \qquad ".$$

De otro modo, r_A es la RESTRICCION de r al subhipergrafo H_A.

k-SECCION DE UN HIPERGRAFO.-

Sea el hipergrafo $H = (X,E)$ de rango h. Sea k un entero positivo menor o igual que h. Llamamos k-SECCION DEL HIPERGRAFO H al hipergrafo

$$H_{(k)}= (X, E_{(k)}) \; ,$$

donde $E_{(k)}$ es la familia de conjuntos $E_{(k),i}$, $(1\leq i\leq k)$, tales que $E_{(k),i}$ es el conjunto de todos los arcos, de dimensión i, que se pueden formar con las coordenadas de los arcos e_s^j $(s\geq i)$ con la orientación inducida por e_s^j , esto es, colocadas en el mismo orden relativo que ocupaban en e_s^j.

En particular la 2-sección de un hipergrafo H es un grafo.

Proposición 2.-

" Si H es un hipergrafo, con una función rango r, la k-sección es un hipergrafo con una función rango $r_{(k)}$, con $k\leq r(X)$, definida como sigue:

$$r_{(k)}(S) = \min\{k, r(S)\}$$ ".

A veces notaremos por $(H)_k$ la k-sección de un hipergrafo desprovista de sus bucles.

Daremos, a continuación, algunos ejemplos de hipergrafo parcial, subhipergrafo, y k-sección.

Sea el hipergrafo $H = (X,E)$, con

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

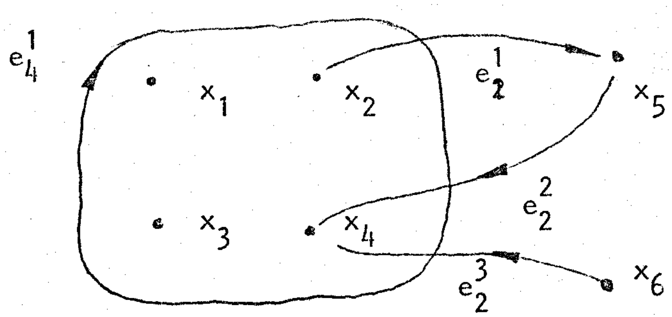
y $$E = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$$

siendo: $E_1 = \emptyset$, $E_2 = \{e_2^1, e_2^2, e_2^3\}$, $E_3 = \emptyset$, $E_4 = \{e_4^1\}$

con: $e_2^1 = (x_2, x_5)$, $e_2^2 = (x_5, x_4)$, $e_2^3 = (x_6, x_4)$, y,

$$e_4^1 = (x_1, x_2, x_4, x_3)$$

y cuya representación planaria es:



El hipergrafo parcial engendrado por la familia $F \subset E$, con

$$F = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$$

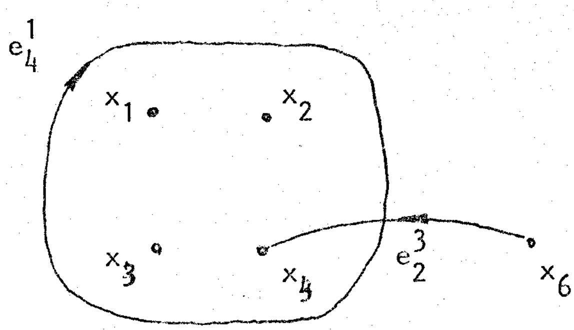
siendo $F_1 = \emptyset$, $F_2 = \{e_2^3\} \subset E_2$, $F_3 = \emptyset$, $F_4 = \{e_4^1\} \subset E_4$,

será el

$$H_F = (X_F; F)$$

donde $$X_F = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}$$

y cuya represêntación planaria es la quessigue:



El subhipergrafo generado por el conjunto

$$A = \{ x_2, x_3, x_4, x_5 \}$$

será el $H_A = (A, E_A)$, donde

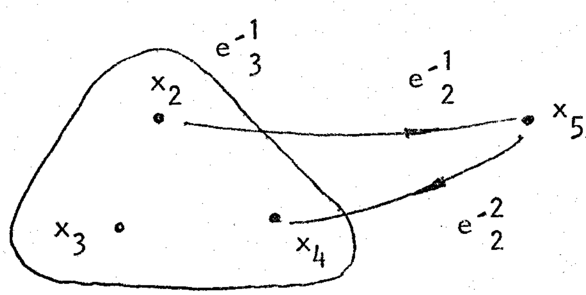
$$E_A = \{E_{A,1} \ , \ E_{A,2} \ , \ E_{A,3}\}$$

siendo;

$$E_{A,1} = \emptyset \quad , \ E_{A,2} = \{e^{-1}_{2}, \ e^{-2}_{2}\} \quad , \ E_{A,3} = \{e^{-1}_{3}\}$$

donde, $e^{-1}_{2} = (x_2, x_5)$, $e^{-2}_{2} = (x_5, x_4)$ y $e^{-1}_{3} = (x_2, x_4, x_3)$

y cuya representación planaria es



La 3-sección de $H = (X,E)$ será: $H_{(3)} = (X, \ E_{(3)})$,

siendo

$$E_{(3)} = S = \{S_1, S_2, S_3\}$$

con: $$S_1 = \{s_1^1, s_1^2, s_1^3, s_1^4, s_1^5, s_1^6, s_1^7, s_1^8, s_1^9\}$$

$$S_2 = \{s_2^1, s_2^2, s_2^3, s_2^4, s_2^5, s_2^6, s_2^7, s_2^8, s_2^9\}$$

$$S_3 = \{s_3^1, s_3^2, s_3^3\}$$

siendo:

$s_1^1 = (x_1)$, $s_1^2 = s_1^3 = (x_2)$, $s_1^4 = (x_3)$, $s_1^5 = s_1^6 = (x_4)$,

$s_1^7 = s_1^8 = (x_5)$, $s_1^9 = (x_6)$;

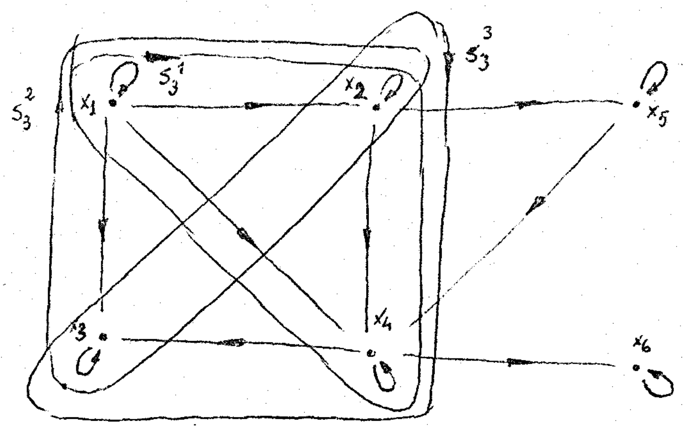
$s_2^1 = (x_2, x_5)$, $s_2^2 = (x_5, x_4)$, $s_2^3 = (x_6, x_4)$, $s_2^4 = (x_1, x_2)$,

$s_2^5 = (x_1, x_4)$, $s_2^6 = (x_1, x_3)$, $s_2^7 = (x_2, x_4)$, $s_2^8 = (x_2, x_3)$,

$s_2^9 = (x_4, x_3)$;

$s_3^1 = (x_1, x_2, x_4)$, $s_3^2 = (x_1, x_2, x_3)$, $s_3^3 = (x_2, x_4, x_3)$.

Cuya representación planaria es:



CAPITULO II : C I C L O S

CAPITULO II :

CICLOS

PSEUDOCADENA.-

En un hipergrafo $H = (X,E)$, una PSEUDOCADENA es una sucesión,

$$\mu = e^1, e^2, \ldots, e^q \quad ,$$

de q arcos ($q \geq 1$) tales que cada uno de ellos tenga una extremidad en común con el precedente y la otra común con el arco siguiente.

El número de arcos de la sucesión μ es la LONGITUD de la pseudocadena.

CADENA.-

Es una pseudocadena,

$$\mu = e^1, e^2, \ldots, e^q \quad , \qquad (1)$$

en la que se excluye la posibilidad de que un arco pertenezca dos veces sucesivas a la sucesión que la define.

Sean

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{q+1}}$$

los q+1 vértices terminales de los arcos utilizados, sucesivamente, en la sucesión que define la cadena.

Los vértices x_{i_1} y $x_{i_{q+1}}$ se llaman EXTREMOS de la cadena.

Podríamos, quizás, pensar en definir una cadena como una sucesión de vértices, (no necesariamente todos distintos),

$$\mu = x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_p}, x_{j_{p+1}}, \ldots, x_{j_{q+1}} \qquad (2)$$

tales que verificasen que

$$x_{j_p} \text{ y } x_{j_{p+1}} \quad , \text{ para } p = 1,..,q \ ,$$

fueran las extremidades de un arco e^{j_p} de H.

Ello no es posible ya que, a partir de tal definición, estaría indeterminada la sucesión de arcos utilizados. De otro modo, (1) implica (2), pero no reciprocamente.

Notaremos la cadena (1) en una de las dos formas

$\mu = \mu[e^1, e^q]$, o bien, $\mu = \mu[x_{i_1}, x_{i_{q+1}}]$, si no hay peligro de confusión.

Una cadena se dirá:

ELEMENTAL.- Cuando no utiliza dos veces el mismo vértice como enlace entre dos arcos.

SIMPLE .- Cuando no utiliza dos veces el mismo arco.

En particular, toda cadena elemental es simple.

HAMILTONIANA.- Cuando utiliza una vez, y solo una, cada uno de los vértices, (todos), del hipergrafo sobre el que está definida.

EULERIANA.- Cuando utiliza una vez, y solo una, cada uno de los arcos, (todos), del hipergrafo. La sucesión de arcos que definen la cadena será,- por consiguiente, una permutación del conjunto de los arcos del hipergrafo H.

Nótese que no existen cadenas hamiltoniannas y eulerianas en p-hipergrafos (p>1).

PREHAMILTONIANA (PREEULERIANA).- Cuando utiliza una vez, al menos, cada uno de los vértices (arcos) del hipergrafo H.

CAMINO.-

Se llama CAMINO, de longitud q, a una cadena tal que, en ella coinciden las extremidad final de cada arco con la extremidad inicial del siguiente.

La primera coordenada del primer arco,e^1, se llama EX--TREMIDAD INICIAL u ORIGEN del camino, y la última coordenadda del último arco, e^q, EXTREMIDAD FINAL del camino.

Para un camino se definen los términos: elemental, sim--ple,..., de forma igual a la anteriormente dada para cade--nas.

Vamos, a continuación, a definir una relación de orden parcial entre cadenas.

IGUALDAD E INCLUSION DE CADENAS Y CAMINOS.-

Dos cadenas (caminos),

$$\mu = e^{i_1}, \ldots , e^{i_q}$$

$$\mu' = e^{j_1}, \ldots , e^{j_p}$$

se dicen IGUALES si, y solo si, $q = p$ y $e^{i_k} = e^{j_k}$, para $k = 1,2,\ldots,q$.

Se dice que una cadena (camino) μ CONTIENE a otra (o) μ' si todo arco de la cadena (camino) μ' es arco de la cadena (camino) μ.

Las cadenas (caminos) μ y μ'' se dicen DISJUNTAS (OS) EN EL SENTIDO DE LOS ARCOS si no poseen ningún arco común. Esta relación no excluye la presencia de vértices, (terminales o no), comunes, Si no existe ninguno las cadenas (caminos) se dicen TOTALMENTE DISJUNTAS (OS) EN EL SENTIDO DE LOS ARCOS.

PSEUDOCICLO.-

Un PSEUDOCICLO del hipergrafo H es una sucesión circular, no vacía, de arcos

$$\sigma = \begin{matrix} e^{i_1} & \cdot \;\cdot\; \cdot & e^{i_p} \\ e^{i_q} & & e^{i_{p+1}} \\ & \cdot \;\cdot\; \cdot & \end{matrix}$$

tales que dos consecutivos sean siempre adyacentes.

Por las dificultades de escritura se romperá el circulo, (tal operación recibe el nombre de RUPTURA), de forma arbitraria y se escribirá:

$$\sigma = e^{i_1},\ldots,e^{i_p}, e^{i_{p+1}},\ldots,e^{i_q}, (e^{i_1})$$

o bien

$$\sigma = e^{i_{p+1}},\ldots, e^{i_q}, e^{i_1},\ldots,e^{i_p}, (e^{i_{p+1}})$$

Lógicamente, para un pseudociclo, carecerán de sentido las notaciones del primer, último, k-esimo arco

CICLO.-

Es un pseudociclo, con arcos de dimensión mayor que 1,en el que un mismo arco no figura dos veces consecutivas en la sucesión circular.

Observese que, contrariamente a lo que ocurre en la teoría de grafos, un bucle no se considerará como un ciclo en la nuestra.

CIRCUITO.-

Es un ciclo en el que para dos arcos consecutivos cualesquiera la extremidad final del primero coincide con la inicial del segundo.

Las definiciones: elemental, simple,..., que dimos para cadenas y caminos, pueden enunciarse en los mismos términos para ciclos y circuitos.

Proposición 1.-

" Un ciclo es elemental si, y solo si, es un ci clo MINIMAL, es decir, si no se puede deducir otro ciclo de él por supresión de arcos ".

Evidente.

IGUALDAD E INCLUSION DE CICLOS Y CIRCUITOS.-

Dos ciclos (circuitos) son IGUALES si, y solo si, existe una ruptura del primero y otra del segundo que den origen a dos cadenas (caminos) iguales.

Diremos que un ciclo (circuito) está INCLUIDO en otro si existe una ruptura del primero y otra del segundo que den lugar a dos cadenas (caminos) tales que estén incuidos la primera en la segunda (o).

ISOTOPIA.-

En un hipergrafo $H = (X,E)$ llamaremos ARCO ISOTOPO de uno dado, $e_s^i \in E_s \subset E$, a todo aquel e_s^j cuyo conjunto base coincida con el de e_s^i; esto es, se verifique

$$\{e_s^i\} = \{e_s^j\}$$

CLASE ISOTOPA.-

El conjunto de arcos isótopos a uno dado, e_s^i, se llamará CLASE ISOTOPA a e_s^i, y se notará por ε_s^i; al número de elementos de la clase isótopa ε_s^i se le notará por $[\varepsilon_s^i]$.

Observaciones:

1.- Si $e_s^i \in E_s$ y H es un 1-hipergrafo, se verifica que:

$$[\varepsilon_s^i] < s!$$

2.- Si $[\varepsilon_s^i] = s!$, para todo i,s, $s \leq h$,siendo h el rango del hipergrafo , se implica que H es el hipergrafo matriz de un esquema.

ANISOTOPIA.-

Llamamos CADENA (CAMINO, CICLO, CIRCUITO) ANISOTOPA (0), a aquella (aquel) que no utiliza dos arcos isótopos.Esto es, para dos cualesquiera de los arcos, e_i^k , e_j^h , de la sucesión que la (lo) define, se verifica una de las dos condiciones siguientes:

1.- $i \neq j$

2.- Si $i = j$, entonces $\{e_i^h\} \cap \{e_j^k\} \neq \{e_i^h\}$.

Proposición 2.-

" Toda cadena asisótopa es simple ".

Se desprende inmediatamente de las definiciones correspondientes. Tal proposición puede hacerse extensiva a caminos.

II .- TRANSITIVIDAD

ASCENDIENTE Y DESCENDIENTE.-

Sea H = (X,E) un hipergrafo y x_i uno de sus vértices. Se llamará:

ASCENDIENTE VERDADERO de x_i a todo vértice x_j de X, no necesariamente distinto, tal que exista un camino que pase por x_j y x_i (en este orden).

DESCENDIENTE VERDADERO de x_i a todo vértice x_j , no necesariamente distinto de x_i , tal que exista un camino que pase por x_i y x_j (en este orden).

Podemos considerar a x_i como ascendiente, o descendiente, de si mismo aún cuando, de hecho, no sea ascendiente ni descendiente verdadero. Se llamará, en tal caso, ASCENDIENTE (DESCENDIENTE) de x_i , sin el calificativo "verdadero" , al conjunto de los ascendientes (descendientes) verdaderos junto con el vértice x_i.

Se observará que un vértice x_i puede ser ascendiente y descendiente de x_j; bastará para ello, que pase un circuito por x_i y x_j, o bien, caso de ser $x_i = x_j$ que $(x_i) \in E_1$.

Si existe en un hipergrafo un vértiec x_i, no necesariamente único, tal que sea ascendiente (descendiente) de todo vértice de X se dice, entonces, que x_i es una RAIZ (ANTIRAIZ) del hipergrafo H.

Obviamente, toda raiz (antiraiz) ha de ser un vértice terminal.

Cuando una raiz x_i es tal que existe, para todo vértice x_j ($x_j \neq x_i$), al menos un camino de, a lo sumo, p arcos

$$\mu = e^{i_1},\ldots,e^{i_k} \qquad (1 \leq k \leq p)$$

tal que

$$x_i \in \{e^{i_1}\} \quad y \quad x_j \in \{e^{i_k}\}$$

se dice que x_i es una p-RAIZ.

HIPERGRAFO TRANSITIVO.-

Un hipergrafo $H = (X,E)$ se dice TRANSITIVO si, y solo si, para cualesquiera tres vértices terminales, x_i, x_j, x_k, se verifica que:

- Si x_i y x_j son, respectivamente, las extremidades inicial y final de un arco e^i, y,
- Si x_j y x_k son, respectivamente, las extremidades inicial y final de un arco e^j,

entonces, existe un arco, al menos, e^h en H, tal que x_i, x_k son las extremidades inicial y final, respectivamente, de e^h.

Esto es, en un hipergrafo transitivo cada vez que existe un camino constituido por dos o más arcos, existe otro que tiene como extremidades inicial y final, las mismas que tenía aquel. Notaremos, en particular, que en un hipergrafo transitivo todo vértice terminal perteneciente a un circuito, posee, necesariamente, un bucle.

Sea A la n-matriz asociada al hipergrafo H. En el conjunto de las n-matrices homogeneas(*) de orden m y rango n, consideremos la operación * definida de la manera siguiente:

Dadas la n-matrices

$$A = \| a_{i_1,\ldots,i_n} \| \qquad y \qquad B = \| b_{j_1,\ldots,j_n} \|$$

definiremos

$$C = A * B = \| c_{k_1,\ldots,k_n} \|$$

(*) Vease Apéndice.

siendo

$$c_{i_1,k_2,..,k_{n-1},j_n} = \max_T \{a_{i_1,k_2,..,k_{n-1},t} \cdot b_{t,k_2,..,k_{n-1},j_n}\}$$

donde $T = \{1,2,..,m\}$.

Estamos en condiciones de enunciar el siguiente:

TEOREMA 1.-

" Un hipergrafo $H=(X,E)$ es transitivo si, y só lo si, su n-matriz asociada A verifica:

$$A * A \prec A$$

donde el signo $\prec$ significa que todo término de la n-matriz de la izquierda es inferior o iguala a su homologo de la n-matriz de la derecha ".

Demostración:

Consideremos un elemento cualquiera, $b_{i_1,...,i_n}$, de la n-matriz $B = A * A$.

Del hecho de ser

$$b_{i_1,...,i_n} = 1$$

se implicará la existencia de un valor k, $0 < k \leqslant m+1$, (siendo m el rango del hipergrafo), para el cual los elementos

$$a_{i_1,...,i_{n-1},k} \quad y \quad a_{k,i_2,...,i_{n-1},i_n}$$

serán iguales a la unidad; y reciprocamente.

Por consiguiente, siendo x_{i_1} y x_{i_n} vértices terminales de

H, la propiedad de que exista un camino, de longitud 2, que vaya de x_{i_1} a x_{i_n} será equivalente al hecho de ser $b_{i_1,..,i_n}$ igual a la unidad.

La transitividad de H se traduce entonces por:

$b_{i_1,...,i_n} = 1$ implica que $a_{i_1,....,i_n} = 1$, implicación equivalente a esta otra

$$b_{i_1,...,i_n} < a_{i_1,....,i_n} .$$

GRADO DE TRANSITIVIDAD.-

Sea el hipergrafo $H = (X,E)$. Diremos que H verifica la PROPIEDAD T-1 , ó, simplemente, es T-1, si para cualesquiera tres vértices x_i, x_j, x_k , tales que

$x_i,\ x_j \in \{e^i\}$

$x_j,\ x_k \in \{e^j\}$

e^k en H, tal que $x_i, x_k \in \{e^k\}$

apareciendo, en todos los casos, x_i, x_j, x_k, colocados en los mismos ordenes relativos.

Obviamente, si un hipergrafo H verifica la propiedad T-1, entonces, es un hipergrafo transitivo. El reciproco, ciertamente, no se verifica.

Pongamos en H, $X = A_1$, y sea A_2 el subconjunto de los vértices aislados de H. Sean, ahora,

$$A_3, A_4, ..., A_k$$

los conjuntos de vértices aislados de los subhipergrafos

$$H_{A_2}, H_{A_3}, \dots, H_{A_{k-1}},$$

respectivamente.

Naturalmente, se tendrá:

$$X = A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_k .$$

Diremos que H tiene un GRADO DE TRANSITIVIDAD f, o bien, simplemente, es T-f, si se verifica:

$$H_{A_{f-1}} \quad \text{no es T-1}$$

y

$$H_{A_f} \quad \text{si lo es.}$$

Proposición.-

" Todo hipergrafo transitivo, de rango h, tiene un grado de transitividad menor que h-2 ".

HIPERGRAFO REFLEXIVO.-

Un hipergrafo H = (X,E) se dice REFLEXIVO si, y solo si, para todo elemento $x \in X$ se tiene

$$(x) \in E_1 .$$

La n-matriz booleana asociada tendrá iguales a la unidad todos los elementos de la forma

$$a_{k;1,\dots,1}$$

para todo k, $1 \leq k \leq h + 1$, siendo h el rango de H.

Se tiene, en particular, que cualquier k-sección de un hipergrafo es un hipergrafo reflexivo.

HIPERGRAFO PREORDENADO.-

Un hieprgrafo $H = (X,E)$ se dirá HIPERGRAFO PREORDENADO o PREORDEN, si es , simultaneamente, transitivo y reflexivo.

Clasificaremos los hipergrafos preordenados atendiendo a las propiedades de simetría y antisimetría definidas, aunque no de forma explicita, en el capitulo I, conjuntamente con las de hipergrafo simétrico y antisimétrico.

Se tendrán así tres grupos de preordenes:

I.- Preordenes no necesariamente simétricos o antisimétricos. Como casos particulares consideraremos los:

- PREORDENES COMPLETOS y
- PREORDENES TOTALES,

cuyas definiciones resultan de unir, respectivamente, la definición de preorden con las ya conocidas (pag. 30) de hipergrafos completos e hipergrafos totales.

Dentro, también, de este grupo consideraremos los T- PREORDENES, entendiendo por tales aquello hipergrafos que son, simultaneamente, T-1 y reflexivos.

II.- Preordenes simétricos:

Recibirán el nombre generico de EQUIVALENCIAS, y entre los cuales distinguiremos:

- CLANES ; que son preordenes completos y simétricos.
- CLANES TOTALES: preordenes totales y simétricos.

Obviamente, no existe más que un solo clan total que tenga un número determinado de vértices,k, y, sigue facilmente, su rango es igual a tal número k.

- T-CLANES : son t-preórdenes completos y simétricos.

Se verifica que todo clan total es un t-clan y que todo t-clan es un clán. Ninguno de los recíprocos es cierto.

III.- Preórdenes antisimétricos:

Recibirán el nombre genérico de ORDENES y se distinguirán los:

- ORDENES PARCIALES: Preórdenes antisimétricos no completos.
- ORDENES TOTALES: Dentro de los cuales distinguiremos los:
    - ORDENES TOTALES COMPLETOS: Preórdenes antisimétricos completos.
    - ORDENES DOBLEMENTE TOTALES: Preórdenes antisimétricos totales.
- T-ORDENES: t-preórdenes antisimétricos.

Es fácil verificar que todo orden total es un t-orden.

CLASE DE EQUIVALENCIA Y CONJUNTO COCIENTE.-

Hemos designado, por definición, con la palabra EQUIVALENCIA a aquellos hipergrafos, (y, por extensión, aquellas relaciones y aplicaciones multiunívocas), que poseen las tres propiedades:

- reflexiva
- simétrica
- transitiva

Enunciaremos, sin demostración, la siguiente:

Proposición:

" Toda equivalencia define una partición sobre el conjunto X en el que está definida y , recíprocamente, toda partición define una equivalencia".

Tal partición puede venir definida como una yuxtaposición de clanes.

Cada una de las partes se denominará CLASE DE EQUIVALENCIA , y al conjunto de todas ellas CONJUNTO COCIENTE.

III.- CONEXION

COMPONENTE CONEXA DE UN HIPERGRAFO.-

Sobre el conjunto X de los vértices de un hipergrafo, H = (X,E), vamos a establecer la siguiente equivalencia definida por la relación :

" Todos los elementos de X están relacionados consigo mismos y dos elementos distintos cualesquiera, x_i y x_j, de X, están relacionados si, y solo si, existe una cadena que partiendo de x_i termina en x_j".

Tal relación es, en efecto, de equivalencia e induce, sobre el conjunto X, una partición en clases. Cada una de tales clases se denominará COMPONENTE CONEXA del hipergrafo H.

Nótese que si un elemento no es extremidad de ningún arco, esto es, no es vértice terminal, él mismo constituye una componente conexa.

Así, por ejemplo, dado elhhipergrafo $H = (X,E)$, con

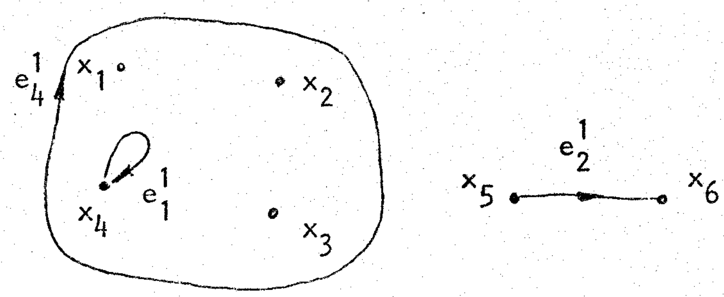
$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

y $$E = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$$

donde $E_1 = \{e_1^1\}$, $E_2 = \{e_2^1\}$, $E_3 = \emptyset$, $E_4 = \{e_4^1\}$

siendo $e_1^1 = (x_3)$, $e_2^1 = (x_5, x_6)$, $e_4^1 = (x_1, x_2, x_4, x_3)$

cuya representación planaria es la siguiente:



posee como componentes conexas las que siguen:

$$C_1 = \{x_2\} \ , \ C_2 = \{x_3\} \ , \ C_3 = \{x_1, x_4\} \ , \ C_4 = \{x_5, x_6\}.$$

HIPERGRAFO CONEXO.-

Es aquel tal que, para todo par x_i, x_j, de vértices distintos, existe una cadena $\mu[x_i, x_j]$, que los une.

De la definición sigue, inmediatamente, que un hipergrafo conexo no posee vértices aislados. El recíproco, ciertamente, no se verifica.

Definición equivalente a la dada sería decir que un hipergrafo conexo es aquel cuyo número de componentes conexas es igual a la unidad.

CLASES SIMPLEMENTE Y FUERTEMENTE CONEXAS.-

Dado el hipergrafo $H = (X,E)$ consideremos las relaciones binarias R_s y R_f, definidas sobre el conjunto X de los vértices de H, por:

$x_i \; R_s \; x_j$ si, y solo si, existe una cadena en $(H)_2$ tal que x_i y x_j son coordenadas de arcos de dicha cadena, o si $x_i = x_j$.

$x_i \; R_f \; x_j$ si, y solo si, existe un circuito en $(H)_2$ tal que x_i y x_j son coordenadas de arcos de dicho circuito, o si $x_i = x_j$.

Estas dos relaciones se denominan, respectivamente, de CONEXION SIMPLE y de CONEXION FUERTE.

Poe definición, ambas relaciones son reflexivas y simétricas. No es dificil demostrar que tambien son transitivas. Por consiguiente ambas eelaciones son de equivalencia e inducen, cada una de ellas, una partición de X.

Lax clases de X/R_s se denominan CLASES SIMPLEMENTE CONEXAS ó abreviadamente, CLASES s-CONEXAS, y las clases del conjunto cociente X / R_f, CLASES FUERTEMENTE CONEXAS ó f-CONEXAS.

Un hipergrafo que posee solo una clase s-conexa se denominará HIPERGRAFO s-CONEXO. De la misma forma, se denominará HIPERGRAFO f-CONEXO aquel que posee una sola clase f-conexa.

Se comprueba, de manera sencilla, las siguientes proposiciones:

1.- Si S_1 es una clase s-conexa que contiene una coordena da de un arco $e_j^i \in E_j$, entonces S_1 contiene completamente a e_j^i.

2.- Dos vértices pertenecientes a dos clases s-conexas distintas no pueden ser, nunca, adyacentes.

3.- Un hipergrafo completo es " a fortiori " s-conèxo.

4.- El subhipergrafo constituido por una clase f-conexa, cualquiera, es s-conexo.

5.- En un hipergrafo simétrico el subhipergrafo constituido por una clase s-conexa es f-conexo.

6.- El número, p_s, de clases s-conexas es menor o igual que el número de componentes conexas menos el número de vértices aislados.

7.- Si $H = (X,E)$ es el hipergrafo matriz de un esquema ambas definiciones, clase s-conexa y clase f-conexa, coinciden, y son igua a la definición de componente conexa que dimos anteriormente.

En lo que sigue, mientras no se advierta lo contrario, nos referiremos, unicamente, a 1-hipergrafos.

TEOREMA 2.-

" Un hipergrafo uniforme, $H = (X,E)$, de orden y rango iguales a h, es conexo y sin ciclos si, y so lo si, posee h-1 arcos con extremidades distintas dos a dos ".

Demostración:

Puesto que H es uniforme se tendrá $E = \{E_h\}$. Definamos, a continuación, sobre el conjunto X, el grafo

$$G = (X, F)$$

donde,

$$F = \{F_1, F_2\}$$

siendo

$$F_1 = \{f_1^i = (x_j) \quad \text{si } x_j \text{ es un vértice aislado}\}$$

$$F_2 = \{f_2^i = (x_j, x_k) \;/\; e_h^s = (x_j, \overset{h}{\ldots}, x_k) \in E_h\}$$

Para que G sea conexo y sin ciclos es condición necesaria y suficiente (*) que el número de arcos de dimensión 2 sea igual al orden de X menos una unidad; esto es, sea igual a h-1.

Se verifica, además, que todo ciclo de G induce un ciclo en H, y recíprocamente; y, de la misma forma, toda componente conexa de G es componente conexa de H, y viceversa.

De lo anterior, y de ser

$$[F_2] = [E_h]$$

se sigue el teorema.

(*) Vease C. Berge (3) Cap. III.

COROLARIO.-

" Dado un hipergrafo $H = (X,E)$, el hipergrafo parcial generado por una clase isótopa, ε_s^i, es conexo y sin ciclos si, y solo si, las extremidades de los arcos de ε_s^i son, dos a dos, distintas, y

$$[\varepsilon_s^i] = s - 1 \quad ".$$

TEOREMA 3.-

" Dado el 1-hipergrafo $H = (X,E)$, de rango h, una condición necesaria para que H carezca de ciclos es que se verifique, para todo arco $e_s^i \in E_s$, con $s \leq h$, que

$$[\varepsilon_s^i] < s \quad ".$$

Demostración:

Fijado el arco e_s^i, consideremos el grafo bipartido siguiente, $G = (X_1, X_2; F)$, donde: X_1 es el conjunto base del arco e_s^i, X_2 un conjunto de $[\varepsilon_s^i]$ puntos representando los arcos isótopos al e_s^i, y F está formado por el conjunto de arcos, $\{f_2^i\}$, tales que unen el vértice x_k y el punto representativo de e_s^j si, y solo si, x_k es una extremiadad del arco e_s^j.

Nótese que, por ser G un grafo, no necesariamente se ha de verificar que $\bigcup_i \{f_2^i\} = X$.

El grafo bipartido G tiene $s + [\varepsilon_s^i]$ vértices, y $2 \cdot [\varepsilon_s^i]$ arcos. Sea p el número de sus componentes conexas. Si H carece de ciclos se implicará que G ha de carecer de ellos, y, por consiguiente, se ha de verificar que su número ciclomático (*) es nulo; esto es,

$$\nu(G) = 2\left[\varepsilon_s^i\right] - s - \left[\varepsilon_s^i\right] - p = 0$$

de donde

$$\left[\varepsilon_s^i\right] = s - p < s.$$

Puesto que e_s^i es arbitrario se sigue el teorema.

El siguiente teorema proporciona una solución al problema fundamental de encontrar una condición necesaria y suficiente para que un hipergrafo, sin ninguna limitación, carezca de ciclos, condición ésta que resulta esencial para el estudio de los hiperarboles, estructura en la que, en la actualidad, trabajamos.

TEOREMA 4.-

" Si $H = (X,E)$ es un hipergrafo con n vértices, m arcos y p componentes conexas, no tiene ciclos si, y solo si, se verifica:

$$m = n - p \quad ".$$

Demostración:

Consideremos el grafo bipartido $G(H) = (X_1, X_2; F)$, análogo al utilizado en el teorema anterior, donde X_1 es el con-

(*) Vease C.Berge: (3) pag.11.

junto representativo de los n vértices de H, X_2 el conjunto de puntos representativos de los m arcos de E, y F es la familia constituida por los arcos obtenidos uniendo los puntos representativos de x_i y e_j^k si, y solo si, x_i es una extremidad del arco e_j^k.

El grafo G(H) admite p_T componentes conexas, m+n vértices y 2m arcos. Ya que todo ciclo de H induce un ciclo en G(H) y recíprocamente, se tendrá que H no tendrá ciclos si, y solo si, G(H) carece de ellos, esto es, si se verifica que

$\nu(G(H))$ = nº arcos - nº vért. + nº comp. conex. de G(H) = 0,

que, en nuestro caso, equivale a verificarse que

$$2\,m = (m + n) - p_T.$$

Ahora bien, de la relación existente entre el hipergrafo H y el grafo bipartido G(H), se deduce que el número de componentes conexas de ambos son iguales,con lo cual, operando se llega a la igualdad

$$m = n - p$$

que pretendíamos demostrar.

Observación.-

Nótese que,si hubiesemos asignado al hipergrafo H un grafo bipartido G(H) análogo al utilizado (*) para esquemas ,-(est es, representando por puntos los vértices y los arcos de H y uniendo el punto representativo de un vértice x_i con el que representa un arco e_j^k si, y solo si, x_i es una coor-

(*) Vease C.Berge (3) pag 376 pp. 4.

denada de $e_j^k)$", llegaríamos a una condición suficiente para que un hipergrafo carezca de ciclos; ésta es que sea

$$\sum_{s,i} (|\{e_s^i\}| - 1) = n - p ,$$

que es semejante a la condición necesaria y suficiente para que un esquema carezca de ciclos. En nustro caso, si prescindimos de la orientación del hipergrafo, la condición de Berge se obtendría como una particularización de ésta.

TEOREMA 5.-

" Si $H = (X,E)$ es un hipergrafo con n vértices, m arcos y p componentes conexas, admite un ciclo único si, y solo si, se verifica,

$$m = n - p + 1 \qquad ".$$

Demostración:

Dado que el grafo bipartido $G(H)$, definido en el teorema anterior, y el hipergrafo H tienen el mismo número de ciclos, el número de ciclos de H será la unidad si, y solo si, el de $G(H)$ lo es. Si ello ocurre se tendrá que el número ciclomático $\nu(G(H))$ será igual a 1; y de aquí,

$$1 = 2m - (n + m) + p_T.$$

Teniendo en cuenta, como en el teorema anterior, que p_T es igual a p, se llega a la expresión

$$m = n - p + 1.$$

<u>Observación.-</u>

Siguiendo un razonamiento análogo al dado en la observación del teorema 4 se llegará que la condición suficiente - para que H tenga un ciclo es que

$$\sum_{s,i} \left(\left[\{e_s^i\}\right] - 1 \right) = n - p + 1.$$

Las mismas consideraciones que allí hicemos son válidas en este caso.

Proposición.-

" Se verifica, para un hipergrafo de n vértices, T vértices terminales y p_s clases s-conexas, que

$$n - p \leqslant T - p_s ,$$

siendo p el número de componentes conexas ".

En efecto, de la proposición 6, pag.53,

$$p_s \leqslant p - A \qquad (A = n^{\underline{o}} \text{ vért. aislados}).$$

Por otro lado, ya que

$$T = n - A$$

sigue, fácilmente, la proposición enunciada.

Como consecuencia de la anterior proposición podremos e- nunciar estos dos corolarios de los teoremas 4 y 5, respectivamente.

COROLARIO 4-1.-

" Una condición necesaria para que un hipergrafo, con T vértices terminales, m arcos y p_s clases s-conexas, no tenga ciclos es que se verifique,

$$m \leqslant T - p_s \qquad ".$$

COROLARIO 5-1 .-

" Una condición necesaria para que un hipergrafo, con T vértices terminales, m arcos y p_s clases s-conexas, posea un ciclo y solo uno, es que se verifique,

$$m \leq T - p_s + 1 \quad ".$$

TEOREMA 6.-

" Dado un hipergrafo $H = (X,E)$ de n vértices, m arcos y p componentes conexas, se verifica

$$m \geq n - p \qquad (\forall\ n \geq 2) \quad ".$$

Demostración:

Operaremos por inducción sobre el número de arcos.

Si $m = 1$, se tiene que $p = n-1$ y, obviamente, se verifica:

$$1 \geq n - (n-1) = 1.$$

Supongamos que se verifica, para un hipergrafo que posea m-1 arcos, la desigualdad

$$m - 1 \geq n - p. \qquad (1)$$

Si añadimos un arco, el número de componentes conexas, p_1, será:

- Igual a o si el par de vértices terminales relacionados por el nuevo arco ya lo estaban anteriormente.
- Igual a p-1 en otro caso.

Si ocurre la primera de las hipótesis anteriores se tendrá que, siendo cierta (1) , con mayor razón será

$$m \geqslant n-p = n - p_1.$$

Análogamente, si se verifica la segunda hipótesis, se --
tendrá que, siendo cierta (1), la desigualdad

$$m \geqslant n-p+1 = n - (p-1) = n - p_1,$$

tambien será cierta.

En ambos casos queda demostrado el teorema.

COLORARIO.-

" Dado un hipergrafo H de n vértices, m arcos y p componentes conexas, que posea algún ciclo, se tendrá:

$$m > n - p \text{"}$$

Se deduce, inmediatamente, de los teoremas 4 y 6.

TEOREMA 7.-

" Si $H = (X,E)$ es un hipergrafo con

$$E = \{ e^i \;/\; i \in I\},$$

(donde se han numerado todos los arcos de la familia E, y se ha designado por I el conjunto de los superíndices obtenidos de esta manera), no tiene ciclos si se verifica, para todo $J \subset I$, $(J \neq \emptyset)$, que

$$\left[\bigcup_{i \in J} \{e^i\} \right] > \sum_{i \in J} ([\{e^i\}] - 1) \text{".}$$

Demostración:

En efecto, si H admite un ciclo

$$\sigma = e^1, \ldots, e^q, \ (e^1),$$

sea e^i el arco de extremidades x_i, x_{i+1}. Haciendo, entonces,

$$Q = \{1, 2, \ldots, q\}$$

se obtiene,

$$\left[\bigcup_{i \in Q} \{e^i\}\right] = \left[\bigcup_{i \in Q} (\{e^i\} - \{x_i\})\right] \leq \sum_{i \in Q} \left[\{e^i\} - \{x_i\}\right] =$$

$$= \sum_{i \in Q} \left[\{e^i\}\right] - \left[\{e^i\} \cap \{x_i\}\right] = \sum_{i \in Q} \left(\left[\{e^i\}\right] - 1\right).$$

y la condición del enunciado no se verifica.

LEMA 1.-

" El número de ciclos de longitud k, t_k, de un clan (*) de orden n, viene dado por

$$t_k = 1/2 \ C_{n,k} \ P_{k-1} \quad ".$$

Demostración:

Este teorema pertenece a la teoría de grafos. En dicha teoría existe un método de enumeración de ciclos (**), pero no un método, o fórmula, que de directamente el número de ciclos de una determinada longitud. Tal problema se soluciona mediante este teorema, que nosotros utilizaremos como lema previo al teorema 8.

(*) C. Berge (1)

(**) A. Kauffman y D. Coster (16)

El primer término del producto, las combinaciones de n elementos, tomados de k en k, $C_{n,k}$, nos da los agrupamientos distintos que podemos efectuar con los n vértices del clan, en grupos de k elementos.

El problema se reduce, pues, a considerar, dentro de cada agrupamiento, cuantos ciclos, de longitud k, podemos definir sobre tales k vértices, $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Podemos tomar como origenes de los ciclos un vértice cualquiera, para fijar ideas, por ejemplo, el x_1, sin ninguna perdida de generalidad, y escribir los ciclos en la forma

$$\mu[x_1, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, x_1]$$

(Notese que en teoría de grafos tal sucesión define univocamente el ciclo. No así en la nuestra.)

El número de ciclos sería, pues, en una primera aproximación, igual al número de permutaciones definidas sobre estos k-1 vértices, $x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$. Ahora bien, según este criterio, resultarían ciclos cuya única diferencia radicaría en el sentido de recorrido; de aquí el factor 1/2 que figura en nuestra fórmula.

Notemos que P_{k-1} es, precisamente, el número de permutaciones circulares sin repetición de k elementos.

Ejemplo:

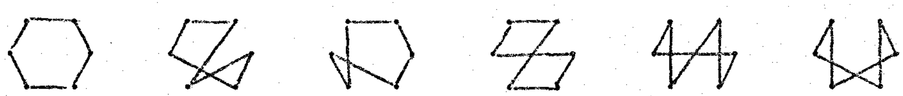
Puede tener interés en la teoría de grafos, aparte de la comprobación que supone de nuestro teorema, enumerar los distintos modelos de ciclos de longitudes 5, 6 y 7, que se pue den former sobre clanes de órdenes 5,6,y 7, respectivamente.

- Para k = 5, y n = 5, se tienen los siguientes modelos, (debajo de cada uno de ellos figura el número de veces que se repite en otras posiciones distintas).

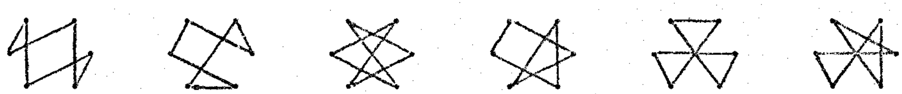
1 5 5 1

Como se comprueba , 12 = $1/2\ P_{5-1}$.

- Para k = 6 y n=6, se tienen los siguientes modelos:



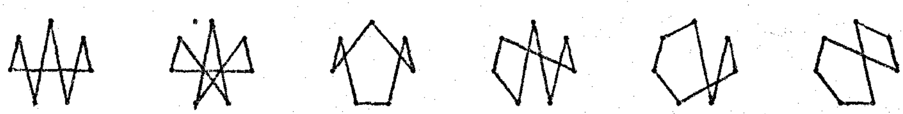
1 12 6 3 6 6



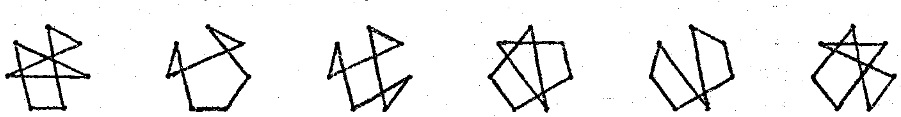
3 6 3 6 2 6

Como en el caso anterior, comprobamos: 60 = $1/2\ P_{6-1}$.

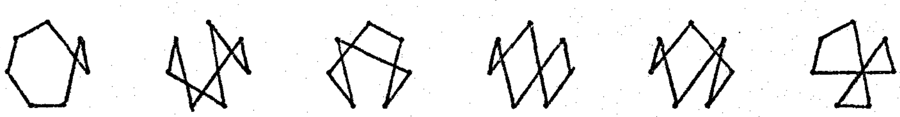
- Para k = 7 y n = 7, se tienen los siguientes modelos:



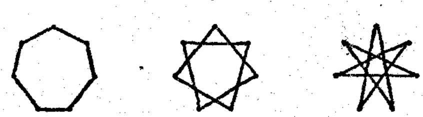
7 7 7 14 14 7



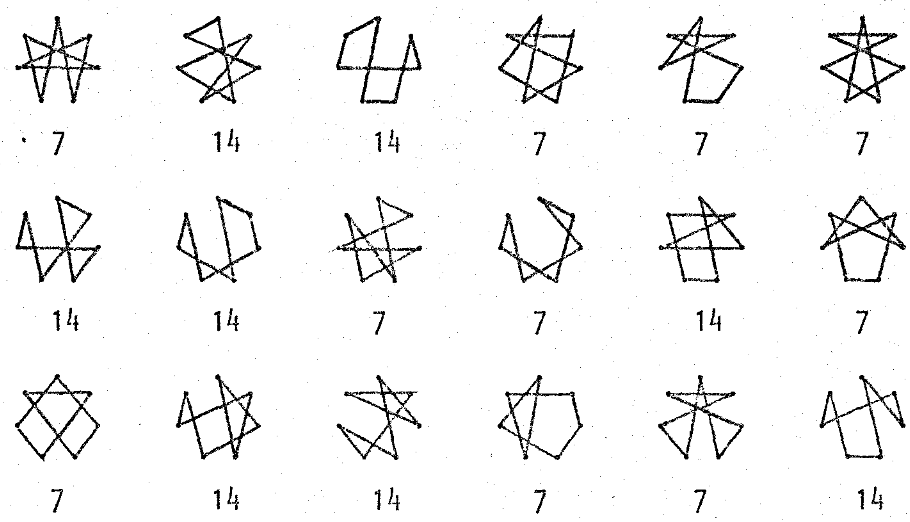
14 7 7 7 7 14



7 14 14 7 14 7



1 1 1



Análogamente, comprobamos que $360 = 1/2\ P_{7-1}$.

Sea el hipergrafo $H = (X,E)$ y sea e_s^i un arco cualquiera de E_s. Consideremos la clase isótopa a e_s^i, ε_s^i. (No es difícil demostrar que la relación isotopía es una relación de equivalencia e induce una partición en E). Consideremos el hipergrafo parcial

$$H_{\varepsilon_s^i} = (X_{\varepsilon_s^i} , \varepsilon_s^i)$$

Obviamente, podemos considerar que H es la unión de todos estos hipergrafos parciales y escribir

$$H = \bigcup_{i,s} H_{\varepsilon_s^i}$$

o bien, identificando ε_s^i y $H_{\varepsilon_s^i}$, escribir, menos precisamente

$$H = \bigcup_{i,s} \varepsilon_s^i$$

Notaremos por

$$\nu_k(\varepsilon_s^i)$$

el número de ciclos de longitud k del hipergrafo parcial generado por la clase isótopa ε_s^i .

Facilmente, se tendrá la siguiente

Proposición.-

" El número de ciclos, de longitud k, de un hipergrafo H es menor o igual que la suma del número de ciclos, de la misma longitud, de los hipergrafos parciales generados por cada una de las distintas clases isótopas de H. Esto es,

$$\nu_k(H) \leq \sum_{i,s} \nu(H_{\varepsilon_s^i}) \qquad \forall\ k \quad ".$$

El siguiente teorema proporciona una cota para para el número de ciclos de cada uno de los hipergrafos parciales generados por las distintas clases isótopas.

TEOREMA 8.-

" Dado el hipergrafo H = (X,E), para cada una de las clases isótopas, ε_s^i, se tendrá

$$\nu_k(\varepsilon_s^i) \leq t_k\ C_{p,k}$$

siendo t_k el número de ciclos, de longitud k, que existen en un clan de orden s, $C_{p,k}$ el número de -- combinaciones de p elementos tomados de k en k, y $p = 2\ (s-2)!$."

Demostración:

Sea

$$\varepsilon_s^i = \{e_s^1,\ e_s^2,\dots,e_s^q\}$$

donde $q = \varepsilon_s^i$.

Asociemos a la clase isótopa ε_s^i el grafo $G = (B,F)$, siendo B el conjunto base de un arco cualquiera de la clase ε_s^i y F la familia de arcos tales que $(x_i,x_j) \in F$ si, y solo si, x_i y x_j son, respectivamente, las extremidades inicial y final de algún arco de la clase ε_s^i.

El número de arcos de G será, evidentemente, igual a q.

A todo ciclo del grafo G le corresponderá un ciclo en el hipergrafo parcial generado por la clase isótopa ε_s^i , y recíprocamente. Esto es, se verificará

$$\nu_k(H_{\varepsilon_s^i}) = \nu_k(G) \qquad , \quad \forall\ k \quad , \tag{1}$$

Por otro lado, el grafo $G = (B,F)$ es un grafo parcial del p-grafo $G_p = (B,F')$ correspondiente al hipergrafo matriz del esquema generado por $H_{\varepsilon_s^i}$. En él se tendrá $[\varepsilon_s^i] = s!$.

El valor de p en tal p-grafo, esto es, el número máximo de arcos que unen dos vértices cualesquiera será : teniendo en cuenta que, debido a la forma en que hemos construido G_p, --

(simétrico y completo), el número de arcos que unen dos vértices cualesquiera es el mismo en todos los casos,

$$p = \frac{\text{número de arcos de } G_p}{\text{nº pares distintos de vértices}}$$

esto es:

$$p = \frac{s!}{s\ (s-1)/\ 2} = 2\ (s-2)!$$

Considere-os, a continuación, el clan, de orden s, asociado al p-grafo G_p, sustituyendo los p arcos existentes entre dos cualesquiera de sus vértices por una arista. Si llamamos, ahora, t_k (lema 1) al número de ciclos, de longitud k, (k>2), y t_2 al número de diagonales,se tendrá que el número de ciclos , de longitud k, que podemos definir sobre G_p es igual a:

$$t_k \quad C_{p,k}.$$

Teniendo en cuenta que todo ciclo de G es un ciclo de G_p, (pero no recíprocamente),esto es,

$$\nu_k(G) < \nu_k(G_p) \qquad , \quad \forall\ k \quad ,$$

y puesto que, según (1), se tiene

$$\nu_k(H_{\varepsilon_s^i}) \leq \nu_k(G)$$

se llega, finalmente, a la expresión

$$\nu_k(H_{\varepsilon_s^i}) \leq \nu_k(G)$$

o bien, abusando del lenguage, como ya se hiciera anteriormente, se tendrá la desigualdad del enunciado.

TEOREMA 9.-

" Sea $H = (X,E)$ el hipergrafo matriz de un esquema, con n vértices, m arcos y p componentes conexas. Sea

$$\varepsilon = \{\varepsilon_{s_1}^{i_1}, \varepsilon_{s_2}^{i_2}, \ldots, \varepsilon_{s_t}^{i_t}\}$$

el conjunto de sus t clases isótopas distintas.

El hipergrafo H carecerá de ciclos anisótopos si, y solo si,

$$\sum_{j=1}^{t} (s_j - 1) = n - p \quad ".$$

Demostración:

Consideremos el grafo bipartido

$$G(H) = (X_1, X_2; F),$$

siendo: X_1 el conjunto de puntos representativos de los n vértices de H, X_2 el conjunto de puntos representativos de ε, y F el conjunto de arcos,distintos, tales que $(x_k, \varepsilon_{s_j}^{i_j}) \in F$ si, y solo si, existe un arco, perteneciente a la clase isótopa $\varepsilon_{s_j}^{i_j}$, cuyo conjunto base contenga a x_k.

El grafo G(H) admite p componentes conexas, t+n vértices y $\sum_{j=1}^{t} s_j$ aristas.

El hipergrafo H no tendrá ciclos si, y solo si, G(H) care ce de ellos, para lo cual G(H) ha de ser un bosque y verificar, por tanto,

$$\sum_{j=1}^{t} s_j = (t+n)-p.$$

De donde,

$$\sum_{j=1}^{t} (s_j-1) = n - p.$$

COROLARIO.-

" Una condición suficiente para que un hipergrafo H = (X,E), de n vértices, m arcos, p componentes conexas y t clases isótopas distintas, no tenga ciclos anisótopos es que se verifique,

$$\sum_{j=1}^{t} (s_j - 1) = n - p \qquad ".$$

Demostración:

En efecto, basta ver que el hipergrafo H carecerá de ciclos si carece de ellos el hipergrafo matriz correspondiente al esquema generado por H, para lo cual es suficiente -- que se verifique la igualdad dada por el teorema.

ARCOS DISTINGUIDOS.-

Dado un hipergrafo H = (X,E), definiremos el CONJUNTO DE ARCOS DISTINGUIDOS como el subconjunto de los arcos de H tales que dos cualesquiera de ellos tiene distintas al menos una de sus extremidades.

El siguiente teorema proporciona un criterio para saber el número de arcos distinguidos que posee un hipergrafo sujeto a determinadas hipótesis restrictivas.

TEOREMA 10.-

" Si un hipergrafo $H = (X,E)$, de n vértices, m arcos y p componentes conexas, verifica:

1.- $\nu_k(H) = 0 \quad , \forall\ k \geq 3.$

2.- $E_1 = \emptyset$

3.- $[\{e_i^h\} \cap \{e_j^k\}] \leq 2 \quad , \forall\ e_i^h , e_j^k$ de H.

entonces, se tendrá que

$$d = n - p$$

siendo d el orden del conjunto de arcos distinguidos de H ".

Demostración:

1.- No existen arcos isótopos de orden mayor que 2.

En efecto, puesto que, en otro caso no se verificaría la hipótesis 3.

2.- Consideremos, a continuación, el grafo bipartido $G(H) = (X_1, X_2; F)$ siendo: X_1 el conjunto de puntos representativos de los n vértices de H, X_2 el conjunto de puntos representativos de los d arcos distinguidos de H, y F el conjunto de arcos tales que tales que unen un punto de X_1 con otro de X_2 si, y sòlo si, el primero de ellos es una coordenada (en H) perteneciente al conjunto base del segundo.

El grafo G(H) posee 2d arcos, d+n vértices y p_T componentes conexas.

El grafo G(H) carecerá de ciclos. En efecto, si los poseyera, serían de la forma:

$$(x_1, e^1, x_2, e^2, \ldots, x_q, e^q, x_1)$$

- Si q es mayor que 2, implicaría que existe un ciclo de -- longitud mayor que 2 en H, contra la hipótesis 1.
- Si q es igual a 2 implicaría que e^1 y e^2 tendrían las mismas extremidades y no serían arcos distinguidos.

El grafo G(H) verifica, entonces, que

$$\nu(G(H)) = 0$$

o lo que es lo mismo

$$2d - (n + d) + p_T = 0.$$

Ahora bien, puesto que el número de componentes conexas de G(H) es igual al número de eopmponentes conexas de H, debido a la forma en que construimos G(H), se tendrá, finalmente, la igualdad

$$d = n - p$$

que pretendíamos demostrar.

CAPITULO III :

ESTUDIO VECTORIAL DE CICLOS Y COCICLOS

CAPITULO III :

ESTUDIO VECTORIAL DE CICLOS Y COCICLOS

Si, en el capítulo anterior, dimos las definiciones y teoremas básicos relativos a los ciclos, vamos, en éste, a iniciar un estudio vectorial de ellos; al mismo tiempo, y de manera análoga, se desarrollará el estudio de los cociclos y las relaciones entre ciclos y cociclos.

FORMA VECTORIAL DE UN CICLO.-

Consideremos fijado:

1º .- Una orientación para el conjunto de los arcos de un hipergrafo $H = (X,E)$, y sea

$$E = \{e^1, e^2, \ldots, e^m\} \quad .$$

2º .- Un sentido de recorrido para un ciclo dado, μ, designandose por μ^+ el conjunto de arcos orientados en dicho sentido y por μ^- el conjunto de los restantes arcos.

Entonces, con las condiciones 1º y 2º, se puede hacer corresponder a todo ciclo μ, en el que se haya fijado un sentido de recorrido, un vector

$$\vec{\mu} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$$

con

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & \text{si } e^i \notin \mu^+ \cup \mu^- \text{, esto es, si el arco } e^i \text{ no se utiliza.} \\ +1 & \text{si } e^i \in \mu^+ \\ -1 & \text{si } e^i \in \mu^- \end{cases}$$

En lo que sigue, un ciclo, con un sentido de recorrido, se identificará con el vector $\vec{\mu}$ que define; y cuando se diga que un ciclo $\vec{\mu}$ es SUMA de los ciclos $\vec{\mu}_1$ y $\vec{\mu}_2$ se entenderá que se trata de la suma vectorial correspondiente.

Nótese que para que la suma tenga sentido, el resultado ha de ser un ciclo.

Proposición 1.-

" Todo ciclo es suma de ciclos elementales sin arcos comunes ".

En efecto, basta definir, al ir recorriendo $\vec{\mu}$, un ciclo elemental cada vez que se llegue a un vértice (terminal) de enlace ya utilizado anteriormente.

La proposición se pude, como es lógico, particularizar - para el caso de ciclos anisótopos.

COCICLO.-

Dado un hipergrafo, $H = (X,E)$, y un subconjunto B de X, recordemos, designábamos por $\omega^+(B)$ y $\omega^-(B)$ los conjuntos de arcos incidentes con B hacia el exterior y hacia el interior, respectivamente, y por

$$\omega(B) = \omega^+(B) \cup \omega^-(B)$$

al conjunto de arcos tales que una de sus extremidades pertenece a B y la otra a $X - B$.

Un COCICLO es, por definición, un conjunto no vacio de - arcos de la forma $\omega(B)$ y dividido en dos clases $\omega^+(B)$ y $\omega^-(B)$.

Si $\omega(B)$ es igual al vacio, tal conjunto se denominará -- COCICLO IMPROPIO.

Si, como antes, suponemos que los arcos de H estan ordenados, podemos hacer corresponder a todo cociclo $\omega(B)$, un - vector

$$\vec{\omega} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$$

con

$$\beta_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad e^i \notin \omega(B) \\ +1 & \text{si} \quad e^i \in \omega^+(B) \\ -1 & \text{si} \quad e^i \in \omega^-(B) \end{cases}$$

En lo que sigue se identificará un cociclo con el vector que se le asočia.

Prposición 2.-

" Si A es el conjunto de vértices aislados de un hipergrafo, se tendrá que para cualquier subconjunto B de A, el conjunto de arcos $\omega(B)$ será - un cociclo impropio".

COCICLO ELEMENTAL.-

Un cociclo, $\omega(B_1)$, se dice ELEMENTAL si está constituido por el conjunto de arcos que unen entre sí dos subhipergrafos H_{B_1} y H_{B_2} generados por dos subconjuntos B_1 y B_2 de X tales que

$$1.- \quad B_1, B_2 \neq \emptyset$$

$$2.- \quad B_1 \cap B_2 = \emptyset$$

$$3.- \quad B_1 \cup B_2 \subset C$$

siendo C una componente conexa del hipergrafo H.

Obviamente, si $\vec{\omega}(B)$ es un cociclo elemental $B \cap A = \emptyset$.

COCICLO s-ELEMENTAL.-

Si, en la definición anterior, sustituimos la condición 3 por la

$$3'.- \quad B_1 \cup B_2 \subset CL$$

siendo CL una clase s-conexa del hipergrafo H, el cociclo se dirá s-ELEMENTAL.

Proposición 3 .-

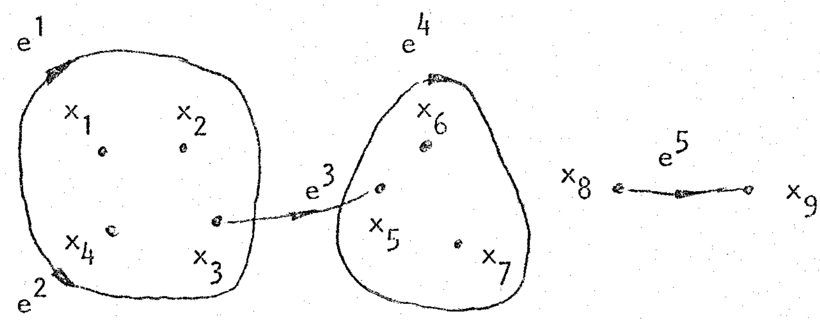
" Todo cociclo elemental es s-elemental".

. En efecto, ya que si se verifica la condición 3 tambien se verificará la 3'.

El recíproco no es cierto.

Ejemplo:

Dado el hipergrafo de representación planaria



se tendrá, por ejemplo,

$$\vec{\omega}(B_1) = \vec{\omega}(\{ x_1,x_4\}) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\vec{\omega}(B_2) = \vec{\omega}(\{x_1\}) = (1,-1, 0, 0, 0)$$

$$\vec{\omega}(B_3) = \vec{\omega}(\{x_1,x_2,x_3\}) = (1,-1, 1, 0, 0)$$

$$\vec{\omega}(B_4) = \vec{\omega}(\{x_3,x_8\}) = (0, 0, 1, 0, 1)$$

Así pues,

- $\vec{\omega}(B_1)$ es un cociclo impropio.
- $\vec{\omega}(B_2)$ une los conjuntos B_2 y $\{x_2\}$ y es, por tanto, un cociclo elemental y, consecuentemente, s-elemental.
- $\vec{\omega}(B_3)$ une B_3 con el conjunto $\{x_4,x_5\}$ y es, por tanto, un cociclo s-elemental, pero no elemental.

-

- $\vec{\omega}(B_4)$ une B_4 con el conjunto $\{x_5, x_9\}$ y es un cociclo que no es elemental ni s-elemental.

COCIRCUITO.-

Un cociclo $\omega(B)$ en el cual uno de los conjuntos, $\omega^+(B)$ ó $\omega^-(B)$, es vacio se denomina COCIRCUITO.

Esto es, un cocircuito es un cociclo, $\omega(B)$, en el cual los arcos están orientados en el mismo sentido: bien sea hacia el exterior, bien hacia el interior de B.

Así, en el ejemplo anterior, el cociclo $\omega(B_4)$ es un cocircuito.

TEOREMA 1.-

" Todo cociclo $\vec{\omega}$ es suma de cociclos elementales sin arcos comunes ".

Demostración:

Sea $\vec{\omega}$ un cociclo de la forma $\vec{\omega}(B)$ y sean $B_1, B_2, \ldots, B_k$ las intersecciones de B con cada una de las componentes conexas de H.

Se tendrá que:

$$\vec{\omega}(B) = \vec{\omega}(B_1) + \vec{\omega}(B_2) + \ldots + \vec{\omega}(B_k)$$

donde hemos prescindido de los cociclos impropios.

Por otra parte, los cociclos $\vec{\omega}(B_i)$, $i = 1, \ldots, k$, son, dos a dos, disjuntos. En efecto: Si tal no ocurriera, entonces, de la existencia de un arco $\dot{e}^h \in \omega(B_i) \cap \omega(B_j)$, $i,j \leq k, i \neq j$, se implicaría que $B_i \cap B_j \neq \emptyset$, en contra de ser B_i y B_j dos componentes conexas distintas.

Sea C_i la componente conexa de H que contiene a B_i. El subhipergrafo generado por $C_i - B_i$ admitirá como componentes conexas las $C_i^1, C_i^2, \ldots, C_i^{h_i}$ y se tendrá (en H), prescindiendo de los cociclos impropios, que

$$\vec{\omega}(B_i) = -\vec{\omega}(C_i^1) - \vec{\omega}(C_i^2) - \ldots - \vec{\omega}(C_i^{h_i})$$

siendo:

1º.- $-\vec{\omega}(C_i^t)$ un cociclo elemental ($\forall\ t \leq h_i$) puesto que, siendo S_i^t el conjunto de vértices que el cociclo pone en comunicación con C_i^t, se tiene que

$$C_i^t \cup S_i^t \subset C_i$$

2º.- La intersección

$$-\vec{\omega}(C_i^p) \cap -\vec{\omega}(C_i^q) = \emptyset \ , \ \forall p,q/\ p,q \leq h_i, p \neq q$$

En suma, podemos escribir

$$\vec{\omega}(B_i) = \sum_{i=1}^{k} -\vec{\omega}(C_i^{h_i})$$

como queríamos demostrar.

COROLARIO.-

" Todo cociclo s-elemental es suma de cociclos elementales sin arcos comunes ".

Ejemplo:

En el hipergrafo del apartado anterior, el cociclo $\vec{\omega}(B_4)$

puede expresarse como

$$\vec{\omega}(B_4) = \vec{\omega}(\{x_3\}) + \vec{\omega}(\{x_8\})$$

En el mismo hipergrafo se tiene

$$\vec{\omega}(\{x_1,x_3,x_6\}) = (1,-1,1,1,0)$$

y se verificará:

$$\vec{\omega}(\{x_1,x_3,x_6\}) = \vec{\omega}(\{x_1,x_4\}) + \vec{\omega}(\{x_3\}) + \vec{\omega}(\{x_6\})$$

Proposición 4.-

" Si $\vec{\omega}(B_1)$ y $\vec{\omega}(B_2)$ son dos cociclos tales que

$$\vec{\omega}(B_1) = \vec{\omega}(B_2)$$

necesariamente ha de verificarse que

$$B_1 - A = B_2 - A \qquad (\text{ A conj. vert. aisl.})$$

El teorema siguiente nos da otra definición de cociclo elemental equivalente a la ya conocida.

TEOREMA 2.-

" Un cociclo es elemental si, y solo si, es un cociclo mínimo. (Es decir, si no puede deducirse otro cociclo de él por supresión de arcos) ".

Demostración:

Sea $\vec{\omega}(B)$ un cociclo mínimo. Existirá un $B_1 \subset X$ tal que

$$\vec{\omega}(B) = \vec{\omega}(B_1)$$

con $B_1 = B - A \quad (B_1 \cap A = \emptyset)$.

El conjunto B_1, por ser $\vec{\omega}(B)$, (y, consecuentemente, $\vec{\omega}(B_1)$), un cociclo mínimo está contenido en una componente conexa C de H.

Sean $B_1, B_2, \dots, B_k$ las componentes conexas del subhipergrafo generado por $C - B$.

Si $k \geq 2$, el vector (en H) $-\vec{\omega}(B_1)$ es un cociclo contenido en $\vec{\omega}(B)$ y distinto de él. Consecuentemente $\vec{\omega}(B)$ no sería mínimo. De aquí el absurdo. Se tiene, pues, $k = 1$ y, por consiguiente, $\vec{\omega}(B)$ es un cociclo elemental.

Recíprocamente, sea $\vec{\omega}$ un cociclo elemental que une dos subconjuntos B_1 y B_2 (no vacios). Ahora bien, si suprimimos algunos arcos de $\vec{\omega}$ (no todos) el hipergrafo generado por $B_1 \cup B_2$ no puede desconectarse (ya que en otro caso no sería $\vec{\omega}$ elemental) y por tanto no se obtiene ningún nuevo cociclo. Se sigue que $\vec{\omega}$ es un cociclo mínimo.

GENERALIZACION DEL LEMA DE LOS ARCOS DE COLORES DE MYNTY.-

Sea un hipergrafo $H = (X,E)$ cuyos arcos se suponen que estan ordenados y coloreados, indistintamente, en rojo, negro o verde, y supongamos que el primero de ellos, e^1, es negro.

En estas condiciones previas se verifica el siguiente:

LEMA.-

" Una, y solo una, de las siguientes proposiciones es válida:

1º .- Pasa, por el arco e^1, un ciclo elemental únicamente rojo y negro, con todos los arcos negros orientados en el mismo sentido.

2º .- Pasa, por el arco e^1, un cociclo elemental únicamente verde y negro ".

Demostración:

Vamos a utilizar un procedimiento de marcaje iterativo de los vértices terminales de H.

Sea

$$e^1 = (x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^r)$$

- Se marca el vértice x_1^r, extremidad final del arco e^1.
- Si x es un vértice ya marcado e y un vértice que no lo está, se marcará en uno de los dos casos siguientes:
  i) Si existe un arco negro cuyas extremidades inicial y final coinciden, respectivamente, con x e y.
  ii) Si existe un arco rojo de extremidades x e y.

Continuaremos este procedimiento de marcaje hasta que no podamos proseguir.

Se pueden producir estos casos:

1.- Se ha marcado el vértice x_1^1.

Los vértices utilizados, sucesivamente, para marcar x_1^1 constituyen un ciclo rojo y negro con todos los arcos negros orientados en el mismo sentido (entonces, no puede existir un cociclo negro en el mismo sentido). Este ciclo es la suma (prop. 1) de ciclos elementales disjuntos. Uno de ellos contiene al arco e^1.

2.- No se ha marcado el vértice x_1^1.

Si B designa el conjunto de todos los vértices marcados, $\vec{\omega}(B)$ no contiene, entonces, más que arcos negros orientados hacia B, o arcos verdes y se tiene un cociclo $\vec{\omega}(B)$, verde y negro, conteniendo el arco e^1, y con todos los arcos negros orientados hacia B, (entonces, no puede existir un ciclo rojo y negro con todos los arcos negros orientados en el mismo sentido).

Este cociclo es la suma (teor. 1) de cociclos elementales sin arcos comunes. Uno de ellos contendrá el arco e^1.

COROLARIO.-

" Todo arco pertenece, bien a un cociclo elemental, bien a un ciclo elemental, pero no a los dos".

En efecto, basta aplicar el lema al hipergrafo dado coloreando todos los arcos de negro.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL.-

Se dirá que los ciclos

$$\mu_1, \mu_2, \quad \cdots \quad , \mu_k$$

son LINEALMENTE DEPENDIENTES si existe una relación vectorial de la forma

$$r_1 \vec{\mu}_1 + \ldots + r_k \vec{\mu}_k = \vec{0}$$

donde los r_i son enteros cualesquiera, no todos nulos.

En caso contrario los ciclos $\mu_1, \ldots, \mu_k$ se diran LINEAL-- MENTE INDEPENDIENTES.

Analogas definiciones son válidas para cociclos.

BASE FUNDAMENTAL.-

Una BASE FUNDAMENTAL DE CICLOS es, por definición, un conjunto

$$\{ \vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2, \ldots, \vec{\mu}_k \}$$

de ciclos elementales independientes, tales que cualquier otro ciclo $\vec{\mu}$, puede ponerse en la forma

$$\vec{\mu} = r_1 \vec{\mu}_1 + \ldots + r_k \vec{\mu}_k$$

con r_i enteros cualesquiera.

El número de ciclos de la base se denominará DIMENSION.

De manera análoga se define BASE FUNDAMENTAL DE COCICLOS.

TEOREMA 3.-

" Sea $H = (X,E)$ un hipergrafo con n vértices,m arcos y p componentes conexas.La dimensión de la base de ciclos es

$$\nu(H) = m - n + p$$

La dimensión de la base de cociclos es

$$\lambda(H) = n - p \text{ ''.}$$

Demostración:

1º .- Existen n-p cociclos elementales independientes.

En efecto, supongamos que el hipergrafo solo posee una componente conexa, (p=1), y formemos n-1 cociclos independientes de la forma iterativa que sigue:

- Tomemos un vértice x_1^1 arbitrario y hagamos $B_1 = \{x_1^1\}$. El cociclo $\vec{\omega}(B_1)$ es suma de cociclos elementales (teorema 2).

  Sea e^1 un arco de alguno de estos cociclos elementales y sean x_1^1 y $x_1^{r_1}$ sus extremidades. Se tendrá
  $$x_1^1 \in B_1 \quad y \quad x_1^{r_1} \notin B_1$$
- Hagamos $B_2 = B_1 \cup \{x_1^{r_1}\}$; el cociclo $\vec{\omega}(B_2)$ contiene un cociclo elemental; sea e^2 un arco, de dicho cociclo, de extremidades x_2^1 , $x_2^{r_2}$, con
  $$x_2^1 \in B_2 \quad y \quad x_2^{r_2} \notin B_2$$
- Hagamos $B_3 = B_2 \cup \{x_2^{r_2}\}$ y prosigamos de nuevo.

Al acabar se habrán definido, así, n-1 cociclos elementales. Estos cociclos son independientes ya que, debido a la forma como se han construido, cada uno de ellos contiene un arco que no está contenido en los siguientes.

Si el hipergrafo H no es conexo, sean

$$C_1 , C_2, \ldots, C_p$$

sus componentes conexas.

Supongamos que

$$[C_i] = n_i$$

El número de cociclos elementales independientes que podemos definir sobre cada una de ellas será:

$$(n_1-1) + (n_2-1) + \ldots + (n_p-1) = (n_1+\ldots+n_p) - p =$$
$$= n - p.$$

(No olvidemos que los conjuntos base sobre los que se encuentran definidos los arcos que constituyen estos cociclos no tienen, necesariamente, que estar definidos sobre una única componente conexa).

2º .- Existen $m - n + p$ ciclos elementales independientes.

Consideremos una sucesión de hipergrafos parciales

$$H_1, H_2, \ldots, H_m = H$$

donde el hipergrafo H_i está obtenido a partir del precedente H_{i-1} por adjunción del arco e^i.

Sea

$$e^1 = (x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^{r_1})$$

En un principio el número $\nu(H) = m - n + p$ será:

$$\nu(H) = 1 - r_1 + (r_1-1) = 0$$

Lo cual se seguirá verificando aún en el caso de ser r_1 igual a la unidad, ya que un bucle no se considera un ciclo en nuestra teoría.

- Si al añadir un arco e^i se forma un ciclo $\vec{\mu}_i$ se tiene

$$\nu(H_i) = \nu(H_{i-1}) + 1$$

ya que m aumenta una unidad mientras que n-p permanece igual.

- En caso contrario se tiene

$$\nu(H_i) = \nu(H_{i-1})$$

puesto que m aumenta una unidad y n-p lo hace en la misma - proporción.

Se tienen así, al finalizar este proceso, definidos - - $\nu(H) = m - n + p$ ciclos,

$$\vec{\mu}_{i_1}, \vec{\mu}_{i_2}, \ldots, \vec{\mu}_{i_\nu} \quad .$$

Además, no puede existir una dependencia lineal entre e- llos, ya que si así fuera sería de la forma

$$k_1 \vec{\mu}_{i_1} + \ldots + k_\nu \vec{\mu}_{i_\nu} = \vec{0}$$

con $k_j \neq 0$, relación absurda puesto que el ciclo $\vec{\mu}_{i_j}$ con- tiene el arco e_{i_j} que, debido a la construcción, no figura en los otros ciclos.

Se tienen, pues, $\nu(H)$ ciclos independientes.

3º .- No pueden existir más de $\nu(H)$ ciclos independientes, ni más de $\lambda(H)$ cociclos independientes.

En efecto, sea S el espeacio engendrado por los ciclos y T el engendrado por los cociclos.

Ambos espacios, S y T , será subespacios de R^m.

Si $\vec{\mu}$ es un ciclo y $\vec{\omega} = \vec{\omega}(E)$ un cociclo, su PRODUCTO ESCALAR se definirá:

$$<\vec{\mu}, \vec{\omega}> = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i$$

y es nulo, ya que

$$< \vec{\mu}, \vec{\omega}(B)> = <\vec{\mu}, \sum_{b\in B} \vec{\omega}(b)> = \sum_{b\in B} <\vec{\mu}, \vec{\omega}(b)> = \vec{0}$$

en virtud del corolario del lema de Mynty generalizado.

Se tiene, pues, que S y T son dos subespacios ortogona-- les de R^m, y, por consiguiente, sus dimensiones verifican:

$$\dim. S + \dim. T \leq m$$

Por otra parte, se tiene, a partir de los apartados 1º y 2º anteriores, que

$$\dim. S + \dim. T \geqslant \nu(H) + \lambda(H) = m$$

y de ambas desigualdades se sigue el teorema cuya validez queriamos demostrar.

CAPITULO IV : HIPERGRAFOS CONFORMES

CAPITULO IV :

HIPERGRAFOS CONFORMES.

En este capitulo tratamos de forma breve una clase especial de hipergrafos, los hipergrafos conformes, para lo --- cual, tras algunas definiciones previas, introducimos el -- concepto citado y damos, a continuación, dos condiciones -- necesarias y suficientes para que un hipergrafo sea conforme.

KLAN.-

Llamaremos p-KLAN a un p-grafo completo.

ARCO SECCION.-

Dado el hipergrafo $H = (X,E)$ y un arco cualquiera e_s^i perteneciente a él, llamaremos ARCO SECCION de e_s^i a la 2-sección del hipergrafo parcial generado por la clase isótopa a la que pertenece el arco dado; esto es, la 2-sección,

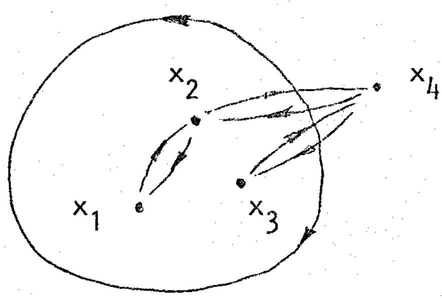
$$S_{\varepsilon_s^i} = (H_{\varepsilon_s^i})_2$$

HIPERGRAFO CONFORME.-

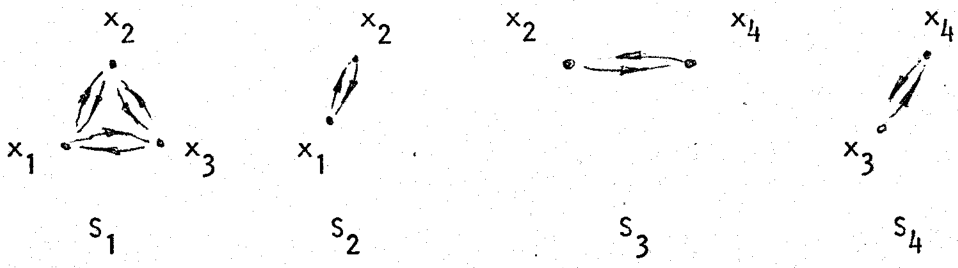
Se dirá que un hipergrafo H = (X,E) es CONFORME si la familia de klanes maximales, $K_{máx}$, de su 2-sección, $(H)_2$, es igual a la familia maximal, S_{max}, de sus arcos secciones.

Ejemplo:

Dado el hipergrafo H = (X,E) , de representación planaria



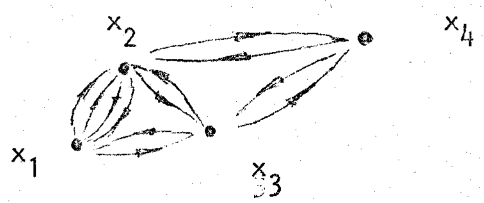
los arcos secciones correspondientes a los hipergrafos parciales generados por cada una de sus clases isótopas, tendrán como representaciones planarias las que siguen:



La familia maximal de arcos secciones sera la:

$$S_{max} = \{S_1, S_3, S_4\}$$

La 2-sección de H, $(H)_2$, será:



y la familia de klanes maximales, K_{max}, será la constituida por los klanes K_1 y K_2 de vértices $\{x_1,x_2,x_3\}$ y $\{x_2,x_3,x_4\}$ respectivamente.

Puesto que

$$S_{max} \neq K_{max}$$

se sigue que H no es un hipergrafo conforme.

Proposición 1.-

" Todo subhipergrafo, de un hipergrafo conforme, es conforme ".

Evidente.

Teorema 1.-

" Un hipergrafo , H = (X,E), es conforme si, y solo si, todo klan de la 2-sección, $(H)_2$, está contenido en un arco sección de H ".

Demostración:

Si H es conforme es evidente que todo klan de la 2-sección

$(H)_2$; está contenido en un klan maximal de $(H)_2$, y por consiguiente, en un arco sección de H.

Demostremos el recíproco.

Si $K_i \in K_{max}$ existe, por hipótesis, un arco sección -- $S_j \in S_{max}$ y un $K_t \in K$, tal que

$$K_i \subset S_j \subset K_t$$

pero,por ser K_i maximal, se implica que $K_i = S_j$, y como -- consecuencia se tiene la inclusión

$$K_{max} \subset S_{max} \qquad (1)$$

Recíprocamente, si $S_i \in S_{max}$, existen, por hipótesis, un $K_j \in K_{max}$, y un $S_t \in S$, tales que

$$S_i \subset K_j \subset S_t$$

Por consiguiente, ya que S_i es maximal, se tiene que -- $S_i = K_j$ y de aquí

$$S_{max} \subset K_{max} \qquad (2)$$

De ambas inclusiones, (1) y (2), sigue la segunda parte del teorema.

UNION DE HIPERGRAFOS.-

Dados los hipergrafos $H_1 = (X_1, E_1)$ y $H_2 = (X_2, E_2)$, definiremos la UNION de ellos como el hipergrafo

$$H = (X_1 \cup X_2, \quad E_{X_1 \cup X_2})$$

entendiendo por $E_{X_1 \cup X_2}$ la familia de arcos formada por la unión de las familias E_1 y E_2.

INTERSECCIÓN DE HIPERGRAFOS.-

Llamaremos INTERSECCION de dos hipergrafos $H_1 = (X_1, E_1)$ y $H_2 = (X_2, E_2)$, al hipergrafo

$$H = (X_1 \cap X_2 , E_{X_1 \cap X_2}).$$

Si $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, se dice que los dos hipergrafos dados - son DISJUNTOS.

Teorema 2.-

" Una condición necesaria y suficiente, para - que un hipergrafo $H = (X,E)$ sea conforme, es que, para cualesquiera tres arcos secciones, S_1, S_2, S_3, de él, exista siempre otro arco sección que con-- tenga la unión de todas las intersecciones bina-- rias posibles de aquellos. Esto es, contenga a:

$$(S_1 \cap S_2) \cup (S_2 \cap S_3) \cup (S_1 \cap S_3) \text{ ". } (1).$$

Demostración:

1º Si el hipergrafo H es conforme , bastará demostrar que

$$(S_1 \cap S_2) \cup (S_2 \cap S_3) \cup (S_1 \cap S_3)$$

es un klan de $(H)_2$, puesto que, si ello es cierto, bastará aplicar el teorema 1 para deducir la tesis.

Sea

$$S_j = (X_j, F_j) \quad \text{para } j = 1,2,3$$

y hagamos

$$Y = (X_1 \cap X_2) \cup (X_2 \cap X_3) \cup (X_1 \cap X_3)$$

podemos poner entonces (1) en la forma

$$(Y,\ E_Y)$$

Veamos que todo vértice x_i perteneciente a la intersección $S_1 \cap S_2$ es adyacente a $S_2 \cap S_3$ y $S_1 \cap S_3$.

En efecto:

- Si $x_i \in S_1 \cap S_2$, se tiene que $x_i \in X_1 \cap X_2 \subset X_2 \Rightarrow x_i \in X_2$

- Para todo elemento $x_j \in S_2 \cap S_3 \Rightarrow x_j \in X_2$

Y puesto que S_2 es un klan, por hipótesis, de las dos afirmaciones precedentes se sigue que el elemento x_i es adyacente a todos los elementos de $S_2 \cap S_3$, y ello para cualquier x_i.

Análogamente se demostraría que x_i es adyacente a todos los elementos x_k de $S_3 \cap S_1$.

Por consiguiente se tiene que $(Y,\ E_Y)$ es un klan de $(H)_2$, como queríamos demostrar.

2º .- Demostremos, a continuación, que la condición del enunciado implica que todo klan K de la 2-sección de H, está contenido en un arco sección de H.

Lo haremos por inducción sobre el orden del klán considerado.

Si $[K] = 1$ es cierto sin más que hacer uso de la propia definición de hipergrafo.

Si $[K] = 2$ es, igualmente, evidente.

Supongamos, pues, que el enunciado se verifica para todo klan K' cuyo orden sea menos que un cierto k y demostremoslo para un klan K, con $[K] = k \geq 3$.

Sean x_1, x_2, x_3 tres elementos cualesquiera pertenecientes a K y hagamos

$$K_i = K - \{x_i\}$$

entendiendo por K_i el klan obtenido suprimiendo en K el vértice x_i y los arcos incidentes a él (subgrafo de K).

Existe, en virtud de la hipótesis de inducción, un arco sección S_i, tal que

$$K_i \subset S_i \qquad (2)$$

Ahora bien, podemos poner K en la forma:

$$K = (K_1 \cap K_2) \cup (K_2 \cap K_3) \cup (K_1 \cap K_3)$$

y, por (2), se tendrá:

$$K = (K_1 \cap K_2) \cup (K_2 \cap K_3) \cup (K_1 \cap K_3) \subset$$

$$\subset (S_1 \cap S_2) \cup (S_2 \cap S_3) \cup (S_1 \cap S_3)$$

y existirá, entonces, por hipótesis, un arco sección S_0 tal que

$$(S_1 \cap S_2) \cup (S_2 \cap S_3) \cup (S_1 \cap S_3) \subset S_0$$

y por consiguiente

$$K \subset S_0$$

como queríamos demostrar.

A P E N D I C E

APENDICE I

GENERALIDADES SOBRE N-MATRICES

DEFINICIONES.-

Llamaremos n-MATRIZ o HIPERMATRIZ a un conjunto de elementos, pertenecientes a un cuerpo K, dispuestos sobre un prisma n-dimensional.

Notaremos una n-matriz, A, en la forma:

$$A = \| a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \| \quad ,$$

donde

$$i_j \in \{1,2,\ldots,m_j\} \equiv I_j \quad \text{para } j= 1,2,\ldots,m \ ,$$

siendo m_j un entero perteneciente a los naturales que llamaremos COTA j-ésima.

Llamaremos GRADO o CLASE de una n-matriz al número n, esto es, al número de dimensiones del prisma sobre el que están dispuestos los elementos de A, o lo que es lo mismo, al número de subindices necesarios para localizar a un elemento.

Por ORDEN de una n-matriz entenderemos el producto indicado y ordenado de las cotas, y lo notaremos por o(A). Por tanto

$$o(A) = m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n \ .$$

n-MATRIZ HOMOGENEA.-

Es aquella en la cual todas las cotas son coincidentes, esto es, se verifica :

$$m_i = m_j \quad \forall\ i,j \in \{1,\ldots,n\}$$

En particular si n = 2 la n-matriz se llamará CUADRADA. Y si n = 3 se denominará CUBICA.

Llamaremos DIAGONAL PRINCIPAL al conjunto de los elementos de A que tienen iguales todos sus subindices.

LADOS.-

Se denomina j-LADO ($1 \leq j \leq n$) de una n-matriz A, la (n-1)-matriz, L_j, de orden $m_1 \times \ldots \times m_{j-1} \times m_{j+1} \times \ldots \times m_n$ y de elementos $a_{i_1,\ldots,i_n}$ tales que verifican

$$i_s = \begin{cases} \text{constante si } s=j \\ \text{perteneciente a } I_s \text{ , en otro caso.} \end{cases}$$

Tal lado se dirá de ASPECTO j y DIRECCION $1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n$.

Evidentemente existen m_j lados de cada uno de los aspectos j.

Pasemos, a continuación a estudiar las operaciones con n-matrices, pero antes veamos como se define la igualdad.

IGUALDAD DE n-MATRÎCES.-

Dos n-matrices se dicen iguales cuando los elementos de la primera son iguales a sus correspondientes en la segunda y viceversa.

OPERACIONES CON n-MATRICES.-

I.- SUMA.

Dadas dos n-matrices , A y B, del mismo grado y orden, definiremos la suma algebraica de ambas como otra n-matriz,C, del mismo -- grado y orden que aquellas y tal que sus elementos son suma alge-- braica de los correspondientes de A y B.

Se prueba facilmente, da dadas la existencia del elemento neutro y del opuesto de uno dado y dadas las propiedades de la operación definida, que las n-matrices poseen estructura de GRUPO ABELIANO.

II.- MULTIPLICACION POR UN ESCALAR.

Sea A una n-matriz y k un escalar. Definimos el producto kA como la n-matriz del mismo grado y orden que A y tal que sus elementos son de la forma

$$k\, a_{i_1,\ldots,i_n}.$$

III.- PRODUCTO DE n-MATRICES.

Sean h y k dos enteros menores que n y tales que h≠ k. Llamaremos PRODUCTO (h,k) de una n-matriz $A = \| a_{i_1,\ldots,i_n} \|$ de orden $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n$, por otra n-matriz $B = \| b_{i_1,\ldots,i_n} \|$ del mismo grado que la primera y orden $m'_1 x \ldots x\ m'_n$, con la condición de que se verifique

$$m_k = m'_h$$

$$y \quad m_s = m'_s \qquad \forall s \ / \ s \neq h,k$$

a la n-matriz C de orden $m_1\ x \ldots x\ m_h x \ldots x\ m'_k x \ldots\ x\ m_n$,cuyos elementos son de la forma

$$c_{i_1,\ldots,i_h,\ldots,j_k,\ldots,i_n} = \sum_{s=1}^{m_k=m'_k} a_{i_1,\ldots,i_h,\ldots,\underset{k}{s},\ldots,i_n} \cdot b_{i_1,\ldots,\underset{h}{s},\ldots,j_h,\ldots,i_n} .$$

donde con la notación $a_{i_1,\ldots,\underset{k}{s},\ldots,i_n}$ queremos significar que el índice s ocupa el lugar k.

Se demuestra que tal operación verifica las siguientes propiedades:

1.- Distributiva a la izquierda y a la derecha.

2.- Asociativa.

3.- Existencia del elemento neútro (estudio que realizaremos a continuación).

4.- No conmutativa.

5.- Existencia de divisores de cero.

6.- No es válida la ley simplificativa.

APENDICE II :

N-MATRICES ESPECIALES

CORTE DIAGONAL.-

Se denomina CORTE DIAGONAL (h,k) de una n-matriz A, con $m_h \leq m_k$, a la (n-1)-matriz $C_{h,k}$ tal que

$$C_{h,k} = \| a_{i_1,\ldots,\underset{h}{s},\ldots,\underset{k}{s},\ldots,i_n} \| \quad \text{con } i_r \in I_r, s \in I_h.$$

Se comprueba que todo corte diagonal contiene a la diagonal principal.

n-MATRIZ DE BASE h,k CUADRADA.-

Es aquella tal que sus cotas h y k son iguales,o sea,$m_h=m_k$.

n-MATRIZ TRIANGULAR (h,k).-

Una n-matriz A de base (h,k) cuadrada se denomina TRIAN-

GULAR (h,k) SUPERIOR (INFERIOR) si para todo $i_h > i_k$ ($i_h < i_k$) se verifica

$$a_{i_1,\ldots,i_h,\ldots,i_k,\ldots,i_n} = 0.$$

n-MATRIZ (h,k) DIAGONAL.-

Se llama así a aquella n-matriz homogenea que sea simultaneamente triangular(h,k) superior e inferior.

En ella serán, por tanto, nulos todos los elementos excepto los que pertenecen al corte diagonal(h,k) .

Si todos los elementos de una n-matriz(h,k) diagonal son iguales a un escalar p la n-matriz se denomina (h,k) ESCALAR p. En caso de que tal escalar sea el elemento unidad del cudrpo K, al que pertenecen los elementos de A, la n-matriz se denomina(h,k) UNIDAD y se representa por I(h,k),o bien, si no hay peligro de confusión, simplemente por I.

Se verifican las propiedades siguientes (no incluimos la demostración):

1.- $I(h,k) = I(k,h)$

2.- $I(h,k) + \overset{p}{\ldots} + I(h,k) = p\cdot I(h,k)$

3.- $I(h,k) \times \overset{p}{\ldots} \times I(h,k) = I(h,k)$ para el producto (h,k).

4.- $I \times A = A \times I = I \times A \times I$ con identicas restricciones que el apartado anterior.

5.- El producto (h,r) de t n-matrices(h,k)unidad, es una n-matriz(h,k)unidad, ($h < r < k$)

6.- El producto (t,r) de dos n-matrices(h,k) unidad es una n-matriz(h,k) escalar m, ($h < t < r < k$)

7.- El ppoducto(t,r) de v n-matrices (h,k) unidad, es una n-matriz (h,k) escalar m^{v-1}.

8.- Sea $C = I(a_1,a_2) \overset{(t,r)}{\times} I(a_3,a_4)$ con $a_1,a_2 \neq a_3,a_4$ y $a_1 \neq a_2$, $a_3 \neq a_4$. En estas hipotesis se verifica que:

1º.- Si t coincide con a_3 ó a_4 y r no coincide con a_1 ni con a_2, entonces $C = I(a_1,a_2)$.

2º.- Si r coincide con a_1 ó a_2 y t no coincide con a_3 ni con a_4, entonces $C = I(a_3,a_4)$.

3º.- Si t coincide con a_3 ó a_4 y r coincide con a_1 ó a_2 entonces $C = I(a_i,a_j)$, siendo $a_i\,(i=1,2)$ y $a_j\,(j=3,4)$ los indices distintos de t y r.

4º.- En cualquier otro caso, los elementos de C serán todos nulos excepto los que no lo fueran, simultaneamente, en $I(a_1,a_2)$ ó $I(a_3,a_4)$.

OTRAS DEFINICIONES.-

Omitimos las definiciones y propiedades de lad n-matrices: CONMUTATIVAS, ANTICONMUTATIVAS, PERIODICAS, IDEMPOTENTES, NILPOTENTES, INVERSAS(h,k), TRASPUESTAS, SIMETRICAS, HEMISIMETRICAS, CONJUGADAS, HERMITICAS Y HEMIHERMITICAS por ser, facilmente, generalizables a partir de las definiciones y propiedades ya conocidas para el caso bidimensional. A título de ejemplo daremos la definición generalizada de traspuesta. No obstante si se posee especial interés recomendamos que se consuslte el trabajo que indicabamos en el prólogo de esta tesis.

n-MATRIZ TRASPUESTA.-

Dada la n-matriz A de orden $m_1 x \ldots x m_h x \ldots x\, m_k x \ldots x m_n$, definiremos la n-matriz (h,k) traspuesta A' de orden $m_1 x \ldots x\, m_k\, x \ldots x\, m_h\, x \ldots x\, m_n$, como aquella de elementos tales que

$$a'_{i_1,\ldots,i_h,\ldots,i_k,\ldots,i_n} = a_{i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_h,\ldots,i_n}.$$

Con tal definición se verifican las siguientes propiedades cuya demostración omitimos:

1.- $(A')' = A$

2.- $(tA)' = t \cdot A'$

3.- $(A + B)' = A' + B'$

4.- $(AB)' = B' \cdot A'$.

APENDICE III :

N-DETERMINANTES

TRANSVERSAL.-

Sea A una n-matriz homogenea de orden m, llamaremos TRANSVERSAL de A a cada uno de los productos de m elementos de A, con la condición de que no haya ningún par de elementos que pertenezcan a un mismo lado de ningún aspecto.

Sea $F = \{1,2,\ldots,m\}$ y sea P el conjunto de las permutaciones de los m elementos de F, esto es,

$$P = \{s_1, s_2, \ldots, s_{m!}\}$$

En particular, hagamos coincidir s_1 con la permutación natural de los elementos de F.

Consideremos, ahora, el conjunto Ω de las variaciones con repetición de los m! elementos de P, tomados de n-1 en n-1 , que, como sabemos tendrá $(m!)^{n-1}$ elementos,

$$\Omega = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{(m!)^{n-1}}\} .$$

siendo los elementos de Ω de la forma

$$\sigma_p = (s_{p_1}, \dots, s_{p_{n-1}}), \text{ con } s_{p_i} = (p_i^1, p_i^2, \dots, p_i^m), \ p_i^j \in F, \forall j.$$

Sea T el conjunto de las transversales de A, y sea $t_p \in T$. Con la notación

$$t_p = t_{\underset{k}{\breve{s_1}}, \sigma_p} = t_{s_{p_1}, s_{p_2}, \dots, \underset{k}{\breve{s_1}}, \dots, s_{p_{n-1}}}$$

indicaremos aquella transversal tal que verifica:

$$t_{\underset{k}{\breve{s_1}}, \sigma_p} = t_{s_{p_1}, s_{p_2}, \dots, \underset{k}{\breve{s_1}}, \dots, s_{p_{n-1}}} =$$

$$= a_{p_1^1, p_2^1, \dots, \underset{k}{\breve{1}}, \dots, p_{n-1}^1} \ a_{p_1^2, \dots, \underset{k}{\breve{2}}, \dots, p_{n-1}^2} \cdots a_{p_1^m, \dots, \underset{k}{\breve{m}}, \dots, p_{n-1}^m}$$

En particular, llamaremos TRANSVERSAL PRINCIPAL a la

$$t_{s_1, s_1, \dots, s_1} = a_{111\dots1} \ a_{222\dots2} \cdots a_{mmm\dots m} .$$

Obviamente, el orden de T es igual al orden de Ω , esto es, es igual a $(m!)^{n-1}$.

TEOREMA 1.-

Dos transversales, $t_{\underset{k}{\breve{s_1}}, \sigma_p}$ y $t_{\underset{j}{\breve{s_1}}, \sigma'_p}$, son iguales si y solo si, para todo $s'_{p_i} \in \sigma'_p$, se verifica que

$$s'_{p_i} = s_{p_i} \cdot s_{p_j}^{-1} ,$$

donde, s_{p_i} es la permutación de lugar i, s_{p_j} la de lúgar j, y $s_{p_j}^{-1}$ la permutación ciclica inversa de la s_{p_j}. Adviertase que con la notación $s'_{p_i} \in \sigma_p$ nos referimos a qué s'_{p_j} es una de las coordenadas componentes de σ_p.

Demostración:

En efecto, al efectuar los cambios de orden, en los elementos de la primera transversal, necesarios para lograr que la permutación de los indices que ocupan el lugar j sea la permutación natural, (lo que equivale a multiplicar la permutación s_{p_j} por la $s_{p_j}^{-1}$), las permutaciones de los demás indices se ven afectadas en la misma forma por tales cambios.

n-PERMANENTE Y n-DETERMINANTE.-

Llamamos PERMANENTE de una n-matriz A a la suma de los valores absolutos de las transversales.

Para cada elemento $\sigma_p \in \Omega$ definimos

$$\varepsilon\sigma_p = \varepsilon s_{p_1} \cdot \varepsilon s_{p_2} \cdots \varepsilon s_{p_{n-1}}$$

donde

$$\varepsilon s_{p_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } s_{p_j} \text{ es una permutación par} \\ -1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora bien, el conjunto de las permutaciones, P, es un grupo cíclico y en él se verifica que el producto de: dos permutaciones pares es par, y el de dos impares, analogamente, es par; el producto de dos permutaciones de distinta paridad es impar. De todo ello se desprende otra definición de $\varepsilon\sigma_p$ equi valente a la anterior.

Sea

$$s'_p = s_{p_1} \cdot s_{p_2} \cdots s_{p_{n-1}}$$

definimos:

$$\varepsilon\sigma_p = \varepsilon s'_p = \begin{cases} 1 & \text{si } s'_p \text{ es una permutación par} \\ -1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Asignamos, a continuación, a cada transversal, $t_{\underset{k}{s_1}, \sigma_p}$, un signo: $\varepsilon\sigma_p$.

Definimos el n-DETERMINANTE DE ESPECIE k, y lo notamos por $|A_{\underset{k}{+}}|$, como la suma

$$|A_{\underset{k}{+}}| = \sum_{p=1}^{(m!)^{n-1}} \varepsilon\sigma_p \, t_{\underset{\breve{k}}{s_1}, \sigma_p}$$

<u>TEOREMA 2</u>.-

Dada una n-matriz, A, de dimensión par, se verifica:

$$|A_{\underset{\breve{k}}{+}}| = |A_{\underset{\breve{j}}{+}}| \quad , \forall\ k,j \leq n.$$

Demostración:

Consideremos una transversal cualquiera, $t_{\underset{\breve{k}}{s_1}, \sigma_p}$, del n-determinante $|A_{\underset{k}{+}}|$ y sea $t_{\underset{\breve{j}}{s_1}, \sigma'_p}$ la transversal correspondiente en el n-determinante $|A_{\underset{\breve{j}}{+}}|$. Ambas serán el producto de los mismos elementos de A, y, por tanto, el problema se re duce a estudiar el signo que se le asigna a cada una de ellas en cada dedeterminante.

El signo de la transversal en el n-determinante de especie k será:

$$\varepsilon\sigma_p = \varepsilon s = \varepsilon(s_{p_1} \cdot\cdot\ s_{p_j} \cdot\cdot\ s_{p_{n-1}}) = \varepsilon(s_{p_1} \,..\, \underset{k}{s_1} \,..\, s_{p_j} \,..\, s_{p_{n-1}})$$

donde se ha introducido, como factor, en el último miembro, la permutación natural s_1 colocada en el lugar k.

El signo de la transversal en el n-determinante de especie j será:

$$\varepsilon\sigma'_p = \varepsilon s'$$

siendo

$$s' = s_{p_1} s_{p_j}^{-1} \cdots \underbrace{s_1}_{k} s_{p_j}^{-1} \cdots \underbrace{s_{p_j} s_{p_j}^{-1}}_{j} \cdots s_{p_{n-1}} s_{p_j}^{-1} =$$

$$= (s_{p_j}^{-1})^n \, s_{p_1} \cdots \underbrace{s_1}_{k} \cdots s_{p_j} \cdots s_{p_{n-1}} = (s_{p_j}^{-1})^n \, s \,,$$

donde, en el momento adecuado, hemos aplicado el teorema 1.

Se verifica, por consiguiente,

$$\varepsilon\sigma'_p = \varepsilon s' = \varepsilon(\, (s_{p_j}^{-1})^n \, s\,) = \varepsilon(s_{p_j}^{-1})\ \varepsilon s = \varepsilon(s_{p_j}^{-1})^n\ \varepsilon\sigma_p,$$

y al ser, por hipotesis, n múltiplo de 2,

$$\varepsilon(s_{p_j}^{-1})^n = 1$$

con lo cual,

$$\varepsilon\sigma_p = \varepsilon\sigma'_p$$

y de aquí,

$$|A_{\underset{k}{+}}| = |A_{\underset{j}{+}}| \qquad \text{para todo } k,j \leq n.$$

PROPIEDADES DE LOS n-DETERMINANTES.-

A.- Dimensión impar

1.- Si en una n-matriz, A, se intercambian dos k-lados, su n-determinante de especie k no varía mientras que sus n-determinantes de cualquier otra especie cambian de signo.

2.- El n-determinante de cualquier especie es una función lineal de los elementos de cualquier lado.

3.- Si los elementos de un lado son todos nulos, el n-determinante, de cualquier especie, es nulo.

4.- Si dos j-lados ($j \neq k$) son iguales o proporcionales, el n-determinante de especie k es nulo.

5.- Si todos los k-lados son iguales se verifica

$$|A_{\underset{k}{+}}| = m! \; |L|$$

donde $|L|$ es el $(n-1)$-determinante del k-lado y m es el orden de la n-matriz A.

6.- Cualquier múltiplo de un j-lado ($j \neq k$) puede sumarse con otro j-lado sin que varie el valor de $|A_{\underset{k}{+}}|$.

Omitimos todas las demostraciones de las propiedades, excepto la relativa a la propiedad 5 cuya demostración es como sigue:

Sea

$$|A_{\underset{k}{+}}| = \sum_{p=1}^{(m!)^{n-1}} \varepsilon\sigma_p \, t_{\underset{k}{s_1}, \sigma_p} = \sum_{p=1}^{(m!)^{n-1}} \varepsilon\sigma_p \, t_{s_{p_1}, \ldots, \underset{k}{s_1}, \ldots, s_{p_{n-1}}}$$

Ahora bien, como, por hipotesis, todos los k-lados son iguales se tendrá:

$$a_{i_1,..,\underset{k}{j},..,i_n} = a_{i_1,..,\underset{k}{q},..,i_n} \quad ,\forall\ i_h \text{ fijo } (h\neq k),\forall j,q \leq m,$$

y, de aquí,

$$t_{\underset{k}{s_1},\sigma_p} = t_{\underset{k}{s_j},\sigma_p} \qquad \text{para } j = 1,2,\ldots,m!$$

con lo cual, para todo j, 1 j m! , se tiene

$$t_{s_{p_1},..,\underset{k}{s_1},..,s_{p_{n-1}}} = t_{s_{p_1} s_{p_j}, s_{p_2} s_{p_j},\ldots, s_{p_j},\ldots, s_{p_{n-1}} s_{p_j}}$$

siendo el signo igual para ambos miembros ya que

$$\varepsilon\sigma'_p = (s_{p_j})^{n-1}\ \varepsilon\sigma_p = \varepsilon\sigma_p \qquad \text{por ser } n-1 \text{ múltiplo de } 2.$$

Escogiendo como representante de estas m! transversales la $t_{\underset{k}{s_1},\sigma_p}$, se tendrá finalmente:

$$|A_{\underset{k}{+}}| = m! \sum_{p=1}^{(m!)^{n-2}} \varepsilon\sigma_p t_{\underset{k}{s_1},\sigma_p} = m!\ |L|$$

donde no nos ocupamos de la especie del (n-1)-determinante $|L|$ del k-lado por ser su dimensión par y mantenerse, como sabemos, invariante para cualquier especie considerada.

B.- Dimensión par.-

1´.- Si se intercambian dos k-lados su determinante cambia de signo

2´ y 3´.- Analogas a la 2 y 3 del caso anterior.

4°.- Si dos j-lados son iguales o proporcionales $|A| = 0$.

5°.- Cualquier múltiplo de un j-lado puede sumarse con otro sin que cambie el valor de $|A|$.

APENDICE IV :

ANALISIS DE LA TRANSITIVIDAD DE UN HIPERGRAFO CON EL ORDENADOR

El teorema 1 de transitividad (pag. 41), constituye la base teórica del programa que incluimos posteriormente.

Tal programa se ha pasado por un Ordenador UNIVAC de la serie 1100, modelo 1108, bajo control del Sistema Operativo EXEC-8, en la versión 31.1592 que hoy dia posee.

Este ordenador, que pertenece al Centro de Proceso de Datos del Ministerio de Educación y Ciencia, se encuentra conectado por linea telefónica directa a 8 terminales UNIVAC DCT-2000 en otras tantas Universidades Españolas, habiendo utilizado nosotros, en concreto, el terminal instalado en el Centro de Cálculo de la Universidad de Sevilla.

Las características mas notables de dicho ordenador son las siguientes:

- 131 K. bytes,de 36 bits en memoria principal (actualmente se está duplicando dicha capacidad)
- 92 nano-segundos de tiempo base.
- periféricos a discos, bandas magneticas, tambores FASTRAND y FH en memoria auxiliar rápida.

Nuestro programa se ha efectuado en lenguage FORTRAND V UNIVAC con las siguientes caracteristicas aproximadas:

- 140 pasos de programa
- 0´525 K palabras de instrucciones binarias.
- 1´638 K palabras de datos binarios.
- 1´273 segundos de linkedición.
- 7´992 palabras de módulo objeto.

Partimos en nuestro programa de la hipermatriz asociada a un hipergrafo, hipermatriz que, en último extremo, puede considerarse como un arreglo multidimensional y que estará totalmente determinada (al ser booleana) por los índices de los elementos no nulos. Tales índices constituyen los datos de nuestro programa, con lo cual se consigue un aumento de capacidad de memoria y el subsiguiente de ampliación de posibilidades. No obstante se han impuesto las diguientes restricciones:

1º .- El máximo número de indices será 5.

2º .- El máximo valor de cada índice es 99.

Será, por tânto, válido nuestro programa para un hipergrafo de rango menor que 6 y orden menor que 99.

.La razón de estas limitaciones se encuentra en que, a pesar de que la palabra UNIVAC es satisfactoria (36 bits), solo admite, en punto fijo, numeros de hasta 10 dígitos decimales. No obstante,estas limitaciones son factibles de subsanar utilizando cadenas de palatras.

El programa sigue los siguientes pasos:

I.- Lee tres indicadores: H, N e INDI, en tamaño (3I3), cuyo significado es el siguiente:

- H : rango
- N : orden del hipergrafo
- INDI: 1º Igual a 0 : El programa efectua el producto de dos hipermatrices booleanas.
  - 2º Igual a 1 : El programa efectua el producto de una hipermatriz por sí misma.
  - 3º Igual a 2 : Estudia la transitividad.

II.- Fase de lectura de los indices de los elementos no nùlos de la primera y segunga(si la hubiera) hipermatriz. El orden de los grupos de indices es arbitrario y se leen, tarjeta a tarjeta, en el formato 8I10.

Se realiza un control de índices incorrectos en función de H y de N y finaliza la lectura cuando detecta una ficha que es marca de fin de fichero (@ EOF). Por supuesto, la ficha inmediatamente anterior puede tener varios campos

I10 en blanco, lo cual no afecta al dasarrollo del programa.

El programa calcula el número de elementos unidad de dicha hipermatriz (IMAXA) para su posterior utilización.

III.- Si INDI = 0 efectua el mismo proceso para la segunda hipermatriz, calculando el número de sus elementos unidad (IMAXB). Si INDI vale 1 ó 2, para identificar el segundo factor con el primero.

IV.- Intercambia los indices de la primera hipermatriz de la siguinete manera

I1,I2,I3,I4,K1 → K1,I2,I3,I4,I1 (caso de H=1)

V.- Ordena en secuencia ascendente los los indices de los elementos unidad intercambiados de la peimera hipermatriz.

VI.- Análogamente con la segunda hipermatriz.

VII.- Efectua el producto de la siguiente manera:

Dado el grupo de indices

K1I2I3I4I1

de la primera hipermatriz busca en la segunda sé existe algún grupo de la forma

K1I2I3I4aa

siendo aa un índice variable.

Si encuentra uno (os), éste (os) será será el subindice correspondiente de un elemento unidad de la hipermatriz producto:

K1I2I3I4aa.

VIII.- Por último, si INDI = 2, realiza el proceso INDI =1 y estudia la transitividad del hipergrafo correspondiente comparando la hipermatriz producto obtenida,con la hipermatriz asociada al hipergrafo , esto es, con la hipermatriz introducida como dato en primer lwgar.

Sigue, a continuación, un listado del programa completo utilizado.

```
@FOR,IS     .A,.A
FOR 011A-05Ñ28Ñ74-00:33:24 (,0)

   MAIN PROGRAM

   STORAGE USED: CODE(1) 001056; DATA(0) 003175; BLANK COMMON(2) 000000


   EXTERNAL REFERENCES (BLOCK, NAME)

    0003   NINTR$
    0004   NRDU$
    0005   NIO2$
    0006   NPRT$
    0007   NSTOP$
    0010   NIO1$
    0011   XPII
    0012   NWDU$


   STORAGE ASSIGNMENT  (BLOCK, TYPE, RELATIVE LOCATION, NAME)

    0000     002773 1F        0001     000670 10L       0001     000520 100L      0001     000230 12L       0001     000226 122L
    0001     000100 125G      0001     000350 13L       0001     000107 133G      0001     000116 140G      0000     003022 155F
    0001     000202 162G      0000     003046 165F      0001     000220 172G      0000     003106 175F      0000     003120 185F
    0000     002757 2F        0001     000647 20L       0001     000262 204G      0001     000271 211G      0001     000300 216G
    0001     000360 240G      0001     000376 247G      0001     000434 262G      0001     000442 270G      0001     000704 30L
    0001     000612 330G      0001     000625 337G      0001     000754 40L       0001     000770 405G      0001     001022 422G
    0000     002774 48F       0000     002760 5F        0001     000057 7L        0001     000734 777L      0001     000541 78L
    0001     000531 7379L     0001     000570 80L       0000     003007 84F       0001     000744 888L      0000     003073 8888F
    0001     000402 898L      0001     000175 9L        0001     001040 900L      0000     003133 9000F     0000     003146 9001F
    0001     001050 901L      0001     001023 904L      0001     000471 98L       0000     003034 989F      0001     000461 99L
    0000     003060 999F      0000 I 000000 A1        0000 I 001750 B         0000 I 000764 B1        0000 I 001752 C1
    0000 I 001751 H         0000 I 002742 I         0000 I 002753 ICA       0000 I 002754 ICB       0000 I 002755 ICC
    0000 I 002745 II        0000 I 002750 IMAXA     0000 I 002751 IMAXB     0000 I 002756 IND       0000 I 002737 INDI
    0000 I 002740 I1        0000 I 002741 I2        0000 I 002743 J         0000 I 002747 L         0000 I 002744 LL
    0000 I 002746 M         0000 I 002736 N         0000 I 002752 NN


00100       C  PRODUCTO DE HIPERMATRICES
00100       C
00100       C
00100       C
00100       C
00101             INTEGER  A1(500),B1(500),B,H,C1(500)
00103            DEFINE CAMBIA(I) =A1(I)Ñ100 +(A1(I)-(A1(I)Ñ100)*100)*10**(2*(H-1))
00104            READ(5,2) H,N,INDI
00111          2 FORMAT(3I3)
00112            IF(H.GT.5.OR.H.LT.2) PRINT 5,H
00116          5 FORMAT(ÑÑÑ'    VALOR DE H:',I7,'  MAYOR QUE 5 O MENOR QUE 2'ÑÑÑ)
00117            IF(H.GT.5.OR.H.LT.2)  STOP
00121            I1 = 1
00122         7  I2 = I1 + 7
00123            READ(5,1,END=9) (A1(I),I=I1,I2)
00131       1    FORMAT(8I10)
00131       C
00131       C  --- CONTROL DE INDICES INCORRECTOS ---(PRIMERA MATRIZ)
00131       C
00132
```

```
00132         DO 70 I = I1,I2
00135         J = A1(I)
00136         LL = 0
00137         DO 70 II = H,1,-1
00142         M = 10**(2*(II-1))
00143         L = J/M - LL*100
00144         IF(L.GT.N. OR .L.LT.0)  GO TO 777
00146         IF (L.EQ.0)   PRINT 48 ,A1(I)
00152      70 LL = L
00155      48 FORMAT(/' ELEMENTO :',I15,' DE LA PRIMERA MATRIZ CON INDICE NULO')
00156         I1 = I 1 + 8
00157         GO TO 7
00160       9 IMAXA = I 2
00161         DO 32 I = I2,I1,-1
00164      32 IF(A1(I).EQ.0)  IMAXA = I - 1
00167         IF(INDI.EQ.0) GO TO 122
00171         DO 79  I =1,IMAXA
00174      79 B1(I) = A1(I)
00176         IMAXB = IMAXA
00177         GO TO 898
00200     122 I1 = 1
00201      12 I2 = I1 + 7
00202         READ(5,1 , END = 13)  (B1(I),I=I1,I2)
00202   C
00202   C  --- CONTROL DE INDICES INCORRECTOS ---(SEGUNDA MATRIZ)
00202   C
00210         DO770 I = I1,I2
00213         J = B1(I)
00214         LL = 0
00215         DO770 II = H,1,-1
00220         M = 10**(2*(I1-1))
00221         L = J/M - LL*100
00222         IF(L.GT.N. OR .L.LT.0)  GO TO 888
00224         IF (L.EQ.0)   PRINT 84 ,B1(I)
00230   770   LL = L
00233      84 FORMAT(/' ELEMENTO :',I15,' DE LA SEGUNDA MATRIZ CON INDICE NULO')
00234         I1 = I1 + 8
00235         GO TO 12
00236      13 IMAXB = I 2
00237         DO 33 I = I2,I1,-1
00242      33 IF(B1(I).EQ.0)  IMAXB= I - 1
00245         WRITE(6,155) (A1(I),I=1,IMAXA)
00253     155 FORMAT(1H1//10X,'ELEMENTOS-1 DE LA PRIMERA MATRIZ'/(21X,I10))
00254     898 IF(INDI.NE.0) PRINT  989
00257     989 FORMAT(///' LA SEGUNDA MATRIZ COINCIDE CON LA PRIMERA'/1H1)
00260         WRITE(6,165) (B1(I),I=1,IMAXB)
00266     165 FORMAT(1H1//10X,'ELEMENTOS-1 DE LA SEGUNDA MATRIZ'/(21X,I10))
00266   C   ----- CAMBIAR  A-----
00267         DO 440  I = 1 , IMAXA
00272     440 A1(I) = CAMBIA(I)
00272   C    ------ORDENACION     DE     A----------
00274         I= 2
00275      99 IF(A1(I).GE.A1(I-1))  GO TO 100
00277         J = I
00300      98 B = A1(J)
00301         A1(J) = A1(J-1)
00302         A1(J-1)=B
00303           J = J - 1
00304         IF (J.GT.1.AND.A1(J).LT.A1(J-1)) GO TO 98
00306     100 I = I + 1
00307         IF(I.LE.IMAXA) GO TO 99
00307   C
00307   C-----ORDENACION    DE    B
```

```
00307        C
00311              I = 2
00312         7979 IF(B1(I).LE.B1(I-1))  GO TO 80
00314              J = I
00315          78  B = B1(J)
00316              B1(J) = B1(J - 1)
00317              B1(J - 1 ) = B
00320              J = J - 1
00321              IF (J.GT.1.AND.B1(J).GT.B1(J-1))                        GO TO 78
00323          80  I = I + 1
00324              IF(I.LE.IMAXB) GO TO 79          73
00326              PRINT 155,(A1(I), I=1,IMAXA), IMAXA
00335              PRINT 155,(B1(I), I=1,IMAXB), IMAXB
00344              NN = 10**(2*(H-1))
00345                   ICA = 0
00346                ICB = 0
00347              ICC = 0
00350         20      ICA = ICA + 1
00351              IF(ICA.GT.IMAXA)    GO TO  40
00353              L = A1(ICA)/100
00354              IF(ICA.GT.  1)  GO TO 30
00356          10  ICB = ICB + 1
00357              IF(ICB.GT.IMAXB)  GO TO 40
00361               M = B1(ICB)/100
00362          30  IF(L-M) 20,,10
00365              ICC = ICC + 1
00366              C1(ICC) =(A1(ICA)-( A1(ICA)/100)*100)*NN + B -(B/NN)*NN
00367              GO TO 10
00370         777  PRINT 999,A1(I)
00373         999  FORMAT(///' ELEMENTO DE LA PRIMERA MATRIZ CON INDICE:',I15,'MALO')
00374              STOP  77777
00375         888  PRINT8888,B1(I)
00400        8888  FORMAT(///' ELEMENTO DE LA SEGUNDA MATRIZ CON INDICE:',I15,'MALO')
00401              STOP  88888
00402          40  IF(ICC.GT.0) WRITE(6,175) (C1(I),I=1,ICC)
00411         175  FORMAT(1H1//10X,'ELEMENTOS-1 DE LA MATRIZ-PRODUCTO'/(21X,I10))
00412              IF(ICC.LE.0) WRITE(6,185)
00415         185  FORMAT(///' TODOS LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ PRODUCTO SON NULOS')
00416              IF(IND.NE.2) STOP
00416        C
00416        C  ---ESTUDIO DE LA TRANSITIVIDAD ---
00416        C
00420              J = 1
00421              DO900 I = 1 , ICC
00424         904  IF(C1(I)-B1(J)) 901,900,903
00427         903  J = J + 1
00430              IF(J.GT.IMAXB) GO TO 901
00432              GO TO 904
00433         900  CONTINUE
00435              PRINT 9000
00437        9000  FORMAT(//////' ***ES UN HIPERGRAFO TRANSITIVO***'/4X,27(1H=)/1H1)
00440              STOP 9000
00441         901  PRINT 9001
00443        9001  FORMAT( ///' ***NO ES UN HIPERGRAFO TRANSITIVO***'/1H1)
00444              END

      END OF COMPILATION:        NO  DIAGNOSTICS.


      @XQT
```

I N D I C E A L F A B E T I C O

INDICE ALFABETICO DE MATERIAS

L - M

N

O- P

R - S

T - U

V

B I B L I O G R A F I A

1 BERGE C. : Principes de Combinatore. Dunod. París,1968

2 " : Théorie des graphes et ses applications. Dunod. Paris,1958

3 " : Graphes et hypergraphes. Dunod. Paris,1968.

4 BUSACKER R. - SAATY T.L. : Finite graphs and networks. An introduction with applications. McGraw-Hill, 1965.

5 Combinatorial mathematics and its applications. R. Bose & T. Dowling. University of North Carolina - Press. Chapel Hill, 1969.

6 Combinatorial Theory and its applications. Erdos, Rényi & Sós. North-Holland Publishing Company. Amsterdam-London, 1970.

7 Combinatorial structures and their applications. Guy,Sauer, Hanani and Schonheim. Gordon and Breach. New York, London, Paris, 1970.

8 FAURE R. : Eléments de la recherche opérationnelle. Gautier - Villars,Paris, 1971.

9 FAURE R. - HEURGON E. : Structueres ordonnées et algébres de boole. Gauthiers - Villars. Paris,1971.

10 FORD L.R. - FULKERSON D.R. : Flots dans les graphes. Gautiers - Villars. Paris, 1967.

11 FLAMENT C. : Teoría de grafos y estructuras de grupo. Ed. Tecnos S.A. Madrid,1972.

12 COMPOIT P. : Les graphes en recherche opérationnelle. Dunod. Paris,1972.

13 GROSSMAN I. - MAGNUS W. : Les groupes et leurs graphes. Dunod. Paris, 1971.

14 HARARY F. : Graph teory. Addison - Wesley Publishing - Company. 1969.

15 KAUFMANN A. : Introductions a la combinatorique en vue - des applications. Dúnod. Paris,1968.

16 KAUFMANN A. - COSTER D. : Exercices de combinatorique a-vec solutions. Dunod. Paris,1969.

17 KAUFMANN A. - PRECIGOUT M. : Curso de matemáticas nuevas. Compañía Editorial Continental. Mexico,1970.

18 KONIG D. : Theorie der graphen. Chelsea publishing company. New York.

19 KUNTZMANN J.: Théorie des réseaux. Graphes. Dunod. Paris, 1972.

20 MAYEDA W. : Graph theory. Wiley - Interscience. New York, 1972.

21 MALKEVITCH J. Propoerties of planar graphs with uniform - vertex and face structure. Memoirs of the - American Mathematical Society nº 99. Rhode Island. (Providence), 1970.

22 MUIR T. : A treatise on the teory of determinants. Dover Publications, Inc. New York, 1960.

23 NAKANISHI N.: Graph theory and Feinman integrals. Gordon- and Breach. New York,1971.

24 New directions in the theory of grahs. Frank Harary. Aca-demic Press. New York - London, 1967.

25 Ordres totaûx finis. Mathematiques et sciencies de l´homme. XII. Gauthiers - Villars. Paris,1971.

26 ORE O. : The four-color problems. Academic Press. New York - London, 1967.

27 PICARD C.F. : Graphes el questionnaires. Gautiers - Villars. Paris, 1972.

28 PACHECO J.B.: O problem- das cuatro cores. Ed. Alhambra. Coimbra, 1953.

29 Proof techniques en graph theory. Frank Harary. Academic Press. New York - London, 1969.

30 Recent Progress in Combinatorics. W.T. Tutte. Academic - Press. New York - London, 1969.

31 Recent trensds en Graph Theory. Lectures Notes in Mathematics.186. Springer-Verlag. Berlin,Heildelberg, New York, 1971.

32 RIORDAN J. : Combinatorial identities. John Wiley and - Sonds, Inc. New York, 1968.

33 " : An introductions to combinatorial analysis. John Wiley and Sonds,Inc. New York,1958.

34 ROY B. : Algebre moderne et théorie des graphes. Dunod, 1970.

35 SACKS G.E. : Degrees of unsolvability. Annals of Mathematical Studies.nº 55. Princenton University Press. Princenton, New Jersey, 1966.

36 Studies in applied mathematics. 4. Studies en Combinatorics. Society for Industrial and Applied -

Mathematics. SIAM. Philadelphia, Pensilvania, 1970.

37 SZASZ G. : Theorie des treillis. Dunod. Paris,1971.

38 The many facets of graph theory. Lecture Notes in Mathematics. 110. Springer - Verlang. Berlin, - Heilderberg, New York, 1969.

39 The graph theory and applications. Ldcture Notes in Mathematics. 303. Springer - Verlang. Berlin, - Heilderberg, New York, 1972.

40 Theory des graphes. International symposium. Dunod. Gordon and Breach. Paris,New York,1967.

41 TUTTE W.T. :Introduction to the theory of matroids. American Elservier Publishing Company, Inc. New York, 1971.

158

UNIVERSIDAD DE SEV...
FACULTAD DE CIENCIAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmante en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctora. d D. Manuel Francisco Arrieta Granados titulada HIPERGRAFOS ORIENTADOS

acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente cum laude

Sevilla, ocho de Julio 1.976

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Presidente, El Secretario, El Doctorado