Facultad de Matemáticas
Dpto. de Análisis Matemático

La desigualdad de Hardy:
su historia y algunos resultados relacionados

Samuel Reyes de la Cruz

Trabajo Fin de Grado
Curso académico 2018/2019

Tutor: José A. Facenda Aguirre

Índice general

Índice de figuras

Abstract

The fundamental objective of this work is to demonstrate two inequalities due to Hilbert and Hardy.

Hardy's inequality. If $p > 1$ and (a_n) is a sequence of non negative real numbers such that $\sum_{n\geq 1} a_n^p < \infty$ then

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p.$$

Hilbert's inequality. If (a_m) and (b_n) are square summable series of nonnegative real numbers, then

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} \leq \pi\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{1/2}.$$

The work is divided into four chapters. In the first one, we follow [9] to present the history of Hardy's inequality. The main source of motivation for Hardy (that he regarded as "one of the simplest and most beautiful in the theory of double series of positive terms") was to find an elementary proof of an inequality discovered in the early 1900s by David Hilbert.

Other mathematicians were involved in the development of Hardy's inequality, in particular Landau and Riesz. The final section of the first chapter contains proofs of Elliot and Ingham.

In the second and third chapter we follow [13] to present proofs of these inequalities. According the review by Garling of [13], the book is written in the spirit of Georg Pólya, asking the reader leading questions, trying solutions that don't work, showing why they don't work, and then revealing the key ideas that lead to a solution.

Additionally, we present a section on the gamma function, where we prove a necessary functional equation in the demonstration,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}.$$

It is also worth mentioning the work [12] included in the second chapter, where the author gives an elementary proof of Hilbert's inequality as well as a simple example

showing that the constant π is optimal. Also the inequality is generalized as follows:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} \leq \frac{\pi}{\sin\dfrac{\pi}{p}}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{1/q},$$

for all sequences of nonnegative real numbers (a_m) and (b_n) such that $\sum_{m\geq 1} a_m^p < \infty$ and $\sum_{n\geq 1} b_n^q < \infty$ for $p, q > 1$ such that $1/p + 1/q = 1$.

Chapter 3 is dedicated to demonstrating the discrete and continuous versions of Hardy's inequality. We finish the same studying the inequalities of Carlesson and Carleman.

In the last chapter we include brief biographical notes of the mathematicians Hardy and Hilbert.

Introducción

El objetivo fundamental de este trabajo es presentar las demostraciones de dos desigualdades importantes del Análisis Matemático.

Desigualdad de Hardy. Si $p > 1$ y (a_n) es una sucesión de números reales no negativos, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p.$$

Desigualdad de Hilbert. Si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones de números reales no negativos de cuadrado sumable, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \pi \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En el primer capítulo desarrollamos la historia de la desigualdad de Hardy durante el periodo 1906-1928. Matemáticos de la talla de Hardy, Landau, Pólya, Schur y Riesz contribuyeron sustancialmente.

La motivación original de Hardy fue buscar una prueba elemental de lo que él consideraba uno de los resultados más simples y bellos de la teoría de series dobles, la desigualdad de Hilbert, que afirma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m a_n}{m+n} < \infty.$$

Se concluye este capítulo con las demostraciones debidas a Elliot e Ingham.

Los capítulos 2 y 3 siguen el libro de Steele ([13]) que pertenece a la serie de libros de problemas de la Mathematical Association of America. Es por ello que el autor plantea estas desigualdades como problemas, con el espíritu de G. Pólya, planteando cuestiones, intentando soluciones que no funcionan, viendo porqué no funcionan y mostrando las ideas que nos conducen a una solución.

Se demuestran en esos capítulos primero la desigualdad de Hilbert y luego la de Hardy. Aunque el autor recurre a que se consulte Mathematica o Maple para evaluar la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+y)y^{2\lambda}}\, dy, \qquad 0 < \lambda < \frac{1}{2},$$

incluimos una sección para probar una ecuación funcional de la función Γ y evaluar la integral usando el teorema de los residuos, en concreto probamos que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}.$$

Incluimos también el trabajo de Oleszkiewicz ([12]), donde se da una demostración elemental de la desigualdad de Hilbert, probando que la constante π es óptima, así como una generalización; si $p, q > 1$, y son conjugados, es decir, $1/p + 1/q = 1$, entonces dadas dos sucesiones (a_m) y (b_n) de números reales no negativos tales que $\sum_{m\geq 1} a_m^p$ y $\sum_{n\geq 1} b_n^q$ son ambas convergentes, se cumple que

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \frac{\pi}{\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{p}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{1/q}.$$

En el capítulo 3 se prueban las versiones discretas y continuas de la desigualdad de Hardy. Como aplicación, se prueban las desigualdades de Carlesson, que afirma

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} \exp\left(\frac{-\varphi(x)}{x}\right) dx \leq \mathrm{e}^{\alpha+1} \int_0^{\infty} x^{\alpha} \exp(-\varphi'(x)) dx$$

para toda $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ convexa y $\varphi(0) = 0$ y $\alpha > -1$, y la desigualdad de Carleman. que ya se vio también en el primer capítulo y afirma que si (a_n) es una sucesión de números reales no negativos entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Incluimos un cuarto capítulo con unas breves notas biográficas de los matemáticos Hardy y Hilbert.

CAPÍTULO 1

La Prehistoria de la desigualdad de Hardy

1.1. La motivación de Hardy: desigualdad de Hilbert

En este primer apartado describiremos una desigualdad descubierta a principios del siglo XX por David Hilbert, que está estrechamente relacionada con la desigualdad discreta de Hardy, que afirma lo siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty}a_n^p, \tag{1.1}$$

donde $p > 1$ y (a_n) es una sucesión de números reales no negativos. La versión continua de esta desigualdad afirma que si $p > 1$ y $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ es una función tal que f^p es integrable, entonces f es integrable en $(0, x)$ para cada $x > 0$ y se cumple que

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{\infty} f(x)^p\, dx. \tag{1.2}$$

De hecho, la desigualdad de Hilbert fue la que motivó a Hardy a comenzar su investigación. En su forma más básica, la desigualdad de Hilbert queda enunciada de la siguiente manera: sean (a_m) y (b_n) dos sucesiones de números reales no negativos tales que

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty.$$

Entonces, la serie doble

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} \tag{1.3}$$

es convergente. Precisando más, se cumple que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} \leq \pi\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{1/2} \tag{1.4}$$

siendo π la mejor constante. La determinación de la constante π que aparece tanto en la desigualdad (1.4) como en su versión integral se debe a Schur. Hemos de mencionar que en la versión de Hilbert de (1.4) aparece la constante 2π en lugar de π.

La siguiente desigualdad, más general que (1.4) es conocida también en la literatura como desigualdad de Hilbert:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} \leq \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{p}}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{p'}\right)^{1/p'} \tag{1.5}$$

donde $p > 1$ y $p' = p/(p-1)$ es el índice conjugado de p. Hilbert no fue capaz de dar una idea de la prueba de (1.5) debido a que los espacios ℓ_p no aparecieron hasta 1910. Fueron entonces M. Riesz y G. H. Hardy quienes dieron los primeros pasos para la prueba de (1.5).

El trabajo de Hilbert de hallar la solución a ciertas ecuaciones integrales le llevó a estudiar ciertas formas bilineales con coeficientes reales o complejos. Algunas ideas de Hilbert durante el periodo 1906-1908 pueden encontrarse en la tesis que defendió Hermann Weyl en 1908. En particular, Weyl presentó la siguiente fórmula que fue descubierta por Hilbert:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{n+m}+\frac{1}{n-m}\right)a_m b_n \\ &\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\left[\sum_{k=1}^{N}(-1)^k(a_k \operatorname{sen} kt - b_k \cos kt)\right]^2 dt \end{aligned}\tag{1.6}$$

(si $n = m$, entonces $1/(n-m)$ es 0). Esta fórmula implica la versión finita de la desigualdad de Hilbert

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{a_m b_n}{m+n} \leq \pi\left(\sum_{m=1}^{N} a_m^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{N} b_n^2\right)^{1/2} \tag{1.7}$$

La deducción de (1.7) de (1.6) puede encontrarse en [8], páginas 235-236.

Otras pruebas de la desigualdad de Hilbert fueron dadas por Wiener y Schur. También cabe destacar en este apartado el método de Toepliz, basado en la identidad

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{a_m b_n}{n+m} = \frac{i}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}(t-\pi)\left[\sum_{n=1}^{N} a_n \mathrm{e}^{int}\sum_{m=1}^{N} b_m \mathrm{e}^{imt}\right]dt$$

Además, Fejér y Riesz por un lado y Pólya y Szego por otro dieron pruebas usando la teoría de funciones analíticas.

Notemos que (1.7) implica (1.4) y una forma débil de ésta que fue de especial interés para Hardy: sea $a_n \geq 0$, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, entonces la serie doble

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m a_n}{m+n}$$

converge. De hecho, Hardy en un trabajo de 1920 escribió:

En la teoría de ecuaciones integrales, Hilbert probó que la serie doble

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m a_n}{m+n}, \quad a_n \geq 0$$

es convergente siempre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *sea convergente. De este teorema, que es uno de los más simples y bellos en la teoría de series dobles de términos positivos, hay al menos publicadas cinco pruebas diferentes. Hilbert probó una, que depende de la teoría de series de Fourier y está detallada en la tesis de Weyl. Wiener dio otra y Schur dos más, pero ninguna de estas pruebas es tan simple y elemental como desearíamos. A estas cuatro yo añadí una quinta, la cual me pareció tener más simplicidad. Observé que el teorema de Hilbert es un corolario inmediato de otro teorema que tiene cierto interés.*

Hardy hizo semejantes declaraciones en algunos de otros artículos que mencionaremos más adelante.

La principal motivación de Hardy cuando comenzó su investigación, que más adelante le llevó a probar las desigualdades (1.1) y su versión integral fue sin duda probar la forma débil de la desigualdad de Hilbert.

1.2. El artículo de 1915

En este artículo ([4]), Hardy enunció y aplicó el siguiente teorema, que tiene una gran conexión con el teorema de Hilbert:

Teorema 1.1. *Sea* $a_n \geq 0$ *y* $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. *La convergencia de alguna de estas series*

$$(i)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n A_n}{n} \quad (ii)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \quad (iii)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_n a_m}{n+m}$$

implica la de las demás.

Hardy probó la equivalencia de la convergencia de las tres integrales

$$I_1 = \int_a^{\infty}\frac{f(x)F(x)}{x}dx, \quad I_2 = \int_a^{\infty}\left(\frac{F(x)}{x}\right)^2 dx,$$
$$I_3 = \int_a^{\infty}\int_a^{\infty}\frac{f(x)f(y)}{x+y}dxdy,$$

donde $a > 0$, f es no negativa e integrable en (a,∞), y $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, demostrando que

$$\int_a^{\infty}\left(\frac{F(t)}{t}\right)^2 dt \leq 2\int_a^{x}\left(\frac{f(t)F(t)}{t}\right)dt$$
$$\leq \int_a^{x}\left(\frac{F(t)}{t}\right)^2 dt + 4\int_x^{2x}\left(\frac{F(t)}{t}\right)^2 dt$$

y observando que $I_1 \leq I_3 \leq 2I_1$. En la prueba del caso de sucesiones, dijo solo que *la prueba de este teorema es muy parecida al de las integrales* ([4], p.164), aunque probablemente se dio cuenta más tarde que era más complejo, por lo que lo consideró de nuevo en un artículo en 1919. No obstante, la estimación de (iii) por (i) puede hacerse de modo similar a como lo hizo Hardy para integrales como sigue:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{a_m a_n}{m+n} &\leq 2\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n}\frac{a_m a_n}{m+n}\\ &= 2\sum_{n=1}^{N}a_n\sum_{m=1}^{n}\frac{a_m}{m+n}\\ &\leq 2\sum_{n=1}^{N}a_n\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}a_m\\ &= 2\sum_{n=1}^{N}a_n\frac{A_n}{n}\end{aligned}$$

Además, Hardy también demostró el siguiente resultado, que es un caso particular de (1.1) para $p = 2$.

Teorema 1.2. *La convergencia de la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$*, con* $a_n \geq 0$ *implica la de la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2$*, donde* $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$.

Demostración. Denotemos por (a_n^*) la reordenación no creciente de la sucesión (a_n) y sea

$$A_n^* = \sum_{k=1}^{n}a_k^*.$$

Como $A_n^* \geq A_n$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^*)^2,$$

es suficiente probar que $\sum_{n=1}^{\infty}(A_n^*/n)^2$ es convergente. Por tanto, podemos asumir sin pérdida de generalidad que la sucesión (a_n) es decreciente. Además, por el teorema 1.1, es suficiente probar que $\sum_{n=1}^{\infty}a_nA_n/n$ es convergente. La última serie se puede escribir de la forma

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{a_m a_n}{n},$$

y será convergente si $\sum_{k=1}^{\infty}S_k < \infty$, donde

$$S_k = \sum\sum_{k\leq\frac{n}{m}<k+1}\frac{a_m a_n}{n} \quad (k = 1, 2, ...).$$

Haciendo las acotaciones adecuadas y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$
\begin{aligned}
S_k &\leq \frac{1}{k} \sum_{k \leq \frac{n}{m} < k+1} \sum \frac{a_m a_n}{n} \\
&= \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m} \sum_{k \leq \frac{n}{m} < k+1} a_n \\
&\leq \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m} a_{km} \\
&\leq \frac{1}{k} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{km}^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{k} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{k} \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{k^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2.
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
S = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 < 3 \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 < \infty.
$$

luego $S < \infty$ lo cual prueba el resultado.

$\square$

Nota 1.3. *Observamos que el argumento anterior no es suficiente para llegar a la prueba de* (1.1) *para* $p = 2$ *directamente. Esto da solo la desigualdad (más débil)*

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n A_n}{n} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2
$$

con $C = \zeta(3/2) \approx 2.61$*, donde* ζ *denota la función zeta de Riemann.*

Nota 1.4. *Hardy también señaló que el hecho que le motivó a hacer este trabajo, radica en que, en virtud del teorema de equivalencia (teorema 1.1), el teorema 1.2 es equivalente al teorema de Hilbert en el caso* $p = 2$ *en su forma débil.*

Nota 1.5. *En este artículo, como ya hemos hablado, Hardy también enunció y demostró las versiones continuas de los teoremas 1.1 y 1.2. Sin embargo, el formuló sus resultados para integrales* $\int_a^{\infty}$ *o* $\int_a^{x}$ *con* $a > 0$ *en lugar de la forma* $\int_0^{\infty}$ *o* $\int_0^{x}$*. El continuó este procedimiento en sus trabajos de 1919 y 1920 aunque no queda claro porqué estudió solamente este caso. En un artículo posterior en 1925, formuló el resultado en su forma natural y explicó la relación con la formulación anterior.*

1.3. El artículo de 1919

Probablemente la contribución más importante de este artículo, véase [5], fue la nueva prueba del teorema 1.2. De hecho, el artículo también incluye una primera prueba de la desigualdad (1.1) para el caso $p = 2$ y da como la mejor constante 4 (veáse la nota 1.6).

Nueva prueba del teorema 1.2. Es claro que

$$\begin{aligned}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 &= \left(a_n + \frac{A_n}{n} - a_n\right)^2\\ &\leq 2a_n^2 + 2\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2\\ &= 4a_n^2 + 2\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - 4\frac{a_nA_n}{n}.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \leq 4\sum_{n=1}^{N} a_n^2 + 2\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - 4\sum_{n=1}^{N}\frac{a_nA_n}{n}. \tag{1.8}$$

para cada N. Además,

$$-2a_nA_n = -\left(A_n^2 - A_{n-1}^2\right) - a_n^2 \leq -(A_n^2 - A_{n-1}^2),$$

luego

$$\begin{aligned}-2\sum_{n=1}^{N}\frac{a_nA_n}{n} &\leq -\sum_{n=1}^{N}\frac{(A_n^2 - A_{n-1}^2)}{n}\\ &= -\frac{A_1^2}{1\cdot 2} - \frac{A_2^2}{2\cdot 3} - \cdots - \frac{A_{N-1}^2}{(N-1)\cdot N} - \frac{A_N^2}{N}\\ &\leq -\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}A_n^2.\end{aligned}$$

Sustituyendo esta acotación en (1.8) obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 &\leq 4\sum_{n=1}^{N} a_n^2 + 2\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}A_n^2\\ &= 4\sum_{n=1}^{N} a_n^2 + 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2(n+1)}A_n^2,\end{aligned}$$

que da como resultado

$$\sum_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \leq 4\sum_{n=1}^{N} a_n^2. \tag{1.9}$$

Y deducimos el teorema 1.2.

□

Nota 1.6. *Hardy no se había dado cuenta que la desigualdad* (1.9) *se podía usar para deducir la desigualdad discreta de Hardy* (1.1) *para* $p = 2$ *y hacer 4 como la constante fuerte.*

Nota 1.7. *En [5] Hardy también enunció algunos resultados para el caso continuo. Sin embargo, el aspecto más importante para la historia de la desigualdad de Hardy fue su afirmación de que*

$$\int_a^\infty \left(\frac{1}{x}\int_a^x f(t)dt\right)^2 dx \leq 4\int_a^\infty f^2(x)dx$$

cuando $a > 0$ *y que 4 es la mejor constante. De hecho, se puede probar que esta acotación implica* (1.2) *para* $p = 2$*. Hardy no dio una prueba de esta afirmación, solamente dio una prueba para el caso discreto que hemos mencionado.*

1.4. La contribución de Riesz

En su artículo de 1920, véase [6], Hardy hizo referencia a una carta de Marcel Riesz y escribió:

> *El doctor M. Riesz, al que le comuniqué el teorema 1.2 encontró otra prueba, que es igual a la mía en simplicidad y que nos parece a los dos más natural y por tanto preferible. Su prueba naturalmente sugiere una interesante generalización.*

Hardy formuló el resultado de Riesz en la siguiente forma débil:

Teorema 1.8 (M. Riesz). *Si* $p > 1$*,* $a_n \geq 0$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ *es convergente entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p$$

es convergente, donde $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$*.*

Para su demostración, necesitamos la fórmula de sumación por partes de Abel.

Teorema 1.9. *Sean* (a_n) *y* (b_n) *dos sucesiones de números reales y* $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$*. Entonces,*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k(b_{k+1} - b_k).$$

Demostración. Observemos que $a_k = A_k - A_{k-1}$, donde definimos $A_0 = 0$. Entonces,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n}(A_k - A_{k-1})b_k$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_0 b_1 + A_n b_{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1} \\
&= A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k).
\end{aligned}
$$

□

Con esto, podemos pasar a la prueba del teorema 1.8 de M. Riesz.

Demostración. Sea $\Phi_n = n^{-p} + (n+1)^{-p} + (n+2)^{-p} + \cdots$. Entonces, usando la sumación por partes, para cada N (siendo $A_0 = 0$) tenemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{A_n}{n}\right)^p &= \sum_{n=1}^{N} A_n^p (\Phi_n - \Phi_{n+1}) \\
&= \sum_{n=1}^{N} (A_n^p - A_{n-1}^p)\Phi_n - A_N^p \Phi_{N+1} \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} (A_n^p - A_{n-1}^p)\Phi_n \\
&\leq p \sum_{n=1}^{N} a_n {A_n}^{p-1} \Phi_n.
\end{aligned}
$$

Además,

$$
\Phi_n < n^{-p} + \int_n^{\infty} x^{-p} dx = n^{-p} + \frac{n^{-(p-1)}}{p-1} \leq \frac{p}{p-1} n^{-(p-1)}.
$$

Con estas desigualdades y utilizando la desigualdad de Hölder[1],

$$
\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^p\right)^{1/p} \qquad \left(p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right). \tag{1.10}
$$

[1]En [6] Hardy comenta que la desigualdad (1.10) se debe probablemente a Hölder, y se refiere a un artículo de Landau de 1907. En [8] se dice que Hölder establece el teorema en una forma menos simétrica a como lo hizo Rogers en 1888, un año antes que Hölder. Usa el nombre desigualdad de Hölder. Esto ha contribuido a que se conozca tal desigualdad con ese nombre. Fue Riesz quien estableció en 1910 la desigualdad en la forma dada en (1.10). Así, esta debería ser conocida como desigualdad de Hölder-Rogers o desigualdad de Hölder-Rogers-Riesz.

se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p &\leq \frac{p^2}{p-1}\sum_{n=1}^{N}a_n\left(\frac{A_n}{n}\right)^{p-1}\\ &\leq \frac{p^2}{p-1}\left(\sum_{n=1}^{N}a_n^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p\right)^{1-(1/p)}.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p \leq \left(\frac{p^2}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{N}a_n^p. \tag{1.11}$$

□

Nota 1.10. *El razonamiento de Riesz va más allá de lo que Hardy formuló en el teorema 1.8, es decir,* (1.8) *implica la validez de* (1.1) *con la constante* $(p^2/(p-1))^p$ *en lugar de* $(p/(p-1))^p$.

1.5. El artículo de 1920

En este artículo, [6], Hardy observó que la acotación en la prueba de (1.9) no fue muy fina y que la constante $C_p = (p^2/(p-1))^p$ podía mejorarse afinando la acotación de Riesz. Indicó que C_p podía reemplazarse por una constante más pequeña, $(p\zeta(p))^p$. El razonamiento que lo confirma lo recibió en una carta de Schur. Naturalmente, Hardy por ese entonces ya había admitido que $(p/(p-1))^p$ era la constante fuerte, aunque no lo afirmó explícitamente. Una razón de esto seguramente fue una observaión de Schur en la misma carta en la que le indicó que al menos era cierto para $p = 2$.

Hardy no se dio cuenta que la desigualdad (1.9) de su artículo [5] de 1919 podía usarse para deducir la desigualdad (1.1) para $p = 2$ con la mejor constante $C = 4$. No sabemos a ciencia cierta cual fue el razonamiento de Schur, pero fue aproximadamente asi: Sea $c_n = 1 - 2/(n+1)$ y para $m = 2, 3, \cdots$ sea

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_m = b_1, \quad a_{m+1} = a_{m+2} = \cdots = a_{2m} = b_2, \ldots,$$
$$a_{(N-1)m+1} = a_{(N-1)m+2} = \cdots = a_{Nm} = b_N.$$

De la desigualdad (1.9) con Nm en lugar de N se obtiene

$$\begin{aligned}4m\sum_{n=1}^{N}b_n^2 \geq (c_1+\cdots+c_m)\left(\frac{B_1}{1}\right)^2 + (c_{m+1}+\cdots+c_{2m})\left(\frac{B_2}{2}\right)^2 + \cdots\\ + (c_{(N-1)m+1}+\cdots+c_{Nm})\left(\frac{B_N}{N}\right)^2,\end{aligned}$$

donde $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Dividiendo por m y haciendo $m \to \infty$, obtenemos que

$$(c_1 + c_2 + \cdots + c_m)/m \to 1,$$

$$(c_{m+1} + c_{m+2} + \cdots + c_{2m})/m \to 1,$$
etc.

En consecuencia,
$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{B_n}{n}\right)^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{N} b_n^2,$$
que, en particular, implica (1.1) para $p = 2$ con la mejor constante.

Un importante resultado de este trabajo es la formulación de una versión inicial de (1.2):

Teorema 1.11. *Si $p > 1$, $a > 0$, $f(x) \geq 0$, y $\int_a^\infty f(x)^p dx$ es convergente, entonces*
$$\int_a^\infty \left(\frac{1}{x}\int_a^x f(t)dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^\infty f(x)^p dx, \tag{1.12}$$
siendo la constante $(p/(p-1))^p$ fuerte.

Hardy no probó la desigualdad (1.12) en su artículo de 1920. Sin embargo, indicó que si se consideraban las funciones $f(x) = x^{-(1/p)-\epsilon}$, siendo ϵ una constante positiva suficientemente pequeña, entonces la constante $(p/(p-1))^p$ es fuerte. Mencionó también que podía probar que la mejor constante en el caso discreto no podía ser estrictamente menor que $(p/(p-1))^p$, pero dudaba en asegurar que (1.1) fuera cierta con la constante $(p/(p-1))^p$.

1.6. Una carta de Landau a Hardy

La carta de Landau a Hardy data del 21 de junio de 1921, véase [10]. Es curioso que esta carta fue publicada oficialmente cinco años después de la carta de Landau a Schur. La causa de esta larga espera no está clara, pero no hay duda que los contenidos de esta carta son interesantes, por dar una prueba de (1.1) con la constante fuerte $(p/(p-1))^p$, ya que esto no había sido publicado antes.

El principal resultado probado en este carta es el siguiente.

Teorema 1.12. *Sea $p > 1$, $a_n \geq 0$, y $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Entonces la desigualdad*
$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{A_n}{n}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{N} a_n^p \tag{1.13}$$
se mantiene para todo N en $\mathbb{N}$ o $N = \infty$. Además, la constante es fuerte para $N = \infty$

La desigualdad (1.13) se conoce como desigualdad de Hardy-Landau.

Demostración. Para $y \geq 0$ se tiene
$$y^p - py + p - 1 \geq 0.$$

Es conocida como la desigualdad de Bernouilli cuando la escribimos así:

$$y^p \geq 1 + p(y-1).$$

Usando esta desigualdad con $y = y_1/y_2$ obtenemos que

$$y_1^p - py_1{y_2}^{p-1} + (p-1)y_2^p \geq 0$$

Ponemos $y_1 = b_n$ y $y_2 = (p-1)B_n/(pn)$, donde $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, y sabiendo que

$$b_n^p - pb_n\left(\frac{p-1}{p}\frac{B_n}{n}\right)^{p-1} + (p-1)\left(\frac{p-1}{p}\frac{B_n}{n}\right)^p \geq 0,$$

tenemos que

$$\sum_{n=1}^{N} b_n^p - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1}\sum_{n=1}^{N} pb_n\left(\frac{B_n}{n}\right)^{p-1} + (p-1)\left(\frac{p-1}{p}\right)^p\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{B_n}{n}\right)^p \geq 0.$$

Además,

$$pb_n{B_n}^{p-1} = p{B_n}^{p-1}(B_n - B_{n-1}) \geq B_n^p - B_{n-1}^p,$$

de donde usando la fórmula de sumación parcial,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} pb_n\left(\frac{B_n}{n}\right)^{p-1} &\geq \sum_{n=1}^{N}(B_n^p - B_{n-1}^p)\frac{1}{n^{p-1}} \\
&\geq \sum_{n=1}^{N} B_n^p\left(\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right) \\
&\geq (p-1)\sum_{n=1}^{N} B_n^p\frac{1}{(n+1)^p}.
\end{aligned}$$

Combinando las dos desigualdades llegamos a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} b_n^p &\geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p\sum_{n=1}^{N} B_n^p\left(\frac{p}{(n+1)^p} - \frac{p-1}{n^p}\right) \\
&= \left(\frac{p-1}{p}\right)^p\sum_{n=1} Nc_n\left(\frac{B_n}{n}\right)^p.
\end{aligned}$$

donde

$$c_n = p\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-p} - p + 1 \to 1 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Ahora usamos el razonamiento de la sección anterior, poniendo

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = a_1, \quad b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = b_{2m} = a_2, \ldots,$$
$$b_{(N-1)m+1} = b_{(N-1)m+2} = \cdots = b_{Nm} = a_N$$

y sustituyendo N por Nm para concluir que

$$\begin{aligned} m\left(\frac{p-1}{p}\right)^p \sum_{n=1}^{N} a_n^p \geq (c_1 + c_2 + \cdots + c_m)\left(\frac{A_1}{1}\right)^p \\ + (c_{m+1} + c_{m+2} + \cdots + c_{2m})\left(\frac{A_2}{2}\right)^p \\ + \cdots + \left(c_{(N-1)m+1} + c_{(N-1)m+2} + \cdots + c_{Nm}\right)\left(\frac{A_N}{N}\right)^p. \end{aligned}$$

Dividiendo por m y haciendo $m \to \infty$ llegamos a que

$$\frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_m}{m} \to 1, \quad \frac{c_{m+1} + c_{m+2} + \cdots + c_{2m}}{m} \to 1, \quad \cdots$$

lo cual indica que (1.13) se mantiene para todo $N < \infty$ (luego sigue siendo válido cuando $N \to \infty$).

Para probar que $(p/(p-1))^p$ es la constante fuerte para $N = \infty$, consideramos

$$a_n = n^{-1/p-\epsilon}, \quad 0 < \epsilon < 1 - \frac{1}{p}.$$

Para esta elección de los a_n

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=1}^{n} k^{-1/p-\epsilon} > \int_1^n x^{-1/p-\epsilon} dx \\ &= \frac{1}{1-1/p-\epsilon}(n^{1-1/p-\epsilon} - 1) > \frac{p}{p-1}(n^{1-1/p-\epsilon} - 1), \end{aligned}$$

implica que

$$\begin{aligned} \left(\frac{A_n}{n}\right)^p &> \left(\frac{p}{p-1}\right)^p n^{-1-\epsilon p}\left(1 - \frac{1}{n^{1-1/p-\epsilon}}\right)^p \\ &\geq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p n^{-1-\epsilon p}\left(1 - \frac{p}{n^{1-1/p-\epsilon}}\right) \\ &= \left(\frac{p}{p-1}\right)^p (n^{-1-\epsilon p} - pn^{-2+1/p+\epsilon-\epsilon p}). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p &> \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left(\sum_{n=1} N a_n^p - p\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2-1/p-\epsilon+\epsilon p}}\right) \\ &= \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^p - pC_{N,\epsilon}\right), \end{aligned}$$

donde $C_{N,\epsilon} \to C$ cuando $N \to \infty$ para cualquier $\epsilon > 0$ porque

$$2 - \frac{1}{p} - \epsilon + \epsilon p > 1.$$

Así que

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p/\sum_{n=1}^{N}a_n^p > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\left(1-pC_{N,\epsilon}/\sum_{n=1}^{N}a_n^p\right)\to\left(\frac{p}{p-1}\right)^p,$$

pues

$$\sum_{n=1}^{N}a_n^p=\sum_{n=1}^{N}n^{-1-\epsilon p}\to\infty \quad \text{cuando } N\to\infty \text{ y } \epsilon\to 0^+.$$

Esto finaliza la prueba. Notemos que el cálculo anterior también es válido cuando $\epsilon = 0$.
□

Nota 1.13. *En su carta, Landau también mencionó que la igualdad en* (1.13)*, y, como consecuencia, en la desigualdad discreta de Hardy* (1.1)*ocurre si y solo si $a_n = 0$ para todo n.*

Nota 1.14. *No está claro de que forma la carta de Landau a Hardy (fechada a 21 de junio de 1921) y la carta de Landau a Schur (fechada el 22 de junio de 1921) están relacionadas, pero por la información que Hardy proporcionó en su artículo [7] de 1925, y la forma publicada en el trabajo de Landau [10], deben ser muy similares, si no incluso la misma.*

1.7. El artículo de 1925

En la introducción de este artículo, Hardy enunció el teorema 1.11 y escribió:

> *Yo no di una prueba, principalmente me ocupé del teorema de series infinitas, y no mencioné en que sentido se efectúa la integración. El profesor Landau me ha llamado la atención recientemente, y por ello doy una prueba del teorema de una forma más precisa.*

Véase el teorema 1.15. Más tarde, en este mismo artículo ofreció la siguiente información ([7], p. 154):

> *En una carta de 21 de junio de 1921, el profesor Landau me proporcionó una prueba directa de* (1.1)*, con el valor correcto de la constante* $(p/(p-1))^p$*. El también notó que si el teorema integral se extendía al caso $a = 0$, entonces el teorema para series, con el valor correcto de la constante, podía deducirse inmediatamente $f(x) = a$, $0 \le x < 1$, $f(x) = a_2$, $1 \le x < 2$,...*

En efecto, asumiendo, sin pérdida de generalidad, que estamos considerando una función decreciente f, o, equivalentemente, una sucesión decreciente $a_1 \ge a_2 \ge \cdots$ y observando que la función

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n(x-n+1)}{x}$$

es decreciente en $[n-1,n]$, se obtiene

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}\right)^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1}a_k+a_n(x-n+1)}{x}\right)^p dx\\ &= \int_0^\infty\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty f(x)^p dx\\ &= \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p.\end{aligned}$$

Hardy añadió un comentario refiriéndose a otra carta ([7], p.154):

> *En una carta más reciente, del 13 de diciembre de 1924, demuestra como deducir el teorema integral para $a=0$, a partir de $a>0$ (por un método parecido a la prueba del profesor Pólya) y reducir la dependencia del teorema de series a la dependencia de este último*

Con esta información, Hardy enunció y probó su famosa desigualdad (1.2) en la siguiente forma:

Teorema 1.15. *Sea $p>1$ y sea $f(x)\geq 0$ una función p-integrable en $(0,\infty)$, Entonces la función $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt<\infty$ para todo $x>0$ y*

$$\int_0^\infty\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty f(x)^p\,dx \tag{1.14}$$

La constante $(p/(p-1))^p$ es fuerte.

Hardy señaló en este artículo que si $f(x)=0$ cuando $x<a$, entonces su versión anterior (teorema 1.11) se deduce del teorema 1.15. La prueba original de Hardy contenía muchos detalles y explicaciones muy técnicas, pero en una nota al final de la prueba el mencionó una simplificación sugerida por Pólya. Seguidamente damos una prueba que sigue las ideas originales de Hardy, pero evita esos detalles técnicos utilizando esa simplificación que le sugerió Pólya.

Demostración. Integrando por partes y usando y la identidad $d/dx(F(x)^p)=pF(x)^{p-1}f(x)$, que es válida para casi todo $x\in(0,\infty)$, se obtiene para valores arbitrarios de α y A con $0<\alpha<A<\infty$ que:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^A\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx &= -\frac{1}{p-1}\int_\alpha^A F(x)^p\frac{d}{dx}(x^{1-p})\,dx\\ &= \frac{\alpha^{1-p}}{p-1}F(\alpha)^p-\frac{A^{1-p}}{p-1}F(A)^p+\frac{1}{p-1}\int_\alpha^A x^{1-p}\frac{d}{dx}(F(x)^p)\,dx\\ &\leq \frac{\alpha^{1-p}}{p-1}F(\alpha)^p+\frac{p}{p-1}\int_\alpha^A\left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1}f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Además, utilizando la versión continua de la desigualdad (1.10) de Hölder, observamos que

$$\int_\alpha^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1} f(x)\,dx \le \left(\int_\alpha^\infty f(x)^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_\alpha^A \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\right)^{(p-1)/p}.$$

Escogiendo β tal que $\alpha \le \beta A$ y aplicando las dos desigualdades anteriores a $F(x) - F(\alpha)$ en lugar de $F(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^A \left(\frac{F(x)-F(\alpha)}{x}\right)^p dx \\
&\quad\le \frac{p}{p-1}\int_\alpha^A \left(\frac{F(x)-F(\alpha)}{x}\right)^{p-1} f(x)\,dx \\
&\quad\le \frac{p}{p-1}\left(\int_\alpha^A f(x)^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_\alpha^A \left(\frac{F(x)-F(\alpha)}{x}\right)^p dx\right)^{(p-1)/p}.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\left(\int_\alpha^A \left(\frac{F(x)-F(\alpha)}{x}\right)^p dx\right)^{1/p} \le \frac{p}{p-1}\left(\int_\alpha^A f(x)^p\,dx\right)^{1/p},$$

y se tiene

$$\left(\int_\beta^A \left(\frac{F(x)-F(\alpha)}{x}\right)^p dx\right)^{1/p} \le \frac{p}{p-1}\left(\int_0^\infty f(x)^p\,dx\right)^{1/p}.$$

En esta desigualdad primero hacemos $\alpha \to 0^+$ y observamos que $F(x) - F(\alpha)$ tiende a $F(x)$ Para finalizar la prueba hacemos $A \to \infty$ y $\beta \to 0^+$.

□

Nota 1.16. *Hardy se había dado cuenta de la dificultad de que la constante $(p/(p-1))^p$ era la mejor en su artículo de 1920. En ese trabajo decidió no mencionarlo como parte del teorema que enunció, pero incluyó los detalles de la prueba (usando una forma modificada del ejemplo que consideró en el artículo de 1920).*

1.8. Más contribuciones del trabajo de 1925

Además del principal resultado (teorema 1.15), el artículo de 1925 incluyó bastantes resultados interesantes que contribuyeron a la investigación de las desigualdades de Hardy. En particular, Hardy probó que la siguiente variante de 1.1 se mantiene incluso si la media aritmética $(1/n)\sum_{k=1}^n a_k$ se cambia por una media aritmética más general con pesos.

Teorema 1.17. *Supongamos que $a_n \ge 0$ y $\lambda > 0$, que $A_n = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$ y $\Lambda_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ para $n = 1, 2, \ldots$, y que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^p$ es convergente. Entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\frac{A_n}{\Lambda_n}\right)^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^p. \tag{1.15}$$

Hardy probó este teorema aplicando el teorema 1.15 a funciones escalonadas adecuadas (véase la observación de Landau que fue mencionada antes del teorema). Hardy también notó que si se reemplaza a_n por ${a_n}^{1/p}$ en la desigualdad (1.15) y hacemos $p \to \infty$, entonces $(p/(p-1))^p \to e$ y

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{\lambda_1{a_1}^{1/p}+\lambda_2{a_2}^{1/p}+\cdots+\lambda_n{a_n}^{1/p}}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}\right)^p=\left({a_1}^{\lambda_1}+{a_2}^{\lambda_2}+\cdots+a_{n_n}^{\lambda}\right)^{1/\Lambda_n}.$$

Recordemos que dados $x_1,\ldots,x_n$ números reales no negativos, se define la media ponderada de orden p con pesos positivos w_i, que representamos M_p, como

$$M_p(x_1,\ldots,x_n)=\left(\sum_{i=1}^n w_i x_i^p\right)^{1/p},\quad \sum_{i=1}^n w_i=1.$$

La media geométrica es

$$M_0=\prod_{i=1}^n x_i^{w_i}$$

y se cumple ,que

$$\lim_{p\to 0} M_p=M_0,$$

pues si escribimos

$$M_p(\mathbf{x})=\exp\left\{\frac{1}{p}\log\left(\sum_{i=1}^n w_i x_i^p\right)\right\},$$

y aplicamos la regla de l'Hôpital,

$$\lim_{p\to 0}\frac{\log\left(\sum_{i=1}^n w_i x_i^p\right)}{p}=\lim_{p\to 0}\frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i^p\log x_i}{\sum_{i=1}^n w_i x_i^p}=\sum_{i=1}^n w_i\log x_i=\log(x_1^{w_1}x_2^{w_2}\cdots x_n^{w_n}),\tag{1.16}$$

de donde se concluye la afirmación.

Por tanto, Hardy llegó al siguiente resultado límite del teorema 1.17:

Teorema 1.18. *Si* $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n a_n$ *es convergente, entonces*

$$\sum_{n=1}^\infty \lambda_n\left({a_1}^{\lambda_1}{a_2}^{\lambda_2}\cdots{a_n}^{\lambda_n}\right)^{1/\Lambda_n}\le e\sum_{n=1}^\infty \lambda_n a_n,\tag{1.17}$$

y la constante e es fuerte.

En el caso en que cada $\lambda_n=1$, la desigualdad (1.17) es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \le e \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1.18}$$

que es el límite natural de la desigualdad 1.1. La desigualdad (1.18) fue probada primero por Carleman en 1922, de ahí su nombre: desigualdad de Carleman. Es una desigualdad muy conocida, usada en muchas aplicaciones que tiene su propia historia. La prueba original de Carleman, que es bastante larga, usa los multiplicadores de Lagrange. Para él fue interesante ver la simpleza de la prueba derivada de las desigualdades de Hardy. Él se enteró rápidamente, pues en ese momento Hardy estaba desarrollando una colaboración con Carleman.

Realizando un proceso límite similar en la versión continua de la desigualdad de Hardy, (1.2), llegamos a la siguiente desigualdad:

$$\int_0^{\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log f(t)\,dt\right) dx \le e \int_0^{\infty} f(x)\,dx, \tag{1.19}$$

donde $f(x)$ es una función estrictamente positiva y medible en cada intervalo finito $(0,x)$. Cabe destacar que en el articulo original [7] la desigualdad (1.19) aparece sin la constante e y con $e^{f(x)}$ en lugar de $f(x)$.

Hardy admitió que fue Pólya quien le ayudó a conocer los argumentos límites que implicaron directamente las desigualdades (1.17), (1.18) y (1.19). En algunas ocasiones a (1.19) se le llama la desigualdad de Knopp, aunque el trabajo de Knopp de ese tema data de 1928. Por ello actualmente se le conoce más con el nombre de desigualdad de Pólya-Knopp.

1.9. Pruebas de Elliot e Ingham: desigualdad de Copson

En 1926, Elliot en [2] dio una demostración simple y elegante de la desigualdad (1.1) usando la desigualdad de Young que vemos a continuación.

Teorema 1.19 (Desigualdad de Young)**.** *Sean* $u,v>0$ *y* $p,q>1$ *tales que* $1/p+1/q=1$. *Entonces*

$$uv \le \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

Demostración. Dado que p y q son conjugados,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \quad \Rightarrow \quad p-1=\frac{1}{q-1},$$

así que la inversa de la función $y=x^{p-1}$ es $x=y^{q-1}$.

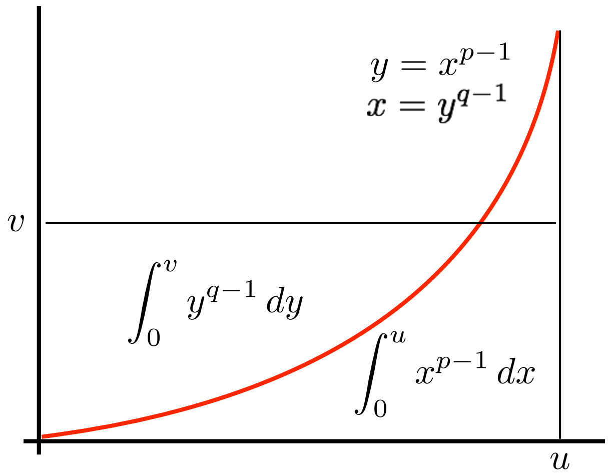

Figura 1.1: Desigualdad de Young.

Por tanto, elegidos $u, v > 0$, viendo la figura 1.1 es claro que

$$uv \leq \int_0^u x^{p-1}\,dx + \int_0^v y^{q-1}\,dy = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

La igualdad se da si y solo si $v = u^{p-1}$, es decir, $u^p = v^q$.

$\square$

Esta desigualdad se puede generalizar, si $y = f(x)$ y $x = g(y)$ son funciones continuas, estrictamente crecientes inversas una de la otra y $a, b > 0$ entonces

$$ab \leq \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b g(y)\,dy,$$

dándose la igualdad si y solo si $b = f(a)$.

Demostración. Copson razona de la siguiente manera para probar la desigualdad de Hardy. Si elegimos $\alpha_n = A_n/n$ y $\alpha_0 = 0$, entonces por la desigualdad de Young obtenemos

$$\begin{aligned}
\alpha_n^p - \frac{p}{p-1}{\alpha_n}^{p-1}a_n &= \alpha_n^p - \frac{p}{p-1}[n\alpha_n - (n-1)\alpha_{n-1}]{\alpha_n}^{n-1} \\
&= \alpha_n^p\left(1 - \frac{np}{p-1}\right) + \frac{(n-1)p}{p-1}{\alpha_n}^{p-1}\alpha_{n-1} \\
&\leq \alpha_n^p\left(1 - \frac{np}{p-1}\right)[(p-1)\alpha_n^p + \alpha_{n-1}^p] \\
&\frac{1}{p-1}[(n-1)\alpha_{n-1}^p - n\alpha_n^p].
\end{aligned}$$

y sumando desde 1 a N,

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n^p - \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^N {\alpha_n}^{p-1}a_n \leq \frac{1}{p-1}\sum_{n=1}^N [(n-1)\alpha_{n-1}^p - n\alpha_n^p] = -\frac{N\alpha_N^p}{p-1} \leq 0, \qquad (1.20)$$

es decir,

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^p\le\frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{p-1}a_n=\frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^{p-1}a_n.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder (1.10), concluimos que

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p\le\frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^{p-1}a_n\le\frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^{N}a_n^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p\right)^{1/p'},$$

y dividiendo por el último factor y elevando a p se llega a (1.1).

Para comprobar la optimalidad de la constante consideramos la sucesión

$$a_n=\begin{cases}n^{-1/p}, & n\le N\\ 0, & n>N,\end{cases}$$

siendo N natural fijo que determinaremos posteriormente. Calculamos ambos miembros de la desigualdad:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p=\sum_{n=1}^{N}a_n^p=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n},$$

y por otro lado,

$$A_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{1/p}}>\int_1^n x^{-1/p}\,dx=\frac{p}{p-1}\left(n^{1-1/p}-1\right),$$

por lo que

$$\left(\frac{A_n}{n}\right)^p>\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\frac{1}{n^p}\left(n^{1-1/p}-1\right)^p=\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\frac{1-\varepsilon_n}{n},$$

donde

$$\varepsilon_n=1-n\left(\frac{n^{1-1/p}-1}{n}\right)^p=1-\frac{\left(n-n^{1/p}\right)^p}{n^p}\to 0\quad\text{cuando } n\to\infty.$$

Dado $\varepsilon>0$ sea $n_0\ge 1$ tal que $\varepsilon_n<\varepsilon$ para todo $n\ge n_0$ y tomamos $N\ge n_0$ de modo que

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}>\frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{n_0-1}\frac{1}{n}.$$

Observemos que N depende solo de ε y además

$$\varepsilon\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}>\sum_{n=1}^{n_0-1}\frac{1}{n}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p &> \sum_{n=n_0}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p > \sum_{n=n_0}^{N}\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \frac{1-\varepsilon_n}{n}\\
&= \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=n_0}^{N}\frac{1-\varepsilon_n}{n} > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=n_0}^{N}\frac{1-\varepsilon}{n}\\
&= (1-\varepsilon)\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=n_0}^{N}\frac{1}{n} = (1-\varepsilon)\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{n_0-1}\frac{1}{n}\right)\\
&> (1-\varepsilon)\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \varepsilon\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right)\\
&= (1-\varepsilon)^2\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = (1-\varepsilon)^2\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{N}a_n^p\\
&= (1-\varepsilon)^2\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty}a_n^p,
\end{aligned}$$

y basta hacer $\varepsilon \to 0$ para concluir que la constante es óptima.

□

Dos años después Grandjot [3] dedujo la identidad

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - 2\sum_{n=1}^{N}\frac{A_n a_n}{n} = -\frac{A_n^2}{N} - \sum_{n=2}^{N}(n-1)\left(\frac{A_n}{n} - \frac{A_{n-1}}{n-1}\right)^2 \tag{1.21}$$

observando que

$$\frac{2a_nA_n}{n} - \left(\frac{A_n}{n}^2\right) = \frac{A_n^2}{n} - \frac{A_{n-1}^2}{n-1} + (n-1)\left(\frac{A_n}{n} - \frac{A_{n-1}}{n-1}\right)^2$$

cuando $n \geq 2$. Esto da lugar a otra prueba de (1.1) para el caso $p = 2$.

Ingham también encontró una prueba simple de (1.2), véase [8], p.243. Ya que

$$Hf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(tx)dt,$$

se tiene que por la desigualdad integral de Minkowski que

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^{\infty}(Hf(x))^p dx\right)^{1/p} &= \|Hf\|_p = \left\|\int_0^1 f(tx)dt\right\|_p\\
&\leq \int_0^1 \|f(tx)\|_p dt = \int_0^1\left(\int_0^{\infty} f(tx)^p dx\right)^{1/p} dt\\
&= \int_0^1\left(\int_0^{\infty} f(s)^p \frac{ds}{t}\right)^{1/p} dt = \frac{p}{p-1}\left(\int_0^{\infty} f(s)^p ds\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

En 1927 Copson, [1], probó el Teorema 1.17 de Hardy adaptando la prueba de Elliot al usar el dual de la desigualdad de Hardy, un resultado conocido ahora como desigualdad de Copson.

Teorema 1.20. *Si $p > 1$, $a_n \geq 0$, $\lambda_n > 0$, y $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^p$ es convergente, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda_k a_k}{\sum_{m=1}^{k} \lambda_m} \right)^p \leq p^p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^p, \tag{1.22}$$

siendo la constante p^p óptima.

La desigualdad de Copson para el caso en que $\lambda_n = 1$ para cada n afirma que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k} \right)^p \leq p^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \tag{1.23}$$

cuando $p > 1$ y la constante p^p es fuerte. Es la que vemos a continuación.

Demostración. Sea q el conjugado de p, es decir, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$

Empezamos por definir el operador de Hardy de ℓ_q a ℓ_p. Recordemos primero que

$$\ell_q = \left\{ (a_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q < \infty \right\}, \qquad \|a_n\|_q = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q \right)^q.$$

El operador de Hardy es

$$H : \ell_q \to \ell_q, \qquad b = (b_n) \mapsto Hb = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} b_k \right)$$

Por la versión discreta de la desigualdad de Hardy y como la constante es óptima, se tiene que la norma de dicho operador es:

$$\|H\| = \frac{q}{q-1} = p$$

Sabemos que $(\ell_q)' = \ell_p$, luego podemos considerar el operador adjunto, H^*, que tendrá su misma norma. Calculemos este operador.

$$< b, H^* a >=< Hb, a >= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Desarrollamos un poco este sumatorio,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} b_k = a_1 b_1 + a_2 \frac{(b_1 + b_2)}{2} + a_3 \frac{(b_1 + b_2 + b_3)}{3} + \cdots$$

Vemos que podemos reformularlo como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}.$$

Entonces se tiene:

$$H^* : \ell_p \to \ell_p, \qquad a = (a_n) \mapsto H^* a = \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k} \right)$$

donde se cumple que

$$\|H^* a\|_p \leq \|H^*\| \|a\|_p.$$

Sustituyendo se tiene:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k} \right)^p \right)^{1/p} \leq p \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \right)^{1/p},$$

y elevando toda la expresión a p obtenemos la desigualdad que buscábamos.

□

Hardy antes demostró en [5] una versión débil de (1.23) para el caso $p = 2$, por lo que (1.23) es también conocida como desigualdad de Copson-Hardy. Hardy fue el primero en comentar la dualidad entre (1.22) y (1.17).

1.10. Conclusión

Normalmente los matemáticos presentan sus resultados de una manera clara y esmerada que es muy adecuada para aplicaciones y fomentar investigaciones posteriores. Sin embargo, es bien sabido que en el proceso de llegar a los resultados finales urgen otras líneas, colaboraciones e incluso errores. La historia que hemos descrito de la evolución de las famosas desigualdades de Hardy puede servir como un buen ejemplo de este hecho. En particular, este documento nos permite conocer una mejor visión de los razonamientos de Hardy.

De todo lo descrito anteriormente sacamos en claro que G. H. Hardy,

- tuvo buenos contactos con otros matemáticos de la época, quiénes se interesaron en su tema y realizaron intercambios de información de diferentes formas ya fuera por cartas formales o vía privada,
- fue un gran maestro en el desarrollo teórico de las matemáticas,
- sintetizó de manera inteligente el conocimiento obtenido de diferentes fuentes y
- jugó un papel fundamental en el desarrollo descrito en este trabajo. En particular, es adecuado que de nombre a las desigualdades (1.1) y (1.2).

Sin embargo, también otros matemáticos como Landau, Pólya, Riesz y Schur realizaron importantes contribuciones a este desarrollo. De hecho, podemos decir que si los resultados de los nombres mencionados anteriormente hubieran sido publicados de una manera diferente, podríamos hoy referirnos a la desigualdad (1.1) como desigualdad de Riesz o desigualdad de Landau-Riesz, o desigualdad de Hardy-Landau-Riesz.

CAPÍTULO 2

La desigualdad de Hilbert

En este capítulo trataremos con más profundidad algunas desigualdades relacionadas con este tema: la desigualdad de Hilbert, la desigualdad de Hardy y también la desigualdades de Carleson y Carleman.

2.1. La desigualdad de Hilbert

Existe una constante C tal que para todo par de sucesiones de números reales $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ se tiene:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} < C\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{1/2} \tag{2.1}$$

Esta desigualdad fue descubierta a principios del siglo XX por David Hilbert; más precisamente, Hilbert probó que la desigualdad (2.1) se mantiene para $C = 2\pi$

Años después del descubrimiento de Hilbert, Issai Schur proporcionó una nueva prueba que muestra que la desigualdad de Hilbert se mantiene para $C = \pi$.

Veremos que no hay un valor más pequeño de C tal que la desigualdad se siga manteniendo.

A pesar de las similitudes entre la desigualdad de Hilbert y la desigualdad de Cauchy, Hilbert le dio un enfoque diferente, evaluando ciertas integrales trigonométricas. Sin embargo, como veremos, se puede probar la desigualdad de Hilbert mediante una apropiada aplicación de la desigualdad de Cauchy.

Si S es un conjunto numerable y $\{\alpha_s\}$ y $\{\beta_s\}$ son colecciones de números reales indexados por S, la desigualdad de Cauchy se escribe de la forma:

$$\sum_{s\in S}\alpha_s\beta_s \leq \left(\sum_{s\in S}\alpha_s^2\right)^{1/2}\left(\sum_{s\in S}\beta_s^2\right)^{1/2} \tag{2.2}$$

Haciendo unas elecciones adecuadas de S, $\{\alpha_s\}$, y $\{\beta_s\}$ nos permitirá ligar (2.2) con la desigualdad de Hilbert (2.1)

En un primer intento, podríamos elegir como conjunto de índices $S = \{(m,n) : m \geq 1, n \geq 1\}$ y tomar α_s y β_s como los cocientes:

$$\alpha_s = \frac{a_m}{\sqrt{m+n}}, \quad \beta_s = \frac{b_n}{\sqrt{m+n}}$$

donde $s = (m,n)$

Por construcción, los productos $\alpha_s\beta_s$ nos dan los términos del lado izquierdo de la desigualdad de Hilbert, pero la cota que se obtiene aplicando la desigualdad de Cauchy (2.2) es decepcionante. De manera precisa, obtenemos la siguiente acotación:

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}\right)^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m^2}{m+n}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_n^2}{m+n} \tag{2.3}$$

pero, desafortunadamente, los dos términos resultan ser infinito.

El primer término del lado derecho de (2.3) diverge como una serie armónica cuando sumamos en n, y el segundo término diverge como serie armónica cuando sumamos en m. Por tanto, la desigualdad (2.3) no nos sirve. Sin embargo, podemos corregir este problema realizando una elección más adecuada de $\{\alpha_s\}$ y $\{\beta_s\}$

Como hemos visto las dos sumas del lado derecho de (2.3) divergen, pero veamos el motivo de esta divergencia. El primer término diverge porque

$$\alpha_s = \frac{a_m}{\sqrt{m+n}}$$

es muy grande como función de n, mientras que el segundo factor diverge porque

$$\beta_s = \frac{b_n}{\sqrt{m+n}}$$

es muy grande como función de m. Por tanto, esto nos indica que podríamos mejorar α_s y β_s si multiplicamos la primera por una función decreciente en n y la segunda la multiplicamos por una función decreciente en m. Ya que queremos preservar la propiedad básica de que

$$\alpha_s\beta_s = \frac{a_m b_n}{m+n},$$

sería buena opción introducir como candidatos una familia paramétrica tal que

$$\alpha_s = \frac{a_m}{\sqrt{m+n}}\left(\frac{m}{n}\right)^{\lambda} \quad \beta_s = \frac{b_n}{\sqrt{m+n}}\left(\frac{n}{m}\right)^{\lambda} \tag{2.4}$$

donde $s = (m,n)$ y donde $\lambda > 0$ es una constante que elegiremos más adelante. Esta nueva familia de candidatos nos permitirá llegar a la prueba de la desigualdad de Hilbert.

Cuando sustituimos las igualdades de (2.4) en la desigualdad de Cauchy (2.2), obtenemos

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}\right)^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m^2}{m+n}\left(\frac{m}{n}\right)^{2\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_n^2}{m+n}\left(\frac{n}{m}\right)^{2\lambda},$$

por tanto, cuando consideramos el primer término del lado derecho se tiene:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m^2}{m+n}\Big(\frac{m}{n}\Big)^{2\lambda}=\sum_{m=1}^{\infty}a_m^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}\Big(\frac{m}{n}\Big)^{2\lambda}.$$

Por la simetría de los sumandos $a_m b_n/(m+n)$ en nuestra suma objetivo, observamos que la prueba de la desigualdad de Hilbert estará terminada si probamos que para cada elección de λ hay una constante $B_\lambda < \infty$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}\Big(\frac{m}{n}\Big)^{2\lambda}\leq B_\lambda, \quad \forall m\geq 1. \tag{2.5}$$

Ahora necesitamos acotar la suma (2.5), y para ello primero recordamos que dada cualquier función decreciente no negativa $f:[0,\infty]\to\mathbb{R}$, tenemos la cota integral

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)\leq\int_0^{\infty}f(x)dx.$$

En el caso particular de elegir $f(x)=m^{2\lambda}x^{-2\lambda}(m+x)^{-1}$, tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}\Big(\frac{m}{n}\Big)^{2\lambda}\leq\int_0^{\infty}\frac{1}{m+x}\frac{m^{2\lambda}}{x^{2\lambda}}\,dx=\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+y)y^{2\lambda}}\,dy, \tag{2.6}$$

donde en la última igualdad hemos efectuado el cambio de variable $x=my$. ¿Qué pasa con la integral del lado derecho de la desigualdad (2.6)? Como $\lambda>0$, en el infinito no tiene problema y para que sea convergente en el origen debe ser $2\lambda<1$. Así pues, converge cuando $0<\lambda<1/2$ y, por tanto, existe un λ tal que (2.5) está acotada. Luego esto bastaría para probar la desigualdad de Hilbert (2.1).

Nuestro problema ya está resuelto, pero nos falta saber el valor de la constante C que proporciona la prueba. Cuando revisamos el razonamiento, observamos que hemos probado que la desigualdad de Hilbert (2.1) es cierta para cualquier $C=C_\lambda$ con

$$C_\lambda=\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+y)}\cdot\frac{1}{y^{2\lambda}}dy, \quad 0<\lambda<1/2. \tag{2.7}$$

Naturalmente, debemos encontrar el valor de λ más pequeño de todos.

Evaluemos pues la integral

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+y)}\cdot\frac{1}{y^{2\lambda}}\,dy.$$

Observemos que si escribimos

$$\frac{1}{1+y}=\int_0^{\infty}e^{-t(1+y)}\,dt,$$

nos permite entonces poner

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+y)y^{2\lambda}}\,dy=\int_0^{\infty}\Big(\int_0^{\infty}e^{-t(1+y)}\,dt\Big)\frac{1}{y^{2\lambda}}\,dy$$

$$= \int_0^\infty e^{-t}\left(\int_0^\infty e^{-ty}\frac{1}{y^{2\lambda}}\,dy\right)dt.$$

En la integral obtenida en el integrando hacemos el cambio de variable $ty = u$, y usamos la función gamma, con lo que

$$\int_0^\infty e^{-ty}\frac{1}{y^{2\lambda}}\,dy = \int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{t}\right)^{-2\lambda}\frac{1}{t}\,du = \frac{1}{t^{1-2\lambda}}\Gamma(1-2\lambda),$$

así que

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)y^{2\lambda}}\,dy = \Gamma(1-2\lambda)\int_0^\infty e^{-t}t^{2\lambda-1}\,dt = \Gamma(2\lambda)\Gamma(1-2\lambda).$$

Y por lo que probamos en la siguiente sección (página 28), concluimos que

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)y^{2\lambda}}\,dy = \frac{\pi}{\operatorname{sen} 2\pi\lambda}, \quad 0 < \lambda < \frac{1}{2}. \tag{2.8}$$

Dado que $\operatorname{sen} 2\pi\lambda$ alcanza el máximo cuando $\lambda = 1/4$, tenemos que el menor valor de B_λ con $0 < \lambda < 1/2$ es

$$B_{1/4} = \int_0^\infty \frac{1}{(1+y)\sqrt{y}}\,dy = [y = t^2] = \int_0^\infty \frac{2}{1+t^2}\,dt = \pi. \tag{2.9}$$

Al sustituir el valor de λ obtenemos:

$$C = C_{1/4} = \int_0^\infty \frac{1}{(1+y)}\frac{1}{\sqrt{y}}dy = \pi. \tag{2.10}$$

Hemos hallado sin mucha dificultad en nuestro intento de probar la desigualdad de Hilbert, el valor de la constante $C = \pi$ que fue descubierta por Schur. Y ha sido gracias a la desigualdad de Cauchy. No obstante, hoy día hay muchas pruebas de la desigualdad de Hilbert, algunas muy breves.

Sin embargo, hay un pequeño punto que no debemos pasar por alto. La integral (2.8) es actualmente un resultado clásico en libros de texto; Bak y Newman[1] y Cartan[2] lo usaron para ilustrar la técnica usual para la integración de $R(x)/x^\alpha$ en $[0,\infty)$ donde $R(x)$ es una función racional y $0 < \alpha < 1$, Esta integral también tiene una conexión notable con una identidad de la función gamma que mencionaremos más adelante.

Puede parecer que se necesita un milagro para que usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz sea lo suficientemente preciso como para mostrar que se puede tomar $C = \pi$ en la desigualdad de Hilbert, pero hay otra manera de ver la relación entre los dos lados de la desigualdad de Hilbert que aclara que no se requería milagro. Con el punto de vista correcto, se puede ver que tanto π como las integrales especiales (2.8) tienen un papel inevitable. Para desarrollar esta conexión, asumiremos el desafío de demostrar lo contrario de nuestro primer problema.

Consideremos el siguiente problema:

[1]Bak, J., Newman, D. J. *Complex analysis*, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin, (1997).

[2]Cartan, H. *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables*, Hermann, Paris, (1961).

Problema 2.1. *Supongamos que la constante C satisface*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} < C\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{1/2} \tag{2.11}$$

para todo par de sucesiones de números reales $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$.

Demuéstrese que $C \geq \pi$.

Si ponemos cualquier par de sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ en la desigualdad (2.11) conseguiremos una cota inferior para C, pero no llegaremos muy lejos con este método si no conseguimos elegir bien las sucesiones. Lo que nos gustaría es tener una familia paramétrica de pares $\{a_n(\epsilon)\}$ y $\{b_n(\epsilon)\}$ que nos proporcione una sucesión de límites inferiores en C que tienda a π cuando $\epsilon \to 0$. El problema es, ¿cómo encontramos los candidatos adecuados para $\{a_n(\epsilon)\}$ y $\{b_n(\epsilon)\}$?

Dos ideas básicas nos pueden ayudar en este análisis. Primero, necesitamos ser capaces de calcular (o aproximar) las sumas que aparecen en la desigualdad (2.11). No podemos hacer muchas sumas, lo cual nos limita el análisis.

La segunda idea es más sutil. Necesitamos poner la desigualdad *bajo estrés*. Esta idea general tiene muchas interpretaciones posibles, pero este caso nos sugiere buscar sucesiones $\{a_n(\epsilon)\}$ y $\{b_n(\epsilon)\}$ tal que todas las cantidades de la desigualdad (2.11) tiendan a infinito cuando $\epsilon \to 0$. Esta estrategia particular aplicada a la desigualdad (2.11) puede no ser muy convincente cuando uno lo enfrenta por primera vez, pero experimentar con algunos ejemplos es suficiente para convencernos que la idea puede ser útil.

Vemos que los candidatos más naturales para $\{a_n(\epsilon)\}$ y $\{b_n(\epsilon)\}$ vienen dados por

$$a_n(\epsilon) = b_n(\epsilon) = n^{-\frac{1}{2}-\epsilon}$$

Con esta elección, uno puede fácilmente calcular las aproximaciones que son necesarias para entender el lado derecho de la desigualdad de Hilbert. En concreto, como $\epsilon \to 0$ se tiene que

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2(\epsilon)\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2(\epsilon)\right)^{1/2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+2\epsilon}} \sim \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{1+2\epsilon}} = \frac{1}{2\epsilon}. \tag{2.12}$$

Para completar la solución del problema 2.1, solamente nos queda ver que la correspondiente suma para el lado izquierdo de la desigualdad de Hilbert (2.1) es asintóticamente equivalente a $\pi/2\epsilon$ cuando $\epsilon \to 0$. Presentamos el resultado en el siguiente lema.

Lema 2.2 (**Suma doble**). *Se cumple que*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\epsilon}}\cdot\frac{1}{m^{\frac{1}{2}+\epsilon}}\cdot\frac{1}{m+n} \sim \frac{\pi}{2\epsilon}, \qquad \epsilon \to 0.$$

Demostración. Para la prueba, primero notamos que las comparaciones con integrales nos dicen que basta ver

$$I(\epsilon) = \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \frac{1}{y^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \frac{1}{x+y} dxdy \sim \frac{\pi}{2\epsilon} \qquad \epsilon \to 0,$$

y el cambio de variables $u = y/x$ también nos dice que

$$I(\epsilon) = \int_1^\infty x^{-1-2\epsilon} \left[\int_{1/x}^\infty u^{-\frac{1}{2}-\epsilon} \frac{du}{1+u} \right] dx. \tag{2.13}$$

Esta integral sería fácil de calcular si pudiéramos reemplazar el límite inferior $1/x$ de la integral interior por 0, y, para ver como quedaría modificada la integral, primero observamos que:

$$0 < \int_0^{1/x} u^{-\frac{1}{2}-\epsilon} \frac{du}{1+u} < \int_0^{1/x} u^{-\frac{1}{2}-\epsilon} du = \frac{x^{-\frac{1}{2}+\epsilon}}{\frac{1}{2}-\epsilon}.$$

Cuando usamos esta acotación en la ecuación (2.13) y escribimos el resultado usando la notación O grande de Landau (también llamado orden de una función), se tiene:

$$\begin{aligned} I(\epsilon) &= \int_1^\infty x^{-1-2\epsilon} \left(\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}-\epsilon} \frac{du}{1+u} \right) dx + O\left(\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}-\epsilon} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\epsilon} \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}-\epsilon} \frac{du}{1+u} + O(1). \end{aligned}$$

Finalmente, haciendo $\epsilon \to 0$, vemos por nuestra anterior experiencia con la integral (2.10) que tenemos:

$$\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}-\epsilon} \frac{du}{1+u} \to \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{1+u} = \pi,$$

lo que completa la prueba.

□

2.1.1. Una ecuación funcional para la función Gamma

Vamos a ver el resultado que usamos anteriormente en la demostración de la desigualdad de Hilbert. Recordemos que la función gamma se define como

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx \qquad (\Re(z) > 0). \tag{2.14}$$

Si z es real, la integral converge en infinito porque e^{-x} tiende a cero más rápidamente que el crecimiento de cualquier potencia x^{z-1}. La convergencia es uniforme en $z \leq b$ porque en ese caso, $x^{z-1} \leq x^{b-1}$ para $x > 1$. La integral converge en cero si $z > 0$, uniformemente si $z \geq a$, para cualquier $a > 0$, porque si $z \geq a$ entonces $x^{z-1} \leq x^{a-1}$ si $x < 1$.

Si z es complejo, como $|x^{z-1}| = x^{\Re(z)-1}$, se sigue que la integral converge absolutamente si $\Re(z) > 0$, y uniformemente en $a \leq \Re(z) \leq b$, para cualesquiera $0 < a < b$. En particular, si $\Re(z) > 0$, la integral converge uniformemente en un entorno de z, podemos derivar bajo el signo integral para obtener

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} \log x \, dx.$$

Esto demuestra que $\Gamma(z)$ es analítica si $\Re(z) > 0$.

Integrando por partes tenemos que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad (\Re(z) > 0), \tag{2.15}$$

y, en particular, ya que $\Gamma(1) = 1$, tenemos que $\Gamma(n+1) = n!$.

Si escribimos (2.15) como

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z},$$

podemos usar esta expresión para definir una prolongación analítica de $\Gamma(z)$ al dominio $D_1 = \{\Re(z) > -1\} \setminus \{0\}$, luego a $D_2 = \{\Re(z) > -2\} \setminus \{0, -1\}$, y así sucesivamente a $D_n = \{\Re(z) > -n\} \setminus \{0, -1, \ldots, 1-n\}$. Esto nos permite afirmar que la función $\Gamma(z)$ definida por la ecuación (2.14) tiene una prolongación analítica al dominio $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ y verifica (2.15) para todo z de ese dominio.

Para manejar ciertas propiedades de la función gamma es útil introducir la función beta, definida como

$$B(r, s) = \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1} \, dx \qquad (\Re(r), \Re(s) > 0). \tag{2.16}$$

Como en (2.14), esta integral converge absoluta y uniformemente en un entorno de cualquier punto (r, s) tal que $\Re(r), \Re(s) > 0$ y define una función analítica en cada variable. Haciendo el cambio $y = 1 - x$ en (2.16) tenemos que $B(r, s) = B(s, r)$.

Veamos la relación entre estas funciones.

$$\Gamma(r)\Gamma(s) = \left(\int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} \, dx\right)\left(\int_0^\infty y^{s-1} e^{-y} \, dy\right) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{r-1} y^{s-1} e^{-(x+y)} \, dx \, dy.$$

Si hacemos el cambio de variables

$$\begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u, \quad \begin{cases} u = x + y \\ v = \dfrac{x}{x+y} \end{cases}$$

tenemos que $0 < u < \infty$ y $0 < v < 1$. La integral es entonces

$$\begin{aligned} \Gamma(r)\Gamma(s) &= \int_0^1 \int_0^\infty (uv)^{r-1} \left(u(1-v)\right)^{s-1} e^{-u} u \, du \, dv \\ &= \int_0^\infty u^{r+s-1} e^{-u} \, du \int_0^1 v^{r-1}(1-v)^{s-1} \, dy = \Gamma(r+s)B(r, s). \end{aligned} \tag{2.17}$$

A partir de esta relación, escribiéndola como

$$B(r.s) = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}$$

es posible prolongar analíticamente la función beta a todo $r, s \notin \{0, -1, -2, \ldots\}$, pero no nos hará falta para lo que necesitamos en nuestro caso. Usaremos la función beta en el dominio definido en (2.16).

Si en la definición de la función beta hacemos el cambio

$$x = \frac{u}{u+1}, \quad 1 - x = \frac{1}{u+1}, \quad dx = \frac{du}{(u+1)^2},$$

tenemos entonces que

$$B(r, s) = \int_0^\infty \frac{u^{r-1}}{(u+1)^{r+s}}\, du \qquad (\Re(r), \Re(s) > 0).$$

La ventaja de esta expresión es que podemos calcular esta integral en el caso de ser $r + s = 1$ usando el teorema de los residuos. Para ello, consideremos la integral

$$\oint_C \frac{(-z)^{r-1}}{z+1}\, dz$$

donde usamos la rama principal $(-z)^{r-1} = e^{(r-1)\mathrm{Log}(-z)}$ y el contorno de la figura siguiente.

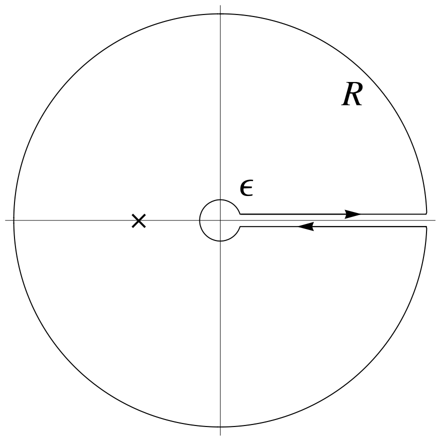

Figura 2.1: Integral de contorno para calcular $B(r, s)$ con $r + s = 1$.

Como $\mathrm{Log}\, z$ tiene el corte de rama en el eje real negativo, $(-z)^{r-1}$ lo tiene en el eje real positivo. En la parte superior del corte, $\mathrm{Arg}(-z) = -\pi$ y $(-z)^{r-1} = e^{-i\pi(r-1)}x^{r-1}$. En la parte inferior es $\mathrm{Arg}(-z) = \pi$ y $(-z)^{r-1} = e^{i\pi(r-1)}x^{r-1}$. cuando $R \to \infty$ y $\varepsilon \to 0$

la contribución a la integral de contorno de los lados correspondientes al corte son, por tanto,

$$\left(e^{-i\pi(r-1)} - e^{i\pi(r-1)}\right)\int_0^\infty \frac{x^{r-1}}{x+1}\,dx = -2i\,\mathrm{sen}\,(\pi(r-1))\,B(r,1-r).$$

La integral en el círculo grande, $|z| = R$ tiende a cero si $R \to \infty$ porque

$$r\left|\frac{z^{r-1}}{z+1}\right| \sim R\frac{R^{\rho-1}}{R} = R^{\rho-1},$$

siendo $\rho = \Re(r) = 1 - \Re(s) < 1$. Análogamente, la integral en el círculo pequeño, $|z| = \varepsilon$ tiende a cero si $\varepsilon \to 0$ porque

$$\varepsilon\left|\frac{z^{r-1}}{z+1}\right| \sim \varepsilon\varepsilon^{\rho-1} = \varepsilon^{\rho}, \qquad \rho > 0.$$

Por tanto,

$$\oint_C \frac{(-z)^{r-1}}{z+1}\,dz = -2i\,\mathrm{sen}\,(\pi(r-1))\,B(r,1-r).$$

Dado que la función $(-z)^{r-1}/(z+1)$ tiene un polo simple en $z = -1$ con residuo $1^{r-1} = 1$, el teorema de los residuos nos da

$$-2i\,\mathrm{sen}\,(\pi(r-1)) = 2\pi i,$$

o bien

$$\frac{\mathrm{sen}\,(\pi(1-r))}{\pi}B(r,1-r) = 1.$$

Usando (2.17), que $\Gamma(1) = 1$ y que $\mathrm{sen}(\pi - x) = \mathrm{sen}\,x$, podemos escribir la relación anterior como

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\mathrm{sen}\,\pi z}. \tag{2.18}$$

Hemos deducido esta expresión, que usaremos en la siguiente sección, suponiendo que $0 < \Re(z) < 1$. Dado que se trata de una igualdad entre funciones analíticas, se sigue que es cierta en sus dominios de definición, es decir en todo número complejo z que no sea entero.

2.2. El círculo en la desigualdad de Hilbert

Cada vez que π aparece en un problema en el que a simple vista no hay círculo resulta un poco extraño. Algunas veces no hay una resolución satisfactoria, pero, en el caso de la desigualdad de Hilbert, una explicación geométrica para la aparición de π fue encontrada en 1993 por Krysztof Oleszkiewicz (véase [12]. Este descubrimiento se sale un poco de nuestro objetivo principal, pero se basa en cálculos que acabamos de completar, y ayuda a entender mejor el problema.

Exponemos a continuación otra demostración de la desigualdad de Hilbert.

Lema 2.3 (Del cuarto de círculo). *Para todo $m \geq 1$, se tiene la acotación:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m+n}\left(\frac{m}{n}\right)^{1/2} < \pi. \tag{2.19}$$

Demostración. Observemos que el triángulo sombreado de la siguiente figura

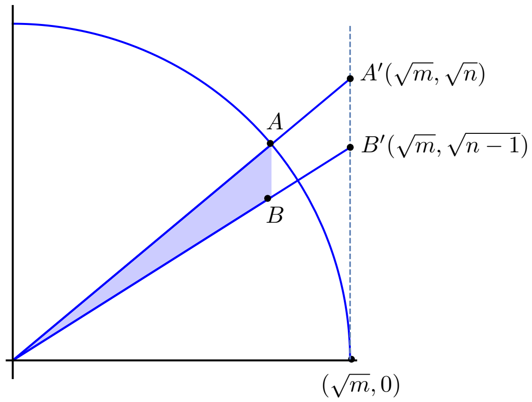

Figura 2.2: Lema del cuarto de círculo.

es semejante al triángulo T determinado por $(0,0)$, $(\sqrt{m}, \sqrt{n-1})$ y $(\sqrt{m}, \sqrt{n})$. El área de T es $\frac{1}{2}\sqrt{m}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$. Así que el área A_n del triángulo sombreado es, teniendo en cuenta que

$$\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|OB|}{|OB'|} = \sqrt{\frac{m}{n+m}},$$

es

$$A_n = \left(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n+m}}\right)^2 \frac{1}{2}\sqrt{m}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right).$$

Como $1/\sqrt{x}$ decrece en $(0,\infty)$,

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \frac{1}{2}\int_{n-1}^{n} \frac{dx}{\sqrt{x}} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

así que

$$A_n > \frac{1}{4} \cdot \frac{m}{m+n} \cdot \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}.$$

Por último, lo que hace más interesante esta cota geométrica es que todos los triángulos sombreados están contenidos en el cuarto de círculo tienen interiores disjuntos por lo que la suma de sus áreas está acotada por $\pi m/4$ que es el área del cuarto de círculo de radio $\sqrt{m}$ que los contiene.

□

Usando este resultado se puede probar la desigualdad de Hilbert, como vemos a continuación. Escribimos

$$\frac{a_m b_n}{m+n} = \frac{\sqrt[4]{m}}{\sqrt[4]{n}\sqrt{m+n}} a_n \cdot \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{m}\sqrt{m+n}} b_n,$$

y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} &\leq \sqrt{\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}(m+n)} a_m^2} \cdot \sqrt{\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}(m+n)} b_n^2} \\
&= \sqrt{\sum_{m,}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}(m+n)} \right) a_m^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}(m+n)} \right) b_n^2} \\
&\leq \pi \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2}.
\end{aligned}$$

He os usado el resultado anterior, y la última desigualdad es estricta salvo que una de las sucesiones (a_m) o (b_n) sea idénticamente nula.

Veamos que π es la mejor constante.

Lema 2.4. *Para cada natural $m > 1$ se tiene que*

$$\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{mn}(m+n)} > \frac{\pi}{2m} - \frac{2}{m\sqrt{m}}.$$

Demostración. Consideremos la figura 2.3 Sea A_n la intersección de la límea CX_{n+1} y la línea R_nB_n para $n = 0, 1, \ldots, m-1$. Sea S' el área del sector X_0CX_m del círculo. Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{\pi m}{8} = S' < \sum_{n=0}^{m-1} S_{\Delta R_n C A_n} &= \frac{\sqrt{m}}{2} + \sum_{n=1}^{m-1} \left(\frac{|CR_n|}{|CX_n|} \right)^2 S_{\Delta X_n C X_{n+1}} \\
&= \frac{\sqrt{m}}{2} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{m\sqrt{m}|X_n X_{n+|}|}{2\left(|CX_0|^2 + |X_0 X_n|^2\right)} \\
&= \frac{\sqrt{m}}{2} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{m\sqrt{m}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}{2(m+n)} \\
&< \frac{\sqrt{m}}{2} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{m\sqrt{m}}{4\sqrt{n}(m+n)}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{nm}(m+n)} > \frac{\pi}{2} - \frac{2}{m\sqrt{m}}.$$

$\square$

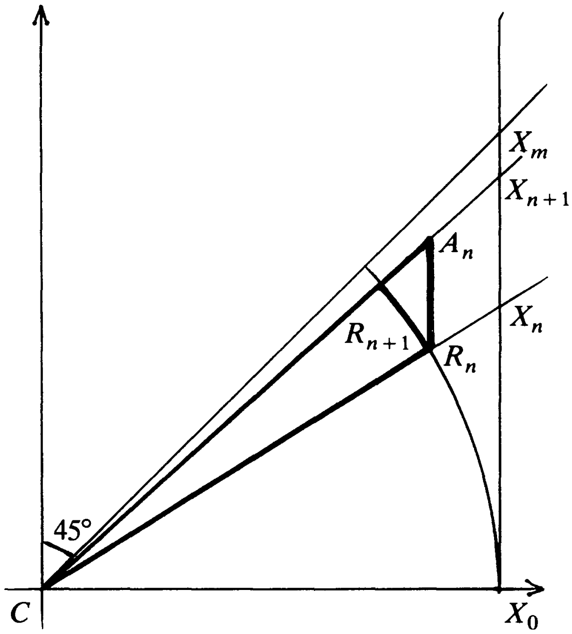

Figura 2.3: Construcción para ver que π es la mejor constante.

Para ver que π es la mejor constante en la desigualdad de Hilbert consideramos las sucesiones ($k \in \mathbb{N}$)

$$\begin{cases} a_\ell = b_\ell = \dfrac{1}{\sqrt{\ell}} & \ell \leq k \\ a_\ell = b_\ell = 0 & \ell > k \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} &\geq \sum_{m=2}^{k} \left(\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{mn}(m+n)} \right) + \sum_{n=2}^{k} \left(\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{mn}(m+n)} \right) + \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{2\ell^2} \\ &\geq 2 \sum_{m=2}^{k} \left(\frac{\pi}{2m} - \frac{2}{m\sqrt{m}} \right) \\ &\geq \pi \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m} - \left(\pi + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\sqrt{m}} \right), \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\frac{\displaystyle\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n}}{\sqrt{\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2} \cdot \sqrt{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n_n^2}} \geq \pi - \frac{\pi + 4 \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\sqrt{m}}}{\displaystyle\sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m}} \to \pi \quad \text{cuando } k \to \infty.$$

Vamos ahora a generalizar el lema 2.3 para mejorar la constante π en la desigualdad.

Lema 2.5. *Para cada $m \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$ se cumple*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{1/p}}{n^{1/p}(m+n)} \leq \frac{\pi}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{p}}.$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{1/p}}{n^{1/p}(m+n)} &\leq \int_p^{\infty} \frac{m^{1/p}}{x^{1/p}(x+m)}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{1/p}(1+t)}\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{t^{1/p}(1+t)}\,dt + \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{1+1/p}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)}\,dt \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{n-1/p}\,dt + \int_1^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{-n-1-1/p}\,dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 t^{n-1/p}\,dt + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_1^{\infty} t^{-n-1-1/p}\,dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\dfrac{1}{p}-n} + p + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\dfrac{1}{p}+n} \\
&= \frac{\pi}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{p}}.
\end{aligned}$$

La última igualdad se deduce al considerar la función

$$\varphi(z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z} - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right).$$

La definimos como cero en los enteros y resulta ser una función entera, acotada y holomorfa, luego por el teorema de Liouville es idénticamente nula. Poniendo $z = 1/p$ se obtiene la igualdad.

□

La siguiente desigualdad también es conocida en la literatura matemática como desigualdad de Hilbert.

Teorema 2.6. *Sean $p, q > 1$ índices conjugados, es decir, $1/p + 1/q = 1$ y sean (a_m) y (b_n) dos sucesiones de números reales no negativos tales que $\sum_{m\geq 1} a_m^p$ y $\sum_{n\geq 1} b_n^q$ son convergentes. Entonces*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \frac{\pi}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{p}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^p\right)^{1/q}.$$

La demostración es esencialmente repetir la que vimos en la página 33 pero usando la desigualdad de Hölder en lugar de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

CAPÍTULO 3

La desigualdad de Hardy

Vamos a ver en este último capítulo demostraciones de las desigualdades discretas y continuas de Hardy siguiendo [13].

3.1. La desigualdad de Hardy y el "flop"

El "flop" es una simple manipulación algebraica que vamos a ilustrar recurriendo a un problema de desafío concreto de interés independiente, que es demostrar una desigualdad de G. H. Hardy, que descubrió mientras buscaba una nueva prueba de la famosa desigualdad de Hilbert. La desigualdad de Hardy ahora se usa ampliamente tanto en matemáticas puras como en matemáticas aplicadas, y muchos lo considerarían igual de importante que la desigualdad de Hilbert.

Sea $f : (0, T) \to \mathbb{R}$ una función integrable que satisface la desigualdad

$$\int_0^T \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(u) du \right)^2 dx \leq 4 \int_0^T f^2(x) dx \tag{3.1}$$

tal que la constante 4 es fuerte, es decir, no puede ser reemplazada por una menor.

Para familiarizarnos con esta desigualdad, hay que tener en cuenta que el promedio integral (o el valor medio) de una función se comporta generalmente tan bien (o al menos no mucho peor) que la propia función. La desigualdad (3.1) nos dice que la integral del valor medio al cuadrado de f no es mayor que cuatro veces la integral de f^2.

Para profundizar el análisis de la cota (3.1), podríamos ver si podemos probar que la constante 4 es la mejor que se puede dar.

La primera idea podría ser poner la desigualdad "bajo estrés" tal y como vimos anteriormente. Consideraremos la función test como la transformación $x \mapsto x^\alpha$. Cuando sustituimos esta función en una desigualdad de la forma

$$\int_0^T \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(u) du \right)^2 dx \leq C \int_0^T f^2(x) dx, \tag{3.2}$$

vemos que eso implica

$$\int_0^T \left(\frac{1}{x} \int_0^x u^\alpha \, du \right)^2 dx \leq C \int_0^T u^{2\alpha} \, du,$$

es decir,

$$\frac{1}{(\alpha+1)^2}\int_0^T x^{2\alpha}\,dx \le C\int_0^T u^{2\alpha}\,du,$$

y en definitiva,

$$\frac{1}{(\alpha+1)^2(2\alpha+1)} \le \frac{C}{(2\alpha+1)} \qquad \text{para todo } \alpha \text{ tal que } 2\alpha+1>0.$$

Ahora, haciendo $\alpha \to -1/2$, vemos que para que la desigualdad (3.2) se mantenga en general se debe tomar $C \ge 4$.

A continuación, intentaremos dar una prueba de la desigualdad (3.1)

Cuando trabajemos con una integral debemos tener en cuenta las formas alternativas que puede adoptar después de un cambio de variables u otra transformación. Queremos vincular la integral de un producto de dos funciones, por lo que acudiremos a la integración por partes, más aún sabiendo que la integral se puede reescribir de la siguiente manera.

$$I=\int_0^T\left(\int_0^x f(u)du\right)^2\frac{1}{x^2}dx=-\int_0^T\left(\int_0^x f(u)du\right)^2\left(\frac{1}{x}\right)'dx$$

A priori no hay manera de saber si una integración por partes nos proporcionará una formulación más adecuada de nuestro problema, pero en principio no perdemos nada intentándolo, asi, que de momento vamos haciendo los cálculos.

$$\begin{cases} u=\left(\displaystyle\int_0^x f(u)\,du\right)^2 & \Rightarrow \quad du=2\left(\displaystyle\int_0^x f(u)\,du\right)f(x)\,dx \\ dv=\dfrac{1}{x^2}\,dx & \Rightarrow \quad v=-\dfrac{1}{x}\,dx, \end{cases}$$

así que la integral se transforma en

$$I=2\int_0^T\left(\int_0^x f(u)du\right)\frac{f(x)}{x}dx-\left(\int_0^x f(u)du\right)^2\frac{1}{x}\bigg|_0^T \tag{3.3}$$

Ahora, simplificando la última expresión, primeramente vemos que podemos asumir que f es de cuadrado integrable, pues si no nuestra desigualdad (3.1) es trivialmente cierta. También observamos que para cualquier función de cuadrado integrable f, aplicando la desigualdad de Schwarz y realizando manipulaciones tenemos que para cualquier $x \ge 0$ se tiene:

$$\left|\int_0^x f(u)du\right| \le x^{1/2}\left(\int_0^x f^2(u)du\right)^{1/2}=o(x^{1/2}), \qquad x\to 0,$$

por tanto, nuestra fórmula de integración por partes (3.3) puede simplificarse a

$$I=2\int_0^T\left(\int_0^x f(u)du\right)\frac{f(x)}{x}\,dx-\frac{1}{T}\left(\int_0^T f(u)du\right)^2.$$

Esta forma de la integral I puede parecer que no es más convincente que la representación anterior, pero nos sugiere algo más. El último término no es positivo, luego podemos desecharlo de la identidad obteniendo

$$\int_0^T \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du\right)^2 dx \leq 2\int_0^T \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du\right) f(x)dx. \tag{3.4}$$

Ahora nos hacemos una pregunta: ¿Es esta nueva desigualdad (3.4) lo suficientemente fuerte para implicar nuestra desigualdad objetivo (3.1)? La respuesta resulta ser rápida e instructiva.

3.1.1. Aplicación del "flop"

Si introducimos funciones φ y ψ de manera que:

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)du, \qquad \psi(x) = f(x), \tag{3.5}$$

entonces la nueva desigualdad (3.4) se puede escribir como:

$$\int_0^T \varphi^2(x)dx \leq C\int_0^T \varphi(x)\psi(x)dx, \tag{3.6}$$

donde $C = 2$. El principal problema de esta desigualdad es que la función φ está elevada a una potencia mayor en el lado izquierdo de la ecuación que en el lado derecho. Esto lejos de ser un detalle menor nos da la posibilidad de una modificación la cual se ha presentado en cientos de investigaciones.

La observación clave es que aplicando la desigualdad de Schwarz al lado derecho de la desigualdad (3.6), obtenemos

$$\int_0^T \varphi^2(x)dx \leq C\left(\int_0^T \varphi^2(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_0^T \psi^2(x)dx\right)^{1/2}, \tag{3.7}$$

luego, si $\varphi(x)$ no es idénticamente nula, podemos dividir ambos lados de esta desigualdad por

$$\left(\int_0^T \varphi^2(x)dx\right)^{1/2} \neq 0.$$

Esta simplificación resulta

$$\left(\int_0^T \varphi^2(x)dx\right)^{1/2} \leq C\left(\int_0^T \psi^2(x)dx\right)^{1/2}, \tag{3.8}$$

y, cuando nosotros ajustamos esta desigualdad y reemplazamos C, φ, y ψ con sus valores definidos (3.5), vemos que la desigualdad "postflop" (3.7) es exactamente la misma que la desigualdad objetivo (3.1), que esperábamos probar.

3.2. La desigualdad discreta de Hardy

Dado un resultado para funciones reales o complejas, siempre surge la pregunta de si existe un análogo para sucesiones, y la respuesta suele ser rutinaria. Sin embargo, hay veces en que se encuentran dificultades inesperadas que conducen a otra visión. Vamos a enfrentarnos a una situación de este tipo al estudiar la desigualdad discreta de Hardy.

Consideremos el siguiente problema.

Problema 3.1. *Probar que dado cualquier conjunto finito $a_1, a_2, \ldots, a_N$ de núneros reales no negativos se cumple que*

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \right)^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{N} a_n^2. \tag{3.9}$$

Seguramente, la forma más natural de enfocar este problema es imitar el método que usamos para el problema anterior. Además, nuestra reciente experiencia también nos puede ayudar en el desarrollo del problema.

En particular, podemos observar que para probar la desigualdad (3.9) por una aplicación del "flop", podríamos buscar una desigualdad digamos "preflop" de la forma

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \right)^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \right) a_n, \tag{3.10}$$

que es completamente análoga a nuestra anterior desigualdad "preflop" (3.4)

La suma por partes es el análogo en este caso a la integración por partes que usamos anteriormente, y, también, es algo menos mecánico. Aquí, por ejemplo, podemos decidir como representar $1/n^2$ como una diferencia; después de todo, podemos escribir

$$\frac{1}{n^2} = s_n - s_{n+1}, \quad \text{siendo} \quad s_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

o, alternativamente, podemos observar en la suma inicial y escribir

$$\frac{1}{n^2} = \tilde{s}_n - \tilde{s}_{n-1}, \quad \text{siendo} \quad \tilde{s}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

La única forma de realizar una buena elección es experimentando primero, luego, por el momento, tomaremos la primera opción.

Ahora, si tomamos T_N que denota la suma del lado izquierdo de la desigualdad objetivo (3.9), entonces se tiene

$$T_N = \sum_{n=1}^{N} (s_n - s_{n+1})(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2,$$

por tanto, distribuyendo las sumas y corriendo los índices, tenemos

$$T_N = \sum_{n=1}^{N} s_n(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 - \sum_{n=2}^{N+1} s_n(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})^2.$$

Cuando volvemos a juntar las sumas, vemos que T_N es igual a

$$s_1 a_1 - s_{N+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 + \sum_{n=2}^{N} s_n\{2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})a_n + a_n^2\}$$

y, como $s_{N+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \geq 0$, finalmente obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\right)^2 \leq 2\sum_{n=1}^{N} \left(s_n(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\right) a_n. \tag{3.11}$$

Esta acotación se puede parecer mucho a la desigualdad “preflop” (3.10), pero hay un pequeño problema: en el lado derecho tenemos s_n donde esperábamos tener $1/n$. Como $s_n = 1/n + O(1/n^2)$, parece que hemos avanzado, pero la desigualdad (3.10) no está en nuestras manos.

Un modo natural de intentar desarrollar el plan y llevarlo a una conclusión lógica es simplemente reemplazar la suma s_n en la desigualdad (3.11) por una cota superior adecuada. El modo más claro de estimar s_n es por comparación integral, aunque realizando sumas telescópicas también llegamos a un resultado equivalente. Observemos que para $n \geq 2$ se tiene:

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k-1} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n-1} \leq \frac{2}{n}, \end{aligned}$$

y, como $s_1 = 1 + s_2 \leq 1 + 1/(2-1) = 2$, se tiene que

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{n}, \qquad n \geq 1. \tag{3.12}$$

Ahora, cuando usamos esta acotación en nuestra desigualdad de suma por partes (3.11), obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\right)^2 \leq 4\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\right) a_n, \tag{3.13}$$

y esto es casi la desigualdad (3.10) que queremos probar. La única diferencia es que la constante 2 en la desigualdad ”preflop” (3.10) la hemos cambiado por 4. Desafortunadamente, esta diferencia es suficiente para alejarnos de nuestro objetivo final. Cuando aplicamos el “flop” a la desigualdad (3.13), no conseguimos la constante que es requerida en nuestro problema; obtenemos un 8 donde necesitamos un 4.

Una vez más, nuestro plan se ha quedado corto, y debemos buscar alguna manera de mejorar nuestro argumento. Ciertamente podemos afinar en nuestra aproximación de s_n, pero, antes de cambiar pequeños detalles, debemos repasar la estructura de nuestro plan. Usamos suma por partes porque esperábamos obtener un resultado satisfactorio del obtenido en integración por partes, pero el componente fundamental de nuestro argumento nos pide probar la desigualdad

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\right)^2 \le 2\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\right)a_n. \tag{3.14}$$

No hay una norma que nos diga que debemos probarlo empezando por el lado izquierdo de la desigualdad y usando suma por partes. Si somos más flexibles, quizás encontremos un nuevo enfoque que nos lleve al objetivo.

Para empezar nuestro nuevo argumento, podemos eliminar parte del desorden tomando

$$A_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

También, si consideramos las diferencias término a término Δ_n entre los sumandos de la desigualdad "preflop" (3.14), entonces tenemos la identidad

$$\Delta_n = A_n^2 - 2A_n a_n.$$

La prueba de la desigualdad "preflop" (3.14) se reduce entonces a demostrar que la suma de los incrementos Δ_n con $1 \le n \le N$ está acotada por cero.

Ahora tenemos un objetivo concreto, pero no mucho más. Podemos recordar que uno de los pocos modos de simplificar sumas es mediante la suma telescópica. Así, aunque no veamos a simple vista las sumas telescópicas, podríamos explorar el álgebra de la diferencias Δ_n y dejar como segunda opción la suma telescópica.

Si intentamos escribir Δ_n como función de A_n y A_{n-1}, entonces tenemos

$$\begin{aligned}\Delta_n &= A_n^2 - 2A_n a_n\\ &= A_n^2 - 2A_n(nA_n - (n-1)A_{n-1})\\ &= (1-2n)A_n^2 + 2(n-1)A_nA_{n-1},\end{aligned}$$

pero, desafortunadamente, aparece el producto A_nA_{n-1} como nuevo problema. Sin embargo, podemos eliminar este producto si recordamos la "humilde cota" del producto por la semisuma de cuadrados, es decir, reemplazamos A_nA_{n-1} por $(A_n^2 + A_{n-1}^2)/2$ y tenemos

$$\begin{aligned}\Delta_n &\le (1-2n)A_n^2 + (n-1)(A_n^2 + A_{n-1}^2)\\ &= (n-1)A_{n-1}^2 - nA_n^2.\end{aligned}$$

Después de algunos fracasos, conseguimos obtener beneficios, y es que la última desigualdad es una suma telescópica. Cuando sumamos en n, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{N}\Delta_n \le \sum_{n=1}^{N}\left((n-1)A_{n-1}^2 - nA_n^2\right) = -NA_N^2,$$

y, al ser el último término negativo la prueba de la desigualdad "preflop" (3.14) está completada. Finalmente, sabemos que el "flop" nos llevara de la desigualdad (3.14) a la desigualdad (3.9) de nuestro problema, por tanto hemos hallado la solución del problema.

El conocimiento de la técnica del "flop" nos da acceso a estrategias para probar desigualdades para integrales y sumas. En nuestro segundo problema, intentamos imitar la estrategia que funcionó para el caso continuo, pero el proceso definitivo llegó cuando nos enfocamos directamente en el "flop" y cuándo trabajamos hacia una prueba directa de la desigualdad 'preflop"

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\right)^2 \leq 2\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\right)a_n.$$

El nuevo enfoque fue afortunado, y encontramos que la desigualdad "preflop" se podía obtener por un argumento de sumas telescópicas usando poco más que la cota $xy \leq (x^2+y^2)/2$.

En los primeros dos ejemplos alcanzamos el "flop" ayudándonos de la desigualdad de Cauchy o de la desigualdad de Schwarz, pero la idea básica es obviamente más general. En el siguiente problema (y en algunos ejemplos) veremos que la desigualdad de Hölder es quizás la manera más natural de usar el "flop".

3.3. La desigualdad de Carleson

En nuestro siguiente problema a simple vista no parece que podamos usar el "flop" pues no vemos un producto de manera inmediata. Sin embargo, pronto descubriremos que el producto (y por tanto el "flop") no está muy lejos de alcanzarse.

Teorema 3.2 (La desigualdad de convexidad de Carleson). *Sea $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ convexa y $\varphi(0) = 0$. Entonces, para todo $-1 < \alpha < \infty$ se cumple*

$$I = \int_0^\infty x^\alpha \exp\left(\frac{-\varphi(x)}{x}\right)dx \leq \mathrm{e}^{\alpha+1}\int_0^\infty x^\alpha \exp(-\varphi'(x))dx. \tag{3.15}$$

La desigualdad (3.15) no es característica de ninguna que hayamos visto antes, por tanto, a priori no tenemos ningún plan de prueba razonable. Sin embargo, la convexidad es una característica útil; en particular, la convexidad nos proporciona una estimación de la diferencia

$$\varphi(y+t)-\varphi(y).$$

Desafortunadamente esta estimación no parece ayudarnos mucho aquí.

El modo en que Carleson trató de resolver el problema fue considerar la diferencia de cambio de escala

$$\varphi(py)-\varphi(y)$$

donde $p > 1$ es un parámetro que optimizaremos después. Esta es una idea inteligente, que debemos añadir a nuestros razonamientos.

Carleson creó su estimación de la integral I realizando primero el cambio de variables $x \mapsto py$ y después usando la convexidad,

$$\varphi(py) \geq \varphi(y) + (p-1)y\varphi'(y), \tag{3.16}$$

que está representada en la siguiente figura.

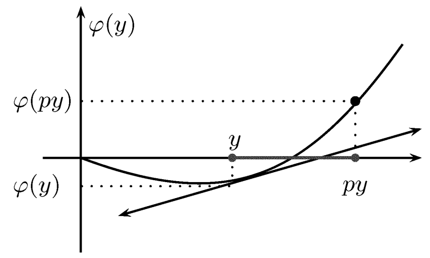

Figura 3.1: $\varphi(py) \geq \varphi(y) + (p-1)y\varphi'(y)$.

La exponencial de esta suma nos da un producto, luego la desigualdad de Hölder y el "flop" están casi listos para actuar.

Todavía, tenemos que tener cuidado para evitar integrales que puedan ser divergentes, por tanto, primero enfocaremos nuestra atención en un intervalo finito $[0, A]$ para tener

$$\begin{aligned} I_A &= \int_0^A x^\alpha \exp\left(\frac{-\varphi(x)}{x}\right) dx \\ &= p^{\alpha+1} \int_0^{A/p} y^\alpha \exp\left(\frac{-\varphi(py)}{py}\right) dy \\ &\leq p^{\alpha+1} \int_0^A y^\alpha \exp\left(\frac{-\varphi(y) - (p-1)y\varphi'(y)}{py}\right) dy, \end{aligned}$$

donde en el segundo paso hemos usado la cota (3.16) y extendido el rango de integración desde $[0, A/p]$ a $[0, A]$. Si introducimos el conjugado $q = p/(p-1)$ y aplicamos la desigualdad de Hölder a la división natural sugerida por $1/p + 1/q = 1$, obtenemos;

$$\begin{aligned} p^{-\alpha-1} I_A &\leq \int_0^A \left(y^{\alpha/p} \exp\left(\frac{-\varphi(y)}{py}\right)\right)\left(y^{\alpha/q} \exp\left(\frac{-(p-1)}{p}\varphi'(y)\right)\right) dy \\ &\leq I_A^{1/p} \left(\int_0^A y^\alpha \exp\left(-\varphi'(y)\right) dy\right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Como $I_A < \infty$, podemos dividir por $I_A^{1/p}$ para completar el "flop". Al tomar la q-ésima potencia de la desigualdad resultante, tenemos

$$I_A = \int_0^A y^\alpha \exp\left(\frac{-\varphi(y)}{y}\right) dy \leq p^{(\alpha+1)p/(p-1)} \int_0^A y^\alpha \exp(-\varphi'(y)) dy,$$

y esto es más de lo que necesitamos.

Para obtener la expresión de la forma (3.15) de la desigualdad de Carleson, primero hacemos $A \to \infty$ y después hacemos $p \to 1$. Recordando que $\log(1+\epsilon) = \epsilon + O(\epsilon^2)$ tenemos que $p^{p/(p-1)} \to e$ cuando $p \to 1$, y el problema está resuelto.

3.3.1. La desigualdad de Carleman de nuevo

Parte del interés de la desigualdad de Carleson radica en que proporciona una generalización de la famosa desigualdad de Carleman, que vimos en el capitulo 1 (véase la página 17), de hecho solamente necesitamos hacer una elección adecuada de la función φ.

Dadas las pistas y tomando un tiempo para experimentarlo, es muy probable dar con el candidato sugerido en la siguiente figura.

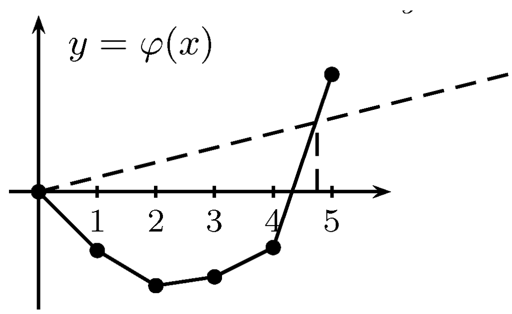

Figura 3.2: Elección de φ para demostrar la desigualdad de Carleman.

Sea (a_n) una sucesión de números reales positivos. Viendo la figura en la que $y = \varphi(x)$ es la curva dada por la interpolación de los puntos $(n, s(n))$, donde

$$s(0) = 0, \quad s(n) = \log\frac{1}{a_1} + \log\frac{1}{a_2} + \cdots + \log\frac{1}{a_n},$$

es decir, $\varphi(n) = s_n$ para cada n y φ es lineal en cada subintervalo $(n-1, n)$, en el intervalo $(n-1, n)$ tenemos que

$$\varphi'(x) = s_n - s_{n-1} = \log\frac{1}{a_n}.$$

Si suponemos que $a_n \geq a_{n+1}$, entonces φ' es creciente y φ convexa. Además, dado que $\varphi(0) = 0$, la pendiente de la cuerda del origen a $(x, \varphi(x))$, que es $\varphi(x)/x$ es monótona creciente. Además, si $n-1 < x < n$, se tiene que

$$\frac{\varphi(x)}{x} \leq \frac{\varphi(n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{1}{a_k}. \tag{3.17}$$

La igualdad en (3.17) para todo n y x implicaría que la sucesión (a_n) es constante, lo cual no puede ser si suponemos que la serie $\sum_n a_n$ es convergente. Así que la desigualdad debe ser estricta para ciertos n y x. Tenemos por tanto que

$$\int_{n-1}^{n} \exp(-\varphi'(x))\,dx = a_n \tag{3.18}$$

y al ser $\varphi(x)/x$ creciente,

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} = \exp\left(-\frac{\varphi(n)}{n}\right) \leq \int_{n-1}^{n} \exp\left(-\frac{\varphi(x)}{x}\right) dx. \tag{3.19}$$

Sumando (3.18) y (3.19) y aplicando la desigualdad de Carleson, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} &\leq \int_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\varphi(x)}{x}\right) dx \\ &\leq \mathrm{e}\int_{0}^{\infty} \exp(-\varphi'(x))\,dx = \mathrm{e}\sum_{n=1}^{\infty} a_n.\end{aligned}$$

Hemos probado pues la desigualdad de Carleman pero con la hipótesis adicional de ser la sucesión (a_n) decreciente. Pero esto no es problema como se deduce del siguiente lema.

Lema 3.3. *Sea (a_n) una sucesión decreciente de números reales positivos y sea (b_n) una reordenación cualquiera de la sucesión (a_n). Entonces, cualquiera que sea $N \in \mathbb{N}$ se cumple que*

$$\sum_{n=1}^{N}(b_1 b_2 \cdots b_n)^{1/n} \leq \sum_{n=1}^{N}(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}.$$

Demostración. Si n es fijo, podemos suponer que $b_1, b_2, \ldots, b_n$ están ordenados en orden decreciente. En ese caso, es claro que se cumple que $b_1 \leq a_1$, $b_2 \leq a_2$, etc. Luego $b_1 b_2 \cdots b_n \leq a_1 a_2 \cdots a_n$ y se concluye que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(b_1 b_2 \cdots b_n)^{1/n} &\leq \sum_{n=1}^{\infty}(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \\ &\leq \mathrm{e}\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \mathrm{e}\sum_{n=1}^{\infty} b_n,\end{aligned}$$

pues al ser $a_n \geq 0$ la serie es incondicionalmente convergente, todas las reordenaciones suman lo mismo.

$\square$

CAPÍTULO 4

Notas biográficas

4.1. Godfrey Harold Hardy

Cuando se olvide a Esquilo, Arquímedes será todavía recordado, porque los lenguajes mueren, pero las ideas matemáticas no. Puede que inmortalidad sea una palabra tonta, pero probablemente un matemático tiene la mejor oportunidad de alcanzar lo que sea que signifique.

Hardy, en A Mathematician's Apology

Hardy nació el 7 de febrero de 1877 en Cranleigh (Surrey, Inglaterra) y murió el 1 de diciembre de 1947 en Cambridge (Inglaterra).

Sus padres eran de ascendencia pobre y no tuvieron educación universitaria.

A la edad de 12 años, en 1889, obtuvo una beca para estudiar en el Colegio de Winchester, que era la mejor para el estudio de las matemáticas hasta ese momento. Hardy reconoció que fue bien educado allí, aunque no participó plenamente en actividades no académicas (él tenía pasión por los juegos de pelota en general y el cricket en particular, pero no fue entrenado en deportes).

Ingresó tras obtener otra beca en 1896 En el Trinity College, donde fue asignado a R. R. Webb, y tras saber que este no estaba interesado en las matemáticas se las arregló para que A. E. Love fuera su tutor, al que le expresó su gratitud en su libro A Mathematician's Apology,

Obtuvo el cuarto puesto de su clase en 1898, resultado que le molestó pues pensaba que debería haber obtenido mejor resultado. En 1901 fue elegido "Fellow"del Trinity College, donde permaneció hasta 1911.

Hasta 1911 escribió muchos trabajos sobre convergencia de series e integrales y temas afines. En 1908 publicó su libro "Un curso de matemáticas puras", que fue una obra que transformó la enseñanza universitaria.

En ese año de 1911 comenzó su colaboración con J. E. Littlewood, que duró 35 años y a principios de 1913 recibió la primera carta de Ramanujan, con el que también tuvo gran colaboración. En 1914, cuando estalló la Primera Guerra Mundial, Ramanujan estaba en Cambridge. Littlewood dejó Cambridge para enrolarse en el ejercito, y aunque Hardy se ofreció como voluntario, fue rechaza do por motivos médicos. Sus opiniones sobre la guerra eran contrapuestas a la mayoría de sus colegas en Cambridge.

En 1919 se fue a Oxford donde fue nombrado profesor. Esa época fue la mejor para su producción conjunta con Littlewood, que continuó en Oxford.

En 1931 regresó a Cambridge, fundamentalmente por dos razones. La primera era que Hardy consideraba que Cambridge era la institución matemática británica más importante. La segunda, que el Trinity College le permitiría mantener la residencia una vez jubilado, lo que para él, soltero, era tranquilizador.

Hardy se interesó por muchos aspectos de las matemáticas, series numéricas, de Fourier, función zeta de Riemann, distribución de los números primos, etc. Sus trabajos con Littlewood son de mucha calidad. No hemos de olvidar tampoco cinco artículos en colaboración con Ramanujan.

Aparte de las matemáticas, el cricket era una pasión en su vida. También jugaba al tenis. Era conocido por sus excentricidades. No soportaba que el fotografiasen, se cree que solo existen cinco instantáneas suyas. Odiaba los espejos, en los hoteles los cubría con toallas.

La Segunda Guerra Mundial también fue dolorosa para Hardy. En 1939 sufrió un ataque al corazón y sus notables poderes mentales comenzaron a abandonarlo y los deportes en los que le había encantado participar hasta ese momento se hicieron imposibles. Estaba lleno de ira porque Europa había entrado nuevamente en la locura de la guerra. Sin embargo, Hardy tenía un regalo más para dejarle al mundo, a saber, una disculpa de los matemáticos que ha inspirado a muchos hacia las matemáticas, su obra *A Mathematician's Apology*, escrita en 1940. En él describe como piensa un matemático y el placer de las matemáticas. cuando acabó la guerra su salud era débil, solo podía moverse en taxis, deseaba volver a ser creativo pero su creatividad había desaparecido y estaba deprimido. A principios del verano de 1947, intentó quitarse la vida tomando una gran dosis de barbitúricos. Sin embargo, sobrevivió.

Recibió muchos premios a lo largo de su vida. Fue presidente de la London Mathematical Society de 1926 a 1928 y de 1939 a 1941.

4.2. David Hilbert

Wir Müssen wissen. Wir werden wissen.
Debemos saber. Sabremos.
Epitafio en su lápida del cementerio de Göttingen

Hilbert nació el 23 de enero de 1862 en Wehlau, cerca de Königsberg, Prusia (hoy Rusia) y murió el 14 de febrero de 1943 en Gotinga, Alemania. Hilbert no fue a la escuela hasta que cumplió los 8 años (debería haber sido a los 6 años), se cree que fue su madre, Maria Therese Erdtmann aficionada a la filosofía, astronomía y a los números primos, la que le enseñó. En su escuela se trabajaba más con las asignaturas de Latín y Griego que con las matemáticas, que se consideraban menos importantes. Hilbert no brilló en esa época. En 1879 fue al Wilhelm Gymnasium donde pasó su último año de escolar. En este centro se ponía más énfasis en las matemáticas y los profesores alentaron su pensamiento de un modo que no había sucedido antes. Recibió las mejores calificaciones en matemáticas y entró en la Universidad de Königsberg en el otoño de 1880. El primer año cursó asignaturas de cálculo integral, teoría de determinantes y curvatura de superficies. Siguiendo la tradición, el segundo semestre lo pasó en Heidelberg donde acudió a las clases de Lazarus Fuchs.

En 1881-82 recibió clases de Weber sobre teoría de funciones y de números. en la primavera de 182 Minkowski volvió a Königsberg tras estudiar en Berlín. Se hicieron grandes amigos, así como de Adolf Hurwitz.

En su primer año de docente Hilbert se dedicó a estudiar el tema de trabajo de sus tesis, los invariantes algebraicos. Ferdinand von Lindemann fue su director de tesis, que leyó el 11 de diciembre de 1884. cuando abandonó la teoría de invariantes se centró en la teoría de números. A principios de 1893 había obtenido demostraciones simples y directas de la trascendencia de e y de π.

Fue profesor en Königsberg de 1886 a 1895 siendo nombrado catedrático en 1893.

En 1892 Schwarz se fue de Göttingen a Berlín para ocupar el puesto de Weierstrass, y Klein quería ofrecer el puesto a Hilbert, pero le fue ofrecido finalmente a Weber. Pero tres años más tarde Weber se fue a Strasbourg y entonces Klein pudo convencer a sus compañeros y consiguió que Hilbert se incorporara a Göttingen donde permaneció ya hasta el final de sus días.

Dada su preeminencia en el mundo matemático, le querían muchas universidades, Berlín le ofreció un puesto en 1902, que rechazó. Consiguió para su amigo Minkowski un sitio en Göttingen.

Sus trabajos en Geometría tuvieron la mayor influencia en ese área tras Euclides. Un estudio sistemático de los axiomas de la geometría euclidiana llevó a Hilbert a proponer 21 de estos axiomas y analizó su importancia. Publicó *Grundlagen der Geometrie* en 1899 poniendo la geometría en un entorno axiomático formal. El libro siguió apareciendo en nuevas ediciones y tuvo una gran influencia en la promoción del enfoque axiomático de las matemáticas, que ha sido una de las principales características del tema a lo largo del siglo XX.

En 1900 se encontraba en el zenit de su carrera profesional y personal, era un matemático consagrado. fue invitado para dar una conferencia plenaria en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en el verano de 1900 en París. El congreso anterior se celebró en Zurich en 1897, y en él, Poincaré dio un discurso sobre la relación entre el Análisis y la Física. Hilbert quería replicar a Poincaré, defendiendo las matemáticas por sí mismas, y aprovechando la cita, discutir sobre el desarrollo de las matemáticas en el nuevo siglo.

Hilbert expuso sus famosos 23 problemas en un discurso lleno de optimismo, afirmando que esos problemas abiertos eran el signo de la vitalidad de las matemáticas, cuatro de ellos permanecen sin resolver aun y otros solo están parcialmente resueltos. Estos problemas contemplaban temas muy diversos, lo que indicaba los conocimientos de Hilbert sobre las matemáticas en aquel momento. Se suele decir que Hilbert y Poincaré son los últimos universalistas en Matemáticas, esto es, que tenían un conocimiento casi total de todo el edificio de las Matemáticas de su época.

Hilbert contribuyó en muchas ramas de las matemáticas, análisis funcional, ecuaciones integrales, física matemática, cálculo de variaciones, etc.

En 1908 tenía 46 años y aunque siempre había gozado de buena salud, ese verano sufrió una crisis de agotamiento nervioso y depresión. Tras unos meses de reposo volvió a sus tareas de investigación y retornó a uno de sus dominios favoritos, la teoría de números. Las contribuciones de Hilbert en este campo fueron calificadas por Hardy como *"uno de los hitos en la teoría moderna de números"*.

Como en sus investigaciones sobre ecuaciones integrales Hilbert encontró muchas aplicaciones a la Física, en 1912 centró su atención en la física matemática. El problema número 6 de su lista planteaba la cuestión de la axiomatización de las teorías físicas. Durante 1915-16 se centró en la teoría de la relatividad.

En la década de los 20 Hilbert tuvo otro cambio de rumbo y se dedicó a los Fundamentos de la Matemática.

Se retiró en 1930 pero solo unos años después, en 1933 la vida en Göttingen cambió por completo cuando los nazis llegaron al poder y despidieron a todos los profesores judíos. Su nombre fue investigado hasta comprobar que estaba libre por completo de sangre judía hasta varias generaciones. En un acto académico le asignaron la silla contigua al ministro de educación nazi, que le preguntó como iba la matemática en Göttingen una vez liberada de sangre judía. Hilbert respondió ¿matemática en Göttingen? no queda nada.

En el otoño de 1933, la mayoría se había ido o había sido despedido. Hilbert, aunque jubilado, todavía había estado dando algunas conferencias. En el semestre de invierno de 1933-34 dio una conferencia a la semana sobre los fundamentos de la geometría. Después de que terminó de dar este curso, nunca más puso un pie en el Instituto.

En 1939 Alemania invadió Polonia y estalló la Segunda Guerra Mundial. De nuevo hubo un éxodo de estudiantes y profesores jóvenes de Göttingen. En 1942, con motivo de sus 80 años, la Academia de Berlín lo otorgó un premio. El día de la votación se cayó y se rompió un brazo. Esto lo hizo totalmente inactivo y parece haber sido un factor importante en su muerte acaecida un año después del accidente. Poco más de una docena de personas acudieron a su funeral. De Munich vino su amigo Arnold Sommerfeld (1868-1951) que pronunció unas palabras sobre el trabajo de Hilbert. Fue enterrado en el mismo cementerio que Klein. En su lápida se grabaron las palabras que había pronunciado en una conferencia en Königsberg.

Bibliografía

[1] Copson, E. T. Note on series of positive terms, *J. London Math. Soc.* **2** (1927) 9-12.

[2] Elliott, E. B. A simple exposition of some recently proved facts as to convergency, *J. London Math. Soc.* **1** (1926) 93-96.

[3] Grandjot, K. On some identities relating toHardy's convergence theorem, *J. London Math. Soc.* **3** (1928)

[4] Hardy, G. H. Notes on some points in the integral calculus, XLI. n the convergence of certain integrals and series. *Messenger of Mth.* **45** (1915) 163-166.

[5] Hardy, G. H. Notes on some points in the integral calculus, LI. On Hilbert's double-series theorem, and some connected theorems concerning the convergence of infinite series and integrals. *Messenger of Mth.* **48** (1919) 107-112.

[6] Hardy, G. H. Notes on a theorem of Hilbert. *Math.Z.* **6** (1920) 314-317.

[7] Hardy, G. H. Notes on some points in the integral calculus, LX. An inequality between integrals, *Messenger of Math* **54** (1925) 150-156.

[8] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G. *Inequalities.* 2nd ed., Cambridge University Prewss, Cambridge, 1967.

[9] Kufner, A., Maligranda, L., Persson, L. E. The prehistory of the Hardy inequality. *Amer. Math. Monthly* **113** (8), (2006), 715-732.

[10] Landau, E. A note on a theorem concerning series of positive terms: Extract from a letter of Prof. E. Landau to Prof. I. Schur, *J. London Math. Soc.* **1** (1926) 38-39.

[11] MacTutor History of Mathematics. `https://www-history.mcs.st-and.ac.uk`

[12] Oleszkiewicz, K. An elementary Proof of Hilbert's Inequality. *Amer. Math. Monthly* **100** (3), (1993), 276-280.

[13] Steele, J. M. *The Cauchy-Schwarz master class. An introduction to the art of mathematical inequalities.* MAA Problem Books Series. Mathematical Association of America, Washington, DC; Cambridge University Press, Cambridge, 2004.