



FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

CURVAS PLANAS CON CURVATURA DEPENDIENDO DE LA POSICIÓN

Memoria realizada por Ana Rodríguez Talaverón

Dirigido por:

VºBº

D. Alfonso Carriazo Rubio
Dña. M. Carmen Márquez García

Resumen

En este trabajo se exponen curvas en las que su curvatura depende de la distancia a un punto o a una recta. En el primer capítulo se recuerdan conceptos y resultados sobre curvas planas y curvas alabeadas y también se introduce el concepto de funciones elípticas de Jacobi. En el segundo capítulo buscamos curvas cuya curvatura depende de la distancia a un punto, en concreto, el origen. Este capítulo se basa en fundamentos físicos. Por último, en el tercer capítulo se estudian diversas curvas cuya curvatura dependen de la distancia a una recta, el eje OX .

Abstract

In this work curves are exposed in which their curvature depends on the distance to a point or a straight line. In the first chapter concepts and results about plane curves and space curves are recalled and the concept of Jacobi's elliptical functions is also introduced. In the second chapter we look for curves whose curvature depends on the distance to a specific point, the origin. This chapter is based on physical foundations. Finally, in the third chapter we study several curves whose curvature depends on the distance to a straight line, the OX axis.

Índice general

Introducción	7
1. Preliminares	9
1.1. Definiciones previas y resultados de curvas planas	9
1.2. Definiciones y resultados sobre curvas alabeadas	12
1.3. Funciones elípticas de Jacobi	13
2. Curvas cuya curvatura depende de la distancia al origen	15
2.1. Movimiento bajo fuerza gravitacional	16
2.2. Caso $k(r) = r$	20
3. Curvas con curvatura de la forma $k = k(y)$	25
3.1. Curvatura $k = k(y)$	27
3.2. Curvas elásticas	30
3.3. Curvas cuya curvatura es $k(y) = \lambda/y^2$	32
3.3.1. Caso $\lambda = 1$ y $c = 0$	33
3.3.2. Caso $\lambda = 1$ y $c = 1$	35
3.4. Curvas cuya curvatura es $k(y) = \lambda \cos y$	36
3.4.1. Caso $c = 0$, $0 < \lambda < 1$	37
3.4.2. Caso $c = 0$, $\lambda = 1$	38
3.4.3. Caso $c = 0$, $\lambda > 1$	39
3.5. Curvas cuya curvatura es $k(y) = \lambda \cosh y$	39
3.6. Curvas cuya curvatura es $k(y) = \lambda/e^y$	41
3.6.1. Caso $-1 < c < 1$	43
3.6.2. Caso $c = 1$	43
3.6.3. Caso $c > 1$	44
3.7. Curvas cuya curvatura es $k(y) = \lambda/\cos^2 y$	46
3.8. Curvas cuya curvatura es $k(y) = \lambda/\cosh^2 y$	47

3.8.1. Caso $c = 0, 0 < \lambda < 1$	48
3.8.2. Caso $c = 0, \lambda = 1$	49
3.8.3. Caso $c = 0, \lambda > 1$	50

Bibliografía	53
---------------------	-----------

Introducción

El objetivo de este trabajo es el de buscar curvas a través de su curvatura. La curvatura es un concepto fundamental en geometría diferencial. Tal y como dijo Marcel Berger “*la curvatura es el invariante Riemanniano número 1 y el más natural. Gauss y Riemann lo vieron al instante*”.

Todos tenemos una idea intuitiva de lo que es la curvatura y de que algo esté más o menos curvado. Sin embargo, la definición matemática no es algo tan inmediato y se necesitó de varias aproximaciones antes de llegar al concepto actual que tenemos de curvatura. A finales del siglo XV Gottfried Leibniz definió aproximadamente el concepto de curvatura y más tarde fue Leonhard Euler quien comenzó con el estudio de la geometría intrínseca introduciendo el concepto de curvatura.

Tan importante es la curvatura que gracias a ella tenemos el Teorema Fundamental de curvas planas, el cual, como su propio nombre indica, es fundamental para determinar una curva a través de su curvatura. Estos conceptos los definimos en el capítulo uno, en el cual también introducimos el concepto de funciones elípticas de Jacobi, muy útiles para realizar cálculos de integración. El estudio de estas funciones se originó en el siglo XVIII cuando se estudiaban integrales de la forma

$$\int_0^t \frac{p(x)}{\sqrt{q(x)}} dx$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios de grado 3 ó 4. Estas integrales surgen, por ejemplo, para dar una expresión de la longitud de arco de una elipse. De ahí proviene su nombre. Fueron muy estudiadas por Adrien-Marie Legendre, quien consiguió calcular tablas de valores para estas integrales en función de su límite superior de integración. El estudio de estas funciones avanzó cuando

en 1820, Carl Jacobi y Niels Henrik Abel, consiguieron hacer avances significativos en su estudio y las definieron tal y como las vemos en el capítulo uno.

En este trabajo, basado en los artículos de David Singer e Ildefonso Castro ([4], [6]), nos proponemos la siguiente cuestión: normalmente definimos la curvatura por la longitud de arco, pero ¿qué ocurre cuando mediante esta elección no conseguimos obtener la expresión de la curvatura? Por ello, en los capítulos dos y tres estudiamos curvas planas cuya curvatura depende de la posición. En estos capítulos, a partir de la función curvatura se obtienen las ecuaciones paramétricas de las curvas dependiendo de su posición mediante integración y siguiendo un procedimiento similar al del Teorema Fundamental de curvas planas.

En el capítulo dos estudiamos curvas cuya curvatura depende de la distancia al origen. Este estudio está motivado por el movimiento de un objeto en órbita sometido a la Fuerza Gravitatoria y por la Segunda Ley de Kepler. En este capítulo veremos que si partimos de las ecuaciones del movimiento de Newton y de la hipótesis de que el objeto se mueve bajo una fuerza central somos capaces de obtener una relación con la curvatura y así obtener las curvas que verifican estas hipótesis. Un ejemplo de ello es la Lemniscata de Bernoulli, la cual le da forma al símbolo de infinito que tanto usamos.

En el último capítulo de este trabajo, el capítulo tres, veremos curvas cuya curvatura depende de la distancia a una recta, el eje OX . En primer lugar buscamos la expresión general de las curvas planas parametrizadas naturalmente cuya curvatura es $k = k(y)$. También definimos lo que son las curvas elásticas, un concepto muy útil para algunas de las curvas que veremos en este capítulo.

Basándonos en estos dos conceptos más generales pasamos a mostrar curvas cuya curvatura depende de la distancia al eje OX . Son curvaturas de la forma: $k(y) = \lambda/y^2$, $k(y) = \lambda \cos y$, $k(y) = \lambda \cosh y$, $k(y) = \lambda/e^y$, $k(y) = \lambda/\cos^2 y$ y $k(y) = \lambda/\cosh^2 y$. En el estudio de estas curvaturas encontraremos curvas conocidas como la catenaria.

No quisiera terminar sin agradecerle a mis profesores por su trabajo, dedicación e implicación en este Trabajo de Fin de Grado, sin el cual no hubiese conseguido llegar hasta aquí.

Capítulo 1

Preliminares

En este trabajo vamos a describir curvas planas cuya curvatura depende de la distancia a una recta o a un punto. Para ello, vamos a dar unos conceptos previos que usaremos a lo largo del trabajo, los cuales los podemos encontrar en [1] y [2].

1.1. Definiciones previas y resultados de curvas planas

En esta sección recordaremos algunas definiciones y resultados que verifican las curvas planas, que se pueden encontrar en [1] y [2].

Definición 1.1.1 Una **Curva Parametrizada Regular** en \mathbb{R}^2 es una aplicación

$$\begin{aligned} \alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

tal que:

1. $\alpha \in \mathcal{C}^k$, $k \geq 1$ (Condición de Diferenciabilidad)
2. $\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} \neq 0$, $\forall t \in (a, b)$ (Condición de Regularidad).

Si además $\|\alpha'(t)\| = 1$, entonces diremos que la curva regular está parametrizada naturalmente (c.r.p.n).

Definición 1.1.2 Se denomina **vector tangente** a la curva α en el punto $\alpha(t_0)$ al vector:

$$\mathbf{t}(t_0) = \frac{\alpha'(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\|}.$$

Se denomina **vector normal** de la curva α en el punto $\alpha(t)$, al vector unitario y ortogonal a $\mathbf{t}(t)$ en dicho punto, que denotaremos $\mathbf{n}(t)$, tal que el par $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t)\}$ está orientado positivamente.

A este par se le llama **Referencia de Frenet** de la curva α en el punto $\alpha(t)$.

Definición 1.1.3 Sean $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una c.r.p.n y $s_0 \in (a, b)$. Se define la **curvatura** de la curva α en el punto $\alpha(s_0)$ como:

$$k(s_0) = \left(\frac{d\theta}{ds} \right)_{s=s_0}$$

donde $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es una determinación continua del ángulo que forma el eje OX con el vector tangente a la curva α . A la función:

$$\begin{aligned} k : (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto k(s) = \dot{\theta}(s) \end{aligned}$$

se le denomina **curvatura** de α .

Proposición 1.1.4 Sea $\alpha = \alpha(t) = (x(t), y(t))$ una curva parametrizada regular. Entonces:

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

Teorema 1.1.5 (Ecuaciones de Frenet) Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. en el plano \mathbb{R}^2 . Se verifica que:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}}(s) = k(s)\mathbf{n}(s) \\ \dot{\mathbf{n}}(s) = -k(s)\mathbf{t}(s). \end{cases}$$

La función curvatura define la forma de la curva como vamos a ver en el siguiente teorema. Incluimos también su demostración en la que dada la función curvatura y a partir de integración se obtienen las ecuaciones paramétricas de la curva.

Teorema 1.1.6 (Teorema fundamental de curvas planas)

Sea $k : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto k(s)$ una función continua. Entonces, existe una curva parametrizada regular, $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que s es su parámetro natural y $k(s)$ su curvatura. Además, α es única salvo movimientos rígidos de \mathbb{R}^2 .

Demostración: Sea $k(s) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Si $\theta(s)$ fuese el ángulo formado por el vector tangente, $\mathbf{t}(s)$, y el eje OX , se verificaría que $\dot{\theta}(s) = k(s)$. Luego, tenemos que:

$$\theta(s) = \theta(s_0) + \int_{s_0}^s k(r) dr.$$

Como $\mathbf{t}(s)$ es unitario, entonces se verifica que: $\mathbf{t}(s) = (\cos\theta(s), \operatorname{sen}\theta(s))$. Como s es el parámetro natural, se verifica que $\mathbf{t}(s) = \dot{\alpha}(s)$. Por tanto

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \left(\int_{s_0}^s \cos\theta(r) dr, \int_{s_0}^s \operatorname{sen}\theta(r) dr \right)$$

donde se puede ver fácilmente que α es c.r.p.n. con curvatura $k(s) = \dot{\theta}(s)$.

Veamos ahora la unicidad.

Supongamos que existe $\beta(s)$ con $k_\beta(s) = k(s)$. Entonces $k(s) = \dot{\bar{\theta}}(s)$, donde $\bar{\theta}(s)$ es el ángulo que forma el vector tangente de $\beta(s)$ con el eje OX . Entonces nos queda:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(s) &= \bar{\theta}(s_0) + \int_{s_0}^s k(r) dr \\ \beta(s) &= \beta(s_0) + \left(\int_{s_0}^s \cos(\bar{\theta}(s_0) + \int_{s_0}^r k(t) dt) dr, \int_{s_0}^s \operatorname{sen}(\bar{\theta}(s_0) + \int_{s_0}^r k(t) dt) dr \right). \end{aligned}$$

Tenemos que $\bar{\theta}(s) - \theta(s) = \theta_0$, para todo s con θ_0 constante.

Vamos a considerar la curva $\beta(s)$ girada este ángulo θ_0 . Esta curva girada y $\alpha(s)$ tienen el mismo ángulo, $\theta(s)$, que es el ángulo que forma la tangente de $\alpha(s)$ con el eje OX . La diferencia entre $\alpha(s)$ y la curva $\beta(s)$ girada es una traslación de vector constante que forma el vector $\beta(s_0)$ con $\alpha(s_0)$.

Por tanto, ambas curvas son iguales salvo movimientos rígidos. \square

1.2. Definiciones y resultados sobre curvas alabeadas

Al igual que para curvas planas, recordamos algunas definiciones y resultados importantes sobre curvas alabeadas, los cuales se pueden encontrar en [1] y [2].

Definición 1.2.1 Una **Curva Parametrizada Regular** en \mathbb{R}^3 es una aplicación:

$$\begin{aligned} \alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

tal que:

1. $\alpha \in \mathcal{C}^k$, $k \geq 1$ (Condición de Diferenciabilidad)

2. $\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} \neq 0$, $\forall t \in (a, b)$ (Condición de Regularidad).

Si además $\|\alpha'(t)\| = 1$, entonces diremos que la curva regular está parametrizada naturalmente (c.r.p.n.).

Definición 1.2.2 Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. en \mathbb{R}^3 . Se define el **tangente** de la curva α en el punto $\alpha(s_0)$ al vector:

$$\mathbf{t}(s_0) = \frac{\dot{\alpha}(s_0)}{\|\dot{\alpha}(s_0)\|}.$$

Definición 1.2.3 Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. en \mathbb{R}^3 . Se define el **vector normal principal** de la curva α en el punto $\alpha(s_0)$ tal que $\ddot{\alpha}(s_0) \neq \mathbf{0}$ como:

$$\mathbf{n}(s_0) = \frac{\ddot{\alpha}(s_0)}{\|\ddot{\alpha}(s_0)\|}$$

que es unitario y ortogonal al vector tangente $\mathbf{t}(s_0)$.

Definición 1.2.4 Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. en \mathbb{R}^3 . Se define el **vector binormal** de la curva α en el punto $\alpha(s_0)$ tal que $\ddot{\alpha}(s_0) \neq \mathbf{0}$ como:

$$\mathbf{b}(s_0) = \mathbf{t}(s_0) \times \mathbf{n}(s_0)$$

que es unitario y ortogonal a los vectores tangente y normal principal en el punto $\alpha(s_0)$.

Definición 1.2.5 Dada una c.r.p.n, $\alpha = \alpha(s)$ en \mathbb{R}^3 , al triedro

$$\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$$

se le llama **Triedro o Referencia de Frenet** en el punto $\alpha(s)$ de la curva α . Este triedro forma una referencia (móvil) ortonormal y directa de \mathbb{R}^3 en cada punto de la curva.

Definición 1.2.6 Se define la **curvatura** de una curva $\alpha = \alpha(s)$ en \mathbb{R}^3 como: $k(s) = \|\ddot{\alpha}(s)\|$.

Proposición 1.2.7 Sea $\alpha = \alpha(t)$ una curva parametrizada regular. Entonces:

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

1.3. Funciones elípticas de Jacobi

Vamos a definir unas funciones que usaremos a lo largo del trabajo y que nos serán muy útiles para resolver cálculos de integración (ver [3]).

Definición 1.3.1 Las **funciones elípticas de Jacobi** son funciones definidas a partir de la integral elíptica de primera especie. Considérese la integral elíptica incompleta de primera especie definida como:

$$u(y, k) = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

La inversa de esta función es la primera de las tres funciones elípticas de Jacobi:

$$y = sn(u, k)$$

que se denomina **seno elíptico de Jacobi**, donde $arcsen y = am(u, k)$ y se denomina **amplitud de u** .

Las otras dos funciones elípticas de Jacobi se definen a partir de esta por las relaciones siguientes:

$$\begin{cases} cn(u, k) = \sqrt{1 - sn^2(u, k)}, \\ dn(u, k) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(u, k)}, \end{cases}$$

donde $cn(u, k)$ se denomina **coseno elíptico de Jacobi** y $dn(u, k)$ la **delta elíptica de Jacobi**.

A continuación, vamos a enumerar algunas relaciones entre las funciones de Jacobi, que aparecen en [3].

Proposición 1.3.2 *Se verifican las siguientes propiedades:*

1. $sn(ku, 1/k) = ksn(u, k)$,
2. $cn(ku, 1/k) = dn(u, k)$,
3. $dn(ku, 1/k) = cn(u, k)$,

Proposición 1.3.3 *Se verifica que:*

1. $\int sn(u, k) du = \frac{1}{k} \log(dn(u, k) - kcn(u, k))$,
2. $\int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k'^2 \cosh^2 \theta}} = \int_0^{(1/dn(\cosh \phi, k))^{-1}} du = \left(\frac{1}{dn(\cosh \phi, k)} \right)^{-1}$
donde $0 < \phi < \cosh^{-1}(1/k')$,
3. $\int \frac{sn(u, k)}{dn(u, k)} du = \frac{1}{k'k} \arctan \left(\frac{k'k(1 + cn(u, k))}{k^2 cn(u, k) - k'^2} \right)$.

Capítulo 2

Curvas cuya curvatura depende de la distancia al origen

El primer caso que vamos a estudiar es el de la curvatura dependiendo de la distancia a un punto. En particular, vamos a tomar como punto el origen de coordenadas.

Este caso viene motivado por el movimiento de un objeto en órbita sometido a la Fuerza Gravitatoria y la Segunda Ley de Kepler. Pasamos a describirlo utilizando [5].

La **Segunda Ley de Kepler** dice que: “Los vectores con origen el Sol y destino un planeta, barren áreas iguales en tiempos iguales, es decir, se conserva el momento angular”.

El **momento angular** se define como $\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$ donde m es la masa, \vec{r} es el vector posición y \vec{v} es el vector velocidad.

La velocidad orbital de un planeta, que es la velocidad a la que se desplaza por su órbita, es variable, de forma inversa a la distancia al Sol, es decir, a mayor distancia al Sol la velocidad orbital será menor. Por tanto, la velocidad es máxima en el punto más cercano al Sol y mínima en su punto más lejano.

Como se describe en la Figura 2.1, el área, A_1 , que describe el vector Sol-Planeta en un cierto intervalo de tiempo, t , es igual al área, A_2 , que describe

otro vector Sol-Planeta en el mismo intervalo de tiempo.

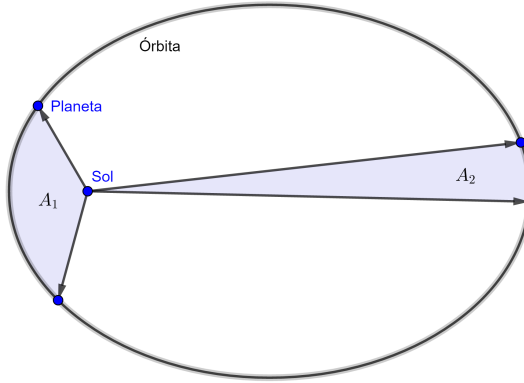


Figura 2.1: Segunda Ley de Kepler.

2.1. Movimiento bajo fuerza gravitacional

Supongamos que tenemos un objeto en órbita. Las ecuaciones del movimiento de Newton son:

$$\mathbf{F}(X) = mX'',$$

donde X es la posición, X' la velocidad y X'' la aceleración del objeto.

El objeto se mueve a través del espacio bajo una fuerza central, ya que dicho objeto está en órbita. Luego, la fuerza también puede expresarse como:

$$\mathbf{F}(X) = -f(r)X \tag{2.1.1}$$

donde $r = \|X\|$ es la distancia al origen y $f(r)$ es una función continua.

Por tanto, el movimiento satisface la ecuación:

$$X'' = -\frac{1}{m}f(r)X, \tag{2.1.2}$$

y la Segunda Ley de Kepler (Conservación del momento angular):

$$X \times X' = C,$$

con C un vector constante. El movimiento se encuentra en un plano, así que podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que es el plano OXY y si ponemos la curva en coordenadas polares, tenemos que el momento angular lo podemos calcular a partir de la posición y la velocidad:

$$\begin{aligned} X &= (r(t)\cos\phi(t), r(t)\sen\phi(t), 0), \\ X' &= (r'(t)\cos\phi(t) - r(t)\phi'(t)\sen\phi(t), r'(t)\sen\phi(t) + r(t)\phi'(t)\cos\phi(t), 0), \end{aligned}$$

$$\|X \times X'\| = r(t)^2\phi'(t)\cos^2\phi(t) + r(t)^2\phi'(t)\sen^2\phi(t) = r(t)^2\phi'(t).$$

Por tanto, obtenemos:

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = \|X \times X'\| = c, \quad (2.1.3)$$

donde $c = \|C\|$ es constante. Ahora definimos una función $\Phi(r)$ como:

$$\frac{d\Phi}{dr} = rf(r), \quad (2.1.4)$$

y

$$V(x, y, z) = \Phi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

Con estas funciones obtenemos:

$$\begin{aligned} \nabla V(x, y, z) &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} \right) \\ &= \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \right. \\ &\quad \left. \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \right. \\ &\quad \left. \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= \left(f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})x, f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})y, f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})z \right) \\ &= f(r)X. \end{aligned}$$

Por tanto, según (2.1.1), $\mathbf{F}(X) = -\nabla V$.

Con esto hemos probado que V es la energía potencial del movimiento.

Luego, el movimiento satisface la conservación de la energía, es decir, la energía mecánica, $E = E_c + V$, se conserva. Por tanto:

$$E = E_c + V = \frac{1}{2}m\|X'\|^2 + V = E_0,$$

con E_c la energía cinética, V la energía potencial y E_0 constante.

Calculamos:

$$\begin{aligned}\|X'\|^2 &= r'^2 \cos^2 \phi + r^2 \phi'^2 \sin^2 \phi - 2r'r\phi' \cos \phi \sin \phi \\ &\quad + r'^2 \sin^2 \phi + r^2 \phi'^2 \cos^2 \phi + 2r'r\phi' \cos \phi \sin \phi \\ &= r'^2 + r^2 \phi'^2.\end{aligned}$$

Obtenemos que:

$$E_0 = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] + \Phi(r). \quad (2.1.5)$$

Ahora, usando (2.1.3) y (2.1.5) vamos a calcular la expresión de r :

$$E_0 = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{c}{r^2} \right)^2 \right] + \Phi(r),$$

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = -E_0 + \frac{1}{2}m \frac{c^2}{r^2} + \Phi(r),$$

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{-E_0 + \frac{1}{2}m \frac{c^2}{r^2} + \Phi(r)}{\frac{1}{2}m},$$

luego $r(t)$ debe verificar la ecuación:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{-2E_0 + m \frac{c^2}{r^2} + 2\Phi(r)}{m}}. \quad (2.1.6)$$

Ahora vamos a calcular la curvatura de las soluciones. Para ello, necesitamos la fórmula general de la curvatura de la Proposición 1.3.3:

$$k(t) = \frac{\|X' \times X''\|}{\|X'\|^3}.$$

Calculamos el numerador usando (2.1.2) y (2.1.3):

$$\begin{aligned} \|X' \times X''\| &= \|X' \times -\frac{f(r)}{m}X\| \\ &= \frac{f(r)c}{m}. \end{aligned}$$

Nos queda la curvatura:

$$k(t) = \frac{cf(r)}{m\|X'\|^3}. \quad (2.1.7)$$

Calculamos el denominador usando la conservación de la energía y así obtenemos:

$$\begin{aligned} \|X'\|^2 &= 2\left(\frac{E_0 - V}{m}\right), \\ \|X'\| &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m}}\sqrt{E_0 - V}, \\ \|X'\|^3 &= \frac{\sqrt{8}}{m\sqrt{m}}(E_0 - V)^{3/2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión de $\|X'\|^3$ en (2.1.7) y usando (2.1.4):

$$k(t) = \frac{cf(r)}{m\sqrt{8}} \frac{m\sqrt{m}}{(E_0 - V)^{3/2}} = \frac{c\Phi'(r)\sqrt{m}}{r\sqrt{8}(E_0 - \Phi(r))^{3/2}}. \quad (2.1.8)$$

Observamos que k sólo depende de r . Luego, si denotamos:

$$\mu(r) = (E_0 - \Phi(r))^{-1/2}, \quad (2.1.9)$$

de (2.1.8) obtenemos:

$$\frac{d\mu}{dr} = \frac{\Phi'(r)}{2\sqrt{E_0 - \Phi(r)}^3} = \frac{\sqrt{2}}{c\sqrt{m}}rk(r). \quad (2.1.10)$$

Si $k(r)$ es una función tal que $rk(r)$ es continua, entonces podemos resolver (2.1.10) para μ . Sustituyendo $E_0 = 0$ en (2.1.9), tenemos que $\Phi(r) = -1/\mu(r)^2$, y de la conservación de la energía e integrando obtenemos ϕ , con lo cual ya tenemos la curva X .

En resumen, obsérvese que mediante este procedimiento, lo que conseguimos es que si conocemos la curvatura, k , podemos encontrar la ecuación de la curva, X . Esto es parte de la prueba del resultado:

Teorema 2.1.1 *Sea $k(r)$ una función tal que $rk(r)$ es continua. Entonces el problema de determinar la curva cuya curvatura es $k(r)$, donde r es la distancia al origen, se puede resolver mediante integración.*

2.2. Caso $k(r) = r$

Nuestro objetivo es encontrar la expresión analítica de las curvas que verifican $k(r) = r$. Para ello necesitamos encontrar la expresión de ϕ .

El primer paso es resolver (2.1.10), sustituyendo $k(r) = r$:

$$\frac{d\mu}{dr} = \frac{\sqrt{2}}{c_0\sqrt{m}}r^2,$$

integrando,

$$\mu(r) = \frac{\sqrt{2}}{c_0\sqrt{m}}\left(\frac{r^3}{3} + a\right),$$

donde a es una constante de integración.

Con $E_0 = 0$ de (2.1.9) tenemos que:

$$\Phi(r) = \frac{-1}{\mu(r)^2} = \frac{-9mc_0^2}{2(r^3 + a)^2}, \quad (2.2.1)$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{27mr^2c_0^2}{(r^3 + a)^3}.$$

Vamos a comprobar que la fuerza $\mathbf{F}(X)$ es proporcional a $r^2/(r^3 + a)^3$. Para ello de (2.1.4) tenemos que:

$$f(r) = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} = \frac{27mrc_0^2}{(r^3 + a)^3}. \quad (2.2.2)$$

Sabemos de (2.1.1) que:

$$\mathbf{F}(X) = -f(r)X.$$

Calculando su módulo, se tiene que:

$$\|\mathbf{F}(X)\| = |f(r)|\|X\| = 27mc_0^2 \frac{r^2}{(r^3 + a)^3}.$$

Como podemos observar, hemos probado que es proporcional a $r^2/(r^3 + a)^3$. Aplicando (2.1.5), para $E_0 = 0$, y (2.2.1), obtenemos:

$$\frac{1}{2}m \left[(r')^2 + r^2(\phi')^2 \right] = -\Phi(r) = \frac{9mc_0^2}{2(r^3 + a)^2}$$

luego

$$(r')^2 + r^2(\phi')^2 = \frac{9c_0^2}{(r^3 + a)^2}.$$

Sustituyendo el valor de c_0 de (2.1.3) se tiene:

$$(r')^2 + r^2(\phi')^2 = \frac{9r^4(\phi')^2}{(r^3 + a)^2}. \quad (2.2.3)$$

Una de las curvas que verifican estas condiciones es

$$X(t) = (r_0 \cos(\alpha t), r_0 \sin(\alpha t)),$$

donde

$$\begin{cases} r(t) = r_0 \\ \alpha = \frac{d\phi}{dt} = 3c_0/r_0(r_0^3 + a) \end{cases} \quad (2.2.4)$$

con r_0 constante.

De (2.1.3) se tiene que esta curva ha de verificar:

$$r_0^2 \frac{d\phi}{dt} = r_0^2 \alpha = c_0.$$

Si en esta última expresión sustituimos el valor de α obtenemos:

$$\begin{aligned} r_0^2 \frac{3c_0}{r_0(r_0^3 + a)} &= c_0, \\ 3r_0 &= r_0^3 + a, \\ a &= 3r_0 - r_0^3. \end{aligned}$$

Derivando obtenemos que:

$$\begin{aligned} X''(t) &= (-\alpha^2 r_0 \cos(\alpha t), -\alpha^2 r_0 \sin(\alpha t)), \\ X''(t) &= -\alpha^2 X(t). \end{aligned}$$

Para que $X(t)$ sea solución de (2.1.2) debe verificar que:

$$\alpha^2 = \frac{1}{m} f(r).$$

Sustituyendo $f(r)$ de (2.2.3) nos queda:

$$\alpha^2 = \frac{27r_0 c_0^2}{(r_0^3 + a)^3}.$$

De (2.2.4) tenemos también que:

$$\alpha^2 = \frac{9c_0^2}{r_0^2(r_0^3 + a)^2}.$$

Igualando estas dos últimas expresiones de α^2 nos queda que:

$$\begin{aligned} r_0^3 + a &= 3r_0^3, \\ a &= 2r_0^3, \\ 3r_0 - r_0^3 &= 2r_0^3, \\ r_0^2 &= 1, \\ r_0 &= \pm 1. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $r_0 = 1$, ya que una distancia no puede ser negativa. Otras soluciones que puedan tener $r(t)$ constante son sólo puntos aislados.

Otra forma de abordar el problema es buscar soluciones donde r_0 no sea constante y encontrar $\phi = \phi(r)$. Usando (2.2.3) nos queda:

$$1 + r^2(\phi')^2 = \frac{9r^4}{(r^3 + a)^2}(\phi')^2,$$

$$\left[\frac{9r^4}{(r^3 + a)^2} - r^2 \right] (\phi')^2 = 1,$$

$$\frac{9r^4 - r^2(r^3 + a)^2}{(r^3 + a)^2} (\phi')^2 = 1,$$

$$(\phi')^2 = \frac{(r^3 + a)^2}{9r^4 - r^2(r^3 + a)^2},$$

$$\phi' = \frac{r^3 + a}{r\sqrt{9r^2 - (r^3 + a)^2}}.$$

Luego, resulta que ϕ es:

$$\phi = \int \frac{r^3 + a}{r\sqrt{9r^2 - (r^3 + a)^2}} dr. \quad (2.2.5)$$

Esta integral no es fácil de resolver. Un caso especial es aquél en el que $a = 0$. En este caso nos queda:

$$\phi - \phi_0 = \frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{r^2}{3}\right), \quad r^2 = 3\text{sen}2(\phi - \phi_0)$$

Esta curva es la Lemniscata de Bernoulli que se muestra en la Figura 2.2:

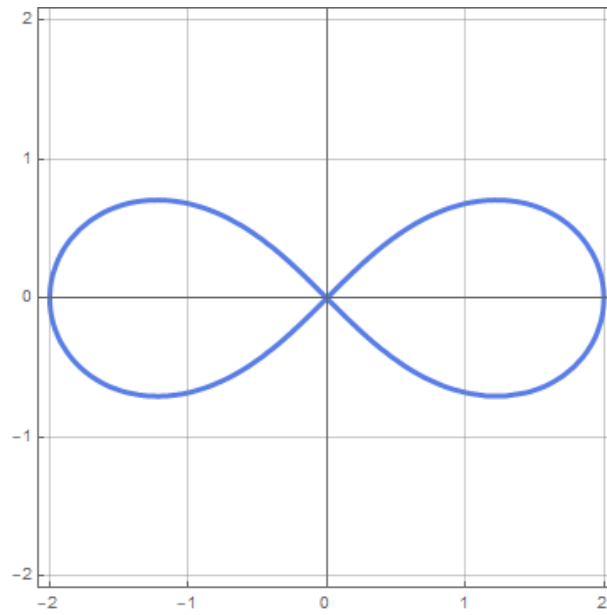


Figura 2.2: Lemniscata de Bernoulli.

Capítulo 3

Curvas con curvatura de la forma $k = k(y)$

Las curvas que tienen como parámetro la distancia signada al eje OX pueden parametrizarse mediante la expresión:

$$\alpha(y) = (f(y), y).$$

Según la Proposición 1.1.4, la curvatura de estas curvas verifica la ecuación:

$$k(x, y) = \frac{-f''(y)}{(1 + f'(y)^2)^{3/2}} = k(y).$$

Si hacemos el cambio:

$$\begin{cases} f'(y) = g(y) \\ f''(y) = g'(y), \end{cases}$$

nos queda:

$$k(y) = \frac{f''(y)}{(1 + f'(y)^2)^{3/2}} = \frac{g'(y)}{(\sqrt{1 + g(y)^2})^3}.$$

Integrando:

$$\int k(y) dy = \int \frac{g'(y)}{(\sqrt{1 + g(y)^2})^3} dy.$$

Si denotamos $\int k(y) dy = F(y) + c$ con $c \in \mathbb{R}$, entonces:

$$F(y) + c = \int \frac{g'(y)}{(\sqrt{1 + g(y)^2})^3} dy.$$

Es fácil comprobar que, en general, se tiene que: $\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}^3} dx = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Por tanto:

$$F(y) + c = g(y)(1 + g(y)^2)^{-1/2}.$$

Tomando cuadrados:

$$(F(y) + c)^2 = g(y)^2(1 + g(y)^2)^{-1} = \frac{g(y)^2}{1 + g(y)^2} = 1 - \frac{1}{1 + g(y)^2}.$$

Luego:

$$(F(y) + c)^2 = 1 - (1 + g(y)^2)^{-1},$$

$$(1 + g(y)^2)^{-1} = 1 - (F(y) + c)^2,$$

$$1 + g(y)^2 = \frac{1}{1 - (F(y) + c)^2},$$

$$g(y)^2 = \frac{1}{1 - (F(y) + c)^2} - 1,$$

$$g(y) = -\frac{F(y) + c}{\sqrt{1 - (F(y) + c)^2}}.$$

Deshaciendo el cambio, tenemos:

$$f'(y) = -\frac{F(y) + c}{\sqrt{1 - (F(y) + c)^2}}.$$

Entonces, obtenemos que:

$$f(y) = -\int \frac{F(y) + c}{\sqrt{1 - (F(y) + c)^2}} dy. \quad (3.0.1)$$

Por tanto, hemos llegado a que las curvas que tienen como parámetro la distancia a una recta, que podemos fijar como el eje OX , tienen la forma:

$$\alpha(y) = (f(y), y)$$

con

$$f(y) = - \int \frac{F(y) + c}{\sqrt{1 - (F(y) + c)^2}} dy,$$

donde $F(y) + c = \int k(y) dy$, $c \in \mathbb{R}$.

3.1. Curvas planas parametrizadas naturalmente cuya curvatura es $k = k(y)$

Si θ denota la determinación continua del ángulo que forma el eje OX con el vector tangente, tenemos:

$$\dot{\theta}(s) = k(s), \quad \dot{x}(s) = \cos\theta(s), \quad \dot{y}(s) = \sin\theta(s). \quad (3.1.1)$$

Una vez que tengamos $k(s)$, la curva se puede encontrar mediante tres integrales. Nos interesa el caso en el que la curvatura de la curva α dependa de la distancia a una recta. Si $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^2$ es un vector unitario, entonces $\alpha \cdot \mathbf{e}$ es la distancia signada a la recta ortogonal a \mathbf{e} que pasa por el origen. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar que $\mathbf{e} := (0, 1)$ y escribimos $\alpha = (x, y)$. Vamos a estudiar la condición de que $k = k(y)$ donde $y = \alpha \cdot \mathbf{e}$ representa la distancia signada al eje OX . En primer lugar, vamos a demostrar que tenemos cierto control sobre la componente normal del vector \mathbf{e} cuando $k = k(y)$.

Lema 3.1.1 *Sea $\alpha = (x, y)$ una curva plana cuyo vector normal es \mathbf{n} . Si $k = k(y)$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e} + F(y) + c = 0,$$

donde $\frac{dF}{dy} = k(y)$.

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos suponer que α está parametrizada por la longitud de arco. Usando la hipótesis de que $k = k(y)$, tenemos que:

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) = \dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{e} = -k(\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}) = -k(y)\dot{y}$$

Integrando tenemos que: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e} + F(y)$ es constante, lo que prueba el lema. \square

Podemos usar el Lema 3.1.1 para encontrar mediante integración curvas cuya curvatura es $k = k(y)$. Escribiendo $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ en coordenadas cartesianas, tenemos que $\mathbf{t}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$ y $\mathbf{n}(s) = (-\dot{y}(s), \dot{x}(s))$ con $\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2 = 1$ ya que $\dot{\alpha}(s)$ es un vector unitario.

? Usando el lema anterior tenemos: $\dot{x}(s) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) = -F(y) - c$. Integrando obtenemos que la primera componente de la curva es:

$$x(s) = -\left(cs + \int F(y(s)) ds\right). \quad (3.1.2)$$

Ahora, la segunda componente la obtenemos despejando de $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$. Nos queda:

$$\dot{y}^2 = 1 - \dot{x}^2 = 1 - (F(y) + c)^2. \quad (3.1.3)$$

Las soluciones constantes, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, de esta ecuación son rectas horizontales.

Despejando s de (3.1.3) obtenemos:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1 - (F(y) + c)^2}} = s, \quad (3.1.4)$$

donde $-1 < F(y) + c < 1$.

Como resumen, hemos probado el siguiente resultado en el espíritu del Teorema 2.1.1 del Capítulo 2.

Teorema 3.1.2 *Sea $k = k(y)$ una función continua no nula. Entonces el problema de terminar la curva cuya curvatura es $k(y)$, con y la distancia signada al eje OX , se puede resolver localmente por integración considerando $(x(s), y(s))$ la c.r.p.n, donde $y(s)$ viene dada por (3.1.4) con:*

$$\int k(y) dy = F(y) + c, \quad c \text{ constante}$$

y $x(s)$ se expresa en términos de $y(s)$ y c mediante (3.1.2). Para cualquier c dado, tal curva se determina de manera única salvo traslaciones en la dirección del eje OX .

Observación 3.1.3 Las tres dificultades principales que se pueden encontrar al llevar a cabo la estrategia descrita en el Teorema 3.1.2 para determinar una curva plana cuya curvatura depende de la distancia a una recta ($k = k(y)$) son las siguientes:

1. La integración de (3.1.4): Incluso en el caso de que $F(y)$ fuese un polinomio, la integral de (3.1.4) no es necesariamente elemental. Por ejemplo, cuando $F(y)$ es un polinomio cuadrático, (3.1.4) puede ser resuelta usando funciones elípticas de Jacobi, como se verá más adelante. Esto equivale a que $k(y)$ sea lineal, de modo que $k(y) = 2\lambda + \mu$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. La integración realizada en (3.1.4) nos da $s = s(y)$: No siempre es posible obtener explícitamente $y = y(s)$, lo que es necesario para determinar la representación analítica de la curva.
3. Incluso sabiendo explícitamente $y = y(s)$, la integración (3.1.2) para obtener $x = x(s)$ puede ser difícil de calcular usando funciones elementales o conocidas.

Ejemplo 3.1.4 Vamos a ver las curvas que se obtienen utilizando el Teorema 3.1.2 para $k = k_0 > 0$, con k_0 constante. Tenemos que:

$$\begin{aligned} F(y) &= k_0 y, \\ s &= \int \frac{dy}{\sqrt{1 - (k_0 y + c)^2}} = \frac{\arcsen(k_0 y + c)}{k_0}. \end{aligned}$$

Despejando de s tenemos que:

$$y(s) = \frac{\sen(k_0 s) - c}{k_0}.$$

Entonces podemos obtener $x(s)$ y nos queda:

$$x(s) = \frac{\cos(k_0 s)}{k_0}.$$

Por tanto, nos queda que la curva es:

$$\alpha(s) = \frac{1}{k_0} (\cos(k_0 s), \sen(k_0 s) - c)$$

que se corresponde con circunferencias de radio $\frac{1}{k_0}$ y centro $(0, -c)$.

No obstante, a lo largo del trabajo estudiaremos seis situaciones diferentes en las que tenemos éxito (al menos parcialmente) con el procedimiento descrito en el Teorema 3.1.2. Recuperaremos algunas curvas muy conocidas y descubriremos nuevas familias de curvas planas caracterizadas por este tipo de propiedad geométrica.

3.2. Curvas elásticas

Vamos a dar unas definiciones previas de [7] que necesitaremos a lo largo de esta sección.

Definición 3.2.1 Una c.r.p.n. α se dice que es una **curva elástica** bajo tensión σ si satisface la ecuación diferencial:

$$2\ddot{k} + k^3 - \sigma k = 0 \quad (3.2.1)$$

para algún valor $\sigma \in \mathbb{R}$. Si $\sigma = 0$, entonces la curva se denomina **curva elástica libre**.

Multiplicando (3.2.1) por $2\dot{k}$ e integrando podemos introducir la **energía** de una curva elástica como:

$$E := \dot{k}^2 + \frac{1}{4}k^4 - \frac{\sigma}{2}k^2. \quad (3.2.2)$$

En esta sección vamos a estudiar curvas planas que satisfacen:

$$k(y) = 2\lambda y + \mu, \quad \lambda > 0, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Mediante traslación en el eje OY , podemos considerar equivalentemente que:

$$k(y) = 2\lambda y, \quad \lambda > 0. \quad (3.2.3)$$

La solución trivial, $y(s) = 0$ de (3.2.1) corresponde al eje OX .

Por el Teorema 3.1.2, integrando $k(y) = 2\lambda y$ respecto de y , podemos tomar $F(y) = \lambda y^2 + c$ y de (3.1.3) nos queda que:

$$\dot{y}^2 = 1 - (\lambda y^2 + c)^2 = 1 - \lambda^2 y^4 - c^2 - 2\lambda y^2 c = (1 + c + \lambda y^2)(1 - c - \lambda y^2). \quad (3.2.4)$$

En el siguiente resultado vamos a mostrar que las curvas cuya curvatura verifica (3.2.3) son elásticas.

Proposición 3.2.2 *Sea α una curva plana cuya curvatura satisface la condición $k(y) = 2\lambda y$, $\lambda > 0$. Entonces α es una curva elástica con tensión $\sigma = -4\lambda c$ y energía $E = 4\lambda^2(1 - c^2)$.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos considerar que la curva α está parametrizada por la longitud de arco. Para que α sea una curva elástica, debemos comprobar que la función curvatura, k , dada por (3.2.3) satisface la Definición 3.2.1.

En primer lugar, vamos a calcular la expresión de σ a partir de (3.2.1). Para ello, necesitamos las expresiones de k , k^3 y \dot{k} .

$$\begin{aligned} k &= 2\lambda y \text{ con } \lambda > 0, \\ k^3 &= 8\lambda^3 y^3, \\ \dot{k} &= 2\lambda \dot{y}, \\ \ddot{k} &= 2\lambda \ddot{y}. \end{aligned}$$

Calculamos \ddot{y} usando (3.2.4):

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \sqrt{(1 + c + \lambda y^2)(1 - c - \lambda y^2)}, \\ \ddot{y} &= \frac{2\lambda y \dot{y}(1 - c - \lambda y^2) - 2\lambda y \dot{y}(1 + c + \lambda y^2)}{2\dot{y}} \\ &= -2\lambda c y - 2\lambda^2 y^3. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.2.1) nos queda que:

$$\begin{aligned} 4\lambda \ddot{y} + 8\lambda^3 y^3 - 2\sigma \lambda y &= 0, \\ 4\lambda(-2\lambda c y - 2\lambda^2 y^3) + 8\lambda^3 y^3 - 2\sigma \lambda y &= 0, \\ 2(-2\lambda c y) - \sigma y &= 0. \end{aligned}$$

Despejando, obtenemos que $\sigma = -4\lambda c$.

Ahora, en segundo lugar, la energía la obtenemos sustituyendo en su ecuación las expresiones de σ , k y \dot{k} :

$$\begin{aligned}
E &= \dot{k}^2 + \frac{1}{4}k^4 - \frac{\sigma}{2}k^2, \\
&= (2\lambda y)^2 + 4\lambda^4 + 8c\lambda^3y^2, \\
&= 4\lambda^2(1 + c + \lambda y^2)(1 - c - \lambda y^2) + 4\lambda^4 + 8c\lambda^3y^2, \\
&= \lambda^2(4 - 4\lambda^2y^4 - 4c^2 - 8c\lambda y^2 + 4\lambda^2y^4 + 8c\lambda y^2), \\
&= 4\lambda^2(1 - c^2).
\end{aligned}$$

Con esto concluye la demostración. \square

Por otra parte, tenemos que (3.2.4) implica que $-1 \leq \lambda y^2 + c \leq 1$, es decir: $-1 - \lambda y^2 \leq c \leq 1 - \lambda y^2$, y como $\lambda y^2 \geq 0$ nos queda que:

$$c \leq 1 - \lambda y^2 \leq 1.$$

Si $c = 1$, entonces nos queda $1 \leq 1 - \lambda y^2 \leq 1$. Por tanto, en este caso, la única solución es $y = 0$.

Estudiemos el caso en el que $c < 1$.

Ahora, siguiendo la estrategia descrita en el Teorema 3.1.2, nos queda de (3.2.4):

$$s = \int \frac{dy}{\sqrt{(1 + c + \lambda y^2)(1 - c - \lambda y^2)}}, \quad (3.2.5)$$

y por (3.1.2)

$$x(s) = -(cs + \lambda \int y(s)^2 ds) \quad (3.2.6)$$

donde $c < 1$ es constante.

3.3. Curvas cuya curvatura es $k(y) = \lambda/y^2$

En esta sección vamos a estudiar curvas cuya curvatura es de la forma:

$$k(y) = \frac{\lambda}{y^2}, \text{ con } \lambda > 0. \quad (3.3.1)$$

Para que (3.3.1) esté bien definida, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $y > 0$. Se sigue del Teorema 3.1.2, en el caso $F(y) = -\lambda/y$ y la ecuación diferencial de $y = y(s)$ dada por (3.1.3), que:

$$\dot{y}^2 = 1 - (c - \lambda/y)^2 = (1 + c - \lambda/y)(1 - c + \lambda/y) \quad (3.3.2)$$

con c constante.

De la ecuación anterior se tiene que $-1 \leq c - \lambda/y \leq 1$ y como tenemos que $\lambda/y > 0$ se deduce que $c > -1$.

Por lo tanto, las curvas que cumplen (3.3.1) verifican, usando (3.1.4) y (3.1.2), que:

$$s = \int \frac{dy}{\sqrt{1 + c - \frac{\lambda}{y}} \sqrt{1 - c + \frac{\lambda}{y}}} = \int \frac{y dy}{\sqrt{(1 + c)y - \lambda} \sqrt{(1 - c)y + \lambda}} \quad (3.3.3)$$

y

$$x(s) = -cs + \lambda \int \frac{ds}{y(s)}. \quad (3.3.4)$$

Vamos a considerar distintos casos para λ y c para que la integración de (3.3.3) sea fácil de realizar.

3.3.1. Caso $\lambda = 1$ y $c = 0$

Usando (3.3.3) tenemos que:

$$s = \int \frac{y dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \sqrt{y^2 - 1}.$$

Despejando y de la expresión anterior obtenemos:

$$y(s) = \sqrt{s^2 + 1}.$$

Ahora, de (3.3.4) tenemos:

$$x(s) = \int \frac{ds}{\sqrt{s^2 + 1}} = \log(s + \sqrt{s^2 + 1}).$$

Por tanto, tenemos que nuestra curva es

$$(x(s), y(s)) = (\log(s + \sqrt{s^2 + 1}), \sqrt{s^2 + 1}), \text{ con } s \in \mathbb{R} \quad (3.3.5)$$

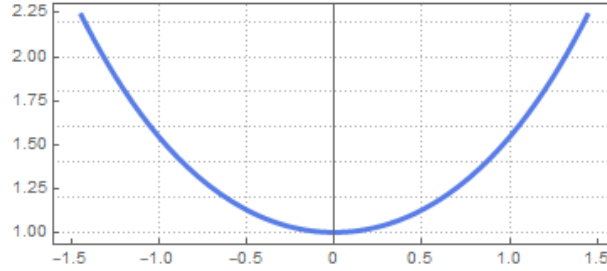


Figura 3.1: Curva con $k(y) = \lambda/y^2$, $\lambda = 1$, $c = 0$: Catenaria.

cuya curvatura viene dada por:

$$k(s) = \frac{1}{s^2 + 1}, \text{ con } s \in \mathbb{R}.$$

Esta curva no es otra que la catenaria $y = \cosh(x)$, la cual podemos verla en la Figura 3.1.

Vamos a probarlo: sabemos que $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$. Tenemos que ver que: $x(y) = \log(\sqrt{y^2 + 1} + y)$. Sustituyendo $y = \cosh(x)$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} \log(\sqrt{y^2 + 1} + y) &= \log\sqrt{\frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x} - 4}{4}} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ &= \log\left(\sqrt{\frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right), \\ &= \log\left(\sqrt{\frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right), \\ &= \log\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right), \\ &= \log(e^x), \\ &= x. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que nuestra curva es la catenaria.

En resumen, hemos demostrado el siguiente resultado:

Corolario 3.3.1 *La catenaria $y = \cosh(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (ver (3.3.5)) es la única curva plana, salvo traslaciones en el eje OX , cuya curvatura es $k(y) = 1/y^2$ y la primitiva de su curvatura $F(y) = -1/y$.*

3.3.2. Caso $\lambda = 1$ y $c = 1$

Para calcular las expresiones explícitas de este caso, nos hemos ayudado del programa MAPLE.

Usando (3.3.3) tenemos que:

$$s = \int \frac{ydy}{\sqrt{2y-1}} = \frac{(y+1)\sqrt{2y-1}}{3} \implies 9s^2 = (y+1)^2(2y-1)$$

y esto implica que:

$$y(s) = \frac{1}{2} \left((1 + 18s^2 + 6s\sqrt{1 + 9s^2})^{1/3} + \frac{1}{(1 + 18s^2 + 6s\sqrt{1 + 9s^2})^{1/3}} - 1 \right). \quad (3.3.6)$$

Por otra parte, usando (3.3.4) y (3.3.6) obtenemos, usando el programa Maple, que:

$$x(s) = -s + \frac{p(s)}{q(s)} \quad (3.3.7)$$

donde:

$$\begin{aligned} p(s) &= \left(-1 + (1 + 18s^2 + 6s\sqrt{1 + 9s^2})^{1/3} \right) \cdot \left(1944s^6 + s\sqrt{1 + 9s^2} + 324s^4(1 + 2s\sqrt{1 + 9s^2} + 12s^2(1 + 6s\sqrt{1 + 9s^2})) \right), \\ q(s) &= s \left(1 + 18s^2 + 6s\sqrt{1 + 9s^2} \right)^{2/3} \cdot \left(1 + 324s^4 + 9s\sqrt{1 + 9s^2} + 9s^2(5 + 12s\sqrt{1 + 9s^2}) \right). \end{aligned}$$

Por tanto nuestra curva es $(x(s), y(s))$ cuya curvatura es

$$k(y) = \frac{4}{\left((1 + 18s^2 + 6s\sqrt{1 + 9s^2})^{1/3} + \frac{1}{(1 + 18s^2 + 6s\sqrt{1 + 9s^2})^{1/3}} - 1 \right)^2}$$

con $s \in \mathbb{R}$, representada en la Figura 3.2.

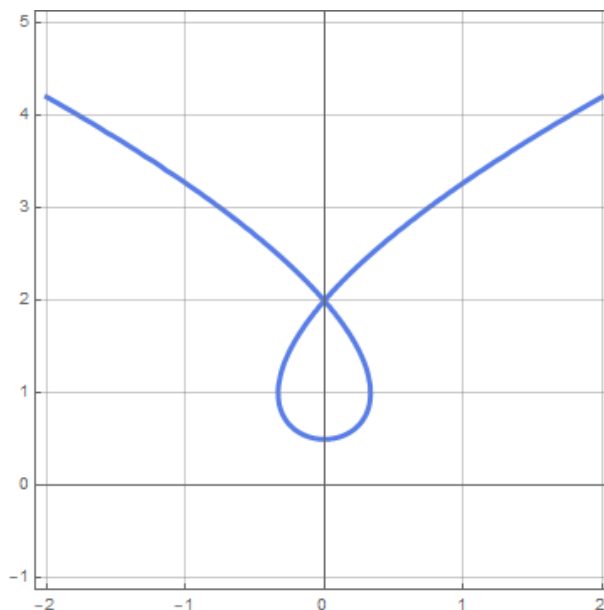


Figura 3.2: Curva con $k(y) = \lambda/y^2$, $\lambda = 1$, $c = 1$.

Corolario 3.3.2 *La curva $(x(s), y(s))$, $s \in \mathbb{R}$, dada por (3.3.7) y (3.3.6) es la única curva plana (salvo traslaciones en el eje OX) cuya curvatura es $k = 1/y^2$ y la primitiva de su curvatura $F(y) = 1 - 1/y$.*

3.4. Curvas cuya curvatura es $k(y) = \lambda \cos y$

El propósito de esta sección es estudiar curvas planas que satisfacen

$$k(y) = \lambda \cos y, \quad \lambda > 0. \quad (3.4.1)$$

Las soluciones triviales de (3.4.1) son las rectas horizontales $y = (2m + 1)\pi/2$, $m \in \mathbb{Z}$. Para estudiar las soluciones no triviales usamos el Teorema 3.1.2 con $F(y) = \lambda \sin y$ y obtenemos:

$$\dot{y}^2 = 1 - (\lambda \sin y + c) \quad (3.4.2)$$

con c constante. De (3.4.2) tenemos que se tiene que verificar que $-1 \leq \lambda \sin y + c \leq 1$ y esto implica que $-(1 + \lambda) \leq c \leq 1 + \lambda$.

Por tanto, tenemos que las curvas que satisfacen (3.4.1) vienen dadas por:

$$s = \int \frac{dy}{\sqrt{(1 - (\lambda \operatorname{sen} y + c)^2)}}, \quad x(s) = -cs - \lambda \int \operatorname{sen} y(s) ds$$

con $c \in (-1 - \lambda, 1 + \lambda)$.

En general no es fácil integrar estas expresiones y despejar explícitamente $y = y(s)$ ya que esto implica integrales elípticas y trigonométricas. El caso en el que sí podemos obtener dichas ecuaciones es cuando $c = 0$. Es importante el caso en el que $k(y)$ verifica la siguiente ecuación diferencial, similar a (3.2.2):

$$\dot{k}^2 + k^4 + (1 - 2\lambda^2)k^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 1)$$

Tenemos que distinguir tres casos según los valores de λ .

3.4.1. Caso $c = 0$, $0 < \lambda < 1$

Usando la integral elíptica de primera clase $F(\cdot, \lambda)$ y las funciones elípticas elementales de Jacobi de módulo λ , definidas en el Capítulo 1, obtenemos que

$$s = \int \frac{dy}{\sqrt{(1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 y)}} = F(y, \lambda) \implies y(s) = \operatorname{am}(s, \lambda),$$

luego, usando la Proposición 1.3.3, obtenemos:

$$x(s) = -\lambda \int \operatorname{sen} y(s) ds = -\lambda \int \operatorname{sn}(s, \lambda) ds = -\log(\operatorname{dn}(s, \lambda) - \lambda \operatorname{cn}(s, \lambda)).$$

Por tanto, tenemos que la curva es

$$(x(s), y(s)) = (-\log(\operatorname{dn}(s, \lambda) - \lambda \operatorname{cn}(s, \lambda)), \operatorname{am}(s, \lambda)) \quad (3.4.3)$$

cuya curvatura es

$$k(s) = \lambda \operatorname{cn}(s, \lambda) \text{ con } s \in \mathbb{R}.$$

Podemos verla en la Figura 3.3.



Figura 3.3: Curva con $k(y) = \lambda \cos y$, $c = 0$, $0 < \lambda < 1$.

3.4.2. Caso $c = 0$, $\lambda = 1$

En este caso solo necesitamos las siguientes funciones elementales:

$$s = \int \frac{dy}{\cos y} = 2 \operatorname{arctanh}(\tan y/2) \implies y(s) = 2 \operatorname{arctan}(\tanh s/2)$$

y entonces, nos queda:

$$x(s) = - \int \operatorname{sen} y(s) ds = - \int \tanh s ds = -\log(\cosh s).$$

Luego, nuestra curva es

$$(x(s), y(s)) = (-\log(\cosh s), 2 \operatorname{arctan}(\tanh s/2)) \quad (3.4.4)$$

cuya curvatura viene dada por

$$k(s) = \cos(2 \operatorname{arctan}(\tanh s/2)) \text{ con } s \in \mathbb{R}.$$

Podemos verla en la Figura 3.4.

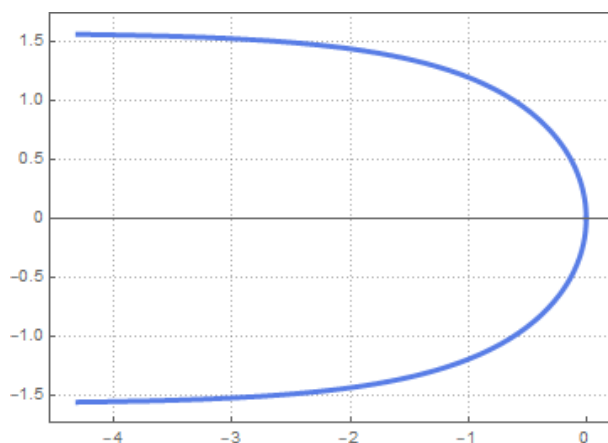


Figura 3.4: Curva con $k(y) = \lambda \cos y$, $c = 0$, $\lambda = 1$.

3.4.3. Caso $c = 0$, $\lambda > 1$

La resolución de este caso es similar a la del caso $c = 0$, $0 < \lambda < 1$. Usando la Proposición 1.3.2, tenemos que nuestra curva es:

$$(x(s), y(s)) = \left(-\log\left(\operatorname{dn}\left(\lambda s, \frac{1}{\lambda}\right)\right) - \frac{1}{\lambda} \operatorname{cn}\left(\lambda s, \frac{1}{\lambda}\right), \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\lambda} \operatorname{sn}\left(\lambda s, \frac{1}{\lambda}\right)\right) \right) \quad (3.4.5)$$

Esta curva está representada en la Figura 3.5.

Concluimos esta sección con el siguiente resultado.

Corolario 3.4.1 *La curva $(x(s), y(s))$, $s \in \mathbb{R}$, dada por (3.4.3) si $0 < \lambda < 1$, por (3.4.4) si $\lambda = 1$ y por (3.4.5) si $\lambda > 1$ es la única curva plana (salvo traslaciones en el eje OX) cuya curvatura es $k(y) = \lambda \cos y$, $\lambda > 0$, con curvatura primitiva $F(y) = \lambda \sin y$.*

3.5. Curvas cuya curvatura es $k(y) = \lambda \cosh y$

En esta sección vamos a estudiar curvas planas cuya curvatura es

$$k(y) = \lambda \cosh y, \quad \lambda > 0. \quad (3.5.1)$$

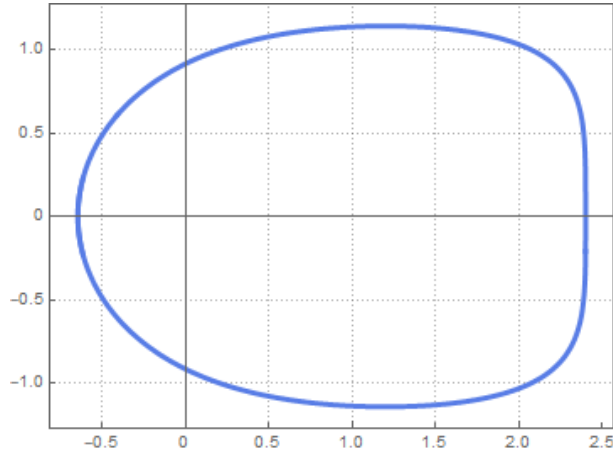


Figura 3.5: Curva con $k(y) = \lambda \cos y$, $c = 0$, $\lambda > 1$.

Usando el Teorema 3.1.2 tenemos que $F(y) = \lambda \sinh y$, y usando (3.1.3) obtenemos la siguiente EDO:

$$\dot{y}^2 = 1 - (\lambda \sinh y + c)^2 \quad (3.5.2)$$

con c constante. Entonces, podemos determinar las curvas planas $(x(s), y(s))$ que satisfacen (3.5.1) mediante:

$$s = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - (\lambda \sinh y + c)^2}}, \quad x(s) = -cs - \lambda \int \sinh y(s) ds$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Si $c \neq 0$, la integración para obtener s no nos permite obtener explícitamente $y = y(s)$ ya que son funciones elípticas e hiperbólicas donde y es difícil de despejar.

Si $c = 0$, tenemos que la curvatura satisface la siguiente ecuación diferencial, que es similar a la energía de la elástica dada por (3.2.2):

$$\dot{k}^2 + k^4 - (1 + 2\lambda^2)k^2 = -\lambda^2(\lambda^2 + 1).$$

Usando la Proposición 1.3.3 y las funciones elípticas de Jacobi, obtenemos

que:

$$s = \int \frac{dy}{\sqrt{1 + \lambda^2 - \lambda^2 \cosh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \left(\frac{1}{dn(\cosh y, p)} \right)^{-1}, \text{ con } p^2 = \frac{1}{1 + \lambda^2}$$

y despejando nos queda que:

$$y(s) = \operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{dn(\sqrt{1 + \lambda^2} s, p)} \right), \text{ con } p^2 = \frac{1}{1 + \lambda^2}. \quad (3.5.3)$$

Por otro lado, por las propiedades de las funciones hiperbólicas y elípticas tenemos que

$$\sinh y(s) = \frac{\operatorname{sn}(\sqrt{1 + \lambda^2} s, p)}{\sqrt{1 + \lambda^2} dn(\sqrt{1 + \lambda^2} s, p)}$$

y usando la Proposición 1.3.3, obtenemos que:

$$x(s) = -\arctan \left(\frac{\lambda(1 + cn(\sqrt{1 + \lambda^2} s, p))}{cn(\sqrt{1 + \lambda^2} s, p) - \lambda^2} \right), \quad p^2 = \frac{1}{1 + \lambda^2}. \quad (3.5.4)$$

Por tanto, nuestra curva es $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ donde $x(s)$ e $y(s)$ vienen dadas por (3.5.4) y (3.5.3), respectivamente, y se pueden ver en la Figura 3.6.

Todo esto prueba el siguiente resultado.

Corolario 3.5.1 *La curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ con $s \in \mathbb{R}$, dada por (3.5.3) y (3.5.4), con $\lambda > 0$, es la única curva plana, salvo traslaciones en el eje OX , cuya curvatura es $k(y) = \lambda \cosh y$ y la primitiva de su curvatura $F(y) = \lambda \sinh y$.*

3.6. Curvas cuya curvatura es $k(y) = \lambda/e^y$

En esta sección vamos a ver curvas cuya curvatura es:

$$k(y) = \lambda/e^y = \lambda e^{-y}, \quad \lambda > 0.$$

Mediante una traslación en el eje OY podemos considerar:

$$k(y) = e^{-y}.$$

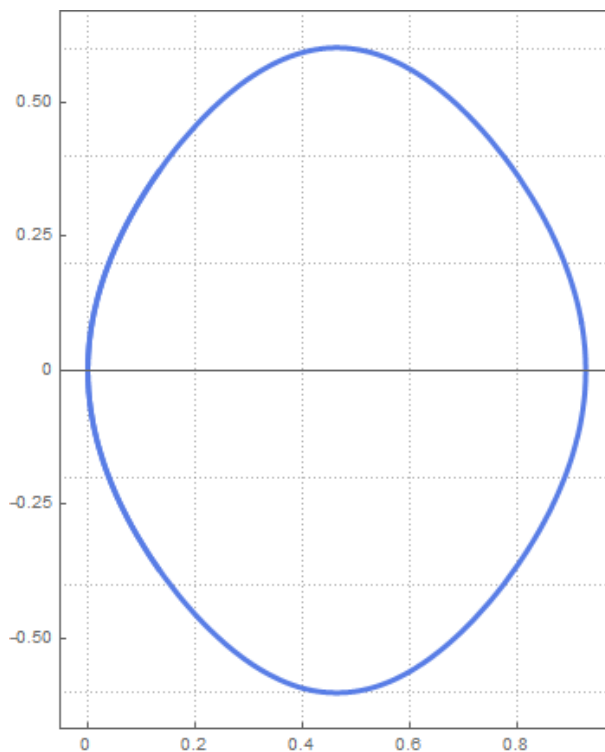


Figura 3.6: Curva con $k(y) = \lambda \cosh y$.

Comenzamos a aplicar el Teorema 3.1.2 tomando $F(y) = -e^{-y}$ y obtenemos la ecuación diferencial $y = y(s)$ dada por

$$\dot{y}^2 = 1 - (c - e^{-y})^2, \quad (3.6.1)$$

con c constante. Como \dot{y}^2 es positivo, se debe verificar que $-1 < c - e^{-y} < 1$, es decir, $-1 + e^{-y} < c < 1 + e^{-y}$. Por tanto, tenemos que $c > -1$. De esta forma, podemos determinar las curvas planas $(x(s), y(s))$, cuya curvatura es $k(y) = e^{-y}$, mediante:

$$s = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - (c - e^{-y})^2}} \quad (3.6.2)$$

y

$$x(s) = -cs + \int e^{-y(s)} ds. \quad (3.6.3)$$

Para poder integrar (3.6.2) hacemos el cambio de variable $u = e^y$ y nos queda la integral:

$$s = \int \frac{du}{\sqrt{(1-c^2)u^2 + 2cu - 1}}. \quad (3.6.4)$$

Podemos distinguir, según los valores de c , los siguientes casos:

3.6.1. Caso $-1 < c < 1$

Integrando (3.6.4) tenemos que:

$$s = \frac{\log\left(c + u - c^2u + \sqrt{1-c^2}\sqrt{(1-c^2)u^2 + 2cu - 1}\right)}{\sqrt{1-c^2}}$$

y usando el programa MAPLE para obtener las expresiones de $x(s)$ e $y(s)$ y (3.6.3) nos queda que la curva es:

$$(x(s), y(s)) = \left(2\arctan\left(\frac{e^{\sqrt{1-c^2}s} - c}{\sqrt{1-c^2}}\right) - cs, \log\left(\frac{\cosh(\sqrt{1-c^2}s) - c}{1-c^2}\right)\right). \quad (3.6.5)$$

Podemos ver esta curva en la Figura 3.7.

Por tanto, tenemos que la curvatura es:

$$k(y) = \frac{1-c^2}{\cosh(\sqrt{1-c^2}s) - c}$$

3.6.2. Caso $c = 1$

En este caso (3.6.4) queda reducida a $s = \sqrt{2e^y - 1}$. Despejando, obtenemos que

$$y(s) = \log\left(\frac{s^2 + 1}{2}\right)$$

y de (3.6.3) se sigue que

$$x(s) = 2\arctan s - s.$$

Por tanto, nuestra curva viene dada por

$$(x(s), y(s)) = \left(2\arctan s - s, \log\left(\frac{s^2 + 1}{2}\right)\right) \quad (3.6.6)$$

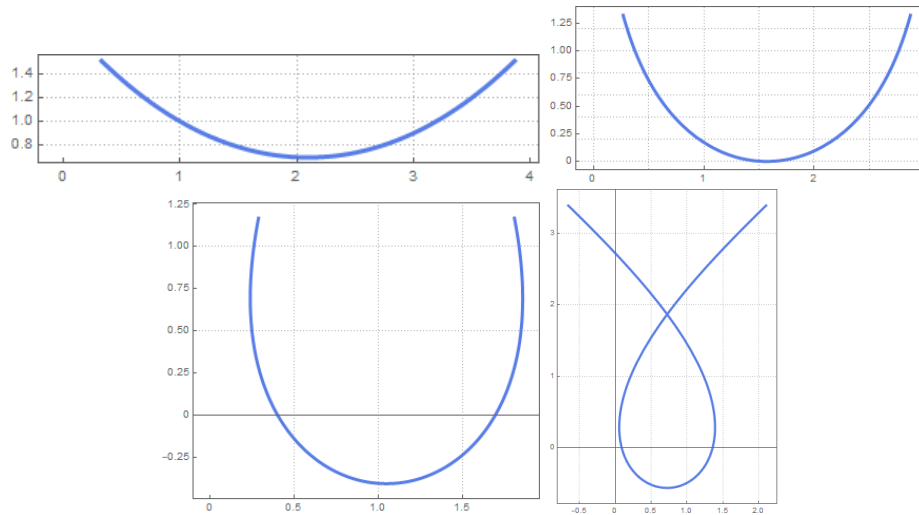


Figura 3.7: Curva con $k(y) = \lambda/e^y$, $-1 < c < 1$ en los casos $c = -0,5$, $c = 0$, $c = 0,5$ y $c = 0,75$.

cuya representación la podemos ver en la Figura 3.8 y cuya curvatura es

$$k(y) = \frac{2}{s^2 + 1}.$$

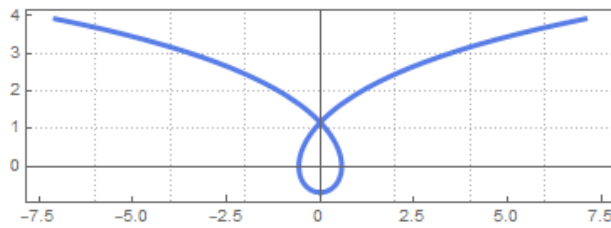


Figura 3.8: Curva con $k(y) = \lambda/e^y$, $c = 1$.

3.6.3. Caso $c > 1$

En este caso, de (3.6.4) obtenemos que

$$s = -\frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} \arcsen((1 - c^2)u + c), \text{ donde } u = e^y.$$

Despejando $y(s)$ de esta expresión y usando (3.6.3) para encontrar $x(s)$ nos queda que la curva es:

$$(x(s), y(s)) = \left(2\arctan\left(\frac{c \tan(\sqrt{c^2 - 1}s/2) + 1}{\sqrt{c^2 - 1}}\right) - cs, \log\left(\frac{c + \operatorname{sen}(\sqrt{c^2 - 1}s)}{c^2 - 1}\right) \right) \quad (3.6.7)$$

donde

$$k(s) = \frac{c^2 - 1}{c + \operatorname{sen}(\sqrt{c^2 - 1}s)}, \text{ con } s \in \left(-\frac{\pi}{\sqrt{c^2 - 1}}, \frac{\pi}{\sqrt{c^2 - 1}} \right).$$

Podemos ver su representación en la Figura 3.9.

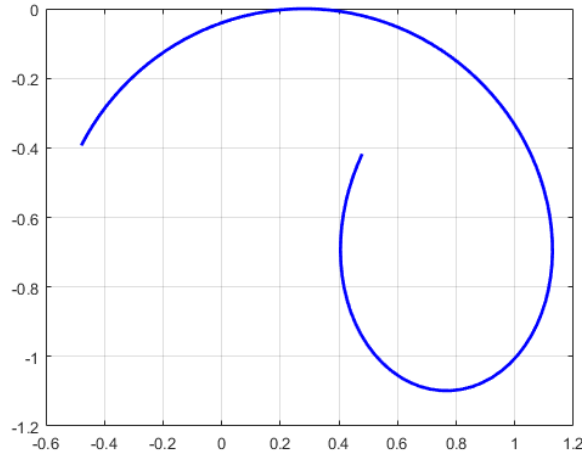


Figura 3.9: Curva con $k(y) = \lambda/e^y$, $c > 1$.

Con estos tres casos tenemos el siguiente resultado de unicidad.

Corolario 3.6.1 Sea $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ una curva plana cuya curvatura satisface $k(s) = e^{-y}$. Entonces su primitiva es $F(y) = c - e^{-y}$, con $c > -1$, y α viene dada, salvo traslaciones en el eje OX , por (3.6.5) si $-1 < c < 1$, (3.6.6) si $c = 1$ y (3.6.7) si $c > 1$.

3.7. Curvas cuya curvatura es $k(y) = \lambda/\cos^2 y$

En esta sección vamos a estudiar curvas planas cuya curvatura satisfice la condición geométrica:

$$k(y) = \frac{\lambda}{\cos^2 y}, \text{ con } \lambda > 0.$$

Para que $k(y)$ esté bien definida tomamos $-\pi/2 < y < \pi/2$.

Aplicando el Teorema 3.1.2 obtenemos:

$$\dot{y}^2 = 1 - (\lambda \tan(y) + c)^2$$

con c constante.

Entonces, podemos determinar las curvas planas $(x(s), y(s))$, cuya curvatura es $k(y) = \lambda/\cos^2 y$, mediante:

$$s = \frac{dy}{\sqrt{1 - (\lambda \tan(y) + c)^2}} \quad (3.7.1)$$

y

$$x(s) = -cs - \lambda \int \tan y(s) ds \quad (3.7.2)$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Para integrar estas expresiones nos encontramos con los problemas descritos en la Observación 3.1.3 excepto para el caso $c = 0$. En este caso, hacemos el cambio de variable $u = \sen(y)$ y podemos integrar (3.7.1). Al integrar, obtenemos:

$$s = \int \frac{du}{\sqrt{1 - (1 + \lambda^2)u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \arcsen(\sqrt{1 + \lambda^2}u)$$

y por tanto

$$y(s) = \arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \sen(\sqrt{1 + \lambda^2}s)\right).$$

Usando (3.7.2) obtenemos:

$$x(s) = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \log\left(\cos(\sqrt{1 + \lambda^2}s) + \sqrt{\lambda^2 + \cos^2(\sqrt{1 + \lambda^2}s)}\right).$$

Por tanto, nuestra curva es $(x(s), y(s))$ con

$$k(s) = \frac{\lambda(1 + \lambda^2)}{\lambda^2 + \cos^2(\sqrt{1 + \lambda^2}s)}, \quad s \in \left(\frac{-\pi}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \frac{\pi}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \right)$$

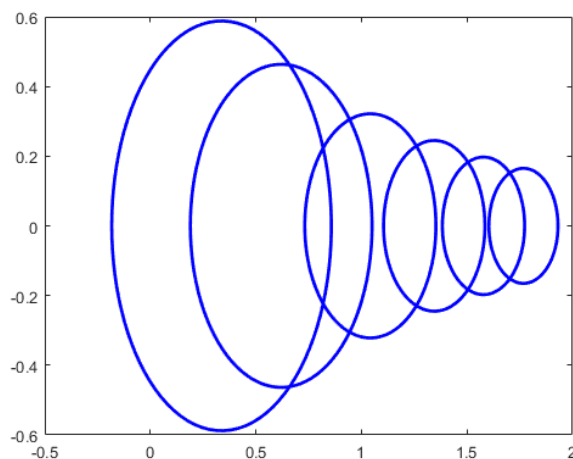


Figura 3.10: Curvas con $k(y) = \lambda/\cos^2 y$, $\lambda > 0$.

En la Figura 3.10 podemos ver la representación de esta curva. Hemos probado el siguiente resultado de unicidad.

Corolario 3.7.1 *Dados $\lambda > 0$, $c = 0$, la curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ descrita anteriormente es la única curva plana (salvo movimientos de traslación en el eje OX) con curvatura $k(y) = \lambda/\cos^2 y$ y cuya curvatura primitiva es $F(y) = \lambda \tan(y)$.*

3.8. Curvas cuya curvatura es $k(y) = \lambda/\cosh^2 y$

El objetivo de esta sección es el estudio de las curvas planas cuya curvatura satisface la condición geométrica:

$$k(y) = \lambda/\cosh^2 y, \quad \text{con } \lambda > 0.$$

Aplicando el Teorema 3.1.2, con $F(y) = \lambda \tanh y$, obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{y}^2 = 1 - (\lambda \tanh y + c)^2,$$

con c constante y debiendo satisfacer que $-1 < \lambda \tanh y + c < 1$. Esto implica que $-(1 + \lambda) < c < 1 + \lambda$.

Para determinar las curvas planas $(x(s), y(s))$ que satisfacen $k(y) = \lambda / \cosh^2 y$, debemos calcular las siguientes integrales:

$$s = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - (\tanh y + c)^2}}$$

y

$$x(s) = -cs - \lambda \int \tanh y(s) ds \quad (3.8.1)$$

con $c \in (-(1 + \lambda), 1 + \lambda)$.

En el caso $c \neq 0$ nos encontramos de nuevo con los problemas mencionados en la Observación 3.1.3.

Para $c = 0$, vamos a realizar el cambio de variable $u = \sinh y$ y nos queda que:

$$s = \int \frac{du}{\sqrt{1 + (1 - \lambda^2)u^2}}.$$

Distinguimos 3 casos dependiendo de los valores de λ .

3.8.1. Caso $c = 0$, $0 < \lambda < 1$

En este caso, nos queda que:

$$s = \int \frac{du}{\sqrt{1 + (1 - \lambda^2)u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \operatorname{arcsenh}(\sqrt{1 - \lambda^2}u)$$

y despejando obtenemos, fácilmente, que

$$y(s) = \operatorname{arcsenh}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \sinh(\sqrt{1 - \lambda^2}s)\right). \quad (3.8.2)$$

Usando (3.8.1) nos queda que:

$$x(s) = \frac{-\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \log\left(\cosh(\sqrt{1-\lambda^2}s) + \sqrt{\cosh^2(\sqrt{1-\lambda^2}s) - \lambda^2}\right). \quad (3.8.3)$$

Por tanto, tenemos que la curva es $(x(s), y(s))$, con $x(s)$ e $y(s)$ las expresiones calculadas anteriormente. Podemos verla en la Figura 3.11.

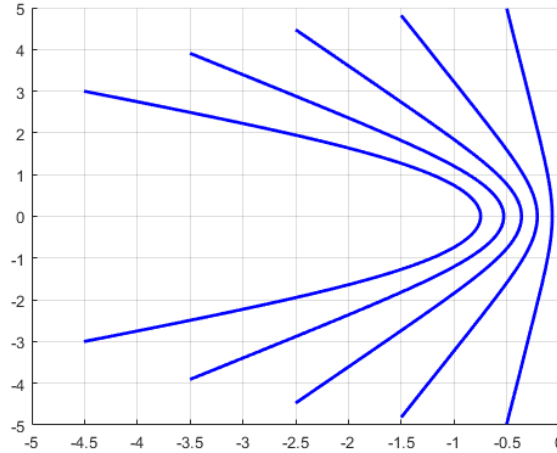


Figura 3.11: Curvas con $k(y) = \lambda/\cosh^2 y$, $c = 0$, $0 < \lambda < 1$.

3.8.2. Caso $c = 0$, $\lambda = 1$

En este caso, tenemos

$$s = \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{senh}(y).$$

Despejando, obtenemos que $y = \operatorname{arcsenh}(s)$. Usando (3.8.1) nos queda que: $x(s) = -\sqrt{1+s^2}$. Por tanto, la curva es

$$(x(s), y(s)) = (\operatorname{arcsenh}(s), -\sqrt{1+s^2}) \quad (3.8.4)$$

cuya curvatura es

$$k(s) = \frac{1}{1+s^2}.$$

Por el Teorema Fundamental de Curvas Planas sabemos que la curvatura determina una única curva (salvo movimientos rígidos). Por tanto, esta curva no es otra que la catenaria (obtenida en la Sección 3.3).

3.8.3. Caso $c = 0$, $\lambda > 1$

En este caso, nos queda que:

$$s = \int \frac{du}{\sqrt{1 + (1 - \lambda^2)u^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \arcsen(\sqrt{\lambda^2 - 1}u)$$

y despejando obtenemos, fácilmente, que

$$y(s) = \operatorname{arcsenh}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda^2 - 1}s)\right). \quad (3.8.5)$$

Usando (3.8.1) nos queda que:

$$x(s) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \arcsen\left(\frac{\cos(\sqrt{\lambda^2 - 1}s)}{\lambda}\right). \quad (3.8.6)$$

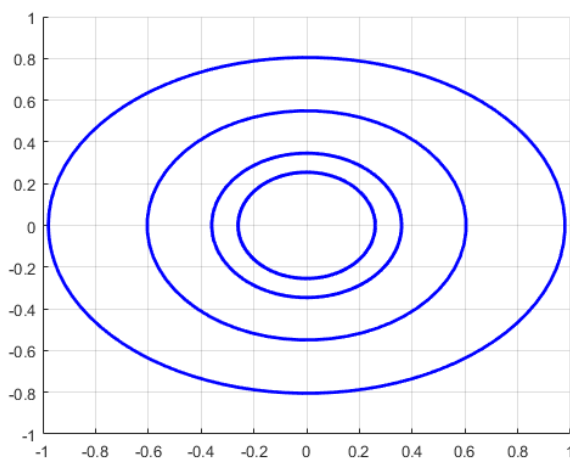


Figura 3.12: Curvas con $k(y) = \lambda/\cosh^2 y$, $c = 0$, $\lambda > 1$.

Por tanto, tenemos que la curva es $(x(s), y(s))$, con $x(s)$ e $y(s)$ dadas en (3.8.6) y (3.8.5), respectivamente. La representación de esta curva está dada en la Figura 3.12.

Con estos tres casos tenemos el siguiente resultado de unicidad.

Corolario 3.8.1 *La curva $(x(s), y(s))$ dada por (3.8.2) y (3.8.3) si $0 < \lambda < 1$, por (3.8.4) si $\lambda = 1$ y por (3.8.5) y (3.8.6) si $\lambda > 1$, con $c = 0$, es la única curva plana (salvo traslaciones en el eje OX) cuya curvatura es $k(y) = \lambda \cosh^2 y$, $\lambda > 0$, con curvatura primitiva $F(y) = \lambda \tanh y$.*

Bibliografía

- [1] Manfredo P. do Carmo. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza, Madrid, 1990.
- [2] M.A. Hernández Cifre, J.A. Pastor González *Un curso de Geometría Diferencial*. CSIC, Madrid, 2010.
- [3] P.F. Byrd, M.D. Friedman. *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*. Springer-Verlag, New York, 1971.
- [4] D. Singer. Curves whose curvature depends on distance from the origin. *Am. Math. Mon.* **106** (1999), 835-841.
- [5] *Segunda Ley de Kepler*:
<http://www.astrosurf.com/astrosurf/docs/Kepler.pdf>
- [6] I. Castro, I. Castro-Infantes. Plane curves with curvature depending on distance to a line. *Elsevier B.V.*
- [7] J. Langer, D. Singer. The total squared curvature of closed curves. *J. Differ. Geom.* **20** (1984), 1-22.