FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Trabajo Fin de Grado:

Una Introducción a la Pretopología

Autora:
Elena Velaure Valera

Tutores:
Rafael Ayala Gómez
José Antonio Vilches Alarcón

Índice general

English Abstract 1

Introducción 3

1. Introducción a la pretopología 7

1.1. Espacios pretopológicos 7

1.1.1. Operador pseudoclausura y espacios pretopológicos 7

1.1.2. Conjuntos a-cerrados 10

1.1.3. Conjunto a-clausura 13

1.1.4. Conjuntos a-cerrados minimales y elementales 15

1.1.5. Operador pseudointerior, conjuntos a-abiertos y conjunto a-apertura 16

1.2. Tipos de espacios pretopológicos 21

1.2.1. Espacios pretopológicos de tipo $\mathcal{V}$ 21

1.2.2. Espacios pretopológicos de tipo $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}$ 26

1.2.3. Espacios pretopológicos de tipo $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ 29

1.2.4. Espacios topológicos 31

2. Propiedades generales de los espacios pretopológicos **33**

2.1. Relaciones entre estructuras pretopológicas 33

2.1.1. Aproximación por $\mathcal{V}$-espacios 35

2.2. Continuidad 36

2.3. Subconjuntos y subespacios pretopológicos 40

2.4. Pseudoclausura inducida por relaciones 45

3. Propiedades de separación **49**

3.1. Axiomas de separación en espacios topológicos 49

3.2. Separación por puntos 52

3.3. Separación superior en $\mathcal{V}$-espacios 56

3.4. Separación en los espacios topológicos asociados 64

4. Conexión **67**

4.1. Conexión y separación de conjuntos 67

4.2. Z-conexión 71

4.3. Conexión en grafos 72

4.4. Conexión por caminos en términos de relaciones 78

Bibliografía **81**

English Abstract

The main goal of this Final Degree Project is the study of pretopological spaces. Being more precise, certain properties of general topology will be presented: separation axioms and the different notions of connectedness in the context of pretopological spaces.

Introducción

En este trabajo se presentan las propiedades básicas de los espacios pretopológicos, centrándose en dos aspectos fundamentales relacionados entre sí, los axiomas de separación y las distintas nociones de conexión.

Aunque los orígenes de la pretopología, rama poco conocida de la topología, se remontan a los trabajos de Čech [3], su desarrollo y numerosas aplicaciones a los más variados campos científicos (análisis de datos, análisis de imagen, modelos económicos, biología, genética, análisis molecular, etc.), son el resultado de los trabajos de un gran grupo de matemáticos franceses, reunidos bajo el seudónimo de Z. Belmandt.

Sus primeros artículos, allá por los años 70, se centran sobre todo, en problemas de economía, más precisamente en el análisis de la influencia mutua de los distintos sectores de la producción. Pero pronto se percataron de que las técnicas y métodos empleados se podían adaptar a otros problemas que compartían con ellos el hecho de partir de un conjunto de elementos entre los que cabía establecer una relación de influencia o dominación de unos sobre otros, pero carentes de una noción de arbitrariamente próximos. De ello surge la idea de aplicar las nuevas técnicas al estudio de las redes complejas, entre los que cabe citar las siguientes cuatro categorías: *redes sociales, informáticas, tecnológicas y biológicas* [11].

La razón del éxito de esta variante de la topología como herramienta adecuada para tratar problemas, que en última instancia consiste en el análisis de conjuntos discretos, es el hecho de que todos comparten una característica común: se pueden traducir al análisis de la evolución y la dinámica de ciertas redes complejas. En ellas, lo relevante no es la posición de cada elemento en relación a sus vecinos, como ocurre en la Teoría de Grafos, si no más bien el estudio de un proceso evolutivo entre los elementos.

En todos estos procesos surge la necesidad de comparar la evolución de sus estados a lo largo del tiempo, por lo que es conveniente disponer de una noción de *proximidad* entre ellos, pero esta noción no está ligada de manera natural a una distancia. El concepto de proximidad es de naturaleza topológica pero ha de ser aplicada a un mundo discreto.

Otro de los problemas que surgía de la definición de topología era la dificultad que tenía para ser entendida a simple vista. Consistía en una familia de *abiertos*, un concepto que no es nada intuitivo y que guarda poca relación con el mundo real. En 1966, el matemático K. Kuratowski, publicaba [10], en donde, por primera vez, se define la noción de topología mediante el concepto de *punto próximo* a un conjunto. Este nos permite definir la clausura o adherencia de un conjunto en el espacio mediante un proceso de *ampliación*, que consiste en añadir a un conjunto sus puntos adherentes.

Sin embargo, a pesar de ello, la idempotencia de la clausura seguía siendo un obstáculo para poder utilizar la topología para el estudio de un proceso evolutivo como pueden ser, por ejemplo, propagación de enfermedades, de epidemias o fenómenos de difusión. Por este motivo, se dio la necesidad de introducir un nuevo concepto de clausura que pudiera ser usada para un proceso iterativo, en el que el conjunto de partida fuera expandiéndose a lo largo de sucesivas etapas.

Surge la idea de crear espacios que siguieran manteniendo propiedades topológicas pero cuyas clausuras no verificaran todos los axiomas de Kuratowski, si no que tan solo se les pidieran el axioma de extensión (K_2). Fue así como surgió la *Pretopología*, una rama de la matemática que estudiaba un nuevo tipo de espacios, los *espacios pretopológicos*. El primero en definir espacios de este tipo fue E. Čech en [3], introduciendo el concepto de *espacios de clausuras*, que verificaban además la monotonía (K_1) y la aditividad (K_3).

El objetivo principal de este Trabajo de Fin de Grado es presentar ciertas propiedades esenciales de la topología general como son los axiomas de separación, T_i, y las diferentes versiones del concepto de conexión en el contexto de los espacios pretopológicos.

En el Capítulo 1 se introducen las nociones básicas de pretopología y los distintos tipos de espacios pretopológicos. En este estudio juega un papel clave el operador pseudoclausura al que inicialmente solo se le exige el axioma de extensión. A medida que se dota a este operador de propiedades adicionales se van obteniendo los distintos tipos de espacios pretopológicos, hasta llegar al concepto de espacios topológicos.

En el Capítulo 2 se tratan operaciones habituales en topología como son la restricción y comparación, la noción de transformación continua y se estudia con detalle un tipo concreto de pseudoclausura inducida por relaciones binarias.

El Capítulo 3 está dedicado a presentar las distintas nociones de separación en el contexto de la pretopología. Es interesante destacar que esta adaptación no es inmediata, ya que la existencia de un operador pseudoclausura y una noción de cierre, da lugar a nuevas situaciones que no existían en el caso topológico.

Finalmente, el Capítulo 4 se centra en el estudio de la conexión en espacios pretopológicos. Esta noción se presentan desde dos puntas de vista. Por un lado, la que viene dada por el operador pseudoclausura, siguiendo la idea de *Č*ech para espacios de clausura, que se apoya en los axiomas de separación superior. Por otra parte, se consideran diversos tipos de conexión ligados a los distintos tipos de conexión de digrafos.

1 Introducción a la pretopología

1.1 Espacios pretopológicos

1.1.1 Operador pseudoclausura y espacios pretopológicos

En la siguiente sección vamos a estudiar los espacios pretopológicos, unas estructuras matemáticas que dan la posibilidad de establecer una jerarquización entre los distintos elementos de un conjunto. A diferencia de los espacios topológicos $(E, \mathcal{T})$ definidos a partir de una topología $\mathcal{T}$ sobre el conjunto E, la definición de los espacios pretopológicos se basa en un nuevo concepto, la pseudoclausura.

Definición 1.1.1 Sea E un conjunto no vacío y $\mathcal{P}(E)$ el conjunto de partes de E. Se define el operador *pseudoclausura* como la aplicación $a : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ tal que:

1) $a(\emptyset) = \emptyset$
2) $A \subseteq a(A)$, para todo $A \subseteq E$

Sea $A \subseteq E$, se dice que $a(A)$ es la pseudoclausura del subconjunto A.

Observación 1.1.1 De esta definición se deduce que $a(E) = E$, ya que $E \subseteq a(E)$.

Definición 1.1.2 Sea E un conjunto no vacío y a un operador pseudoclausura en E, se dice que el par (E, a) es un *espacio pretopológico*.

Observación 1.1.2 Veremos más adelante como un espacio pretopológico (E, a) es un espacio topológico si el operador a, además verifica las siguientes propiedades:

i) Es una aplicación idempotente, es decir, $a^2 = a$.
ii) Es aditiva, es decir, si $A, B \subseteq E$, entonces $a(A \cup B) = a(A) \cup a(B)$.

En tal caso, el operador a es la clausura de dicho espacio topológico.

El objetivo de introducir el concepto de pseudoclausura es porque ésta lleva asociada un proceso de ampliación conjuntista. Se puede aplicar reiteradamente este operador a un conjunto A y el resultado será un conjunto mayor conteniendo al propio A, es decir, $A \subseteq a(A) \subseteq a^2(A) \subseteq ... \subseteq a^n(A)$.

Esto implica que se puede seguir paso a paso el proceso de este operador, viendo cómo aumenta paulatinamente un conjunto A, cosa que no es posible en los espacios topológicos con el operador clausura.

Definición 1.1.3 Sea (E, a) un espacio pretopológico y $A \subseteq E$. Dado un entero positivo n, se define $a^n(A)$ como la *n-ésima pseudoclausura* de A, donde a^n corresponde a la composición de n-veces la pseudoclausura a. Así mismo, definimos a^0 como el operador identidad en $\mathcal{P}(E)$.

A continuación, aparecen una serie de ejemplos de espacios pretopológicos:

Ejemplo 1.1.1 Si $E = \mathbb{N}$ y para cada $A \subseteq E$ se define $a(A)$ como el conjunto de los números naturales que son múltiplos de algún elemento de A.
Vemos claramente que a es un operador pseudoclausura. De hecho, es idempotente y aditiva, ya que por ejemplo:

$a(\{1\}) = a^2(\{1\}) = \mathbb{N}$
$a(\{2\}) = a^2(\{2\}) = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$
$a(\{2, 3\}) = a(\{2\}) \cup a(\{3\}) = \{2n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{3n : n \in \mathbb{N}\}$

Por lo tanto, podemos tomar a como la clausura del espacio topológico $(E, \mathcal{T})$, con $\mathcal{T}$ la siguiente topología sobre E:
$\mathcal{T} = \{A^c : a(A) = A, A \subseteq E\} = \{A \subseteq E : \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $nx \notin A$, con $x \in A\}$.

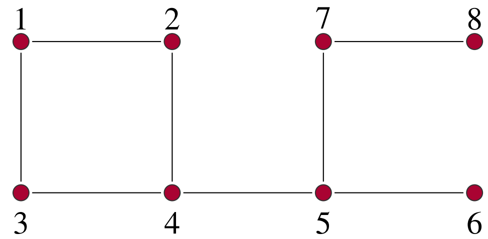
Definición 1.1.4 Sea E es el conjunto de vértices de un grafo G no dirigido. Se denota por a_* la aplicación que a cada vértice $x \in E$ le asigna él mismo y el conjunto de vértices adyacentes a él, denotado por $\mathcal{N}(\{x\})$. En consecuencia, para cada $A \subseteq E$:

$$a_*(A) = \bigcup_{x \in A} a_*(\{x\}) = \bigcup_{x \in A} \{x\} \cup \mathcal{N}(\{x\})$$

Observación 1.1.3 Claramente, se tiene que a_* es un operador pseudoclausura ya que $a_*(\emptyset) = \emptyset$ y para todo $A \subseteq E$, $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} \{x\} \cup \mathcal{N}(\{x\})$. Por lo que (E, a_*) es un espacio pretopológico.

Además, se tiene que a_* es aditiva ya que $\forall A, B \subseteq E$, $a_*(A \cup B) = a_*(A) \cup a_*(B)$. Y obviamente, no es idempotente, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.2 Sea (E, a_*) un espacio pretopológico con $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ el conjunto de vértices del siguiente grafo no dirigido:

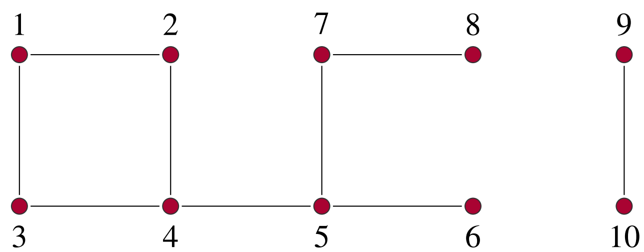


La pseudoclausura a_* se comporta de la siguiente forma:

$\{x\}$	$a_*(x)$	$a_*^2(x)$	$a_*^3(x)$	$a_*^4(x)$	$a_*^5(x)$
$\{1\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	E
$\{2\}$	$\{1, 2, 4\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	E	E
$\{3\}$	$\{1, 3, 4\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	E	E
$\{4\}$	$\{2, 3, 4, 5\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	E	E	E
$\{5\}$	$\{4, 5, 6, 7\}$	$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	E	E	E
$\{6\}$	$\{5, 6\}$	$\{4, 5, 6, 7\}$	$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	E	E
$\{7\}$	$\{5, 7, 8\}$	$\{4, 5, 6, 7, 8\}$	$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	E	E
$\{8\}$	$\{7, 8\}$	$\{5, 7, 8\}$	$\{4, 5, 6, 7, 8\}$	$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	E

Con este simple ejemplo, podemos ver el comportamiento de las pseudoclausuras. Se puede ver cómo a partir de un conjunto, la pseudoclausura va añadiendo elementos hasta que llega un momento en el que se estabiliza.
En el caso de $A = \{4\}$, se tiene que $a_*^3(A) = a_*^n(A) = E$, para todo $n \geq 3$.

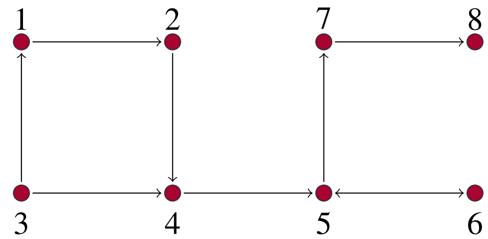
Ejemplo 1.1.3 Sea (E, a_*) con $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ el conjunto de vértices del siguiente grafo no dirigido con dos componentes conexas, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y $B = \{9, 10\}$.



En este caso, tenemos que igualmente, $a_*^n(\{4\}) = \{1,2,3,4,5,6,7,8\} = A$, para todo $n \geq 3$. Por otro lado, se tiene que $a_*(\{9\}) = a_*(\{10\}) = \{9,10\} = B$. Sin embargo, para ningún $x \in E$ se tiene que $a_*^n(\{x\}) = E$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.1.5 Sea E el conjunto de vértices de un grafo dirigido. Seguimos denotando por a_* a la pseudoclausura definida anteriormente, salvo que ahora para cada $x \in E$, $\mathcal{N}(\{x\})$ es el conjunto de los vértices a los que llega x, los sucesores de x. Análogamente, (E, a_*) es un espacio pretopológico.

Ejemplo 1.1.4 Sea $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ el conjunto de vértices del siguiente grafo dirigido:



Se tiene que (E, a_*) es un espacio pretopológico y en este caso, al tratarse de un grafo dirigido, la pseudoclausura a_* se comporta de la siguiente forma:

$\{x\}$	$a_*(x)$	$a_*^2(x)$	$a_*^3(x)$	$a_*^4(x)$	$a_*^5(x)$
$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,2,4,5\}$	$\{1,2,4,5,6,7\}$	$\{1,2,4,5,6,7,8\}$
$\{2\}$	$\{2,4\}$	$\{2,4,5\}$	$\{2,4,5,6,7\}$	$\{2,4,5,6,7,8\}$	$a_*^4(\{2\})$
$\{3\}$	$\{1,3,4\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5,6,7\}$	E	$a_*^4(\{3\}$
$\{4\}$	$\{4,5\}$	$\{4,5,6,7\}$	$\{4,5,6,7,8\}$	$a_*^3(\{4\})$	$a_*^3(\{4\})$
$\{5\}$	$\{5,6,7\}$	$\{5,6,7,8\}$	$a_*^2(\{5\})$	$a_*^2(\{5\})$	$a_*^2(\{5\})$
$\{6\}$	$\{5,6\}$	$\{5,6,7\}$	$\{5,6,7,8\}$	$a_*^3(\{6\})$	$a_*^3(\{6\})$
$\{7\}$	$\{7,8\}$	$a_*(\{7\})$	$a_*(\{7\})$	$a_*(\{7\})$	$a_*(\{7\})$
$\{8\}$	$\{8\}$	$\{8\}$	$\{8\}$	$\{8\}$	$\{8\}$

1.1.2 Conjuntos a-cerrados

La expansión conjuntista que genera la pseudoclausura se detiene en un determinado número de iteraciones, dependiendo del conjunto de partida. De aquí viene que introduzcamos el concepto de conjuntos a-cerrados.

Definición 1.1.6 Sea (E, a) un espacio pretopológico. Un conjunto $A \subseteq E$ se dice *a-cerrado* si $A = a(A)$.

Como era de esperar por analogía a los conjuntos cerrados en topología, los conjuntos $\emptyset$ y E son a-cerrados.

Ejemplo 1.1.5 Sea $E = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 100\}$. Para cada conjunto $A \subseteq E$ definimos $a(A) = A \cup \{\#A\}$ si $A \neq \emptyset$, donde $\#A$ es el cardinal de A, y $a(\emptyset) = \emptyset$. Claramente a es una pseudoclausura en E y podemos ver que un conjunto A es a-cerrado si y solo si $\#A \in A$.

Particularizando en conjuntos E finitos, el siguiente resultado nos permite relacionar las iteraciones del operador pseudoclausura a con los conjuntos a-cerrados.

Teorema 1.1.1 Sea (E, a) un espacio pretopológico con E un conjunto finito. Para cada $A \subseteq E$ existe un entero positivo k tal que $a^k(A)$ es un conjunto a-cerrado.

La demostración de este teorema es consecuencia del siguiente resultado de la teoría de conjuntos finitos parcialmente ordenados.

Lema 1.1.1 Sea H un conjunto finito parcialmente ordenado. Entonces, cada sucesión monótona $\{x_n\}$ de elementos de H es eventualmente constante, es decir, existe un entero positivo n_0 tal que, para cada $n \geq n_0$, $x_n = x_{n_0}$.

Demostración (Lema) Supongamos que la sucesión $\{x_n\}$ es monótona creciente y denotemos con $\leq$ el orden parcial en $H = \{e_1, e_2, \dots, e_s\}$.

Sea $N_i = \{n \in \mathbb{N} : x_n = e_i\}$, para $i = 1, \dots, s$. Tenemos que $\mathbb{N} = \{N_1, \dots, N_s\}$ y como $\mathbb{N}$ es infinito, $\exists i_0$ tal que N_{i_0} es un conjunto infinito. Sea n_0 el primer elemento de N_{i_0}, probemos entonces que si $n \in \mathbb{N}$ y $n_0 \leq n$, se tiene que $x_n = x_{n_0}$.

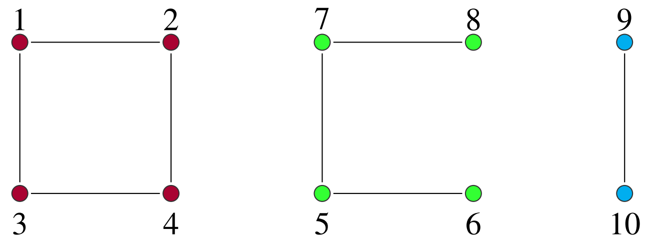
En efecto, dado que $n \geq n_0$ y N_{i_0} es un conjunto infinito, $\exists m \in N_{i_0}$ tal que $m \geq n$. Tenemos así que $n_0 \leq n \leq m$ y por tanto, $x_{n_0} \leq x_n \leq x_m$.

Finalmente, como $n_0, m \in N_{i_0}$, $x_{n_0} = x_m$ y en consecuencia, $x_n = x_{n_0}$.

Demostración (Teorema) En primer lugar, consideramos la inclusión como la relación de orden parcial sobre $\mathcal{P}(E)$.

Sea $A \subseteq \mathcal{P}(E)$ y $\{A_n : n \geq 1\}$ la sucesión dada por $A_n = a^n(A)$. Como esta sucesión es monótona creciente, por el lema anterior, $\exists k \geq 0$ tal que $a^k(A) = a^{k+1}(A)$, lo que implica que $a^k(A)$ es un a-cerrado.

Ejemplo 1.1.6 Sea (E, a_*) el espacio pretopológico donde E es el conjunto de vértices del siguiente grafo no dirigido:



Sea $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{5,6,7,8\}$ y $C = \{9,10\}$, con $E = A \cup B \cup C$. Veamos cuáles son los a_*- cerrados de (E, a_*):
$a_*^2(\{x\}) = A$, para todo $x \in A$
$a_*^2(\{5\}) = a_*^2(\{7\}) = B,\ a_*^3(\{6\}) = a_*^3(\{8\}) = B$
$a_*(\{9\}) = a_*(\{10\}) = C$
$a_*(\{1,2\}) = a_*(\{1,3\}) = a_*(\{1,4\}) = a_*(\{2,3\}) = a_*(\{2,4\}) = a_*(\{3,4\}) = A$
$a_*^2(\{5,6\}) = a_*(\{5,7\}) = a_*(\{5,8\}) = a_*(\{6,7\}) = a_*(\{6,8\}) = a_*^2(\{7,8\}) = B$
$a_*^0(\{9,10\}) = \{9,10\} = C$
$a_*^2(\{1,5\}) = A \cup B,\ a_*^3(\{1,6\}) = A \cup B,\ a_*^2(\{1,9\}) = A \cup C$
$a_*^2(\{1,5,9\}) = A \cup B \cup C = E$

Este ejemplo nos lleva a ver el siguiente resultado acerca de los a-cerrados de un grafo no dirigido.

Proposición 1.1.1 Sea (E, a_*) un espacio pretopológico donde E es el conjunto de vértices de un grafo no dirigido y a_* la aplicación que a cada vértice le asigna él mismo y los vértices adyacentes a él. Se tiene que los conjuntos a_*-cerrados de (E, a_*) son las uniones de los conjuntos de vértices de las componentes conexas del grafo.

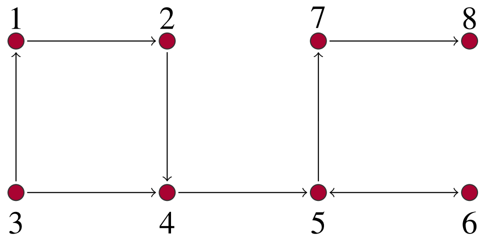
Demostración Sin pérdida de generalidad nos vamos a restringir al caso de una sola componente conexa. Tenemos que probar por tanto que un conjunto $A \subseteq E$ es a_*-cerrado si y solo si es una componente conexa.

Si A es una componente conexa, todos sus puntos están conectados entre sí, por lo que para cada $x \in A$, $A \subseteq a_*(x)$. Además, como ningún $y \in E - A$ es adyacente a algún elemento de A, entonces $a_*(A) = A$.

Recíprocamente, si A es un a_*-cerrado, entonces $a_*(A) = A$, por lo que ningún elemento de A es adyacente a algún elemento de $E - A$, así que A y $E - A$ son componentes conexas distintas.

Observación 1.1.4 Si en vez de considerar G un grado no dirigido, lo consideramos dirigido, la proposición anterior no es cierta en general.

Ejemplo 1.1.7 Volviendo al Ejemplo 1.1.4, tenemos el siguiente grafo dirigido:



Vemos a continuación cómo los a_*- cerrados de (E, a_*), no corresponden con la única componente conexa del grafo no dirigido, E.

$a_*^5(\{1\}) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\} = a_*^k(\{1\}), \forall k \geq 5$
$a_*^4(\{2\}) = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\} = a_*^k(\{2\}), \forall k \geq 4$
$a_*^4(\{3\}) = E = a_*^k(\{3\}), \forall k \geq 4$
$a_*^3(\{4\}) = \{4, 5, 6, 7, 8\} = a_*^k(\{4\}), \forall k \geq 3$
$a_*^2(\{5\}) = \{5, 6, 7, 8\} = a_*^k(\{5\}), \forall k \geq 2$
$a_*^3(\{6\}) = \{5, 6, 7, 8\} = a_*^k(\{6\}), \forall k \geq 3$
$a_*(\{7\}) = \{7, 8\} = a_*^k(\{7\}), \forall k \geq 1$
$a_*^0(\{8\}) = \{8\} = a_*^k(\{8\}), \forall k \geq 0$

Este es el conjunto de todos los a_*- cerrados de (E, a_*):
$\{\emptyset, E, \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}, \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}, \{4, 5, 6, 7, 8\}, \{5, 6, 7, 8\}, \{7, 8\}, \{8\}\}$

1.1.3 Conjunto a-clausura

A continuación vamos a introducir el concepto de a-clausura. Este concepto es análogo al concepto de clausura en espacios topológicos, ya que, como veremos, guardan mucha más relación que con el operador pseudoclausura. Sin embargo, en espacios pretopológicos no podemos asegurar siempre la existencia de la a-clausura de un cierto conjunto. El siguiente teorema nos va a dar una condición necesaria y suficiente para su existencia.

Teorema 1.1.2 Sea (E, a) un espacio pretopológico. Para todo $A \subseteq E$ existe un único a-cerrado, denotado por $\mathcal{F}(A)$, que contenga a A y que esté contenido en cada conjunto a-cerrado de A si y solo si la intersección de cualquier familia de a-cerrados en E es también a-cerrado en E.

Demostración Supongamos que existe el menor a-cerrado conteniendo a A y sea δ una familia de conjuntos a-cerrados en E. Denotamos por H a la intersección de todos los conjuntos de δ y debemos probar que H es un conjunto a-cerrado.
Para ello consideremos $\mathcal{F}(H)$, el menor a-cerrado conteniendo a H. Entonces, por definición $H \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{H})$ y además, como cada X de δ es a-cerrado y contiene a H, resulta que $\mathcal{F}(H) \subseteq X$ para cada X de δ.
En consecuencia, $\mathcal{F}(H)$ está contenido en la intersección de los conjuntos de δ, que es H. Así, como tenemos $H \subseteq \mathcal{F}(H)$ y $\mathcal{F}(H) \subseteq H$, $H = \mathcal{F}(\mathcal{H})$ y por lo tanto, por definición de $\mathcal{F}(H)$ es un conjunto a-cerrado.
Recíprocamente, asumimos que la intersección de cualquier familia de a-cerrados en E es también un a-cerrado. Sea $A \subseteq E$ y δ_A la familia de todos los conjuntos a-cerrados en E que contienen a A.
Como $A \subseteq E$ y E es un conjunto a-cerrado, δ_A es un conjunto no vacío. Entonces, si definimos $\mathcal{F}(A)$ como la intersección de todos los conjuntos de δ_A resulta por que $\mathcal{F}(A)$ es un conjunto a-cerrado tal que $A \subseteq \mathcal{F}(A)$ y, por definición, $\mathcal{F}(A)$ está contenido en cada conjunto a-cerrado que contiene a A. Además esta construcción nos da la unicidad de $\mathcal{F}(A)$. ▮

Definición 1.1.7 Sea (E, a) un espacio pretopológico. Se dice que la *a-clausura*, o *a-cierre*, de $A \subseteq E$ es, si existe, el menor subconjunto a-cerrado conteniendo a A y se denota por $\mathcal{F}(A)$.

Ejemplo 1.1.8 En el Ejemplo 1.1.2, observando el comportamiento de la pseudoclausura a_* vemos que para cada $A \subseteq E$, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_*^k(A) = E$. Como E es el menor a_*- cerrado que contiene a $A \subseteq E$ no vacío, entonces $\mathcal{F}(A) = E$ y $\mathcal{F}(\emptyset) = \emptyset$.

Sin embargo, si observamos ahora el Ejemplo 1.1.7, se tenía que el conjunto de todos los a_*- cerrados de (E, a_*) era:

$$\{\emptyset, E, \{1,2,4,5,6,7,8\}, \{2,4,5,6,7,8\}, \{4,5,6,7,8\}, \{5,6,7,8\}, \{7,8\}, \{8\}\}$$

Si tomamos por ejemplo $A = \{6\}$, A está contenido en varios a_*- cerrados. Sin embargo, el menor de ellos es el a_*- cerrado $\{5,6,7,8\}$, por ello $\mathcal{F}(\{6\}) = \{5,6,7,8\}$. En consecuencia, se tiene que:

$$\mathcal{F}(\{1\}) = a_*^5(\{1\}) = \{1,2,4,5,6,7,8\},\ \mathcal{F}(\{2\}) = a_*^4(\{2\}) = \{2,4,5,6,7,8\}$$
$$\mathcal{F}(\{3\}) = a_*^4(\{3\}) = E,\ \mathcal{F}(\{4\}) = a_*^3(\{4\}) = \{4,5,6,7,8\}$$
$$\mathcal{F}(\{5\}) = a_*^2(\{5\}) = \{5,6,7,8\},\ \mathcal{F}(\{6\}) = a_*^3(\{6\}) = \{5,6,7,8\}$$
$$\mathcal{F}(\{7\}) = a_*(\{7\}) = \{7,8\},\ \mathcal{F}(\{8\}) = a_*^0(\{8\}) = \{8\}$$

Observación 1.1.5 Todo $A \subseteq E$ está contenido en algún a-cerrado, ya que de hecho E es un a-cerrado, sin embargo sin la condición del Teorema 2.2 no podemos garantizar que exista el menor a-cerrado, ya que no podremos distinguir cuál es el minimal.

Ejemplo 1.1.9 Volviendo al Ejemplo 1.1.5, en el que $E = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 100\}$ y $a(A) = A \cup \#A$ si $A \subseteq E$ es no vacío y $a(\emptyset) = \emptyset$, donde $\#A$ es el cardinal de A.

Si consideramos $A = \{3, 5\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 3, 5\}$, entonces como B y C son a-cerrados tales que $B \cap C = A$ no es un a- cerrado, por el Teorema 1.1.2 se tiene que no existe la a- clausura para todo subconjunto de E.

Si nos preguntamos por los a-cerrados que contienen a A, vemos que sería cualquier conjunto de la forma $\{3, 5, x\}$ con $x \in E$ o de la forma $\{3, 4, 5, x\}$ con $x \in E$ o $\{3, 5, x, y, z\}$ con $x, y, z \in E$, y podríamos seguir hasta llegar a E. Si nos preguntamos ahora por el menor de todos ellos, serían los a- cerrados de la forma $\{3, 5, x\}$ con $x \in E$ y obviamente no es único, por lo que no existe $\mathcal{F}(\mathcal{A})$.

Proposición 1.1.2 Sea (E, a) un espacio pretopológico, $A \subseteq E$ es un a-cerrado si y solo si $\mathcal{F}(A) = A$.

Demostración Si A es un a-cerrado entonces el menor a-cerrado que contiene a A es él mismo, es decir, $\mathcal{F}(A) = A$. Recíprocamente, si $\mathcal{F}(A) = A$ entonces A es un a-cerrado, por definición de a-clausura.

1.1.4 Conjuntos a-cerrados minimales y elementales

En esta sección se definen dos tipos de conjuntos a-cerrados que nos serán de gran interés.

Definición 1.1.8 Sea (E, a) un espacio pretopológico y $A \subseteq E$ un a-cerrado. Se dice que A es *minimal* si el único subconjunto a-cerrado no vacío contenido en A es el propio A.

Al conjunto de a-cerrados minimales de E se le denota por $\mathcal{F}_m(E, a)$ o $\mathcal{F}_m$.

Definición 1.1.9 Sea (E, a) un espacio pretopológico donde está definida la a-clausura de cada subconjunto de E. Un a-cerrado $A \subseteq E$ se dice que es *elemental* si A es la a-clausura de un conjunto unitario $z \in E$, $A = \mathcal{F}(z)$, y se denota por $\mathcal{F}_z$.

Al conjunto de a-cerrados elementales de E se le denota por $\mathcal{F}_{el}(E, a)$ o $\mathcal{F}_{el}$ y se tiene que $\mathcal{F}_{el} = \{\mathcal{F}_z, z \in E\}$.

Ejemplo 1.1.10 Sea $E = \{1, 2, 3, 4\}$ y a la pseudoclausura definida por la siguiente tabla:

A	$a(A)$
$\emptyset$	$\emptyset$
$\{1\}$	$\{1\}$
$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{3\}$	$\{3,4\}$
$\{4\}$	$\{1,2,4\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$
$\{1,3\}$	$\{1,3,4\}$
$\{1,4\}$	$\{1,2,4\}$

A	$a(A)$
$\{2,3\}$	E
$\{2,4\}$	$\{1,2,4\}$
$\{3,4\}$	E
$\{1,2,3\}$	E
$\{1,2,4\}$	$\{1,2,4\}$
$\{1,3,4\}$	E
$\{2,3,4\}$	E
E	E

Se tiene que $\mathcal{F}_{el} = \{\mathcal{F}_z, z \in E\} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 4\}, E\}$ y $\mathcal{F}_m = \{\{1\}\}$.

Proposición 1.1.3 Todo conjunto a-cerrado minimal, también es un a-cerrado elemental.

Demostración Si $A \subseteq E$ es un conjunto a-cerrado minimal y $z \in A$, entonces $\{z\} \subseteq A$ y por tanto, $\mathcal{F}(\{z\}) \subseteq \mathcal{F}(A)$. Sin embargo, como A es el a-cerrado minimal, se tiene que $\mathcal{F}(\{z\}) = A$, por lo que es también un a-cerrado elemental.

Observación 1.1.6 La implicación contraria no es cierta en general, como pudimos ver en el Ejemplo 1.1.10.

1.1.5 Operador pseudointerior, conjuntos a-abiertos y conjunto a-apertura

Al igual que en topología, existe un análogo al concepto de interior, el operador pseudointerior.

Definición 1.1.10 Sea E un conjunto no vacío, se define el operador *pseudointerior* como la aplicación $i : P(E) \longrightarrow P(E)$ tal que:

1) $i(E) = E$
2) $i(A) \subseteq A$, para todo $A \subseteq E$

En topología existe una dualidad entre el interior de un conjunto y su clausura, sin embargo, en un espacio pretopológico es posible definir un operador pseudointerior independiente de la pseudoclausura. Esto es algo poco habitual y en tal caso, se deja claro cómo está definido el pseudointerior.

Un ejemplo sencillo donde existe independencia entre i y a es el siguiente.

Ejemplo 1.1.11 Sea (E, a_*) un espacio pretopológico con E el conjunto de vértices de un grafo no dirigido.

Definimos el operador $i(A) = \{\text{mín}\{x : x \in A\}\}$ para $A \subset E$ e $i(E) = E$. Dado que $i(E) = E$ y además $i(A) \subseteq A$ para todo $A \subseteq E$, se tiene entonces que i actúa como un operador pseudointerior. Sin embargo, tal como lo hemos definido no guarda ninguna relación con la pseudoclausura a. En tal caso, denotamos al espacio pretopológico como (E, a_*, i).

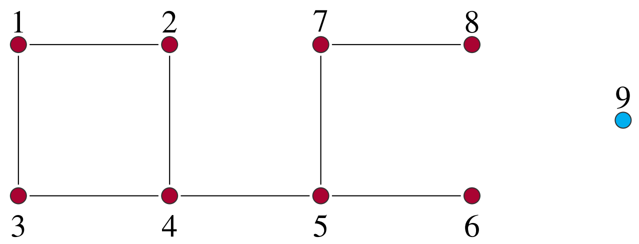
Sin embargo, es habitual tomar i asociado a la pseudoclausura a mediante dualidad. Por lo que, el operador pseudointerior cumplirá además la siguiente condición:

$$i(A) = a(A^c)^c = E - a(E - A), \quad \text{para todo } A \subseteq E.$$

Por la dualidad de entre ambos operadores, es usual omitir i y denotar simplemente al espacio pretopológico por (E, a).

A partir de ahora vamos a considerar que a e i son duales, salvo que se indique lo contrario.

Ejemplo 1.1.12 Sea (E, a_*) el espacio pretopológico con E el conjunto de vértices del siguiente grafo no dirigido.



El pseudointerior asociado a a_* vendría dado por $i_*(A) = E - a_*(E - A)$. Veamos el comportamiento de i_*:
$i_*(\{x\}) = E - a_*(E - \{x\}) = E - E = \emptyset$, para todo $x \in E - \{9\}$
$i_*(\{9\}) = E - a_*(E - \{9\}) = E - (E - \{9\}) = \{9\}$
$i_*(\{E - \{8\}\}) = E - a_*(\{8\}) = E - \{7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$i_*^2(\{E - \{8\}\}) = i_*(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = E - a_*(\{7, 8\}) = E - \{5, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
$i_*^3(\{E - \{8\}\}) = i_*(\{1, 2, 3, 4, 6\}) = E - a_*(\{5, 7, 8\}) = E - \{4, 5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3\}$
$i_*^4(\{E - \{8\}\}) = i_*(\{1, 2, 3\}) = E - a_*(\{4, 5, 6, 7, 8\}) = E - \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{1\}$
$i_*^4(\{E - \{8\}\}) = i_*(\{1\}) = E - a_*(E - \{1\}) = E - E = \emptyset$

Al igual que la reiteración de la pseudoclausura genera una ampliación conjuntista, podemos ver que la reiteración del operador pseudointerior hace que vaya disminuyendo el conjunto de partida, como ocurre en el ejemplo anterior. Este proceso cesa en un determinado momento, de ahí que se introduzca la siguiente definición.

Definición 1.1.11 Sea (E, a) un espacio pretopológico. Un conjunto $A \subseteq E$ se dice *a-abierto* si $A = i(A)$.

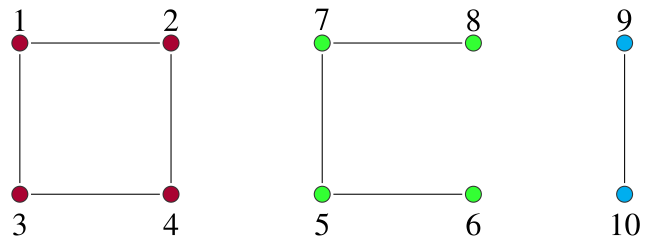
Los conjuntos $\emptyset$ y E son conjuntos a-cerrados.

Proposición 1.1.4 Sea (E, a) un espacio pretopológico, entonces $A \subseteq E$ es a-abierto si y solo si su complementario $A^c = E - A$ es a-cerrado.

Demostración Sea $A \subseteq E$, se tiene que:

$$\begin{aligned} A \text{ es } a\text{-abierto} &\iff A = i(A) = E - a(E - A) \\ &\iff E - A = a(E - A) \\ &\iff E - A \text{ es } a\text{-cerrado.} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1.13 Sea (E, a_*) el espacio pretopológico dado por el siguiente grafo no dirigido, con $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$, $C = \{9, 10\}$ y $E = A \cup B \cup C$.



Veamos cuáles son los a_*- abiertos de (E, a_*):

$i_*(A) = E - a_*(E - A) = E - (B \cup C) = E - (B \cup C) = A$
$i_*(B) = E - a_*(E - B) = E - (A \cup C) = E - (A \cup C) = B$
$i_*(C) = E - a_*(E - C) = E - (A \cup B) = E - (A \cup B) = C$
$i_*(A \cup B) = E - a_*(E - (A \cup B)) = E - a_*(C) = E - C = A \cup B$
$i_*(A \cup C) = E - a_*(E - (A \cup C)) = E - a_*(B) = E - B = A \cup C$
$i_*(B \cup C) = E - a_*(E - (B \cup C)) = E - a_*(A) = E - A = B \cup C$

Para el resto de subconjuntos de E, su interior es el vacío, como por ejemplo:

$i_*(\{1, 5, 9\}) = E - a_*(\{2, 3, 4\} \cup \{6, 7, 8\} \cup \{10\}) = E - (A \cup B \cup C) = \emptyset$

Por lo que el conjunto de a_*- abiertos es: $\{\emptyset, A, B, C, A \cup B, A \cup C, B \cup C, E\}$

Este ejemplo nos lleva a ver el siguiente resultado acerca de los a-abiertos de un grafo no dirigido.

Proposición 1.1.5 Sea (E, a_*) un espacio pretopológico donde E es el conjunto de vértices de un grafo no dirigido y a_* la aplicación que a cada vértice le asigna él mismo y los vértices adyacentes a él. Al igual que los conjuntos a_*-cerrados, los conjuntos a_*-abiertos de (E, a_*) son las uniones de los conjuntos de vértices de las componentes conexas del grafo.

Demostración Dado que A es a_*-cerrado si y solo si $E - A$ es a_*-abierto, se tiene que los conjuntos a_*- abiertos de (E, a_*) se corresponden también a vértices de las uniones de componentes conexas.

Observación 1.1.7 Igualmente, si en vez de considerar un grado no dirigido, lo consideramos dirigido, la proposición anterior no es cierta en general.

Al igual que hemos definido la a-clausura de un conjunto, para el pseudointerior existe el siguiente concepto.

Definición 1.1.12 Sea (E, a) un espacio pretopológico y $A \subseteq E$. Se define como la *a-apertura* de A al mayor subconjunto a-abierto contenido en A, si existe, y se denota por $\mathcal{O}(A)$.

Observación 1.1.8 Tampoco podemos garantizar la existencia de $\mathcal{O}(A)$ en un espacio pretopológico (E, a), con $A \subseteq E$. Sin embargo, existe una versión dual al Teorema 1.1.2 que nos asegura la existencia si y solo si la unión de cualquier familia de conjuntos a-abiertos en E es un conjunto a-abierto en E.

Veamos en el siguiente ejemplo cómo existen espacios pretopológicos en los que no existe la a- apertura para todos los subconjuntos.

Ejemplo 1.1.14 Volviendo al Ejemplo 1.1.5, en el que $E = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 100\}$ y $a(A) = A \cup \#A$ si $A \subseteq E$ es no vacío y $a(\emptyset) = \emptyset$, donde $\#A$ es el cardinal de A.
Si consideramos $A = E - \{3, 5\}$, cualquier conjunto de la forma $F_x = E - \{3, 5, x\}$ con $x \in E$ es un a- abierto contenido en A. Además se tiene que no existe ninguno mayor que ellos contenido también en A. Por tanto, como no existe un único conjunto que sea el mayor a- abierto contenido en A, no existe la a- apertura de A, $\mathcal{O}(\mathcal{A})$.

A continuación, aparecen algunos espacios pretopológicos que sí garantizan la existencia de la a- apertura para todos los subconjuntos.

Ejemplo 1.1.15 Sea (E, a_*, i) el espacio pretopológico definido en el Ejemplo 1.1.11 con a_* e i independientes. Como i es un operador idempotente, entonces $i(A) = \{\text{mín}\{x : x \in A\}\} = \mathcal{O}(\mathcal{A})$, para todo $A \subseteq E$.

Ejemplo 1.1.16 Como pudimos ver en el Ejemplo 1.1.13, se tiene que $\mathcal{F}(X) = \emptyset$, para todo $X \subseteq E$ que no sea unión de componentes conexas. En el caso contrario, $\mathcal{F}(X) = X$, para todo $X \subseteq E$ que sea unión de componentes conexas.

Finalmente, vamos a introducir la definición de familia de a-entornos de un punto.

Definición 1.1.13 Sea (E, a) un espacio pretopológico y $x \in E$, se dice que $N \subseteq E$ es un *a-entorno* de x si $x \in i(N)$. Denotamos por $\mathcal{N}(x) = \{N \subseteq E : x \in i(N)\}$ a la familia de a-entornos de $x \in E$.

Proposición 1.1.6 Sea (E, a) un espacio pretopológico. Se tiene que $A \subseteq E$ es un a-abierto si y solo si A es a-entorno de cada $x \in A$.

Demostración Si A es un a-abierto, $A = i(A)$. Lo que implica que $\forall x \in A$, $x \in i(A)$ y por tanto, $A \in \mathcal{N}(x)$.
Recíprocamente, si $\forall x \in A$, $A \in \mathcal{N}(x)$, entonces $x \in i(A) \forall x \in A$, por lo que $A \subseteq i(A)$. Pero como siempre se tiene que $i(A) \subseteq A$, entonces $A = i(A)$ y por lo tanto, A es un a-abierto.

Sin embargo, para un espacio pretopológico (E, a) cualquiera, los a-entornos no verifican las mismas propiedades que los entornos definidos en un espacio topológico.

Por ejemplo, si U es un a-entorno de $x \in E$ y $U \subseteq V \subseteq E$, no se tiene que V sea un a-entorno de x.

Esto nos lleva a definir distintos tipos de espacios pretopológicos, menos generales que los básicos pero que tienen buenas propiedades para los a-entornos. Además podremos ver como garantizan la existencia de la a-clausura y la a-apertura.

1.2 Tipos de espacios pretopológicos

En la siguiente sección vamos a estudiar una serie de resultados sobre los espacios pretopológicos ($Pretop$) dependiendo en cada caso, de las distintas propiedades que les impongamos a la pseudoclausura. Para ello vamos a definir tres tipos de espacios pretopológicos: los de tipo $\mathcal{V}$ (con la pseudoclausura a isótona), los de tipo $\mathcal{V}_D$ (con a aditiva) y los de tipo $\mathcal{V}_S$ (con a completamente aditiva).

Si estos dos últimos tipos además verifican que la pseudoclausura sea idempotente, veremos más adelante que se tratan de espacios topológicos (Top). Por ello al terminar esta sección habremos demostrado las siguientes implicaciones:

$$\boxed{Top} \longrightarrow \boxed{\mathcal{V}_S} \longrightarrow \boxed{\mathcal{V}_D} \longrightarrow \boxed{\mathcal{V}} \longrightarrow \boxed{Pretop}$$

1.2.1 Espacios pretopológicos de tipo $\mathcal{V}$

Definición 1.2.1 Sea (E, a) un espacio pretopológico, se dice que es de *tipo* $\mathcal{V}$, o un $\mathcal{V}$*-espacio*, si $\forall A, B \subseteq E$ con $A \subseteq B$ entonces $a(A) \subseteq a(B)$, es decir, a es isótona.

Proposición 1.2.1 En un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) se cumple que $\forall A, B \subseteq E$ con $A \subseteq B$ entonces se tiene también que $i(A) \subseteq i(B)$.

Demostración Como a es isótona, $\forall A, B \subseteq E$ con $A \subseteq B$ se tiene que $a(A) \subseteq a(B)$. En consecuencia, se tiene que $a(B^c) \subseteq a(A^c)$ y que $(a(A^c))^c \subseteq (a(B^c))^c$ y como a e i son duales, esto implica que $i(A) \subseteq i(B)$. ❙

El siguiente ejemplo muestra cómo un espacio pretopológico puede no ser un $\mathcal{V}$-espacio.

Ejemplo 1.2.1 Volviendo al Ejemplo 1.1.5, con $E = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 100\}$ y con $a(A) = A \cup \{\#A\}$ si $A \neq \emptyset$, donde $\#A$ es el cardinal de $A \subseteq E$, y $a(\emptyset) = \emptyset$.
En este caso, (E, a) no es un $\mathcal{V}$-espacio ya que a no es isótona:
Se tiene que $\{3, 4\} \subset \{3, 4, 5\}$ pero sin embargo, $a(\{3, 4\}) = \{2, 3, 4\} \nsubseteq a(\{3, 4, 5\}) = \{3, 4, 5\}$.

En primer lugar, veamos algunas propiedades de los a-abiertos y a-cerrados que nos van a garantizar la existencia de la a-clausura y la a-apertura para los $\mathcal{V}$-espacios.

Proposición 1.2.2 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio, se cumple:
a) Sea $x \in E$ y $N \subseteq E$, si existe un a-abierto A tal que $x \in A \subseteq N$, entonces N es un a-entorno de x.
b) La unión de a-abiertos es un a-abierto.
c) La intersección de a-cerrados es un a-cerrado.

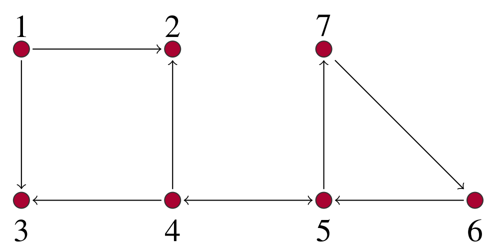
Demostración a) Se tiene que $x \in A \subseteq N$. Como A es un a-abierto, $x \in i(A)$, y como i es isótona, $x \in i(N)$. Esto implica que N es un a-entorno de x.

b) Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia de a-abiertos. Sea $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, entonces $\exists i_0$ tal que $x \in A_{i_0}$. Como A_{i_0} es un a-abierto, es un a-entorno de x contenido en $\bigcup_{i \in I} A_i$, por lo que $\bigcup_{i \in I} A_i$ también es un a-entorno de x, y en consecuencia, es un a-abierto.

c) Sea $(F_i)_{i \in I}$ una familia de a-cerrados en E y sea $F = \bigcap_{i \in I} F_i$. Para cualquier F_i de la familia se tiene que $F \subseteq F_i$. Por lo tanto, $a(F) \subseteq a(F_i) = F_i$ para cada $i \in I$ y en consecuencia $a(F) \subseteq F$. Como la inclusión contraria siempre es cierta por la definición de pseudoclausura, se concluye que $a(F) = F$, es decir, F es un a-cerrado.

Observación 1.2.1 En consecuencia, por el Teorema 1.1.2 se garantiza la existencia de la a-clausura y la a-apertura de cualquier subconjunto de un $\mathcal{V}$-espacio.

Ejemplo 1.2.2 Sea $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ el conjunto de vértices del siguiente grafo dirigido:



Es obvio que a_* es isótona por la propia definición, por lo que (E, a_*)es un $\mathcal{V}$-espacio. Veamos que efectivamente se verifica que la intersección de a_*-cerrados es un a_*-cerrado.

Tenemos que $\mathcal{F}(1) = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F}(2) = \{2\}$, $\mathcal{F}(3) = \{3\}$ y que $\mathcal{F}(4) = \mathcal{F}(5) = \mathcal{F}(6) = \mathcal{F}(7) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Donde $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{2, 3\}$ es también un a_*-cerrado, al serlo tanto $\{2\}$ como $\{3\}$.

A continuación, aparecen algunas de las propiedades de la a-clausura en un $\mathcal{V}$-espacio.

Proposición 1.2.3 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio, se cumple:
a) Si $A \subseteq B$ entonces $\mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{F}(B)$
b) $a(A) \subseteq \mathcal{F}(A)$
c) $A = a(A)$ si y solo si $A = \mathcal{F}(A)$

Demostración a) Si $A \subseteq B$ entonces $A \subseteq \mathcal{F}(B)$, así que $\mathcal{F}(B)$ es un conjunto a-cerrado conteniendo a A, y por tanto, también contiene a $\mathcal{F}(A)$.

b) Como $A \subseteq \mathcal{F}(A)$ y a es isótona se tiene que $a(A) \subseteq a(\mathcal{F}(A)) = \mathcal{F}(A)$, por ser $\mathcal{F}(A)$ a-cerrado.

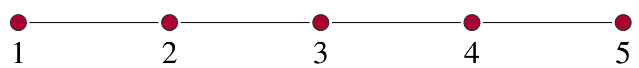
c) Supongamos $A = a(A)$. Entonces A es un conjunto a-cerrado conteniendo a A, y por tanto $\mathcal{F}(A) \subseteq A$. Como siempre tenemos que $A \subseteq \mathcal{F}(A)$, se sigue que $A = \mathcal{F}(A)$. Recíprocamente, como $A \subseteq a(A) \subseteq \mathcal{F}(A)$ por (b), se tiene que si $A = \mathcal{F}(A)$ entonces $A = a(A)$.

Teorema 1.2.1 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio y $A \subseteq E$. Si existe un entero $n \geq 0$ tal que $a^n(A)$ es un conjunto a-cerrado, entonces $a^n(A) = \mathcal{F}(A)$.

Demostración Para cada entero $n \geq 0$, $A \subseteq a^n(A)$. Como a es isótona, a^n también lo es, por lo que $\forall B \subseteq E$ con $A \subseteq B$ y B un a-cerrado, se tiene que $a^n(A) \subseteq a^n(B) = B$. Por consiguiente, $a^n(A)$ es el menor a-cerrado que contiene a A, es decir, $a^n(A) = \mathcal{F}(A)$.

Observación 1.2.2 El resultando anterior nos permite calcular la a-clausura de cualquier subconjunto de un $\mathcal{V}$-espacio pretopológico finito.
Si (E, a) es un $\mathcal{V}$-espacio con n elementos y $A \subseteq E$ un subconjunto con p elementos, entonces $a^{n-p}(A)$ es un conjunto a-cerrado y coincide con la a-clausura de A. Sin embargo, se tiene asegurada la existencia de un $k \leq n - p$ tal que $a^k(A) = \mathcal{F}(A)$.

Ejemplo 1.2.3 Consideramos el $\mathcal{V}$-espacio (E, a_*) donde $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es el conjunto de nodos del siguiente grafo.



Si tomamos $A = \{1\}$, tenemos que $n = 5$ y $p = 1$. En este caso, vemos que $k = 4$. Como $a(A) = \{1, 2\}$, $a^2(A) = \{1, 2, 3\}$, $a^3(A) = \{1, 2, 3, 4\}$, $a^4(A) = \{1, 2, 3, 4, 5\} = E$, se tiene que $a^4(A) = \mathcal{F}(A)$.

Sin embargo, si tomamos $B = \{3\}$ se tiene que $n - p = 4$ pero esta vez $k = 2$, aunque igualmente se verifica que $k \leq n - p$:
$a(B) = \{2, 3, 4\}$, $a^2(B) = \{1, 2, 3, 4, 5\} = E$

El siguiente resultado nos muestra una caracterización de los conjuntos a-cerrados minimales en estos espacios.

Teorema 1.2.2 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio. Entonces un conjunto $A \subseteq E$ es un a-cerrado minimal si y solo si para todo $x \in A$, $\mathcal{F}(\{x\}) = A$.

Demostración Si A es un a-cerrado minimal y $x \in A$, tenemos $\{x\} \subseteq A$ y por tanto $\mathcal{F}(x) \subseteq \mathcal{F}(A) = A$. Además, como A es minimal y $\mathcal{F}(x) \neq \emptyset$, resulta que $\mathcal{F}(x) = A$.
Recíprocamente, si para cada $x \in A$, $\mathcal{F}(x) = A$, entonces A es a-cerrado. Falta ver que A es minimal. Sea $B \neq \emptyset$ un conjunto a-cerrado con $B \subseteq A$. Si tomamos un elemento $z \in B$, entonces $\mathcal{F}(z) \subseteq B \subseteq A$, por lo que z es un elemento de A. Entonces, como por la hipótesis $\mathcal{F}(z) = A$, se tiene que $A = B$.

A continuación vamos a ver una serie de propiedades de los a-entornos. Para ello, necesitamos la siguiente definición.

Definición 1.2.2 Sea E un conjunto, una familia $\mathcal{F}$ de partes de E es un *prefiltro* en E si verifica que $\emptyset \notin \mathcal{F}$ y que para todo $V \in \mathcal{F}$ y para todo $W \subseteq E$, si $V \subseteq W$, entonces $W \in F$.
Se dice que $\mathcal{F}$ es un *filtro* en E si además de cumplirse lo anterior verifica que si $V, W \in \mathcal{F}$, entonces $V \cap W \in \mathcal{F}$.

Proposición 1.2.4 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio, el conjunto de a-entornos de todo punto es un prefiltro.

Demostración Sea $x \in E$, para que $\mathcal{N}(x)$ es un prefiltro tenemos que ver:
i) $\emptyset \notin \mathcal{N}(x)$, ya que $x \notin i(\emptyset) = \emptyset$
ii) Para todo $N \in \mathcal{N}(x)$ y para todo $M \subseteq E$, con $N \subseteq M$, veamos que $M \in \mathcal{N}(x)$. Como $N \in \mathcal{N}(x)$, tenemos que $x \in i(N)$. Además, como $N \subseteq M$ e i es isótona, se tiene que $i(N) \subseteq i(M)$, y por tanto $x \in i(M)$.

Observación 1.2.3 En topología, la familia de entornos de cada punto es un filtro.

Proposición 1.2.5 Sea E un conjunto y $\mathcal{N}(x)$ un prefiltro de E para cada $x \in E$. Sean dos funciones $a, i : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ definidas como:

i) $\forall A \subseteq E$, $a(A) = \{x \in E : \forall N \in \mathcal{N}(x), N \cap A \neq \emptyset\}$
ii) $\forall A \subseteq E$, $i(A) = \{x \in E : \exists N \in \mathcal{N}(x), N \subseteq A\}$

Entonces (E, a) es un $\mathcal{V}$-espacio, el generado por la familia $\{\mathcal{N}(x), x \in E\}$.

Demostración En primer lugar, es fácil probar que a e i son duales. Veamos entonces que la función a verifica las condiciones para ser una pseudoclausura.
Se tiene que $a(\emptyset) = \{x \in E : \forall N \in \mathcal{N}(x), N \cap \emptyset \neq \emptyset\} = \emptyset$ y que obviamente, $\forall A \subseteq E$, $A \subseteq a(A)$.
Faltaría probar que a es isótona. Se tiene que $\forall A, B \in E$ con $A \subseteq B$, como $\forall N \in \mathcal{N}(x)$, $N \cap A \neq \emptyset$, entonces $N \cap B \neq \emptyset$, por lo que $a(A) \subseteq a(B)$.

Hemos visto cómo dado un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) podemos hallar la familia de los a-entornos de cada punto de E. También hemos visto que si se tiene un prefiltro de E para todo $x \in E$, podemos obtener dos funciones a e i, que actúen como la pseudoclausura y el pseudointerior del $\mathcal{V}$-espacio (E, a). El problema que nos planteamos ahora es que si dado un $\mathcal{V}$-espacio inicial (E, a) con $\mathcal{N}(x)$ la familia de a-entornos de cada $x \in E$ y obtenemos a partir de los $\mathcal{N}(x)$ una nueva pseudoclausura y un nuevo pseudointerior, ¿estas funciones coinciden con las iniciales?

Proposición 1.2.6 Un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) está definido por una única familia de prefiltros y, recíprocamente, cada familia de prefiltros de E está generada por una única estructura pretopológica (a, i).

Demostración En primer lugar, vamos a probar que la familia $\{N(x), x \in E\}$ es la única familia de prefiltros que genera (E, a). Supongamos que existe otra familia de prefiltros $\mathcal{W}(x)$ que genera (E, a) y sea $N \in \mathcal{N}(x) - \mathcal{W}(x)$. Se tiene que $x \in i(N)$, ya que $N \in \mathcal{N}(x)$. Sin embargo, como $N \notin \mathcal{W}(x)$, entonces $x \notin i(N)$, por lo que llegamos a una contradicción. Igualmente ocurre si suponemos que $N \in \mathcal{W}(x) - \mathcal{N}(x)$.

Recíprocamente, por reducción al absurdo, suponemos que la familia $\mathcal{N}(x)$ genera además otro $\mathcal{V}$-espacio (E, a'). Dado que $i \neq i'$, $\exists A \subset E$ tal que $i(A) \neq i'(A)$. Sea $y \in i'(A) - i(A)$, entonces $\exists V \in \mathcal{N}(x)$ tal que $V \subseteq A$, por lo que $y \in i(A)$ y hemos llegado a una contradicción.

Una ventaja de los $\mathcal{V}$-espacios es que la familia de a-entornos es un prefiltro que caracteriza el espacio. Esto da una forma práctica de construir espacios. Sin embargo, puede llegar a ser difícil especificar la familia de a-entornos. Un concepto bastante práctico es el siguiente.

Definición 1.2.3 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio, para cada $x \in E$ se dice que $\mathcal{B}(x)$ es su *base de a-entornos* si para todo $N \in \mathcal{N}(x)$, existe $B \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B \subseteq N$.

Proposición 1.2.7 Sea (E, a) el $\mathcal{V}$-espacio definido por la familia de a-entornos $\{\mathcal{N}(x) : x \in E\}$ y siendo $\mathcal{B}(x)$ su base, entonces:

i) $\forall A \subseteq E, a(A) = \{x \in E : \forall B \in \mathcal{B}(x), B \cap A \neq \emptyset\}$
ii) $\forall A \subseteq E, i(A) = \{x \in E : \exists B \in \mathcal{B}(x), B \subseteq A\}$

Demostración i) Sea $x \in \{x \in E : \forall B \in \mathcal{B}(x), B \cap A \neq \emptyset\}$, entonces $x \in \{x \in E : \forall N \in \mathcal{N}(x), N \cap A \neq \emptyset\} = a(A)$.
Recíprocamente, si $x \in a(A)$, supongamos por reducción al absurdo que $x \notin \{x \in E : \forall B \in \mathcal{B}(x), B \cap A \neq \emptyset\}$. Entonces $\exists B \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B \cap A = \emptyset$. En consecuencia, $\exists N \in \mathcal{N}(x)$ tal que $B \subseteq N$ y $N \cap A = \emptyset$, por lo que $x \notin a(A)$, llegando así a una contradicción.

ii) Se tiene por dualidad.

1.2.2 Espacios pretopológicos de tipo $\mathcal{V}_D$

En esta sección, definimos un nuevo tipo de espacios pretopológicos al que le vamos a pedir la aditividad de su pseudoclausura.

Definición 1.2.4 Sea (E, a) un espacio pretopológico, se dice que es de *tipo* $\mathcal{V}_D$ o un $\mathcal{V}_D$*-espacio* si a es aditiva, es decir, si $\forall A, B \subseteq E$ se tiene que $a(A \cup B) = a(A) \cup a(B)$.

Proposición 1.2.8 En un $\mathcal{V}_D$-espacio (E, a) el operador pseudointerior verifica que $\forall A, B \subseteq E$ se tiene que $i(A \cap B) = i(A) \cap i(B)$.

Demostración Sean a e i duales, es decir, $i = c \circ a \circ c$. Como a es aditiva, $\forall A, B \subseteq E$ se tiene que $a(A \cup B) = a(A) \cup a(B)$. En consecuencia, $a((A \cap B)^c) = a(A^c \cup B^c) = a(A^c) \cup a(B^c)$ y aplicando el complementario, $(a((A \cap B)^c))^c = a(A^c)^c \cap a(B^c)^c$, es decir, $i(A \cap B) = i(A) \cap i(B)$.

A continuación veremos que los $\mathcal{V}$-espacios son una generalización de los espacios de tipo $\mathcal{V}_D$.

Proposición 1.2.9 Todo $\mathcal{V}_D$-espacio es un $\mathcal{V}$-espacio.

Demostración Sea (E, a) un $\mathcal{V}_D$-espacio y $A, B \subseteq E$ con $A \subseteq B$. Como $A \cup B = B$, se tiene que $a(A \cup B) = a(B)$. Además, como $a(A \cup B) = a(A) \cup a(B)$, entonces $a(B) = a(A) \cup a(B)$, lo que implica que $a(A) \subseteq a(B)$ y por tanto (E, a) es un $\mathcal{V}$-espacio.

Proposición 1.2.10 Un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) es un $\mathcal{V}_D$-espacio si y solo si para todo $x \in E$ la familia de a-entornos de x, $\mathcal{N}(x)$, es un filtro.

Demostración Recordemos que $\mathcal{N}(x)$, con $x \in E$, es un filtro si es un prefiltro y además $\forall V, W \in \mathcal{N}(x)$, $V \cap W \in \mathcal{N}(x)$. Como (E, a) es un $\mathcal{V}$-espacio, para cada $x \in E$ $\mathcal{N}(x)$ es un prefiltro.

Sea (E, a) un $\mathcal{V}_D$-espacio con $x \in E$ y $V, W \in \mathcal{N}(x)$. Se tiene que $x \in i(V)$ y $x \in i(W)$, por lo que $x \in i(V) \cap i(W)$. Al ser un $\mathcal{V}_D$-espacio, esto implica que $x \in i(V \cap W)$ y por tanto, $V \cap W \in \mathcal{N}(x)$. Así hemos probado que $\mathcal{N}(x)$ es un filtro.

Recíprocamente, sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio tal que $\forall x \in E$, la familia de a-entornos de x es un filtro. Bastaría probar que $\forall A, B \subseteq E$ se tiene que $i(A \cap B) = i(A) \cap i(B)$ para ver que es un $\mathcal{V}_D$-espacio.

Supongamos que $x \in i(A \cap B)$, esto implica que $A \cap B$ es un a-entornos de x. Como $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$, $x \in i(A)$ y $x \in i(B)$, por lo que $x \in i(A) \cap i(B)$. En consecuencia, $i(A \cap B) \subseteq i(A) \cap i(B)$.

A continuación mostramos un ejemplo de esto.

Ejemplo 1.2.4 Sea (E, a) un espacio pretopológico con $E = \{x, y, z\}$, definido por la familia de a-entornos que tienen la siguiente base:

$$\mathcal{B}(x) = \{\{x, y\}, \{x, z\}\} \qquad \mathcal{B}(y) = \{\{x, y\}, \{y, z\}\} \qquad \mathcal{B}(z) = \{\{x, y, z\}\}$$

Se tiene que (E, a) es un $\mathcal{V}$-espacio pero no un $\mathcal{V}_D$-espacio ya que la familia de a-entornos es un prefiltro pero no es un filtro, ya que por ejemplo $\{x, y\} \cap \{x, z\} = \{x\} \notin \mathcal{B}(x)$.

Los conjuntos a-abiertos y a-cerrados de los $\mathcal{V}_D$-espacios poseen además nuevas propiedades.

Proposición 1.2.11 Sea (E, a) un $\mathcal{V}_D$-espacio se tiene:
i) Si A y B son a-cerrados, $A \cup B$ también lo es.
ii) Si A_i es un a-cerrado para todo $i \in I$, entonces $\bigcap_{i \in I} A_i$ también lo es.
iii) Para todo $A, B \subseteq E$, se tiene que $\mathcal{F}(A \cup B) = \mathcal{F}(A) \cup \mathcal{F}(B)$.

Demostración i) Al ser A y B a-cerrados, $a(A) = A$ y $a(B) = B$, por lo que $A \cup B = a(A) \cup a(B) = a(A \cup B)$ y en consecuencia, $A \cup B$ es un a-cerrado.

ii) Dado que $a(A_i) = A_i \ \forall i \in I$, se tiene que $\bigcap_{i \in I} a(A_i) = \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq a(\bigcap_{i \in I} A_i)$.
Por un lado, como $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_i \ \forall i \in I$, al ser a isótona, $a(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq a(A_i) \ \forall i \in I$ y en consecuencia, $a(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} a(A_i)$.
Al haber probado que $a(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} A_i$ hemos demostrado que $\bigcap_{i \in I} A_i$ es un a-cerrado.

iii) Dado que $A, B \subseteq A \cup B$, para $\mathcal{V}$-espacios ya demostramos que, entonces $\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B) \subseteq \mathcal{F}(A \cup B)$ y por tanto $\mathcal{F}(A) \cup \mathcal{F}(B) \subseteq \mathcal{F}(A \cup B)$.
Recíprocamente, como $\mathcal{F}(A)$ y $\mathcal{F}(B)$ son a-cerrados, $\mathcal{F}(A) \cup \mathcal{F}(B)$ también lo es. Por tanto, $\mathcal{F}(A) \cup \mathcal{F}(B)$ es un a-cerrado que contiene a $A \cup B$, lo que implica que $\mathcal{F}(A \cup B) \subseteq \mathcal{F}(A) \cup \mathcal{F}(B)$.

Proposición 1.2.12 Sea (E, a) un $\mathcal{V}_D$-espacio se tiene:
i) Si A y B son a-abiertos, $A \cap B$ también lo es.
ii) Si A_i es un a-abierto para todo $i \in I$, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ también lo es.
iii) Para todo $A, B \subseteq E$, se tiene que $\mathcal{O}(A \cap B) = \mathcal{O}(A) \cap \mathcal{O}(B)$

Demostración Análoga a la demostración anterior, por dualidad entre a e i.

Dado que se verifica (i) y (ii) y además $\emptyset$ y E son a-abiertos, podemos definir la topología asociada a una pseudoclausura sobre el conjunto E.

Definición 1.2.5 Sea (E, a) un $\mathcal{V}_D$-espacio, definimos la *topología asociada a a sobre E* como $\mathcal{T}_a = \{A \subseteq E : i(A) = A\}$. Se dirá que $(E, \mathcal{T}_a)$ es el espacio topológico asociado a (E, a).

Observación 1.2.4 Si nos preguntamos por la clausura topológica del espacio $(E, \mathcal{T}_a)$, podríamos pensar que se trata de la pseudoclausura a, sin embargo, a no tiene por qué ser idempotente, por lo tanto, no puede ser la clausura de $(E, \mathcal{T}_a)$. Es fácil ver que, por definición, la clausura de $(E, \mathcal{T}_a)$ es realmente la a-clausura de (E, a), el operador $\mathcal{F}$.

1.2.3 Espacios pretopológicos de tipo $\mathcal{V}_S$

Definición 1.2.6 Sea (E, a) un espacio pretopológico, se dice que es de *tipo* $\mathcal{V}_S$ o un $\mathcal{V}_S$*-espacio* si a es completamente aditiva, es decir, si se tiene que

$$a(A) = \bigcup_{x\in A} a(\{x\}), \text{ para todo } A \subseteq E.$$

Observación 1.2.5 Podríamos pensar que en consecuencia se tiene que $i(A) = \bigcap_{x\in A} i(x)$. Sin embargo, vamos a demostrar que esto no puede ser cierto. Es fácil ver que el pseudointerior de un elemento $x \in E$ es él mismo o el vacío. En consecuencia, la intersección del pseudointerior de los elementos de un conjunto, va a ser la intersección de elementos distintos o el vacío. Pero realmente, la intersección de elementos distintos también es el vacío, por lo que $\bigcap_{x\in A} i(x) = \emptyset$ para cada $A \subseteq E$.

Como pasaba con los V-espacios, veremos que los $\mathcal{V}_D$-espacios son una generalización de los $\mathcal{V}_S$-espacios.

Proposición 1.2.13 Todo $\mathcal{V}_S$-espacio es un $\mathcal{V}_D$-espacio.

Demostración Sea (E, a) un $\mathcal{V}_S$-espacio, se tiene que a es completamente aditiva y por tanto es aditiva, lo que implica que (E, a) es un $\mathcal{V}_D$-espacio.

Hasta ahora hemos visto que un espacio pretopológico es de tipo $\mathcal{V}_S$ si la pseudoclausura es completamente aditiva. Sin embargo, en el siguiente resultado vamos a ver que basta pedirle una condición a la familia de a-entornos para que sea un $\mathcal{V}_S$-espacio.

Proposición 1.2.14 Un espacio pretopológico (E, a) es un $\mathcal{V}_S$-espacio si y solo si para todo $x \in E$, se tiene que $\bigcap_{N\in\mathcal{N}(x)} N \in \mathcal{N}(x)$.

Demostración En primer lugar, denotamos $G(x) = \bigcap_{N\in\mathcal{N}(x)} N$. Por reducción al absurdo, suponemos que $x \notin i(G(x))$ entonces $x \in i(G(x))^c$, lo que implica que $x \in a(G(x)^c)$. Por tanto, $\exists N^* \in \mathcal{N}(x)$ y $\exists y \in N^*$ tal que $x \in a(\{x\}) \subseteq a(N^*)$. Esto implica que $x \notin i(N^*)$, por lo que hemos llegado a una contradicción. Como entonces $x \in i(G(x))$, se tiene que $G(x) \in \mathcal{N}(x)$.
Recíprocamente, basta probar que $\forall A \subseteq E$, $a(A) = \bigcup_{x\in A} a(\{x\})$. Se tiene que $\forall x \in A$, $a(\{x\}) \subseteq a(A)$, por lo que $\bigcup_{x\in A} a(\{x\}) \subseteq a(A)$. Consideramos ahora $y \in a(A)$ y como $G(y) \cap A \neq \emptyset$, entonces $\exists x \in G(y) \cap A$. Así que $\exists x \in A$ tal que $x \in N$ para todo $N \in \mathcal{N}(x)$. Obtenemos por tanto que $y \in a(\{x\}) \subseteq \bigcup_{x\in A} a(\{x\})$ $\forall x \in A$ y esto implica que $a(A) \subseteq \bigcup_{x\in A} a(\{x\})$.

Observación 1.2.6 Se tiene que el espacio pretopológico (E, a) es un $\mathcal{V}_S$-espacio si para cada $x \in E$ la familia de a-entornos $\mathcal{N}(x)$ es un prefiltro generado por una base $\mathcal{B}(x)$ reducida a un solo elemento.

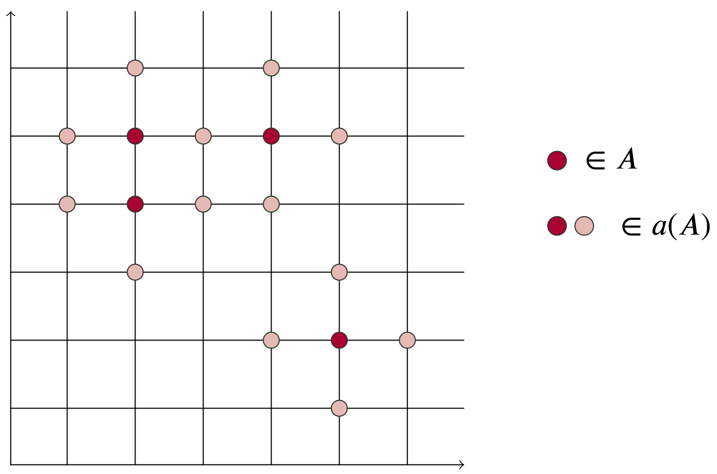
Proposición 1.2.15 Sea (E, a) un $\mathcal{V}_S$-espacio, entonces $A \subseteq E$ es un a-cerrado si y solo si para todo $x \in A$, se tiene que $a(\{x\}) \subseteq A$.

Demostración Por definición, se tiene que $\forall A \subseteq E$, $a(A) = \bigcup\limits_{x \in A} a(\{x\})$. En consecuencia, A es a-cerrado si y solo si $A = a(A) = \bigcup\limits_{x \in A} a(\{x\})$, es decir, si $a(\{x\}) \subseteq A$ $\forall x \in A$.

Observación 1.2.7 Es obvio que cualquier espacio pretopológico (E, a), con E el conjunto de vértices de un grafo y $a = a_*$, la pseudoclausura ya definida para los grafos, es un $\mathcal{V}_S$-espacio, por la propia definición.

Otro ejemplo de $\mathcal{V}_S$-espacio es el siguiente.

Ejemplo 1.2.5 Sea (E, a) un espacio pretopológico con $E = \mathbb{Z}^2$.
Definimos para cada par $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ la base que genera la familia de los a-entornos de (x, y) como $B(x, y) = \{(x, y), (x-1, y), (x+1, y), (x, y-1), (x, y+1)\}$ y definimos la pseudoclausura como $a(A) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : B(x, y) \cap A \neq \emptyset\}$, para cada $A \subseteq E$.



Como podemos ver en el diagrama, se tiene que $a(A) = \bigcup\limits_{x \in A} a(\{x\})$ para todo $A \subseteq E$. Por lo que (E, a) es un $\mathcal{V}_S$-espacio.

1.2.4 Espacios topológicos

Finalmente, el último tipo de espacios pretopológicos son los espacios topológicos.

Definición 1.2.7 Dado un conjunto E no vacío, una *topología* sobre E es una familia $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(E)$ que verifica:

- $\emptyset, E \in \mathcal{T}$
- Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$
- Si $\{A_i\}_{i\in I}$ está formada por conjuntos en $\mathcal{T}$, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$

Al par $(E, \mathcal{T})$ se le llama espacio topológico.

Proposición 1.2.16 Sea (E, a) un espacio pretopológico, se dice que es un espacio topológico si y solo si es un $\mathcal{V}_D$-espacio y para todo $A \subseteq E$, $a(A) = a^2(A)$, es decir, si la pseudoclausura a es aditiva e idempotente.

Demostración En primer lugar, suponemos que (E, a) es un espacio topológico, lo que implica que $a(A) = \mathcal{F}(A)$. Entonces, $a^2(A) = a(\mathcal{F}(A)) = \mathcal{F}(A) = a(A)$.

Recíprocamente, si $a^2(A) = a(A)$, entonces $a(A)$ es un a-cerrado conteniendo a A y a $\mathcal{F}(A)$, por la definición de a-clausura. Sin embargo, como $a(A) \subseteq \mathcal{F}(A)$, se tiene que $a(A) = \mathcal{F}(A)$, lo que implica que (E, a) es un espacio topológico.

Observación 1.2.8 Dado un (E, a) espacio pretopológico cuya pseudoclausura es aditiva e idempotente, es decir, dado un espacio topológico, podemos hallar la familia de a-abiertos de E. Esta familia corresponde a una topología sobre E y la denotaremos por $\mathcal{T}_a$. De este modo, podemos expresar el espacio topológico como $(E, \mathcal{T}_a)$.

2 Propiedades generales de los espacios pretopológicos

2.1 Relaciones entre estructuras pretopológicas

En esta sección, denotamos por $\mathcal{T}(E)$ al conjunto de los espacios pretopológicos definidos en el conjunto E. Vamos a definir relaciones comparativas entre estructuras pretopológicas.

Definición 2.1.1 Sean (E, a) y (E, a^*) dos espacios pretopológicos. Se dice que (E, a^*) es *más fino* que (E, a) si para todo $A \subseteq E$ se tiene que $A \subseteq a^*(A) \subseteq a(A)$, o equivalentemente, $i(A) \subseteq i^*(A) \subseteq A$. A su vez, se dice que la estructura pretopológica (a^*, i^*) es *más fina* que (a, i).

Observación 2.1.1 Si la estructura pretopológica (a^*, i^*) es más fina que (a, i), se dice que (a, i) es menos fina o que es más gruesa que (a^*, i^*).

Ejemplo 2.1.1 Supongamos que se tiene que $a(A) = E$, para todo $A \subseteq E$. Esta es la topología menos fina en $\mathcal{T}(E)$, que es la topología indiscreta, o la trivial, y que verifica que $\mathcal{N}(x) = E$, para todo $x \in E$.

Ejemplo 2.1.2 Si suponemos ahora que $a(A) = A$, para todo $A \subseteq E$, se tiene que ésta es la topología más fina en $\mathcal{T}(E)$, que es la topología discreta y que verifica que $\mathcal{N}(x) = \{A \subseteq E : x \in A\}$, para todo $x \in E$.

Sea $\mathcal{F}_J = \{(E, a_j) : j \in J\}$ una familia de espacios pretopológicos. Denotamos por $\mathcal{M}_J$ la familia de espacios pretopológicos menos finos que cualquier espacio de $\mathcal{F}_J$. Esta familia no es vacía ya que pertenece a ella la topología indiscreta. En $\mathcal{M}_J$ podemos encontrar un espacio pretopológico que sea el más fino que el resto.

Consideramos entonces el espacio $(E, \underline{a})$ definido por:

$$\underline{a}(A) = \bigcup_{j \in J} a_j(A)\ , \text{ o por, } \ \underline{i}(A) = \bigcap_{j \in J} i_j(A), \text{ para todo } A \subseteq E.$$

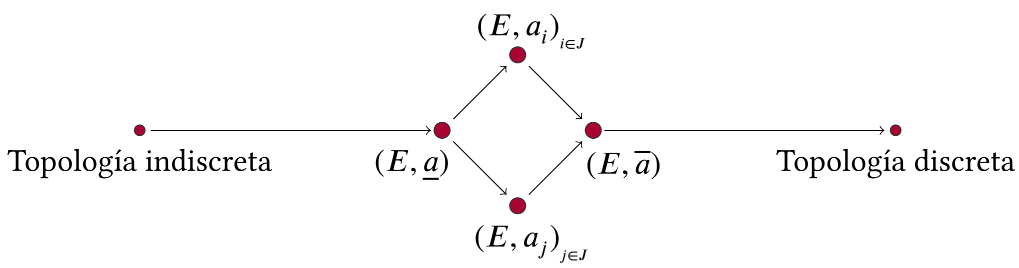
El espacio $(E, \underline{a})$ es el ínfimo en $\mathcal{T}(E)$ de la familia $\mathcal{F}_J$.

Denotamos ahora por $\mathcal{P}_J$ la familia de espacios pretopológicos más finos que cualquier espacio de $\mathcal{F}_J$. Esta familia no es vacía ya que pertenece a ella la topología discreta. En $\mathcal{P}_J$ podemos encontrar un espacio pretopológico que sea el menos fino que el resto. Consideramos entonces el espacio $(E, \overline{a})$ definido por:

$$\overline{a}(A) = \bigcap_{j \in J} a_j(A)\ , \text{ o por, } \ \overline{i}(A) = \bigcup_{j \in J} i_j(A), \text{ para todo } A \subseteq E.$$

El espacio $(E, \overline{a})$ es el supremo en $\mathcal{T}(E)$ de la familia $\mathcal{F}_J$.

El siguiente diagrama resume lo que sucede en términos de comparación:



Definición 2.1.2 Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos prefiltros definidos en el conjunto E. Se dice que $\mathcal{G}$ es *más fino* que $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, i.e. si $F \in \mathcal{G}, \forall F \in \mathcal{F}$.

Proposición 2.1.1 Sean (E, a) y (E, a^*) dos $\mathcal{V}$-espacios. Se tiene que a^* es más fino que a si y solo si para cada $x \in E$, el prefiltro de los a^*-entornos de x es *más fino* que el prefiltro de los a-entornos de x.

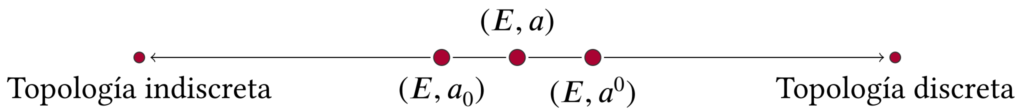
Demostración Para cada $x \in E$, sea $\mathcal{N}(x)$ el a-entornos de x y $\mathcal{N}^*(x)$ el a^*-entornos de x. Como i^* es más fino que i, $\forall A \subseteq E$, $i(A) \subseteq i^*(A)$. Entonces, si $V \in \mathcal{N}(x)$, $x \in i(V)$ y en consecuencia, $x \in i^*(V)$, por lo que $x \in \mathcal{N}^*(x)$. Tenemos así que $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{N}^*(x)$, es decir, que $\mathcal{N}^*(x)$ es más fino que $\mathcal{N}(x)$.

Recíprocamente, si $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{N}^*(x)$ se tiene que $i(A) \subseteq i^*(A)$, $\forall A \subseteq E$, por la definición de i e i^* en los $\mathcal{V}$-espacios.

Ejemplo 2.1.3 Sea $E = \mathbb{Z}^2$. Para cada $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, consideramos las dos siguientes bases de a-entornos de (x, y):
$\mathcal{N}(x, y) = \{(x-1, y), (x, y), (x+1, y), (x, y-1), (x, y+1)\}$ y
$\mathcal{W}(x, y) = \{\{(x-1, y), (x, y), (x+1, y)\}, \{(x, y-1), (x, y), (x, y+1)\}\}$
Entonces, el espacio pretopológico generado sobre $\mathbb{Z}^2$ por $\mathcal{W}(x, y)$ es más fino que el generado por $\mathcal{N}(x, y)$.

2.1.1 Aproximación por $\mathcal{V}$-espacios

En esta sección respondemos la cuestión de que si dado un espacio pretopológico (E, a) es posible encontrar el $\mathcal{V}$-espacio más fino de todos los $\mathcal{V}$-espacios que son menos finos que (E, a) y recíprocamente, si es posible encontrar el $\mathcal{V}$-espacio menos fino de todos los $\mathcal{V}$-espacios que son más finos que (E, a). Es decir, si existen (E, a_0) y (E, a^0) tales que:



Proposición 2.1.2 Sea (E, a) un espacio pretopológico. Existe un único $\mathcal{V}$-espacio (E, a_0) que es el más fino de todos los $\mathcal{V}$-espacios que son menos finos que (E, a). Se tiene que $a_0(A) = \bigcap_{B \subseteq A} a(B)$ y que $i_0(A) = \bigcup_{A \subseteq B} i(B)$.

Demostración Obviamente, a es más fina que a_0, ya que $\forall A \subseteq E, a(A) \subseteq a_0(A)$. Consideramos A y B dos subconjuntos de E tales que $A \subseteq B$. Entonces:

$$a_0(A) = \bigcup_{C \subseteq A} a(C) \subseteq \bigcup_{C \subseteq B} a(C) = a_0(B)$$

Por consiguiente, (E, a_0) es un $\mathcal{V}$-espacio.

Supongamos que existe un $\mathcal{V}$-espacio (E, a') menos fino que (E, a) pero más fino que (E, a_0). En tal caso, si $x \in a_0(A)$ entonces existe $B^* \subseteq A$ tal que $x \in a(B^*)$. Como a' es menos fina que a, $a(B^*) \subseteq a'(B^*)$. Entonces $x \in a'(B^*) \subseteq a'(A)$, lo que implica que $a_0(A) \subseteq a'(A)$, llegando así a una contradicción.

Proposición 2.1.3 Sea (E, a) un espacio pretopológico. Existe un único $\mathcal{V}$-espacio (E, a^0) que es el menos fino de todos los $\mathcal{V}$-espacios que son más finos que (E, a). Se tiene que $a^0(A) = \bigcap_{A \subseteq B} a(B)$ y que $i^0(A) = \bigcup_{B \subseteq A} i(B)$.

Demostración Análogamente a la demostración anterior, se tiene que a^0 es más fina que a y que (E, a^0) es un $\mathcal{V}$-espacio. Igualmente, si existe un $\mathcal{V}$-espacio (E, a') más fino que (E, a) pero menos fino que (E, a^0), llegamos a que $(E, a') = (E, a^0)$.

Proposición 2.1.4 Sea (E, a) un espacio pretopológico con (E, a_0) y (E, a^0) los $\mathcal{V}$-espacios antes definidos. Entonces:

1) Para todo $x \in E$, $\mathcal{N}_0(x) = \{N \subseteq E : \forall A, N \subseteq A, x \in i(A)\}$.
2) para todo $x \in E$, $\mathcal{N}^0(x) = \{N \subseteq E : \exists A \subseteq N, x \in i(A)\}$.

Demostración 1) Sea $N \in \mathcal{N}_0(x)$, entonces como $x \in i_0(N)$, $\forall A \subseteq E$ tal que $N \subseteq A$ se tiene que $x \in i(A)$.
2) Sea $N \in \mathcal{N}^0(x)$, entonces como $x \in i^0(N) = \bigcup_{A \subseteq N} i(A)$, se tiene que existe $A \subseteq E$ con $V \subseteq A$ tal que $x \in i(A)$.

2.2 Continuidad

El objetivo de esta sección es definir funciones continuas en espacios pretopológicos y funciones que preservan la pseudoclausura, dos conceptos que parecen equivalentes y que veremos que no es así, a no ser que los espacios verifiquen una condición necesaria, ser de tipo $\mathcal{V}$.

Definición 2.2.1 Sean (E, a_E) y (F, a_F) dos espacios pretopológicos. Se dice que la función $f : (E, a_E) \longrightarrow (F, a_F)$ es *continua* en $x \in E$ si para todo $B \subseteq F$ tal que $B \in \mathcal{N}(f(x))$ se tiene que $f^{-1}(B) \in \mathcal{N}(x)$.

Definición 2.2.2 Sean (E, a_E) y (F, a_F) dos espacios pretopológicos. Se dice que la función $f : (E, a_E) \longrightarrow (F, a_F)$ es *continua* si es continua en x para todo $x \in E$.

Teorema 2.2.1 Sean (E, a_E) y (F, a_F) dos espacios pretopológicos y la función $f : (E, a_E) \longrightarrow (F, a_F)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1) f es continua.
2) $f^{-1}(i_F(B)) \subseteq i_E(f^{-1}(B))$ para todo $B \subseteq F$.
3) $a_E(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(a_F(B))$ para todo $B \subseteq F$.

Demostración En primer lugar vamos a ver que las dos últimas condiciones son equivalentes. Para todo $B \subseteq F$, se tiene que:

$$\begin{aligned} f^{-1}(i_F(B)) &= (f^{-1}(i_F(B)^c))^c = (f^{-1}(a_F(B^c)))^c \subseteq (a_E(f^{-1}(B^c)))^c \\ &= (a_E(f^{-1}(B)^c))^c = i_E(f^{-1}(B)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_E(f^{-1}(B)) &= ((a_E(f^{-1}(B)))^c)^c = (i_E(f^{-1}(B)^c))^c = (i_E(f^{-1}(B^c)))^c \\ &\subseteq (f^{-1}(i_F(B^c)))^c = (f^{-1}(a_F(B)^c))^c = f^{-1}(a_F(B)) \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene por definición que $f^{-1}(i_F(B)) = \{x \in E : B \in \mathcal{N}(f(x))\}$ y que $i_E(f^{-1}(B)) = \{x \in E : f^-1(B) \in \mathcal{N}(x)\}$, veamos entonces ahora que las dos primeras condiciones son equivalentes.

Como $f^{-1}(i_F(B)) \subseteq i_E(f^{-1}(B))$ para todo $B \subseteq F$ por las igualdades de arriba, se tiene que esto es equivalente a que para todo $x \in f^{-1}(i_F(B))$ se tenga que $B \in \mathcal{N}(f(x))$ implica $f^{-1}(B) \in \mathcal{N}(x)$, es decir, que f es continua. ❙

Además de estas tres equivalencias, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.2.1 Sean (E, a_E) y (F, a_F) dos espacios pretopológicos, entonces una función $f : (E, a_E) \longrightarrow (F, a_F)$ es continua si y solo si para todo a_F-abierto $B \subseteq F$, se tiene que $f^{-1}(B)$ es un a_E-abierto.

Demostración Supongamos que f es continua. Si $B \subseteq F$ es un a_F-abierto, entonces $i_F(B) = B$. Por el teorema anterior, se tiene que $f^{-1}(B) = f^{-1}(i_F(B)) \subseteq i_E(f^{-1}(F))$. Como para todo $A \subseteq E$ se tiene que $i_E(A) \subseteq A$, entonces $f^{-1}(B) = i_E(f^{-1}(B))$, por lo que $f^{-1}(B)$ es un a_E-abierto.

Recíprocamente, como $\forall B \subseteq F$, $i(B)$ es un a_F-abierto, entonces por hipótesis $f^{-1}(i(B))$ es un a_E-abierto. Además, como $i(B) \subseteq B$ se tiene que $f^{-1}(i(B)) \subseteq f^{-1}(B)$, siendo $f^{-1}(i(B))$ un a_E-abierto. Sin embargo, sabemos que existe algún a_E-abierto A tal que $A = i^k(f^{-1}(B))$ para algún $k \in \mathbb{N}$, que verifica que $f^{-1}(B) \subseteq A$. Pero como $i^k(f^{-1}(B)) \subseteq i(f^{-1}(B))$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $f^{-1}(i(B)) \subseteq A \subseteq i(f^{-1}(B))$. En consecuencia, f es continua. ❙

A continuación introducimos la propiedad de preservar la pseudoclausura, que a simple vista parece equivalente a la continuidad pero que veremos que no.

Definición 2.2.3 Sean (E, a_E) y (F, a_F) dos espacios pretopológicos. Se dice que $f : (E, a_E) \longrightarrow (F, a_F)$ *preserva la pseudoclausura* si para todo $A \subseteq E$ se tiene que $f(a_E(A)) \subseteq a_F(f(A))$.

Veamos en los siguientes ejemplos cómo la función identidad y la composición de funciones verifican ambas propiedades.

Observación 2.2.1 La función identidad $id : (E, a) \longrightarrow (E, a)$ preserva la pseudoclausura y es continua, ya que $id(a(A)) = a(A) = a(id(A))$.

Observación 2.2.2 Sean $f : (E, a_E) \longrightarrow (F, a_F)$ y $g : (F, a_F) \longrightarrow (G, a_G)$ funciones que conservan la pseudoclausura y son continuas. Entonces, la composición de f con g, $h = g(f) : (E, a_E) \longrightarrow (G, a_G)$ también conserva la pseudoclausura y es continua, ya que para todo $A \subseteq E$ y todo $B \subseteq G$ se tiene que:

$$h(a_E(A)) = g(f(a_E(A))) \subseteq g(a_F(f(A))) \subseteq a_G(g(f(A))) = a_G(h(A))$$

$$a_E(h^{-1}(B)) = a_E(f^{-1}(g^{-1}(B))) \subseteq f^{-1}(a_F(g^{-1}(B))) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(a_G(B))) = h^{-1}(a_G(B))$$

Sin embargo, en el siguiente ejemplo vamos a comprobar cómo ambas propiedades no son siempre equivalentes.

Ejemplo 2.2.1 Sea (E, a) un espacio pretopológico donde $E = \{x, y, z\}$ y a está definida por:

A	$\emptyset$	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{z\}$	$\{x, y\}$	$\{x, z\}$	$\{y, z\}$	E
$a(A)$	$\emptyset$	$\{x\}$	$\{y, z\}$	$\{x, z\}$	E	$\{x, z\}$	E	E

Y sea (E, a') con a' definida por:

A	$\emptyset$	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{z\}$	$\{x, y\}$	$\{x, z\}$	$\{y, z\}$	E
$a'(A)$	$\emptyset$	$\{x, y\}$	$\{y, z\}$	$\{z\}$	E	E	$\{y, z\}$	E

Si definimos ahora una función $f : (E, a) \longrightarrow (E, a')$ tal que $f(x) = z$, $f(y) = x$ y $f(z) = z$, veamos que es continua, es decir que $f^{-1}(B)$ es un a-abierto para todo a'-abierto $B \subseteq E$.
Los a'-abiertos en E son $\{x\}$ y $\{x, y\}$, aquellos que verifican que $A = i'(A) = (a'(A^c))^c$.
Los dos verifican que $f^{-1}(\{x\}) = f^{-1}(\{x, y\}) = \{y\}$, que es un a-abierto. Por lo que f es continua.
Sin embargo, como $f(a(\{y\})) \nsubseteq a'(f(\{y\}))$, f no preserva la pseudoclausura.

Observación 2.2.3 Como podemos ver en el Ejemplo 2.2.3, la continuidad de f no implica que preserve la pseudoclausura.

Como adelantábamos en la introducción de esta sección, basta pedir que ambos espacios sean de tipo $\mathcal{V}$ para que ambas propiedades sean equivalentes.

Teorema 2.2.2 Sean (E, a_E) y (F, a_F) dos V-espacios. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1) $f : (E, a_E) \longrightarrow (F, a_F)$ es continua.
2) $f : (E, a_E) \longrightarrow (F, a_F)$ preserva la pseudoclausura.
3) Para todo $A \in E$ y para todo $B \in F$, si $f(A) \subseteq B$ entonces $f(a_E(A)) \subseteq a_F(B)$.

Demostración En primer lugar, vamos a suponer la tercera condición. Por un lado veamos que f es continua. Sea $A = f^{-1}(B)$, entonces $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. Por (3) se tiene que $f(a_E(f^{-1}(B))) \subseteq a_F(B)$ y llegamos a que f es continua ya que

$$a_E(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(f(a_E(f^{-1}(B)))) \subseteq f^{-1}(a_F(B)).$$

Sea ahora $B = f(A)$, entonces como $f(A) \subseteq f(A)$, se tiene que $f(a_E(A)) \subseteq a_F(f(A))$ y esto es equivalente a que f preserve la pseudoclausura.
Supongamos ahora que f es continua y que $f(A) \subseteq B$. Veamos que se verifica (3):

$$\begin{aligned} A &\subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(B) \\ a_E(A) &\subseteq a_E(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(a_F(B)) \\ f(a_E(A)) &\subseteq f(f^{-1}(a_F(B))) \subseteq a_F(B) \end{aligned}$$

Por último, suponemos que f preserva la pseudoclausura y que $f(A) \subseteq B$. En tal caso $f(a_E(A)) \subseteq a_F(f(A)) \subseteq a_F(B)$, por ser a isótona. En consecuencia, se verifica también (3).

La noción de continuidad, nos permite definir un concepto análogo al de homeomorfismo en espacios pretopológicos, que por abuso del lenguaje llamaremos también homeomorfismo.

Definición 2.2.4 Sean (E, a_E) y (F, a_F) dos espacios pretopológicos. Se dice que $f : (E, a_E) \longrightarrow (F, a_F)$ es un *homeomorfismo* si es una función continua y biyectiva con f^{-1} continua.
En tal caso, se dice que E y F son *homeomorfos.*

Definición 2.2.5 Se dice que una propiedad es *topológica* si al verificarla un espacio pretopológico (E, a) también la verifican todos los espacios homeomorfos a (E, a).

Teorema 2.2.3 Sean (E, a_E) y (F, a_F) dos V-espacios y $f : (E, a_E) \longrightarrow (F, a_F)$ una función biyectiva, entonces f es un homeomorfismo si y solo si para cada $A \subseteq E$, $f(a_E(A)) = a_F(f(A))$.

Demostración Es consecuencia inmediata del Teorema 2.2.2. y de la definición de homeomorfismo.

2.3 Subconjuntos y subespacios pretopológicos

En esta sección, consideramos un espacio pretopológico (E, a) y un subconjunto $A \subseteq E$ no vacío. La cuestión que nos planteamos es cómo dotar a A de una estructura pretopológica, es decir, cómo definir el concepto de subespacio pretopológico. Tenemos dos posibilidades.

La primera de ellas consiste en trasladar los conceptos de proximidad al subconjunto A. Esto es posible haciendo continua la función identidad que va de A a E. Este procedimiento es muy conocido en topología y nos lleva al concepto de subespacio inducido.

La segunda posibilidad consiste en "olvidarnos" de $E - A$ mientras que se va definiendo la estructura pretopológica sobre E. Cuando la estructura pretopológica definida en E se basa en una relación binaria, coincide con el concepto de subgrafo. En pretopología, utilizaremos el concepto de subespacio restringido.

Pretopología inducida

Definición 2.3.1 Sea (E, a) un espacio pretopológico y $A \subseteq E$. Se dice que $(A, a_{|A})$ es el *subespacio pretopológico inducido por* (E, a) si $(A, a_{|A})$ es la estructura más fina que hace continua la función identidad. En tal caso, se dice que $a_{|A}$ es la pseudoclausura inducida por a en A.

Ejemplo 2.3.1 Consideramos $E = \mathbb{Z}^2$ y para cualquier $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ se define:

$$\mathcal{B}(x, y) = \{(x - 1, y), (x, y), (x + 1, y), (x, y - 1), (x, y + 1)\}$$

Entonces para todo $A \subseteq \mathbb{Z}^2$, $a(A) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : \mathcal{B}(x, y) \cap A \neq \emptyset\}$. Sea ahora $F \subseteq \mathbb{Z}^2$, entonces se tiene que $a_{|F}(B) = \{(x, y) \in F : \mathcal{B}(x, y) \cup B \neq \emptyset\}$, para todo $B \subseteq F$. Siendo $(F, a_{|F})$ un subespacio pretopológico inducido por (E, a).

En las siguientes proposiciones aparecen algunas propiedades importantes de los subespacios pretopológicos inducidos.

Proposición 2.3.1 Sea (E, a) un espacio pretopológico, $A \subseteq E$ y $a_{|A}$ la pseudoclausura inducida por a en A. Entonces se tiene:
1) $a_{|A}(B) = a(B) \cap A, \forall B \subseteq A$.
2) $i_{|A}(B) = i(B \cup (E - A)) \cap A, \forall B \subseteq A$.

Demostración 1) Sea Id la función identidad que va de A a E. Id es una aplicación continua en A dotada de una estructura pretopológica $s' = (a', i')$ si y solo si para todo $B \subseteq A$, $Id(a'(B)) \subseteq a(Id(B))$. En tal caso, para todo $B \subseteq A$, $A \cap Id(a'(B)) \subseteq A \cap a(Id(B))$. Pero como Id es la función identidad, realmente se tiene que para todo $B \subseteq A$, $a'(B) \subseteq A \cap a(B)$.
Sin embargo, la pretopología menos fina está definida por una pseudoclausura lo más grande posible, es decir, por una pseudoclausura $a_{|A}$ tal que para todo $B \subseteq A$, $a_{|A}(B) = A \cap a(B)$.

2) Por definición se tiene que $i_{|A}(B) = (a_{|A}(B^c \cap A))^c \cap A$. Pero $a_{|A}(B^c \cap A) = a(B^c \cap A) \cap A$, entonces $(a_{|A}(B^c A))^c = (a(B^c \cap A))^c \cup A^c$.
Como $(a(B^c \cap A))^a = i((B^c \cap A)^c) = i(B \cup A^c) = i(B \cup (E - A))$. Entonces, $I_{|A}(B) = (i(B \cup (E - A)) \cup A^c) \cap A = i(B \cup (E - A)) \cap A$.

▮

Proposición 2.3.2 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$- espacio, entonces $(A, a_{|A})$ también lo es. Además, si $x \in A$, la familia de $a_{|A}$- entornos de x en A es $\mathcal{N}_{|A}(x) = \{N \cap A \,:\, N \in \mathcal{N}(x)\}$.

Demostración Por definición, es obvio que $(A, a_{|A})$ es un $\mathcal{V}$- espacio.
Supongamos ahora que $M \in \mathcal{N}_{|A}(x)$, entonces $x \in i_{|A}(M)$, lo que implica que $x \in A$ y $x \in i(M \cup (E - A))$. Si $M' = M \cup (E - A)$, se tiene que $M' \in \mathcal{N}(x)$ y como $M = M' \cap A$, entonces $M \in \{N \cap A \,:\, N \in \mathcal{N}(x)\}$.

Recíprocamente, veamos que si $x \in A$ y $N \in \mathcal{N}(x)$, entonces $N \cap A \in \mathcal{N}_{|A}(x)$.
Se tiene que $i_{|A}(N \cap A) = i\,((N \cap A) \cup (E - A)) \cap A = i\,((N \cap A) \cup A^c) \cap A = i\,((N \cup A^c) \cap (A \cup A^c)) \cap A = i\,((N \cup A^c) \cap E) \cap A = i\,(N \cup A^c) \cap A$.
Como $x \in i(N)$ y (E, a) es un $\mathcal{V}$- espacio, entonces $x \in i(N \cup A^c)$. Y como $x \in A$, se tiene que $x \in i_{|A}(N \cap A)$.

▮

Proposición 2.3.3 Sea (E, a) es un $\mathcal{V}_D$- espacio (un $\mathcal{V}_S$- espacio o un espacio topológico) entonces $(A, a_{|A})$ también lo es.

Demostración Por las definiciones de $\mathcal{V}_D$- espacios y de $\mathcal{V}_S$- espacios, se comprueba directamente las dos primeras implicaciones. Veamos ahora que si a es idempotente, $a_{|A}$ también lo es.

Por un lado, es obvio que se verifica que $a_{|A}(a_{|A}(B)) \subseteq a_{|A}(B)$. Tenemos además que $a_{|A}(a_{|A}(B)) = a_{|A}(a(B) \cap A) = a(a(B) \cap A) \cap A$. Como $a(B) \cap A \subseteq a(B)$, entonces $a(a(B) \cap A) \subseteq a(a(B)) = a(B)$. Por tanto, $a_{|A}(a_{|A}(B)) \subseteq a(B) \cap A = a_{|A}(B)$.

▮

Proposición 2.3.4 Sea (E, a_E) y (F, a_F) dos $\mathcal{V}$-espacios y sea $A \subseteq E$. Si la función $f : E \longrightarrow F$ es continua, entonces $f_{|A} : A \longrightarrow F$ es continua.

Demostración Sea $B \subseteq F$. Se tiene que $a_{|A}(f_{|A}^{-1}(B)) = a_{|A}(f_{|A}^{-1}(B) \cap A)$. Como E es un $\mathcal{V}$-espacio, $a_{|A}(f^{-1}(B) \cap A) \subseteq a_{|A}(f^{-1}(B)) \cap a_{|A}(A) = a_E(f^{-1}(B)) \cap A \cap a_{|A}(A) \subseteq f^{-1}(a_F(B)) \cap A \cap a_{|A}(A) = f_{|A}^{-1}(a_F(B)) \cap a_{|A}(A) \subseteq f_{|A}^{-1}(a_F(B))$. En consecuencia, $f_{|A}$ es continua.

Proposición 2.3.5 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio, $A \subseteq E$ y $(A, a_{|A})$ un subespacio pretopológico inducido (de tipo $\mathcal{V}$). Entonces:

1) Si K es un a-cerrado (o un a-abierto) en E, entonces $K \cap A$ es un $a_{|A}$-cerrado (o un $a_{|A}$-abierto) en A.

2) Si A es un a-cerrado en E y K es un $a_{|A}$-cerrado en A, entonces K es también un a-cerrado en E.

3) Si (E, a) es un $\mathcal{V}_D$-espacio y A es un a-abierto en E, entonces:

- Cualquier $G \subseteq A$ que sea $a_{|A}$-abierto, es a-abierto en E.
- Si $K \subseteq A$ es un $a_{|A}$-cerrado en A, entonces $K \cup (E - A)$ es un a-cerrado en E.

Demostración 1) Sea K un a-cerrado en E, es decir, verifica que $a(K) = K$. Se tiene que $a_{|A}(K \cap A) = a(K \cap A) \cap A \subseteq a(K) \cap a(A) \cap A = a(A) \cap K \cap A$, por ser (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio. Entonces, $a_{|A}(K \cap A) \subseteq K \cap A$, lo que prueba que $K \cap A$ es $a_{|A}$-cerrado, ya que como siempre se da la otra inclusión, se tiene la igualdad $a_{|A}(K \cap A) = K \cap A$.

2) Sea K un conjunto $a_{|A}$-cerrado en A, tenemos $K = a_{|A}(K) = a(K) \cap A$. Como $K \subseteq A$, $a(K) \subseteq a(A)$ y al ser A un a-cerrado en E, podemos escribir $a(K) \subseteq A$. Entonces, $K = a(K) \cap A = a(K)$.

3) Consideremos G un conjunto $a_{|A}$-abierto en A. Entonces, al ser A un a-abierto:

$$G = i_{|A}(G) = i(G \cup A^c) \cap A = i(G \cap A^c) \cap i(A)$$

Además, como (E, a) es un $\mathcal{V}_D$-espacio y $G \subseteq A$ se tiene que:

$$i_{|A}(G) = i((G \cup A^c) \cap A) = i(G \cap A) = i(G)$$

Por otro lado, A es $a_{|A}$-abierto, por lo que $E - A$ es $a_{|A}$-cerrado y entonces $K \cup (E - A)$ es también a-cerrado al ser (E, a) un $\mathcal{V}_D$-espacio.

Proposición 2.3.6 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio, $A \subseteq E$ y $(A, a_{|A})$ un subespacio pretopológico inducido (de tipo $\mathcal{V}$). Denotamos los siguientes conjuntos como:

- $\mathcal{F} = \{H \subseteq E : a(H) = H\}$ la familia de a-cerrados en E.
- $\mathcal{F}_{|A} = \{H \subseteq A : H = A \cap K \text{ con } K \in \mathcal{F}\}$ la familia de a-cerrados en E intersecados con A.
- $\mathcal{F}^0_{|A} = \{H \subseteq A : a_{|A}(H) = H\}$ la familia de $a_{|A}$-cerrados en A.
- $\mathcal{T}_{|A} = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{F}$ la familia de a-cerrados en E contenidos en A.

Entonces, se verifica que $\mathcal{T}_{|A} \subseteq \mathcal{F}_{|A} \subseteq \mathcal{F}^0_{|A}$.

Demostración Sea $H \in \mathcal{T}_{|A}$, entonces $a(H) = H$ y como $H = A \cap H$, entonces $H \in \mathcal{F}_{|A}$. Por el primer apartado de la proposición anterior, podemos decir que si $H \subseteq A$ es a-cerrado en E, H es $a_{|A}$-cerrado en A, por lo que $\mathcal{F}_{|A} \subseteq \mathcal{F}^0_{|A}$.

Generalmente estas tres familias de subconjuntos cerrados no son las mismas. Lo ilustramos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.2 Sea $E = \{a, b, c, d\}$, $A = \{a, b\}$ y la pseudoclausura a en E definida mediante la siguiente tabla:

A	$a(A)$
$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\{b, c\}$
$\{c\}$	$\{b, c\}$
$\{d\}$	$\{d\}$
$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$
$\{a, c\}$	$\{a, b, c\}$
$\{a, d\}$	E

A	$a(A)$
$\{b, c\}$	$\{a, b, c\}$
$\{b, d\}$	E
$\{c, d\}$	E
$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$
$\{a, b, d\}$	E
$\{a, c, d\}$	E
$\{b, c, d\}$	E
E	E

En tal caso se tiene:
$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, b, c\}, E\}$
$\mathcal{F}_{|A} = \{\emptyset, \{a\}, A\}$
$\mathcal{F}^0_{|A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$
$\mathcal{T}_{|A} = \{\emptyset, \{a\}\}$

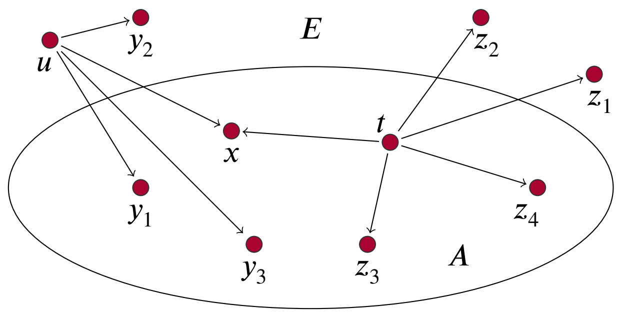
Obviamente se verifica que $\mathcal{T}_{|A} \subseteq \mathcal{F}_{|A} \subseteq \mathcal{F}^0_{|A}$.

Además, este ejemplo también nos sirve para mostrar que en la pretopología inducida la $a_{|A}$-clausura no se obtiene mediante la iteración del operador $a_{|A}$. De hecho, si miramos $\mathcal{F}(\{b\})$, nos damos cuenta que $\mathcal{F}(\{b\}) = \{a, b, c\}$, por lo que $\mathcal{F}(\{b\}) \cap A = \{a, b\}$, mientras que $\mathcal{F}_{|A}(\{b\}) = \{b\}$ pues $a_{|A}(\{b\}) = a(\{b\}) \cap A = \{b\}$. Por tanto, la intersección de la a-clausura con A no se obtiene a partir de la iteración de la pseudoclausura inducida $a_{|A}$.

Pretopología restringida

El concepto de pretopología restringida es bastante diferente al de pretopología inducida. Dado un subconjunto $A \subsetneq E$, consiste en mantener el mismo proceso para definir la pseudoclausura a en A como en E mientras que nos "olvidamos" de $E - A$. De esta manera para restringir una estructura pretopológica (a, i) en un subconjunto A de E podemos fijarnos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.3 Sea (E, a) el espacio pretopológico que aparece en la siguiente figura.



La familia de a-entornos de $x \in E$ está definida por la siguiente base en E:

$$\mathcal{B}(x) = \{\{x, y_1, y_2, y_3\}, \{x, z_1, z_2, z_3, z_4\}\}$$

Consideramos $A = \{x, y_1, y_2, t, z_3, z_4\} \subsetneq E$ y $(A, a_{|A})$ el subespacio inducido por (E, a) en A. La familia de $a_{|A}$-entornos de x está definida por la siguiente base en A:

$$\mathcal{B}_{|A}(x) = \{\{x, y_1, y_3\}, \{x, z_3, z_4\}\}$$

Sin embargo, cuando consideramos el espacio pretopológico restringido a A, (A, a'), tenemos que olvidarnos de los elementos de $E - A$. Como $u \notin A$ entonces $\{x, y_1, y_2, y_3\}$ no aparece, así como z_1 y z_2. En consecuencia, la familia de a'-entornos de x está definida por la siguiente base en A:

$$\mathcal{B}'_{|A}(x) = \{\{x, z_3, z_4\}\}.$$

2.4 Pseudoclausura inducida por relaciones

Definición 2.4.1 Una *relación binaria* R en un conjunto E es un subconjunto del producto $E \times E$. Se usa la notación xRy para referirnos a que el par $(x, y) \in R$.

Definición 2.4.2 Se dice que la relación R en E es *reflexiva* si para cada $x \in E$, se tiene que xRx, o equivalentemente que $\Delta = \{(x, y) \in E \times E \,:\, x = y\} \subseteq R$.
R es *simétrica* si xRy implica yRx y es *asimétrica* si xRy implica $(y, x) \notin R$.
R es *transitiva* si xRy e yRz implican xRz.

Definición 2.4.3 Sea E un conjunto, R una relación en E y $A \subseteq E$, se define la *imagen* de A por R y la *imagen inversa* de A por R como:

$$R(A) = \{y \in E \,:\, \exists x \in A;\ xRy\} = \{y \in E \,:\, R^{-1}(\{y\}) \cap A \neq \emptyset\} = \bigcup_{z \in A} R(\{z\})$$

$$R^{-1}(A) = \{x \in E \,:\, \exists y \in A;\ xRy\} = \{x \in E \,:\, R(\{x\}) \cap A \neq \emptyset\} = \bigcup_{z \in A} R^{-1}(\{z\})$$

Definición 2.4.4 Sea R una relación en E, se define la *pseudoclausura de sucesores inducida por* R en E como la aplicación $a_R : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ dada por:

$$a_R(A) = A \cup R(A), \text{ para cada } A \subseteq E.$$

Dado que a_R verifica las condiciones para ser un operador de pseudoclausura en E, se dice que (E, a_R) es un espacio pretopológico de sucesores.

Definición 2.4.5 Sea R una relación binaria en E, se define la *pseudoclausura de predecesores inducida por* R en E como la aplicación $a^*_R : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ dada por:

$$a^*_R(A) = A \cup R^{-1}(A), \text{ para cada } A \subseteq E.$$

Dado que a^*_R verifica las condiciones para ser un operador de pseudoclausura en E, se dice que (E, a^*_R) es un espacio pretopológico de predecesores.

Observación 2.4.1 Es fácil ver que podemos asociar a cada espacio (E, a_R) un grafo tal que E se representa mediante los vértices del grafo y para cada $A \subseteq E$, $a_R(A) = a_*(A) = A \cup \mathcal{N}(A)$, donde $\mathcal{N}(\{x\})$ es el conjunto se vértices a los que llega x, es decir, los sucesores de x. Por otro lado, se tiene que $a^*_R(A) = A \cup \mathcal{N}^{-1}(A)$, donde $\mathcal{N}^{-1}(\{x\})$ es el conjunto de vértices que llegan a x, es decir, los predecesores de x.

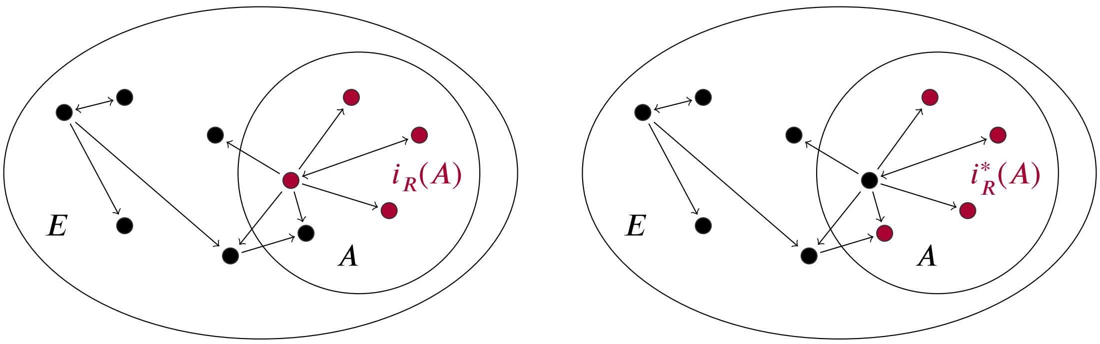
Observación 2.4.2 Si la relación R es simétrica, se tiene que $a_R = a_R^*$. Además, si R es reflexiva se tiene que $a_R = R$ y $a_R^* = R^{-1}$, dado que, en tal caso, $A \subseteq R(A)$ y $A \subseteq R^{-1}(A)$, para todo $A \subseteq E$.

Proposición 2.4.1 Sea R una relación en un conjunto E, los pseudointeriores asociados a a_R y a a_R^* es:

$$i_R(A) = \{y \in A : \text{si } xRy, \text{ entonces } x \in A\}, \text{ para cada } A \subseteq E.$$

$$i_R^*(A) = \{x \in A : \text{si } xRy, \text{ entonces } y \in A\}, \text{ para cada } A \subseteq E.$$

Por tanto, $i_R(A)$ lo forman aquellos elementos de A con los que no están relacionados los elementos de $E - A$ mediante R e $i_R^*(A)$ lo forman aquellos elementos de A que no están relacionados con ningún elemento de $E - A$ mediante R.



Demostración Por la dualidad entre la pseudoclausura y el pseudointerior:

$$\begin{gathered} i_R(A) = E - a_R(E - A) = (a_R(A^c))^c = (A^c \cup \{y \in E : \exists x \in A^c : xRy\})^c = \\ = A \cap \{y \in E : \exists x \in A^c : xRy\}^c = A \cap \{y \in E : \forall x \in A^c : (x, y) \notin R\} = \\ = \{y \in A : \text{si } xRy, \text{ entonces } x \in A\} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} i_R^*(A) = E - a_R^*(E - A) = (a_R^*(A^c))^c = (A^c \cup \{x \in E : \exists y \in A^c : xRy\})^c = \\ = A \cap \{x \in E : \exists y \in A^c : xRy\}^c = A \cap \{x \in E : \forall y \in A^c : (x, y) \notin R\} = \\ = \{x \in A : \text{si } xRy, \text{ entonces } y \in A\} \end{gathered}$$

Proposición 2.4.2 Un espacio pretopológico (E, a) es de tipo $\mathcal{V}_S$ si y solo si existe una relación R tal que $a = a_R$.

Demostración Supongamos que (E, a) es un $\mathcal{V}_S$-espacio, $A \subseteq E$ y R una relación en E tal que xRy si $y \in a(\{x\})$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} y \in a_R(A) &\iff \exists x \in A \text{ tal que } x = y \text{ ó } xRy \\ &\iff \exists x \in A \text{ tal que } x = y \text{ ó } y \in a(\{x\}) \\ &\iff \exists x \in A \text{ tal que } y \in a(\{x\}) \\ &\iff y \in \bigcup_{x \in A} a(\{x\}) \\ &\iff y \in a(A) \end{aligned}$$

Por consiguiente, se tiene que $a = a_R$.
Recíprocamente, si $A \subseteq E$, se tiene que:

$$\begin{aligned} a_R(A) = R(A) \cup A = (\textstyle\bigcup_{x \in A} R(\{x\})) \cup (\textstyle\bigcup_{x \in A} \{x\}) = \\ = \textstyle\bigcup_{x \in A} (R(\{x\}) \cup \{x\}) = \textstyle\bigcup_{x \in A} a_R(\{x\}) \end{aligned}$$

En consecuencia, se tiene que a_R es completamente aditiva, por lo que (E, a_R) es un $\mathcal{V}_S$-espacio.

Además, si le pedimos ciertas propiedades a la relación R se tiene que (E, a_R) puede llegar a ser un espacio topológico, un espacio T_0 e incluso un T_1.

Proposición 2.4.3 Sea R una relación en un conjunto E, entonces R es una relación transitiva si y solo si a_R es idempotente, es decir, (E, a_R) es un espacio topológico.

Demostración Sea R una relación transitiva en E y $A \subseteq E$. Se tiene que:

$$a_R^2(A) = a_R(A) \cap R(a_R(A)) = A \cap R(A) \cap R(R(A))$$

Entonces para probar que $a_R^2 = a_R$, basta ver que $R^2(A) \subseteq R(A)$. Sabemos que $z \in R^2(A)$ si y solo si $\exists y \in R(A)$ tal que yRz. Además, $y \in R(A)$ si y solo si $\exists x \in A$ tal que xRy. Como R es transitiva, xRz, por lo que $z \in R(A)$ y en consecuencia, $a_R^2 = a_R$.
Recíprocamente, sea $a_R^2 = a_R$. Si xRy e yRz, entonces $y \in a_R(x)$ e $z \in a_R(x)$, luego $z \in a_R(y) \subseteq a_R^2(x) = a_R(x)$. Por lo tanto, $z \in a_R(x)$, lo que implica que xRz.

Proposición 2.4.4 Sea R una relación en E transitiva y asimétrica, entonces (E, a_R) es un espacio topológico T_0.

Demostración Dado que R es un relación transitiva, (E, a_R) es un espacio topológico. Sean $x, y \in E$ con $x \neq y$. Como R es asimétrica, no se puede tener a la vez que xRy e yRx. Supongamos que $(x, y) \notin R$ y como $x \neq y$, entonces $y \notin N_x$ con $N_x \in \mathcal{N}(x)$. Por tanto N_x es un a_R-abierto que contiene a x pero no a y. Recíprocamente, si $(y, x) \notin R$, existe un a_R- abierto $N_y \in \mathcal{N}(y)$ que contiene a y y no a x. Como uno de los dos casos se debe cumplir, se tiene que (E, a_R) es un T_0.

Proposición 2.4.5 Si el espacio topológico (E, a_R) es T_1 entonces la relación $R = \Delta = \{(x, y) \in E \times E : x = y\}$.

Demostración Veamos que si existe al menos un par $(x, y) \in R$ con $x \neq y$, entonces (E, a_R) no es un espacio topológico T_1.
Como xRy con $x \neq y$, entonces $y \in N_x$, con $N_x \in \mathcal{N}(x)$. Pero N_x es un subconjunto de todos los a_R-abiertos conteniendo a x. Por tanto, no existe ningún a_R-abierto conteniendo a x pero no a y, por lo que el espacio no puede ser T_1.

Sea E un conjunto y $(R_i)_{i \in I}$ un conjunto de relaciones en E, entonces cada R_i induce una pseudoclausura en E, a_{R_i}. Sin embargo, podemos definir una nueva pseudoclausura inducida por el conjunto de relaciones.

Definición 2.4.6 Sea $(R_i)_{i \in I}$ un conjunto de relaciones en un conjunto E. Se define la *pseudoclausura inducida por* $(R_i)_{i \in I}$ *en* E como la intersección de las pseudoclausuras a_{R_i}, es decir:

$$a_{R_I}(A) = \bigcap_{i \in I} a_{R_i}(A) = A \cup \{x \in E : R_i(x) \cap A \neq \emptyset, \forall i \in I\}.$$

Observación 2.4.3 Como cada a_{R_i} es isótona, a_{R_I} también lo es. Sin embargo, aunque cada a_{R_i} sea completamente aditiva, no se puede asegurar que a_{R_I} sea ni tan siquiera aditiva. Por ello, solo se puede garantizar que (E, a_{R_I}) es un $\mathcal{V}$-espacio.

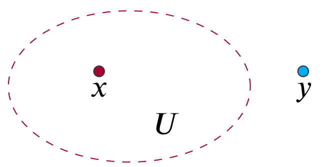
3 Propiedades de separación

En esta sección vamos a estudiar las propiedades de separación de los $\mathcal{V}$-espacios. En primer lugar, haremos un recordatorio de los axiomas de separación para espacios topológicos y a continuación estudiaremos las definiciones análogas a los $\mathcal{V}$-espacios.

3.1 Axiomas de separación en espacios topológicos

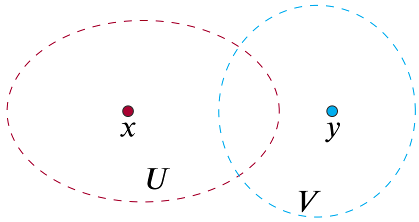
Definición 3.1.1 Un espacio topológico $(E, \mathcal{T})$ se llama T_0 si para cualquier par de puntos $x, y \in E$ existe un abierto $U \subset E$ que contiene uno de los puntos y no contiene el otro punto.

Equivalentemente, $(E, \mathcal{T})$ es T_0 si x, y son elementos del espacio E tales que la clausura de x y la clausura de y sean iguales entonces $x = y$.

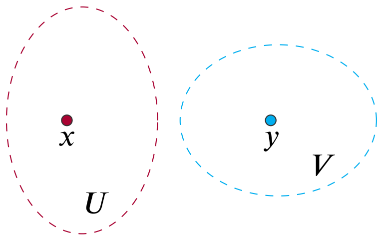


Definición 3.1.2 Un espacio topológico $(E, \mathcal{T})$ se dice T_1 si para cualquier par de puntos x, y de E hay un par de conjuntos abiertos U, V tal que $x \in U$ pero $x \notin V$, y además $y \in V$ pero $y \notin U$.

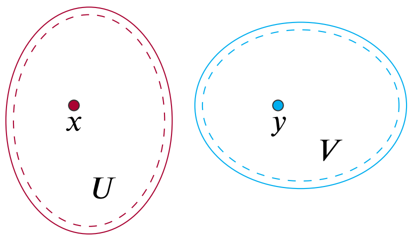
Una equivalencia importante es que $(E, \mathcal{T})$ es T_1 si y solo si los subconjuntos de E formados por un único punto son cerrados.



Definición 3.1.3 Un espacio topológico $(E, \mathcal{T})$ es de Hausdorff o T_2 si para cualquier par de puntos x, y en E existe un par de abiertos disjuntos que contiene uno a x y el otro a y.

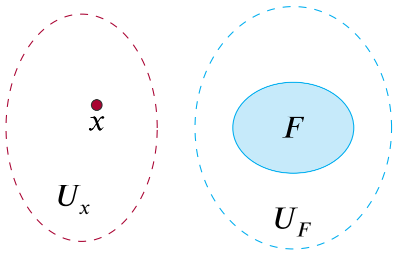


Definición 3.1.4 Un espacio topológico $(E, \mathcal{T})$ es de Urysohn si para cualquier par de puntos x, y en E existen un par de abiertos disjuntos que contiene uno a x y otro a y tales que la intersección de sus clausuras es vacía.

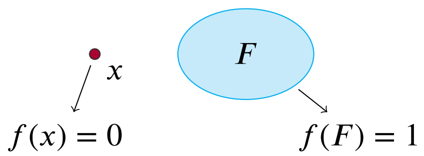


Definición 3.1.5 Un espacio topológico $(E, \mathcal{T})$ es regular si para cada punto $x \in E$ y cualquier cerrado $F \subset E$ tal que $x \notin F$. Entonces existen entornos U_x y U_F tales que su intersección es vacía.

Un espacio topológico $(E, \mathcal{T})$ es T_3 si es T_1 y regular, es decir, podemos separar puntos de cerrados.

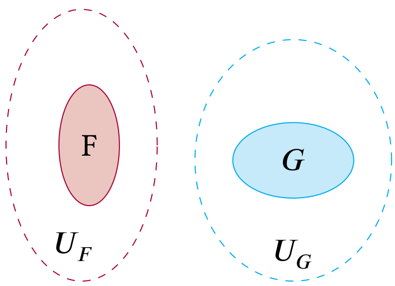


Definición 3.1.6 Un espacio topológico $(E, \mathcal{T})$ es completamente regular si para cada punto $x \in E$ y cualquier cerrado $F \subset E$ tal que $x \notin F$ existe una función continua $f : E \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(F) = 1$.



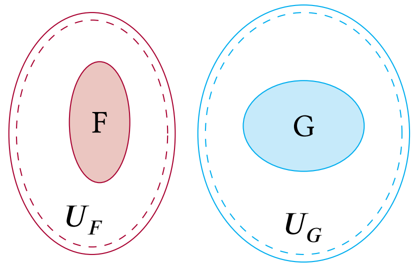
Un espacio topológico $(E, \mathcal{T})$ es $T_{3\frac{1}{2}}$ si es T_1 y completamente regular.

Definición 3.1.7 Un espacio topológico $(E, \mathcal{T})$ es normal si para cada par de cerrados $F, G \subset E$ con intersección vacía existen unos entornos que los contengan U_F y U_G tal que su intersección sea vacía.



Un espacio topológico $(E, \mathcal{T})$ es T_4 si es T_1 y es normal, es decir, podemos separar todos los cerrados del espacio.

Definición 3.1.8 Un espacio topológico $(E, \mathcal{T})$ es completamente normal si para cada par de cerrados $F, G \subset E$ con intersección vacía, existen unos entornos que los contengan U_F y U_G con $\overline{U}_F \cap \overline{U}_G = \emptyset$.



Un espacio topológico $(E, \mathcal{T})$ es T_5 si es T_1 y es completamente normal.

Proposición 3.1.1 Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio topológico, entonces se tienen las siguientes implicaciones:
$T_5\,(CN+T_1) \Rightarrow T_4\,(N+T_1) \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}\,(CR+T_1) \Rightarrow T_3\,(R+T_0) \Rightarrow T_{2\frac{1}{2}} \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$

Demostración Las demostraciones de cada una de estas implicaciones aparecen detalladas en [16].

3.2 Separación por puntos

Hemos de tener en cuenta que a pesar de que utilicemos la misma notación, las definiciones no son equivalentes a las que acabamos de estudiar en la sección anterior, tan solo serán equivalentes cuando el espacio sea topológico.

Espacios T_0 y T_1

Definición 3.2.1 Un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) se dice T_0 si para todo par de puntos distintos $x, y \in E$, se tiene que $x \notin a(\{y\})$ o $y \notin a(\{x\})$.

Definición 3.2.2 Un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) se dice T_1 si para todo par de puntos distintos $x, y \in E$ se tiene que $x \notin a(\{y\})$ y que $y \notin a(\{x\})$.

Proposición 3.2.1 Un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) es T_1 si y solo si para todo $x \in E$ se tiene que $a(\{x\}) = \{x\}$, es decir, si $\{x\}$ es un a-cerrado.

Demostración Sea (E, a) T_1 y supongamos que $\{x\}$ no es un a-cerrado, es decir, $a(\{x\}) = \{x\}$. En tal caso, $\exists y \in E$ tal que $y \in a(\{x\})$ y esto es una contradicción.

Recíprocamente, si $\forall x \in E$, $\{x\}$ es un a-cerrado, entonces para todo $x, y \in E$, $a(\{x\}) = \{x\}$ y $a(\{y\}) = \{y\}$, por lo que $y \notin a(\{x\})$ y $x \notin a(\{y\})$, lo que implica que (E, a) es T_1.

Observación 3.2.1 Obviamente, si (E, a) es T_1, entonces es T_0. La otra implicación no es cierta en general, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.1 Sea (E, a) un espacio pretopológico con $E = \{x, y, z\}$ y a definida por:

A	$\emptyset$	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{z\}$	$\{x, y\}$	$\{x, z\}$	$\{y, z\}$	E
$a(A)$	$\emptyset$	$\{x, y\}$	$\{y, z\}$	$\{x, z\}$	E	E	E	E

En este caso, el espacio es T_0 pero no T_1 ya que por ejemplo, $x \notin a(y)$ pero $y \in a(x)$.

Espacios T_2 o de Hausdorff

Definición 3.2.3 Un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) se dice T_2 o de Hausdorff si para cada par de puntos distintos $x, y \in E$, existe $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $y \notin a(U)$.

Lema 3.2.1 Sea (E, a) un espacio pretopológico, $x \in E$ y $A \subseteq E$. Entonces $x \in a(A)$ si y solo si $A^c \notin \mathcal{N}(x)$.

Demostración Se tiene que $x \in a(A) = a((A^c)^c)$ si y solo si $A^c \in \{N : x \in a(N^c)\}$ y esto es equivalente a decir:

$$A^c \notin \{N : x \notin a(A^c)\} = \{N : x \in (N^c)^c\} = \{N : x \in i(N)\} = \mathcal{N}(x)$$

Proposición 3.2.2 Un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) es T_2 si para cada par de puntos distintos $x, y \in E$, existen $U \in \mathcal{N}(x)$ y $V \in \mathcal{N}(y)$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

Demostración Sean x e y dos puntos distintos de E. Entonces, (E, a) es un T_2 si existe $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $y \notin a(U)$ y esto ocurre si y solo si existe $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $U^c \in a(U)$, por el lema anterior. Esto es equivalente a que existan $U \in \mathcal{N}(x)$ y $V \in \mathcal{N}(y)$ tales que $y \in i(V) \subseteq i(U^c)$ y esto ocurre si y solo si existen $U \in \mathcal{N}(x)$ y $V \in \mathcal{N}(y)$ tales que $V \subseteq U^c$.

Finalmente, vemos que esto último es equivalente a que existan $U \in \mathcal{N}(x)$ y $V \in \mathcal{N}(y)$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

Proposición 3.2.3 Si (E, a) es T_2, entonces es T_1.

Demostración Supongamos que (E, a) no es T_1, entonces $\exists x, y \in E$ tales que $y \in a(\{x\})$. En consecuencia, si $U \subseteq E$ es un a-abierto que contiene a x, se tiene que $y \in a(x) \subseteq a(U)$, por lo que (E, a) no es T_2.

Proposición 3.2.4 Si (E, a) es T_2, entonces todo subespacio de (E, a) es T_2.

Demostración Sea $A \subseteq E$ y como (E, a) es T_2, para cada par de puntos distintos $x, y \in A$ existen a-abiertos U, V tales que $x \in U$ pero $y \notin a(U)$ y que $y \in V$ pero $x \notin a(V)$. Entonces $A \cap U$ y $A \cap V$ son $a_{|A}$-abiertos en A tales que $x \in A \cap U$ e $y \in A \cap V$ y además $x \notin A \cap a(A \cap V)$ e $y \notin A \cap a(A \cap U)$, lo que implica que $(A, a_{|A})$ es T_2.

Observación 3.2.2 Es fácil ver que si (E, a) es T_1 (resp. T_0), entonces todo subespacio de (E, a) es T_1 (resp. T_0).

Espacios $T_{2\frac{1}{2}}$ o de Urysohn

Definición 3.2.4 Un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) se dice que es $T_{2\frac{1}{2}}$ o un espacio de Urysohn si para cada par de puntos distintos $x, y \in E$, existen $U, V \subseteq E$ a-abiertos con $x \in U$ e $y \in V$ tales que $a(U) \cap a(V) = \emptyset$.

Proposición 3.2.5 Si (E, a) es un espacio de Urysohn, entonces todo subespacio de (E, a) es un espacio de Urysohn.

Demostración Sea $A \subseteq E$ y como (E, a) es $T_{2\frac{1}{2}}$, para cada par de puntos distintos $x, y \in A$ existen a-abiertos U, V tales que $x \in U$, $y \in V$ y $a(U) \cap a(V) = \emptyset$.

Entonces $A \cap U$ y $A \cap V$ son $a_{|A}$-abiertos en A tales que $x \in A \cap U$, $y \in A \cap V$ y $A \cap a(A \cap U) \cap a(A \cap V) = \emptyset$, lo que implica que $(A, a_{|A})$ es $T_{2\frac{1}{2}}$.

Proposición 3.2.6 Si (E, a) es $T_{2\frac{1}{2}}$ entonces es T_2.

Demostración Si tenemos que para cada par de puntos $x, y \in E$, existen $U, V \subseteq E$ a-abiertos con $x \in U$ e $y \in V$ tales que $a(U) \cap a(V) = \emptyset$, como $U \subseteq a(U)$ y $V \subseteq a(V)$, entonces $U \cap V = \emptyset$, lo que implica que (E, a) es T_2.

Proposición 3.2.7 Los axiomas T_0, T_1, T_2 y $T_{2\frac{1}{2}}$ son propiedades topológicas para cualquier $\mathcal{V}$-espacio.

Demostración Sean (E, a_E) y (F, a_F) dos $\mathcal{V}$-espacios y $f : (E, a_E) \longrightarrow (F, a_F)$ un homeomorfismo:

• Si (E, a_E) es T_0, entonces para $x \neq y$ en F, se tiene que $f^{-1}(x) \neq f^{-1}(y)$ en E. Por lo que $f^{-1}(y) \notin a_E(f^{-1}(x))$ o $f^{-1}(x) \notin a_E(f^{-1}(y))$.

Por el Teorema 2.2.2, $f(f^{-1}(y)) = y \notin f(a_E(f^{-1}(x))) = a_F(f(f^{-1}(x))) = a_F(x)$ o se tiene que $f(f^{-1}(x)) = x \notin f(a_E(f^{-1}(y))) = a_F(f(f^{-1}(y))) = a_F(y)$, lo que implica que (F, a_F) es T_0.

• Supongamos que (E, a_E) es T_1. Sea $y \in F$, entonces se tiene que $f^{-1}(y) \in E$. Por la Proposición 3.2.1, $a_E(f^{-1}(y)) \subseteq f^{-1}(y)$. Igualmente, por el Teorema 2.2.2 se tiene que

$a_F(y) = a_F(f(f^{-1}(y))) = f(a_E(f^{-1}(y))) \subseteq f(f^{-1}(y)) = \{y\}$, lo que implica que (F, a_F) es T_1.

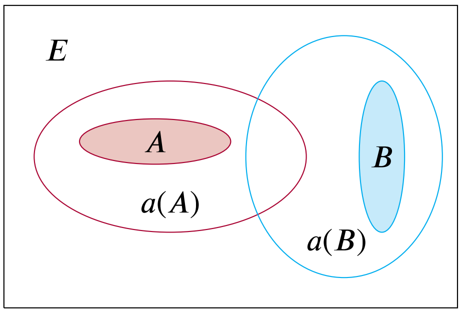
• Si (E, a_E) es T_2, entonces para $x \neq y$ en F, se tiene que $f^{-1}(x) \neq f^{-1}(y)$ en E. Por lo que existen $U \in \mathcal{N}(f^{-1}(x))$ y $V \in \mathcal{N}(f^{-1}(y))$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Entonces $f(U) \in \mathcal{N}(x)$ y $f(V) \in \mathcal{N}(y)$ tales que $f(U) \cap f(V) = \emptyset$, por lo que (F, a_F) es T_2.

• Si (E, a_E) es $T_{2\frac{1}{2}}$, entonces para cada $x, y \in F$ distintos, existen $U \in \mathcal{N}(f^{-1}(x))$ y $V \in \mathcal{N}(f^{-1}(y))$ tales que $a_E(U) \cap a_E(V) = \emptyset$. Entonces se tiene que $f(U) \in \mathcal{N}(x)$ y $f(V) \in \mathcal{N}(y)$. Finalmente, por el Teorema 2.2.3, se verifica que:
$f(a_E(U)) \cap f(a_E(V)) = a_F(f(U)) \cap a_F(f(V)) = \emptyset$, por lo que (F, a_F) es $T_{2\frac{1}{2}}$.

3.3 Separación superior en $\mathcal{V}$-espacios

Separación en conjuntos

Definición 3.3.1 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio y $A, B \subset E$. Se dice que A y B están *débilmente separados* si $a(A) \cap B = A \cap a(B) = \emptyset$.



Proposición 3.3.1 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio. $A, B \subset E$ están débilmente separados si y solo si existen $U \in \mathcal{N}(A)$ y $V \in \mathcal{N}(B)$ tales que $A \cap V = U \cap B = \emptyset$.

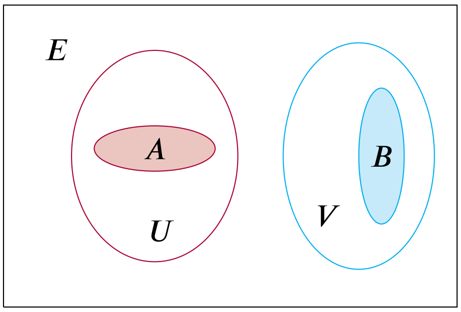
Demostración Supongamos que A y B están débilmente separados. Se tiene que $a(A) \cap B = \emptyset$ si y solo si $B \subseteq (a(A))^c = i(A^c)$, es decir, $A^c \in \mathcal{N}(B)$. En consecuencia, existe $V \in \mathcal{N}(B)$ tal que $A \cap V = \emptyset$. Análogamente, se tiene que $A \cap a(B) = \emptyset$ si y solo si $B^c \in \mathcal{N}(A)$, es decir, que existe $U \in \mathcal{N}(A)$ con $U \cap B = \emptyset$.

Recíprocamente, se tiene que existen U y V tales que $A \subseteq i(U)$, $B \subseteq i(V)$, $A \cap V = \emptyset$ y $U \cap B = \emptyset$. Como $A \cap V = \emptyset$, $V \subseteq A^c$, lo que implica que $B \subseteq i(V) \subseteq i(A^c)$. En consecuencia, $(i(A)^c)^c = a(A) \subseteq B^c$, por lo que $a(A) \cap B = \emptyset$. Análogamente se tiene que $A \cap a(B) = \emptyset$, por lo que A y B están débilmente separados.

Proposición 3.3.2 Sean (E, a_E) y (F, a_F) dos espacios pretopológicos y una función continua $f : (E, a_E) \longrightarrow (F, a_F)$. Si $A, B \subseteq F$ están débilmente separados, entonces $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ están débilmente separados en E.

Demostración Sean $A, B \subseteq F$ débilmente separados. Como $a(A) \cap B = \emptyset$, entonces $f^{-1}(a(A)) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. La continuidad implica que $a(f^{-1}(A)) \subseteq f^{-1}(a(A))$, por lo que $a(f^{-1}(B)) \cap f^{-1}(A) = \emptyset$. Análogamente, se tiene que $a(B) \cap A = \emptyset$, implica que $a(f^{-1}(B)) \cap f^{-1}(A) = \emptyset$ y por definición, se tiene que $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ están débilmente separados en E.

Definición 3.3.2 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio y $A, B \subset E$. Se dice que A y B están separados si existen $U \in \mathcal{N}(A)$ y $V \in \mathcal{N}(B)$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

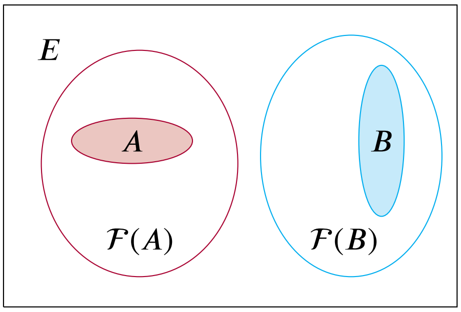


Proposición 3.3.3 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio. $A, B \subset E$ están *separados* si y solo si existen $U \in \mathcal{N}(A)$ y $V \in \mathcal{N}(B)$ tales que $A \cap a(V) = \emptyset$ y $B \cap a(U) = \emptyset$.

Demostración Supongamos que A y B están separados. Entonces, se tiene que existen $U \in \mathcal{N}(A)$ y $V \in \mathcal{N}(B)$ tales que $U \cap V = \emptyset$, por lo que $U \subseteq V^c$ y $V \subseteq U^c$. Como $V \in \mathcal{N}(B)$ y $U \cap V = \emptyset$, se tiene que $A \nsubseteq a(V)$ y $B \nsubseteq a(U)$, por lo que $A \cap a(V) = \emptyset$ y $B \cap a(U) = \emptyset$.

Recíprocamente, como $A \cap a(V)$, $A \nsubseteq a(V)$, por lo que $A \subseteq i(V^c)$. En consecuencia, $V^c \in \mathcal{N}(A)$ y $V \in \mathcal{N}(B)$, por lo que $V \cap V^c = \emptyset$.

Definición 3.3.3 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio y $A, B \subset E$. Se dice que A y B están *fuertemente separados* si $\mathcal{F}(A) \cap \mathcal{F}(B) = \emptyset$.



Espacios regulares y T_3

Definición 3.3.4 Un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) se dice que es *regular* si para todo punto $x \in E$ y para todo $A \subset E$ tal que $x \notin A$, existen $U \in \mathcal{N}(x)$ y $V \in \mathcal{N}(A)$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

Proposición 3.3.4 Un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) es regular si y solo si para todo $x \in E$ y para todo $N \in \mathcal{N}(x)$, existe $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $a(U) \subseteq N$.

Demostración Supongamos que (E, a) es regular. Sea $x \in E$, $N \in \mathcal{N}(x)$ y tomamos $A = N^c$. Tenemos que $x \notin a(A)$ si y solo si $A \in \mathcal{N}(x)$. Existen $U \in \mathcal{N}(x)$ y $V \in \mathcal{N}(A)$ tales que $U \cap V = \emptyset$, por lo que $U \subseteq V^c$. En consecuencia, $a(U) \subseteq a(V^c)$ y $i(V) = (a(V^c))^c \subseteq (a(U))^c$. Como $A \subseteq i(V)$, entonces $A \subseteq (a(U))^c$ y finalmente $a(U) \subseteq A^c = N$.

Recíprocamente, sea $x \in E$ y $N \in \mathcal{N}(x)$, existe $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $a(U) \subseteq N$. Sea $V = U^c$ y $A = N^c$, entonces $A \subseteq (a(U))^c = (a(V^c))^c = i(V)$, es decir, $A \in \mathcal{N}(V)$ y $U \cap V = \emptyset$, lo que implica que es regular.

Una propiedad análoga a la de regularidad en espacios topológicos es la siguiente.

Definición 3.3.5 Un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) se dice que es *t-regular* si para todo punto $x \in E$ y para todo a-cerrado $F \subset E$ que no contiene a x, existen $U \in \mathcal{N}(x)$ y $V \in \mathcal{N}(F)$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

Observación 3.3.1 Se ve claramente que ser t-regular implica ser regular. Si la pseudoclausura es idempotente, el espacio es topológico, entonces ambos conceptos son equivalentes.

Definición 3.3.6 Un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) es T_3 si es regular y T_0.

Proposición 3.3.5 Si (E, a) es un $\mathcal{V}$-espacio T_3, entonces también es $T_{2\frac{1}{2}}$.

Demostración Si (E, a) es T_3, entonces es T_1 por lo que para todo par de puntos $x, y \in E$ existen $N \in \mathcal{N}(x)$ y $N' \in \mathcal{N}(y)$ tales que $N \cap N' = \emptyset$. Como también es regular se tiene que existen $U \in \mathcal{N}(x)$ y $U' \in \mathcal{N}(y)$ con $a(U) \subseteq N$ y $a(U') \subseteq N'$ que obviamente verifican que $a(U) \cap a(U') = \emptyset$, lo que implica que es $T_{2\frac{1}{2}}$.

Espacios completamente regulares y $T_{3\frac{1}{2}}$

En primer lugar, vamos a definir una serie de conceptos y algunos resultados sobre ellos, necesarios para estudiar los espacios completamente regulares.

Definición 3.3.7 Sea E un conjunto no vacío con $A, B \subset E$ y sea $f : E \longrightarrow [0,1]$ una función continua. Se dice que f es una función que separa A de B si $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$, en tal caso se dice que f es una *función separadora.*

Definición 3.3.8 Sea E un conjunto no vacío con $A, B \subset E$. Se dice que A *está completamente en* B si existe una función que separa A de B^c y se denota por $A \Subset B$.

Proposición 3.3.6 [13] Si $A \Subset B$, entonces $B^c \Subset A^c$ y $A \subseteq B$.

Teorema 3.3.1 [13] Si (E, a) es un $\mathcal{V}$-espacio con $A, B \subseteq E$. Si $A \Subset B$, entonces $A \cup a(A) \Subset i(B) \cap B$.

Observación 3.3.2 Las demostraciones de la proposición y del teorema aparece bien detallada en [13].

Una vez vistos estos resultados previos, podemos definir el siguiente concepto.

Definición 3.3.9 Un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) se dice que es *completamente regular* si para todo $x \in E$ y para todo a-cerrado F que no contiene a x, existe una función que separa x de F.

Proposición 3.3.7 Un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) es completamente regular si para todo $x \in E$ y para todo $N \in \mathcal{N}(x)$, existe $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $U \Subset N$, es decir, existe una función continua $f : E \longrightarrow [0,1]$ con $f(y) = 0$, para todo $y \in U$, y $f(z) = 1$, para todo $z \in N^c$.

Demostración Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio completamente regular. Como f es continua, existe $U \in \mathcal{N}$ tal que $f(y) = 0$, para todo $y \in U$. Tomamos ahora un a-cerrado $A \subseteq F$, que verifica que $f(y) = 1$, para todo $y \in A$. Como $x \notin A$, se tiene que $N = A^c$ es un a-abierto que contiene a x, por lo que $N \in \mathcal{N}(x)$.

Recíprocamente, supongamos que $\forall x \in E$ y $\forall N \in \mathcal{N}(x)$, existe $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que existe una función continua $f : E \longrightarrow [0,1]$ con $f(y) = 0$, $\forall y \in U$, y $f(z) = 1$, $\forall z \in N^c$. Por un lado, como $x \in U$ se tiene que $f(x) = 0$. Y como el conjunto N es un a-abierto, podemos tomar $F = N^c$, que es un a-cerrado. En consecuencia (E, a) es completamente regular.

Proposición 3.3.8 Si (E, a) es completamente regular, entonces todo subespacio de (E, a) es completamente regular.

Demostración Sea $A \subseteq E$ y $x \in A$. Se tiene que para todo a-cerrado F que no contiene a x, $A \cap F$ es un $a_{|A}$-cerrado que tampoco contiene a x. Como existe una función continua $f : E \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$, para todo $y \in F$, entonces también existe una función continua $f_{|A} : A \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$, para todo $y \in A \cap F$.

Definición 3.3.10 Un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) se dice que es $T_{3\frac{1}{2}}$ si es T_1 y completamente regular.

Proposición 3.3.9 Todo espacio completamente regular es regular, lo que implica que todo espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ es T_3.

Demostración Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio completamente regular y sea $x \in E$. entonces, para todo $N \in \mathcal{N}(x)$, existe $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $U \Subset N$. Por el Teorema 3.3.1, se tiene que $U \cup a(U) \Subset i(N) \cap N$ y por la Proposición 3.3.6, $U \cup a(U) \subseteq i(N) \cap N$. Esto implica que $a(U) \subseteq N$, por lo que (E, a) es regular.

Proposición 3.3.10 La regularidad, ser completamente regular y los axiomas T_3 y $T_{3\frac{1}{2}}$ son propiedades topológicas para cualquier $\mathcal{V}$-espacio.

Demostración Sean (E, a_E) y (F, a_F) dos $\mathcal{V}$-espacios y $f : (E, a_E) \longrightarrow (F, a_F)$ un homeomorfismo.

• Sea (E, a_E) un espacio regular, $y \in F$ y $A \subseteq F$ tal que $y \notin a_F(A)$. Entonces $f^{-1}(y) \notin f^{-1}(a_F(A)) = a_E(f^{-1}(A))$ y por la regularidad en E, existen $U \in \mathcal{N}(f^{-1}(y))$ y $V \in \mathcal{N}(f^{-1}(A))$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Como además $f(U) \in \mathcal{N}(y)$ y $f(V) \in \mathcal{N}(A)$, entonces $f(U) \cap f(V) = \emptyset$, lo que implica que (F, a_F).

• Sea (E, a_E) un T_3-espacio, como T_1 y la regularidad son propiedades topológicas, entonces ser T_3 también lo es.

• Sea (E, a_E) un espacio completamente regular, $y \in F$ y $N \in \mathcal{N}(y)$. Entonces $f^{-1}(N) \in \mathcal{N}(f^{-1}(y))$, lo que implica que exista $U \in \mathcal{N}(f^{-1}(y))$ tal que $U \Subset f^{-1}(N)$. En consecuencia, $f(U) \in \mathcal{N}(y)$ y $f(U) \Subset N$, lo que implica que (F, a_F) es completamente regular.

• Sea (E, a_E) un $T_{3\frac{1}{2}}$-espacio, como T_1 y la regularidad completa son propiedades topológicas, entonces ser $T_{3\frac{1}{2}}$ también lo es.

Espacios normales y T_4

Definición 3.3.11 Un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) se dice que es *t-normal* (tN) si todo par de conjuntos a-cerrados disjuntos son débilmente separados.

Definición 3.3.12 Un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) se dice que es *quasi-normal* (QN) si todo par de conjuntos $A, B \subseteq E$ tales que $a(A) \cap a(B) = \emptyset$, son débilmente separados.

Definición 3.3.13 Un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) se dice que es *normal* (N) si para todo par de conjuntos $A, B \subseteq E$ con $a(A) \cap a(B) = \emptyset$, se tiene que $a(A)$ y $a(B)$ son débilmente separados. Es decir, que existen $U \in \mathcal{N}(a(A))$ y $V \in \mathcal{N}(a(B))$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

Proposición 3.3.11 Si un $\mathcal{V}$-espacio es normal o quasi-normal entonces es t-normal. Si el espacio es de tipo $\mathcal{V}_D$ entonces ser normal implica ser quasi-normal y ser quasi-normal implica ser normal. Y además, si es un espacio topológico, las tres propiedades son equivalentes.

$\mathcal{V}$-espacios	(N) $\Rightarrow$ (tN) y (QN) $\Rightarrow$ (tN)
$\mathcal{V}_D$-espacios	(N) $\Rightarrow$ (QN) $\Rightarrow$ (tN)
Espacios topológicos	(N) $\Leftrightarrow$ (QN) $\Leftrightarrow$ (tN)

Demostración Las dos primeras implicaciones son triviales.

Sea ahora (E, a) un $\mathcal{V}_D$-espacio normal, es decir, que para todo par de a-cerrados $A, B \subseteq E$ con $a(A) \cap a(B) = \emptyset$, existen $U \in \mathcal{N}(a(A))$ y $V \in \mathcal{N}(a(B))$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Se tiene que $U \in \mathcal{N}(a(A))$ si y solo si $a(A) \subseteq i(U)$. En consecuencia, $A \subseteq a(A) \subseteq i(U)$, por lo que $U \in \mathcal{N}(A)$, llegando así a que (E, a) es quasi-normal.

Si además le pedimos la idempotencia a la pseudoclausura es obvio que las tres propiedades son equivalentes.

Definición 3.3.14 Un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) se dice que es T_4 si es T_1 y quasi-normal.

Observación 3.3.3 Es obvio que si (E, a) es un $\mathcal{V}_D$-espacio, entonces es T_4 si es T_1 y normal.

Proposición 3.3.12 Sea (E, a) un $\mathcal{V}_D$-espacio, entonces T_4 implica T_3.

Demostración Sea $x \in E$ y $A \subseteq E$ tal que $x \notin a(A)$. Como (E, a) es T_1, se tiene que $a(x) = \{x\}$, por lo que $a(x) \cap a(A) = \emptyset$. Al ser (QN), existen $U \in \mathcal{N}(x)$ y $V \in \mathcal{N}(A)$ tales que $U \cap V = \emptyset$, por lo que (E, a) es T_3.

Espacios completamente normales y T_5

Definición 3.3.15 Un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) se dice que es *completamente normal* (CN) si todo par de conjuntos débilmente separados son separados, es decir, si para todo par de a-cerrados disjuntos $A, B \subseteq E$, existen $U \in \mathcal{N}(A)$ y $V \in \mathcal{N}(B)$ tales que $a(U) \cap a(V) = \emptyset$.

Definición 3.3.16 Un $\mathcal{V}$-espacio se dice que es T_5 si es un espacio T_1 y completamente normal.

Proposición 3.3.13 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio completamente normal, entonces es quasi-normal. En consecuencia T_5 implica T_4.

Demostración Sea $A, B \subseteq E$ tales que $a(A) \cap a(B) = \emptyset$.

Como $a(A) \cap B = A \cap a(B) = \emptyset$, entonces están débilmente separados. Pero como (E, a) es completamente normal, esto implica que $U \in \mathcal{N}(A)$ y $V \in \mathcal{N}(B)$ tales que $U \cap V = \emptyset$, es decir, (E, a) es (QN). Por lo que obviamente, T_5 implica T_4.

Proposición 3.3.14 Se tiene que (tN), (QN), (N), (CN), y los axiomas T_4 y T_5 son propiedades topológicas para cualquier $\mathcal{V}$-espacio.

Demostración Sean (E, a_E) y (F, a_F) dos $\mathcal{V}$-espacios y $f : (E, a_E) \longrightarrow (F, a_F)$ un homeomorfismo.

- Sea (E, a_E) un espacio t-normal y A y B dos a_F-cerrados en F. Como f es un homeomorfismo, $f^{-1}(A)$ y f^{-1} son dos a_E-cerrados en E. Como (E, a_E) es t-normal, existen $U \in \mathcal{N}(f^{-1}(A))$ y $V \in \mathcal{N}(f^{-1}(B))$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Por el Teorema 2.2.1, $f(U) \in \mathcal{N}(A)$ y $f(V) \in \mathcal{N}(B)$ y en consecuencia $f(U) \cap f(V) = \emptyset$, lo que implica que (F, a_F) es t-normal.

• Sea (E, a_E) un espacio quasi-normal y $A, B \subseteq F$ dos conjuntos no vacíos tales que $a_F(A) \cap a_F(B) = \emptyset$. Por el Teorema 2.2.3, $a_E(f^{-1}(A)) \cap a_E(f^{-1}(B)) = \emptyset$, al ser f un homeomorfismo. Como (E, a_E) es (QN), existen $U \in \mathcal{N}(f^{-1}(A))$ y $V \in \mathcal{N}(f^{-1}(B))$ tales que $U \cap V = \emptyset$. En consecuencia, $f(U) \in \mathcal{N}(A)$ y $f(V) \in \mathcal{N}(B)$, y como $f(U) \cap f(V) \emptyset$ llegamos a que (F, a_F) es un espacio quasi-normal.

• Sea (E, a_E) normal y $A, B \subseteq F$ dos conjuntos no vacíos tales que $a_F(A) \cap a_F(B) \neq \emptyset$. Al ser f un homeomorfismo, $a_E(f^{-1}(A)) \cap a_E(f^{-1}(B)) = \emptyset$. Como (E, a_E) es normal, existen $U \in \mathcal{N}(a_E(f^{-1}(A)))$ y $V \in \mathcal{N}(a_E(f^{-1}(B)))$ tales que $U \cap V = \emptyset$. En consecuencia, $f(U) \in \mathcal{N}(f(a_E(f^{-1}(A))))$ y $f(V) \in \mathcal{N}(f(a_E(f^{-1}(B))))$. Por el Teorema 2.2.3 aplicado a f^{-1}, $a_F(A) = f(a_E(f^{-1}(A)))$ y $a_F(B) = f(a_E(f^{-1}(B)))$. Por lo tanto, se tiene que $f(U) \in \mathcal{N}(a_F(A))$ y $f(V) \in \mathcal{N}(a_F(B))$, es decir, $f(U) \cap f(V) = \emptyset$, lo que nos lleva a que (F, a_F) es un espacio normal.

• Sea (E, a_E) un espacio completamente normal y $A, B \subseteq F$ dos conjuntos débilmente separados. Como f es continua, por la Proposición 3.3.2, $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ también son débilmente separados en E. Entonces, como (E, a_E) es (CN), $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ están separados, por lo que existen $U \in \mathcal{N}(f^{-1}(A))$ y $V \in \mathcal{N}(f^{-1}(B))$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Ahora, por la continuidad de f^{-1}, se tiene que $f(U) \in \mathcal{N}(A)$ y $f(V) \in \mathcal{N}(B)$, es decir, $f(U) \cap f(V) = \emptyset$. En consecuencia, A y B están separados por lo que (F, a_F) es un espacio completamente normal.

• Sea (E, a_E) un T_4-espacio, como T_1 y (QN) son propiedades topológicas, entonces ser T_4 también lo es.

• Sea (E, a_E) un T_5-espacio, como T_1 y (CN) son propiedades topológicas, entonces ser T_5 también lo es.

A lo largo de esta sección han quedado demostradas las siguientes implicaciones:

$$T_5 \longrightarrow T_4 \longrightarrow T_{3\frac{1}{2}} \longrightarrow T_3 \longrightarrow T_{2\frac{1}{2}} \longrightarrow T_2 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_0$$

3.4 Separación en los espacios topológicos asociados

Recordemos que a cada $\mathcal{V}_D$-espacio (E, a) se le puede asociar un espacio topológico $(E, \mathcal{T}_a)$, cuya clausura es la a-clausura, o a-cierre, de (E, a). En consecuencia, para todo $A \subseteq E$, $\overline{A} = \mathcal{F}(A)$.

En [14] se demuestra que si $(E, \mathcal{T}_a)$ verifica cada una de las propiedades topológicas que acabamos de definir, entonces (E, a) también la verifica.

A continuación mostraremos algún ejemplo de estas implicaciones.

Espacios T_0

Proposición 3.4.1 Si $(E, \mathcal{T}_a)$ es T_0, entonces el $\mathcal{V}_D$-espacio (E, a) es T_0.

Demostración Como $(E, \mathcal{T}_a)$ es T_0, para cada par de puntos distintos $x, y \in E$ se tiene que o $x \notin \mathcal{F}(\{y\})$ o $y \notin \mathcal{F}(\{x\})$. Pero como $\mathcal{F}(A) \subseteq a(A)$, $\forall A \subseteq E$, por lo que o $x \notin a(\{y\})$ o $y \notin a(\{x\})$.

Observación 3.4.1 La otra implicación no es cierta en general.

Ejemplo 3.4.1 Sea $E = \{x, y, z\}$ y definimos la pseudoclausura de la siguiente forma:

A	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{c, b\}$	E
$a(A)$	$\emptyset$	$\{a, b\}$	$\{b, c\}$	$\{a, c\}$	E	E	E	E

Vemos que a es aditiva y que (E, a) es T_0. Sin embargo, $(E, \mathcal{T}_a)$ es la topología indiscreta, la cual no es T_0.

Espacios T_1

Proposición 3.4.2 $(E, \mathcal{T}_a)$ es T_1 si y solo si (E, a) es T_1.

Demostración En la Proposición 3.2.1 hemos viso que (E, a) es T_1 si y solo si $\{x\}$ es un a-cerrado, $\forall x \in E$. Esto es equivalente a decir que $\{x\}$ es un cerrado en $(E, \mathcal{T}_a)$, $\forall x \in E$, es decir, que $(E, \mathcal{T}_a)$ es T_1.

Observación 3.4.2 En consecuencia, si (E, a) es T_1, entonces $(E, \mathcal{T}_a)$ es T_0.

Espacios T_2

Proposición 3.4.3 Si $(E, \mathcal{T}_a)$ es T_2, entonces (E, a) es T_2.

Demostración Sea $(E, \mathcal{T}_a)$ es T_2 y $x, y \in E$. Entonces si $x \neq y$, existe un par de abiertos disjuntos $U, V \subset E$ tales que $x \in U$ e $y \in V$. Como son disjuntos, $y \notin \overline{U}$ y $x \notin \overline{V}$ y como $a(A) \subseteq \overline{A}$ para cada $A \subseteq E$, entonces (E, a) es T_2.

Observación 3.4.3 El recíproco no es cierto en general.

Ejemplo 3.4.2 Sea $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \{x, y\} \cup \{r_i\}_{i \in \mathbb{N}} \cup \{s_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, donde los r_i, los s_i, x e y son todos distintos y no pertenecen a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Definimos la pseudoclausura sobre E como:

$$\begin{aligned} \text{Si } A \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ a(A) = A &\cup \{s_i\ :\ \text{existe un número infinito de } j \text{ tales que } (i, j) \in A\ \} \\ &\cup \{r_j\ :\ \text{existe un número infinito de } i \text{ tales que } (i, j) \in A\ \}. \end{aligned}$$

Si A contiene un número infinito de a_i y a lo sumo un gran número finito de b_j, entonces $a(A) = a(A \cap \mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup A \cup \{x\}$.
Si A contiene un número infinito de b_j y a lo sumo un gran número finito de a_i, entonces $a(A) = a(A \cap \mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup A \cup \{y\}$.
Si A contiene un número infinito de a_i y un número infinito de b_j, entonces $a(A) = a(A \cap \mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup A \cup \{x, y\}$.

En tal caso, (E, a) es T_2. Sin embargo como x e y no se pueden separar mediante dos abiertos disjuntos, se tiene que $(E, \mathcal{T}_a)$ no es T_2.

4 Conexión

En esta sección vamos a estudiar distintos tipos de conexión en espacios pretopológicos. En la literatura, encontramos una gran variedad de definiciones para esta propiedad, algunas son equivalentes y otras, a pesar de utilizar la misma definición son conceptos distintos.

En primer lugar vamos a introducir la noción de conexo que define Stadler en [12], así como algunos resultados interesantes relacionados con la conexión y el concepto de Z-conexo, introducidos en [8]. A continuación estudiaremos la conexión en $\mathcal{V}_S$-espacios asociados a grafos dando tres conceptos nuevos de conexión (fuertemente, unilateralmente y débilmente conexo), ver [5]. Finalmente introduciremos la noción de conexo por camino en términos de relaciones, que aparece en [7] y [5].

4.1 Conexión y separación de conjuntos

Definición 4.1.1 Sea (E, a) un espacio pretopológico y $A \subseteq \mathcal{P}(E)$. Se dice que A es *conexo* si no es unión disjunta de dos conjuntos no triviales débilmente separados.

Observación 4.1.1 Todos los conjuntos unitarios son conexos.
Si tomamos $A = \{x\} \subset E$, es obvio que no es unión disjunta de dos conjuntos no triviales débilmente separados.

Definición 4.1.2 Sea (E, a) un espacio pretopológico, se dice que es *conexo* si E es conexo en (E, a).

Proposición 4.1.1 [12] Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio. Un conjunto $A \subseteq E$ es conexo si y solo si cada subconjunto propio $B \subseteq A$ verifica:

$$[a(B) \cap (A \setminus B)] \cup [a(A \setminus B) \cap B] \neq \emptyset$$

Esta condición se la conoce como la condición de Hausdorff-Lennes.

En topología se define la conexión mediante abiertos y cerrados. Esa definición es equivalente a la que acabamos de enunciar solo cuando el espacio es de tipo $\mathcal{V}_D$.

Teorema 4.1.1 Sea (E, a) un $\mathcal{V}_D$-espacio. El conjunto E es conexo si y solo si E no es unión disjunta de dos conjuntos a-abiertos (o a-cerrados).

Demostración Supongamos que E no es conexo, en tal caso, existen $A, B \subseteq E$ débilmente separados y disjuntos tales que $E = A \cup B$. Como $A \cap a(B) = \emptyset$, se tiene $a(B) \subseteq A^c \subseteq B$, por lo que $a(B) = B$ es un a-cerrado. Como $a(A) \cap B = \emptyset$, análogamente se tiene que A es a-cerrado.

Recíprocamente, supongamos que A y B son dos a-abiertos disjuntos tales que $E = A \cap B$. Como $A = B^c$ es un a-abierto, B es un a-cerrado. En consecuencia, $A \cap a(B) = A \cap B = \emptyset$. Análogamente, se tiene que $a(A) \cap B = \emptyset$, por lo que A y B son débilmente separados y por tanto E no es conexo, llegando así a una contradicción.

Dugundji [6] introdujo una definición equivalente de conexión al demostrar que un espacio topológico X está conectado si y solo si alguna función continua desde X al espacio discreto $\{0, 1\}$ es constante. El siguiente resultado muestra que podemos extender esta definición a $\mathcal{V}$-espacios asumiendo que $\{0, 1\}$ es un $\mathcal{V}$-espacio T_1.

Teorema 4.1.2 Un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) es conexo si y solo si para todo $\mathcal{V}$-espacio T_1, (F, a_F), con $F = \{0, 1\}$, se tiene que cualquier función continua $f : E \longrightarrow F$ es constante.

Demostración Sea E conexo y $f : E \longrightarrow F$ continua. Supongamos que f no es constante. En tal caso, existe $A \subseteq E$ tal que $A = f^{-1}(0)$ y $A^c = f^{-1}(\{1\})$. Ahora, por la continuidad y por ser (F, a_F) T_1, se tiene que $a_E(A) \cap A^c = \emptyset$. Análogamente, $A \cap a_E(A^c) = \emptyset$. Por lo que hemos llegado a una contradicción, ya que E es conexo. En consecuencia, f es una función constante.

Recíprocamente, supongamos que E no es conexo. En tal caso, existen $A, B \subseteq E$ débilmente separados tales que $A \cup B = E$, por lo que $a(A) \subseteq A$ y $a(B) \subseteq B$. Como $A \cup B = E$, $A^c \subseteq B$, lo que implica que $a(A^c) \subseteq a(B) \subseteq A^c$. Tomamos el (F, a) tal que $F = \{0, 1\}$, $a(\emptyset) = \emptyset$, $a(\{0\}) = \{0\}$, $a(\{1\}) = \{1\}$ y $a(F) = F$. Es obvio que (F, a) es un $\mathcal{V}$-espacio T_1. ∎

El teorema anterior nos servirá de gran utilidad para demostrar algunos resultados que vienen a continuación.

Teorema 4.1.3 Sean (E, a) y (F, a) dos $\mathcal{V}$-espacios y $f : (E, a) \longrightarrow (F, a)$ una función continua, entonces si E es conexo, $f(E)$ es conexo en F.

Demostración Sea $g : f(E) \longrightarrow \{0, 1\}$ una función continua, donde $\{0, 1\}$ es un $\mathcal{V}$-espacio T_1. Como f es continua, entonces $g \circ f : E \longrightarrow \{0, 1\}$ es continua y como (E, a) es conexo, $g \circ f$ es constante. En consecuencia, g es constante por el Teorema 4.1.2, por lo que $f(E)$ es conexo.

∎

Observación 4.1.2 Como cada $\mathcal{V}_D$-espacio es un $\mathcal{V}$-espacio, el Teorema 4.1.3 es una generalización del Teorema 18 de [12].

Teorema 4.1.4 Sea (E, a) un $\mathcal{V}_D$-espacio y $A \subseteq E$ un subespacio conexo, entonces $a(A)$ es conexo también.

Demostración Sea $f : a(A) \longrightarrow \{0, 1\}$ una función continua, donde $\{0, 1\}$ es un $\mathcal{V}$-espacio T_1. Por la Proposición 2.3.4, $f_{|A} : A \longrightarrow \{0, 1\}$ es continua. Como A es conexo, entonces por el Teorema 4.1.2, $f_{|A}$ es constante. Sea entonces $f(A) = \{x\}$, con $x \in 0, 1$, entonces por el Teorema 2.2.1 y la Proposición 3.2.1, se tiene que:

$$f(a(A)) \subseteq a_{|\{0,1\}}(f(A)) = a_{|\{0,1\}}(\{x\}) \subseteq \{x\}$$

En consecuencia, $f : a(A) \longrightarrow \{0, 1\}$ es constante y por el Teorema 4.1.2, $a(A)$ es conexo.

∎

Observación 4.1.3 El Teorema 4.1.4 es una generalización del Teorema 17 de [12].

Lema 4.1.1 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio y $A, B \subseteq E$. Si A y B son conexos y $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \cup B$ es conexo.

Demostración Sea $f : A \cup B \longrightarrow \{0,1\}$ una función continua, donde $\{0,1\}$ es un $\mathcal{V}$-espacio T_1. Por la Proposición 2.3.4, $f_{|A}$ y $f_{|B}$ son continuas. Como A y B son conexos, entonces por el Teorema 4.1.2, $f_{|A}$ y $f_{|B}$ son constantes. Como $A \cap B \neq \emptyset$, entonces f es constante, así que por el Teorema 4.1.2 se tiene que $A \cup B$ es conexo.

Lema 4.1.2 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio y sean $A_1, A_2, \dots, A_n$ subconjuntos conexos de (E, a) tales que $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, para todo $i = 1, 2, \dots, n-1$, entonces $\bigcup_{n}^{i=1} A_i$ es conexo.

Demostración Aplicando el Lema 4.1.1 por inducción a los A_i, se llega a que $\bigcup_{n}^{i=1} A_i$ es conexo.

Lema 4.1.3 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio y sea $\{A_i\}_{i\in I}$ la familia de los subconjuntos conexos de (E, a) tales que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es conexo.

Demostración Sea $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ y sea $f : \bigcup_{i\in I} A_i \longrightarrow \{0,1\}$ una función continua, donde $\{0,1\}$ es un $\mathcal{V}$-espacio T_1. Por la Proposición 2.3.4, $f_{|A_i}$ es continua, para todo $i \in I$. Como A_i es conexo para todo $i \in I$, entonces por el Teorema 4.1.2, $f_{|A_i}$ es constante para todo $i \in I$. En consecuencia, $f(\{x\}) = f(A_i)$, para todo $i \in I$. Por lo que f es constante, así que por el Teorema 4.1.2 se tiene que $\bigcup_{i\in I} A_i$ es conexo.

Teorema 4.1.5 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio tal que para todo par de puntos distintos $x, y \in E$, existen unos subconjuntos conexos de (E, a), $A_1, A_2, \dots, A_n$, tales que $x \in A_1$, $y \in A_n$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, para todo $i = 1, 2, \dots, n-1$, entonces (E, a) es conexo.

Demostración Sea $x \in E$, entonces por hipótesis para cada $y \in E \setminus \{x\}$ existen unos subconjuntos conexos de (E, a), $A_1y, A_2y, \dots, A_ny$, tales que $x \in A_1y$, $y \in A_ny$ y $A_iy \cap A_{i+1}y \neq \emptyset$, para todo $i = 1, 2, \dots, n-1$. Por el Lema 4.1.2, se tiene que $B_y = \bigcup_{n}^{i=1} A_iy$ es conexo. Como $x \in A_1y$ para todo $y \in E \setminus \{x\}$, entonces $x \in B_y$ para todo $y \in E \setminus \{x\}$. En consecuencia, por el Lema 4.1.3, se tiene que $\bigcup_{y\neq x} B_y = E$ es conexo.

Definición 4.1.3 Sea (E, a) un espacio pretopológico y $x \in E$. Se dice que la *componente conexa de* x es la unión de todos los subconjuntos de E conexos que contienen a x, que denotaremos por $C(x)$.

Definición 4.1.4 Un espacio pretopológico (E, a) se dice *totalmente disconexo* si para cada $x \in E$, $C(x) = \{x\}$.

Proposición 4.1.2 Ser conexo y ser totalmente disconexo son propiedades topológicas para cualquier $\mathcal{V}$-espacio.

Demostración Sean (E, a_E) y (F, a_F) dos $\mathcal{V}$-espacios y $f : (E, a_E) \longrightarrow (F, a_F)$ un homeomorfismo.

- Sea (E, a_E) un espacio conexo. Por el Teorema 4.1.3, se tiene que (F, a_F) es conexo.

- Sea (E, a_E) un espacio totalmente disconexo. Supongamos que (F, a_F) es no es totalmente disconexo, por lo que para algún $y \in F$, existe un subconjunto $A \subseteq F$ tal que $\{y\} \subseteq A$. Se tiene que $f^{-1}(A)$ es conexo en E y $f^{-1}(\{y\}) \subseteq f^{-1}(A)$. Como E es conexo, $f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(A)$, por lo que F es totalmente disconexo.

4.2 Z-conexión

Definición 4.2.1 Sea (Z, a) un $\mathcal{V}$-espacio con más de un elemento. Un $\mathcal{V}$-espacio (E, a) se dice *Z-conexo* si existe una función continua $f : E \longrightarrow Z$ constante.

Lema 4.2.1 Sea (Z, a) un $\mathcal{V}_D$-espacio con más de un elemento, entonces todo $\mathcal{V}$-espacio Z-conexo es conexo.

Demostración Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio Z-conexo y sea $f : E \longrightarrow \{0, 1\}$ una función continua, donde $\{0, 1\}$ es un $\mathcal{V}$-espacio T_1. Como (Z, a) es un $\mathcal{V}_D$-espacio y tiene más de un elemento, entonces existe una inyección continua $g : \{0, 1\} \longrightarrow Z$. Por la Observación 2.2.2, $g \circ f : E \longrightarrow Z$ es continua. Como (E, a) es Z-conexo, $g \circ f$ es constante. En consecuencia, f es constante por el Teorema 4.1.2, por lo que (E, a) es conexo.

Lema 4.2.2 Cualquier imagen continua de un $\mathcal{V}$-espacio Z-conexo, es Z-conexa.

Demostración Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio Z-conexo, (F, a) un $\mathcal{V}$-espacio, $f : E \longrightarrow F$ una proyección continua y $g : F \longrightarrow \{0, 1\}$ una función continua. Entonces $g \circ f : E \longrightarrow Z$ es continua y por tanto es constante. En consecuencia, g es constante y por tanto, (F, a) es Z-conexo.

Lema 4.2.3 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio y $\{A_i\}_{i \in I}$ la familia de los subconjuntos Z-conexos de (E, a) tales que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es Z-conexo.

Demostración La demostración es similar a la del Lema 4.1.3.

Teorema 4.2.1 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio tal que para todo par de puntos distintos $x, y \in E$, existen unos subconjuntos Z-conexos de (E, a), $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tales que $x \in A_1$, $y \in A_n$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$, entonces (E, a) es Z-conexo.

Demostración La demostración es similar a la del Teorema 4.1.5.

Teorema 4.2.2 Sea (Z, a) un $\mathcal{V}_D$-espacio totalmente disconexo, entonces para los $\mathcal{V}$-espacios la Z-conexión es equivalente a la conexión.

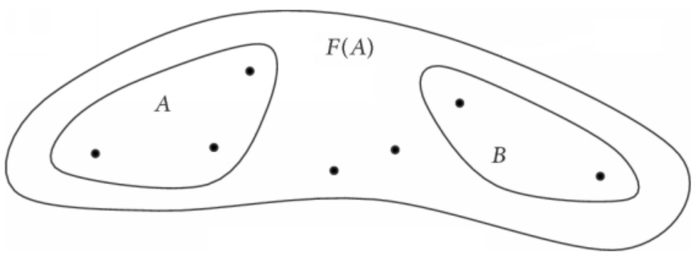
Demostración Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio. Por el Lema 4.2.1, si (E, a) es Z-conexo, entonces es conexo. Recíprocamente, por el Teorema 4.1.3, para cada función continua $f : E \longrightarrow Z$, $f(E)$ es conexo. Como Z es totalmente disconexo, f tiene que ser constante, por lo que (E, a) es Z-conexo.

4.3 Conexión en grafos

La conexión es un concepto interesante para modelar problemas en relación a la homogeneidad o la estructura de los elementos. Un espacio conexo es aquel en el que es imposible aislar sus elementos. Introduciremos a continuación diferentes tipos de conexión, que permiten establecer fuertes relaciones con la teoría de grafos.

Antes de dar la definición de los distintos tipos de conexiones, hablaremos de la noción de camino en espacios pretopológicos.

Definición 4.3.1 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio y sean $A, B \subseteq E$ no vacíos. Se dice que existe un *camino* de A a B en (E, a) si se cumple que $B \subseteq \mathcal{F}(A)$.



Definición 4.3.2 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio. Se dice que:

• (E, a) es *fuertemente conexo* si para todo $A \subseteq E$ no vacío, $\mathcal{F}(A) = E$. Esto es equivalente a decir que para todo $A, B \subseteq E$, existe un camino de A a B.

• (E, a) es *unilateralmente conexo* si para todo $A \subseteq E$ no vacío, $\mathcal{F}(A) = E$ o si para todo $B \subseteq E$ no vacío con $B \subseteq E - \mathcal{F}(A)$, se tiene que $A \subseteq \mathcal{F}(B)$. Esto es equivalente a decir que para todo $A, B \subseteq E$, existe un camino de A a B o de B a A.

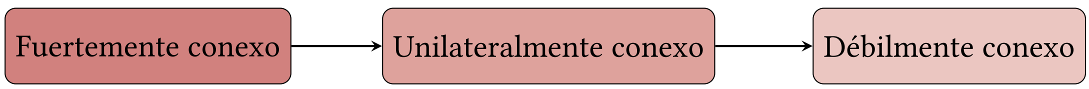
• (E, a) es *débilmente conexo* si para todo $A, B \subseteq E$ no vacíos, $\mathcal{F}(A) \cap \mathcal{F}(B) \neq \emptyset$ o $\mathcal{F}(A) \cap \mathcal{F}(E - \mathcal{F}(A)) \neq \emptyset$. Esto es equivalente a decir que para todo $A, B \subseteq E$, existe un camino de A a B o que existe $M \subseteq E$ tal que existe un camino de M a A y de M a $E - \mathcal{F}(A)$.

Observación 4.3.1 Sean (E, a) y (E, a') dos $\mathcal{V}$-espacios. Si (E, a) es más fino que (E, a') y (E, a) es de algún tipo de conexión, entonces (E, a') también lo es.

En la siguiente proposición se muestran las relaciones que existen entre los distintos tipos de conexiones.

Proposición 4.3.1 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio.

1) Si (E, a) es fuertemente conexo, entonces es unilateralmente conexo.
2) Si (E, a) es unilateralmente conexo, entonces es débilmente conexo.



Demostración La primera implicación es trivial, ya que si para todo $A \subseteq E$ no vacío, $\mathcal{F}(A) = E$, (E, a) también es unilateralmente conexo.
Ahora supongamos que (E, a) es unilateralmente conexo. Si se tiene que $\mathcal{F}(A) \neq E$ y existe $B \subseteq E - \mathcal{F}(A)$ con $A \subseteq \mathcal{F}(B)$. Entonces, $A \subseteq \mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{F}(B) \subseteq \mathcal{F}(E - \mathcal{F}(A))$. Por tanto, es débilmente conexo.

Proposición 4.3.2 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio unilateralmente conexo, entonces los conjuntos a-cerrados están encajados, es decir, están ordenados por la relación de inclusión.

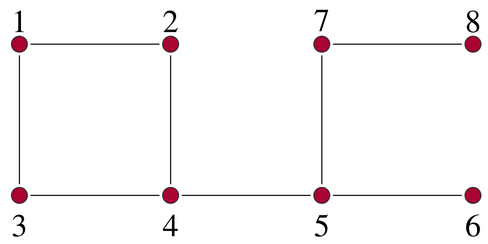
Demostración Por definición, se tiene que existe un camino de A a B, es decir, $B \subseteq F(A)$, o existe un camino de B a A, $A \subseteq F(B)$. Si considero A, B dos a-cerrados se tiene $B \subseteq F(A) = A$ o $A \subseteq F(B) = B$, por lo que efectivamente, A y B están encajados, $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$. ∎

A continuación vamos a ver la conexión que tienen algunos de los ejemplos que ya habíamos visto en otras secciones.

Ejemplo 4.3.1 Sea (E, a) los definidos en el Ejemplo 1.1.1., con $E = \mathbb{N}$ y $a(A)$ el conjunto de los múltiplos de algún elemento de $A \subseteq E$. Vimos además que al ser idempotente, $a(A) = \mathcal{F}(A)$. Vamos a analizar qué tipo de conexión tiene:

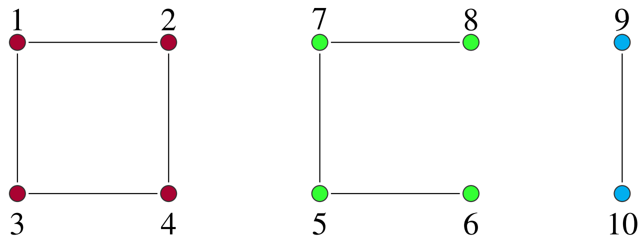
- No es unilateralmente conexo ya que si tomamos $A = \{2\}$, vemos que $\mathcal{F}(A) \neq E$ y si tomamos $B = \{3\}$, se tiene que $B \subseteq E - \mathcal{F}(A)$ y sin embargo $A \nsubseteq \mathcal{F}(B)$. En consecuencia, por la Proposición 4.3.1, no es fuertemente conexo.
- Es débilmente conexo ya que para todo $A, B \subseteq E$, existe $M = \{1\}$ tal que existe un camino de M a A y un camino de M a $E - \mathcal{F}(A)$.

Ejemplo 4.3.2 Consideramos ahora el Ejemplo 1.1.2., con E el conjunto de vértices del siguiente grafo no dirigido y a_* la pseudoclausura que habíamos definido:



Como pudimos ver, se tiene que $\mathcal{F}(A) = E$ para todo $A \subseteq E$. Por lo que (E, a_*) es fuertemente conexo y en consecuencia también es unilateral y débilmente conexo.

Ejemplo 4.3.3 Vamos a considerar ahora el Ejemplo 1.1.6., donde E también es el conjunto de vértices de un grafo no dirigido pero sin embargo tiene más de una componente conexa:



Vemos que este espacio no es ni tan siquiera débilmente conexo ya que si tomamos, por ejemplo, $A = \{1\}$ y $B = \{9\} \subseteq E - \mathcal{F}(A)$, se tiene que $\mathcal{F}(A) \cap \mathcal{F}(B) = \emptyset$.

Si tomáramos el subconjunto $A = \{1, 2, 3, 4\} \subset E$, podríamos pensar que el subespacio inducido $(A, a_{|A})$ es fuertemente conexo, al igual que ocurre en el ejemplo anterior. De ahí que introduzcamos el siguiente concepto.

Definición 4.3.3 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio y $A \subseteq E$ no vacío. Se dice que $(A, a_{|A})$ es un *subespacio x-conexo* de (E, a) si $(A, a_{|A})$ es un $\mathcal{V}$-espacio x-conexo.

Como hemos dicho en la introducción, estos tres tipos de conexión tienen una fuerte relación con la teoría de grafos. Los dos ejemplos anteriores se trataban de grafos no dirigidos, en los que no se diferencian estos tres tipos de conexión. Sin embargo, en los grafos dirigidos, estos tres conceptos se ven claramente diferenciados.

Definición 4.3.4 Sea (E, a_*) un $\mathcal{V}_S$-espacio tal que E es el conjunto de vértices de un grafo dirigido y a_* la pseudoclausura definida para grafos. Se dice que:

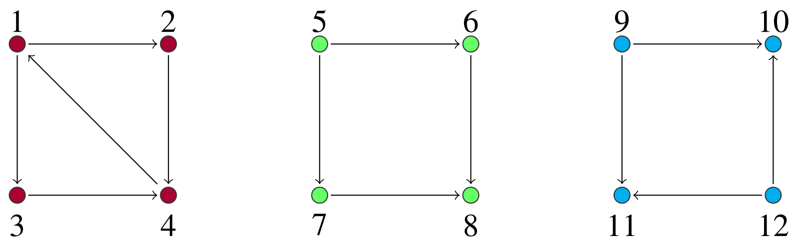
- (E, a_*) es *fuertemente conexo* si para todo $A, B \subseteq E$, existe un camino de A a B.

- (E, a_*) es *unilateralmente conexo* si para todo $A, B \subseteq E$, existe un camino de A a B o un camino de B a A.

- (E, a_*) es *débilmente conexo* si el grafo no dirigido asociado a él es fuertemente conexo.

A continuación vamos a ver un ejemplo de cada tipo.

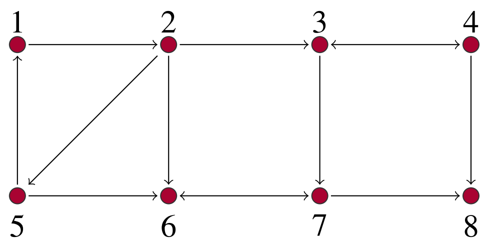
Ejemplo 4.3.4 Sea (E, a_*) un $\mathcal{V}_S$-espacio con $E = A \cup B \cup C$, donde $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$ y $C = \{9, 10, 11, 12\}$.



Se tiene que $(A, a_{*|A})$ es fuertemente conexo, $(B, a_{*|B})$ es unilateralmente conexo y $(C, a_{*|C})$ es débilmente conexo.

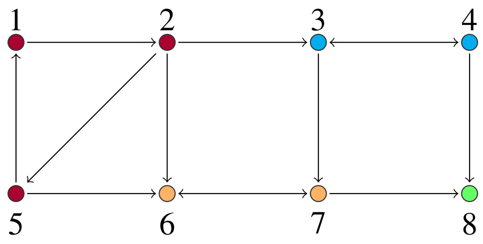
Definición 4.3.5 Sea (E, a) un espacio pretopológico y $A \subseteq E$. Se dice que A es una *componente* x*-conexa* si $(A, a_{|A})$ es x-conexo y si todo B tal que $B \subset A \subseteq E$ no es x-conexo.

Ejemplo 4.3.5 Sea (E, a_*) un $\mathcal{V}_S$-espacio con $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y a_* la pseudoclausura definida para grafos.



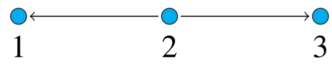
Como podemos ver a simple vista, (E, a_*) es débilmente conexo, por lo que E es la única componente débilmente conexa. Además, es fácil comprobar que también es unilateralmente conexo e igualmente, E es la única componente unilateralmente conexa. Sin embargo, (E, a_*) no es fuertemente conexo ya que por ejemplo no existe un camino de $\{6\}$ a $\{5\}$.

En el siguiente grafo mostramos todas las componentes fuertemente conexas que tiene (E, a_*).



Recordemos que en la Sección 4.1 se había definido la componente conexa de un elemento como la unión de todos los subconjuntos conexos que contienen al elemento. Por analogía, intentemos buscar las componentes unilateralmente conexas del siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.6 Consideremos el $\mathcal{V}_S$-espacio (E, a_*) dado por el siguiente grafo:



A simple vista vemos que la componente unilateralmente de $\{1\}$ sería el conjunto $\{1,2\}$ y la de $\{3\}$ sería $\{2,3\}$, y ambos subconjuntos son efectivamente unilateralmente conexos. Sin embargo, la componente de $\{2\}$ sería la unión de los subconjuntos unilateralmente conexos que contienen a $\{3\}$, es decir $\{1,2\} \cup \{2,3\} = E$, pero E no es unilateralmente conexo.

Por este motivo tan solo podremos afirmar o negar que un subconjunto es unilateralmente conexo, pero no podemos hacer una partición del espacio en componentes unilateralmente como lo hicimos en el ejercicio anterior con las componentes fuertemente conexas. En consecuencia se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.3.3 Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio y sea $\{C_i\}_{i \in J}$ la familia de componentes x-conexas de (E, a).

• La familia $\{C_i\}_{i \in J}$ es una partición de E en el caso de las componentes fuertemente o débilmente conexas.

• La familia $\{C_i\}_{i \in J}$ no es una partición de E en el caso de las componentes unilateralmente conexas.

Demostración En [2] se encuentra detallada la demostración de la primera implicación.
En el Ejemplo 4.3.6 se tiene que los subconjuntos $C_1 = \{1, 2\}$ y $C_2 = \{2, 3\}$ son unilateralmente conexos y sin embargo $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, por lo que $\{C_1, C_2\}$ no puede ser una partición de E.

4.4 Conexión por caminos en términos de relaciones

Definición 4.4.1 Sea (E, a_R) un $\mathcal{V}_S$-espacio y $x, y \in E$. Se dice que hay una *cadena* entre x e y si para un cierto $n \geq 0$ existe una secuencia $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ tal que $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$, con $x_{i-1}Rx_i$ o x_iRx_{i-1}, para cada $i = 1, \ldots, n$.

Definición 4.4.2 Sea (E, a_R) un $\mathcal{V}_S$-espacio y $x, y \in E$. Se dice que existe un camino de x a y están *conectados* si para un cierto $n \geq 0$ existe una secuencia $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ con $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$, tal que $x_{i-1}Rx_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$.
En tal caso, se dirá que x e y están conectados y se denota por $x \sim^R y$. A la secuencia $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ se le llamará *camino* entre x e y.

Definición 4.4.3 Sea (E, a_R) un $\mathcal{V}_S$-espacio y sean $x, y \in E$ tales que $x \sim^R y$. Se dice que la *longitud* de un camino $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ entre $x = x_0$ e $y = x_n$ es el entero n.
Se dice entonces, que $d_R(x, y) = \text{mín}\{n : x = x_0, \ldots, x_n = y\}$ es la *distancia* entre x e y en (E, a_R).

Definición 4.4.4 Sea (E, a_R) un $\mathcal{V}_S$-espacio. Se dirá que es conexo por caminos si para cada par $x, y \in E$, $x \sim^R y$.

Observación 4.4.1 La relación $\sim^R$ es una relación de equivalencia en E y las componentes conexas por caminos de (E, a_R) coinciden con las clases de equivalencia de la relación.

Proposición 4.4.1 Sea (E, a_R) un $\mathcal{V}_S$- espacio. Si para todo par $x, y \in E$ existe una cadena entre x e y, entonces (E, a_R) es débilmente conexo.

Demostración En primer lugar, recordemos que a xRy si y solo si $y \in a_R(x)$. Además podemos tomar $a_R = a_*$, la pseudoclausura asociada a grafos. Si existe una cadena entre x e y, entonces existe una secuencia $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ tal que $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$, con $x_i \in a(x_{i-1})$ o $x_{i-1} \in a(x_i)$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Como existe una cadena para cada par de elementos de E, entonces el grafo no dirigido asociado a (E, a_*) es conexo y en consecuencia (E, a_R) es débilmente conexo.

Proposición 4.4.2 Un $\mathcal{V}_S$-espacio (E, a_R) es conexo por caminos si y solo si es fuertemente conexo.

Demostración El $\mathcal{V}_S$-espacio (E, a_R) es conexo por caminos si y solo para cada par $x, y \in E$, $x \sim^R y$, es decir, si para todo par de elementos de E existe un camino que los une y esto es equivalente a la definición de fuertemente conexo

Observación 4.4.2 Ambas proposiciones aparecen también demostradas en [5].

Definición 4.4.5 Un $\mathcal{V}_S$-espacio (E, a_R) es conexo si y solo si E no es unión disjunta de dos conjuntos a_R-abiertos no vacíos.

Demostración Es inmediata por el Teorema 4.1.1.

Bibliografía

[1] Belmandt, Z. (2011). *Basics of pretopology.* Hermann.

[2] Belmandt, Z. (1993). *Manuel de prétopologie et ses applications, Hermés*, Paris.

[3] Čech, E., Frolík, Z., Katetov, M. (1966). *Topological spaces.* Interscience Publishers, Revised edition.

[4] Dalud-Vincent, M., Brissaud, M., Lamure, M. (2011). *Connectivities and Partitions in a Pretopological Space.* International Mathematical Forum, 6, 45, 2201-2215

[5] Dalud-Vincent, M., Brissaud, M., Lamure, M. (2011). *Pretopology, Matroïdes and Hypergraphs.* International Journal of Pure and Applied Mathematics, 67 (4), 363–375.

[6] Dugundji, J. (1989). *Topology.* Wm. C. Brown Publishers.

[7] Galton, A. (2003). *A generalized topological view of motion in discrete space.* Theoretical Computer Science, 305 (1-3), 111-134.

[8] Habil, E. D., Elzenati, K. A. (2016). *Connectedness in isotonic space*, Turk. J. Math., 30, 247-257.

[9] Habil, E. D. and Elzenati, K. A. (2008). *Topological properties in isotonic spaces.* Islamic University Journal, 16, 2, 5-13.

[10] Kuratowski, K. (1966). *Topology Volume I*, Academic Press, Warsaw.

[11] Levorato, V. (2008). *Contributions à la modélisation des réseaux complexes: prétopologie et applications.* Doctoral dissertation, Université Paris VIII Vincennes-Saint Denis.

[12] Stadler, B. M., Stadler, P. F. (2002). *Basic properties of closure spaces.* J. Chem. Inf. Comput. Sci, 42, 577-585.

[13] Stadler, B. M., Stadler, P. F. (2003). *Higher separation axioms in generalized closure spaces.* Comment. Math. Prace Mat., Ser. I, 43, 257-273.

[14] Sunitha, T. A. (1994). *Some problems in topology a study of Čech closure spaces.*, Thesis, School of Mathematical Sciences, Cochin University of Science and Technology, Cochin.

[15] Vu Bui, Q. (2018). *Pretopology and Topic Modeling for Complex Systems Analysis : Application on Document Classification and Complex Network Analysis.* Modeling and Simulation. PSL Research University. NNT: 2018PSLEP034. tel-02147578.

[16] Willard, S. (1970). *General topology.* Reading, Mass.: Addison-Wesley Pub. Co. ISBN 0-486-43479-6.