

# Técnicas para la Mejora de la Estabilidad en el Método SPH para la Simulación de Fluidos



**Juan José Perea Rodríguez**

**Director:** Prof. Dr. Juan M. Cordero

**Tutora:** Prof<sup>a</sup>. Dra. Isabel Ramos

Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos  
Universidad de Sevilla

Esta tesis se ha desarrollado para la obtención del grado de  
*Doctor en Ingeniería Informática*



## **Agradecimientos**

Mi más sincero agradecimiento a mi familia, por todo lo que me ha soportado, por su comprensión, por su apoyo y su abnegación día tras día. A mi tutora Isabel Ramos por todas sus recomendaciones y apoyo. Especialmente quiero dar las gracias a mi director Juan M. Cordero por toda su dedicación, enseñanza, consejos y tanta ayuda que me ha prestado a lo largo de todos estos años. Sin duda, nada de esto se hubiese podido cumplir sin él. Gracias.



## Abstract

In Computer Graphics scope there are several problems that are still being researched because a sufficiently suitable solution has not yet been found. In fluid flow simulation, although there are tools and techniques to simulate the fluid dynamic behaviour, the obtained results must be postprocessed to clear away the disturbances that appear and whom are responsible for reducing visual realism.

The fluid simulation, or more specifically the fluid flow, require a processing to which a partial differential equation set, that quantitative describe the flow, must be solved. In general, it is not possible to simulate the fluid from the obtained results by analytic techniques, owing in partly that is only possible to obtain these solutions type under specifically conditions too restrictive. In addition, this would involve: on the one hand, a huge computational effort and not very versatile simulations on the other hand, as it would not be possible to introduce dynamic elements into the simulation environment.

To overcome these limitations, it is necessary to use discrete techniques based on numerical calculation, techniques that offer us greater ability to intervene in the results generation in a plausible processing time. One of the most highlight techniques is Smoothed Particles Hydrodynamic (SPH). Descriptively, this numerical technique operates on discretization of whole fluid volume by linked set of control points, the particles. The mutual interaction between each particles pair is weighed by a continuous and decreasing function, known as kernel function.

Some advantages of SPH method are its adaptability to complex boundaries, its ability to simulate free surfaces, the possible treatment of splashes or droplets, the equations simplification that must be solved or the dynamic magnitudes conservation that define the fluid.

In spite of these advantages, SPH method shows some deficiencies, such as the incompressibility case which, if is not properly modelled , induces unrealistic visual results in which overdamping of the particles is shown.

All this leads, SPH method also shows instability and imprecision problems that have not satisfactorily been solved. In order to solve these problems, we propose three mechanisms that mitigate the deficiencies listed above, these ones are:

1. We formulate a new particle interaction function (known as *kernel function*) that improves stability even in inhomogeneous particle distributions.
2. We model the mutual force between particles so that it is possible to impose incompressibility.
3. We develop a new technique for modelling the boundary constraints, which extends the SPH versatility by allowing us to introduce non-soft boundaries into simulation environment.

In order to show our improvements, we will develop a set of both the quantitative and the qualitative tests, where we will compare our proposal versus other techniques also based on SPH.



## Resumen

En el campo de la Informática Gráfica existen diversos problemas que siguen investigándose por no haber encontrado aún una solución suficientemente apropiada. En el caso de la Simulación de Fluidos, aunque existen herramientas y técnicas para simular el comportamiento dinámico de un fluido, los resultados obtenidos deben ser posprocesados para eliminar las perturbaciones que aparecen y que disminuyen el realismo visual.

Simular un fluido, o más técnicamente el flujo de un fluido, requiere de un procesamiento en el que se resuelven el conjunto de ecuaciones en derivadas parciales con las que se describen, cuantitativamente, el flujo. En general, no puede simularse el fluido a partir de los resultados obtenidos mediante técnicas analíticas, en parte debido a que sólo es posible obtener estas soluciones bajo condiciones determinadas muy restrictivas. Además, esto supondría por una parte un esfuerzo computacional enorme y por otra parte unas simulaciones poco versátiles, ya que no sería posible introducir elementos dinámicos en el escenario de simulación.

Para sobrepasar estas limitaciones es necesario utilizar técnicas discretas basadas en cálculo numérico que nos ofrecen mayor capacidad de intervención en la generación de resultados en un tiempo de cálculo plausible. Una de las técnicas más destacables es Smoothed Particles Hydrodynamic (SPH). Descriptivamente, esta técnica numérica opera sobre discretizaciones de todo el volumen del fluido mediante un conjunto ligado de puntos de control que en esta técnica son partículas. La interacción mutua entre cada par de partículas es ponderada mediante una función continua y decreciente, conocida como función kernel.

Algunas ventajas del método SPH son su adaptabilidad a contornos complejos, su capacidad para simular superficies libres, el posible tratamiento de las salpicaduras o gotas, la simplificación de las ecuaciones a resolver o la conservación de las magnitudes dinámicas que definen el fluido.

A pesar de estas ventajas, el método SPH presenta algunas deficiencias, como es el caso de la incompresibilidad, que al no ser modelada correctamente induce unos resultados visuales poco realistas en los que se muestran sobreamortiguamiento de las partículas. Además, el método SPH presenta problemas de inestabilidad e imprecisión que no han sido resueltos de manera satisfactoria.

Para resolver estos problemas proponemos tres mecanismos que mitigan las deficiencias enunciadas anteriormente. Estas son:

1. Formulamos una nueva función de interacción entre partículas (conocida como *función kernel*) que mejora la estabilidad incluso en distribuciones de partículas no homogéneas.
2. Modelamos la fuerza mutua entre partículas de modo que es posible imponer la incompresibilidad.
3. Desarrollamos un nuevo mecanismo de modelado de las condiciones de contorno, que amplía la versatilidad de SPH al permitirnos introducir en la escena de simulación contornos no suaves.

Para demostrar nuestras mejoras desarrollaremos un conjunto de pruebas tanto cuantitativas, como cualitativas, en las que compararemos nuestra propuesta con otras técnicas basadas también en SPH.



# Tabla de Contenidos

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Tablas</b>	<b>xvi</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción . . . . .	1
1.2 Limitaciones del Método SPH . . . . .	5
1.3 Nuestra Motivación . . . . .	9
1.4 Estructura de esta Memoria . . . . .	11
<b>2 Fundamentos del Método SPH</b>	<b>14</b>
2.1 Introducción . . . . .	14
2.2 Características del Método SPH . . . . .	15
2.3 Formulación del Método SPH . . . . .	17
2.3.1 Formulación integral de SPH . . . . .	17
2.3.2 Formulación discreta de SPH . . . . .	21
<b>3 Nueva Función Kernel</b>	<b>26</b>
3.1 Introducción . . . . .	26
3.2 Problemas de Inestabilidad e Imprecisión . . . . .	27
3.3 Nuestra Función Kernel . . . . .	31
3.3.1 Características analíticas de $C_{ij}$ -Cosine . . . . .	34
<b>4 Metodo Híbrido Potencial-SPH</b>	<b>37</b>
4.1 Introducción . . . . .	37
4.2 Problemática de la Imposición de Incompresibilidad . . . . .	38
4.3 Propuesta para el Modelado de la Incompresibilidad . . . . .	42
4.3.1 Fuerza de presión propuesta . . . . .	43
4.3.2 Imposición de la incompresibilidad y disipación del calor . . . . .	46

4.3.3	Densidad incompresible . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Interacción Fluido Contorno</b>	<b>53</b>
5.1	Introducción . . . . .	53
5.2	Técnicas de Interacción . . . . .	54
5.3	Modelo de Interacción Fluido–Contorno Propuesto . . . . .	58
5.3.1	Etapas de interacción . . . . .	59
5.3.2	Etapas de restricción . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Resultados</b>	<b>71</b>
6.1	Introducción . . . . .	71
6.2	Pruebas de Estabilidad y Precisión para la Función Kernel . . . . .	72
6.2.1	Sedimentación de una distribución aleatoria de partículas . . . . .	74
6.2.2	Prueba Sod’s shock–tube . . . . .	76
6.2.3	Prueba de onda expansiva . . . . .	79
6.2.4	Prueba de impacto sobre muro . . . . .	82
6.2.5	Prueba de Sjögren . . . . .	85
6.3	Resultados del Método Híbrido Potencial–SPH . . . . .	88
6.3.1	Imposición de la incompresibilidad . . . . .	89
6.3.2	Control del balance de energía en el contorno . . . . .	89
6.3.3	Rangos temporales de estabilidad . . . . .	90
6.4	Resultados del Modelado de Interacción Fluido–Contorno . . . . .	90
6.4.1	Comparativa con otros modelos de interacción fluido–contorno . . . . .	91
6.4.2	Comparativa entre diferentes condiciones de contorno . . . . .	92
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>100</b>
7.1	Conclusiones . . . . .	100
<b>8</b>	<b>Conclusions</b>	<b>106</b>
8.1	Conclusions . . . . .	106
	<b>Referencias</b>	<b>112</b>
	<b>Apendice A Ecuaciones de Euler</b>	<b>119</b>
A.1	Ecuaciones de Euler para Fluidos . . . . .	119

# Lista de Figuras

1.1	Representación de los modelados del fluido para la implementación de técnicas numéricas. La imagen superior representa el fluido a simular, mientras que en las inferiores se muestra del dominio discretizado. La imagen inferior izquierda muestra la discretización asociadas a la metodología lagrangiana, en la inferior derecha se muestra la euleriana. . . . .	3
2.1	Representación esquemática de los elementos relevantes en la formulación SPH. $W(r - r', h)$ representa a la función kernel, $h$ hace referencia al radio del dominio soportado. Las partículas cuya distancia cumple $r - r' < h$ son partículas vecinas. . . . .	15
3.1	Gráfica de la función kernel propuesta $C_{ij}$ -Cosine, identificada como $W$ , así como su gradiente y laplaciano, mostrada como $W'$ y $W''$ respectivamente. Para obtener estas gráficas se ha considerado los valores $K = \alpha = \Gamma = 1$ . . .	34
3.2	Funciones kernel más relevantes obtenidas al dar valores específicos a los parámetros. Las funciones de la izquierda, gráficas 3.2a, mejoran los resultados de la simulación cuando la distribución de partículas vecinas es inhomogénea, como ocurre en los contornos. Las funciones de la derecha, gráficas 3.2b, mejoran los resultados en situaciones de cambio brusco de densidad o presión, como sucede en las interfases. . . . .	35
4.1	Gráfica del potencial propuesto. Se ha particularizado para los valores $h = 3$ , $\varepsilon = 0.6$ , $\zeta = 1.25$ y $\alpha = 1.0$ . . . . .	45
5.1	Casuística asociada a la etapa de interacción. En todas ellas, las partículas de contorno vecinas están en color verde y la partícula de interacción se muestra con núcleo blanco. La partícula roja, figuras 5.1b y 5.1c, representa la colisión de la partícula fluida con el contorno, lo que requiere el uso del proceso alternativo. . . . .	61

6.1	Evolución desde una distribución aleatoria de partículas hasta una distribución de partículas sedimentadas. Los resultados se obtienen para diferentes funciones kernel. . . . .	75
6.2	Comparativa entre la solución exacta y las soluciones numéricas, de los resultados obtenidos para la prueba Sod's shock-tube. El valor de los parámetros de la función $C_{ij}$ -Cosine son $i = 3$ y $j = 5$ para la densidad y la velocidad y $i = 2$ y $j = 4$ para la energía térmica, con los que se obtienen los mejores resultados. . . . .	78
6.3	Comparativa entre la solución exacta y las soluciones numéricas, de los resultados obtenidos para la prueba de onda expansiva. El valor de los parámetros de la función $C_{ij}$ -Cosine son $i = 3$ y $j = 5$ para la densidad y la velocidad y $i = 2$ y $j = 4$ para la energía térmica, con los que se obtienen los mejores resultados. . . . .	81
6.4	Comparativa entre la solución exacta y las soluciones numéricas, de los resultados obtenidos para la prueba impacto sobre muro. El valor de los parámetros de la función $C_{ij}$ -Cosine son $i = 2$ y $j = 6$ para la presión y la velocidad y $i = 2$ y $j = 5$ para la energía térmica, con los que se obtienen los mejores resultados. . . . .	84
6.5	Comparativa entre la solución exacta y las soluciones numéricas, de los resultados obtenidos para el test de Sjögreen. El valor de los parámetros de la función $C_{ij}$ -Cosine son $i = 2$ y $j = 6$ para la densidad y la velocidad y $i = 2$ y $j = 5$ para la energía térmica, con los que se obtienen los mejores resultados. . . . .	87
6.6	Imágenes de simulaciones de fluidos obtenidas mediante diferentes técnicas. Las imágenes 6.6a y 6.6b se han obtenido a partir de la implementación del modelo WCSPH; las imágenes 6.6c y 6.6d se han obtenido mediante PCISPH; las imágenes 6.6e y 6.6f son el resultado de nuestro método híbrido Potencial-SPH. . . . .	95
6.7	Imágenes de la simulación de fluidos en dos momentos diferentes, activando y desactivando la disipación de calor. Las imágenes superiores se obtienen al activar la disipación de calor, en las imágenes inferiores se desactiva la disipación de calor. . . . .	96
6.8	Imágenes de la simulación del fluido en el instante $t = 1.25s$ obtenido para diferentes instantes de tiempo: figura 6.8a $\Delta t = 0.001s$ , figura 6.8b $\Delta t = 0.008s$ , figura 6.8c $\Delta t = 0.02s$ y figura 6.8d $\Delta t = 0.07s$ . . . . .	97

---

6.9	Comparativa de los resultados obtenidos con diferentes técnicas basadas en partículas de contorno. En la figura 6.9a, se muestra el resultado de la técnica propuesta por Becker et al. [11]. En la figura 6.9b, el obtenido a partir del modelo de por Oger et al [66]. En la figura 6.9c, el de la propuesta de Akinci et al. [3]. Finalmente, en la figura 6.9d, se muestra el resultado obtenido con nuestra propuesta. En cada imagen, se ha destacado la región donde mejor se muestra la capacidad de cada técnica. . . . .	98
6.10	Resultados de interacción del fluido con un elipsoide, cada dupla (fila de imágenes) se obtiene para el mismo instante. Comparativamente se pueden ver las diferencias. . . . .	99

# Lista de Tablas

6.1	Valores del parámetro de orden, $\zeta$ , asociado a la prueba de sedimentación de una distribución aleatoria de partículas. . . . .	76
6.2	Valores relevantes obtenidos de las gráficas de la densidad para la prueba Sod's shock-tube, figura 6.2a. . . . .	79
6.3	Valores relevantes obtenidos de las gráficas de la energía térmica para la prueba Sod's shock-tube, figura 6.2b. . . . .	79
6.4	Valores relevantes obtenidos de las gráficas de la velocidad para la prueba Sod's shock-tube, figura 6.2c. . . . .	80
6.5	Valores relevantes obtenidos de las gráficas de la densidad para la prueba de onda expansiva, figura 6.3a. . . . .	82
6.6	Valores relevantes obtenidos de las gráficas de la energía térmica para la prueba de onda expansiva, figura 6.3b. . . . .	82
6.7	Valores relevantes obtenidos de las gráficas de la velocidad para la prueba de onda expansiva, figura 6.3c. . . . .	82
6.8	Valores relevantes obtenidos de las gráficas de la densidad para la prueba de impacto sobre muro, figura 6.4a. . . . .	85
6.9	Valores relevantes obtenidos de las gráficas de la energía térmica para la prueba de impacto sobre muro, figura 6.4b. . . . .	85
6.10	Valores relevantes obtenidos de las gráficas del momento para la prueba de impacto sobre muro, figura 6.4c. . . . .	85
6.11	Valores relevantes obtenidos de las gráficas de la densidad para el test Sjögren, figura 6.5a. . . . .	87
6.12	Valores relevantes obtenidos de las gráficas de la energía térmica para el test Sjögren, figura 6.5b. . . . .	88
6.13	Valores relevantes obtenidos de las gráficas de la velocidad para el test Sjögren, figura 6.5c. . . . .	88

---

6.14 Rangos de valores de estabilidad. Las magnitudes se expresan en unidades del sistema internacional. . . . .	91
--	----

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Introducción

La simulación de fluidos juega un papel fundamental en el ámbito de la ingeniería informática. Por ello, a lo largo de las últimas décadas se han desarrollado, y mejorado, distintas técnicas computacionales con las que obtener simulaciones realistas, esto es, simulaciones estables y precisas acordes con el comportamiento esperado del fluido.

En términos cuantitativos un fluido se conforma como un medio continuo en el que se definen *variables de estado*, como son *la densidad de masa, la presión, la velocidad, energía térmica, etc.* y *propiedades constitutivas*, tales como *la viscosidad y la incompresibilidad entre otras*. Por otro lado, la dinámica del flujo del fluido, se describe mediante un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, donde se establecen relaciones entre las variables de estado y las propiedades constitutivas. A través de estas ecuaciones, basadas en los principios de conservación, se cuantifican y relacionan la variación temporal y espacial de las variables de estado, como se describe en [91]. En términos operativos, simular el flujo de un fluido consiste en conocer el valor de las variables de estado en todos los puntos del fluido y en cualquier instante de tiempo. Esto se consigue resolviendo las ecuaciones en derivadas parciales que describen el flujo. Sin embargo, sólo es posible obtener soluciones analíticas, de dichas variables de estado, para problemas muy concretos con alta simetría espacial. Para casos más generales, es necesario el uso de métodos numéricos [91].

En síntesis, estos métodos numéricos operan sobre discretizaciones del fluido continuo. Estas discretizaciones consisten en un conjunto ligado de puntos de muestreo distribuidos a lo largo de todo el volumen del fluido. La ventaja operativa de los métodos numéricos se basa en el hecho de que las variables de estado se particularizan sobre los puntos de muestreo. De este modo, las ecuaciones en derivadas parciales que describen el flujo, se transforman en un conjunto de ecuaciones algebraicas resolubles mediante procesamiento computacional.

Dependiendo de los objetivos que se establezcan para la simulación, se puede prescindir de la implementación de algunas de las ecuaciones en derivadas parciales que describen el flujo del fluido. En el caso particular de la informática gráfica (que designaremos por sus siglas en inglés CG), donde se busca un equilibrio entre el realismo y la eficiencia computacional, como se describe en [35, 62, 80], suele ser habitual resolver sólo la ecuación de Navier–Stokes (NS). Para simular otros fenómenos que aparecen en el fluido, tales como la incompresibilidad o el balance de energía térmica, es necesario el modelado de restricciones anexas sobre la ecuación de NS, tal como se propone en [3, 8, 17, 68], ecuación que en su formulación más compacta se define a través de la expresión 1.1:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 v + \rho g, \quad (1.1)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $D/Dt$  hace referencia a la derivada sustancial,  $v$  es la velocidad del fluido,  $P$  es la presión del fluido,  $g$  es la gravedad y  $\mu$  es la viscosidad del fluido. En el ámbito de la simulación de fluidos, el término  $-\nabla P$  suele ser designado como fuerza de presión y representa la tasa de cambio de presión que aparecen entre regiones contiguas del fluido;  $\mu \nabla^2 v$  se denomina fuerza de viscosidad que es de naturaleza disipativa y se relaciona con las propiedades constitutivas del fluido a través de la viscosidad  $\mu$ ; y el término  $\rho g$  es el peso.

Existen diferentes métodos con los que resolver numéricamente la ecuación 1.1 y simular el fluido, si bien suelen agruparse en dos categorías: *euleriana* y *langrangiana*. En una descripción breve de sus características podemos afirmar que los métodos eulerianos operan sobre discretizaciones del fluido a través de mallas conformadas mediante triángulos o cuadriláteros. En cada uno de estos polígonos se ubican, generalmente en sus vértices y aristas, un conjunto de puntos de muestreo, sobre los que se particularizan las variables de estado [47, 91]. Por otro lado, en los métodos lagrangianos, el fluido se modela mediante un conjunto de partículas sobre las que se definen las variables de estado. La interacción mutua entre estas partículas, es ponderada a través de una función que depende de la distancia [13, 71]. En la figura 1.1 se ilustran las dos metodologías que acabamos de describir.

Simular un fluido utilizando métodos eulerianos, transforma las ecuaciones en derivadas parciales, que describen el flujo del fluido, en un sistema de ecuaciones algebraicas. Esta formulación presenta algunas ventajas operativas como es el hecho de que permite acoplar directamente presión y velocidad, con lo que es relativamente sencillo imponer la restricción de incompresibilidad [91]. Además, fenómenos como la advección o la ruptura de flujo laminar son fácilmente modelados y simulados. A pesar de estas ventajas, los métodos eulerianos tienen algunos inconvenientes, los más destacables son: (1) la distorsión en los resultados obtenidos, (2) la reestructuración reiterada de la malla de polígonos para

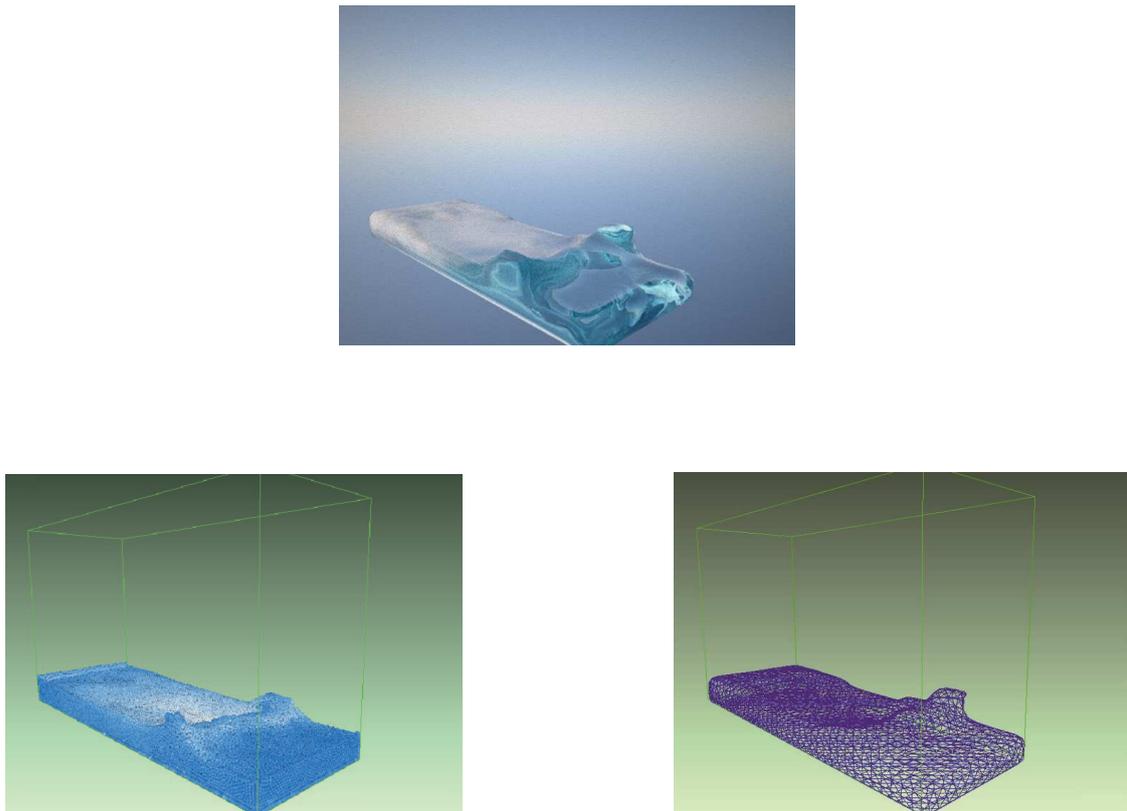


Figura 1.1 Representación de los modelados del fluido para la implementación de técnicas numéricas. La imagen superior representa el fluido a simular, mientras que en las inferiores se muestra del dominio discretizado. La imagen inferior izquierda muestra la discretización asociadas a la metodología lagrangiana, en la inferior derecha se muestra la euleriana.

poder simular el flujo, (3) la complejidad del sistema de ecuaciones algebraicas modelado, según se describe en [91]. En referencia (1), la distorsión se relaciona con la alta tasa de cambio que puede aparecer en las variables de estado, especialmente en la velocidad y la presión. La consecuencia de la distorsión, es que los valores de estas magnitudes acaban siendo multivaluados, lo que induce alta inestabilidad en resultados [91]. Para resolver este problema se requiere reestructurar la malla de polígonos y reformular las magnitudes dinámicas. Respecto a la limitación (2), la malla requiere ser reestructurada por dos causas, la primera es para evitar la distorsión, que hemos descrito previamente, la segunda es para que se adapte a los cambios del contorno, especialmente en la superficie libre, cuando exista interfase en el fluido. En la reestructuración se induce una pérdida de eficiencia computacional, ya que cada vez que es necesario llevarla a cabo, el cálculo de las variables de estado se paraliza. Así pues, la eficiencia se reduce drásticamente. A todo ello hay que añadir la limitación (3), esto es, la complejidad del sistema de ecuaciones algebraicas ya que del proceso de reestructuración induce el incremento del número de ecuaciones e incógnitas en el sistema de ecuaciones, lo que dificulta su resolución. Es por ello por lo que, aunque estos inconvenientes no perjudican los resultados de la simulación, no son idóneos para uso en el ámbito de CG, especialmente por su excesivo coste computacional, tal como se advierte en [63, 80].

Por otro lado, utilizar métodos lagrangianos para modelar la dinámica del fluido, transforma las ecuaciones en derivadas parciales del fluido en un sistema de ecuaciones algebraicas, en el que sus ecuaciones habitualmente están desacopladas, como se indica en [4, 71], por lo cual, en comparación con los métodos eulerianos, los lagrangianos son mucho más eficientes. Además, otras ventajas que presentan estos métodos son: (1) su adaptabilidad y versatilidad para simular entornos complejos, según [62], (2) la conservación de masa, según se justifica en [54, 62, 71], (3) la simplificación de la formulación para resolver las ecuaciones dinámicas del fluido [45, 54], (4) la obtención directa de la superficie libre, ya que al estar modelado mediante partículas, la interfase se simula directamente, según la descripción realizada en [54, 62]. Por estas características, que representan una ventaja operativa frente a los métodos eulerianos, los métodos lagrangianos han sido intensivamente utilizados en el ámbito de CG, siendo el método Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) uno de los más implementados.

Sin embargo, a pesar de las ventajas previamente descritas, es habitual que en las simulaciones mediante SPH aparezcan comportamientos erráticos, tales como agrupaciones irreales de partículas, dispersiones espurias en los contornos o sobreamortiguamiento. La consecuencia son simulaciones en las que se muestra un comportamiento errático del fluido, que no es acorde con su comportamiento real.

*El origen de este comportamiento errático suele relacionarse con problemas de inestabilidad e imprecisión del método SPH, como se destaca en [21, 74, 90].*

Con el objetivo de resolver los problemas de inestabilidad e imprecisión que aparecen en las simulaciones de fluidos mediante SPH, y obtener así simulaciones realistas, hemos desarrollado un conjunto de mecanismos que serán descritos a lo largo de esta tesis. Comenzaremos analizando las causas que generan esos problemas y justificaremos cómo nuestras propuestas las resuelven.

En la siguiente sección vamos a describir el origen de esos problemas de inestabilidad e imprecisión y las consecuencias que tienen en la simulación.

## 1.2 Limitaciones del Método SPH

Como ya hemos mencionado con anterioridad, existe un consenso en relacionar las simulaciones erráticas de SPH, con los problemas de imprecisión e inestabilidad del método. En esta sección vamos a describir, brevemente, estos problemas inestabilidad e imprecisión y su repercusión en la simulación. Nos centraremos en las diversas metodologías propuestas para resolverlos, así como las limitaciones que dichas propuestas presentan. El objetivo es hacer una introducción sobre los problemas que el método SPH presenta y cómo su resolución es un campo de investigación aún abierto.

Diversos estudios [36, 57, 71, 74, 90] concluyen que el método SPH presenta problemas de inestabilidad e imprecisión que acaba reduciendo el realismo de la simulación. Dichos problemas suelen relacionarse con:

1. *El número y distribución de partículas vecinas.* En las simulaciones mediante SPH suelen aparecer dos problemas que, *a priori*, podrían parecer contradictorios, estos son: (1) dispersiones irreales de partículas, (2) agrupamiento erróneo de partículas. El origen suele relacionarse con el número y la distribución de las partículas con las que cada una de ellas interactúa (*las partículas vecinas*), según los estudios de [71, 74]. Para resolver estos problemas se han desarrollado técnicas centradas en incrementar el número de partículas vecinas, según la recomendación dada por [21, 74]. Sin embargo, existen regiones en el fluido donde este incremento no puede llevarse a cabo, como ocurre en las interfases y en las regiones de interacción con el contorno, como se destaca en [80]. Además, este incremento no resuelve los problemas relacionados con el agrupamiento erróneo de las partículas, según el estudio desarrollado por [14, 21]. Es por ello, por lo que se han desarrollado técnicas que afrontan el problema desde un punto de vista dinámico y no de distribución de partículas. En síntesis, estas técnicas resuelven la agrupación irreal o la dispersión introduciendo fuerzas de control

ficticias que inducen una repulsión artificiosa de las partículas, cuando aparece la agrupación irreal, o amortigüen en el caso de que se manifieste la dispersión errónea. Con estas metodologías se puede paliar, en parte, los problemas de agrupamiento y dispersión. Sin embargo, estas fuerzas ficticias suelen acabar desestabilizando el fluido, ya que habitualmente violan la conservación del momento, lo que favorece el sobreamortiguamiento, tal como se indica en [21]. *Así pues, es necesario desarrollar una técnica que sea inmune a la distribución y el número de partículas vecinas.*

2. *La ponderación de la dinámica entre las partículas.* Desde el punto de vista de la interacción, en SPH, el pilar fundamental es que la interacción entre partículas decae continuamente con la distancia. Dicha interacción es modelada mediante una función continua y monótona decreciente con la distancia, (la *función kernel*). Diversos estudios se han centrado en formular funciones kernel que garanticen estabilidad y precisión, como los llevados a cabo por [21, 88]. En estos estudios se destaca la relación entre la función kernel, el agrupamiento irreal de las partículas y el sobreamortiguamiento, por lo que se proponen distintas funciones para solventar estos problemas. Los resultados que se obtienen son satisfactorios en la mayoría de los casos. Sin embargo, requiere que el número de partículas vecinas sea relativamente alto, según se indica en [21], restricción que no se puede satisfacer ni en las interfases, ni en el contorno, tal como se advierte en [74, 80]. *Es por ello que se hace necesario, formular nuevas funciones kernel que garanticen estabilidad aun cuando el número de partículas vecinas sea bajo.*
3. *La imposición de la incompresibilidad.* Una de las restricciones más destacables que tienen los líquidos es la incompresibilidad. Cuantitativamente, la incompresibilidad se describe mediante una ecuación de continuidad, donde dos variables de estado como son la velocidad y la tasa de cambio de la densidad, no pueden variar libremente [9], es decir, que la densidad de masa se mantiene constante en todo el flujo del fluido. Cualitativamente, no imponer la incompresibilidad da como resultado simulaciones poco realistas, donde el efecto más destacable es el sobreamortiguamiento, según [57]. Para evitar este problema se han desarrollado diversas estrategias que dependiendo del proceso de resolución se suelen clasificar en *implícitas* y *explícitas*. En las técnicas implícitas, se suele modelar la condición de incompresibilidad que se acopla con la ecuación de NS, como se describe en [36], el resultado es un sistema de ecuaciones que satisface la condición de incompresibilidad, a partir del cual, se calcula el campo de presiones o de densidades. Por otro lado, en los métodos explícitos, o bien se establece una relación entre la densidad y la presión, mediante la ecuación de estado

[9], y se fijan fuerzas que impidan el sobreamortiguamiento [57]; o bien se relaciona la densidad y la presión, mediante un método predictor–corrector, de modo que se satisfaga la incompresibilidad, según [80]. Si bien ambas estrategias, implícitas y explícitas, pueden dar resultados satisfactorios desde el punto de vista del realismo de la simulación, cada una de ellas presentan limitaciones específicas. Por ejemplo, en las técnicas implícitas, la resolución del sistema de ecuaciones formado por la ecuación de continuidad y la de NS, requiere de una simplificación de la ecuación de continuidad, lo que puede reducir el realismo, tal como se indica en [8, 36]. Además, resolver un sistema de ecuaciones en derivadas parciales incrementa el coste computacional. Por otro lado, las técnicas explícitas, aunque son eficientes desde el punto de vista del coste computacional, no consiguen controlar la incompresibilidad por debajo de un 2% de cambio en la densidad, según se advierte en el estudio de [80]. Además, con estas técnicas explícitas, no se solventa totalmente los problemas de estabilidad en las regiones del contorno del fluido, donde el número de partículas vecinas no puede controlarse. *Así pues, se hace necesario desarrollar una técnica que aproveche la eficiencia de los métodos explícitos y con la que se obtengan resultados estables en todas las áreas del fluido, especialmente en las regiones límites del contorno.*

4. *El balance de energía térmica en el contorno.* En el flujo del fluido se producen balances de energía térmica que modifican su estado interno [74]. Cuantitativamente, el cambio de energía térmica se describe mediante la ecuación diferencial del calor [9, 74], donde los cambios de energía térmica se compensan con variaciones de la presión y la densidad [74, 91]. La complejidad de resolver esta ecuación junto con la de NS lo hace poco atractivo para su uso en el ámbito de CG, por lo que el balance de energía térmica en el fluido no suele ser simulado. Sin embargo, es necesario compensar los cambios de energía térmica para obtener simulaciones realistas. El modo habitual de hacerlo es implementar modelos viscosos en los que la viscosidad amortigua el exceso de energía térmica. Sin embargo, estos modelos suelen inducir sobreamortiguamiento [57]. Además, existe un problema entre la incompresibilidad y el balance de energía térmica en el contorno. Sucintamente, lo que ocurre es que la incompresibilidad favorece un trasvase de energía térmica en el contorno del fluido. Dicho balance de energía térmica, de no ser disipado, genera dispersiones erróneas de las partículas, lo que afecta a la estabilidad y precisión de la simulación, como se destaca en [74]. La manera habitual de tratar estas dispersiones de partículas, es introduciendo un coeficiente de disipación, que actúa sobre la velocidad de las partículas del fluido que interactúan con el contorno. El problema es que el balance de energía térmica en el contorno, no sólo se debe al cambio de velocidad, sino más

bien a los cambios de presión al “*impactar*” el fluido sobre el contorno. *Es por ello que se hace necesario desarrollar una técnica que relacione la incompresibilidad y el balance de energía térmica, especialmente en el contorno.*

5. *La interacción fluido contorno.* En la simulación del fluido tiene especial interés la interacción con el contorno, según [64]. Dos son los principales retos a la hora de simular la interacción fluido–contorno: el primero es la detección y el segundo es el modelado de las condiciones de contorno. Para la detección se han desarrollado diversas técnicas, geométricas [18], discretas [51] o analíticas [90]. El principal objetivo de la detección es determinar las partículas del fluido que contactan con el contorno. Con el modelado de las condiciones de contorno, el objetivo es simular los diferentes efectos, que en las variables de estado, tiene el contorno. Estos efectos suelen estar descritos mediante ecuaciones en derivadas parciales. El problema que plantea el modelado de las condiciones del contorno es que, los usados habitualmente en CG, no pueden modelar condiciones de contorno complejas, como se advierte en [84], lo cual limita el espectro de simulaciones. Para poder simular condiciones de contorno complejas, aunque existen estudios que afrontan este problema, las soluciones que proponen son poco adecuadas para su uso en CG, por la complejidad numérica que presentan. Complejidad que induce un incremento de coste computacional que no compensa los efectos simulados. *Por ello, es necesario desarrollar una técnica que permita una correcta gestión tanto de la detección, como de la imposición de condiciones de contorno complejas. Técnica que debe tener dos objetivos: el primero es conseguir estabilidad y precisión y el segundo es que sea útil para su uso en el ámbito de CG.*
6. *Los errores en las magnitudes dinámicas en el contorno.* Uno de los problemas recurrentes en SPH se relaciona con el bajo número de partículas vecinas. Cuando el número de partículas vecinas es bajo, magnitudes como la velocidad, densidad y presión acumulan errores numéricos, lo que afecta a la estabilidad de la simulación, que se deduce de los estudios [8, 80]. Este problema se ve agudizado en el contorno, donde además de los problemas relacionados con el número de partículas vecinas se le añade el modelado de magnitudes como la densidad, presión y velocidad, al interactuar con el contorno [84]. Así pues, *se debe desarrollar una metodología acorde con la imposición de las condiciones de contorno, y que permita calcular magnitudes como la densidad o la presión, aunque no exista una condición de contorno específica para estas magnitudes.*

## 1.3 Nuestra Motivación

El objetivo de esta tesis es analizar los problemas de estabilidad y precisión que presenta el método SPH, su efecto en las simulaciones de fluidos y desarrollar mecanismos con los que resolver estos problemas. Analizando las limitaciones del método SPH, descritas en la sección 1.2, podemos identificar tres fuentes principales que son el origen de estos problemas de inestabilidad e imprecisión, estas fuentes son: (1) la relacionada con el número y distribución de las partículas vecinas, (2) la asociada a la imposición de la condición de incompresibilidad y (3) la debida a la interacción fluido contorno.

Seguidamente describiremos, en forma resumida, nuestras propuestas para solventar los problemas de inestabilidad e imprecisión:

1. *Nueva función kernel.* Tanto el número como la distribución de las partículas vecinas condiciona el realismo de la simulación, como indican [21, 88]. A este respecto, existe un consenso, según el cual, la forma más eficaz de solventar los problemas de estabilidad y precisión, especialmente cuando el número de partículas vecinas es bajo, es *formulando* una función kernel que sea capaz de gestionar situaciones de bajo número de partículas que una de las principales fuentes de inestabilidad, tal como se describe en [21, 71, 74]. Debido a que con las funciones kernel existentes no se resuelven completamente los problemas de estabilidad y precisión, especialmente en las regiones del contorno, hemos desarrollado una nueva función kernel. Sucintamente, podemos describirla como una función kernel paramétrica, formulada a partir de la composición de funciones armónicas. La inclusión de los parámetros va a permitir controlar el “peso” que cada partícula vecina tiene mediante dos vías: la primera es por la distancia, que es lo que tiene en común con todas las funciones kernel existentes y que viene impuesta por la propia formulación del método SPH, la segunda es mediante los parámetros de control que hemos incluido. Esto representa una ventaja cuantitativa, especialmente en los contornos e interfases del fluido, ya que podemos aumentar la importancia de las partículas vecinas cuando su número es bajo, sin violar las premisas de SPH. De este modo, mejoramos la precisión de los resultados obtenidos, como demostraremos en la sección 6.2.

En el capítulo 3 llevaremos a cabo la descripción de la función kernel que hemos desarrollado, especialmente los criterios y el proceso seguido para su formulación, así como sus características analíticas.

2. *Imposición de incompresibilidad.* La imposición de la condición de incompresibilidad, especialmente en los líquidos, induce la aparición de problemas de estabilidad, según

[2, 80]. Para solventar este problema, hemos reformulado la fuerza asociada a los cambios de presión (la fuerza de presión que interviene en la ecuación de NS) y primamos a la presión como magnitud relevante en la incompresibilidad. Esta nueva formulación va a garantizar estabilidad y precisión aun cuando el número de partículas vecinas sea bajo, como demostraremos en la sección 6.3. Brevemente, podemos describirla como una fuerza obtenida a partir de un potencial conservativo asimétrico con un valor asintótico para valores bajos de la distancia entre partículas. De este modo, conseguimos imponer explícitamente la condición de incompresibilidad. Además, por formularse a partir de un potencial conservativo, podemos restringir la interacción a cada par de partículas vecinas. De este modo, conseguimos estabilidad, para la fuerza de presión, con tan sólo una partícula vecina.

En el capítulo 4, describiremos los criterios seguidos para esta nueva formulación, así como las ventajas analíticas que nuestra propuesta ofrece.

3. *Control del balance de energía térmica.* El balance de energía térmica en el interior del fluido es un hecho fenomenológico que no suele ser considerado en el ámbito de CG. Sin embargo, sobre todo en las regiones del contorno, prescindir del control de este balance induce inestabilidad, como se advierte en [21, 74]. Para solventar esta limitación, y a partir de nuestra propuesta para imponer la incompresibilidad, hemos desarrollado una formulación que permite cuantificar el balance de energía térmica y controlarlo. Así evitamos, los problemas de inestabilidad derivados de la no inclusión del balance de energía térmica. Las mejoras que obtenemos con nuestra propuesta se mostrarán en la sección 6.3.2.

En el capítulo 4, y concretamente en la sección 4.3, describiremos el proceso desarrollado para modelar el balance de energía térmica.

4. *Interacción fluido–contorno.* Una de las regiones donde los problemas de inestabilidad se hacen más evidentes es en el contorno [3, 19]. Independientemente de otras fuentes de inestabilidad, una de las causas es cómo se modela la interacción fluido–contorno, esto es, cómo se discretiza el contorno y cómo se modela numéricamente las condiciones de contorno. Por ello, hemos desarrollado una técnica con la que modelar este tipo de interacción. Para llevar a cabo esta tarea hemos aunado técnicas analíticas y numéricas, de modo que hemos obtenido ecuaciones que no violan la conservación del momento, que permiten imponer condiciones de contorno de cualquier complejidad y que, además, no inducen un excesivo incremento del coste computacional. De este modo, hemos conseguido un método aplicable no sólo a contornos de perfil complejo,

sino también para condiciones de contorno que, hasta ahora, no era posible simularlas en el ámbito de CG.

En el capítulo 5 describiremos nuestra propuesta para el modelado de la interacción fluido–contorno .

## 1.4 Estructura de esta Memoria

El resto de esta tesis se organiza según la siguiente estructura. En el capítulo 2 llevaremos a cabo la descripción del método SPH. Nos centraremos en sus fundamentos analíticos y las capacidades que el método presenta a la hora de simular fluidos. Así mismo, destacaremos las limitaciones que el método presenta, desde el punto de vista de la estabilidad y la precisión, y esbozaremos las fuentes de dichas limitaciones, especialmente las relacionadas con la función kernel, la imposición de la incompresibilidad y con la interacción fluido–contorno.

Seguidamente, en el capítulo 3 describiremos la primera propuesta para resolver la imprecisión e inestabilidad en SPH. En esta primera propuesta nos centraremos en formular una función kernel paramétrica, con la que generar toda una familia de funciones con las que optimizar los resultados. En este capítulo 3, también llevaremos a cabo un estudio de la problemática de la inestabilidad y cuáles son las propuestas para resolverlas. Nos centraremos en aquellos estudios donde se describen las características analíticas que deben satisfacer las funciones kernel para favorecer la precisión y estabilidad. A partir de las conclusiones de estos estudios formulamos nuestra función kernel.

A continuación, en el capítulo 4, trataremos la problemática de la inestabilidad relacionada con la incompresibilidad. Describiremos cuales son las consecuencias de no gestionar adecuadamente la incompresibilidad, así como las diversas propuestas existentes para imponer dicha restricción. Teniendo en cuenta estas propuestas, desarrollamos nuestra técnica híbrida Potencial–SPH, con la que imponemos explícitamente la incompresibilidad. Justificaremos nuestra propuesta y describiremos como ganamos eficiencia y estabilidad.

Así mismo, en el capítulo 5 nos centraremos en la inestabilidad que se debe a la interacción fluido contorno. Analizaremos los diversos modelos existentes y cuáles son sus limitaciones, especialmente desde la perspectiva de la inestabilidad. Para solventar esta inestabilidad, desarrollamos nuestra propuesta que no sólo va a favorecer simulaciones estables, sino que permitirá imponer condiciones de contorno complejas. De este modo, vamos a ser capaces de simular condiciones de interacción no consideradas habitualmente en el ámbito de CG.

Una vez descritos nuestras tres técnicas para mejorar la estabilidad y la precisión, demostraremos, en el capítulo 5, como efectivamente nuestras propuestas consiguen sus objetivos. Para ello, llevaremos a cabo un conjunto de pruebas analíticas y simulaciones, esto

es, demostraremos tanto cuantitativa como cualitativamente las mejoras que se obtienen con nuestras propuestas. Para ello, realizaremos una comparación entre los resultados obtenidos con nuestras propuestas y con otras técnicas habitualmente usadas en el ámbito de CG.

Finalmente, en el capítulo 6 describiremos las conclusiones que se pueden deducir de los resultados obtenidos en nuestra investigación. Haremos hincapié en las mejoras obtenidas, las cuales están avaladas por los resultados obtenidos en el capítulo 5.



# Capítulo 2

## Fundamentos del Método SPH

### 2.1 Introducción

Como ya hemos mencionado con anterioridad, la complejidad de la ecuación dinámica que describe el flujo del fluido, la ecuación de NS (ecuación 1.1), impide la obtención de soluciones analíticas, excepto en problemas muy concretos con alta simetría. Para solventar esta limitación y simular el flujo del fluido se hace necesario el uso de métodos numéricos, como es el caso del método SPH. Inicialmente desarrollado por Gingold–Monaghan [32] y Lucy [48], el método SPH opera sobre discretizaciones del fluido mediante partículas, cada una de las cuales representa una fracción del volumen total del fluido. Profundizando un poco más en la descripción del método, en SPH las magnitudes dinámicas se particularizan sobre cada partícula y la interacción mutua entre ellas, se cuantifica mediante una función escalar monótona decreciente con la distancia, denominada *función kernel*. La función kernel queda definida a través de un rango de interacción, o de influencia, denominado *radio del dominio soportado*, que operativamente debería ser finito. El radio del dominio tiene especial importancia dentro del método SPH, ya que restringe el número de partículas que interactúan entre sí, es decir, el radio del dominio soportado define la cantidad de partículas vecinas de cada una de las partículas del fluido. A partir de estas características básicas, ilustradas en la figura 2.1, es posible modelar las complejas ecuaciones del fluido y simular su dinámica mediante un procesamiento relativamente sencillo.

Una vez descrita, sucintamente, las características esenciales de SPH, el siguiente paso es profundizar en sus fundamentos, tarea que llevaremos a cabo en las siguientes secciones. Comenzaremos describiendo las características operativas del método SPH. Seguidamente nos centraremos en sus fundamentos matemáticos y cómo, a partir de estos fundamentos, se obtiene la formulación general del método SPH. Con esta formulación es posible aproximar las magnitudes dinámicas del fluido, con lo que se puede modelar su dinámica y, al resolverla,

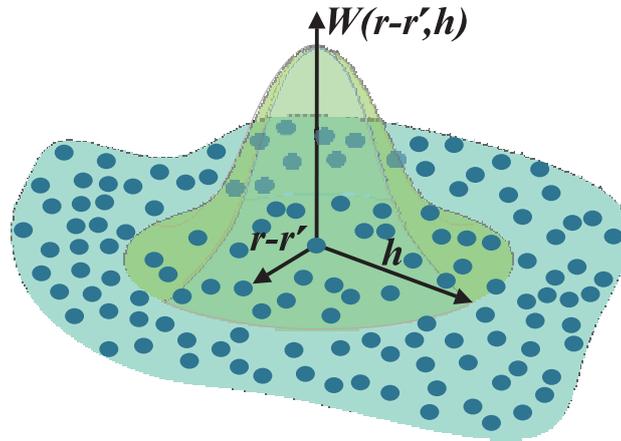


Figura 2.1 Representación esquemática de los elementos relevantes en la formulación SPH.  $W(r - r', h)$  representa a la función kernel,  $h$  hace referencia al radio del dominio soportado. Las partículas cuya distancia cumple  $r - r' < h$  son partículas vecinas.

simular su flujo. Así mismo, esbozaremos algunas de las limitaciones que este método presenta. Para resolver estas limitaciones, hemos desarrollado un conjunto de mecanismos que serán descritas en los capítulos 3, 4 y 5.

## 2.2 Características del Método SPH

Cualitativamente, el hecho de que el método SPH se base en el modelado del fluido mediante partículas, implica que los desplazamientos de éstas representen al flujo del fluido. Por otro lado, desde un punto de vista cuantitativo, sobre cada una de las partículas se particularizan las propiedades constitutivas y las variables de estado, tales como: la presión, la densidad de masa, la energía térmica, la velocidad, la posición, etc. Así pues, las partículas juegan el papel de los puntos de muestreo que “fluyen” con el movimiento del fluido. Esta es la causa por la que el método SPH se basa en la formulación lagrangiana de la ecuación de NS, según se describe en [55, 70], ecuación 1.1.

Pasar de la formulación continua de las variables de estado, a un modelado discreto con el que opera SPH, implica una pérdida de información dinámica ya que, *a priori*, no se modela la interacción definida a través de la ecuación de NS. Para evitar este problema, en el método SPH, se formula una función monótona decreciente con la distancia, denominada *función kernel*, que constituye un pilar fundamental de este método. Analíticamente, la función kernel debe satisfacer un conjunto de características, las cuales serán descritas en profundidad en el capítulo 3, entre la que podemos destacar que debe tener un dominio de definición limitado. Esta condición implica restringir el rango de interacción entre las

partículas a una distancia máxima, por encima de la cual, dos partículas no interactúan. Esta distancia máxima se fija en la función kernel mediante el radio del dominio soportado, que ya ha sido introducido en la sección 2.1. Así pues, a través del radio del dominio soportado se controlan las partículas que interactúan mutuamente, esto es, *con el radio del dominio soportado se establece la vecindad de cada partícula*.

Además de las características previamente descritas, en el método SPH existen otras que han sido destacadas en diversos estudios [7, 21, 54, 55, 71] por representar una ventaja tanto cuantitativa, como cualitativa en la simulación de fluidos. Estas características relevantes son:

1. *Satisface directamente la conservación de la masa, lo que representa una ventaja operativa y simplifica los cálculos*. Ello se debe a que el método SPH opera sobre discretizaciones del fluido mediante partículas, en las que la masa de cada una de ellas, representa una fracción discreta del volumen del fluido. Por lo tanto, la suma de las masas de todas las partículas, conformará la masa total del volumen del fluido.
2. *Por su formulación lagrangiana, el método satisface la invariancia galileana*. Debido a que los desplazamientos de las partículas representan el flujo del fluido, la formulación con la que opera el método es la formulación lagrangiana. Desde un punto de vista dinámico, este hecho implica la invariancia galileana de las magnitudes vectoriales (aceleración, velocidad, posición, gradiente de presión...) lo que simplifica las operaciones y el cálculo de dichas magnitudes vectoriales.
3. *El modelado de las ecuaciones dinámicas mediante SPH es conceptualmente sencillo y transforma complejas ecuaciones en derivadas parciales en ecuaciones algebraicas independientes*. De este modo, es relativamente fácil su implementación y su resolución. Esta ventaja es especialmente destacable cuando se simulan entornos tridimensionales.
4. *Modela directamente flujos con superficie libre e interfases*. Al operar sobre sistemas de partículas, la formación de la superficie libre o de las interfases se obtiene de manera directa.
5. *Permite calcular la advección y los fenómenos de transporte en el fluido*. A pesar de que el término de advección del fluido no aparece explícitamente en la formulación lagrangiana, el método permite “reconstruirlos” a partir de la tasa de cambio de la velocidad y de la densidad de masa durante el estado transitorio del fluido.
6. *Simplifica la simulación de fenómenos tanto de muy alta como de muy baja energía térmica*, como mostraremos en el capítulo 6. Si bien, existen zonas en estas simulaciones donde los resultados obtenidos son imprecisos.

A pesar de estas ventajas, el método SPH presenta limitaciones de estabilidad y precisión. Limitaciones que fueron esbozadas en el capítulo 1 y que serán descritas, con mayor profundidad, en los capítulos 3, 4 y 5, donde explicaremos nuestras propuestas para superarlas.

## 2.3 Formulación del Método SPH

La ecuación fundamental de SPH, se basa en la formulación integral de la función delta de Dirac [54] y queda abalada por la teoría de interpolación de funciones [7]. Operativamente, la obtención de la formulación de SPH, puede describirse en dos pasos:

1. Se generaliza la formulación integral de la función  $\delta$  de Dirac, para “*aproximar*” cualquier magnitud en un dominio continuo. En este proceso, la función  $\delta$  es sustituida por una función con extensión espacial, a esta función se la conoce como función kernel. Con este primer paso se obtiene la *formulación integral de SPH*.
2. Se modela, o sustituye, la formulación integral mediante una sumatoria que se extiende a todo el dominio soportado de la función kernel. Esta nueva formulación discretizada se concreta sobre cada partícula, de modo que el valor final de cualquier magnitud, se obtiene como resultado de la suma ponderada del valor que, dicha magnitud, tiene en cada partícula vecina. Con esta operación se obtiene la *formulación discreta de SPH*.

En las secciones 2.3.1 y 2.3.2 se describirán más detalladamente cada uno de los dos puntos anteriores. Así mismo, se obtendrán las expresiones con las que se modelan las derivadas de las funciones y se destacará el problema de conservación del momento que presentan las ecuaciones obtenidas.

### 2.3.1 Formulación integral de SPH

Según la formulación integral de la función delta Dirac, cualquier función  $f$  puede aproximarse como:

$$f(r) = \int f(r')\delta(r-r')dr', \quad (2.1)$$

donde  $r$  hace referencia a la posición,  $r'$  es la posición donde está definida  $f(r')$ ,  $f$  representa a cualquier función escalar, que en el caso del fluido será cualquier variable de estado, también designadas como magnitudes dinámicas, (velocidad, presión, densidad...), y  $\delta$  hace referencia a la función delta Dirac.

En base a la teoría de interpolación [7, 54], la función  $\delta$  puede ser modelada mediante cualquier función continua con extensión espacial. En base a ello, la ecuación 2.1 puede ser reformulada mediante la expresión:

$$\langle f(r) \rangle = \int_{\Omega} f(r') W(r-r', h) dr' \quad (2.2)$$

donde  $\langle \rangle$  indica que el valor obtenido es una aproximación de  $f$  en la posición  $r$ ,  $W$  es la función kernel,  $\Omega$  hace referencia al volumen del dominio de definición de  $W$  y  $h$  es el radio del dominio soportado, a partir del cual, se define la distancia máxima de interacción entre partículas.

Sucintamente, desde un punto de vista analítico, la función kernel debe cumplir, al menos, las siguientes características:

1. Debe estar normalizada y tender a una pulsiana,  $\delta$ , cuando  $h$  tiende a cero, según [54], esto es:

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(r-r', h) = \delta(r-r') \quad \text{y} \quad \int_{\Omega} W dr' = 1. \quad (2.3)$$

2. Debe ser definida como una función positiva, par y con un decrecimiento continuo con la distancia  $(r-r')$ . Además, tanto la función kernel como sus derivadas deben presentar gráficas con perfiles suaves, como se indica en [54, 71].
3. Debe ser definida como función simétrica, y compacta, respecto a  $(r-r')$ , según la conclusión de [45, 54]

Pasar de la formulación integral de la función delta de Dirac, ecuación 2.1, a la formulación basada en la teoría de interpolación, ecuación 2.2; esto es, sustituir la función  $\delta$  por la función  $W$ , genera errores de convergencia que afectan a la estabilidad y a la precisión de los resultados. Diversos estudios se centran en analizar y cuantificar dicho error de convergencia [21, 71, 88]. El modo habitual de demostrar el orden de dicho error, es mediante el desarrollo en serie de Taylor de la ecuación de interpolación 2.2.

Para concretar el orden mínimo de error, se va a calcular el desarrollo en serie de Taylor de la ecuación 2.2 para el caso monodimensional. Este desarrollo no implica una pérdida de generalidad, ya que el mismo proceso puede extenderse para los casos bidimensional y tridimensional. Así pues, la aproximación de una magnitud arbitraria  $f(x)$ , en el ámbito de formulación de integral de SPH, se puede escribir como:

$$\langle f(x) \rangle = \int_{\Omega} f(x') W(x-x', h) dx' = f(x') \int_{\Omega} W(x-x', h) dx' + f'(x') \int_{\Omega} (x-x') W(x-x', h) dx'$$

$$+ \frac{1}{2} f''(x') \int_{\Omega} (x-x')^2 W(x-x', h) dx' + \mathcal{O}(h^3) \quad (2.4)$$

donde  $\mathcal{O}$  hace referencia al resto del desarrollo en serie de Taylor.

Analizando la expresión 2.4, ésta se puede simplificar teniendo en cuenta dos de las tres características, previamente descritas, que la función kernel tiene que satisfacer: la primera es la condición de normalización, ecuación 2.3, con lo que el valor de la integral del primer sumando de la ecuación 2.4 vale 1; la segunda es la condición de paridad que se le exige a la función kernel, es decir  $\int xW(x, h)dx = 0$ , con lo que el segundo sumando de la ecuación 2.4 se anula. Teniendo en cuenta estas dos características, se puede concluir que:

$$\Delta f(x) \sim \int (x-x')^2 W(x-x', h) dx' \quad (2.5)$$

donde  $\Delta$  hace referencia al error que se comete al calcular la función  $f(x)$  y con  $\sim$  indicamos el orden de dicho error.

Generalizando la ecuación 2.5 para el caso tridimensional, se obtiene la expresión 2.6.

$$\Delta f(r) \sim \int r^2 W(r, h) dr. \quad (2.6)$$

Es habitual relacionar la ecuación 2.6 con el momento de segundo orden de la función kernel, lo que permite cuantificar el error cometido al implementar una determinada función kernel. Entonces, en base al resultado obtenido en la expresión 2.6, se puede concluir que la formulación fundamental de SPH garantiza, en el caso óptimo, una precisión de hasta el segundo orden. Si bien, cabe destacar que este orden de error se da en las mejores condiciones de simulación. Sin embargo, en situaciones como la interacción con el contorno, las interfases o las regiones donde aparece discontinuidad para la densidad de masa, la energía térmica o la presión, el error es muy superior y requiere seleccionar la mejor función kernel que ofrezca el mínimo error (como describiremos en el capítulo 3). Así mismo, a partir de la ecuación 2.6, es posible cuantificar el error esperado al utilizar una determinada función kernel. Para funciones kernel como la Gaussiana o el Quartic B-spline, muy utilizados en SPH, el error mínimo que se puede cometer es  $0.6h^2$  y  $3h^2$  respectivamente. Especial mención merece el caso de funciones kernel formuladas mediante la composición de funciones coseno, en este caso el rango de error oscila entre  $0.5h^2 - 0.65h^2$  [88]. Así pues, *se puede afirmar que una función kernel basada en la composición de funciones coseno, es una buena opción.* Esta va a ser una de nuestras premisas para obtener la función kernel propuesta, tal como describiremos en el capítulo 3.

### Formulación integral de las derivadas en SPH

Una vez formulada la ecuación general con la que es posible aproximar cualquier magnitud mediante el método SPH, ecuación 2.2, el siguiente paso es calcular las expresiones con las que aproximar las derivadas de las funciones. Esto se consigue generalizando la ecuación 2.2 para  $\nabla \cdot f$ . La expresión que se obtiene se expresa en términos de la ecuación 2.7:

$$\langle \nabla \cdot f(r) \rangle = \int_{\Omega} [\nabla \cdot f(r')] W(r - r', h) dr', \quad (2.7)$$

donde la integral de  $[\nabla \cdot f(r')]$  se calcula sobre la posición  $r'$ .

Aplicando la regla de la cadena sobre el primer multiplicador del argumento de la integral 2.7, se obtiene la ecuación 2.8:

$$[\nabla \cdot f(r')] W(r - r', h) = \nabla \cdot [f(r') W(r - r', h)] - f(r') \cdot \nabla [W(r - r', h)], \quad (2.8)$$

Sustituyendo la ecuación 2.8, en la ecuación 2.7, es posible reformularla en términos de ecuación 2.9:

$$\langle \nabla \cdot f(r) \rangle = \int_{\Omega} \nabla \cdot [f(r') W(r - r', h)] dr' - \int_{\Omega} f(r') \cdot \nabla [W(r - r', h)] dr'. \quad (2.9)$$

Para simplificar la ecuación 2.9, se puede utilizar el *Teorema de la Divergencia* sobre la primera integral, con lo que se obtiene:

$$\langle \nabla \cdot f(r) \rangle = \int_S f(r') W(r - r', h) \cdot \vec{n} dS - \int_{\Omega} f(r') \cdot \nabla [W(r - r', h)] dr'. \quad (2.10)$$

donde  $\vec{n}$  hace referencia al vector normal a la superficie que recubre el dominio  $\Omega$ .

La importancia de la ecuación 2.10, radica en el hecho de que su primer término, esto es, el término de la integral de superficie, es nulo siempre que se cumpla la condición de compacidad de la función kernel (tercera característica que se definió en la 2.3.1). En el caso de que se cumpla dicha condición, la ecuación 2.10 se simplifica cómo:

$$\langle \nabla \cdot f(r) \rangle = - \int_{\Omega} f(r') \cdot \nabla [W(r - r', h)] dr'. \quad (2.11)$$

Sin embargo, existen situaciones en las que esa simetría no se satisface, como sucede cuando la partícula se aproxima al contorno, según se destaca en [7, 54]. En esta situación,

el contorno es el responsable de romper dicha simetría. En estas circunstancias, la ecuación 2.11 no es una buena aproximación del valor de  $\langle \nabla \cdot f(r) \rangle$ .

Analizando la ecuación 2.11 se puede afirmar que, en el método SPH, el gradiente de cualquier magnitud  $f(r)$  se puede obtener como el producto de dicha magnitud, por el gradiente de la función kernel extendida sobre el dominio de interacción (*el dominio soportado*). Siempre que se satisfaga la condición de compacidad, a través de la cual, la integral de superficie de la ecuación 2.10 se anula. Esta simplificación de la derivada, mostrada en la ecuación 2.11, representa una ventaja operativa del método SPH frente a otras técnicas numéricas, como es destacado en [54].

Generalizando las operaciones desarrolladas entre las ecuaciones 2.7–2.11, se pueden formular las derivadas de orden superior. Así pues, la ecuación general con la que se calculan las derivadas de cualquier orden en SPH, se puede expresar en términos de la ecuación 2.12:

$$\langle \nabla^l f(r) \rangle = - \int_{\Omega} f(r') \cdot \nabla^l [W(r-r', h)] dr'. \quad (2.12)$$

donde  $l$  hace referencia la orden diferencial.

Sin embargo, aunque la ecuación 2.12, establece una formulación general para calcular las derivadas de cualquier función mediante SPH, dicha formulación no es adecuada cuando se utiliza en el cálculo de magnitudes dinámicas y suele generar inestabilidades, como se destaca en [54]. Dichas inestabilidades inducen un comportamiento errático de las partículas, como se advierte en [7], lo que afecta al realismo de la simulación. El origen de este problema, en el caso de la simulación de fluidos, está relacionado con el hecho de que la ecuación 2.12, viola la conservación del momento, según el estudio de [54]. Para solventar este problema, se ha desarrollado una metodología que, basándose en la formulación de SPH, permite obtener expresiones simétricas. De este modo, se podrá satisfacer la conservación del momento, ya que las magnitudes dinámicas aparecen por pares [54]. El proceso seguido para obtener dichas ecuaciones simétricas, así como sus fundamentos, se describirá en la sección 2.3.2, todo ello según la investigación desarrollada en [54].

### 2.3.2 Formulación discreta de SPH

Cuantitativamente, modelar un medio continuo mediante un sistema de partículas, implica transformar las integrales descritas en las secciones anteriores, ecuaciones 2.2–2.11, en un sumatorio, donde la masa de cada partícula representa un elemento de volumen cuyo valor es  $\rho dV$ . Así pues, la formulación discreta de la ecuación 2.2 queda expresada en términos de la ecuación 2.13:

$$\langle f(r_i) \rangle = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) W(r_i - r_j, h), \quad (2.13)$$

donde  $\mathcal{N}(i)$  hace referencia a la vecindad de cada partícula  $i$ . Vecindad que queda restringida por el radio del dominio soportado.

La expresión de la suma extendida sobre las partículas vecinas, establecida cuantitativamente a través de la ecuación 2.13, permite obtener el valor de cualquier magnitud  $f$  definida sobre la partícula  $i$ , como un promedio ponderado por la función kernel, de los valores que esa misma magnitud  $f$  tiene en cada unas de sus  $j$  partículas vecinas.

Conocida la formulación discreta con la que se puede calcular cualquier función, o magnitud,  $f$  el siguiente paso es obtener la formulación discreta de sus derivadas. Para ello se va a reformular la ecuación 2.7 en términos de derivadas parciales. La expresión obtenida es la ecuación 2.14.

$$\langle \nabla \cdot f(r) \rangle = \int_{\Omega} [\nabla \cdot f(r')] W(r - r', h) dr' = \frac{\partial}{\partial r} \int \frac{f(r')}{\rho(r')} W(r - r', h) \rho(r') dr' \quad (2.14)$$

Considerando la condición de compacidad, la ecuación 2.14 se simplifica y permite aproximar el gradiente de cualquier magnitud escalar  $f(r)$ , en la forma discreta expresada a través de la ecuación 2.15:

$$\langle \nabla f(r) \rangle = \frac{\partial}{\partial r} \int \frac{f(r')}{\rho(r')} W(r - r', h) \rho(r') dr' \approx \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} m_j \frac{f_j}{\rho_j} \nabla W(r_j - r_i, h). \quad (2.15)$$

Reordenando la ecuación 2.15, es posible formular una expresión similar a la ecuación 2.11. Tras este proceso la ecuación obtenida es 2.16:

$$\langle \nabla \cdot f(r_i) \rangle = - \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \frac{m_j}{\rho_j} f(r_j) \cdot \nabla W(r_i - r_j, h), \quad (2.16)$$

donde cabe destacar que  $\nabla W$  se particulariza para la partícula  $i$ .

La ecuación 2.16 establece que el valor del gradiente de la función  $f$ , en la posición de la partícula  $i$ , se obtiene a partir de la suma ponderada, extendida a todas sus partículas vecinas  $j$ , del producto del valor que dicha función  $f$  tiene en la posición de la partícula  $i$ , por el gradiente de la función kernel. Siempre que se satisfaga la condición de compacidad, al igual que ocurría en la formulación integral (ecuación 2.11).

Generalizando la ecuación 2.16, es posible formular cualquier derivada de orden superior. La ecuación general que se obtiene, se expresa en términos de la ecuación 2.17:

$$\langle \nabla^l \cdot f(r) \rangle = - \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \frac{m_j}{\rho_j} f(r_j) \cdot \nabla^l W(r - r_j, h), \quad (2.17)$$

Cabe destacar que la ecuación 2.17, al igual que la ecuación 2.16, sólo ofrece resultados satisfactorios, desde el punto de vista de minimizar el error, si se cumple la condición de compacidad. Condición que no se cumple para las partículas cercanas al contorno, como se advierte en [71]. Otra limitación asociada a la ecuación 2.17, es que no permite que se cumpla la conservación del momento, según se destaca en [54], lo cual no la hace adecuada, con esta formulación, para su uso en simulaciones de fluidos. La consecuencia inmediata es que, aunque la ecuación 2.17 cumple las “premisas” establecidas en SPH, la precisión de los resultados obtenidos suele verse reducida. Para solventar este problema, se hace necesario modificar dicha ecuación, de manera que se obtenga una expresión simétrica, que satisfaga la conservación del momento y, por lo tanto, pueda ser utilizada en la simulación del flujo del fluido. El proceso para obtener dicha ecuación se describirá a continuación.

### Formulación de derivadas simétricas en SPH

En el método SPH existen diferentes técnicas para formular expresiones simétricas de la ecuación 2.17, de modo que se satisfaga la conservación del momento. En este estudio, nos vamos a centrar en la propuesta desarrollada por Monaghan [54], cuyo uso está muy extendido en la simulación de fluidos dentro del ámbito de CG. Según se destaca en [54], el punto de partida son dos identidades funcionales basadas en la regla de la cadena. Con estas identidades, es posible introducir la densidad, con la que las ecuaciones obtenidas están optimizadas para su uso en la simulación de fluidos. Con esa formulación es posible obtener dos expresiones válidas, las ecuaciones 2.18 y 2.19.

$$\nabla^l f(r) = \frac{1}{\rho} \left[ \nabla^l (\rho f(r)) - f(r) \nabla^l \rho \right], \quad (2.18)$$

$$\nabla^l f(r) = \rho \left[ \nabla^l \left( \frac{f(r)}{\rho} \right) + \frac{f(r)}{\rho^2} \nabla^l \rho \right]. \quad (2.19)$$

Siguiendo el mismo procedimiento de aproximación, utilizado para obtener la ecuación 2.16, sobre las ecuaciones 2.18 y 2.19 se consigue la formulación de las ecuaciones 2.20 y 2.21.

$$\langle \nabla^l f(r_i) \rangle = \frac{1}{\rho_i} \left[ \sum_{j=1}^N m_j [f(r_j) - f(r_i)] \nabla_i^l W_{ij} \right] \quad (2.20)$$

$$\langle \nabla^l f(r_i) \rangle = \rho_i \left[ \sum_{j=1}^N m_j \left[ \left( \frac{f(r_j)}{\rho_j^2} \right) + \left( \frac{f(r_i)}{\rho_j^2} \right) \right] \cdot \nabla_i^l W_{ij} \right], \quad (2.21)$$

Ambas ecuaciones son válidas, si bien la ecuación 2.21 es la que habitualmente se usa en el ámbito de CG.

Como puede comprobarse, tanto la ecuación 2.20, como la ecuación 2.21 se formulan con magnitudes que aparecen por pares, tanto simétrica (referida a la suma de las magnitudes), como asimétricamente (asociada a la resta). De este modo, se solventa el problema de conservación del momento y, en consecuencia, se favorece la estabilidad de los resultados obtenidos, como se justifica en [54].



# Capítulo 6

## Resultados

### 6.1 Introducción

En los capítulos anteriores hemos descritos las técnicas desarrolladas para resolver los problemas de inestabilidad e imprecisión en SPH. En esos capítulos hemos justificados, cualitativamente, cómo nuestras propuestas satisfacían todos los criterios para garantizar estabilidad y precisión. En este capítulo vamos a demostrar, cuantitativamente, que efectivamente con nuestras propuestas se gana estabilidad y precisión en SPH. Descriptivamente, este capítulo se divide en tres secciones, cada una de ellas asociadas a una de nuestras propuestas. En cada sección desarrollaremos un conjunto de simulaciones, de cuyos resultados, se podrá cuantificar la mejora obtenida al implementar cada propuesta. Concretamente:

- En la sección 6.2 llevaremos a cabo un conjunto de pruebas numéricas para demostrar la mejora en estabilidad y precisión que obtenemos al utilizar nuestra familia de funciones kernel propuesta. Para ello, hemos implementado un conjunto de tests estandarizados en simulación numérica, para demostrar la precisión y la estabilidad que se obtiene con una determinada técnica. En cada una de estas pruebas, desarrollamos una comparativa entre nuestra función propuesta y otras funciones de uso muy extendido en SPH. De este modo, podemos cuantificar la mejora obtenida.
- En la sección 6.3 demostraremos las capacidades que ofrece nuestra propuesta para imponer la incompresibilidad y conseguir estabilidad y precisión. Para ello, vamos a implementar nuestro modelo híbrido Potencial-SPH, y lo compararemos con los resultados obtenidos con otras tres técnicas explícitas de imposición de incompresibilidad, comúnmente utilizadas en SPH. Además, vamos a demostrar como la técnica propuesta, garantiza estabilidad al permitir el control de los balances de energía térmica en las proximidades del contorno.

- En la sección 6.4 implementaremos nuestra técnica para imponer las condiciones de contorno. Demostraremos la estabilidad y precisión obtenida y las ventajas que se obtienen frente a otras técnicas comúnmente utilizadas en la simulación de fluidos. Así mismo, hemos simulado diferentes condiciones de contorno que no pueden ser implementadas con las técnicas de interacción fluido–contorno utilizadas en el ámbito de CG.

En cada una de las secciones 6.2, 6.3 y 6.4 desarrollaremos una descripción más precisa de cada una de las simulaciones llevadas a cabo. En las simulaciones hemos utilizado un procesador Intel Core i3–4130, con una tarjeta gráfica NVIDIA GTX780. Como método de integración temporal hemos seleccionado un método semi–implícito desarrollado por Modak y Sotelino [53] que ofrece un orden de precisión  $\mathcal{O}(n^5)$ , sin un aumento significativo en los costes de computación. Los valores de los parámetros de integración que intervienen en el método son  $\beta_0 = 1$ ,  $\beta_1 = 0.757$ ,  $\beta_2 = 1.101$ .

En referencia a la búsqueda de partículas vecinas, hemos utilizado la técnica basada en el etiquetado mediante función hash y de segmentación del espacio desarrollada por [69].

## 6.2 Pruebas de Estabilidad y Precisión para la Función Kernel

En esta sección, vamos a llevar a cabo un conjunto de pruebas numéricas con las que demostrar las capacidades operativas de la familia de funciones kernel propuesta. Para demostrar la mejora que obtenemos, vamos a llevar a cabo una comparativa entre los resultados obtenidos con nuestra propuesta y con los calculados utilizando otras tres funciones del kernel habitualmente utilizadas en SPH. Implementaremos estas pruebas para lograr dos objetivos:

1. Evidenciar la precisión y la estabilidad que se obtiene al utilizar nuestra kernel  $C_{ij}$ –Cosine propuesta, tanto en simulaciones a baja energía térmica donde, tal como se expuso en la sección 3.2, se favorece el agrupamiento irreal de partículas; cómo en situaciones de alta discontinuidad en la presión, densidad y energía térmica en donde suelen inducirse el comportamiento espurio en el flujo.
2. Demostrar la mejora que se obtiene con nuestra función  $C_{ij}$ –Cosine en comparación con las funciones kernel más utilizadas en las simulaciones SPH.

Siguiendo las recomendaciones dadas en [74] vamos a simular un fluido cuyo flujo se describe a través de las ecuaciones de Euler en lugar de la ecuación de NS. De este modo,

evitamos el uso de términos disipativos en las ecuaciones dinámicas que puedan falsear los resultados, como se advierte en [74]. Tanto la descripción de las ecuaciones simuladas en estas pruebas, como el modelado de las mismas, se describen en el Anexo A. En cada una de las pruebas, se impondrán las condiciones de contorno e iniciales que optimizan el rendimiento. En dichas restricciones seguiremos las recomendaciones dadas en los estudios de estabilidad más relevantes [21, 74].

Las funciones kernel con las que compararemos nuestra propuesta son: *Quartic B-Spline*, *Wendland6*, *Gaussiana* que son funciones cuyas capacidades para obtener simulaciones estables y precisas han sido ampliamente destacados por [21, 58, 71, 74, 88]. Concretando, las pruebas que llevaremos a cabo son:

- *Sedimentación desde una distribución aleatoria de partículas*, esta prueba se describirá en la sección 6.2.1. Mediante este test será posible analizar la estabilidad y precisión que se obtiene cuando el fluido tiende a la mínima energía térmica, es decir, vamos a cuantificar la capacidad de cada función kernel frente al agrupamiento irreal de las partículas a baja energía térmica, como se describe en [71, 74].
- *Prueba de Sod's shock-tube*, desarrollada en la sección 6.2.2. El objetivo de esta prueba es demostrar la precisión que se obtiene al simular un flujo en el que aparecen regiones con discontinuidad en la presión y la densidad.
- *Prueba de onda expansiva (Blast-wave test)* que desarrollaremos en la sección 6.2.3. Con esta prueba se puede demostrar si las capacidades demostradas en el test Sod's shock-tube, se satisfacen en condiciones más extremas, esto es, situaciones en las que la velocidad del fluido es extrema, entorno a Mach  $M = 200$ .
- *Prueba de ruptura de muro (Wall-shock wave)*, llevada a cabo en la sección 6.2.4. En esta prueba simularemos el impacto un flujo sobre la pared. En realidad se modela como la interacción de dos flujos iguales, pero que impactan con velocidades opuestas, es decir, sirve para cuantificar la precisión y estabilidad cuando se simulan flujos que interactúan con una importante discontinuidad en la velocidad.
- *La prueba de Sjögren* desarrollada en la sección 6.2.5. Con esta prueba seremos capaces de evaluar la precisión y estabilidad que se obtiene en situaciones de muy baja densidad y presión.

En referencia a los parámetros de simulación, en cada una de las pruebas especificaremos los valores utilizados y justificaremos cada elección. No obstante, existe un parámetro cuyo

valor será común en todas ellas, este parámetro es el *parámetro adiabático*,  $\gamma$ , que interviene en las ecuaciones de Euler (véase Anexo A). En todas las simulaciones será  $\gamma = 1,46$ .

Diversas investigaciones advierten sobre los problemas de estabilidad relacionados con un bajo número de partículas vecinas [21, 71]. Estos estudios proponen el uso de un dominio soportado variable para mantener un número adecuado de partículas vecinas, siempre que ello no implique una pérdida de resolución. Para evaluar el dominio soportado de cada función kernel, hemos considerado las sugerencias dadas por [21, 71] en referencia al número más adecuado de partículas vecinas. Los valores considerados son:  $\tilde{N}_v^Q = 250$ ,  $\tilde{N}^W = 150$  y  $\tilde{N}^G = 250$ , mientras que para nuestra propuesta hemos estimado que el valor óptimo es  $\tilde{N}^{C_{ij}} = 20$ . Los superíndices utilizados  $Q, W, G, C_{ij}$  se refieren a las funciones de Quartic B-Spline, Wendland6, Gaussiana y  $C_{ij}$ -Cosine, respectivamente. Para cambiar el tamaño del dominio soportado para Quartic B-Spline, Wendland6 y Gaussiana, hemos considerado la propuesta dada por Price [71]. Dicha propuesta permite controlar el número de partículas vecinas, sin un aumento excesivo del coste computacional. Por otro lado, para cambiar el tamaño del dominio soportado de nuestra  $C_{ij}$ -Cosine, hemos usado el parámetro  $K$  que interviene en los argumentos de la función. Para calcular el valor de  $K$ , considerando el valor óptimo en el número de partículas vecinas y la ecuación 6.1.

$$K_i = \frac{\theta m_i h}{\eta \left( \sum_{j=1}^{\tilde{N}_v^{C_{ij}}} m_j W_j \right)} \quad (6.1)$$

donde  $\eta$  es un parámetro de escalado cuyo rango se establece empíricamente.

### 6.2.1 Sedimentación de una distribución aleatoria de partículas

Existe un consenso en considerar a esta prueba, cómo una de las más eficaces para cuantificar la estabilidad y precisión en simulaciones mediante SPH [21, 71, 81]. Sucintamente, la prueba se inicia desde una distribución aleatoria de un sistema de partículas y evoluciona hacia una distribución de partículas que muestra un cierto nivel de reticularidad. El grado final de reticularidad, permite establecer una métrica cuantitativa de la estabilidad y precisión alcanzada. De esta manera, cuanto mayor sea la reticularidad, mayor es la estabilidad que ofrece una determinada función kernel.

Para llevar a cabo esta prueba, hemos utilizado un sistema de partículas con 980 partículas en total, cuya masa, de cada una de ellas es  $m_i = 0.00213$  inicialmente distribuidas aleatoriamente. Esta distribución inicial da como resultado regiones con alta densidad de partículas y otras con baja densidad de partículas, tal como se muestra en la figura 6.1 en  $t = 0$ . Para obtener la distribución aleatoria, hemos utilizado una distribución reticular de partículas que

se somete a ruido blanco con el que obtenemos la distribución aleatoria que es el punto de partida de la prueba.

Los límites de simulación son  $[50 \times 30]$  y el paso de tiempo utilizado es  $\Delta t = 1.5 \cdot 10^{-4}$ . Los valores de los otros parámetros utilizados en esta simulación son  $h = 0.023$ ,  $\eta = 1.21$  y  $K = 1.75$ . Los resultados obtenidos, para cada función del kernel, se muestran en la figura 6.1.

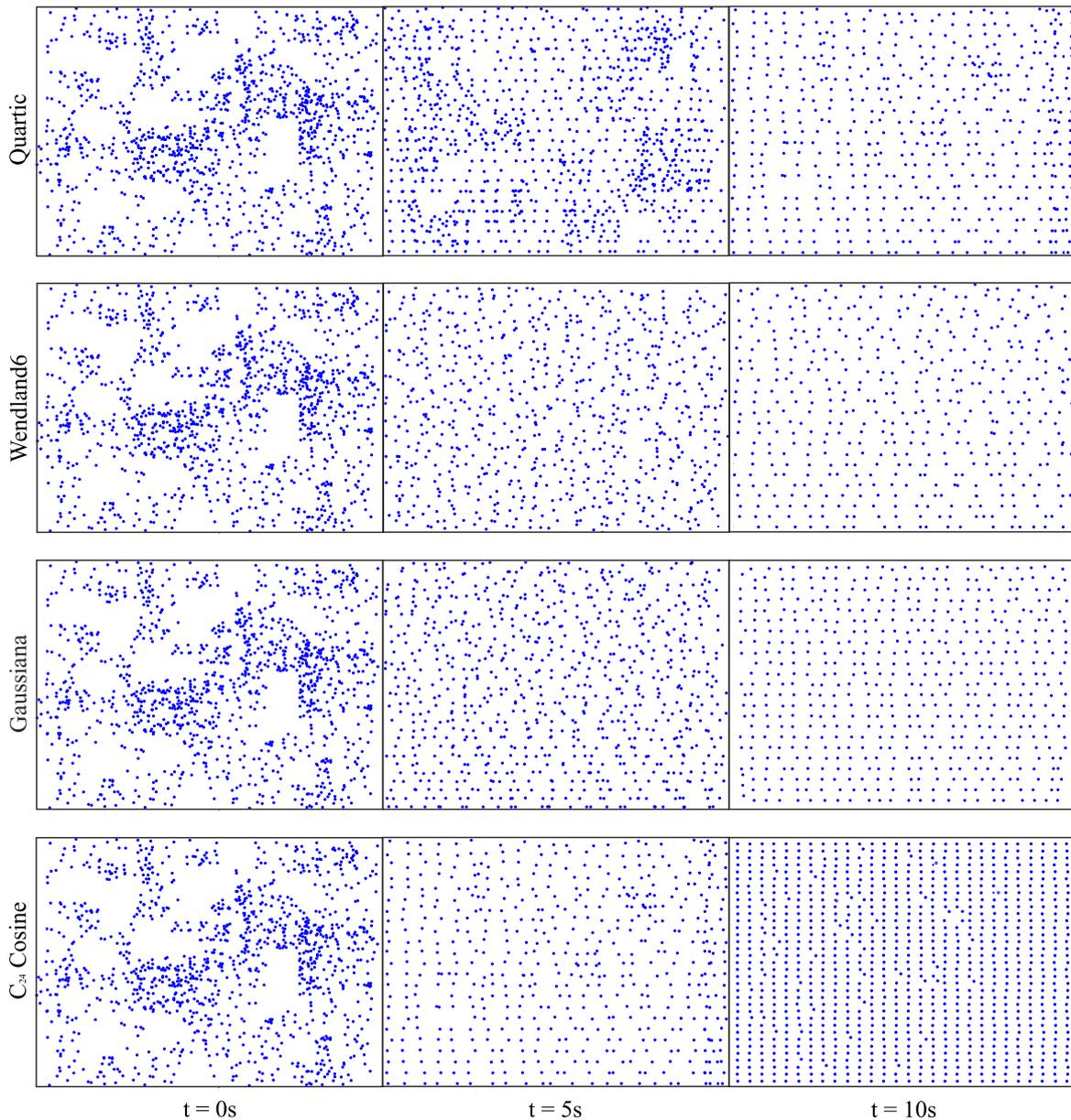


Figura 6.1 Evolución desde una distribución aleatoria de partículas hasta una distribución de partículas sedimentadas. Los resultados se obtienen para diferentes funciones kernel.

A partir de los resultados mostrados en la figura 6.1, podemos afirmar que las cuatro funciones kernel favorecen la obtención de resultados estables y precisos. Sin embargo, los mejores resultados se obtienen utilizando con la función  $C_{ij}$ -Cosine propuesta, ya que es la que permite la obtención de resultados con el mayor grado de reticularidad. Para cuantificar la reticularidad obtenida en el instante final, hemos formulado un *parámetro de orden*,  $\zeta$ , que satisface:

$$\zeta = \frac{\sum_{k=1}^s (|d^l - d_{ij}^k|)}{s}, \quad (6.2)$$

donde  $s = (m - 1)(n - 1)$ , y  $m$  y  $n$  son el número de partículas en cada dirección del espacio,  $d^l$  es la longitud óptima de regularidad y  $d_{ij}^k$  es la distancia entre cada par de partículas vecinas.

A partir de la formulación del parámetro  $\zeta$ , podemos afirmar que cuanto menor sea el valor, mayor será el grado de reticularidad alcanzado y, en consecuencia, mayor es la estabilidad y la precisión obtenida.

Los valores obtenidos de este parámetro se muestran en la tabla 6.1.

	Quartic B-Spline	Wendland6	Gaussiana	C <sub>24</sub> -Cosine
$\zeta$	35.6	20.1	16.2	3.9

Tabla 6.1 Valores del parámetro de orden,  $\zeta$ , asociado a la prueba de sedimentación de una distribución aleatoria de partículas.

Finalmente, podemos destacar que, de las distintas funciones kernel que podemos obtener dando valores a sus parámetros  $ij$  a la función propuesta, para esta prueba hemos utilizado la C<sub>24</sub>-Cosine ya que ha demostrado dar los mejores resultados.

## 6.2.2 Prueba Sod's shock-tube

La prueba Sod's shock-tube nos permite analizar los resultados de la simulación de un fluido cuando, debido a diferencias de presión y densidad, aparecen ondas de choque y discontinuidades. Del test Sod's shock-tube se conoce su solución exacta, por lo que es posible cuantificar la estabilidad y precisión, de cualquier técnica numérica, comparando resultado exacto y numérico, tal como se describe en los estudios [46, 56, 77].

Descriptivamente, el test Sod's shock-tube se implementa sobre un tubo en el que se introduce una membrana no porosa. Esta membrana define dos secciones que están rellenas de un fluido, un gas. En una sección, que se denomina *sección de alta*, el gas es alrededor de 10 más denso y más confinado que en la otra sección que se designa como *sección de*

*baja*. Con esta distribución, en un determinado instante considerado como instante inicial, la membrana se retira instantáneamente. A partir de ese momento se genera, al menos, tres regiones diferentes: (1) *una onda de choque*, como consecuencia de las diferencias de presión y densidad entre las secciones de alta y de baja. Esta onda de choque evoluciona hacia la sección de baja; (2) *una onda de rarefacción* que aparece en la sección de alta y al mismo tiempo que la onda de choque (3) una zona de discontinuidad que surge entre lo que fueron las secciones alta y baja iniciales, que suele denominarse como *discontinuidad de contacto*. A partir de la precisión obtenida en la simulación de estas tres regiones, es posible cuantificar la idoneidad de la función kernel utilizada, tal como es descrito por Sod [79].

Para llevar a cabo esta prueba, hemos considerado un dominio de dimensiones  $[-0.5, 0.5]$ . La sección de alta está limitada entre  $[-0.5, 0.0[$  y la sección de baja está limitada entre  $]0.0, 0.5]$ . Inicialmente el número de partículas es  $n_h = 1200$  y  $n_l = 300$ , donde los subíndices  $h$  y  $l$  se refieren a las secciones de alta y de baja, respectivamente. La distancia inicial entre partículas es  $\Delta x_h = 5.86 \cdot 10^{-3}$ , para la sección de alta, y  $\Delta x_l = 23.44 \cdot 10^{-3}$ , para la sección de baja y el radio inicial del dominio soportado es  $h_h = h_l = 1.75 \Delta x_r$ . Para controlar el tamaño del dominio soportado del  $C_{ij}$ -Cosine, hemos asignado los valores de  $\eta = 1.28$  y  $K = 1.85$ . Los valores iniciales de la densidad de masa, presión y velocidad de cada sección son  $(\rho_h, p_h, v_h) = (1.0, 1.0, 0.0)$  y  $(\rho_l, p_l, v_l) = (0.125, 0.1, 0.0)$ . Para establecer el valor de la masa de las partículas, hemos considerado la sugerencia dada por [74]; por lo tanto,  $m = 0.5(\rho_h \Delta x_h + \rho_l \Delta x_l) = 4.39 \cdot 10^{-3}$ .

Por otro lado, los valores de los parámetros de control de las ecuaciones de Euler (ecuaciones A.6 y A.7, véase Anexo A), son  $\alpha = 1.08$ ,  $\alpha^U = 0.145$  y  $\beta = 1.85697$ . Estos valores se han considerado, teniendo en cuenta las sugerencias dadas por [5, 77]. Finalmente, hemos utilizado un paso de tiempo de  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ .

A partir de estos valores iniciales, hemos obtenido los resultados mostrados en la figura 6.2 en el instante  $t = 0.15$  para las magnitudes densidad, energía térmica y velocidad como se sugiere en los estudios [46, 74, 77].

En la figura 6.2 mostramos una comparativa entre la solución exacta, línea sólida, y la solución numérica, puntos, usando las cuatro funciones kernel. En cada gráfica se pueden localizar las tres regiones que aparecen cuando se retira la membrana. La discontinuidad del contacto aparece alrededor de  $x_{cd} = 1.004$ , la onda de rarefacción aparece desde  $x < x_{cd}$  y la onda de choque desde  $x > x_{cd}$ . Aunque la posición de la discontinuidad de contacto es la misma en todas las gráficas, tanto en el ancho espacial de la discontinuidad de contacto, como en la existencia de una ondulación, existen variaciones entre los distintos resultados obtenidos para cada función kernel. Varias investigaciones analizan la causa de este error [46, 56, 71, 77], de sus conclusiones se pueden deducir dos causas principales. La primera,

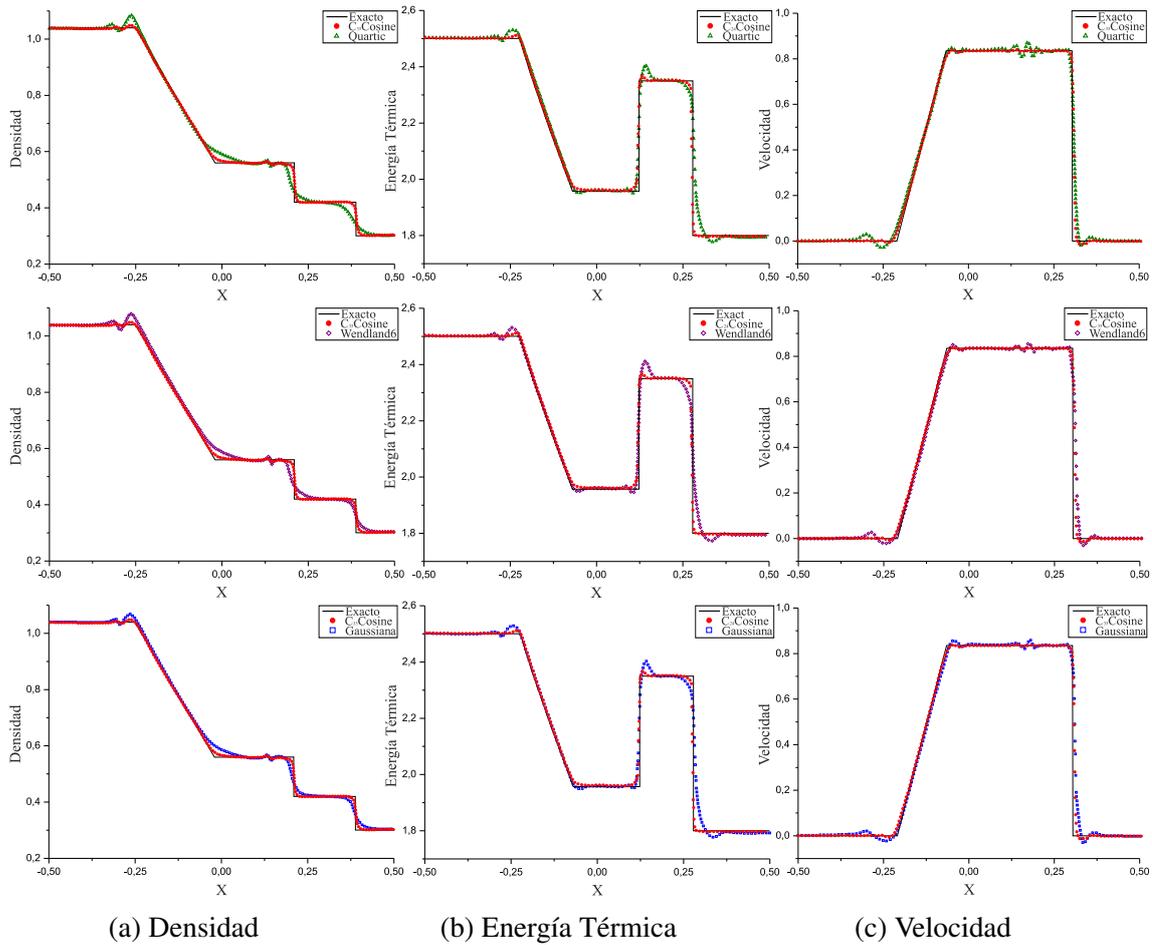


Figura 6.2 Comparativa entre la solución exacta y las soluciones numéricas, de los resultados obtenidos para la prueba Sod's shock-tube. El valor de los parámetros de la función  $C_{ij}$ -Cosine son  $i = 3$  y  $j = 5$  para la densidad y la velocidad y  $i = 2$  y  $j = 4$  para la energía térmica, con los que se obtienen los mejores resultados.

es el calentamiento en la discontinuidad del contacto, asociado al balance de energía térmica que no se simula completamente por la formulación variacional de SPH. La segunda es la imprecisión al calcular la presión a través de la discontinuidad del contacto, lo que induce un aumento de la velocidad y la energía térmica en esa posición. Para evitar esta imprecisión se propone un aumento de resolución, según la sugerencia de [46], pero este aumento debe realizarse sin incrementar el radio del dominio soportado. Este requisito se satisface con la función  $C_{ij}$ -Cosine propuesta, que nos permite obtener el menor ancho y amplitud de la onda en la discontinuidad del contacto, como se muestra en la figura 6.2. Asimismo, la cola de la onda de rarefacción, ubicada alrededor de  $x = -0,25$ , muestra un “desbordamiento” que no debería aparecer. Sin embargo, tanto la amplitud como el ancho espacial de los resultados obtenidos disminuyen, desde los resultados obtenidos utilizando el Quartic B-Spline hasta

los resultados de nuestra kernel  $C_{ij}$ -Cosine. Este mismo decrecimiento se obtiene para la onda de choque antes de la discontinuidad del contacto.

Para cuantificar la precisión que obtenemos de cada función kernel, hemos seleccionado los valores numéricos de cada parte del flujo, tales como onda de rarefacción, discontinuidad de contacto y onda de choque, tanto la amplitud máxima, como su anchura. Además, para cuantificar la precisión global, calcularemos el *coeficiente de determinación*,  $r^2$ . Los resultados obtenidos para la densidad, la energía térmica y la velocidad se muestran en las tablas 6.2, 6.3 y 6.4, respectivamente. En estas tablas,  $A_{rt}$  es la amplitud máxima de la cola de rarefacción,  $W_{rt}$  es el ancho de la cola de rarefacción,  $A_{cd}$  es la amplitud máxima de la discontinuidad del contacto,  $W_{cd}$  es el ancho de la discontinuidad del contacto,  $x_{sw}$  es la posición de la onda de choque y  $W_{sw}$  es la anchura de la onda de choque.

	$r^2$	$A_{rt}$	$W_{rt}$	$A_{cd}$	$W_{cd}$	$x_{sw}$	$W_{sw}$
Quartic B-Spline	0.9483	0.0576	0.131	0.021	0.098	0.3803	0.217
Wendland6	0.9701	0.0412	0.124	0.012	0.082	0.3721	0.124
Gaussiana	0.9728	0.0314	0.093	0.009	0.068	0.3689	0.103
$C_{ij}$ -Cosine	0.9899	0.0091	0.0162	0.003	0.029	0.3618	0.059

Tabla 6.2 Valores relevantes obtenidos de las gráficas de la densidad para la prueba Sod's shock-tube, figura 6.2a.

	$r^2$	$A_{rt}$	$W_{rt}$	$A_{cd}$	$W_{cd}$	$x_{sw}$	$W_{sw}$
Quartic B-Spline	0.9652	0.0374	0.131	0.0542	0.156	0.3792	0.186
Wendland6	0.9784	0.0104	0.124	0.042	0.097	0.3718	0.114
Gaussiana	0.9875	0.0169	0.092	0.031	0.056	0.3685	0.084
$C_{ij}$ -Cosine	0.9941	0.0098	0.016	0.009	0.025	0.3623	0.019

Tabla 6.3 Valores relevantes obtenidos de las gráficas de la energía térmica para la prueba Sod's shock-tube, figura 6.2b.

### 6.2.3 Prueba de onda expansiva

La prueba onda expansiva (blast-wave test) es una versión más extrema del test Sod's shock-tube y se formula para un muy alto número de Mach, alrededor  $M = 200$ . Fue desarrollada por Woodward y Colella [85] para analizar la precisión de un determinado método numérico a la hora de simular el comportamiento del fluido en una situaciones con alta discontinuidad de contacto. Esta prueba esta diseñada, especialmente para analizar la precisión de la velocidad,

	$r^2$	$A_{rt}$	$W_{rt}$	$A_{cd}$	$W_{cd}$	$x_{sw}$	$W_{sw}$
Quartic B–Spline	0.9214	0.0312	0.158	0.048	0.206	0.3803	0.146
Wendland6	0.9431	0.0223	0.136	0.027	0.101	0.3721	0.089
Gaussiana	0.9648	0.015	0.098	0.017	0.072	0.3694	0.065
$C_{ij}$ –Cosine	0.9895	0.0097	0.041	0.004	0.056	0.3618	0.052

Tabla 6.4 Valores relevantes obtenidos de las gráficas de la velocidad para la prueba Sod's shock–tube, figura 6.2c.

el comportamiento de la presión y la densidad a altos valores. En el test de onda expansiva, la evolución del flujo muestra las mismas características que la prueba de Sod's shock–tube, es decir, una discontinuidad de contacto aparecerá insertada entre la onda de choque y la onda de rarefacción.

Debido a las similitudes con el test Sod's shock–tube, en esta implementación sólo hemos cambiado los valores iniciales de algunos parámetros de simulación. Los nuevos valores son para la densidad de masa, la presión y la energía térmica, estos son:  $(\rho_h, p_h, u_h) = (1.0, 1 \cdot 10^3, 0.0)$  y  $(\rho_l, p_l, u_l) = (1.0, 0.01, 0.0)$ , según las recomendaciones dadas por [77, 85]. Así mismo, reduciremos el paso de tiempo, debido al alto valor de la velocidad inicial, en este caso hemos utilizado  $\Delta t = 8 \cdot 10^{-5}$ . Usando estos valores, hemos obtenido los resultados que se muestran en la figura 6.3 en el instante de tiempo  $t = 0.0075$ . En dichas gráficas se muestran las soluciones exactas, representada por líneas continuas, mientras que los resultados numéricos se indican mediante puntos.

Análogamente a la fenomenología producida en el test de Sod's shock–tube, en esta simulación, también aparecen tres regiones que aparecen a partir del instante en el que se retira la membrana, mostradas en las gráficas de la figura 6.3, estas son: la discontinuidad de contacto, que se ubica  $x_{cd} = 0.1081$ , la onda de rarefacción  $x < x_{cd}$  y la onda de choque  $x > x_{cd}$ . Así mismo, en cada una de las gráficas mostradas en la figura 6.3, el ancho de discontinuidad de contacto cambia para cada función kernel, siendo el menor el que se obtiene con la función  $C_{ij}$ –Cosine propuesta, por lo que es la que ofrece los mejores resultados, ya que idealmente este debería ser cero, como se deduce de los resultados exactos.

Cabe destacar, en las gráficas de la energía térmica y de la velocidad de la figura 6.3, el valor sobre–estimado que aparece en la energía térmica y la oscilación de la velocidad en la posición de la discontinuidad de contacto. Esta deficiencia se relaciona con la imprecisión en el modelado de las ecuaciones de Euler, que no permiten determinar, con precisión, el punto donde se produce el calentamiento, como se describe en [74]. Así mismo, estas perturbaciones también están relacionadas con los valores de la presión entorno a la discontinuidad, que no son precisos en simulaciones SPH, lo que afecta a la energía térmica. Por otro lado, la cola

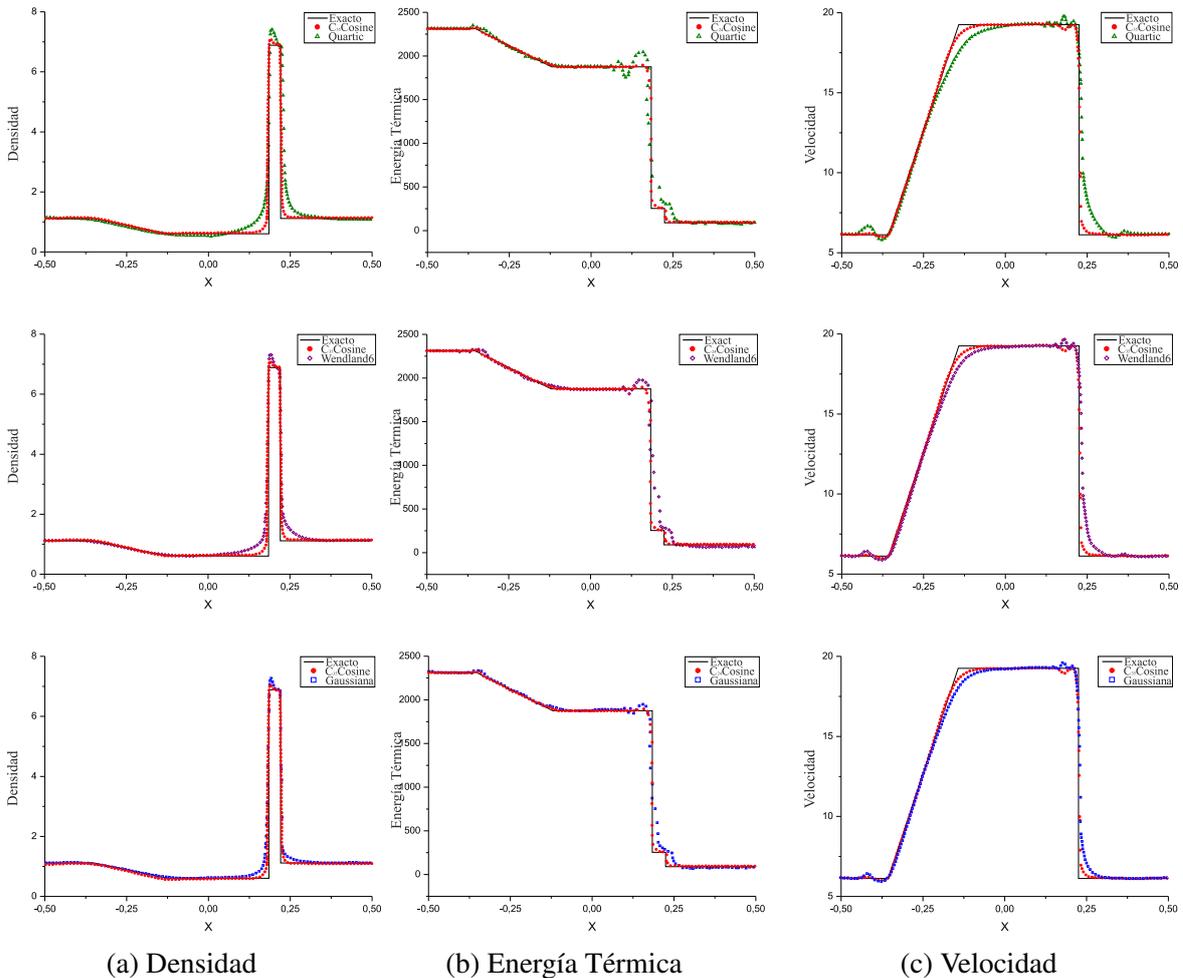


Figura 6.3 Comparativa entre la solución exacta y las soluciones numéricas, de los resultados obtenidos para la prueba de onda expansiva. El valor de los parámetros de la función  $C_{ij}$ -Cosine son  $i = 3$  y  $j = 5$  para la densidad y la velocidad y  $i = 2$  y  $j = 4$  para la energía térmica, con los que se obtienen los mejores resultados.

de rarefacción muestra un desbordamiento en las gráficas de velocidad; desbordamiento que aparece, en menor medida, en las gráficas de presión. Este desbordamiento tiene su origen en los problemas de precisión asociados a la energía térmica y, más concretamente, con el calentamiento no disipado. Aunque estas perturbaciones están relacionadas principalmente con la formulación de la ecuación de Euler mediante SPH, como se advierte en [74], la precisión que se obtiene depende de la función kernel utilizada. Este hecho queda confirmado por los resultados obtenidos y que se muestran en la figura 6.3, donde la mejor precisión se obtiene con la función  $C_{ij}$ -Cosine propuesta.

Para demostrar la precisión que se obtiene en la simulación, con cada función del kernel, hemos seleccionado los valores más relevantes asociados a las gráficas de la figura 6.3. Estos

valores se muestran en la tabla 6.5 para la densidad de masa, en la tabla 6.6 para la energía térmica y en la tabla 6.7 para la velocidad.

	$r^2$	$W_{rt}$	$A_{cd}$	$W_{cd}$	$x_{sw}$	$W_{sw}$
Quartic B–Spline	0.9304	0.141	0.613	0.065	0.193	0.142
Wendland6	0.9518	0.104	0.491	0.039	0.190	0.094
Gaussiana	0.9681	0.081	0.285	0.021	0.194	0.079
$C_{ij}$ –Cosine	0.9887	0.056	0.146	0.009	0.196	0.038

Tabla 6.5 Valores relevantes obtenidos de las gráficas de la densidad para la prueba de onda expansiva, figura 6.3a.

	$r^2$	$W_{rt}$	$A_{cd}$	$W_{cd}$	$x_{sw}$	$W_{sw}$
Quartic B–Spline	0.9187	0.079	218.063	0.0791	0.193	0.087
Wendland6	0.9498	0.038	114.277	0.0639	0.189	0.064
Gaussiana	0.9636	0.028	72.843	0.0453	0.191	0.051
$C_{ij}$ –Cosine	0.9873	0.011	20.442	0.0206	0.196	0.021

Tabla 6.6 Valores relevantes obtenidos de las gráficas de la energía térmica para la prueba de onda expansiva, figura 6.3b.

	$r^2$	$A_{rt}$	$W_{rt}$	$A_{cd}$	$W_{cd}$	$x_{sw}$	$W_{sw}$
Quartic B–Spline	0.9098	0.4986	0.1066	0.491	0.1116	0.193	0.159
Wendland6	0.9321	0.3469	0.0945	0.398	0.0826	0.189	0.087
Gaussiana	0.9658	0.2877	0.0813	0.294	0.0582	0.191	0.026
$C_{ij}$ –Cosine	0.9891	0.0934	0.0585	0.169	0.0348	0.196	0.009

Tabla 6.7 Valores relevantes obtenidos de las gráficas de la velocidad para la prueba de onda expansiva, figura 6.3c.

### 6.2.4 Prueba de impacto sobre muro

En esta prueba simularemos la colisión con una pared rígida de un fluido frío uniformemente distribuido. Esencialmente, la prueba puede ser modelada mediante dos flujos idénticos que viajan en direcciones opuestas y que colisionan en la ubicación donde se situaría la pared rígida, según la propuesta de [56]. Como consecuencia de la interacción entre las dos corrientes, se generan dos ondas de choque simétricas que surgen desde la posición del punto

de colisión. Desde esta posición, hasta los límites de la simulación, aparecen un conjunto de fenómenos disipativos. Estos fenómenos son más evidentes alrededor de la región de colisión y en la cola de la onda de rarefacción. La fidelidad con la que se simulan estos fenómenos permite cuantificar la exactitud de los resultados obtenidos.

Para implementar esta prueba hemos utilizado un dominio restringido entre  $[-0.4, 0.4]$ , según la recomendación dada por [74], la ubicación del punto de colisión (la posición de la pared) será en  $x = 0$ . Así, se definen dos secciones: una sección *izquierda* y otra sección *derecha* que se extienden  $[-0.4, 0.0[$  y  $]0.0, 0.4]$  respectivamente. Las magnitudes dinámicas iniciales son  $(\rho_L, v_L, U_L) = (1.0, 1.0, 10^{-6})$  y  $(\rho_R, v_R, U_R) = (1.0, -1.0, 10^{-6})$ , según la recomendación dada por [56], donde los subíndices  $L$  y  $R$  se refieren a la sección izquierda y derecha, respectivamente. El número de partículas utilizado es  $n = 1500$ , estas partículas están distribuidas equitativamente, a saber,  $n_L = 750$  y  $n_R = 750$  y el valor de la masa de partículas es  $m_i = 4.29 \cdot 10^{-3}$ . La distancia inicial entre partículas es  $\Delta x = 4.39 \cdot 10^{-3}$  y el radio inicial del dominio soportado es  $h_L = h_R = 1.5 \Delta x$ . Hemos utilizado un paso de tiempo  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5}$  para la integración de tiempo y los valores de los parámetros disipativos, asociados a las ecuaciones Euler (ecuaciones A.6 y A.7 del Anexo) son  $\alpha = 1.1$ ,  $\alpha^U = 0.125$  y  $\beta = 1.85$ .

A partir de estas condiciones iniciales, hemos simulado la densidad, la energía térmica y el momento, según se recomienda en [74]. Los resultados se muestran en la figura 6.4 en el instante  $t = 0.45$ , donde las soluciones exactas y numéricas están representadas por líneas sólidas y puntos, respectivamente.

Fenomenológicamente, la región más relevante se sitúa en torno a  $x = 0$ , donde aparece el calor asociado a la pared, calor que no se disipa. Este calentamiento induce el error que muestra como un “pico” en los gráficos de la figura 6.4. Tanto el ancho como la altura del pico permiten establecer una métrica de la precisión obtenida a partir de cada función kernel, como se describe en [74]. Por otro lado, alrededor de cada cola de rarefacción,  $x = -0, 16$  y  $x = 0, 16$ , aparece una caída en el valor de las gráficas del momento asociado al cambio brusco de esta magnitud.

Analizando la figura 6.4, podemos afirmar que los resultados numéricos se aproximan a las soluciones exactas, excepto en el punto donde se ubicaría la pared (el punto en el que colisionan las dos corrientes) y las colas de rarefacción. Sin embargo, los resultados numéricos obtenidos a partir de la función kernel  $C_{ij}$ -Cosine propuesta, son más precisos que los obtenidos con las otras tres funciones kernel. Para resaltar la precisión obtenida utilizando cada función kernel, hemos seleccionado, en cada gráfica, los valores asociados a las partes más relevantes de flujo.

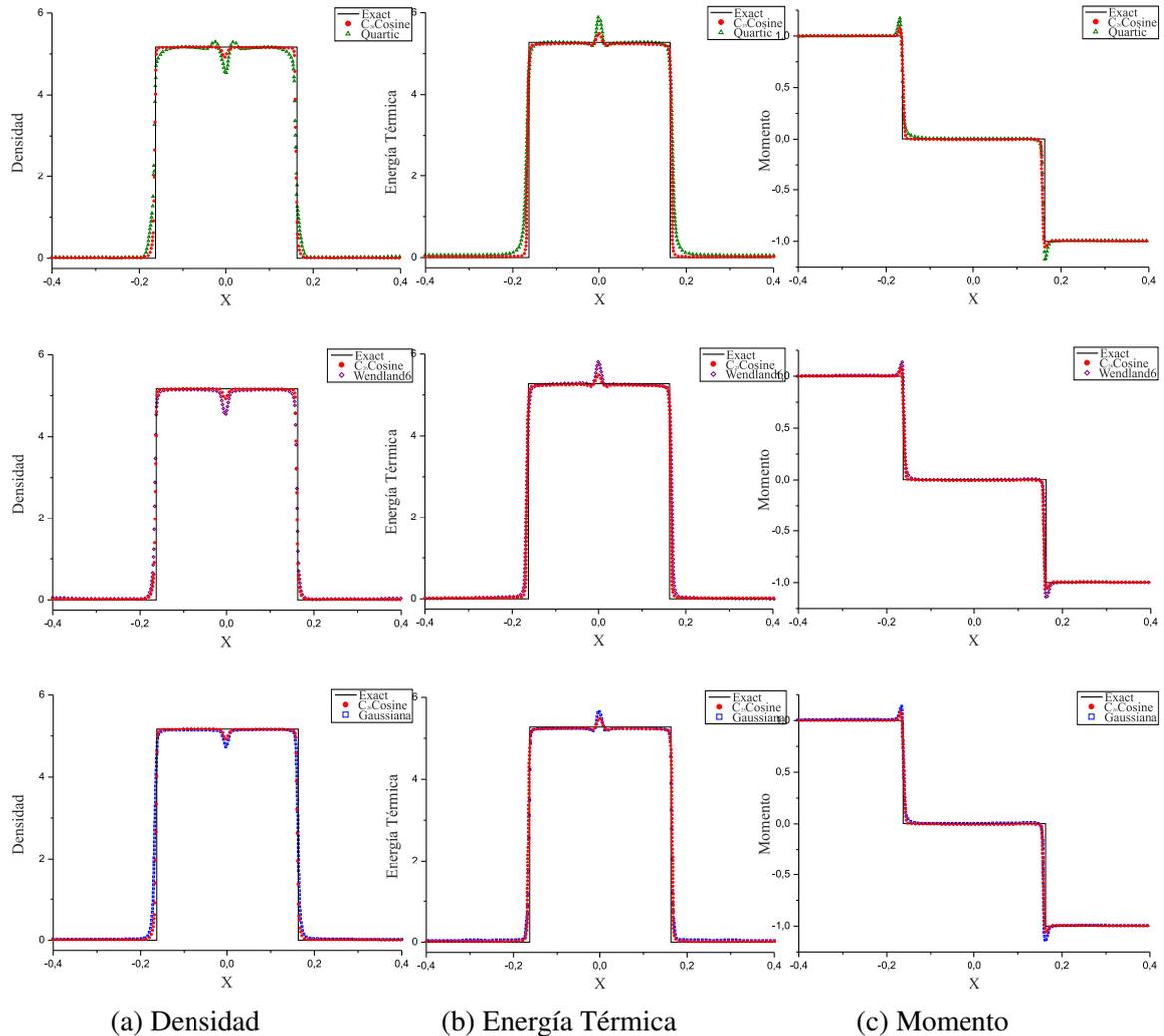


Figura 6.4 Comparativa entre la solución exacta y las soluciones numéricas, de los resultados obtenidos para la prueba impacto sobre muro. El valor de los parámetros de la función  $C_{ij}$ -Cosine son  $i = 2$  y  $j = 6$  para la presión y la velocidad y  $i = 2$  y  $j = 5$  para la energía térmica, con los que se obtienen los mejores resultados.

Para las gráficas de la densidad de masa y de la energía térmica, figuras 6.4a y 6.4b, los valores seleccionados son: la amplitud, la anchura y la posición del máximo asociado a la onda de choque, que designamos como  $A_{sw}$ ,  $W_{sw}$  y  $x_{sw}$ , respectivamente. Los valores obtenidos se muestran en las tablas 6.8 y 6.9. Por otro lado, a partir de las gráficas del momento, figura 6.4c, podemos afirmar que las zonas más relevantes del flujo se encuentran en la cola de rarefacción. Por lo tanto, los valores seleccionados son la amplitud máxima, el ancho y la posición de cada cola de rarefacción. Estos valores los identificamos como  $A_{rt}^L$ ,  $W_{rt}^L$ ,  $x_{rt}^L$ ,  $A_{rt}^R$ ,  $W_{rt}^R$  y  $x_{rt}^R$  en la tabla 6.10.

	$r^2$	$A_{sw}$	$W_{sw}$	$x_{sw}$
Quartic B-Spline	0.9614	0.682	0.059	$2.4506 \cdot 10^{-5}$
Wendland6	0.9761	0.529	0.041	$1.8314 \cdot 10^{-5}$
Gaussiana	0.9814	0.421	0.031	$9.265 \cdot 10^{-6}$
$C_{ij}$ -Cosine	0.9928	0.187	0.014	$2.05 \cdot 10^{-7}$

Tabla 6.8 Valores relevantes obtenidos de las gráficas de la densidad para la prueba de impacto sobre muro, figura 6.4a.

	$r^2$	$A_{sw}$	$W_{sw}$	$x_{sw}$
Quartic B-Spline	0.9671	0.708	0.0471	$1.06024 \cdot 10^{-6}$
Wendland6	0.9781	0.518	0.0317	$0.05020 \cdot 10^{-6}$
Gaussiana	0.9831	0.431	0.0271	$0.7509 \cdot 10^{-7}$
$C_{ij}$ -Cosine	0.9903	0.207	0.0178	$2.05 \cdot 10^{-9}$

Tabla 6.9 Valores relevantes obtenidos de las gráficas de la energía térmica para la prueba de impacto sobre muro, figura 6.4b.

	$r^2$	$A_{rt}^L$	$W_{rt}^L$	$x_{rt}^L$	$A_{rt}^R$	$W_{rt}^R$	$x_{rt}^R$
Quartic B-Spline	0.9698	0.171	0.0916	-0.1911	0.146	0.0843	0.1906
Wendland6	0.9756	0.121	0.039	-0.1805	0.103	0.041	0.1865
Gaussiana	0.9884	0.082	0.026	-0.1830	0.091	0.023	0.1811
$C_{ij}$ -Cosine	0.9926	0.055	0.016	-0.1919	0.057	0.010	0.1936

Tabla 6.10 Valores relevantes obtenidos de las gráficas del momento para la prueba de impacto sobre muro, figura 6.4c.

### 6.2.5 Prueba de Sjögren

La prueba de Sjögren comparte ciertas similitudes con el test de impacto sobre muro, aunque este test fue diseñado para determinar la precisión y la estabilidad, de un determinado método numérico, en simulaciones a muy baja densidad. Descrito por Einfeldt et al. [25] su configuración inicial implica dos estados con baja densidad y presión. Configuración en la que, durante la evolución de la prueba, aparecen dos ondas de rarefacción que viajan en direcciones opuestas desde la posición de la discontinuidad. Durante el estado transitorio, se desarrolla una expansión mutua en la que no se genera un vacío en la posición inicial de la discontinuidad. Así pues la discontinuidad no avanza, como ocurría en las pruebas anteriores, esto genera una discontinuidad de contacto estacionario.

Para llevara cabo esta prueba vamos a utilizar un total de 1400 partículas, uniformemente distribuidas en un dominio  $[-0.5, 0.5]$ , con una separación inicial entre cada una de ellas de  $\Delta x = 4.09 \cdot 10^{-3}$ . El dominio de simulación será dividido en dos regiones, la región, que denominaremos izquierda, estará comprendida entre  $[-0.5, 0.0[$ , mientras que la otra región, la región derecha, estará entre  $]0.0, 0.5]$ . Las magnitudes dinámicas iniciales de densidad de masa, presión y velocidad son:  $(\rho_L, p_L, v_L) = (1.0, 0.4, -2)$  y  $(\rho_R, p_R, v_R) = (1.0, 0.4, 2)$ , valores que se han considerados según la recomendación dada por [78]. En otro orden, el paso de tiempo utilizado en la integración temporal es:  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$ . El resto de los parámetros mantienen los mismos valores utilizados en el test de impacto sobre muro.

A partir de estos valores, hemos implementado la prueba, utilizando las mismas cuatro funciones kernel que en los test previos. Las magnitudes que hemos simulado han sido la densidad de masa, la energía térmica y la velocidad, según recomiendan [74]. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 6.5.

En referencia a las gráficas mostradas en la figura 6.5, la solución numérica muestra un característico perfil en forma de campana, para el caso de la densidad y de la energía térmica, mientras que la velocidad es definida mediante función lineal a tramos. Comparando los resultados numéricos obtenidos para las magnitudes de la densidad y de la energía térmica, indicadas mediante puntos en las figuras 6.5a y 6.5b, podemos afirmar que los resultados que se obtienen a partir de nuestra función kernel  $C_{ij}$ -Cosine son los más precisos, ya que son los que más se aproximan a la solución exacta. No obstante, en la región de la cola de rarefacción aparece una ligera ondulación. Sin embargo, tanto el ancho, como la amplitud máxima de dicha ondulación, son más bajos en los resultados obtenidos con nuestra propuesta, si los comparamos con los resultados obtenidos con las otras tres funciones kernel consideradas. En otro orden, en referencia a las gráficas de la velocidad, figura 6.5c, también podemos afirmar que la mayor precisión se obtiene con nuestra función kernel. Así mismo, cabe destacar los resultados numéricos obtenidos en la cabeza de rarefacción ( $x = 0$ ). En esta posición aparece un pico debido a los balances de energía térmica. Analizando los resultados de las gráficas de la figura 6.5, en esta región, podemos afirmar que la menor altura y anchura del pico se obtienen a partir de nuestro kernel  $C_{ij}$ -Cosine, con lo que podemos afirmar que mejoramos la precisión.

Para cuantificar la precisión que hemos obtenido para cada función kernel, hemos seleccionado los valores más importantes, en cada una de las regiones más relevantes que aparecen en las gráficas de la figura 6.5. Estos valores se muestran en las tablas 6.11, 6.12 y 6.13, que se obtienen a partir de las gráficas de la densidad de masa, la energía térmica y la velocidad, respectivamente. En estas tablas,  $A_{rt}$ ,  $W_{rt}$ ,  $A_{rh}$  y  $W_{rh}$  se refieren a la amplitud y anchura máximas de la cola de rarefacción y de la cabeza de rarefacción, respectivamente.

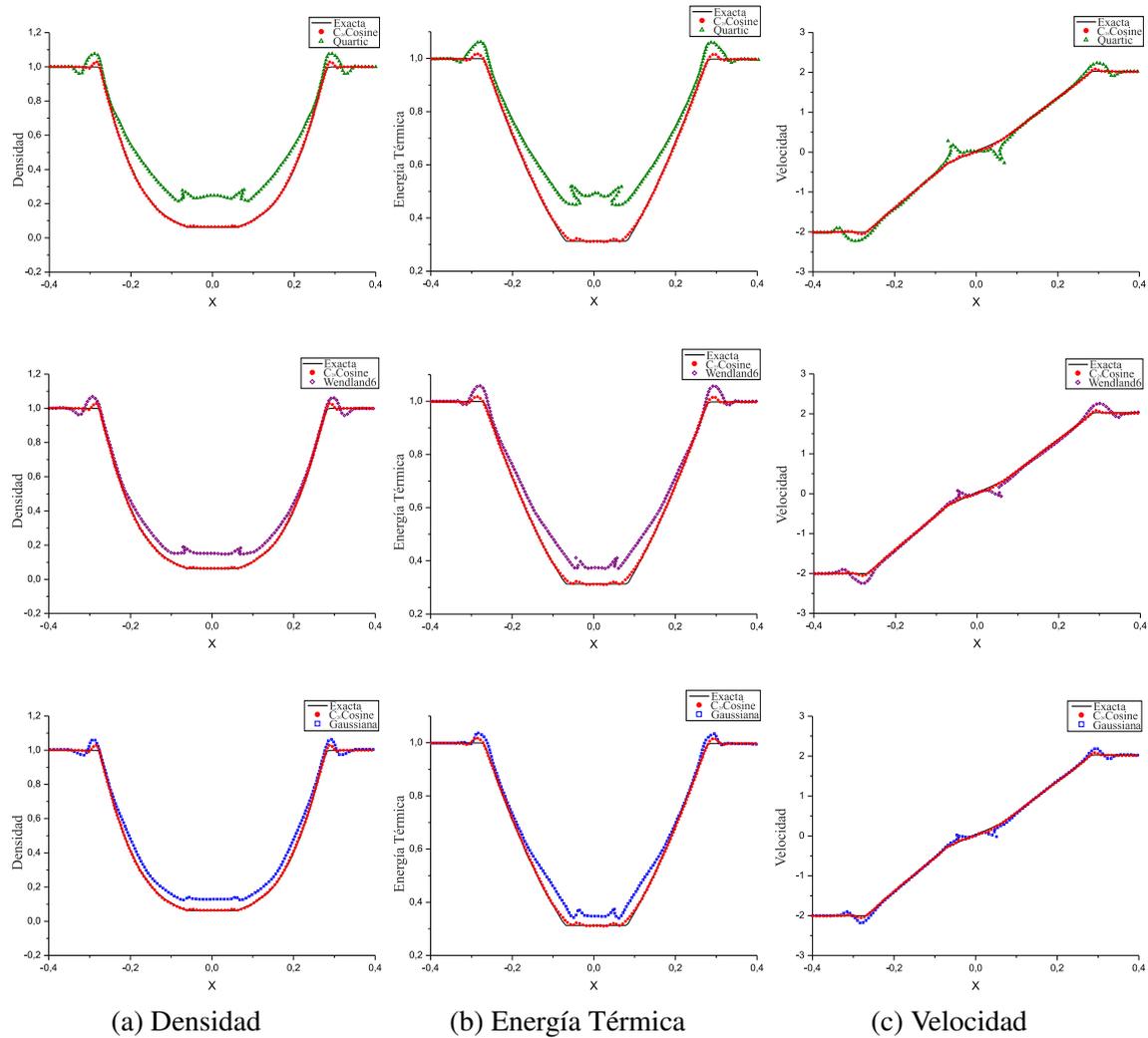


Figura 6.5 Comparativa entre la solución exacta y las soluciones numéricas, de los resultados obtenidos para el test de Sjögreen. El valor de los parámetros de la función  $C_{ij}$ -Cosine son  $i = 2$  y  $j = 6$  para la densidad y la velocidad y  $i = 2$  y  $j = 5$  para la energía térmica, con los que se obtienen los mejores resultados.

	$r^2$	$A_{rt}$	$W_{rt}$	$A_{rh}$	$W_{rh}$
Quartic B-Spline	0.7106	0.086	0.076	0.1831	0.0347
Wendland6	0.8321	0.046	0.065	0.1262	0.0246
Gaussiana	0.9134	0.021	0.058	0.0704	0.0186
$C_{ij}$ -Cosine	0.9915	0.009	0.029	0.0014	0.0098

Tabla 6.11 Valores relevantes obtenidos de las gráficas de la densidad para el test Sjögreen, figura 6.5a.

	$r^2$	$A_{rt}$	$W_{rt}$	$A_{rh}$	$W_{rh}$
Quartic B-Spline	0.7459	0.082	0.091	0.153	0.0298
Wendland6	0.8674	0.056	0.068	0.094	0.0232
Gaussiana	0.9356	0.025	0.053	0.058	0.0194
$C_{ij}$ -Cosine	0.9925	0.016	0.032	0.028	0.0091

Tabla 6.12 Valores relevantes obtenidos de las gráficas de la energía térmica para el test Sjögren, figura 6.5b.

	$r^2$	$A_{rt}$	$W_{rt}$	$A_{rh}$	$W_{rh}$
Quartic B-Spline	0.9278	0.226	0.1147	0.4539	0.041
Wendland6	0.9534	0.198	0.1029	0.2399	0.026
Gaussian	0.9678	0.156	0.0841	0.1981	0.019
$C_{ij}$ -Cosine	0.9917	0.067	0.0354	0.1056	0.010

Tabla 6.13 Valores relevantes obtenidos de las gráficas de la velocidad para el test Sjögren, figura 6.5c.

### 6.3 Resultados del Método Híbrido Potencial-SPH

En la sección anterior, hemos llevado a cabo un conjunto de pruebas para cuantificar la estabilidad y la precisión. En cada una de estas pruebas hemos desarrollado un entorno comparativo entre los resultados obtenidos con nuestra función y con otras tres funciones kernel muy utilizadas en SPH. En base a estos resultados, hemos podido demostrar las capacidades de la función kernel propuesta en el ámbito de la precisión y la estabilidad.

Tras lo cual, en esta sección nos vamos a centrar en demostrar las capacidades que presenta la segunda de las técnicas propuestas, esta es, la técnica híbrida Potencial-SPH con la que imponer la incompresibilidad y gestionar el calentamiento, asociado al balance de energía térmica, en los límites del contorno. De modo análogo al desarrollado en la sección 6.2 vamos a comparar nuestra propuesta con otros dos métodos explícitos comúnmente implementados en SPH, estas otras técnicas son: WCSPH [86] y PCISPH [80]. Así mismo, vamos a demostrar los efectos que en la simulación tiene el control del balance de energía térmica en el contorno. Para ello hemos simulado el fluido activando y desactivando el control del calentamiento del fluido. Finalmente, hemos implementado nuestra propuesta utilizando diferentes pasos de tiempo, con el objetivo mostrar el rango de estabilidad con respecto al paso de tiempo. Así mismo, mostraremos los rangos de estabilidad que se consigue al implementar nuestra propuesta y los compararemos con los rangos de estabilidad que se obtienen con las otras dos técnicas.

### 6.3.1 Imposición de la incompresibilidad

En esta primera evaluación vamos a simular la interacción de un fluido con un objeto de perfil complejo. El objetivo es analizar los resultados que se obtienen al imponer la incompresibilidad en una simulación de cierta complejidad y comprobar la estabilidad y el realismo que se obtiene. Así pues, cuanto más estable y precisa sea una simulación, mejor se simularán efectos como salpicaduras, interacción y estabilidad en la superficie. Como ya hemos mencionado, en esta prueba vamos a implementar, junto a nuestra propuesta de imposición de incompresibilidad, otras dos técnicas explícitas como son WCSPH [86] y PCISPH [80] ampliamente utilizadas en SPH y de reconocidas capacidades.

Aunque nuestro objetivo, llegados a este punto, es probar las capacidades de imponer la incompresibilidad, debido a las complejidades del contorno con el que interactúa el fluido hemos optado por implementar, en todas las simulaciones, nuestra propuesta de interacción fluido–contorno, descrita en el capítulo 5 y que será sometida a examen en la sección 6.4 de este mismo capítulo. No obstante, hemos considerado unas condiciones de contorno constantes que sólo afectará a la presión y a la velocidad. El uso de condiciones de contorno más complejas la llevaremos a cabo en la sección 6.4.

Referente a los valores de simulación, hemos implementado un fluido modelado mediante  $3.5 \cdot 10^6$ . La masa y el radio del dominio soportado son  $m_i = 0.03$ ,  $h = 0.25$  respectivamente. La densidad del fluido considerada es  $\rho_0 = 1000$ ; y para implementar la incompresibilidad hemos impuesto los valores  $\varepsilon = 0.3$  y  $\eta = 0.02\%$ . En todas las simulaciones hemos considerado la función kernel  $C_{24}$ –Cosine, que es con la que, empíricamente, hemos obtenido los mejores resultados al imponer la incompresibilidad.

Los resultados obtenidos al imponer la incompresibilidad mediante las técnicas WCSPH, PCISPH y nuestro método híbrido Potencial–SPH se muestran en las imágenes de la figura 6.6.

A partir de los resultados mostrados en las imágenes de la figura 6.6, se puede deducir la mejora en estabilidad que se obtiene con nuestra propuesta. Especialmente destacable es la simulación de las salpicaduras y la suavidad de la ondulación en la superficie, que son pruebas de estabilidad.

### 6.3.2 Control del balance de energía en el contorno

Seguidamente, vamos a mostrar otra de las capacidades que tiene nuestra técnica de imposición de incompresibilidad, esta es: *gestionar el balance de energía térmica en el contorno, sin necesidad de implementar la ecuación de energía térmica*. En este caso no desarrollare-

mos una comparación con los otros métodos explícitos, ya que tanto WCSPH como PCISPH no son capaces de implementar los balances de energía térmica.

En este caso, hemos mantenido los mismos valores utilizados en la simulación anterior, incluida la misma función kernel, excepto el número de partículas, que en esta simulación serán  $5 \cdot 10^4$ . Para evidenciar el efecto del calentamiento, asociado al balance de energía térmica, hemos “activado–desactivado” la disipación de calor. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 6.7

De las imágenes mostradas en la figura 6.7, se puede deducir los efectos de no gestionar el calentamiento en el contorno. Con el borde en rojo se indica la inestabilidad cuando se desactiva la gestión del balance de energía térmica.

### 6.3.3 Rangos temporales de estabilidad

Hasta ahora, hemos sometido a estudio nuestra propuesta de imposición de incompresibilidad, con dos objetivos: el primero ha sido compararla con otras dos técnicas explícitas y el segundo mostrar los efectos de activar–desactivar la gestión del balance de energía térmica. Finalmente, en esta sección vamos a evaluar los rangos de estabilidad de nuestra propuesta. En primer lugar, evaluaremos el rango de incremento temporal en el que nuestra propuesta da simulaciones estables. Seguidamente recogeremos los rangos de estabilidad en los que tanto nuestra propuesta, como las otras dos técnicas explícitas dan simulaciones estables.

Para esta evaluación hemos considerado las mismas condiciones de simulación que en la sección anterior. Los resultados de evaluar el rango de estabilidad temporal se muestra en la figura 6.8 para el instante  $t = 1.25 \text{ s}$ .

Por otro lado, hemos desarrollado un estudio de rangos de estabilidad para otros parámetros fundamentales en SPH. Parámetros como son: la viscosidad, la densidad, el número de partículas... Los valores obtenidos se muestran en la tabla 6.14.

## 6.4 Resultados del Modelado de Interacción Fluido–Contorno

Hasta ahora, hemos llevado a cabo pruebas específicas para cuantificar la estabilidad y la precisión que obtenemos con la función kernel propuesta, sección 6.2, y para nuestra propuesta de imposición de la compresibilidad, sección 6.3. A continuación, nos vamos a centrar en la implementación del modelo de interacción fluido–contorno. Para mostrar las capacidades de nuestra propuesta vamos a implementar dos pruebas: en la primera compararemos nuestra propuesta con otras comúnmente usadas en SPH, en la segunda mostraremos la simulación con diferentes condiciones de contorno. Con estas pruebas

	Potencial– SPH	PCISPH	WCSPH
Radio Dominio Soportado ( $h$ )	0.06 – 0.8	0.2 – 0.45	0.2 – 0.35
Densidad ( $\rho$ )	125 – 2500	800 – 1800	800 – 1200
Numero de Particulas Vecinas ( $\mathcal{N}(i)$ )	6 – 85	20 – 85	50 – 85
Viscosidad ( $\mu$ )	$2 \cdot 10^{-3} - 0.8 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^{-2} - 0.8 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^{-2} - 0.6 \cdot 10^3$
Masa de la Particula ( $m$ )	$1 \cdot 10^{-4} - 1 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-3} - 1 \cdot 10^{-2}$	0.02 – 0.05
Paso de Tiempo ( $\Delta t$ )	$6 \cdot 10^{-2} - 1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-6} - 1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-6} - 1 \cdot 10^{-5}$

Tabla 6.14 Rangos de valores de estabilidad. Las magnitudes se expresan en unidades del sistema internacional.

pretendemos evidenciar las mejoras que obtenemos respecto de otras técnicas existentes, así como la capacidad que tiene nuestra propuesta para simular condiciones de contorno complejas. Condiciones que afectan al resultado de la simulación y que no son posibles simular en CG con los modelos existentes.

Centrándonos en las condiciones de simulación comunes a ambas pruebas, hemos considerado que todas las partículas del fluido tienen igual masa cuyo valor es  $m_i = 0.03$ . Hemos usado nuestra función kernel propuesta, ya que garantiza estabilidad y precisión, como se muestra en las gráficas de la sección 6.2, concretamente hemos usado la función kernel  $C_{25}$ –Cosine, por ser la que ofrece los mejores resultados en la interacción fluido–contorno. El radio de dominio soportado para esa función kernel es  $h = 0.38$ .

En cuanto a la discretización de nuestro contorno, hemos considerado una distribución partículas, cuyo radio es el doble del que poseen las partículas fluidas. Además, hemos impuesto la condición de que estén solapadas un 5%, es decir, que la distancia entre el centro de dos partículas de contorno contiguas es  $1.9R_f$ , donde  $R_f$  el radio de la partícula fluida. Así, conseguimos un recubrimiento completo del contorno.

### 6.4.1 Comparativa con otros modelos de interacción fluido–contorno

En esta sección, vamos llevar a cabo la implementación de nuestra propuesta junto con otras tres técnicas basadas en la discretización del contorno mediante partículas. De este modo se podrá analizar las mejoras que se obtienen con nuestra propuesta. Las tres técnicas seleccionadas son: la desarrollada por Oger et al. [66], la propuesta por Becker et al.[11] y la técnica de Akinci et al. [3]. Hemos seleccionado estas técnicas porque presentan ciertas semejanzas con nuestro modelo, como son el tratamiento del contorno mediante partículas y la detección de la interacción fluido–contorno a través de técnicas geométricas.

Sin embargo, a pesar de las semejanzas con estas metodologías, existen diferencias que deben ser implementadas “*ad-hoc*”. Este es el caso de la densidad asociada a las partículas de contorno, que no es necesario utilizar en nuestra propuesta, el número de iteraciones máxima en el proceso predictor–corrector de la técnica propuesta por [11] o la función kernel utilizada por [3] para calcular la densidad de las partículas de contorno. Para llevar a cabo la implementación de cada una de ellas, hemos utilizado los valores y recomendaciones dada por los autores de cada técnica. Para cada simulación hemos utilizado  $5.0 \cdot 10^4$  partículas fluidas.

Con estas condiciones hemos obtenido los resultados que mostramos en la figura 6.9, todos ellos correspondiente al mismo instante de simulación. Las posibles diferencias son debidas a las distintas características de cada técnica.

Analizando estas imágenes, se puede deducir que la técnica propuesta, figura 6.9d, ofrece unos buenos resultados desde el punto de vista de la estabilidad y de la adaptabilidad al contorno. Analizando cada imagen, se puede afirmar que el resultado obtenido a partir de la técnica propuesta por [66], figura 6.9a, si bien evita el comportamiento errático de las partículas, que es uno de los problemas más destacable en la interacción fluido–contorno en simulaciones mediante SPH, presenta dos importantes limitaciones: la primera es que muestra un sobreamortiguamiento artificial, la segunda es que se produce una ligera penetración en el contorno. Ello se debe a que el modelo de [66] necesita del uso de fuerzas de fricción no simétricas, cuya elección condiciona el realismo de la simulación. Por otro lado, en el resultado obtenido a partir de la propuesta de Becker et al. [11], figura 6.9b, se solventa este problema, es decir, no se muestra sobreamortiguamiento, ni penetración en el contorno. Sin embargo, muestra dispersión de las partículas y cierta separación del contorno. Este comportamiento se debe a que, aunque controla la fuerza de presión, algunas fuerzas dinámicas son despreciadas, como por ejemplo la viscosidad, lo que afecta a la estabilidad y favorece la dispersión. Con respecto al resultado obtenido a partir de la técnica propuesta por Akinci et al. [3], figura 6.9c, se puede afirmar que mejora los resultados de la técnica anterior. No obstante, presenta el mismo problema de la separación del contorno, limitación que es solventada en el resultado que se ha obtenido con nuestra propuesta, como se puede ver en la figura 6.9d.

#### **6.4.2 Comparativa entre diferentes condiciones de contorno**

Una vez que hemos constatado las ventajas que ofrece nuestra propuesta de modelado de la interacción fluido–contorno, pasamos a mostrar las capacidades que tiene a la hora de implementar condiciones de contorno complejas. Condiciones de contorno que no pueden ser implementadas con las metodologías habitualmente empleadas en SPH, dentro del ámbito

de CG, y que afecta a la posibilidad de simular la interacción del fluido con diferentes materiales.

En nuestro caso, vamos a simular la interacción con dos materiales estas son: mármol y madera. Cada uno de estos materiales van a tener diferentes coeficientes de rozamiento. Para el mármol hemos considerado una variación proporcional a la velocidad tanto para la dirección normal como para la tangencial –una pérdida del 50% para la normal y un 20% para tangencial (que designaremos como *tipo 1*). Para la madera hemos implementado la condición de Robin para la dirección tangencial, y de Dirichlet para la normal; para la tangencial los parámetros que hemos utilizado son:  $\gamma = 0.35$ ,  $\sigma = 0.8$  y  $\zeta_{\delta\Omega} = 3.5$  (que designaremos como *tipo 2*). Esta elección es un modo de modelar la absorción que presenta la madera, lo que reducirá el flujo laminar sobre el elipsoide. Los resultados obtenidos se muestra en las figura 5.1.

Analizando comparativamente las imágenes mostradas en la figura 6.10, podemos ver las diferencias en el comportamiento del fluido. Esto se debe a la diferencia en las condiciones de contorno, aunque el contorno de interacción sea el mismo. Con nuestra propuesta para gestionar la interacción fluido–contorno, hemos podido implementar condiciones como la *tipo 2*, modelada a partir de formulación diferencial. Tal como se modela dicha condición, se impide la formación de una *capa límite*, como se puede ver en las imágenes de 6.10b, a diferencia de la condición *tipo 1*. La importancia de simular la *tipo 2* radica en que, con las metodologías utilizadas en SPH en el ámbito de CG, requiere de una simplificación para poder ser simulada. Simplificación que suele reducir el realismo.



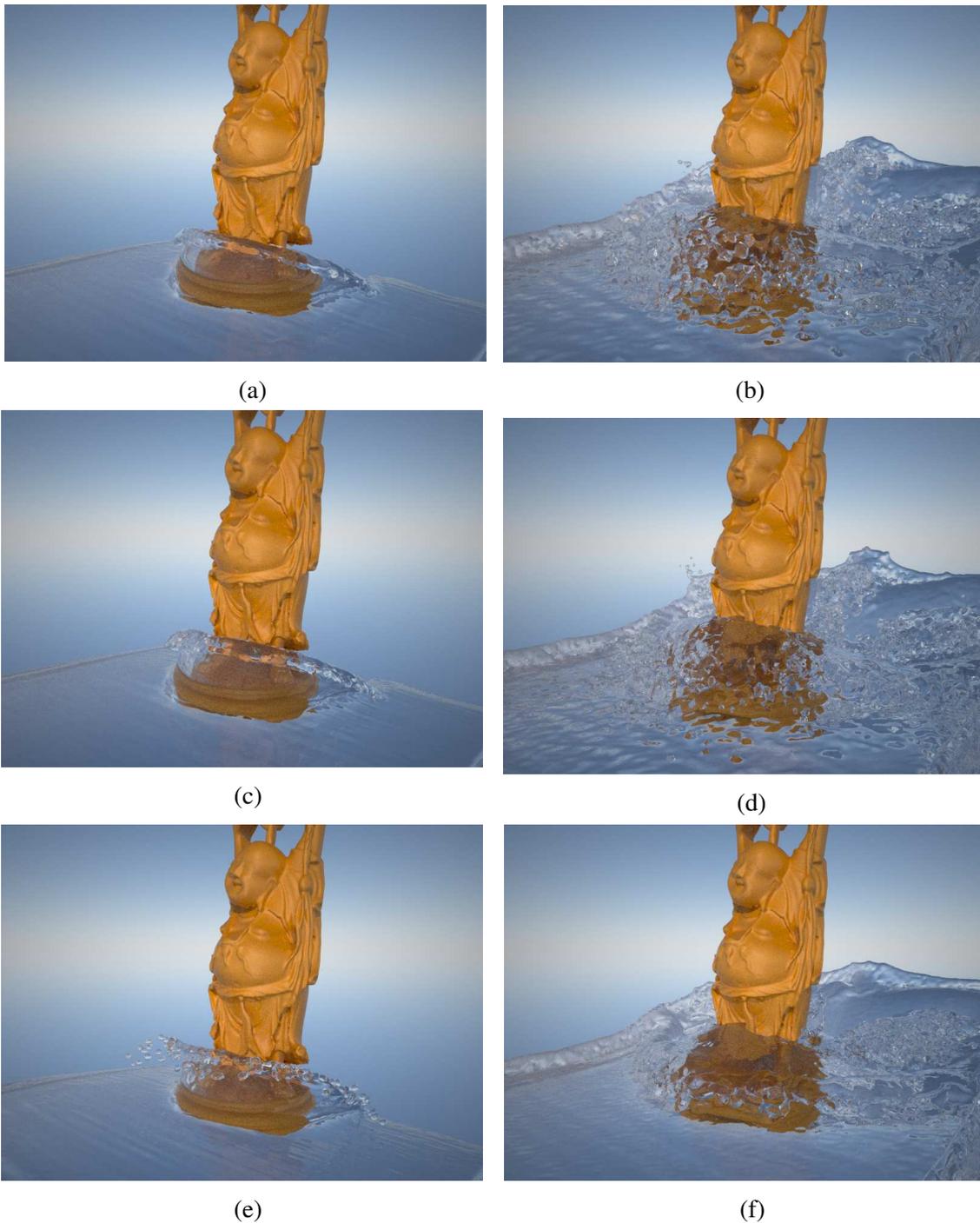


Figura 6.6 Imágenes de simulaciones de fluidos obtenidas mediante diferentes técnicas. Las imágenes 6.6a y 6.6b se han obtenido a partir de la implementación del modelo WCSPH; las imágenes 6.6c y 6.6d se han obtenido mediante PCISPH; las imágenes 6.6e y 6.6f son el resultado de nuestro método híbrido Potencial–SPH.

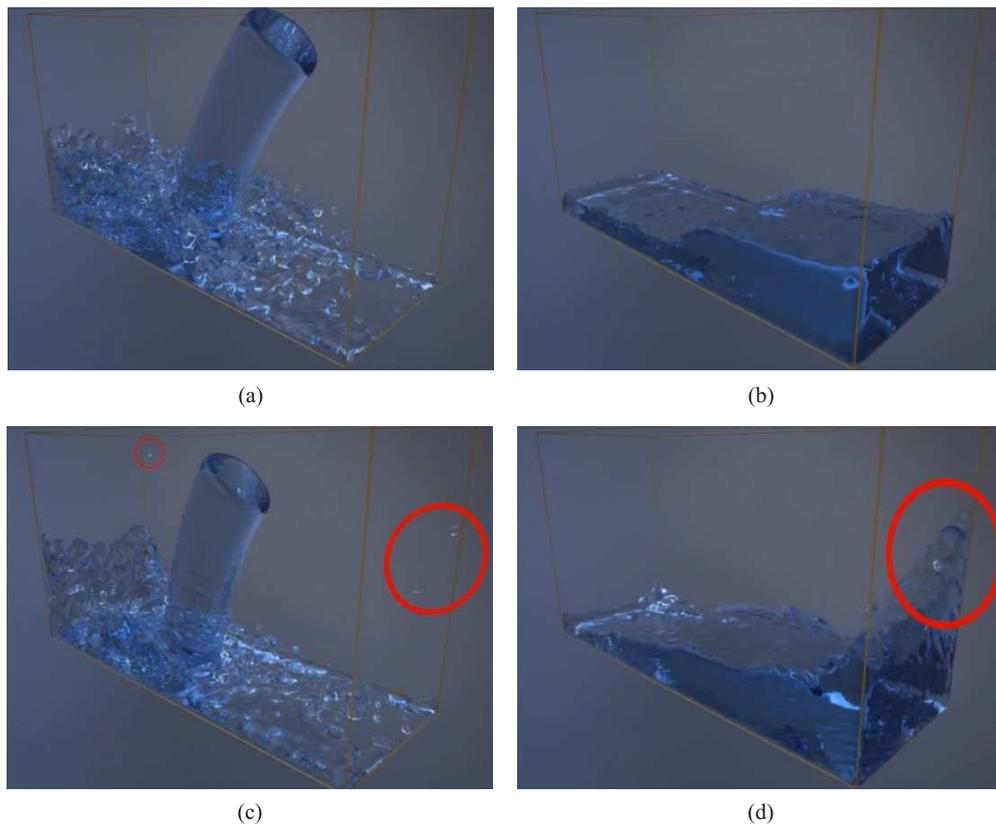


Figura 6.7 Imágenes de la simulación de fluidos en dos momentos diferentes, activando y desactivando la disipación de calor. Las imágenes superiores se obtienen al activar la disipación de calor, en las imágenes inferiores se desactiva la disipación de calor.

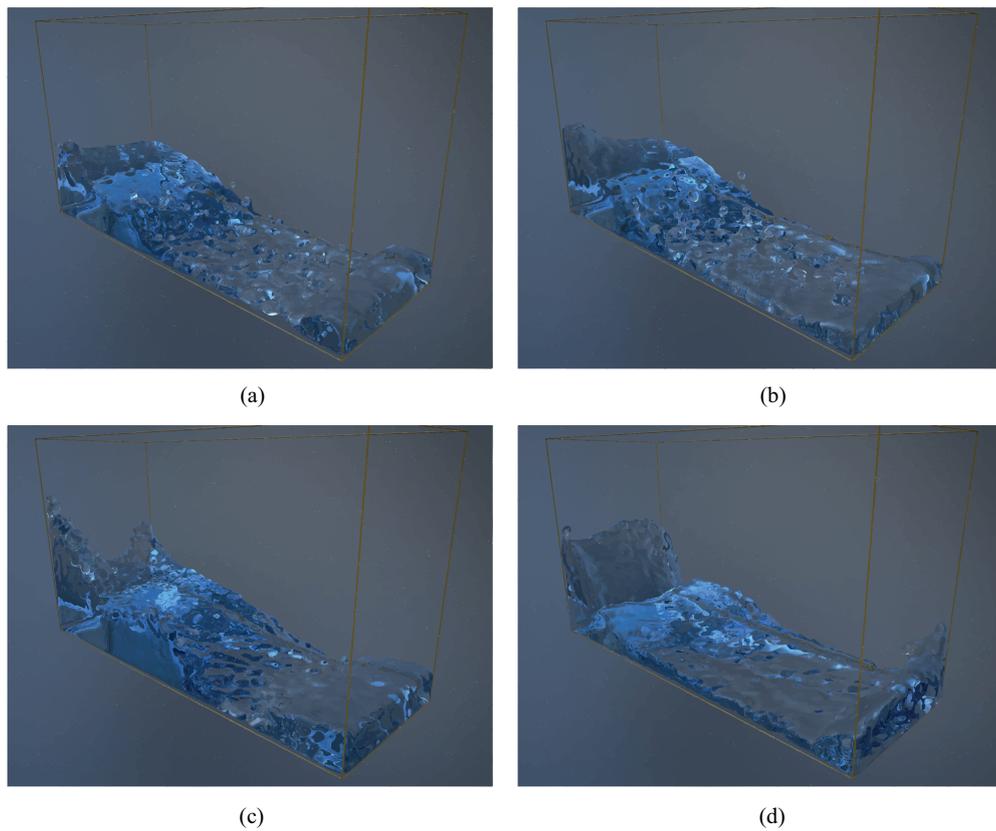


Figura 6.8 Imágenes de la simulación del fluido en el instante  $t = 1.25s$  obtenido para diferentes instantes de tiempo: figura 6.8a  $\Delta t = 0.001s$ , figura 6.8b  $\Delta t = 0.008s$ , figura 6.8c  $\Delta t = 0.02s$  y figura 6.8d  $\Delta t = 0.07s$ .

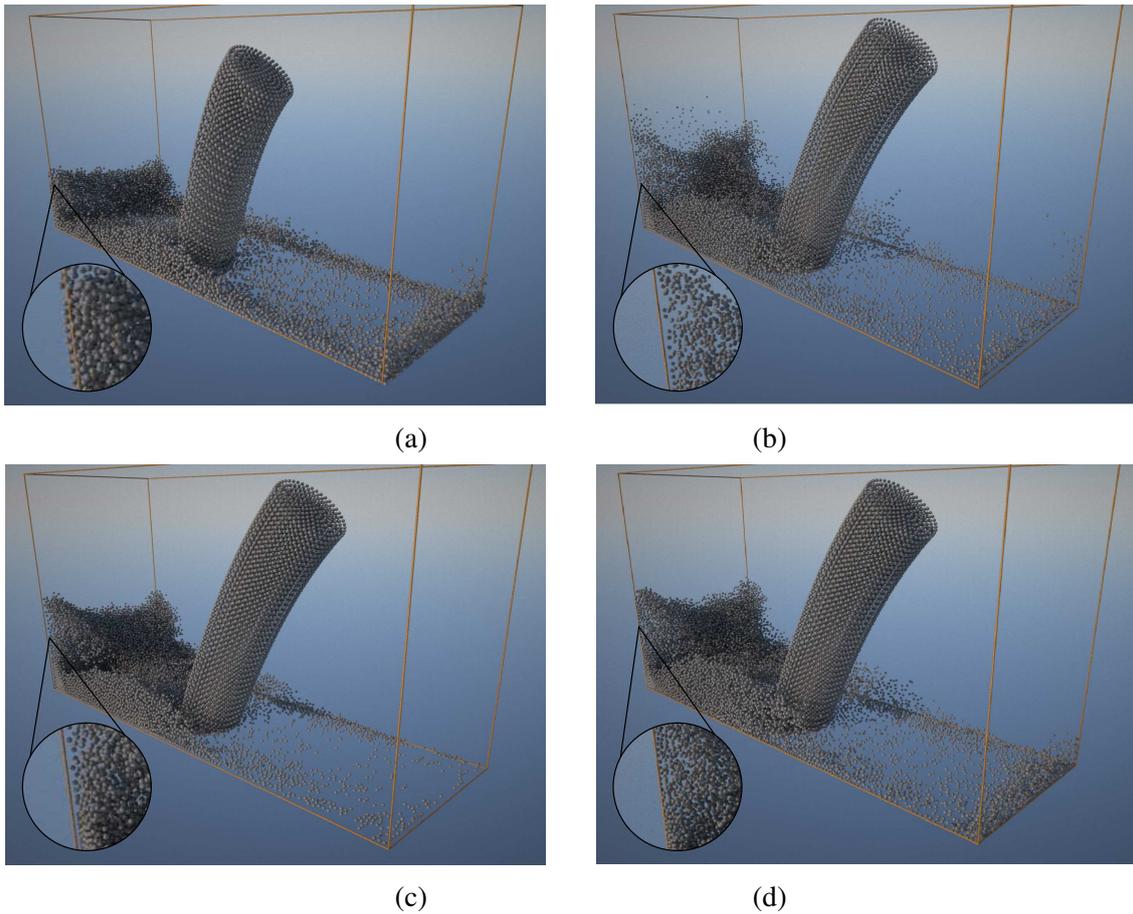


Figura 6.9 Comparativa de los resultados obtenidos con diferentes técnicas basadas en partículas de contorno. En la figura 6.9a, se muestra el resultado de la técnica propuesta por Becker et al. [11]. En la figura 6.9b, el obtenido a partir del modelo de por Oger et al [66]. En la figura 6.9c, el de la propuesta de Akinci et al. [3]. Finalmente, en la figura 6.9d, se muestra el resultado obtenido con nuestra propuesta. En cada imagen, se ha destacado la región donde mejor se muestra la capacidad de cada técnica.

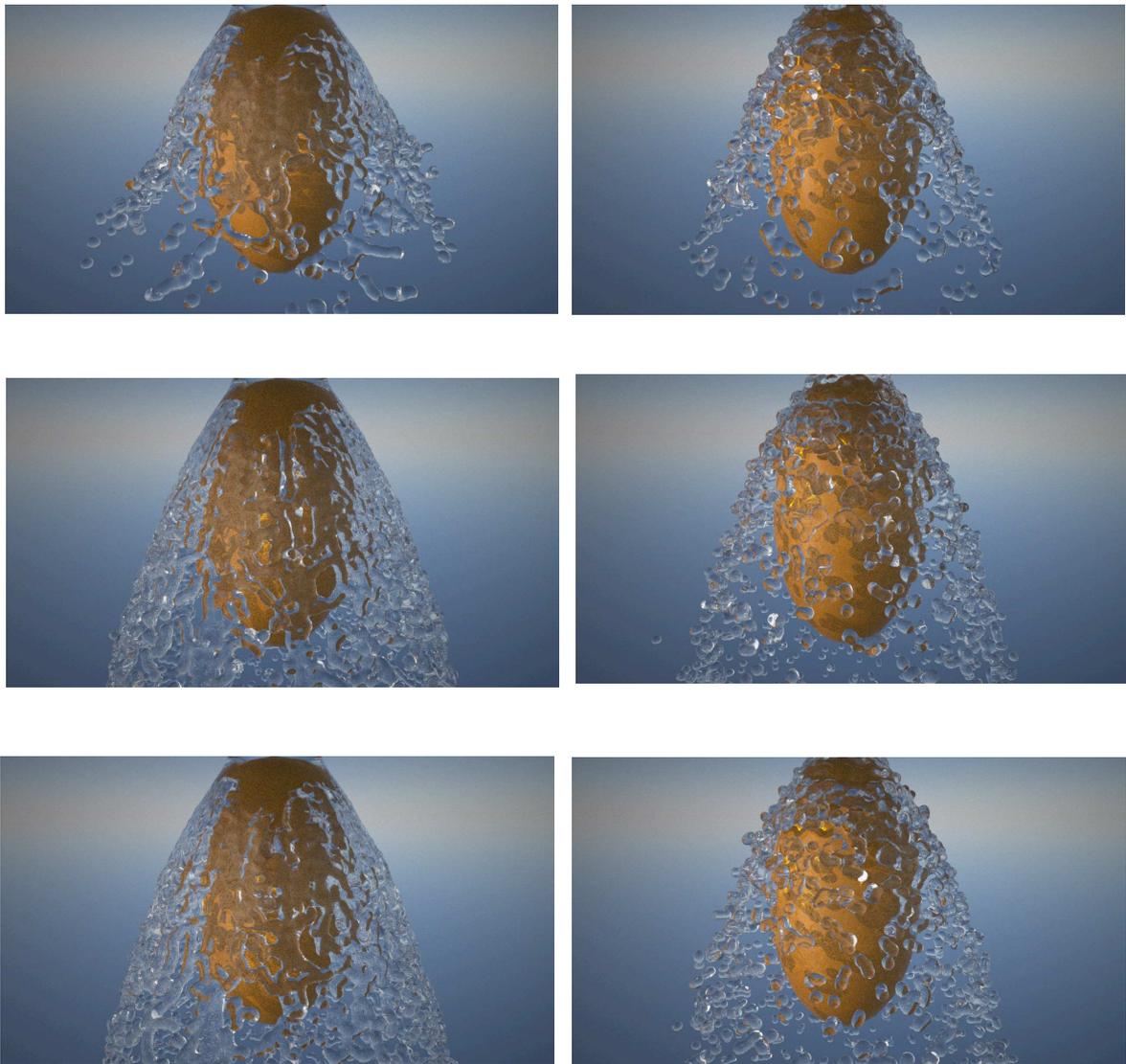
(a) Condición de contorno *tipo 1* (mármol)(b) Condición de contorno *tipo 2* (madera)

Figura 6.10 Resultados de interacción del fluido con un elipsoide, cada dupla (fila de imágenes) se obtiene para el mismo instante. Comparativamente se pueden ver las diferencias.

# Capítulo 7

## Conclusiones

### 7.1 Conclusiones

En esta tesis, hemos estudiado los problemas de inestabilidad e imprecisión que aparecen en las simulaciones de fluidos mediante SPH. Hemos analizado el origen de estos problemas y hemos deducido que si el número de partículas vecinas es bajo, del orden de algunas decenas, o su distribución en el dominio soportado es inhomogénea, la simulación se vuelve inestable y los resultados imprecisos. También hemos analizado cómo la distribución y el número de partículas vecinas bajo reduce la precisión en el gradiente de presión y en la energía térmica; imprecisión que se ve incrementada al imponer la condición de incompresibilidad. Así mismo, hemos descrito las distintas propuestas desarrolladas para evitar estos problemas, cuyo objetivo es incrementar el número y mejorar la distribución de partículas vecinas. Sin embargo, existen regiones límites, como son el contorno o las interfases, donde no es posible incrementar el número de partículas vecinas, por lo que los problemas de imprecisión e inestabilidad no están resueltos en estas regiones. Además, hemos detectado que, en el ámbito de CG, el modelado de la incompresibilidad no está completamente resuelto al simular líquidos y los modelos existentes pueden inducir inestabilidad e imprecisión, ya que no consideran los balances de energía fluido–contorno. La consecuencia es la dispersión errónea de las partículas en estas regiones. Con el objetivo de solventar estas limitaciones, hemos desarrollado tres propuestas, estas han sido: (1) *una nueva función kernel*, (2) *un nuevo modelado del gradiente de presión para imponer la incompresibilidad* y (3) *una nueva gestión de la interacción fluido–contorno*. En cada una de estas propuestas:

1. Hemos identificado las características analíticas de la función kernel que favorecen la estabilidad y la precisión. A partir de estas características hemos formulado una

nueva función kernel paramétrica desarrollada como una composición de funciones armónicas. Por su formulación las hemos denominado como  $C_{ij}$ -Cosine.

Para demostrar las mejoras en precisión y estabilidad que se obtienen con nuestra función kernel, hemos implementado un conjunto de pruebas estandarizadas tal como describimos en el capítulo 6. El objetivo de estas pruebas ha sido desarrollar un entorno comparativo entre la función propuesta y otras funciones kernel muy utilizadas en las simulaciones mediante SPH. A partir de los resultados obtenidos en la sección 6.2 podemos concluir que:

- *El kernel  $C_{ij}$ -Cosine nos permite obtener una alta estabilidad.* Esta conclusión puede deducirse de los resultados obtenidos en el test de sedimentación, figura 6.1, donde los resultados de  $C_{ij}$ -Cosine muestran un mayor grado de reticularidad en comparación con los obtenidos a partir de las otras tres funciones kernel. Desde el punto de vista cuantitativo, esta mejora se refleja en los resultados del parámetro  $\zeta$ , tabla 6.1, donde los valores obtenidos por las otras tres funciones kernel son de un valor mayor que los ofrecidos por nuestra  $C_{ij}$ -Cosine. Lo que significa, según las características del parámetro  $\zeta$ , que  $C_{ij}$ -Cosine es la que mayor estabilidad garantiza.
- *El kernel  $C_{ij}$ -Cosine nos permiten obtener resultados altamente precisos en simulaciones con condiciones extremas, en las que aparecen ondas de choque y las discontinuidades en las magnitudes que describen al fluido.* Podemos hacer esta afirmación a partir de los resultados obtenidos en la prueba de Sod (Sod's shock-tube), sección 6.2.2. En las gráficas de la figura 6.2 se muestran los resultados obtenidos para la densidad, la energía térmica y la velocidad. A partir de estos resultados, podemos inferir que con nuestra propuesta se obtienen los resultados más precisos. Esta precisión es más evidente en la cola de rarefacción, la discontinuidad del contacto y la onda de choque. Para reforzar este hecho, hemos seleccionado los valores asociados a estas regiones que se muestran en las tablas 6.2, 6.3 y 6.4. Todos los valores obtenidos evidencian que la mejor precisión se obtiene a partir de  $C_{ij}$ -Cosine.
- *Con la función kernel  $C_{ij}$ -Cosine propuesta conseguimos precisión incluso con altos valores de velocidad que induce la aparición de regiones con alta discontinuidad, como se ha demostrado en el test de onda expansiva (blast-wave test), que representa una versión más extrema del test de Sod.* Al igual que en los resultados obtenidos en esa prueba, la precisión más alta se obtiene con la función

kernel propuesta. Este hecho queda confirmado por los resultados numéricos mostrados en las tablas 6.5, 6.6 y 6.7.

- *En situaciones de muy baja energía, como las que se simulan en la prueba impacto sobre muro. Los mejores resultados se obtienen a partir de nuestra función kernel, tal como se puede comprobar en las gráficas de la figura 6.4. Para respaldar esta afirmación nos vamos a centrar en la región donde aparece la alteración del pico (“dip”). La altura y la anchura de esta alteración cuantifica la precisión obtenida, de modo que, cuanto menor sean estas dos magnitudes del pico, mejor será la precisión obtenida ya que, idealmente, esta alteración no debería aparecer. En base a este hecho y analizando las gráficas mostradas en la figura 6.4, podemos afirmar que, comparativamente, la función kernel propuesta,  $C_{ij}$ -Cosine, nos permite obtener los resultados más exactos. Numéricamente, este hecho también queda confirmado por los valores de las tablas 6.8, 6.9 y 6.10 en donde se demuestra que la mayor exactitud se obtiene a partir de la función  $C_{ij}$ -Cosine.*
- *La función kernel propuesta también garantiza precisión cuando la densidad y la presión son bajas, condiciones que se simulan en la prueba de Sjögren. Los resultados obtenidos mediante nuestra  $C_{ij}$ -Cosine son los más precisos, como se puede deducir de las gráficas mostradas en la figura 6.5. Además, esta afirmación queda confirmada por los resultados mostrados en las tablas 6.11, 6.12 y 6.13, de los que se puede deducir que, de nuevo, la mayor precisión se obtiene con nuestra función kernel.*

*En base a estos hechos, podemos afirmar que la función kernel propuesta,  $C_{ij}$ -Cosine, ofrece los resultados más precisos en todas las pruebas a las que hemos sometido, incluso en condiciones extremas.*

2. Hemos identificado los factores que relacionan la inestabilidad con el gradiente de presión. Hemos concluido que la imposición de la incompresibilidad, en la simulación de líquidos, agrava los problemas de inestabilidad, sobre todo cuando el número de partículas vecinas es bajo. La consecuencia en la simulación es que la inestabilidad da como resultado dispersiones erráticas de las partículas, especialmente en los contornos del fluido. Además, hemos detectado que el balance de energía en la interacción fluido-contorno debe ser considerado para evitar inestabilidad. Para solventar estos problemas relacionados con la incompresibilidad, hemos desarrollado un modelo híbrido Potencial-SPH, que garantiza estabilidad incluso para un muy bajo número de partículas. Particularmente hemos conseguido:

- *Mejorar la estabilidad en la fuerza de presión*, formulando una fuerza independiente de la densidad, definida sobre cada par de partículas, por lo que esta estabilidad se mantiene incluso para situaciones de muy bajo número de partículas vecinas. Así, hemos obtenido resultados estables en todas las regiones del fluido, especialmente en los contornos. Esta afirmación está confirmada por los resultados que mostrados en la figura 6.6, en donde se puede ver la estabilidad lograda especialmente en los contornos.
- *Imponer eficientemente la incompresibilidad*. La eficiencia se debe a que conseguimos imponer la incompresibilidad explícitamente y en un sólo paso, no es un método predictivo–correctivo. La mejora que se obtiene puede deducirse de los resultados obtenidos en la simulación mostrada en la figura 6.6.
- *Determinar el calentamiento en el fluido y disiparlo* de un modo eficiente y preciso. Esto representa una novedad importante ya que en los métodos existentes en CG, basados en SPH, no consideran el calentamiento. La importancia del calentamiento, especialmente en el contorno, queda demostrada en las simulaciones de la figura 6.7 donde la desactivación de la disipación del calor conlleva la aparición de inestabilidades en el contorno.
- *Mejorar los resultados que se obtienen con otras técnicas de imposición explícita de la incompresibilidad*. Esta mejora se ilustra en la figura 6.6, donde llevamos a cabo una comparación con otras técnicas explícitas de imposición de la incompresibilidad.
- *Desarrollar un modelo estable y eficiente para un amplio rango de valores*. Tal como se muestra en la figura 6.8, donde aparece el resultado de la simulación obtenida, para un mismo instante de tiempo, pero con diferentes pasos de tiempo. Además, en la tabla 6.14 mostramos el resultado de un estudio comparativo de los rangos de estabilidad para diferentes métodos. Especial interés tiene el rango del número de partículas vecinas en la que podemos operar y los pasos de tiempo en los que el sistema es estable.

*Así pues, podemos concluir que nuestra propuesta para imponer explícitamente la incompresibilidad mejora la estabilidad en las simulaciones de fluidos. Además, hemos desarrollado un modelo eficiente que, además, permite gestionar los balances de energía, especialmente en los límites del contorno.*

3. Hemos identificado los problemas de estabilidad que se relacionan con la interacción fluido–contorno. Así mismo, hemos analizado las diferentes técnicas existentes para

el modelado de las condiciones de contorno. En base a estos estudios, hemos desarrollado una nueva técnica que garantiza estabilidad y que permite la simulación de condiciones de contorno más complejas, que las que habitualmente se simulan en CG. Particularmente, los logros que obtenemos con nuestra técnica de interacción fluido contorno son:

- *Un método optimizado para contornos modelados mediante partículas en el que sólo se gestiona interacción partícula del contorno–partícula fluida.* De este modo, es posible gestionar la interacción sin necesidad de generar magnitudes artificiosas, tales como: densidad o presión, sobre las partículas del contorno. La ventaja que se obtiene no es sólo operativa, sino que impide que la densidad de las partículas del fluido, las que interactúa con el contorno, adquieran valores erróneos que puedan introducir inestabilidad e imprecisión en las simulaciones.
- *Hemos logrado optimizar la adaptabilidad del fluido al contorno.* Por la propia estructura con la que modelamos nuestro contorno y la formulación desarrollada, las partículas del fluido se ciñen al contorno sin necesidad de implementar operaciones artificiosas. Este hecho se puede deducir de los resultados mostrados en la figura 6.9, donde se ilustran los resultados obtenidos implementando algunas de las metodologías usualmente usadas en SPH.
- *Hemos desarrollado una formulación que permite modelar condiciones en el ámbito de CG, que hasta ahora sólo se podían simular en el ámbito de CFD.* Con esta formulación hemos ampliado el espectro de simulaciones del fluido. De este modo, es posible simular comportamientos complejos del fluido, tal como se muestra en las imágenes de la figura 6.10, donde se puede ver el efecto que tiene modificar condiciones de contorno con gradiente direccional. Simulación que no es posible llevar a cabo con las metodologías existentes en CG.

*Así pues, podemos concluir que hemos desarrollado un conjunto de técnicas, con las que se mejora la estabilidad y la precisión en simulaciones de fluidos mediante SPH y que, por su sencillez, son utilizables en simulaciones en el ámbito de CG, sin que ello restrinja su uso a implementaciones más precisas.*



# Chapter 8

## Conclusions

### 8.1 Conclusions

In this thesis, we have researched the problems of instability and inaccuracy that appear in the fluid flow simulations using SPH. We have analysed the sources of these problems and we have deduced that if the number of neighbouring particles is low, around a few tens, or their distribution is inhomogeneous within the supported domain, the simulation becomes unstable and the results are inaccurate. We have also analysed how the distribution and the low number of neighbouring particles reduces the accuracy both the pressure gradient and the internal energy; inaccuracy that is increased when the incompressibility constraint is enforced. Analogously, we have described the most highlight surveys developed to avoid these problems, whose aim is to increase the number and to improve the distribution of neighbouring particles within the supported domain. However, there are limit regions, such as boundaries or interfaces, where it is not possible to increase the number of neighbouring particles. Therefore, the problems of inaccuracy and instability are not solved in these regions. In addition, we have detected that, in CG scope, incompressibility modelling is not yet completely solved in liquids simulation and the existing models, can induce instability and inaccuracy, since they do not take into account the fluid–boundary energy balances. The consequences are the erroneous dispersion of particles in these regions. To this aim of solving these drawbacks, we have developed three new techniques, these ones have been: (1) *a new kernel function*, (2) *a new modelling of the pressure gradient to enforce the incompressibility* and (3) *a new management of the fluid–boundary interaction*.

For each of these proposals:

1. We have identified the analytical features of the kernel function that favour stability and accuracy. From these features, we have formulated a new parametric kernel function

developed as a harmonic function composition. Due to its formulation, we have named as  $C_{ij}$ -Cosine.

To show the improvements in accuracy and stability that are obtained by our kernel function, we have implemented a set of tests, as it is described in chapter 6. The goal of these tests has been to develop a comparative environment between the proposed function and other kernel functions extensively used in SPH simulations. From the obtained results in section 6.2 we can conclude that:

- *The kernel  $C_{ij}$ -Cosine allows us to obtain a high stability.* This conclusion can be deduced from the obtained results in the settling test, figure 6.1, where the  $C_{ij}$ -Cosine results show a higher reticularity degree in comparison to those obtained from the other three kernel functions. From a quantitative point of view, this improvement is showed in the results of the parameter  $\zeta$ , table 6.1, where the obtained values by the other three kernel functions are of a higher value than those offered by ours  $C_{ij}$ -Cosine. This means, according to the features of the parameter  $\zeta$ , that  $C_{ij}$ -Cosine is the one that guarantees greater stability.
- *$C_{ij}$ -Cosine kernel allows us to obtain highly accurate results in simulations with extreme constraints, in which shock waves and discontinuities appear in the magnitudes describing the fluid.* We can do this statement from the results obtained in Sod's shock tube test, section 6.2.2. The graphs in figure 6.2 show the obtained results for density, thermal energy and velocity. From these results, we can infer the most accurate results are obtained from our proposal. This accuracy is most evident in the rarefaction tail, the contact discontinuity and the shock wave. To confirm this fact, we have selected the values associated to these regions that are shown in tables 6.2, 6.3 and 6.4. All the obtained values show that the best accuracy is provide by  $C_{ij}$ -Cosine.
- *By the proposed kernel function  $C_{ij}$ -Cosine, we have achieved accuracy even to higher speed values which includes the emergence of regions with high discontinuity ,as it is demonstrated by the blast-wave test, which depicts a more extreme version of Sod 's test. Analogously, the highest accuracy is obtained from our proposed kernel function. This fact is validated by the numerical results shown in tables 6.5, 6.6 and 6.7.*
- *In very low energy situations, such as those simulated in the wall-shock test. The best results are obtained from our kernel function, as it can be seen in the graphs of figure 6.4. To support this statement, we will focus on the region where the dip appears. The height and width of dip quantifies the obtained precision, so*

that the smaller these two magnitudes of dip, the better the obtained accuracy, since ideally, this disturbance should not appear. Based on this fact and analysing the graphs shown in figure 6.4, we can affirm the proposed kernel function,  $C_{ij}$ -Cosine, allows us to obtain the most accurate results. Numerically, this fact is also confirmed by the values shown in tables 6.8, 6.9 and 6.10 where it is shown the greatest accuracy is obtained from the  $C_{ij}$ -Cosine function.

- *The proposed kernel function also ensures accuracy when density and pressure are low*, conditions that are simulated in Sjögreen's test. The obtained results by our  $C_{ij}$ -Cosine are the most accurate, as can be deduced from the graphs shown in the figure 6.5. Furthermore, this statement is confirmed by the results shown in tables 6.11, 6.12 and 6.13, from which it can be deduced that, again, the highest precision is obtained by our kernel function.

*On the basis of these facts, we can state that the proposed kernel function,  $C_{ij}$ -Cosine, offers the most accurate results in all tests we have submitted, even under extreme simulation constraints.*

2. We have identified the factors that relate instability to the pressure gradient. We have concluded the incompressibility enforcing in liquids simulation, exacerbates the instability problems, especially when the number of neighbouring particles is low. The consequence in fluid simulation is that instability results in erratic particle dispersions, especially on fluid boundaries. In addition, we have found the energy balance in fluid-boundary interaction must be considered to avoid instability. To solve these problems related to incompressibility enforcing, we have developed a hybrid Potential—SPH technique, which guarantees stability even to a very low number of particles. Particularly we have achieved to:

- *Improve stability in pressure force*, we have formulated a pressure force independent of the density, that is defined on each pair of particles, so that this stability is maintained even to situations of very low number of neighbouring particles. Thus, we have obtained stable results in all fluid regions, especially in boundaries. This statement is confirmed by the results shown in figure 6.6, where it can be seen the stability achieved especially in boundaries.
- *Enforce the incompressibility an efficient way*. Efficiency is since we attain to enforce explicitly incompressibility and in a single step, since our proposal is not a predictive-corrective process. The obtained improvement can be deduced from the obtained results in the simulation shown in figure 6.6.

- *Detect the heating into the fluid and to dissipate it* in an efficient and accurate way. This constitutes a highlight novelty since the existing methods in Computer Graphics, based on SPH, do not consider heating. The importance of heating, especially in boundaries, is shown in the simulations shown in figure 6.7 where deactivating heat dissipation leads to instabilities in boundaries.
- *Improve the results obtained by other techniques of explicit incompressibility enforcement.* This improvement is shown in figure 6.6 where we have performed a comparison to other explicit incompressibility enforcement techniques.
- *Develop a stable and efficient model for a wide values range.* As it is shown in figure 6.8 where the result of obtained simulation appears, for the same moment time, but with different time steps. In addition, in table 6.14 we show the result of a comparative study of the stability ranges for different methods. Particularly important is the number range of neighbouring particles in which we can operate and the time steps in which the system is stable.

*Thus, we can conclude that our proposal to explicitly incompressibility enforcement improves the stability in fluid simulations. In addition, we have developed an efficient model that allows us to manage the energy balances, especially in boundaries.*

3. We have identified the stability problems that are related to fluid–boundary interaction. Likewise, we have analysed the different existing techniques for modelling the boundary constraints that govern the fluid behaviour in these regions. Based on these studies, we have developed a new technique that guarantees stability and allows the simulation of more complex boundary constraints than can be simulated by existing Computer Graphics techniques. Particularly, the obtained achievements by our technique of fluid–boundary interaction are:

- *An optimized method for particle–modelled boundaries in which only particle interaction of the fluid–particle boundary is managed.* In this way, it is possible to manage the interaction without the need to generate artificial magnitudes, such as: density or pressure, on the boundary particles. The obtained advantage is not only operational, but also avoids the particles density in fluid, which interact on boundary, from acquiring erroneous values that could introduce instability and inaccuracy.
- *We have managed to optimize the adaptability fluid to boundaries.* Due to the structure with which we model our boundary and the developed formulation, the fluid particles stick to the boundary without the need to implement artificial

operations. This fact can be deduced from the results shown in figure 6.9, where the obtained results by implementing some of the methodologies usually used in SPH are illustrated.

- *We have developed a formulation that allows us to model constraints in Computer Graphics scope which until now could only be simulated in the Computational Fluid Dynamic scope.* By this formulation, we have expanded the spectrum of fluid simulations. In this way, it is possible to simulate complex fluid behaviours, as it is shown in figure 6.10 where it can be seen the effect of modifying boundary constraint with directional gradient. Simulation that it is not possible to carry out by the existing Computer Graphics methodologies.

*Therefore, we can conclude that we have developed a series of techniques, with which stability and precision in fluid simulations are improved by means of SPH and that, due to their simplicity, they can be used in simulations into Computer Graphics scope, without restricting their use to more accuracy implementations.*



# Referencias

- [1] Abel, T. (2011). rpsph: A novel smoothed particle hydrodynamics algorithm. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 413(1):271–285.
- [2] Afanasiev, K., Makarchuk, R., and Popov, A. (2008). Comparative analysis of the sph and isph methods. *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, 101:206–223.
- [3] Akinci, N., Ihmsen, M., Akinci, G., Solenthaler, B., and Teschner, M. (2012). Versatile rigid–fluid coupling for incompressible sph. *ACM Trans. Graph.*, 31(4):62:1–62:8.
- [4] Alduán, I., Tena, A., and Otaduy, M. A. (2015). Efficient and robust position-based fluids for vfx. In *Proc. of Congreso Español de Informática Gráfica*.
- [5] Amini, Y., Emdad, H., and Farid, M. (2011). A new model to solve fluid-hypo-elastic solid interaction using the smoothed particle hydrodynamics (sph) method. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 30(2):184–194.
- [6] Ata, R. and Soulaïmani, A. (2005). A stabilized sph method for inviscid shallow water flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 47:139–159.
- [7] B. Liu, M. and Liu, G. (2010). Smoothed particle hydrodynamics (sph): an overview and recent developments. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(1):25–76.
- [8] Band, S., Gissler, C., Ihmsen, M., Cornelis, J., Peer, A., and Teschner, M. (2018). Pressure boundaries for implicit incompressible sph. *ACM Trans. Graph.*, 37(2):14:1–14:11.
- [9] Batchelor, G. (1974). *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge Mathematical Library.
- [10] Becker, M. and Teschner, M. (2007). Weakly compressible sph for free surface flows. In *Proceedings of the 2007 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, SCA '07, pages 209–217.
- [11] Becker, M., Tessendorf, H., and Teschner, M. (2009). Direct forcing for lagrangian rigid-fluid coupling. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 15(3):493–503.
- [12] Belytschko, T., Guo, Y., Liu, K., W., and Xiao, P. (2000). A unified stability analysis of meshless particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(9):1359–1400.

- [13] Bender, J., Müller, M., and Macklin, M. (2015). Position-based simulation methods in computer graphics. In Zwicker, M. and Soler, C., editors, *EUROGRAPHICS 2015 Tutorials*. Eurographics Association.
- [14] Cabezón, R. M., Garcia-Senz, D., and Relano, A. (2000). A one-parameter family of interpolating kernels for smoothed particle hydrodynamics studies. *Journal of Computational Physics*, 227(19):8523–8540.
- [15] Campbell, P. M. (1989). Some new algorithms for boundary value problems in smooth particle hydrodynamics. *Mission Research Corp.*
- [16] Capuzzo-Dolcetta, R. and Di Lisio, R. (2000). A criterion for the choice of the interpolation kernel in smoothed particle hydrodynamics. *Applied Numerical Mathematics*, 34(4):363–371.
- [17] Chow, A., Rogers, B., Lind, S., and Stansby, P. (2018). Incompressible sph (isph) with fast poisson solver on a gpu. *Computer Physics Communications*, 226:81–103.
- [18] Colagrossi, A. and Landrini, M. (2003). Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 191(2):448–475.
- [19] Cornelis, J., Ihmsen, M., Peer, A., and Teschner, M. (2015). Liquid boundaries for implicit incompressible sph. *Computers & Graphics*, 52:72–78.
- [20] DE, L., Le Touzé, D., and Alessandrini, B. (2009). Normal flux method at the boundary for sph. In *Proceedings of the 4<sup>th</sup> SPHERIC Workshop*.
- [21] Dehnen, W. and Aly, H. (2012). Improving convergence in smoothed particle hydrodynamics simulations without pairing instability. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 425(2):1068–1082.
- [22] Di Monaco, A., Manenti, S., Gallati, M., Sibilla, S., Agate, G., and Guandalini, R. (2011). Sph modeling of solid boundaries through a semi-analytic approach. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 5:1–15.
- [23] Dilts, G. A. (1999). Moving-least-squares-particle hydrodynamics-i.consistency and stability. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(8):1115–1155.
- [24] Dyka, C. T., Randles, P. W., and Ingel, R. P. (1997). Stress points for tension instability in sph. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(13):2325–2341.
- [25] Einfeldt, B., Munz, C., Roe, P., and Sjögreen, B. (1991). On godunov-type methods near low densities. *Journal of Computational Physics*, 92(2):279–295.
- [26] Erleben, K., Bender, J., and Teschner, M. (2010). Boundary handling and adaptive time-stepping for pcisph. In *Workshop in Virtual Reality Interactions and Physical Simulation “VRIPHYS” (2010)*, pages 339–346. The Eurographics Association.
- [27] Feldman, J. and Bonet, J. (2007). Dynamic refinement and boundary contact forces in sph with applications in fluid flow problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 72(3):295–324.

- [28] Ferrand, M., Laurence, D. R., Rogers, B. D., Violeau, D., and Kassiotis, C. (2012). Unified semi-analytical wall boundary conditions for inviscid, laminar or turbulent flows in the meshless sph method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 71(4):446–472.
- [29] Ferrari, A., Dumbser, M., Toro, E. F., and Armanini, A. (2009). A new 3d parallel sph scheme for free surface flows. *Computers and Fluids*, 38(6):1203–1217.
- [30] Fourtakas, G., Stansby, P., Rogers, B., and Lind, S. (2018). An eulerian-lagrangian incompressible sph formulation (eli-sph) connected with a sharp interface. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 329(Supplement C):532–552.
- [31] Fulk, D. A. (1994). A numerical analysis of smoothed particle hydrodynamics. *AIR FORCE INST OF TECH WRIGHT-PATTERSON AFB OH*.
- [32] Gingold, R. and Monaghan, J. (1977). Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars. *Royal Astronomical Society*, 181:375–389.
- [33] Harada, T., Koshizuka, S., and Kawaguchi, Y. (2007). Smoothed particle hydrodynamics on gpus. In *Computer Graphics International*, pages 63–70.
- [34] Hashemi, M., Fatehi, R., and Manzari, M. (2012). A modified sph method for simulating motion of rigid bodies in newtonian fluid flows. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47(6):626–638.
- [35] He, X., Liu, N., Li, S., Wang, H., and Wang, G. (2012). Local poisson sph for viscous incompressible fluids. *Computer Graphics Forum*, 31(6):1948–1958.
- [36] Ihmsen, M., Cornelis, J., Solenthaler, B., Horvath, C., and Teschner, M. (2014a). Implicit incompressible sph. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 20(3):426–435.
- [37] Ihmsen, M., Orthmann, J., Solenthaler, B., Kolb, A., and Teschner, M. (2014b). Sph fluids in computer graphics. In *Eurographics 2014 - State of the Art Reports*. The Eurographics Association.
- [38] J., C. A. (1997). A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of Computational Physics*, 135(2):118–125.
- [39] Kao, C., Osher, S., and Qian, J. (2004). Lax-friedrichs sweeping scheme for static hamilton-jacobi equations. *Journal of Computational Physics*, 196(1):367–391.
- [40] Kawata, D., Okamoto, T., Gibson, B., Barnes, D., and Cen, R. (2013). Calibrating an updated smoothed particle hydrodynamics scheme within gdc+. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 428(3):1968–1979.
- [41] Kiara, A., Hendrickson, K., and Yue, D. (2013). Sph for incompressible free-surface flows. part i: Error analysis of the basic assumptions. *Computers & Fluids*, 86(5):611–624.
- [42] Koschier, D. and Bender, J. (2017). Density maps for improved sph boundary handling. In *Spanish Computer Graphics Conference (CEIG), SCA '17*. ACM.

- [43] Leroy, A., Violeau, D., Ferrand, M., and Kassiotis, C. (2014). Unified semi-analytical wall boundary conditions applied to 2-d incompressible sph. *Journal of Computational Physics*, 261:106–129.
- [44] Lind, S., Xu, R., Stansby, P., and Rogers, B. (2012). Incompressible smoothed particle hydrodynamics for free-surface flows: A generalised diffusion-based algorithm for stability and validations for impulsive flows and propagating waves. *Journal of Computational Physics*, 231(4):1499–1523.
- [45] Liu, G. and Liu, M. (2003). *Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method*. World Scientific.
- [46] Liu, M., Liu, G., and Lam, K. (2003). Constructing smoothing functions in smoothed particle hydrodynamics with applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 155(2):263–284.
- [47] Losasso, F., Talton, J., Kwatra, J., and Fedkiw, R. (2008). Two-way coupled sph and particle level set fluid simulation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 14(4):797–804.
- [48] Lucy, L. B. (1977). A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astronomical Journal*, 82(12):1013–1024.
- [49] Maciá, F., Antuono, M., González, L. M., and Colagrossi, A. (2011). Theoretical analysis of the no-slip boundary condition enforcement in sph methods. *Progress of Theoretical Physics*, 125(6):1091–1121.
- [50] Macklin, M. and Müller, M. (2013). Position based fluids. *ACM Transactions on Graphics*, 32(4):104:1–104:12.
- [51] Marrone, S., Antuono, M., Colagrossi, A., Colicchio, G., Le Touzé, D., and Graziani, G. (2011).  $\delta$ -sph model for simulating violent impact flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(13–16):1526–1542.
- [52] Mayrhofer, A., Rogers, B., Violeau, D., and Ferrand, M. (2013). Investigation of wall bounded flows using sph and the unified semi-analytical wall boundary conditions. *Computer Physics Communications*, 184.
- [53] Modak, S. and Sotelino, E. D. (2002). The generalized method for structural dynamics applications. *Advances in Engineering Software*, 33(7):565–575.
- [54] Monaghan, J. (1992). Smoothed particle hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 30:543–574.
- [55] Monaghan, J. (1994). Simulation free surface flows with sph. *Journal of Computational Physics*, 110(2):399–406.
- [56] Monaghan, J. (1997). Sph and riemann solvers. *Journal of Computational Physics*, 136(2):298–307.
- [57] Monaghan, J. (2005). Smoothed particle hydrodynamics. *Rep. Prog. Phys.*, 68(8):1703–1759.

- [58] Monaghan, J. (2011). A turbulence model for smoothed particle hydrodynamics. *European Journal of Mechanics–B Fluids*, 30(4):360–370.
- [59] Monaghan, J. and Kajtar, J. (2009). Sph particle boundary forces for arbitrary boundaries. *Computer Physics Communications*, 180(10):1811–1820.
- [60] Morris, J., , and Monaghan, J. (1997). A switch to reduce sph viscosity. *Journal of Computational Physics*, 136(1):41–50.
- [61] Morris, J. (1995). A study of the stability properties of smooth particle hydrodynamics. *Publications Astronomical Society of Australia*, 13(1):97–102.
- [62] Müller, M., Charypar, D., and Gross, M. (2003). Particle-based fluid simulation for interactive applications. In *Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, SCA '03, pages 154–159.
- [63] Müller, M., Charypar, D., and Gross, M. (2003). Particle-based fluid simulation for interactive applications. In *Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, pages 154–159. Eurographics Association.
- [64] Müller, M., Schirm, S., Teschner, M., Heidelberger, B., and Gross, M. (2004). Interaction of fluids with deformable solids: research articles. *Computational Animation Virtual Worlds*, 15(3–4):159–171.
- [65] Newmark, N. M. (1959). A method of computation for structural dynamics. *Journal of the engineering mechanics division*, 85(3):67–94.
- [66] Oger, G., Doring, M., Alessandrini, B., and Ferrant, P. (2006). Two-dimensional sph simulations of wedge water entries. *Journal of Computational Physics*, 213(2):803–822.
- [67] Okamoto, T., Jenkins, A., Eke, V. R., Quilis, V., and Frenk, C. S. (2003). Momentum transfer across shear flows in smoothed particle hydrodynamic simulations of galaxy formation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 345(2):429–446.
- [68] Perea, J. J. and Cordero, J. M. (2016). A new potential-based sph method. In *Spanish Computer Graphics Conference (CEIG)*. The Eurographics Association.
- [69] Perea, J. J. and Cordero, J. M. (2017). An improved parallel technique for neighbour search on cuda. In *Spanish Computer Graphics Conference (CEIG)*. The Eurographics Association.
- [70] Price, D. J. (2008). Modelling discontinuities and kelvin–helmholtz instabilities in {SPH}. *Journal of Computational Physics*, 227(24):10040–10057.
- [71] Price, D. J. (2012). Smoothed particle hydrodynamics and magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 231(3):759–794.
- [72] Price, D. J. and Monaghan, J. J. (2004). Smoothed particle magnetohydrodynamics-i. algorithm and tests in one dimension. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 348(1):123–138.
- [73] Puri, K. and Ramachandran, P. (2014a). Approximate riemann solvers for the godunov sph (gsph). *Journal of Computational Physics*, 270(Supplement C):432–458.

- [74] Puri, K. and Ramachandran, P. (2014b). A comparison of sph schemes for the compressible euler equations. *Journal of Computational Physics*, 256(0):308–333.
- [75] Raveendran, K., Wojtan, C., and Turk, G. (2011). Hybrid smoothed particle hydrodynamics. In *Proceedings of the 2011 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, pages 33–42.
- [76] S., M., Colagrossi, A., Antuono, M., Lugni, C., and Tulin, M. (2011). A 2d+t sph model to study the breaking wave pattern generated by fast ships. *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, 27(8):1199–1215.
- [77] Sigalotti, L. and López, H. (2008). Adaptive kernel estimation and sph tensile instability. *Computers & Mathematics with Applications*, 55(1):23–50.
- [78] Sigalotti, L., López, H., Donoso, A., Sira, E., and J., K. (2006). A shock-capturing sph scheme based on adaptive kernel estimation. *Journal of Computational Physics*, 212(1):124–149.
- [79] Sod, A. (1978). A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 27(1):1–31.
- [80] Solenthaler, B. and Pajarola, R. (2009). Predictive-corrective incompressible sph. *ACM Transactions Graphics*, 28(3):41–46.
- [81] Springel, V. (2010). Smoothed particle hydrodynamics in astrophysics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 48(1):391–430.
- [82] Sun, P., Ming, F., and Zhang, A. (2015). Numerical simulation of interactions between free surface and rigid body using a robust sph method. *Ocean Engineering*, 98(4):32–49.
- [83] Swegle, J., Hicks, D., and S.W., A. (1995). Smoothed particle hydrodynamics stability analysis. *Journal of Computational Physics*, 116(1):123–134.
- [84] Tetsuya, T., Yoshinori, D., Tomoyuki, N., and C., L. M. (2017). An efficient hybrid incompressible sph solver with interface handling for boundary conditions. *Computer Graphics Forum*, 37(1):313–324.
- [85] Woodward, P. and Colella, P. (1984). The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *Journal of Computational Physics*, 54(1):115–173.
- [86] X., X. and D., X.-L. (2016). An improved weakly compressible sph method for simulating free surface flows of viscous and viscoelastic fluids". *Computer Physics Communications*, 201:43–62.
- [87] Xu, R., Stansby, P., and Laurence, D. (2009). Accuracy and stability in incompressible sph (isph) based on the projection method and a new approach. *Journal of Computer Physics*, 228(18):6703–6725.
- [88] Yang, X., Peng, S., and Liu, M. (2014). A new kernel function for {SPH} with applications to free surface flows. *Applied Mathematical Modelling*, 38(15-16):3822–3833.

- 
- [89] Yasmin Meleán, Y., Sigalotti, L. G., and Hasmy, A. (2004). On the {SPH} tensile instability in forming viscous liquid drops. *Computer Physics Communications*, 157(3):191–200.
- [90] Zhang, A., Sun, P., Ming, F., and Colagrossi, A. (2017). Smoothed particle hydrodynamics and its applications in fluid–structure interactions. *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, 29(4):187–216.
- [91] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., and Nithiarasu, P. (2014). *The Finite Element Method for Fluid Dynamics*. Elsevier B.V, 7<sup>th</sup> ed. edition.

# Apendice A

## Ecuaciones de Euler

### A.1 Ecuaciones de Euler para Fluidos

La dinámica de un fluido compresible y no viscoso, cuyo flujo evoluciona adiabáticamente con un alto número de Reynolds se describe mediante las *ecuaciones de Euler*. Estas ecuaciones configuran un sistema de ecuaciones en derivadas parciales donde se relacionan magnitudes como la presión, la densidad de masa, la energía térmica y la velocidad. Dicho sistema de ecuaciones es:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot v), \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho}(\nabla p), \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{p}{\rho}(\nabla \cdot v), \quad (\text{A.3})$$

donde  $D/Dt = \partial/\partial t + v \cdot \nabla$  hace referencia a la derivada convectiva,  $\rho$  es la densidad de masa,  $v$  es la velocidad,  $p$  es la presión y  $U$  es la energía térmica.

Para poder resolver este sistema de ecuaciones es necesario considerar la relación entre presión–densidad de masa. El modo habitual es utilizar la EOS. La más común, normalmente usada en simulaciones SPH, es la ecuación de Tait [9, 91] expresada en términos de:

$$p = (\gamma - 1)\rho U, \quad (\text{A.4})$$

donde  $\gamma$  es conocido como índice adiabático.

Para obtener la formulación discreta de las ecuaciones A.1, A.2 y A.3, se tiene que considerar la formulación variacional, tal como se destaca en [72]. Así, se consiguen dos

objetivos: el primero es una formulación totalmente conservativa tanto para la energía térmica como para el momento, como se destaca en [54] y el segundo es que se favorece una distribución reticular de las partículas, en consecuencia, la formulación obtenida favorece la estabilidad, como se destaca en [71, 74].

Usando la formulación SPH, ecuación 2.13, la densidad de masa de las partículas se establece por:

$$\rho_i = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} m_j W_{ij}, \quad (\text{A.5})$$

donde  $W_{ij} = W(r_j - r_i, h)$ .

Por otro lado, las ecuaciones asociadas a la energía térmica y el momento, teniendo en cuenta la formulación variacional de SPH, son:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = - \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} m_j \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} \nabla W_{ij}(h_i) + \frac{p_j}{\rho_j^2} \nabla W_{ij}(h_j) \right) + \left( \frac{Dv_i}{Dt} \right)_{dis}, \quad (\text{A.6})$$

y

$$\frac{DU_i}{Dt} = \frac{p_i}{\rho_i^2} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} m_j v_{ij} \cdot \nabla W_{ij} + \left( \frac{DU_i}{Dt} \right)_{dis}, \quad (\text{A.7})$$

donde el subíndice *dis* se refiere al término disipativo que debe considerarse para controlar el calentamiento en el flujo.

Cabe destacar dos características relevantes de las ecuaciones A.6 y A.7: en primer lugar, estas ecuaciones satisfacen la conservación del momento angular y en segundo lugar nos permiten incluir efectos de control en las ecuaciones de Euler.

Price [71], utilizando las directrices establecidas por Monaghan [56], desarrolla una formulación precisa de términos de control. A partir de este desarrollo, se puede obtener una formulación de balance de velocidad y de energía térmica; estas ecuaciones son:

$$\left( \frac{Dv_i}{Dt} \right)_{dis} = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \alpha \frac{m_j}{\rho_j} v_{sig} v_{ij} \cdot \hat{r}_{ij} \nabla \tilde{W}_{ij}, \quad (\text{A.8})$$

$$\left( \frac{DU_i}{Dt} \right)_{dis} = -\frac{1}{2} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} [\alpha v_{sig} (v_{ij} \cdot \hat{r}_{ij})^2 - \alpha_U v_{sig}^U (U_i - U_j)] \hat{r}_{ij} \cdot \nabla \tilde{W}_{ij}, \quad (\text{A.9})$$

donde  $\hat{r}_{ij}$  es el vector unitario definido por la posición relativa de las partículas *i* y *j*,  $\tilde{W}_{ij}$  es el kernel ponderado de las partículas *i* y *j*, los subíndices y superíndices *U* hace referencia a que la magnitud es relativa a la energía térmica,  $\alpha$  y  $\alpha_U$  son parámetros de control,  $v_{sig}$  y  $v_{sig}^U$  son velocidades formuladas según la propuesta de Price [71]:

$$v_{sig} = c_i + c_j + \beta v_{ij} \hat{r}_{ij}; \quad v_{sig}^U = \sqrt{\frac{|p_i - p_j|}{\tilde{\rho}_{ij}}},$$

donde  $c_i$  y  $c_j$  son las velocidades del sonido en las posiciones de las partículas  $i$  and  $j$ ,  $\beta$  es el parámetros de amortiguamiento,  $v_{ij}$  es la velocidad relativa de las partículas  $i$  y  $j$  y  $\tilde{\rho}_{ij}$  es la densidad de masa ponderada de las partículas  $i$  y  $j$ .

Cada término de las expresiones obtenidas, adquiere especial importancia en el contexto de una simulación estable de fluidos. El término de presión relativa de la ecuación A.9 permite el “suavizado” del salto en la presión que suele aparecer en los flujos confinados con discontinuidad de contacto, como consecuencia, se mejora la precisión. Asimismo, los términos de control añadidos garantizan el valor positivo de la energía térmica. Así, se satisfacen dos restricciones esenciales en la dinámica como son la invariancia galileana y el principio de acción–reacción. Además, la tasa de disipación puede ser controlada por los parámetros  $\alpha$  y  $\alpha^U$ . Estos parámetros se pueden obtener de la propuesta de Morris y Monaghan [60]:

$$\frac{d\alpha}{dt} = S - \frac{\alpha - \alpha_{min}}{\tau}, \quad \tau = \frac{h}{\sigma c_s}, \quad (\text{A.10})$$

donde  $c_s$  es la velocidad del sonido,  $S$  es un término fuente que sólo opera para valores en el gradiente de presión muy altos. Dicho término fuente se define a partir de ( $S = \max(-\nabla \cdot v, 0)$ ), de modo que  $\alpha$  lo incrementa en las regiones de muy alta presión, donde  $S$  prevalece, y disminuye el valor  $\alpha_{min}$  cuando la presión disminuye, para la escala de tiempo  $\tau$ .