



TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla

Una introducción a las ecuaciones integrales lineales

Autora: [M^a Inmaculada Caballero Carrero](#)

Tutora: [M^a Ángeles Rodríguez Bellido](#)
[Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico](#)

20 de junio de 2019

Resumen

El objetivo de este trabajo es realizar un estudio inicial de las ecuaciones integrales lineales, para ello utilizaremos herramientas del análisis matemático, tanto del análisis funcional, en general, como del de las ecuaciones diferenciales, en particular, vistas durante el grado en Matemáticas y algunas nuevas que introduciremos.

En el primer capítulo haremos una introducción a las ecuaciones integrales. Continuaremos en el segundo capítulo con la definición de una ecuación integral y los diferentes tipos que hay. En el tercer capítulo describiremos los principales métodos de resolución mostrando ejemplos en cada uno de ellos. En el cuarto capítulo nos centraremos fundamentalmente en probar la existencia y la unicidad de una ecuación integral mediante la teoría general de los operadores, para ello utilizaremos herramientas de análisis funcional. En el quinto capítulo, estudiaremos distintos tipos de núcleos, como los núcleos de Volterra o los núcleos simétricos. Además destacaremos la importancia de estos últimos y describiremos un proceso de simetrización para los núcleos no simétricos. En el sexto capítulo, expondremos la principal dificultad que se presenta en las ecuaciones de primera especie y trataremos de estudiarlas. Y por último, en el Capítulo 7, veremos algunas aplicaciones que presentan dichas ecuaciones viendo ejemplos físicos.

Abstract

The objective of this work is to carry out an initial study of the linear integral equations. To this end, we will use tools of mathematical analysis. On the one hand, we will use functional analysis tools in a general way. On the other hand, we will use in particular tools of analysis of differential equations. Some tools have been studied during the degree in Mathematics and others will be introduced.

In the first chapter, we will introduce the integral equations. We will continue in the second chapter with the definition of an integral equation and its different types. In the third chapter, we will describe the main methods for solving these equations, showing examples of each one of them. In the fourth chapter, we will focus fundamentally on proving the existence and uniqueness of an integral equation through the general theory of operators. To do this, we will use functional analysis tools. In the fifth chapter, we will study the different types of kernels, such as the Volterra kernels or the symmetric kernels. In addition, we will emphasize the importance of the latter and describe a symmetrization process for non-symmetric kernels. In the sixth chapter, we will explain the main difficulty presented in the equations of the first kind and we will study them. Finally, in the seventh chapter we will see some applications of these equations with physical examples.

Índice general

Resumen	III
Abstract	IV
Índice de figuras	VII
1. Introducción	1
2. Definición y tipos de ecuaciones integrales	5
3. Métodos de resolución de las ecuaciones integrales	7
3.1. La serie de Neumann	7
3.2. Método de Aproximaciones Sucesivas	8
3.3. Método de resolución en el caso de núcleo degenerado	18
3.4. Extensión a los núcleos generales de L^2	23
4. Propiedades y unicidad de la solución	25
4.1. Teoría espectral de operadores compactos	25
4.1.1. Operadores compactos	25
4.1.2. Teorema de alternativa de Fredholm	31
4.1.3. Espectro de un operador compacto	32
4.1.4. Teorema de Hilbert-Schmidt	32
4.2. Propiedades generales de la ecuación de Fredholm de 2ª especie	36
4.3. Existencia y unicidad de solución de la ecuación de Fredholm	37
4.3.1. Caso particular en el que núcleo es simétrico	40
4.4. El teorema de Hilbert-Schmidt y aplicaciones	43
5. Tipos de núcleos	49
5.1. Núcleos de Volterra	49
5.1.1. Solución de la ecuación de Volterra de segunda especie	50
5.2. Núcleos simétricos	56
5.3. Simetrización de núcleos no simétricos	59
5.4. Algunas generalizaciones	65
6. Algunos comentarios sobre las ecuaciones de primera especie	69

6.1. Dificultad en las ecuaciones de primera especie	69
6.2. Ecuaciones de Volterra de primera especie	71
6.3. Ecuaciones de Fredholm de primera especie con núcleo simétrico	73
7. Aplicaciones	77
7.1. Problemas de contorno que conducen a ecuaciones de Fredholm: el problema de Sturm-Liouville.	77
7.2. Ejemplos físicos conducentes a ecuaciones integrales	85
7.3. Ecuaciones integrales de Volterra y ecuaciones diferenciales lineales	94
A. Resultados utilizados	101
Bibliografía	107

Índice de figuras

7.1. Gráfico de cuerda tensa con carga continua	86
7.2. Núcleo triangular	87

1. Introducción

La teoría de las ecuaciones integrales lineales es un tema de gran relevancia matemática y, a la vez, una herramienta eficiente para obtener la solución de múltiples problemas de la Física Matemática.

La primera aparición de las ecuaciones integrales en la historia de las matemáticas fue en la tesis de **N.H.Abel** (1809-1829) relacionada con el problema de la curva tautócrana, que se publicó en 1823 y 1826. Dicha ecuación venía dada por

$$f(x) = \int_0^x \frac{\phi(t)}{\sqrt{x-t}} dt.$$

J.Liouville (1809-1882) introdujo ecuaciones integrales en el problema de la gravedad de una barra de longitud infinita en 1832 sin saber nunca sobre el trabajo de Abel. Luego en el año 1837, publicó una discusión entre las ecuaciones diferenciales e integrales en la que demostró que la solución particular de una ecuación diferencial determinada viene dada por una ecuación integral.

A pesar de lo anterior, los casos especiales de las ecuaciones integrales comenzaron aparecer en la primera mitad del siglo XIX. Las ecuaciones integrales se convirtieron en objeto de atención especial para los matemáticos después de que la solución al problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in \Omega \\ u = g & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

se hubiera reducido al estudio de una ecuación integral lineal de segunda especie.

La construcción de una teoría general de las ecuaciones integrales lineales se inició a finales del siglo XIX. Se considera que los fundadores de dicha teoría son **V. Volterra** (1896), **E. Fredholm** (1903), **D. Hilbert** (1912) y **E. Schmidt** (1907). Incluso antes de estas investigaciones, se propuso el método de aproximaciones sucesivas para la construcción de una solución de la ecuación integral. Este método se aplicó inicialmente a la soluciones de las ecuaciones no lineales de tipo Volterra en relación con estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias en el trabajo de **J. Liouville** (1838), **L. Fuchs** (1870), **G. Peano** (1888), y otros, así como por **C. Neumann** (1877) en la construcción de una solución de una ecuación integral de segunda especie. La forma general del método de aproximaciones sucesivas se debe a **E. Picard** (1893).

Al estudiar la ecuación de una membrana vibrante, **H. Poincaré** (1896) dió la idea de introducir un parámetro numérico λ en la ecuación

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\phi(s) ds = f(x), \quad a \leq s \leq x \leq b, \quad (1.2)$$

lo que supuso que la solución de (1.2) es una función meromorfa de λ (función holomorfa en un dominio excepto en un conjunto de puntos aislados). Esta conjetura fue aprobada por **Fredholm** (1900-1903).

El trabajo de **Fredholm** fue precedido por las investigaciones de **Volterra** (1886-1897), que estudiaron ecuaciones integrales de las formas

$$\int_0^x K(x, y) \phi(y) dy = f(x) \quad (1.3)$$

$$\phi(x) = \lambda \int_0^x K(x, y) \phi(y) dy + f(x) \quad (1.4)$$

Se demostró que si el núcleo $K(x, y)$ y $f(x)$ son funciones continuas, entonces para cualquier valor finito de λ , (1.4) tiene precisamente una solución continua que puede construirse mediante el método de aproximaciones sucesivas.

La ecuación (1.2) fue estudiada por **Fredholm**, suponiendo que su núcleo $K(x, y)$, $f(x)$ y la solución desconocida $\phi(x)$ son funciones continuas en el cuadrado $[a, b] \times [a, b]$ y el intervalo $[a, b]$ respectivamente. Siguiendo a Volterra, Fredholm reemplazó la integral (1.2) por una suma integral de Riemman y consideró la ecuación integral (1.2) como un

caso límite de un sistema finito de ecuaciones algebraicas lineales (véase Sección 6.1). Fredholm obtuvo una fórmula mediante una transición límite formal y demostró que dicha fórmula es la solución de (1.2) excepto para un conjunto finito o numerable del parámetro λ . Además, probó teoremas sobre la resolución de (1.2).

La teoría de Fredholm sobre la ecuación (1.2) se extendió al caso de un sistema de ecuaciones integrales y también al caso de un núcleo tomado como un operador integral. La solución de un sistema se reduce a la de una sola ecuación, cuyo núcleo posee discontinuidad (véase Sección 5.4)

Hilbert (1904) demostró que los teoremas de Fredholm pueden probarse mediante una aplicación rigurosa del proceso de transición límite y construyó una teoría general de ecuaciones lineales sobre la base de la teoría de las formas lineales y bilineales en un número infinito de variables. Además, demostró que toda función de la forma

$$g(x) = \int_a^b K(x, y)f(y) dy \quad (\text{f continua}) \quad (1.5)$$

tiene un desarrollo en serie de autofunciones $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (h, \psi_n)\psi_n(x)$ absoluta y uniformemente convergente, lo que permitió abordar la resolución de la ecuación integral de parámetro λ .

Schmidt dió una versión más simple y algo más general de las investigaciones de Hilbert. Construyó una teoría de ecuaciones integrales lineales con núcleo simétrico real independiente de la teoría de Fredholm al representar el núcleo como la suma de un núcleo degenerado.

T.Carleman logró debilitar las restricciones impuestas sobre los datos y la función incógnita en la teoría de ecuaciones integrales del segundo tipo para el caso de núcleos simétricos reales y extendió el método de Fredholm al caso cuando el núcleo de (1.2) satisface la condición

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dx ds < \infty,$$

es decir, $K(x, y) \in L^2([a, b] \times [a, b])$.

En los artículos de **F.Riesz** (1918) y **J.Shauder** (1930), los teoremas de Fredholm se generalizaron a una cierta clase de ecuaciones de operadores lineales en los espacios de Banach.

El método clásico para estudiar ecuaciones integrales del primer tipo es el denominado método de regularización. Dicho método consiste en contruir soluciones aproximadas de problemas "mal planteados" tomando los valores de un operador de regularización con respecto a la naturaleza aproximada de los datos iniciales.

Las ecuaciones integrales son importantes en muchas aplicaciones. Aparecen en los problemas de transferencia de energía por radiación, el problema de vibraciones de una cuerda o una membrana, los problemas de viscoelasticidad y algunos problemas de campos electromagnéticos. Algunos de estos otros problemas también pueden plantearse en términos de ecuaciones diferenciales.

En algunos casos podríamos preguntarnos por qué se estudian dichas ecuaciones si derivando, bajo la hipótesis necesarias, podemos obtener la ecuación diferencial correspondiente. La respuesta viene de que las ecuaciones diferenciales necesitan de unas hipótesis de regularidad mucho más fuertes que las ecuaciones integrales, luego puede darse el caso que no podamos resolverla mediante la ecuación diferencial pero sí mediante la ecuación integral.

Por último, cabe destacar que al haber una estrecha relación entre las ecuaciones integrales y las ecuaciones diferenciales, usaremos resultados vistos en la asignatura de EDO y AED. Además usaremos, principalmente en el Capítulo 4, resultados de Análisis Funcional.

2. Definición y tipos de ecuaciones integrales

Definición 2.1. Una *ecuación integral* es aquella que relaciona la función incógnita $\phi(x)$ con una integral de manera que en el integrando aparece dicha función.

Nos vamos a centrar en las ecuaciones integrales **lineales**, es decir, aquellas en la que la función incógnita aparece linealmente bajo el signo de integración. Podemos encontrar dos tipos fundamentales:

1. **Ecuaciones de tipo Fredholm:** Son aquellas ecuaciones integrales en las que los límites de la integral son fijos. Estas ecuaciones se pueden clasificar en los dos siguientes grupos:

a) **Primera especie:** La función incógnita aparece solamente en el integrando.

$$\int_0^1 K(x, y) \phi(y) dy = f(x) \quad (2.1)$$

b) **Segunda especie:** La función incógnita aparece tanto en el integrando como fuera.

$$\phi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi(y) dy + f(x) \quad (2.2)$$

Si $f(x) = 0$ se conoce como *ecuación homogénea*, mientras que si $f(x) \neq 0$ se conoce como *ecuación completa o ecuación no homogénea*.

2. **Ecuaciones de tipo Volterra:** Son un caso particular de las ecuaciones de tipo Fredholm en el que se satisface que $K(x, y) = 0$ si $y > x$. Por ello, de la misma forma que las ecuaciones de tipo Fredholm, se pueden clasificar en dos grupos:

a) **Primera especie:**

$$\int_0^x K(x, y) \phi(y) dy = f(x) \quad (2.3)$$

b) **Segunda especie:**

$$\phi(x) = \lambda \int_0^x K(x, y) \phi(y) dy + f(x) \quad (2.4)$$

En estas ecuaciones $\phi(x)$ es la función incógnita, en cambio $K(x, y)$ y $f(x)$ son funciones conocidas y λ es un número complejo. A la función $K(x, y)$ la conoceremos como *núcleo* de la ecuación.

Existen también ecuaciones **no lineales**, por ejemplo de la forma

$$\phi(x) = \lambda \int_0^1 F[x, y, \phi(y)] dy + f(x)$$

pero no serán el objetivo de nuestro estudios.

Por simplicidad, suponemos que el dominio básico de nuestras ecuaciones es $0 \leq x \leq 1$. Mediante algunos cambios, si es necesario, se puede extender a los intervalos $a \leq x \leq b$, o incluso cualquier conjunto acotado (medible).

Para el estudio de las ecuaciones integrales lineales nos basaremos principalmente en los libros [12] y [10].

3. Métodos de resolución de las ecuaciones integrales

En este capítulo, nos dedicamos a la exposición de diferentes métodos de resolución de una ecuación integral: el *método de aproximaciones sucesivas* basado fundamentalmente en la convergencia de una serie infinita y el *método de los núcleos degenerados*, mostrando distintos ejemplos en cada uno de ellos. Para ello tomaremos como referencia los libros [12] y [10] fundamentalmente.

Vamos a suponer durante todo el capítulo que el núcleo de la ecuación integral $K(x, y) \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$.

3.1. La serie de Neumann

Sea

$$\phi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi(y) dy + f(x) \tag{3.1}$$

la *ecuación de Fredholm de 2ª especie*. La idea del método consiste en expresar la solución de dicha ecuación mediante una serie de la forma

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \psi_n(x). \tag{3.2}$$

Supongamos que la serie existe y es uniformemente convergente, entonces, si sustituimos (3.2) en la ecuación (3.1) e integramos término a término, obtenemos

$$\begin{aligned} & \psi_0(x) + \lambda\psi_1(x) + \lambda^2\psi_2(x) + \cdots + \lambda^n\psi_n(x) + \cdots \\ &= f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y)\psi_0(y) dy \\ &+ \lambda^2 \int_0^1 K(x, y)\psi_1(y) dy \\ &+ \cdots + \lambda^n \int_0^1 K(x, y)\psi_{n-1}(y) dy + \cdots \end{aligned}$$

Por tanto, identificando los términos de las sucesivas potencias de λ obtenemos el cálculo de las funciones ψ_i por recurrencia:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0(x) = f(x) \\ \psi_1(x) = \int_0^1 K(x, y)\psi_0(y) dy \\ \psi_2(x) = \int_0^1 K(x, y)\psi_1(y) dy \\ \dots\dots\dots \\ \psi_n(x) = \int_0^1 K(x, y)\psi_{n-1}(y) dy \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Queda así determinada la serie, la cual se denomina *serie de Neumann*.

Más adelante, veremos la convergencia uniforme de esta serie, que determinará una solución de la ecuación (3.1).

3.2. Método de Aproximaciones Sucesivas

Vamos a resolver la *ecuación integral de Fredholm de segunda especie* (3.1) mediante el **método de aproximaciones sucesivas de Picard**. Dicho método se aplica como sigue:

Comenzamos fijando $\phi_0(x) = f(x)$, entonces definimos

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) f(y) dy \\ \phi_2(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi_1(y) dy \\ \dots\dots\dots \\ \phi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi_{n-1}(y) dy \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Para la justificación de dicho método será muy importante el siguiente resultado:

Lema 3.1. *Se tiene que*

$$\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x) = \lambda^n \psi_n(x) \quad (3.5)$$

para $\psi_n(x)$ definida en (3.3)

Demostración:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi_0(y) dy = \phi_0(x) + \lambda \psi_1(x) \\ \phi_2(x) &= f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi_1(y) dy \\ &= f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) \left[f(y) + \lambda \int_0^1 K(y, s) \phi_0(s) ds \right] dy \\ &= f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) f(y) dy + \lambda^2 \int_0^1 K(x, y) \left(\int_0^1 K(y, s) \phi_0(s) ds \right) dy \\ &= f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) f(y) dy + \lambda^2 \int_0^1 K(x, y) \psi_1(y) dy \\ &= \phi_1(x) + \lambda^2 \psi_2(x) \\ \phi_3(x) &= f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi_2(y) dy \\ &= f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) [\phi_1(y) + \lambda^2 \psi_2(y)] dy \\ &= f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi_1(y) dy + \lambda^3 \int_0^1 K(x, y) \psi_2(y) dy \\ &= \phi_2(x) + \lambda^3 \psi_3(x) \end{aligned}$$

Llegamos entonces a que

$$\phi_2(x) - \phi_1(x) = \lambda^2 \psi_2(x)$$

$$\phi_3(x) - \phi_2(x) = \lambda^3 \psi_3(x)$$

Vamos a probarlo en general, es decir, $\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x) = \lambda^n \psi_n(x)$. Para ello lo hacemos por inducción, suponemos cierto para ϕ_n , lo probamos para ϕ_{n+1}

$$\begin{aligned} \phi_{n+1}(x) - \phi_n(x) &\stackrel{def}{=} f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi_n(y) dy - f(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi_{n-1}(y) dy \\ &= \lambda \int_0^1 K(x, y) [\phi_n(y) - \phi_{n-1}(y)] dy \stackrel{hip.ind}{=} \lambda \int_0^1 K(x, y) \lambda^n \psi_n(y) dy \\ &\stackrel{def}{=} \lambda^{n+1} \psi_{n+1}(x) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Si sumamos los términos a ambos lados en la ecuación (3.5) de $k = 1, \dots, n$, nos queda

$$\sum_{k=1}^n (\phi_k(x) - \phi_{k-1}(x)) = \sum_{k=1}^n \lambda^k \psi_k(x) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Serie telescópica}} \quad \phi_n(x) - \phi_0(x) = \sum_{k=1}^n \lambda^k \psi_k(x)$$

Al ser $\phi_0(x) = \psi_0(x) = f(x)$, nos queda

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda^k \psi_k(x) \quad (3.6)$$

Vamos aplicar ahora el proceso de iteración sobre el *núcleo* de la ecuación:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \int_0^1 K(x, y) f(y) dy. \\ \psi_2(x) &= \int_0^1 K(x, y) \psi_1(y) dy \\ &= \int_0^1 K(x, y) \left[\int_0^1 K(y, s) f(s) ds \right] dy \\ &= \int_0^1 f(s) \left[\int_0^1 K(x, y) K(y, s) dy \right] ds \\ &= \int_0^1 K_2(x, s) f(s) ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_3(x) &= \int_0^1 K(x, y)\psi_2(y) dy \\
&= \int_0^1 K(x, y) \left[\int_0^1 K_2(y, s)f(s) ds \right] dy \\
&= \int_0^1 f(s) \left[\int_0^1 K(x, y)K_2(y, s) dy \right] ds \\
&= \int_0^1 K_3(x, s)f(s) ds.
\end{aligned}$$

En general,

$$\psi_n(x) = \int_0^1 K_n(x, y)f(y) dy \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.7)$$

donde los llamados *núcleos iterados*

$$K_1(x, y) \equiv K(x, y), K_2(x, y), K_3(x, y), \dots$$

están definidos por la fórmula recurrente

$$K_n(x, y) = \int_0^1 K(x, s)K_{n-1}(s, y) ds \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.8)$$

Proposición 3.2. *Más aún se tiene la siguiente propiedad*

$$\boxed{K_{n+1}(x, y) = \int_0^1 K_r(x, z)K_s(z, y) dz} \text{ para } r = 1, \dots, n; s = n - r + 1; \quad (3.9)$$

Demostración:

Vamos a probarlo por inducción en n

- Caso base: $n = 2$ ($n = 1, K_1(x, y) = K(x, y)$)

$$(r, s = 1) \quad K_2(x, y) = \int_0^1 K(x, z)K(z, y) dz \text{ es cierto por definición (3.8)}$$

- Supongamos que la fórmula es cierta para $r + s \leq n$, vamos a probarla para $n + 1$,

$$K_{n+1}(x, y) \stackrel{\text{Def}}{=} \int_0^1 K(x, s)K_n(s, y) ds \stackrel{\text{Hip}}{=} \int_0^1 K(x, s) \left(\int_0^1 K_{r_1}(s, z)K_{s_1}(z, y) dz \right) ds$$

con $r_1 + s_1 = n$, por lo que $1 \leq s_1, r_1 \leq n - 1$, por tanto supongamos que $K(x, y) \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$ y podemos usar el teorema de Fubini (ver Teorema A.10)

$$K_{n+1}(x, y) = \int_0^1 K_{s_1}(z, y) \left(\int_0^1 K(x, s) K_{r_1}(s, z) ds \right) dz \stackrel{\text{Def}}{=} \int_0^1 K_{s_1}(z, y) K_{r_1+1}(x, z) dz$$

Sea $r = r_1 + 1$, entonces

$$K_{n+1}(x, y) = \int_0^1 K_r(x, s) K_{s_1}(s, y) ds \text{ donde } 2 \leq r \leq n, s_1 = n - (r - 1) = n - r + 1$$

El caso $r = 1, s = s_1 = n$ también se tiene pues es la definición (3.8).

Por tanto, se ha demostrado para $r = (r_1 + 1) = 1, \dots, n$ y $s = s_1 = (n - 1) - r_1 + 1 = n - (r_1 + 1) + 1 = n - r + 1$. ■

Utilizando (3.7), expresamos (3.6) de la forma

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda^i \psi_i(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda^i \int_0^1 K_i(x, y) f(y) dy = \\ &= f(x) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n \lambda^i K_i(x, y) f(y) dy \end{aligned}$$

luego tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ la solución de $\phi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi(y) dy + f(x)$ vendría dada por

$$\phi(x) = f(x) - \lambda \int_0^1 H(x, y; \lambda) f(y) dy \text{ con } H(x, y; \lambda) \text{ definida en (3.11)} \quad (3.10)$$

Definición 3.3. A la función

$$H(x, y; \lambda) = - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, y) \quad (3.11)$$

se denomina **núcleo resolvente**.

Teorema 3.4 (Teorema de Fredholm). *A cada núcleo $K(x, y)$ que pertenece a $L^2 = L^2([0, 1] \times [0, 1])$ le corresponde un núcleo resolvente $H(x, y; \lambda)$ el cual es una función analítica de λ , regular al menos en el círculo $|\lambda| < \|K\|^{-1}$ * y viene representado por la serie de potencias $H(x, y; \lambda) = - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, y)$. Si el dominio de existencia del núcleo resolvente en el plano complejo es \mathcal{H} , entonces, si $f(x)$ pertenece a la clase $L^2(0, 1)$, la única solución en $L^2(0, 1)$ de la ecuación de Fredholm (2.2) válida en \mathcal{H} viene dada por*

$$\phi(x) = f(x) - \lambda \int_0^1 H(x, y; \lambda) f(y) dy$$

Demostración: Veamos en primer lugar que $H(x, y; \lambda)$ sólo converge para un $|\lambda|$ suficientemente pequeño. Es decir, aunque $H(x, y; \lambda)$ es una **función analítica** de λ (véase Definición A.2), pues es representable mediante serie de potencias (ver Definición A.4 y Teorema A.5), no es una **función entera** de λ (véase Definición A.3), pues no es holomorfa en todo el plano, en el sentido de que la serie de potencias sólo está definida en ese dominio.

Si suponemos que el núcleo $K(x, y)$ esta en L^2 , es decir,

$$\|K\|^2 = \iint_{[0,1] \times [0,1]} K^2(x, y) dx dy = \int_0^1 A^2(x) dx = \int_0^1 B^2(y) dy \leq N^2 \quad (3.12)$$

donde

$$A(x) = \left[\int_0^1 K^2(x, y) dy \right]^{\frac{1}{2}}, B(y) = \left[\int_0^1 K^2(x, y) dx \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.13)$$

Entonces, usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz (véase Teorema A.6) y (3.8) tenemos que

$$\begin{aligned} K_2^2(x, y) &\stackrel{\text{Def}}{=} \left[\int_0^1 K(x, z) K(x, y) dz \right]^2 \stackrel{\text{C-S}}{\leq} \left[\int_0^1 K^2(x, z) dz \right] \left[\int_0^1 K^2(z, y) dz \right] \\ &= A^2(x) B^2(y), \end{aligned}$$

* Por $\|\cdot\|$ denotamos la norma en $L^2([0, 1] \times [0, 1])$

$$\begin{aligned}
K_3^2(x, y) &\stackrel{\text{Def}}{=} \left[\int_0^1 K(x, z)K_2(x, y) dz \right]^2 \stackrel{\text{C-S}}{\leq} \int_0^1 K^2(x, z) dz \int_0^1 K_2^2(z, y) dz \\
&\leq A^2(x) \int_0^1 A^2(z)B^2(y) dz \leq A^2(x)B^2(y) \int_0^1 A^2(z) dz \\
&\leq A^2(x)B^2(y)N^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_4^2(x, y) &\stackrel{\text{Def}}{=} \left[\int_0^1 K(x, z)K_3(x, y) dz \right]^2 \stackrel{\text{C-S}}{\leq} \int_0^1 K^2(x, z) dz \int_0^1 K_3^2(z, y) dz \\
&\leq A^2(x) \int_0^1 A^2(z)B^2(y)N^2 dz \leq A^2(x)B^2(y)N^2 \int_0^1 A^2(z) dz \\
&\leq A^2(x)B^2(y)N^4
\end{aligned}$$

y por tanto, en general

$$|K_{n+2}(x, y)| \leq A(x)B(y)N^n \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

Despreciando el primer término, esto prueba que la serie (3.11) tiene una mayorante

$$A(x)B(y) \sum_{n=0}^{\infty} (|\lambda|N)^n$$

que es una *serie geométrica*, que converge si y sólo si $|\lambda|N < 1$, pues si aplicamos el **criterio del cociente** (véase Teorema A.13)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|\lambda|^{n+1}N^{n+1}}{|\lambda|^nN^n} = |\lambda|N$$

Luego la serie converge si y sólo si $|\lambda|N < 1 \Leftrightarrow$

$$|\lambda| < \|K\|^{-1} \quad (3.15)$$

Por tanto, bajo esta condición, las sumas parciales de (3.11) tienen una mayorante del tipo

$$CA(x)B(y)$$

donde C es una constante, es decir, una mayorante que es una función de $L^2([0, 1] \times [0, 1])$. En otras palabras, (3.11) es una serie uniformemente convergente en casi todo, por lo que, por el **Teorema de Beppo-Levi** (véase Teorema A.15), podemos integrar término a término en x o y .

Por el **Teorema de Egoroff-Severini** (ver Teorema A.7), esta serie es convergente uniformemente si los puntos donde $A(x) = \infty$ o $B(y) = \infty$ son eliminados de los intervalos $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ mediante un recubrimiento adecuado de medida menor que ε , para $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Al estar permitida la integración término a término, veamos que, bajo la condición (3.15) y usando (3.8), se tiene

$$\begin{aligned} - \int_0^1 K(x, z)H(z, y; \lambda) dz &= \int_0^1 K(x, z) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(z, y) dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int_0^1 K(x, z)K_{n+1}(z, y) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+2}(x, y). \end{aligned}$$

Por otro lado, usando (3.9)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int_0^1 K(x, z)K_{n+1}(z, y) dz &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int_0^1 K_{n+1}(x, z)K(z, y) dz \\ &= - \int_0^1 H(x, z; \lambda)K(z, y) dz \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}[H(x, y; \lambda) + K(x, y)] &= \frac{1}{\lambda} \left[- \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, y) + K(x, y) \right] = \\ &= - \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, y) = - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_{n+1}(x, y) = - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+2}(x, y) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$H(x, y; \lambda) + K(x, y) = \lambda \int_0^1 K(x, z)H(z, y; \lambda) dz = \lambda \int_0^1 H(x, z; \lambda)K(z, y) dz. \quad (3.16)$$

Aún mejor, si consideramos que todos los términos de esta doble igualdad son funciones analíticas de λ , podemos afirmar que las ecuaciones (3.16) para el núcleo resolvente son válidas no sólo en el círculo (3.15), sino en todo el dominio de existencia del núcleo resolvente H en el plano complejo. Esto es gracias al **Principio de prolongación analítica** (ver Teorema A.8). Por tanto si $f(x)$ pertenece a la clase L^2 , la solución de (3.1) dada por

$$\phi(x) = f(x) - \lambda \int_0^1 H(x, y; \lambda) f(y) dy \quad (3.17)$$

está en la misma clase L^2 . En consecuencia, la solución está definida en el dominio de existencia, \mathcal{H} , de $H(x, y; \lambda)$.

Faltaría ver que es la **única** solución en L^2 de nuestra ecuación, no sólo en el círculo (3.15) sino que también en todo dominio de existencia \mathcal{H} .

Para demostrarlo, supongamos que existen dos soluciones $\phi_1(x)$, $\phi_0(x)$ de (3.1). Entonces,

$$\begin{cases} \phi_1(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi_1(x) dy = f(x) \\ \phi_0(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi_0(x) dy = f(x) \end{cases}$$

Restando,

$$\phi_1(x) - \phi_0(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) [\phi_1(y) - \phi_0(y)] dy = 0$$

Por tanto, tomando $\phi(x) = \phi_1(x) - \phi_0(x)$, $\phi(x)$ es solución de

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi(y) dy = 0.$$

Por lo que, usando (3.16) y el teorema de Fubini (véase Teorema A.10)

$$\begin{aligned} \phi(x) &\stackrel{sol.ec}{=} \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi(y) dy \\ &= -\lambda \int_0^1 H(x, y; \lambda) \phi(y) dy + \lambda^2 \int_0^1 \phi(y) \left(\int_0^1 H(x, z; \lambda) K(z, y) dz \right) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\lambda \int_0^1 H(x, y; \lambda) \phi(y) dy + \lambda^2 \int_0^1 H(x, z; \lambda) \left(\int_0^1 K(z, y) \phi(y) dy \right) dz \\
&\stackrel{\text{sol.ec}}{=} -\lambda \int_0^1 H(x, y; \lambda) \phi(y) dy + \lambda \int_0^1 H(x, z; \lambda) \phi(z) dz = 0
\end{aligned}$$

En conclusión, $\phi_1(x) - \phi_0(x) = 0 \Leftrightarrow \phi_1(x) = \phi_0(x)$. ■

Ejemplo 3.1. Vamos a resolver la ecuación integral de Fredholm de segunda especie

$$\phi(x) = \lambda \int_0^1 e^{x-y} \phi(y) dy + f(x) \quad (3.18)$$

mediante el método de aproximaciones sucesivas.

Vemos que en este caso el núcleo de la ecuación es $K(x, y) = e^{x-y}$. Luego en primer lugar vamos a calcular el **núcleo resolvente** (3.11). Usando la fórmula (3.8):

$$K_2(x, y) = \int_0^1 e^{x-z} e^{z-y} dz = e^{x-y} \int_0^1 dz = K(x, y)$$

En consecuencia, todos los núcleos iterados K_n coinciden con el núcleo K , por lo que la serie (3.11) quedaría

$$-H(x, y; \lambda) = K(x, y) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$$

Por tanto, si $|\lambda| < 1$, $H(x, y; \lambda) = \frac{e^{x-y}}{\lambda - 1}$ y vemos además que H es una función analítica de λ , regular en el λ plano excepto en el punto $\lambda = 1$ el cual es un polo del núcleo.

Aplicando el Teorema 3.4, la ecuación (3.18) tiene una única solución para todo $\lambda \neq 1$ y viene dada por (usando (3.10))

$$\phi(x) = f(x) - \frac{\lambda}{\lambda - 1} e^x \int_0^1 e^{-y} f(y) dy \quad (3.19)$$

Otra forma de deducir este resultado es, si fijamos

$$\int_0^1 e^{-y} \phi(y) dy = \xi.$$

la ecuación (3.18) la podemos escribir como

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \xi e^x \quad (3.20)$$

y por tanto, ξ debe verificar que

$$\xi = \int_0^1 e^{-x}[f(x) + \lambda \xi e^x] dx = \int_0^1 e^{-x} f(x) dx + \lambda \xi \Leftrightarrow (1 - \lambda)\xi = \int_0^1 e^{-x} f(x) dx \quad (3.21)$$

En consecuencia, siempre que $\lambda \neq 1$,

$$\xi = \frac{1}{1 - \lambda} \int_0^1 e^{-x} f(x) dx$$

y sustituyendo en (3.20), llegamos a (3.19). Por otro lado, si $\lambda = 1$, la ecuación (3.21) nos muestra que la solución, en general, no es posible, pues la función $f(x)$ normalmente no verifica la condición

$$\int_0^1 e^{-x} f(x) dx = 0$$

Pero si la satisface, por ejemplo $f(x) = 0$, entonces (3.18) tiene infinitas soluciones y vienen dadas por la fórmula

$$\phi(x) = f(x) + Ce^x \quad (3.22)$$

donde C es una constante arbitraria.

3.3. Método de resolución en el caso de núcleo degenerado

Definición 3.5. El núcleo de una ecuación integral se conoce como **núcleo degenerado** si se puede descomponer en suma de productos de funciones con las variables separadas. Tales núcleos, se les denominan **núcleo Pincherle-Goursat**, o abreviadamente, núcleo **PG**.

Suponemos que $K(x, y) = \sum_{i=1}^n u_i(x)v_i(y)$ con $u_i(x)$ y $v_i(x)$ $i = 1, \dots, n$ linealmente independientes (tiene sentido imponer esto pues de lo contrario podría expresarse una de las u_i como combinación lineal de las restantes y disminuimos el número de los sumandos)

Por tanto, la ecuación de Fredholm de 2º especie (3.1) quedará

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n u_i(x) \int_0^1 \phi(y)v_i(y) dy.$$

observamos que es un sistema lineal de tantas ecuaciones como incógnitas α_i .

El determinante de los coeficientes del sistema sería:

$$\mathcal{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda(u_1, v_1) & -\lambda(u_2, v_1) & -\lambda(u_3, v_1) & \cdots & -\lambda(u_n, v_1) \\ -\lambda(u_1, v_2) & 1 - \lambda(u_2, v_2) & -\lambda(u_3, v_2) & \cdots & -\lambda(u_n, v_2) \\ -\lambda(u_1, v_3) & -\lambda(u_2, v_3) & 1 - \lambda(u_3, v_3) & \cdots & -\lambda(u_n, v_3) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda(u_1, v_n) & -\lambda(u_2, v_n) & -\lambda(u_3, v_n) & \cdots & 1 - \lambda(u_n, v_n) \end{vmatrix} \quad (3.27)$$

Dicho determinante deberá ser distinto de cero para que el sistema sea compatible determinado.

Si $\mathcal{D}(\lambda) \neq 0$, la única solución de la ecuación de Fredholm homogénea de 2ª especie es la solución trivial $\phi(x) = 0$ (todos los α_i son nulos) y entonces podemos hallar una solución y sólo una del sistema (3.26) y, por tanto de la ecuación integral completa (3.1).

Sin embargo, si $\mathcal{D}(\lambda) = 0$, la ecuación homogénea posee infinitas soluciones que difieren en un factor constante y por tanto no podemos construir una solución de la forma (3.23) a menos que f sea ortogonal a todos las v_i , es decir, todos los productos internos se anulen:

$$\int_0^1 f(y)v_i(y) dy = (f, v_i) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (3.28)$$

Esta es la condición del rango para que el sistema sea compatible indeterminado.

Los valores de λ que anulan a $\mathcal{D}(\lambda)$ son los **autovalores** de la ecuación homogénea

$$\phi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y)\phi(y) dy$$

y los valores de $\phi(x)$, soluciones de la homogénea correspondientes a estos valores de λ , son las llamadas **autofunciones**.

La existencia de dichas autofunciones será fundamental en el estudio posterior en las Secciones 4.2, 4.3, 4.4, 5.2 y 6.3 de este trabajo.

Ejemplo 3.2 (Cálculo de autofunciones). *Consideremos la ecuación homogénea*

$$\phi(x) = \lambda \int_0^1 (x + y)\phi(y) dy$$

En este caso, el núcleo de la ecuación sería $K(x, y) = x + y$. Queremos expresar $K(x, y)$ como $u_1(x)v_1(y) + u_2(x)v_2(y)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}u_1(x) &= x & u_2(x) &= 1 \\v_1(y) &= 1 & v_2(y) &= y\end{aligned}$$

Vamos a calcular el sistema (3.26)

$$\begin{aligned}(u_1, v_1) &= \int_0^1 y \, dy = \frac{1}{2}, & (u_2, v_1) &= \int_0^1 1 \, dy = 1, \\(u_1, v_2) &= \int_0^1 y^2 \, dy = \frac{1}{3}, & (u_2, v_2) &= \int_0^1 y \, dy = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \alpha_1 - \lambda \alpha_2 = 0 \\ \frac{-\lambda}{3} \alpha_1 + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Si calculamos el determinante del sistema

$$\mathcal{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{2} & -\lambda \\ \frac{-\lambda}{3} & 1 - \frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{3} = 1 + \frac{\lambda^2}{4} - \lambda - \frac{\lambda^2}{3} = \frac{-\lambda^2}{12} + 1 - \lambda$$

Por tanto,

- si $\mathcal{D}(\lambda) \neq 0$, la única solución de la ecuación homogénea es $\phi(x) = 0$
- si $\mathcal{D}(\lambda) = 0$, entonces $\frac{-\lambda^2}{12} + 1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 12\lambda - 12 = 0$. Por lo que los **autovalores** serían $\lambda_1 = -6 + 4\sqrt{3}$ $\lambda_2 = -6 - 4\sqrt{3}$.

Si calculamos ahora la autofunciones asociadas a cada autovalor:

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \alpha_1 - \lambda \alpha_2 = 0 \longrightarrow 1 - \frac{\lambda}{2} = \lambda \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ \frac{-\lambda}{3} \alpha_1 + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \alpha_2 = 0 \longrightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{3(1 - \frac{\lambda}{2})}{\lambda} \end{cases} \longrightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 3 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \longleftrightarrow \alpha_1^2 = 3\alpha_2^2$$

$$\longleftrightarrow \alpha_1 = \pm\sqrt{3}\alpha_2$$

Por tanto la autofunción ϕ_1 asociada al autovalor λ_1 sería de la forma $\alpha_2(\sqrt{3}u_1 + u_2)$, es decir, $\phi_1(x) = C(x\sqrt{3} + 1)$. Análogamente, la autofunción ϕ_2 asociada a λ_2 sería $\phi_2(x) = C_1(-x\sqrt{3} + 1)$

Ejemplo 3.3. Consideramos ahora la ecuación integral

$$\phi(x) = 1 + \lambda \int_0^1 e^{x-y} \phi(y) dy$$

En este caso, el núcleo de la ecuación es $K(x, y) = e^{x-y}$, el cual es un núcleo degenerado pues se puede expresar como $K(x, y) = e^x e^{-y}$ y por tanto $u_1(x) = e^x$ y $v_1(y) = e^{-y}$. Vamos a calcular el sistema (3.26) en este caso,

$$(u_1, v_1) = \int_0^1 e^y e^{-y} dy = 1, \quad (f, v_1) = \int_0^1 e^{-y} dy = -e^{-y} \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{-1}{e} + 1$$

Para $\lambda = 1$, la autofunción asociada al problema homogéneo

$$\phi(x) = \lambda \int_0^1 e^{x-y} \phi(y) dy.$$

es $\phi(x) = Ce^x$, donde C es una constante arbitraria. En ese caso, la ecuación integral completa no posee solución, ya que

$$(f, v_1) \neq 0.$$

En el caso en que $\lambda \neq 1$, el problema homogéneo asociado sólo tiene la solución $\phi(x) = 0$ y, por tanto, usando (3.26) obtenemos

$$[1 - \lambda]\alpha_1 = 1 - \frac{1}{e} \longrightarrow \alpha_1 = \frac{e - 1}{e(1 - \lambda)}$$

En ese caso, la solución viene dada por

$$\phi(x) = 1 + \frac{\lambda(e - 1)}{e(1 - \lambda)} e^x.$$

3.4. Extensión a los núcleos generales de L^2

Usando un método de E.Schmidt, que fue encontrado y generalizado por Picone, extenderemos el teorema de Fredholm a núcleos generales de L^2 . Para ello, primero usaremos que cada núcleo $K(x, y)$ de L^2 se puede descomponer (en un número infinito de formas) en la suma de un núcleo PG adecuado $S(x, y)$ y en otro núcleo de L^2 , $T(x, y)$, cuya norma puede hacerse tan pequeña como queramos. Para ser precisos, supongamos que todos los puntos del λ plano que queremos considerar se encuentran dentro del círculo $|\lambda| = R$ (R es una constante positiva arbitraria). Tomamos

$$K(x, y) = S(x, y) + T(x, y)$$

donde

$$S(x, y) = \sum_{k=1}^n X_k(x)Y_k(y), \quad \|T\|^2 = \int_0^1 \int_0^1 T^2(x, y) dx dy < \frac{1}{R^2}.$$

Esto nos da la condición (3.15) y por tanto la convergencia de la serie de Neumann para el núcleo $T(x, y)$. En consecuencia, si llamamos $H_T(x, y; \lambda)$ al núcleo resolvente correspondiente a $T(x, y)$, nuestra ecuación podemos escribirla como

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 T(x, y)\phi(y) dy = F(x),$$

con

$$F(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 S(x, y)\phi(y) dy.$$

y podemos reemplazarla por la ecuación equivalente

$$\phi(x) = F(x) - \lambda \int_0^1 H_T(x, y; \lambda)F(y) dy$$

es decir, por la ecuación

$$\begin{aligned} \phi(x) - \lambda \int_0^1 \left[S(x, y) - \lambda \int_0^1 H_T(x, z; \lambda)S(z, y) dz \right] \phi(y) dy \\ = f(x) - \lambda \int_0^1 H_T(x, y; \lambda)f(y) dy \end{aligned}$$

la cual podemos expresarla como

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^n \tilde{X}_k(x; \lambda) Y_k(y) \right] \phi(y) dy = \tilde{f}(x; \lambda), \quad (3.29)$$

donde

$$\begin{cases} \tilde{X}_k(x; \lambda) = X_k(x) - \lambda \int_0^1 H_T(x, y; \lambda) X_k(y) dy, \\ \tilde{f}(x; \lambda) = f(x) - \lambda \int_0^1 H_T(x, y; \lambda) f(y) dy, \end{cases} \quad (3.30)$$

De esta forma, cualquier ecuación de Fredholm de segundo tipo con núcleo L^2 se puede reducir a una similar con un núcleo PG y por tanto es válido el teorema de Fredholm (Teorema 3.4).

4. Propiedades y unicidad de la solución

El objetivo de este capítulo es probar la existencia y unicidad de solución de una ecuación integral de segunda especie, para ello utilizaremos algunos conceptos y resultados de la teoría espectral de operadores compactos. Además veremos algunas propiedades que presentan dichas ecuaciones y la importancia que tiene las ecuaciones integrales cuyo núcleo es simétrico. Nos vamos a basar principalmente en los textos [2], [4] y [9].

4.1. Teoría espectral de operadores compactos

Antes que nada, vamos a ver algunos conceptos y resultados de la teoría espectral de operadores compactos que nos serán útiles más adelante.

4.1.1. Operadores compactos

Sean X e Y dos espacios de Banach reales, cuya norma denotamos por $\|\cdot\|$. Denotemos por B_X a la bola unidad cerrada de X , es decir,

$$B_X = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}.$$

Definición 4.1. *Un conjunto $C \subset Y$ se dice que es relativamente compacto en Y si su clausura \overline{C} es un compacto en Y . Es decir, de todo recubrimiento del conjunto \overline{C} por subconjuntos abiertos de Y , se puede extraer un subrecubrimiento finito de \overline{C} .*

Definición 4.2. Un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ se dice que es compacto si el conjunto $T(B_X)$ es relativamente compacto en Y .

Nota 1. En el caso de ser Y un espacio métrico, $C \subset Y$ es relativamente compacto en Y si y solo si de toda sucesión de elementos de C se puede extraer una subsucesión convergente en Y . Por tanto podemos obtener las siguientes definiciones de operador compacto equivalentes:

- Un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es compacto si y sólo si de toda sucesión $\{x_n\} \subset X$ que sea acotada, se puede extraer una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que $\{Tx_{n_k}\}$ sea convergente en Y .
- Un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es compacto si y sólo si transforma subconjuntos acotados de X en subconjuntos relativamente compactos de Y .

Nota 2. Como Y es, en particular un espacio métrico completo, dado un conjunto $C \subset Y$, para determinar si es relativamente compacto en Y , basta comprobar que, para todo $\epsilon > 0$, C puede ser recubierto por un número finito de bolas de Y de radio ϵ .

Veamos que los operadores integrales en $C^0([a, b])$ o en $L^p(a, b)$, con $p \in (1, 2]$ y a, b finitos son operadores compactos.

Definición 4.3. Sea $K \in C^0([a, b] \times [a, b])$ una función dada. Se denomina **operador integral en $C^0([a, b])$** de núcleo integral K , al operador $T : C^0([a, b]) \mapsto C^0([a, b])$ definido por

$$(T\phi)(t) = \int_a^b K(t, s)\phi(s) ds \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall \phi \in C^0([a, b]). \quad (4.1)$$

Definición 4.4. Sean $p \in (1, 2]$ y $K \in L^q((a, b) \times (a, b))$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dados. Se denomina **operador integral en $L^p(a, b)$** de núcleo integral K , al operador $T : L^p(a, b) \mapsto L^p(a, b)$ definido por

$$(T\phi)(t) = \int_a^b K(t, s)\phi(s) ds \quad e.c.t. \ t \in (a, b), \quad \forall \phi \in L^p(a, b). \quad (4.2)$$

Teorema 4.5. *Se tiene:*

1. Si $K \in C^0([a, b] \times [a, b])$, el operador integral T definido como (4.1) pertenece a $\mathcal{L}(C^0([a, b]))$, y es compacto.
2. Si $K \in L^q((a, b) \times (a, b))$, el operador integral T definido como (4.2) pertenece a $\mathcal{L}(L^p(a, b))$, y es compacto.

Demostración:

1. Veamos primero que si $K \in C^0([a, b] \times [a, b])$, T dado por (4.1) está bien definido y pertenece a $\mathcal{L}(C^0([a, b]))$.

- T es lineal: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\phi, \psi \in C^0([a, b])$, entonces

$$\begin{aligned} (T(\alpha\phi + \beta\psi))(t) &= \int_a^b K(t, s)(\alpha\phi + \beta\psi)(s) ds \\ &= \alpha \int_a^b K(t, s)\phi(s) ds + \beta \int_a^b K(t, s)\psi(s) ds \\ &= \alpha T\phi + \beta T\psi. \quad \forall t \in [a, b] \end{aligned}$$

- T es continuo: Al ser T lineal, basta ver que

$$\|T\phi\|_{C^0([a, b])} \leq C\|\phi\|_{C^0([a, b])}$$

con $C > 0$

$$\begin{aligned} \text{En efecto, } \|T\phi\|_{C^0([a, b])} &= \max_{t \in [a, b]} \left| \int_a^b K(t, s)\phi(s) ds \right| \\ &\leq \max_{t \in [a, b]} \int_a^b |K(t, s)| |\phi(s)| ds \\ &\leq \max_{t \in [a, b]} \left(\|\phi\|_{C^0([a, b])} \int_a^b |K(t, s)| ds \right) \\ &\leq \|\phi\|_{C^0([a, b])} \max_{t, s \in [a, b]} \left(|K(t, s)| \int_a^b ds \right) \\ &= \|\phi\|_{C^0([a, b])} |b - a| \max_{t, s \in [a, b]} |K(t, s)| \\ &= |b - a| \|K\|_{C^0([a, b] \times [a, b])} \|\phi\|_{C^0([a, b])} \end{aligned}$$

Por tanto T es continuo ya que $K \in C^0([a, b] \times [a, b])$ y $[a, b]$ está acotado.

Además hemos probado que T está bien definido ya que $\|T\phi\|_{C^0([a, b])}^2$ es finito.

Además, si $\{\phi_n\}$ es una sucesión acotada en $C^0([a, b])$ entonces $\{T\phi_n\}$ es una sucesión acotada ya que por la acotación anterior

$$\|T\phi_n\|_{C^0([a, b])} \leq \tilde{C}\|\phi_n\|_{C^0([a, b])} < \infty$$

Veamos que además $\{T\phi_n\}$ es equicontinua en $C^0([a, b])$:

$$\begin{aligned} |T\phi_n(x) - T\phi_n(y)| &= \left| \int_a^b (K(x, s) - K(y, s))\phi_n(s) ds \right| \\ &\leq \int_a^b |K(x, s) - K(y, s)| |\phi_n(s)| ds \\ &\leq |b - a| \|K(x, s) - K(y, s)\|_{C^0(a, b)} \|\phi_n\|_{C^0([a, b])} \end{aligned}$$

Como $K \in C^0([a, b] \times [a, b])$, existe ε_1 tal que $\|K(x, s) - K(y, s)\| < \varepsilon_1$. Por tanto, $\forall \varepsilon, \exists \delta > 0$ tal que si $\|x - y\| < \delta$, entonces

$$|T\phi_n(x) - T\phi_n(y)| \leq \varepsilon_1 \|\phi_n\|_{C^0([a, b])} |b - a| = \varepsilon.$$

No depende de n ya que $\{\phi_n\}$ es una sucesión acotada en $C^0([a, b])$ ni de los valores de x e y .

Por tanto aplicando el teorema de Ascoli-Arzelà (ver Teorema A.11), existe una subsucesión de $\{T\phi_n\}$ que es convergente en $C^0([a, b])$, y por tanto, si $K \in C^0([a, b] \times [a, b])$, el operador T definido por (4.1) es compacto en $C^0([a, b])$.

2. Veamos que si $K \in L^q((a, b) \times (a, b))$, el operador T dado por (4.2) está bien definido y pertenece a $\mathcal{L}(L^p(a, b))$.

■ T es lineal: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\phi, \psi \in L^p(a, b)$, entonces

$$\begin{aligned} (T(\alpha\phi + \beta\psi))(t) &= \int_a^b K(t, s)(\alpha\phi + \beta\psi)(s) ds \\ &= \alpha \int_a^b K(t, s)\phi(s) ds + \beta \int_a^b K(t, s)\psi(s) ds \\ &= \alpha T\phi + \beta T\psi. \quad \text{e.c.t. } t \in (a, b). \end{aligned}$$

- T es continuo: Al ser T lineal, basta ver que

$$\|T\phi\|_{L^p(a,b)} \leq C\|\phi\|_{L^p(a,b)}$$

con $C > 0$.

$$\begin{aligned} \|T\phi\|_{L^p(a,b)}^p &= \int_a^b \left(\int_a^b K(t,s)\phi(s) ds \right)^p dt \\ &\stackrel{Holder}{\leq} \int_a^b \left(\int_a^b K^q(t,s) ds \right)^{p/q} \left(\int_a^b \phi^p(s) ds \right) dt \\ &= \|K\|_{L^q((a,b)\times(a,b))}^p \|\phi\|_{L^p(a,b)}^p \leq C\|\phi\|_{L^p(a,b)}^2 \end{aligned}$$

ya que $K \in L^q((a,b)\times(a,b))$. Además hemos probado que T está bien definido ya que $\|T\phi\|_{L^p(a,b)}^p$ es finito, luego $T\phi$ está en $L^p(a,b)$.

Para demostrar que T es compacto, suponemos en primer lugar que $K \in C^0([a,b]\times[a,b])$. Si $\{\phi_n\}$ está acotada en $L^p(a,b)$, entonces $\{T\phi_n\}$ es una sucesión acotada en $C^0([a,b])$ ya que

$$\begin{aligned} \|T\phi_n\|_{C^0([a,b])} &= \max_{t \in [a,b]} \left| \int_a^b K(t,s)\phi_n(s) ds \right| \\ &\leq \max_{t \in [a,b]} \int_a^b |K(x,s)| |\phi_n(s)| ds \\ &\stackrel{Holder}{\leq} \max_{t \in [a,b]} \left(\left(\int_a^b |K(t,s)|^q ds \right)^{1/q} \left(\int_a^b |\phi_n(s)|^p ds \right)^{1/p} \right) \\ &\leq \|\phi_n\|_{L^p(a,b)} \left(\max_{t,s \in [a,b]} |K(x,s)|^q \int_a^b ds \right)^{1/q} \\ &= |b-a|^{1/q} \|K\|_{C^0([a,b]\times[a,b])} \|\phi_n\|_{L^p(a,b)}. \end{aligned}$$

Además $\{T\phi_n\}$ es equicontinua en $C^0([a,b])$ ya que

$$\begin{aligned} |T\phi_n(x) - T\phi_n(y)| &= \left| \int_a^b (K(x,s) - K(y,s))\phi_n(s) ds \right| \\ &\leq \int_a^b |K(x,s) - K(y,s)| |\phi_n(s)| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{Holder}}{\leq} \left(\left(\int_a^b |K(x, s) - K(y, s)|^q ds \right)^{1/q} \left(\int_a^b |\phi_n(s)|^p ds \right)^{1/p} \right) \\ & \leq |b - a|^{1/q} \|K(x, s) - K(y, s)\|_{C^0(a,b)} \|\phi_n\|_{L^p(a,b)} \end{aligned}$$

Como $K \in C^0([a, b] \times [a, b])$, existe ε_1 tal que $\|K(x, s) - K(y, s)\| < \varepsilon_1$. Por tanto, $\forall \varepsilon, \exists \delta > 0$ tal que si $\|x - y\| < \delta$, entonces

$$|T\phi_n(x) - T\phi_n(y)| \leq \varepsilon_1 \|\phi_n\|_{L^p(a,b)} |b - a|^{1/q} = \varepsilon.$$

No depende de n ya que $\{\phi_n\}$ es una sucesión acotada en $C^0([a, b])$ ni de los valores de x e y .

Por tanto, aplicando el Teorema de Ascoli-Arzelà (ver Teorema A.11), existe una subsucesión de $\{T\phi_n\}$ que es convergente en $C^0([a, b])$, y en consecuencia también es convergente en $L^p(a, b)$. Por tanto, si $K \in C^0([a, b] \times [a, b])$, el operador T definido como (4.2) es compacto en $L^p(a, b)$.

En el caso general, tener en cuenta que el conjunto de todos los operadores $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ compactos es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{L}(X, Y)$ y la densidad del espacio $C^0([a, b] \times [a, b])$ en $L^p((a, b) \times (a, b))$. ■

Nota 3. En nuestro caso, vamos a suponer que $K(x, y) \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$, por tanto veamos que durante todo este trabajo vamos a poder aplicar el Teorema de Fubini (ver A.10), es decir

$$\int_0^1 \left(\int_0^t u(s) ds \right) dt = \int_0^1 \left(\int_s^1 u(s) dt \right) ds$$

con $u \in L^2(0, 1)$. Para estar en las hipótesis del teorema de Fubini, necesitamos probar que $F(s, t) = u(s) \in L^1((0, t) \times (0, 1))$, para ello usaremos el criterio de Tonelli (ver A.9)

a) para casi todo $t \in (0, 1)$,

$$\int_0^t |u(s)| ds \leq \int_0^1 |u(s)| ds \stackrel{\text{Holder}}{\leq} \left(\int_0^1 |u(s)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^1 1 ds \right) = \|u\|_{L^2(0,1)} < \infty$$

b)

$$\int_0^1 \left(\int_0^t |u(s)| ds \right) dt \leq \int_0^1 \|u\|_{L^2(0,1)}^2 dt = \|u\|_{L^2(0,1)}^2 < \infty$$

Por tanto, por el criterio de Tonelli, $F(s, t) = u(s) \in L^1((0, t) \times (0, 1))$ y en consecuencia es válido el teorema de Fubini.

4.1.2. Teorema de alternativa de Fredholm

Definición 4.6. Sean H y G dos espacios de Hilbert reales, se define el **núcleo** y el **rango** de un operador lineal y continuo $T \in \mathcal{L}(H, G)$, y se denota $\text{Ker}(T)$ y $\text{Rang}(T)$ respectivamente, como

$$\text{Ker}(T) = T^{-1}(0) = \{x \in H; Tx = 0\}, \quad \text{Rang}(T) = T(H) = \{Tx; x \in H\}.$$

Definición 4.7. Sean H y G dos espacios de Hilbert reales, y $T \in \mathcal{L}(H, G)$. Se define el **operador adjunto** de T como el único operador $T^* \in \mathcal{L}(G, H)$ tal que

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \quad \forall x \in H, \quad \forall y \in G.$$

Teorema 4.8 (Teorema de la alternativa de Fredholm). [ver la demostración en [9]] Sea H un espacio de Hilbert real, $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador **compacto**. Entonces, se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\text{Ker}(I - T)$ y $\text{Ker}(I - T^*)$ son de dimensión finita, y de hecho,

$$\dim \text{Ker}(I - T) = \dim \text{Ker}(I - T^*).$$

2. $\text{Rang}(I - T)$ y $\text{Rang}(I - T^*)$ son cerrados, y por tanto, $\text{Rang}(I - T) = \text{Ker}(I - T^*)^\perp$ y $\text{Rang}(I - T^*) = \text{Ker}(I - T)^\perp$.

3. $\text{Ker}(I - T) = 0 \Leftrightarrow \text{Rang}(I - T) = H$, y $\text{Ker}(I - T^*) = 0 \Leftrightarrow \text{Rang}(I - T^*) = H$.

Nota 4. La alternativa de Fredholm nos dice que si $T \in \mathcal{L}(H)$ es compacto, para la ecuación $u - Tu = f$ podemos afirmar:

- o bien, la ecuación homogénea asociada $u - Tu = 0$ sólo posee la solución nula, y en ese caso para $f \in H$ existe una y sólo una solución $x \in H$ de $u - Tu = f$,

- o bien, el espacio vectorial de las soluciones de la ecuación homogénea asociada $u - Tu = 0$ es de dimensión finita $n \geq 1$, y para $f \in H$ dado la ecuación $x - Tx = f$ sólo posee solución si y sólo si f verifica las n condiciones de ortogonalidad ($f \in \text{Ker}(I - T^*)^\perp$), y en ese caso la ecuación admite infinitas soluciones.

4.1.3. Espectro de un operador compacto

Sea X un espacio de Banach real de norma $\|\cdot\|$ y T un operador de $\mathcal{L}(X)$.

Definición 4.9. Se denomina **conjunto resolvente** de T , y se denota por $\rho(T)$, al conjunto

$$\rho(T) = \{\mu \in \mathbb{R}; T - \mu I \text{ es biyectivo de } X \text{ sobre } X\}.$$

Al conjunto $\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$, complementario del conjunto resolvente de T , se le denomina el **espectro** de T .

Definición 4.10. Se dice que $\mu \in \mathbb{R}$ es un **autovalor** o valor propio de T , si $T - \mu I$ no es inyectivo, es decir, si $\text{Ker}(T - \mu I) \neq \{0\}$. En tal caso, al conjunto $\text{Ker}(T - \mu I)$ se le denomina **subespacio propio o autoespacio** asociado a μ , y a cualquier elemento $\phi \in \text{Ker}(T - \mu I)$ tal que $\phi \neq 0$ se le denomina un **autofunción** o función propia asociado a μ . Al conjunto de todos los autovalores de T se le denota $VP(T)$.

Nota 5. Observamos que $VP(T) \subset \sigma(T)$.

Proposición 4.11 (ver la demostración en [9]). Para todo operador $T \in \mathcal{L}(X)$, el espectro es un conjunto compacto de \mathbb{R} tal que

$$\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|],$$

y en consecuencia el conjunto resolvente es un subconjunto abierto no acotado de \mathbb{R} .

4.1.4. Teorema de Hilbert-Schmidt

Nos vamos a centrar en los operadores lineales compactos y autoadjuntos en un espacio de Hilbert. Suponemos fijado un espacio de Hilbert real H . Denotamos por (\cdot, \cdot) al producto escalar en H , y por $\|\cdot\|$ a la norma en H inducida por dicho producto escalar.

Definición 4.12 (Operador autoadjunto). Sea $T \in \mathcal{L}(H)$, se dice que T es **autoadjunto** si se verifica que

$$(Tx, y) = (x, Ty) \quad \forall x, y \in H.$$

Proposición 4.13 (ver la demostración en [9]). Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ y sean

$$m = \inf_{u \in H, \|u\|=1} (Tu, u), \quad M = \sup_{u \in H, \|u\|=1} (Tu, u).$$

Entonces $\sigma(T) \subset [m, M]$. Si además T es un operador autoadjunto, entonces $m \in \sigma(T)$, y $M \in \sigma(T)$.

Corolario 4.14 (véase la demostración en [9]). Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto tal que $\sigma(T) \subset \{0\}$, entonces $\sigma(T) \subset \{0\}$ y $T = 0$.

Nuestro objetivo ahora va a ser mostrar que si H es un espacio de Hilbert separable y $T \in \mathcal{L}(H)$ es un operador compacto y autoadjunto, entonces existe una base formada por las autofunciones de T .

Definición 4.15. Se dice que un espacio métrico E es **separable** si existe un subconjunto $D \subset E$ numerable y denso.

Definición 4.16. Sea H un espacio de Hilbert, diremos que $\{e_j\} \subset H$ es una **base ortonormal** de H , si se verifica que

$$(e_j, e_k) = \delta_{jk} \quad \forall j, k \in \mathbb{N},$$

y para todo $x \in H$, se tiene

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j) e_j, \quad \text{en } X.$$

Nota 6. Si $\{e_j\} \subset H$ es una **base ortonormal**, entonces se verifica la identidad de Parseval,

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j)^2, \quad \forall x \in H.$$

Recordemos que,

Proposición 4.17. Si H es un espacio de Hilbert separable, entonces siempre existe una base ortonormal de H .

Definición 4.18. Sea $\{H_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de subespacios vectoriales cerrados de H . Se dice que H es **suma de Hilbert** de la sucesión $\{H_n\}_{n \geq 0}$ si:

1. Los H_n son ortogonales dos a dos, es decir, si $m \neq n$,

$$(x_m, x_n) = 0 \quad \forall x_m \in H_m, \quad \forall x_n \in H_n,$$

2. El espacio vectorial generado por $\bigcup_{n \geq 0} H_n$ es denso en H .

Teorema 4.19 (ver la demostración en [9]). Sea $\{H_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de subespacios vectoriales cerrados de H tal que H es suma de Hilbert de dicha sucesión. Denotemos, para cada $n \geq 0$ por P_n al operador de proyección ortogonal de H sobre H_n . Dado $x \in H$, denotemos $x_n = P_n x$. Entonces, se satisface:

1. $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$, es decir, $x = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k x_n$.

2. $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2$ (igualdad de Bessel-Parseval).

Recíprocamente, si $\{x_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de elementos de H tal que $x_n \in H_n$ para todo $n \geq 0$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ es convergente a un elemento $x \in H$ que verifica $P_n x = x_n \quad \forall n \geq 0$

Teorema 4.20 (Teorema de Hilbert-Schmidt). Supongamos que H es un espacio de Hilbert real separable que no es de dimensión finita, y sea $T \in \mathcal{L}(H)$ u operador compacto y **autoadjunto**. Sea $\{\mu_m\}_{m \geq 1}$ la colección (vacía, finita o infinita numerable) de todos los autovalores distintos de T , exceptuando eventualmente 0. Denotemos $\mu_0 = 0$, y $H_n = \text{Ker}(T - \mu_n I)$ para $n \geq 0$, con el convenio de que si la colección $\{\mu_m\}_{m \geq 1}$ es vacía o finita con $m \geq 0$ elementos, entonces $H_n = \{0\}$ para todo $n \geq m + 1$. Entonces, se tiene:

1. El espacio H es suma de Hilbert de la sucesión $\{H_n\}_{n \geq 0}$.

2. El espacio H posee una base de Hilbert formada por autofunciones de T .

Demostración: Observamos que $0 \leq \dim(H_0) \leq \infty$, en cambio como $\text{Ker}(T - \mu_n I) = \text{Ker}(I - \frac{1}{\mu_n} T)$, por el teorema de la alternativa (Teorema 4.8), para todo $n \geq 1$, se tiene que $\dim(H_n) < \infty$.

1. Primero veamos que los H_n son ortogonales dos a dos: si $x_n \in H_n$ y $x_m \in H_m$, con $m, n \geq 0$ y $m \neq n$, entonces $Tx_n = \mu_n x_n$ y $Tx_m = \mu_m x_m$, por lo que

$$\mu_n(x_n, x_m) = (Tx_n, x_m) \text{ y } (x_n, Tx_m) = \mu_m(x_n, x_m)$$

Al ser T autoadjunto,

$$\mu_n(x_n, x_m) = \mu_m(x_n, x_m) \Leftrightarrow (\mu_n - \mu_m)(x_n, x_m) = 0.$$

Por tanto, al ser $\mu_n \neq \mu_m$, $(x_n, x_m) = 0$.

Veamos ahora que el espacio vectorial generado por $\bigcup_{n \geq 0} H_n$, denotado por F , es denso en H . Para ello veamos que $F^\perp = \{0\}$ ya que H es un espacio de Hilbert y F un subespacio vectorial (véase teorema A.12).

Como $T(H_n) \subset H_n$ para $n \geq 0$, ya que si $x_n \in H_n$, entonces $Tx_n = \mu_n x_n$ y por tanto $Tx_n \in H_n$, se tiene que $T(F) \subset F$, pero esto implica que $T(F^\perp) \subset F^\perp$ puesto que si $x \in F^\perp$ e $y \in F$, entonces $(Tx, y) = (x, Ty)$ al ser T autoadjunto y además $(x, Ty) = 0$ ya que $x \in F^\perp$ y $Ty \in T(F) \subset F$, luego $Tx \in F^\perp$. Así pues, el operador $T_0 = T|_{F^\perp}$ está bien definido como operador de $\mathcal{L}(F^\perp)$, y es autoadjunto y compacto. Además F^\perp es cerrado en H , y por tanto es un subespacio de Hilbert de H .

Además se tiene que $\sigma(T_0) = \{0\}$ puesto que si $\mu \in \sigma(T_0) \setminus \{0\}$ entonces existe $x \in F^\perp$, con $x \neq 0$, tal que $T_0 x = \mu x$, lo que nos lleva a que μ es un autovalor de T y $x \in F$. Es decir, si $\mu \in \sigma(T_0) \setminus \{0\}$, entonces existe $x \in F \cap F^\perp$, con $x \neq 0$, lo cual es absurdo.

Por tanto, por el Corolario 4.14, $T_0 = 0$, es decir, $F^\perp \subset \text{Ker}(T) \subset F$, lo que nos conduce a que $F^\perp = \{0\}$ ya que $F \cap F^\perp = \{0\}$.

En conclusión, H es suma de Hilbert de la sucesión $\{H_n\}_{n \geq 0}$.

2. Es una consecuencia inmediata de 1 ya que basta tomar en cada H_n una base de Hilbert.

4.2. Propiedades generales de la ecuación de Fredholm de 2ª especie

Veremos más adelante, que en el caso de los núcleos simétricos de L^2 , existe al menos un autovalor λ y una autofunción asociada distinta de la trivial.

Si el núcleo es asimétrico, puede ocurrir que no existan autovalores y autofunciones.

Por otra parte, gracias al carácter lineal del operador integral $\int_0^1 K(x, y)\phi(y) dy$, se tiene que

- si ϕ es solución de la ecuación homogénea

$$\phi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi(y) dy \quad (4.3)$$

con núcleo cualquiera, entonces también lo es $C\phi_1$, con C una constante independiente de (x, y) .

- si $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ son soluciones correspondientes a un mismo autovalor λ , entonces lo es también $C_1\phi_1 + C_2\phi_2 + \dots + C_n\phi_n$.

Si consideramos la ecuación completa,

$$\phi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi(y) dy + f(x) \quad (4.4)$$

veremos que esta ecuación, para todo valor de λ que no sea autovalor de la ecuación homogénea, tiene una única solución $\phi(x)$. De esta forma, se va a establecer una correspondencia funcional entre el segundo miembro $f(x)$ y la incógnita $\phi(x)$, en la que a la función $f(x) = 0$ le corresponde la solución única trivial $\phi(x) = 0$. Esta correspondencia tiene el carácter lineal, pues

- si $\phi_1(x)$ es solución correspondiente a $f_1(x)$, $k\phi_1(x)$ es solución correspondiente al segundo miembro $kf_1(x)$

- si $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$ son soluciones correspondientes a los segundos miembros $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$, entonces $\sum_{i=1}^n C_i \phi_i(x)$ es solución correspondiente al segundo miembro $\sum_{i=1}^n C_i f_i(x)$.

En los casos en el que λ coincida con los autovalores de la ecuación homogénea, la ecuación completa (4.4), en general, no tiene solución, a menos que f verifique algunas condiciones adicionales.

4.3. Existencia y unicidad de solución de la ecuación de Fredholm

Sea la ecuación integral de Fredholm de 2ª especie

$$\phi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi(y) dy + f(x)$$

Nuestro objetivo es probar la existencia de solución de la ecuación integral y si fuese posible, la unicidad. Es decir, para el operador integral

$$\begin{aligned} A : L^2(0, 1) &\longrightarrow L^2(0, 1) \\ \phi &\longmapsto (A\phi)(x) = \int_0^1 K(x, y)\phi(y) dy \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi(y) dy + f(x) \\ &\Leftrightarrow (I - \lambda A) \phi = f(x) \\ &\stackrel{\lambda \neq 0}{\Leftrightarrow} \left(A - \frac{1}{\lambda} I \right) \phi = -\frac{1}{\lambda} f(x) \\ &\Leftrightarrow (A - \mu I) \phi = g(x) = -\mu f(x). \end{aligned}$$

queremos probar que el operador $A - \mu I : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ para $\mu = \frac{1}{\lambda}$ es **biyectivo** ya que

- si es **inyectivo**, quiere decir que dado dos soluciones ϕ_1 y ϕ_2 de la ecuación

$$(A - \mu I)\phi_1 = g(x)$$

$$(A - \mu I)\phi_2 = g(x)$$

implica que $\phi_1 = \phi_2$. Es decir, estamos probando la **unicidad** de solución.

- si es **sobreyectivo**, quiere decir que dada $f(x)$, existe una función $\phi(x)$ tal que

$$(A - \mu I)\phi = g(x) = -\mu f(x)$$

Es decir, estamos probando la **existencia** de solución.

En dimensión finita, se tiene que un operador lineal es inyectivo si y sólo si es biyectivo, pero en el caso de dimensión infinita, no va a ser cierto en general. Por tanto, pueden existir valores espectrales que no son autovalores (al contrario siempre es cierto).

La idea por tanto, es aplicar el teorema de la alternativa de Fredholm (Teorema 4.8).

Queremos ver que estamos en la hipótesis del Teorema 4.8, para ello veamos que dicho operador es **lineal**, **continuo** y **compacto**.

- A es lineal: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\phi, \psi \in L^2(0, 1)$, entonces

$$\begin{aligned} (A)(\alpha\phi + \beta\psi) &= \int_0^1 K(x, y)(\alpha\phi + \beta\psi)(y) dy \\ &= \alpha \int_0^1 K(x, y)\phi(y) dy + \beta \int_0^1 K(x, y)\psi(y) dy \\ &= \alpha A\phi + \beta A\psi. \end{aligned}$$

- A es continuo: Al ser A lineal, basta ver que

$$\|A\phi\|_{L^2(0,1)} \leq C\|\phi\|_{L^2(0,1)} \text{ con } C > 0$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \|A\phi\|_{L^2(0,1)}^2 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x,y)\phi(y) dy \right)^2 dx \\ &\stackrel{C-S}{\leq} \int_0^1 \left(\int_0^1 K^2(x,y) dy \right) \left(\int_0^1 \phi^2(y) dy \right) dx \\ &= \|K(x,y)\|_{L^2([0,1]\times[0,1])}^2 \|\phi\|_{L^2(0,1)}^2 \leq N \|\phi\|_{L^2(0,1)}^2 \end{aligned}$$

ya que $K(x,y) \in L^2([0,1] \times [0,1])$.

- A es compacto gracias al Teorema 4.5.

Por tanto,

1. Si $\text{Ker}(A - \mu I) = 0$, eso quiere decir, que $A - \mu I$ es inyectiva, y por el teorema de la alternativa, es biyectiva y por tanto, nuestra ecuación

$$\phi(x) = \lambda \int_0^1 K(x,y) \phi(y) dy + f(x)$$

posee una única solución.

2. Si $\text{Ker}(A - \mu I) \neq 0$, eso quiere decir que existen autofunciones ϕ_i correspondiente a los autovalores λ_i de la ecuación homogénea

$$\phi(x) = \lambda \int_0^1 K(x,y) \phi(y) dy$$

Por tanto, f debe verificar condiciones de ortogonalidad para que la ecuación no homogénea posea solución.

En nuestro caso específico del operador de nuestra ecuación integral, ambos resultados de existencia se enuncian a continuación más formalmente:

Teorema 4.21 (Teorema de Fredholm). *La ecuación integral de Fredholm de segunda especie*

$$\phi(x) = \lambda \int_0^1 K(x,y) \phi(y) dy + f(x) \tag{4.5}$$

tiene, en general, una y solamente una solución de clase L^2 dada por la fórmula

$$\phi(x) = f(x) - \lambda \int_0^1 H(x,y;\lambda) f(y) dy \tag{4.6}$$

donde $H(x, y; \lambda)$ es el núcleo resolvente. $H(x, y; \lambda)$ es una función analítica de λ , y si $|\lambda| < \|K\|^{-1}$, entonces viene dada por la serie de Neumann

$$-H(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda K_2(x, y) + \lambda^2 K_3(x, y) + \dots, \quad (4.7)$$

donde K_2, K_3, \dots son los núcleos iterados (definidos en (3.8)). Las únicas excepciones son los puntos singulares de $H(x, y; \lambda)$, los cuales coinciden con los ceros (llamados **autovalores**) de la función analítica $\mathcal{D}(\lambda)$ de λ .

Si $\lambda = \lambda_0$ es una raíz con multiplicidad $m \geq 1$ de la ecuación $\mathcal{D}(\lambda) = 0$, entonces la ecuación homogénea

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\phi(y) dy = 0 \quad (4.8)$$

tiene r soluciones no triviales independientes, llamadas **autofunciones**, donde r es el índice del autovalor, satisfaciendo la condición $1 \leq r \leq m$.

Además, si $\lambda = \lambda_0$, la ecuación no homogénea (4.5) tiene solución, exactamente infinitas soluciones, si y sólo si la función dada $f(x)$ es ortogonal a todas las autofunciones de la ecuación homogénea asociada.

El teorema de la alternativa (Teorema 4.8) para el estudio de nuestro operador A se escribiría de la forma siguiente:

Corolario 4.22 (Teorema de Alternativa). *Si la ecuación integral de Fredholm homogénea tiene sólo la solución trivial $\phi(x) = 0$, entonces la correspondiente ecuación no homogénea siempre tiene una y solamente una solución. De lo contrario, si la ecuación homogénea tiene soluciones no triviales, entonces la ecuación integral no homogénea no tiene solución o tiene infinita soluciones, dependiendo de la función dada $f(x)$.*

4.3.1. Caso particular en el que núcleo es simétrico

Lema 4.23. *Si el núcleo de la ecuación integral es simétrico, se tiene que*

$$K_n(x, y) = K_n(y, x)$$

y en consecuencia, $H(x, y; \lambda) = H(y, x; \lambda)$

Demostración: Vamos a probarlo por inducción

- Caso n=1: Se tiene por hipótesis.
- Supuesto cierto para n, veamos para n+1

$$\begin{aligned} K_{n+1}(x, y) &= \int_0^1 K(x, s)K_n(s, y) ds \stackrel{\text{Hip.ind}}{=} \int_0^1 K(s, x)K_n(y, s) ds \\ &= \int_0^1 K_n(y, s)K(s, x) ds = K_{n+1}(y, x) \end{aligned}$$

gracias a la Proposición 3.2. ■

En este caso que el núcleo $K(x, y)$ es **simétrico**, tenemos que el operador $(A\phi)(x) = \int_0^1 K(x, y)\phi(y) dy$ es autoadjunto ya que

$$\begin{aligned} (A\phi, \psi) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x, y)\phi(y) dy \right) \psi(x) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x, y)\psi(x) dx \right) \phi(y) dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 K(y, x)\psi(x) dx \right) \phi(y) dy \\ &= (\phi, A\psi). \end{aligned}$$

Por tanto, si aplicamos el teorema de Hilbert-Schmidt (Teorema 4.20), sabemos que $H = L^2(0, 1)$ (espacio de Hilbert separable) posee una base de Hilbert formada por las autofunciones de A . Luego, el teorema de la Alternativa nos diría en este caso que:

1. Si $\text{Ker}(A - \mu I) = 0$, eso quiere decir, que $A - \mu I$ es inyectiva, luego es biyectiva y por tanto, nuestra ecuación

$$\phi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi(y) dy + f(x)$$

posee una única solución.

2. Si $\text{Ker}(A - \mu I) \neq 0$, eso quiere decir que existen autofunciones ϕ_i correspondiente a los autovalores λ_i de la ecuación homogénea

$$\phi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi(y) dy$$

Por tanto, al ser las autofunciones una base de $L^2(0, 1)$ se debe verificar que

$$((A - \mu I)\phi_i, \phi_j) = -(f, \phi_j) \Leftrightarrow (f, \phi_j) = 0 \quad \forall j, j \neq i.$$

Es decir, $f \in \text{Rang}(A - \mu I)$, o lo que es lo mismo, la ecuación no homogénea posee solución, si y solo si

$$(f, \phi_j) = 0 \quad \forall j, j \neq i.$$

Veamos ahora dos propiedades que se verifican en el caso de un núcleo simétrico

Proposición 4.24. *Los autovalores y autofunciones de un núcleo simétrico real son reales.*

Demostración: Si un núcleo simétrico tiene un autovalor complejo $\lambda_1 = a + ib$ con su correspondiente autofunción $\phi_1(x) = \alpha(x) + i\beta(x)$, entonces debe tener el autovalor conjugado $\lambda_2 = a - ib$ con su correspondiente autofunción $\phi_2(x) = \alpha(x) - i\beta(x)$. Al ser dos autofunciones de un núcleo simétrico correspondiente a dos autovalores diferentes λ_1 y λ_2 , son ortogonales, es decir,

$$\int \phi_1(x)\phi_2(x) dx = \int [\alpha^2(x) + \beta^2(x)] dx = 0 \Rightarrow \alpha(x) = 0 \quad \beta(x) = 0$$

Pero esto contradice a la hipótesis de que $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ son autofunciones, es decir, funciones que no se anulan en casi todo. ■

Otra propiedad importante de los núcleos simétricos es que su espectro nunca son vacíos.

Proposición 4.25. *Todo núcleo de L^2 simétrico, no nulo tiene al menos un autovalor.*

Demostración: Al ser el núcleo simétrico, el operador A es autoadjunto, luego por la Proposición 4.13, $m, M \in \sigma(T)$ y por tanto el espectro es no vacío. ■

4.4. El teorema de Hilbert-Schmidt y aplicaciones

Aunque ya hemos visto un enunciado como Teorema de Hilbert-Schmidt (Teorema 4.20), escribimos aquí la escritura que aparece en el libro de Tricomi [12].

Teorema 4.26 (Teorema de Hilbert-Schmidt). *Si $f(x)$ puede ser expresada de la forma*

$$f(x) = \int_0^1 K(x, y)g(y) dy \quad (4.9)$$

donde $K(x, y)$ es un núcleo simétrico de L^2 y $g(y)$ es una función de L^2 , entonces $f(x)$ puede ser también expresada por su serie de Fourier con respecto al sistema ortogonal $\{\phi_h\}$ de autofunciones de $K(x, y)$, es decir, podemos escribir

$$f(x) = \sum_{h=1}^{\infty} a_h \phi_h(x) \quad (4.10)$$

donde

$$a_h = \int_0^1 f(x)\phi_h(x) dx \quad (h = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.11)$$

Además, si $K \in L^2_*$, es decir, si la función $A(x)$, definida en (3.13), relacionado con el núcleo K está acotada en $L^2(0, 1)$, es decir,

$$\int_0^1 K^2(x, y) dy = A^2(x) \leq N^2 \quad (N = \text{constante}) \quad (4.12)$$

entonces la serie (4.10) converge absolutamente y uniformemente para cada $f(x)$ del tipo (4.9). Si $K \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$ solamente, entonces la serie (4.10) converge uniformemente en casi todo.

El teorema de Hilbert-Schmidt no sólo es importante en la teoría de las ecuaciones integrales sino también en la teoría de las funciones ortogonales.

Entre sus consecuencias encontramos el siguiente resultado:

Teorema 4.27. *Si el núcleo simétrico $K(x, y)$ pertenece a la clase $L^2([0, 1] \times [0, 1])$, entonces todos los núcleos iterados correspondiente $K_m(x, y)$ se puede representar por*

una serie convergente absolutamente y uniformemente en casi todo

$$K_m(x, y) = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^{-m} \phi_h(x) \phi_h(y) \quad m \geq 1. \quad (4.13)$$

Si el núcleo $K(x, y)$ pertenece a la clase L_*^2 , es decir, si se verifica la condición (4.12), entonces cada serie converge uniformemente.

Demostración:

Por definición, $K_m(x, y) = \int_0^1 K(x, y) K_{m-1}(x, y)$. Por tanto tenemos una ecuación de la forma (4.9), luego aplicando el teorema de Hilbert-Schmidt,

$$K_m(x, y) = \sum_{h=1}^{\infty} a_h(y) \phi_h(x)$$

donde

$$a_h(y) = \int_0^1 K_m(x, y) \phi_h(x) dx.$$

Si $m = 1$, entonces

$$\begin{aligned} a_h(y) &= \int_0^1 K(x, y) \phi_h(x) dx \\ &= \frac{1}{\lambda_h} \phi_h(y) \end{aligned}$$

ya que $\phi_h(x)$ verifica la ecuación homogénea

$$\phi_h(x) - \lambda_h \int_0^1 K(x, y) \phi_h(x) dx = 0$$

Si $m = 2$, entonces aplicando ahora el teorema de Fubini (ver Teorema A.10)

$$\begin{aligned} a_h(y) &= \int_0^1 K_2(x, y) \phi_h(x) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x, z) K(z, y) dz \right) \phi_h(x) dx \\ &= \int_0^1 K(z, y) \left(\int_0^1 K(x, z) \phi_h(x) dx \right) dz \\ &= \frac{1}{\lambda_h} \int_0^1 K(z, y) \phi_h(z) dz \\ &= \lambda_h^{-2} \phi_h(y). \end{aligned}$$

Por tanto, supongamos que para m se verifica que

$$a_h(y) = \int_0^1 K_m(x, y) \phi_h(x) dx = \lambda_h^{-m} \phi_h(y),$$

vamos a probarlo para $m + 1$: aplicando el teorema de Fubini (ver Teorema A.10) y la Proposición 3.2

$$\begin{aligned} a_h(y) &= \int_0^1 K_{m+1}(x, y) \phi_h(x) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x, z) K_m(z, y) dz \right) \phi_h(x) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 K_m(x, z) K(z, y) dz \right) \phi_h(x) dx \\ &= \int_0^1 K(z, y) \left(\int_0^1 K_m(x, z) \phi_h(x) dx \right) dz \\ &= \int_0^1 K(z, y) \lambda_h^{-m} \phi_h(z) dz \\ &= \lambda_h^{-(m+1)} \phi_h(y). \end{aligned}$$

En conclusión, por el teorema de Hilbert-Schmidt, la serie (4.13) es convergente absolutamente y uniformemente en casi todo si el núcleo $K(x, y)$ es de $L^2([0, 1] \times [0, 1])$ y convergente uniforme si el núcleo $K(x, y)$ es de L^2_* . ■

Nota 7. Además hemos probado que el autovalor correspondiente a la autofunción de K_m es λ_h^m .

Vamos hacer uso del teorema de Hilbert-Schmidt para encontrar una solución explícita de la ecuación de Fredholm de segunda especie no homogénea con núcleo simétrico

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi(y) dy = f(x),$$

donde λ no es un autovalor.

Sabemos que por el teorema de Hilbert-Schmidt (en su escritura como Teorema 4.26), la función $\phi(x) - f(x)$ se puede representar por una serie convergente absolutamente y

uniformemente en casi todo, es decir,

$$\phi(x) - f(x) = \sum_{h=1}^{\infty} c_h \phi_h(x),$$

donde

$$c_h = \int_0^1 [\phi(x) - f(x)] \phi_h(x) dx = \xi_h - a_h$$

con

$$\xi_h = \int_0^1 \phi(x) \phi_h(x) dx, \quad a_h = \int_0^1 f(x) \phi_h(x) dx.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} c_h &= \int_0^1 [\phi(x) - f(x)] \phi_h(x) dx \\ &= \lambda \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x, y) \phi(y) dy \right) \phi_h(x) dx \\ &= \lambda \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x, y) \phi_h(x) dx \right) \phi(y) dy \\ &= \lambda \int_0^1 \frac{1}{\lambda_h} \phi_h(y) \phi(y) dy \\ &= \lambda \frac{\xi_h}{\lambda_h} \end{aligned}$$

Por tanto, ya que $\lambda \neq \lambda_h$, tenemos que

$$\xi_h = \frac{\lambda_h}{\lambda_h - \lambda}, \quad c_h = \frac{\lambda}{\lambda_h - \lambda} a_h,$$

y obtenemos la solución a nuestra ecuación en términos de una serie convergente absolutamente y uniformemente en casi todo

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{\lambda_h - \lambda} \phi_h(x) \quad (4.14)$$

o, equivalentemente,

$$\phi(x) = f(x) - \lambda \int_0^1 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\phi_h(x) \phi_h(y)}{\lambda_h - \lambda} f(y) dy. \quad (4.15)$$

Observamos que el núcleo resolvente $H(x, y; \lambda)$ viene dado por

$$H(x, y; \lambda) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\phi_h(x)\phi_h(y)}{\lambda_h - \lambda}, \quad (4.16)$$

si la serie converge uniformemente en casi todo el intervalo $(0, 1)$, ya que en ese caso podemos intercambiar la serie y la integral.

Otra forma de obtener la expresión del núcleo resolvente $H(x, y; \lambda)$ es a partir de la ecuación (3.16)

$$H(x, y; \lambda) + K(x, y) = \lambda \int_0^1 K(x, z)H(z, y; \lambda) dz$$

Aplicando el teorema de Hilbert-Schmidt, obtenemos que

$$H(x, y; \lambda) = -K(x, y) + \lambda \sum_{h=1}^{\infty} a_h(y; \lambda)\phi_h(x)$$

siendo la serie convergente absolutamente y uniformemente en casi todo y donde

$$a_h(y; \lambda) = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x, z)H(z, y; \lambda) dz \right) \phi_h(x) dx$$

Por otro lado, al verificarse que

$$K(x, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} \phi_j(x)\phi_j(z),$$

entonces

$$\int_0^1 K(x, z)H(z, y; \lambda) dz = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} \int_0^1 \phi_j(x)\phi_j(z)H(z, y; \lambda) dz,$$

como sabemos que $H(z, y; \lambda)$ es un elemento de L^2 , entonces por el Teorema 4.20

$$H(z, y; \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(y; \lambda)\phi_i(z)$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 K(x, z)H(z, y; \lambda) dz &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{\lambda_j} \phi_j(x) \phi_j(z) \alpha_i(y; \lambda) \phi_i(z) dz \\
 &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{\alpha_i(y; \lambda)}{\lambda_j} \phi_j(x) \int_0^1 \phi_j(z) \phi_i(z) dz \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j(y; \lambda)}{\lambda_j} \phi_j(x)
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$a_h(y; \lambda) = \int_0^1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j(y; \lambda)}{\lambda_j} \phi_j(x) \phi_h(x) dx$$

Como se tiene que verificar la ecuación (4.4), entonces los coeficientes de Fourier deben verificar que

$$\alpha_j(y; \lambda) = \frac{-1}{\lambda_j} \phi_j + \frac{\lambda}{\lambda_j} \alpha_j(y; \lambda)$$

luego,

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right) \alpha_j(y; \lambda) = \frac{-1}{\lambda_j} \phi_j(x)$$

y por tanto deben verificar que

$$\alpha_j(y; \lambda) = \frac{-1}{\lambda_j - \lambda} \phi_j(x)$$

En conclusión,

$$\begin{aligned}
 H(z, y; \lambda) &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(y; \lambda) \phi_i(z) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_j} \phi_i(x) \phi_i(z)
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

es una serie convergente absolutamente y uniformemente en casi todo.

Esta expresión nos muestra que los puntos singulares del núcleo resolvente $H(x, y; \lambda)$ correspondiente a un núcleo simétrico $K(x, y)$ de $L^2([0, 1] \times [0, 1])$ son los polos simples.

5. Tipos de núcleos

En este capítulo vamos a estudiar algunos de los diferentes núcleos que se pueden considerar en una ecuación integral.

En primer lugar, respecto a los núcleos de Volterra, estudiaremos propiedades específicas así como la solución de las ecuaciones de Volterra. En segundo lugar, en relación a los núcleos simétricos, ortonormalizaremos la base de $L^2(0, 1)$ formada por las autofunciones; base que sabemos que existe gracias al Teorema 4.20. Y por último, tratando los núcleos no simétricos, transformaremos la ecuación con núcleo simétrico con el fin de probar la existencia y unicidad de solución y caracterizarla.

5.1. Núcleos de Volterra

En el Capítulo 2 se vió que las ecuaciones de Volterra

1. *Primera especie:*

$$\int_0^x K(x, y) \phi(y) dy = f(x) \quad (5.1)$$

2. *Segunda especie:*

$$\phi(x) = \lambda \int_0^x K(x, y) \phi(y) dy + f(x) \quad (5.2)$$

son un caso particular de las ecuaciones de Fredholm. Por tanto, todo lo que hemos visto en las secciones anteriores son válidas para las ecuaciones de Volterra. Nos centraremos ahora en las propiedades específicas de estos núcleos.

5.1.1. Solución de la ecuación de Volterra de segunda especie

Como ya hemos visto, usando que $K(x, y) = 0$ si $y > x$, la solución por el **método de aproximaciones sucesivas** viene dado por

$$\phi(x) = f(x) - \lambda \int_0^x H(x, y; \lambda) f(y) dy$$

La principal diferencia con respecto a la ecuación de segunda especie de Fredholm es la convergencia del núcleo resolvente y por tanto dónde es válida dicha solución.

Teorema 5.1. *La ecuación integral de Volterra de segunda especie*

$$\phi(x) - \lambda \int_0^x K(x, y) \phi(y) dy = f(x)$$

donde el núcleo $K(x, y)$ y la función $f(x)$ pertenecen a la clase L^2 , tiene una única solución* en la clase L^2 . Esta solución viene dada por la fórmula

$$\phi(x) = f(x) - \lambda \int_0^x H(x, y; \lambda) f(y) dy \quad (5.3)$$

donde el núcleo resolvente $H(x, y; \lambda)$ viene dado por la serie de núcleos iterados

$$- H(x, y; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, y) \quad (5.4)$$

La serie (5.4) converge uniformemente en casi todo. Además, el núcleo resolvente satisface las ecuaciones integrales

$$K(x, y) + H(x, y; \lambda) = \lambda \int_y^x K(x, z) H(z, y; \lambda) dz = \lambda \int_y^x H(x, z; \lambda) K(z, y) dz. \quad (5.5)$$

Para demostrar este resultado usaremos las mismas estrategias que en la demostración del Teorema 3.4, pero precisando más las acotaciones. Recordemos que $A(x)$ y $B(x)$ fueron definidos en (3.13) como

$$A(x) = \left[\int_0^1 K^2(x, y) dy \right]^{\frac{1}{2}}, B(y) = \left[\int_0^1 K^2(x, y) dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

* ignorando las soluciones nulas en casi todo

Demostración: Al ser la demostración bastante larga la vamos a dividir en 4 etapas: en la primera etapa vamos a probar la convergencia de la serie (5.4), en la segunda probaremos las ecuaciones (5.5), en la tercera etapa veremos, con la ayuda de las ecuaciones (5.5), que la solución dada por (5.3), satisface la ecuación, y en la última etapa probaremos la unicidad de solución. Por tanto:

• **Primera etapa:** veamos la convergencia de la serie (5.4) del núcleo resolvente $H(x, y; \lambda)$, para ello vamos a encontrar primero una acotación de la norma de los núcleos iterados,

$$\begin{aligned} K_2^2(x, y) &\stackrel{def}{=} \left[\int_y^x K(x, z)K(z, y) dz \right]^2 \stackrel{C-S}{\leq} \left(\int_y^x K^2(x, z) dz \right) \left(\int_y^x K^2(z, y) dz \right) \\ &\leq \left(\int_0^1 K^2(x, z) dz \right) \left(\int_0^1 K^2(z, y) dz \right) = A^2(x)B^2(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_3^2(x, y) &\stackrel{def}{=} \left[\int_y^x K(x, z)K_2(z, y) dz \right]^2 \stackrel{C-S}{\leq} \left(\int_y^x K^2(x, z) dz \right) \left(\int_y^x K_2^2(z, y) dz \right) \\ &\leq \left(\int_0^1 K^2(x, z) dz \right) \left(\int_y^x A^2(z)B^2(y) dz \right) = A^2(x)B^2(y) \int_y^x A^2(z) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_4^2(x, y) &\stackrel{def}{=} \left[\int_y^x K(x, z)K_3(z, y) dz \right]^2 \stackrel{C-S}{\leq} \left(\int_y^x K^2(x, z) dz \right) \left(\int_y^x K_3^2(z, y) dz \right) \\ &\leq \left(\int_0^1 K^2(x, z) dz \right) \left(\int_y^x \left(A^2(z)B^2(y) \int_y^z A^2(s) ds \right) dz \right) \\ &= A^2(x)B^2(y) \int_y^x \left(A^2(z) \int_y^z A^2(s) ds \right) dz \end{aligned}$$

De forma general,

$$K_{n+2}^2(x, y) \leq A^2(x)B^2(y)F_n(x, y) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.6)$$

donde

$$F_1(x, y) = \int_y^x A^2(z) dz, \quad F_2(x, y) = \int_y^x A^2(z)F_1(z, y) dz.$$

Más generalmente,

$$F_n(x, y) = \int_y^x A^2(z)F_{n-1}(z, y) dz \quad n = 2, 3, \dots \quad (5.7)$$

Veamos ahora por inducción que

$$F_n(x, y) = \frac{1}{n!} F_1^n(x, y) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.8)$$

▪ Caso $n=1$:

$$F_1(x, y) = \int_y^x A^2(z) dz = \frac{1}{1!} F_1^1(x, y),$$

▪ Supuesto cierto para $n-1$, veamos para n : Suponiendo que y y z son independientes

$$\begin{aligned} F_n(x, y) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_y^x A^2(z) F_{n-1}(z, y) dz \stackrel{\text{hip}}{=} \int_y^x A^2(z) \frac{1}{(n-1)!} F_1^{n-1}(z, y) dz \\ &= \int_y^x \frac{\partial F_1(z, y)}{\partial z} \frac{1}{(n-1)!} F_1^{n-1}(z, y) dz = \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{n} \int_y^x \frac{\partial}{\partial z} F_1^n(z, y) dz \\ &= \left. \frac{1}{n!} F_1^n(z, y) \right]_{z=y}^{z=x} = \frac{1}{n!} [F_1^n(x, y) - F_1^n(y, y)] = \frac{1}{n!} F_1^n(x, y), \end{aligned}$$

lo que implica que el resultado es cierto.

Por otro lado,

$$0 \leq F_1(x, y) = \int_x^y A^2(z) dz \leq \int_0^1 A^2(z) dz = \int_0^1 \left(\int_0^1 K^2(z, y) dy \right) dz \leq N^2$$

Por tanto,

$$0 \leq F_n(x, y) = \frac{1}{n!} F_1^n(x, y) \leq \frac{1}{n!} (N^2)^n = \frac{N^{2n}}{n!}$$

y sustituyendo en (5.6) obtenemos

$$|K_{n+2}^2(x, y)| \leq |A^2(x) B^2(y) F_n(x, y)| \leq A^2(x) B^2(x) \frac{N^{2n}}{n!}$$

lo que implica que

$$|K_{n+2}(x, y)| \leq A(x) B(x) \frac{N^n}{\sqrt{n!}} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Esto nos muestra que la serie infinita del núcleo resolvente $H(x, y; \lambda)$, despreciando el primer término, tiene la siguiente mayorante

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} K_{n+2}(x, y) \leq |\lambda| \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n A(x) B(y) \frac{N^n}{\sqrt{n!}} \\ &= |\lambda| A(x) B(y) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\lambda| N)^n}{\sqrt{n!}} = M(x, y) \end{aligned}$$

donde $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\lambda| N)^n}{\sqrt{n!}}$ es siempre convergente pues la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}$ tiene radio de convergencia infinito (es decir, para cualquier valor de z , la serie converge).

En efecto,

$$\frac{1}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{(n+1)!})^{-1}}{(\sqrt{n!})^{-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{(n+1)!}{n!}} \right)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$$

$$\Rightarrow R = \infty$$

Esto no es suficiente para asegurar la convergencia en todos los puntos, pues las funciones $A(x)$ y $B(y)$ podrían no estar definidas en un conjunto de medida nula ya que son funciones de L^2 , pero gracias al **Teorema de Beppo-Levi** (véase Teorema A.15) podemos integrar la serie término a término ya que $M(x, y)$ es una función de L^2 . Por tanto, sólo podemos asegurar la convergencia en casi todo.

En este caso, diremos que la serie (5.4) converge uniformemente en casi todo.

• **Segunda etapa:** veamos ahora que el núcleo resolvente satisface las ecuaciones (5.5). Para ello usaremos la propiedad asociativa (demostrada en el caso general de las ecuaciones de Fredholm). En el caso de los núcleos de Volterra, los núcleos iterados (3.8) se escriben de la forma:

$$K_{n+1}(x, y) = \int_y^x K_r(x, z) K_s(z, y) dz \quad r = 1, \dots, n; s = n - r + 1 \quad (5.9)$$

$$\lambda \int_y^x K(x, z) H(z, y; \lambda) dz = \lambda \int_y^x K(x, z) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(z, y) dz = - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} K_{n+2}(x, y)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 K(x, y) + H(x, y; \lambda) &= K(x, y) - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, y) \\
 &= K(x, y) - K(x, y) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, y) \\
 &= - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} K_{n+2}(x, y)
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$K(x, y) + H(x, y; \lambda) = \lambda \int_y^x K(x, z)H(z, y; \lambda) dz$$

y usando (5.9), se deduce que

$$\begin{aligned}
 \lambda \int_y^x K(x, z)H(z, y; \lambda) dz &= - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \int_y^x K(x, z)K_{n+1}(z, y) dz \\
 &= - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \int_y^x K_{n+1}(x, z)K(z, y) dz \\
 &= \lambda \int_y^x H(x, z; \lambda)K(z, y) dz
 \end{aligned}$$

Nota 8. Los intercambios de orden de integración que aparecen en la demostración de (5.9) están permitidos bajo nuestra hipótesis ($K_n, H \in L^2$) por el **Teorema de Fubini** (véase Teorema A.10)

• **Tercera etapa:** con ayuda de las ecuaciones (5.5), veamos que la función $\tilde{\phi}$ dada por (5.3) es solución de (2.4). En efecto,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\phi}(x) - \lambda \int_0^x K(x, y)\tilde{\phi}(y) dy &= f(x) - \lambda \int_0^x H(x, y; \lambda)f(y) dy - \lambda \int_0^x K(x, y)\tilde{\phi}(y) dy \\
 &= f(x) - \lambda \int_0^x H(x, y; \lambda)f(y) dy - \lambda \int_0^x K(x, y) \left[f(y) - \lambda \int_0^y H(y, z; \lambda)f(z) dz \right] dy \\
 &= f(x) - \lambda \int_0^x H(x, y; \lambda)f(y) dy - \lambda \int_0^x K(x, y)f(y) dy \\
 &+ \lambda^2 \int_0^x K(x, y) \left(\int_0^y H(y, z; \lambda)f(z) dz \right) dy
 \end{aligned}$$

Por otro lado, usando el teorema de Fubini (ver Teorema A.10)

$$\begin{aligned} \int_0^x K(x, y) \left(\int_0^y H(y, z; \lambda) f(z) dz \right) dy &= \int_0^x f(z) \left(\int_z^x H(y, z; \lambda) K(x, y) dy \right) dz \\ &\stackrel{y \leftrightarrow z}{=} \int_0^x f(y) \left(\int_y^x H(z, y; \lambda) K(x, z) dz \right) dy \end{aligned}$$

Por tanto, usando (5.5)

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(x) - \lambda \int_0^x K(x, y) \tilde{\phi}(y) dy &= f(x) \\ -\lambda \int_0^x f(y) \left[H(x, y; \lambda) + K(x, y) - \lambda \int_y^x K(x, z) H(z, y; \lambda) dz \right] dy &= f(x) \end{aligned}$$

En conclusión, $\tilde{\phi}$ es solución de (2.4).

• **Cuarta etapa:** Por último veamos la **unicidad** de solución de (2.4), es decir, podemos demostrar que, salvo funciones que nulas en casi todo, la función $\tilde{\phi}(x)$ es la única solución de clase L_2 de la ecuación dada (2.4), o atendiendo a los resultados de la Sección 4.3, la solución de la *ecuación integral de Volterra homogénea de segunda especie*

$$\phi(x) - \lambda \int_0^x K(x, y) \phi(y) dy = 0 \quad (5.10)$$

en $L^2(0, 1)$ es necesariamente la función nula en casi todo.

Para ello, denominando ν a la norma de $\phi(x)$ en $L^2(0, h)$, es decir,

$$\nu^2 = \int_0^h \phi^2(x) dx,$$

obtenemos, gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwartz (ver Teorema A.6)

$$\begin{aligned} \phi^2(x) &= \lambda^2 \left[\int_0^x K(x, y) \phi(y) dy \right]^2 \\ &\leq |\lambda|^2 \left[\int_0^x |K(x, y)| |\phi(y)| dy \right]^2 \\ &\stackrel{C-S}{\leq} |\lambda|^2 \left(\int_0^x K^2(x, y) dy \right) \left(\int_0^x \phi^2(y) dy \right) \\ &\leq |\lambda|^2 A^2(x) \nu^2 \end{aligned}$$

Sucesivamente

$$\begin{aligned}
\phi^2(x) &\leq |\lambda|^2 \left(\int_0^x K^2(x, y) dy \right) \left(\int_0^x |\lambda|^2 A^2(y) \left(\int_0^y \phi^2(z) dz \right) dy \right) \\
&= |\lambda|^4 A^2(x) \nu^2 \int_0^x A^2(y) dy \\
&\leq \dots \leq |\lambda|^{2n+2} \nu^2 A^2(x) \int_0^x A^2(y_1) \int_0^{y_1} A^2(y_2) \dots \int_0^{y_n} A^2(y_n) dy_n \dots dy_1
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando (5.7) y (5.8)

$$F_n(x, 0) = \frac{1}{n!} F_1^n(x, 0) = \frac{1}{n!} \left(\int_0^x A^2(z) dz \right)^n \leq \frac{N^{2n}}{n!}$$

Por tanto, podemos escribir

$$\phi^2(x) \leq |\lambda|^{2n+2} \nu^2 A^2(x) \frac{N^{2n}}{n!} \leq |\lambda|^2 \nu^2 A^2(x) \frac{(|\lambda|^2 N^2)^n}{n!} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Sabemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\lambda|^2 N^2)^n}{n!}$ es convergente y converge a $e^{|\lambda|^2 N^2}$, luego por

la **condición necesaria de convergencia** (véase A.14) $a_n = \frac{(|\lambda|^2 N^2)^n}{n!}$ tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$ y por tanto, $\phi(x) = 0$ para los valores de x donde $A(x)$ sea finito. ■

Entre otras cosas, la unicidad del teorema nos muestra que las ecuaciones (5.5) son características para el núcleo resolvente. Si hay una función $\tilde{H}(x, y; \lambda)$ de $L^2(0, 1)$ tal que satisface (5.5), entonces necesariamente es el núcleo resolvente correspondiente al núcleo $K(x, y)$.

5.2. Núcleos simétricos

Definición 5.2. Se dice que un núcleo es **simétrico** si

$$K(x, y) = K(y, x)$$

En la Sección 4.3 vimos que en el caso de tener un núcleo simétrico, se puede obtener una base de $L^2(0, 1)$ formada por las autofunciones de la ecuación homogénea.

Nuestra finalidad en este apartado es conseguir que dos autofunciones de un núcleo simétrico $\phi_h(x), \phi_k(x)$ correspondiente al mismo autovalor λ_h satisfagan la condición de ortogonalidad

$$(\phi_h, \phi_k) \equiv \int_a^b \phi_h(x)\phi_k(x) dx = 0 \quad (h \neq k) \quad (5.11)$$

en el intervalo (a, b) ^{**}.

Debido a que los núcleos simétricos tiene asociado un sistema de funciones formado por las autofunciones del operador simétrico, es decir, sistemas de funciones de L^2

$$\{\phi_h\} \equiv \{\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \dots\}$$

y que dichas autofunciones satisfacen (5.11), es apropiado estudiar las ecuaciones integrales con núcleos simétricos ya que en el caso de los núcleos no simétricos no vamos a tener caracterizada la base de $L^2(0, 1)$.

Vamos a suponer que cada función de nuestro sistema ortogonal es una función de L^2 la cual no se anula en casi todo, es decir

$$\|\phi_h\|^2 = \int_a^b \phi_h^2(x) dx > 0. \quad (5.12)$$

Por tanto, podemos suponer no sólo que nuestras funciones sean ortogonales sino además normalizadas, es decir,

$$(\phi_h, \phi_k) = \begin{cases} 0 & (h \neq k) \\ 1 & (h = k) \end{cases}$$

Lema 5.3. *Las funciones del sistema ortogonal $\{\phi_k(x)\}$ son linealmente independientes.*

Demostración: Sea c_1, c_2, \dots, c_n constantes no todas nulas tales que

$$c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \dots + c_n\phi_n(x) = 0$$

^{**}En esta sección vamos a usar el intervalo (a, b) en vez de $(0, 1)$ ya que la mayoría de las demostraciones serán válidas incluso si los intervalos son infinitos, es decir, si $b = \infty$, o $a = \infty$, siempre que todas las integrales sean convergentes.

en casi todo (a, b) , entonces, multiplicando por $\phi_h(x)$ ($h = 1, 2, \dots, n$) e integrando en (a, b)

$$c_h \int_a^b \phi_h^2(x) dx = 0$$

Por tanto, (5.12) implica que $c_h = 0$, es decir, $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. ■

La propiedad de la independencia lineal no es solo necesaria para la ortogonalidad sino además suficiente. Esto se tiene gracias al:

Proposición 5.4 (Proceso de ortogonalización). *Dado un sistema de funciones de $L^2(a, b)$ linealmente independientes*

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots,$$

siempre es posible hallar las constantes h_{rs} tales que las funciones

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(x) &= \psi_1(x), \\ \phi_2(x) &= h_{21}\psi_1(x) + \psi_2(x), \\ \phi_3(x) &= h_{31}\psi_1(x) + h_{32}\psi_2(x) + \psi_3(x), \\ &\dots\dots\dots \\ \phi_n(x) &= h_{n1}\psi_1(x) + h_{n2}\psi_2(x) + \dots + h_{nn-1}\psi_{n-1}(x) + \psi_n(x), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

son ortogonales en el intervalo (a, b) .

Demostración: En primer lugar observamos que el sistema (5.13) puede reescribirse como

$$\left\{ \begin{aligned} \phi_1(x) &= \psi_1(x), \\ \phi_2(x) &= k_{21}\phi_1(x) + \psi_2(x), \\ \phi_3(x) &= k_{31}\phi_1(x) + k_{32}\phi_2(x) + \psi_3(x), \\ &\dots\dots\dots \\ \phi_n(x) &= k_{n1}\phi_1(x) + k_{n2}\phi_2(x) + \dots + k_{nn-1}\phi_{n-1}(x) + \psi_n(x), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

Vamos a demostrar la ortogonalidad de los ϕ_i por inducción:

- Caso base $n=2$: Multiplicamos $\phi_2(x) = k_{21}\phi_1(x) + \psi_2(x)$ por $\phi_1(x)$, entonces

$$0 = (\phi_2, \phi_1) = k_{21}(\phi_1, \phi_1) + (\psi_2, \phi_1)$$

Por tanto,

$$k_{21} = \frac{-(\psi_2, \phi_1)}{(\phi_1, \phi_1)}$$

está bien definido ya que $(\phi_1, \phi_1) \neq 0$.

- Suponemos que para las $n-1$ funciones, los coeficientes k_{rs} ya están determinados, es decir, conocemos k_{rs} para $1 \leq s < r \leq n-1$. Vamos a demostrar que para la n -ésima función los valores k_{ns} ($s = 1, 2, \dots, n-1$) pueden ser calculados.

De las $n-1$ condiciones

$$\begin{aligned} 0 = (\phi_n, \phi_s) &= k_{n1}(\phi_1, \phi_s) + k_{n2}(\phi_2, \phi_s) + \dots + k_{nn-1}(\phi_{n-1}, \phi_s) + (\psi_n, \phi_s) \\ &= k_{ns}(\phi_s, \phi_s) + (\psi_n, \phi_s) \quad (s = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$k_{ns} = -\frac{(\psi_n, \phi_s)}{(\phi_s, \phi_s)}$$

Estos coeficientes están bien definidos ya que $(\phi_s, \phi_s) \neq 0$ porque $(\phi_s, \phi_s) = \|\phi_s\|^2 = 0 \Leftrightarrow \phi_s = 0$ y ϕ_s es una combinación lineal de funciones linealmente independientes

$$\phi_s(x) = \sum_{j=1}^{s-1} h_{sj}\psi_j + \psi_s$$

Por tanto, $\phi_s = 0 \Leftrightarrow$ todos los coeficientes son nulos, pero esto no puede darse. ■

5.3. Simetrización de núcleos no simétricos

Las propiedades de las ecuaciones integrales de Fredholm con núcleo simétrico nos motiva a reducir, si es posible, una ecuación integral dada a una con núcleo simétrico.

Dada la ecuación integral

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\phi(y) dy = f(x) \quad (5.14)$$

multiplicando por $K(x, z)$ e integrando con respecto a x , obtenemos

$$\int_0^1 K(x, z)\phi(x) dx - \lambda \int_0^1 K(x, z) \left(\int_0^1 K(x, y)\phi(y) dy \right) dx = \int_0^1 K(x, z)f(x) dx$$

Cambiando en la primera y tercera integral $z \rightarrow x$ y $x \rightarrow y$ y en la segunda integral $x \leftrightarrow z$, podemos reescribir la expresión como

$$\int_0^1 [K(y, x) - \lambda K_L(x, y)]\phi(y) dy = \int_0^1 K(y, x)f(y) dy, \quad (5.15)$$

donde

$$K_L(x, y) = \int_0^1 K(z, x)K(z, y) dz$$

se denomina **núcleo iterado izquierdo** de $K(x, y)$ y claramente es un núcleo simétrico.

Multiplicando (5.15) por $-\lambda$ y sumando (5.14), obtenemos la nueva ecuación integral de Fredholm

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 [K(x, y) + K(y, x) - \lambda K_L(x, y)]\phi(y) dy = f(x) - \lambda \int_0^1 K(y, x)f(y) dy \quad (5.16)$$

cuyo núcleo es simétrico, pero no independiente de λ .

Si tomamos ahora la ecuación

$$\psi(x) - \lambda \int_0^1 K(y, x)\psi(y) dy = g(x) \quad (5.17)$$

multiplicando por $K(z, x)$ e integrando con respecto a x , nos queda

$$\int_0^1 K(z, x)\psi(x) dx - \lambda \int_0^1 K(z, x) \left(\int_0^1 K(y, x)\psi(y) dy \right) dx = \int_0^1 K(z, x)g(x) dx$$

Cambiando en la primera y tercera integral $z \rightarrow x$ y $x \rightarrow y$ y en la segunda integral $x \leftrightarrow z$, podemos reescribir la expresión como

$$\int_0^1 [K(x, y) - \lambda K_R(x, y)]\psi(y) dy = \int_0^1 K(x, y)g(y) dy, \quad (5.18)$$

donde

$$K_R(x, y) = \int_0^1 K(x, z)K(y, z) dz$$

se denomina **núcleo iterado derecho** de $K(x, y)$.

Multiplicando (5.18) por $-\lambda$ y sumando (5.17), obtenemos la nueva ecuación integral de Fredholm con núcleo simétrico

$$\psi(x) - \lambda \int_0^1 [K(x, y) + K(y, x) - \lambda K_R(x, y)]\psi(y) dy = g(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)g(y) dy \quad (5.19)$$

La importancia de las anteriores transformaciones no radica en las ecuaciones (5.16) y (5.19) sino en la introducción de los dos núcleos simétricos K_L y K_R asociados a K . Considerando estos núcleos nos permite extender muchos resultados de la teoría de las ecuaciones integrales con núcleos simétricos a ecuaciones generales.

Definición 5.5. Se dice que $K(x, y)$ es un **núcleo positivo** si todos los autovalores son positivos, es decir,

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

Nótese que ambos núcleos K_L y K_R son núcleos positivos ya que si

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 K_L(x, y)\phi(y) dy = 0$$

Multiplicando por $\phi(x)$ e integrando en x

$$\int_0^1 \phi(x)\phi(x) dx - \lambda \int_0^1 \left(\int_0^1 K_L(x, y)\phi(y) dy \right) \phi(x) dx = 0$$

Luego,

$$\|\phi\|^2 = \lambda \iint_{[0,1] \times [0,1]} K_L(x, y)\phi(x)\phi(y) dx dy$$

Por otro lado, siendo $I = [0, 1] \times [0, 1]$

$$\begin{aligned}
 \iint_I K_L(x, y)\phi(x)\phi(y) \, dx dy &= \iint_I \left(\int_0^1 K(z, x)K(z, y) \, dz \right) \phi(x)\phi(y) \, dx dy \\
 &= \int_0^1 \left(\iint_I K(z, x)K(z, y)\phi(x)\phi(y) \, dx dy \right) dz \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 K(z, x)\phi(x) \, dx \right) \left(\int_0^1 K(z, y)\phi(y) \, dy \right) dz \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 K(z, x)\phi(x) \right)^2 dz \geq 0
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\underbrace{\|\phi\|^2}_{>0} = \lambda \underbrace{\iint_I K_L(x, y)\phi(x)\phi(y) \, dx dy}_{\geq 0}$$

lo que implica $\lambda > 0$ y por tanto, $K_L(x, y)$ es un núcleo positivo.

Análogamente, se prueba que K_R es un núcleo positivo. ■

Además, se puede probar que los núcleos K_L y K_R tienen los mismos autovalores positivos con los mismos exponentes. Es decir,

Proposición 5.6. *Sea $\nu(x)$ una autofunción de $K_L(x, y)$ correspondiente al autovalor λ^2 y sea*

$$\mu(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y)\nu(y) \, dy \tag{5.20}$$

entonces, esta nueva función $\mu(x)$ será una autofunción de $K_R(x, y)$ correspondiente al mismo autovalor λ^2 . Recíprocamente, si $\mu(x)$ es una autofunción de $K_R(x, y)$ correspondiente al autovalor λ^2 , entonces la función

$$\nu(x) = \lambda \int_0^1 K(y, x)\mu(y) \, dy \tag{5.21}$$

es una autofunción de $K_L(x, y)$ para el mismo autovalor λ^2 .

Demostración: Supongamos que $\nu(x)$ es una autofunción de $K_L(x, y)$, entonces

$$\begin{aligned}
 \nu(x) &= \lambda^2 \int_0^1 K(x, y)\nu(y) dy \\
 &= \lambda^2 \int_0^1 \left(\int_0^1 K(z, x)K(z, y) dz \right) \nu(y) dy \\
 &= \lambda^2 \int_0^1 K(z, x) \left(\int_0^1 K(z, y)\nu(y) dy \right) dz \\
 &= \lambda^2 \int_0^1 K(z, x) \frac{\mu(z)}{\lambda} dz \\
 &= \lambda \int_0^1 K(z, x)\mu(z) dz
 \end{aligned}$$

Si sustituimos esta expresión en (5.20),

$$\begin{aligned}
 \mu(x) &= \lambda^2 \int_0^1 \left(K(x, y) \int_0^1 K(z, y)\mu(z) dz \right) dy \\
 &= \lambda^2 \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x, y)K(z, y) dy \right) \mu(z) dz \\
 &= \lambda^2 \int_0^1 K_R(z, y)\mu(z) dz
 \end{aligned}$$

Por tanto, $\mu(x)$ es autofunción de $K_R(x, z)$ asociado a λ^2 .

El recíproco se puede probar de manera análoga. ■

Suponemos ahora que el espectro común de los núcleos K_L y K_R es

$$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \dots$$

con

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

y que las autofunciones ortonormalizadas correspondiente a K_R son

$$\mu_1(x), \mu_2(x), \mu_3(x), \dots \tag{5.22}$$

mientras que

$$\nu_1(x), \nu_2(x), \nu_3(x), \dots \tag{5.23}$$

son las autofunciones correspondientes a K_L calculados mediante (5.21). Entonces, $\{\nu_i\}$ forman un sistema ortonormal ya que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \nu_h(x)\nu_k(x) dx &= \lambda_h\lambda_k \int_0^1 \left(\int_0^1 K(y,x)\mu_h(y) dy \right) \left(\int_0^1 K(z,x)\mu_k(z) dz \right) dx \\ &= \lambda_h\lambda_k \int_0^1 \int_0^1 K_R(y,z)\mu_h(y)\mu_k(z) dy dz \\ &= \frac{\lambda_h}{\lambda_k} \int_0^1 \mu_h(y)\mu_k(y) dy = \begin{cases} 0 & (h \neq k), \\ 1 & (h = k). \end{cases} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

La principal aplicación de los sistemas ortonormales (5.22) y (5.23) es la extensión del teorema de Hilbert-Schmidt (ver Teorema 4.26) a núcleos no simétricos:

Teorema 5.7. *Si el núcleo $K(x,y)$, considerado como función de y , es de L^2 , entonces una función $f(x)$ expresada como*

$$f(x) = \int_0^1 K(x,y)g(y) dy \quad (5.24)$$

donde $g(x)$ es una función arbitraria de L^2 , puede ser representada mediante una serie convergente uniformemente en casi todo y absolutamente en función de (5.22), es decir,

$$f(x) = \sum_{h=1}^{\infty} a_h \mu_h(x) \text{ con } a_h = \int_0^1 f(x)\mu_h(x) dx = \frac{1}{\lambda_h} \int_0^1 g(x)\nu_h(x) dx. \quad (5.25)$$

De manera similar, si el núcleo es de L^2 como función de x , entonces una función $f(x)$ expresada de la forma

$$f(x) = \int_0^1 K(y,x)g(y) dy, \quad (5.26)$$

puede ser también representada mediante una serie convergente uniformemente en casi todo y absolutamente en función de (5.23), es decir,

$$f(x) = \sum_{h=1}^{\infty} b_h \nu_h(x) \text{ con } b_h = \int_0^1 f(x)\nu_h(x) dx = \frac{1}{\lambda_h} \int_0^1 g(x)\mu_h(x) dx. \quad (5.27)$$

Si el núcleo no sólo pertenece a la clase L^2 sino también a L^{2*} , entonces la convergencia de ambas series no sólo es uniforme en casi todo sino uniforme.

Ejemplo 5.1. Consideremos la ecuación

$$\phi(x) = \lambda \int_0^1 e^{x-y} \phi(y) dy + f(x) \quad (5.28)$$

cuyo núcleo $K(x, y) = e^{x-y}$ no es simétrico. Por tanto aplicando el proceso de simetrización visto anteriormente obtenemos que

$$K_L(x, y) = \int_0^1 e^{z-x} e^{z-y} dz = e^{-(x+y)} \int_0^1 e^{2z} dz = e^{-(x+y)} \frac{1}{2}(e^2 - 1)$$

luego nos queda la ecuación

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 \tilde{K}(x, y) \phi(y) dy = f(x) - \lambda \int_0^1 e^{x-y} f(y) dy$$

donde $\tilde{K}(x, y)$ viene dada por

$$\begin{aligned} \tilde{K}(x, y) &= K(x, y) + K(y, x) - \lambda K_L(x, y) \\ &= e^{x-y} + e^{y-x} - \frac{\lambda}{2}(e^2 - 1)e^{-(x+y)} \end{aligned}$$

Por tanto, dicha ecuación aunque sea más complicada de resolver se encuentra en el marco de los núcleos simétricos, por lo que sabemos que si λ no es un autovalor de la ecuación homogénea correspondiente, entonces dicha ecuación posee solución única. En cambio, si λ es un autovalor, posee solución si $f(x) - \lambda \int_0^1 e^{x-y} f(y) dy$ verifica las condiciones de ortogonalidad. Además sabemos que dicha solución se puede expresar mediante una combinación lineal de las autofunciones correspondientes a la ecuación homogénea.

5.4. Algunas generalizaciones

La teoría de las ecuaciones integrales de Fredholm permite muchas generalizaciones sin variar las características principales.

Primero, se puede generalizar la teoría considerando un sistema de ecuaciones integrales de Fredholm. Dicho sistema se puede reducir a una única ecuación. Por ejemplo,

un sistema de dos ecuaciones integrales de Fredholm

$$\begin{cases} \phi_1(x) - \lambda \int_0^1 K_{1,1}(x, y)\phi_1(y) dy - \lambda \int_0^1 K_{1,2}(x, y)\phi_2(y) dy = f_1(x) \\ \phi_2(x) - \lambda \int_0^1 K_{2,1}(x, y)\phi_1(y) dy - \lambda \int_0^1 K_{2,2}(x, y)\phi_2(y) dy = f_2(x) \end{cases} \quad (5.29)$$

en el intervalo $(0, 1)$ puede reducirse a la siguiente ecuación en el intervalo $(0, 2)$:

$$\Phi(x) - \lambda \int_0^2 K(x, y)\Phi(y) dy = F(x) \quad (5.30)$$

donde

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi_1(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ \phi_2(x-1) & 1 < x \leq 2 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} f_1(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ f_2(x-1) & 1 < x \leq 2 \end{cases},$$

y

$$K(x, y) = \begin{cases} K_{1,1}(x, y) & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ K_{1,2}(x, y-1) & 0 \leq x < 1, 1 < y \leq 2 \\ K_{2,1}(x-1, y) & 1 < x \leq 2, 0 \leq y < 1 \\ K_{2,2}(x-1, y-1) & 1 < x \leq 2, 1 < y \leq 2 \end{cases}.$$

Una segunda generalización es que, aunque hasta ahora hayamos trabajado con un intervalo finito, los resultados se pueden extender a **algunas** ecuaciones integrales con un intervalo infinito. Por ejemplo, a ecuaciones del tipo

$$\phi(x) - \lambda \int_0^\infty K(x, y)\phi(y) dy = f(x), \quad (5.31)$$

o incluso del tipo

$$\phi(x) - \lambda \int_{-\infty}^\infty K(x, y)\phi(y) dy = f(x), \quad (5.32)$$

o las correspondientes ecuaciones de primer tipo.

Para realizar esto, consideramos una transformación de x e y que nos lleva del intervalo infinito a un intervalo finito, por ejemplo, en el caso de la ecuación (5.31) sería

$$x = \frac{\xi}{1-\xi}, \quad y = \frac{\eta}{1-\eta}.$$

El núcleo de la nueva ecuación integral puede presentar algunas singularidades, pero si, a pesar de esto, pertenece a la clase L^2 entonces se conservan las propiedades principales.

Además, siempre podemos sustituir la ecuación integral de Fredholm de segunda especie

$$\phi(z) - \lambda \int_0^1 K(z, y)\phi(y) dy = f(z) \quad (5.33)$$

por una ecuación similar cuyo núcleo es el núcleo iterado $K_n(x, y)$. En efecto, si multiplicamos por $K(x, z)$ e integramos en $[0, 1]$ la ecuación (5.33):

$$\begin{aligned} \int_0^1 K(x, z)\phi(z) dz - \lambda \int_0^1 K(x, z) \left(\int_0^1 K(z, y)\phi(y) dy \right) dz &= \int_0^1 K(x, z)f(z) dz \\ \frac{1}{\lambda}[\phi(x) - f(x)] - \lambda \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x, z)K(z, y) dz \right) \phi(y) dy &= \int_0^1 K(x, y)f(y) dy \\ \frac{1}{\lambda}[\phi(x) - f(x)] - \lambda \int_0^1 K_2(x, y)\phi(y) dy &= \int_0^1 K(x, y)f(y) dy \end{aligned}$$

luego llegamos a que,

$$\phi(x) - \lambda^2 \int_0^1 K_2(x, y)\phi(y) dy = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y)f(y) dy \equiv f_2(x)$$

y sucesivamente, obtenemos

$$\phi(x) - \lambda^n \int_0^1 K_n(x, y)\phi(y) dy = f_{n-1}(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y)f_{n-1}(y) dy \equiv f_n(x)$$

Este método se puede usar para eliminar las singularidades del núcleo, incluso singularidades que hace que $K(x, y)$ no sea de $L^2(0, 1)$, ya que los núcleos iterados son 'más suaves' que el núcleo original. Por ejemplo, si el núcleo dado es del tipo

$$K(x, y) = \frac{H(x, y)}{|x - y|^\alpha} \quad 0 < \alpha < 1, H \text{ acotado}$$

se puede ver que $K_n(x, y)$ es del mismo tipo, pero el número α se cambia por el número $1 - n(1 - \alpha)$, el cual puede llegar a ser negativo si n es suficientemente grande, y por tanto K_n es acotado.

La idea es que si

$$K(x, y) = \frac{H(x, y)}{|x - y|^\alpha}, \quad \tilde{K}(x, y) = \frac{\tilde{H}(x, y)}{|x - y|^{\tilde{\alpha}}}$$

y supongamos, sin pérdida de generalidad que $x < y$, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 K(x, z)\tilde{K}(x, y) dz &= \int_0^x \frac{H(x, z)\tilde{H}(z, y)}{(x - z)^\alpha(y - z)^{\tilde{\alpha}}} dz \\ &+ \int_x^y \frac{H(x, z)\tilde{H}(z, y)}{(x - z)^\alpha(y - z)^{\tilde{\alpha}}} dz + \int_y^1 \frac{H(x, z)\tilde{H}(z, y)}{(x - z)^\alpha(y - z)^{\tilde{\alpha}}} dz \end{aligned}$$

y la tres integrales de la derecha realizando los cambios de variables $z = x - (y - x)t$, $z = x + (y - x)t$, $z = y + (y - x)t$, respectivamente, son funciones de la forma

$$\frac{\bar{H}(x, y)}{|x - y|^{\alpha + \tilde{\alpha} - 1}} \quad (\bar{H} \text{ acotado}).$$

Otro hecho importante es que las propiedades fundamentales de las ecuaciones de Fredholm son independientes del número de dimensiones del espacio de las variables x e y , y por lo tanto la teoría se puede extender a ecuaciones integrales de la forma

$$\phi(P) - \lambda \int_{E_n} K(P, Q)\phi(Q) dV_Q = f(P) \quad (5.34)$$

donde $P \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $Q \equiv (y_1, y_2, \dots, y_n)$ son dos puntos n -dimensionales fijos de E_n , cuyo elemento de volumen designamos por dV_Q .

En particular, el teorema de Fredholm 4.21 y el teorema de la alternativa 4.22 siguen siendo válidos para la ecuación (5.34), siempre que el núcleo $K(P, Q)$ sea de clase L^2 , es decir, siempre que ambas funciones

$$\left[\int_{E_m} K^2(P, Q) dV_Q \right]^{\frac{1}{2}} = A(P), \quad \left[\int_{E_m} K^2(P, Q) dV_P \right]^{\frac{1}{2}} = B(Q),$$

exista en casi todo E_n y sus cuadrados sean integrables

$$\|K\|^2 = \int_{E_n} A^2(P) dV_P = \int_{E_n} B^2(Q) dV_Q \leq N^2$$

donde N es una constante positiva.

6. Algunos comentarios sobre las ecuaciones de primera especie

En este capítulo vamos a tratar las ecuaciones de primera especie. Dichas ecuaciones presentan dificultades adicionales con respecto a las de segunda especie que señalaremos a continuación. En algunos casos, por ejemplo las ecuaciones de Volterra de primera especie se pueden transformar en una ecuación de segunda especie. Por otra parte, utilizaremos, en el caso de las ecuaciones de Fredholm de primera especie con núcleo simétrico, el resultado donde la base de L^2 está formada por las autofunciones para así obtener una solución. Para todo ello nos apoyaremos en el libro [12].

6.1. Dificultad en las ecuaciones de primera especie

Veamos que el problema de resolver las ecuaciones integrales de Fredholm (2.1) y (2.2) se puede considerar como una generalización del problema de resolución de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\sum_{s=1}^n a_{rs}x_s = b_r, \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

Si $K(x, y)$ y $f(x)$ son funciones escalonadas, es decir,

$$\begin{aligned} K(x, y) &= k_{rs} \chi\left(\frac{r-1}{n}, \frac{r}{n}\right](x) \chi\left(\frac{s-1}{n}, \frac{s}{n}\right](y) \\ f(x) &= f_r \chi\left(\frac{r-1}{n}, \frac{r}{n}\right](x) \end{aligned} \quad r, s = 1, \dots, n,$$

entonces (2.1) y (2.2) se transforman en

$$\begin{aligned}\phi(x) &= f_r \chi\left(\frac{r-1}{n}, \frac{r}{n}\right](x) + \lambda \sum_{k=1}^n k_{rs} \chi\left(\frac{r-1}{n}, \frac{r}{n}\right](x) \int_{\frac{s-1}{n}}^{\frac{s}{n}} \phi(y) dy \\ f_r \chi\left(\frac{r-1}{n}, \frac{r}{n}\right](x) &= \sum_{k=1}^n k_{rs} \chi\left(\frac{r-1}{n}, \frac{r}{n}\right](x) \int_{\frac{s-1}{n}}^{\frac{s}{n}} \phi(y) dy\end{aligned}$$

Es decir, si $\frac{r-1}{n} < x \leq \frac{r}{n}$

$$\phi(x) = f_r + \lambda \sum_{k=1}^n k_{rs} \int_{\frac{s-1}{n}}^{\frac{s}{n}} \phi(y) dy \quad (6.1)$$

$$f_r = \sum_{k=1}^n k_{rs} \int_{\frac{s-1}{n}}^{\frac{s}{n}} \phi(y) dy \quad (6.2)$$

De (6.1) deducimos que si $\phi(x)$ existe, entonces, debe ser una función escalonada, es decir $\phi(x) = \phi_r \chi_{(\frac{r-1}{n}, \frac{r}{n}]}(x)$, luego podemos expresar (2.2) como

$$\phi_r - \frac{\lambda}{n} \sum_{s=1}^n k_{rs} \phi_s = f_r \quad r = 1, \dots, n. \quad (6.3)$$

Por tanto, si el determinante de la matriz de coeficientes del sistema, cuyos elementos son

$$\delta_{rs} - \frac{\lambda}{n} k_{rs} \text{ con } \delta_{rs} = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq s \\ 1 & \text{si } r = s \end{cases}$$

es no nulo, entonces (6.3), y en consecuencia (6.1) posee una única solución.

El caso de (6.2) es diferente pues no podemos deducir que $\phi(x)$ sea una función escalonada necesariamente. Todo lo que podemos decir es que si fijamos

$$n \int_{\frac{s-1}{n}}^{\frac{s}{n}} \phi(y) dy = x_s \quad (6.4)$$

entonces (6.2) sería

$$f_r = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n k_{rs} x_s \quad r = 1, \dots, n \Leftrightarrow \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Ahora, si el determinante de la matriz de coeficientes del sistema es no nula, entonces (6.5) posee solución única, lo que conduce a que (6.2) posea infinitas soluciones ya que los valores x_r que sean los valores medios de ϕ en los intervalos $\left(0, \frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \dots$, están determinados de forma única.

Esto nos muestra la dificultad que podemos encontrar al resolver ecuaciones integrales de primera especie.

Desde otro punto de vista diferente, una ecuación integral puede ser considerada como el caso límite de un sistema del tipo (6.1) ó (6.2).

6.2. Ecuaciones de Volterra de primera especie

Definición 6.1. Se llama *ecuación de Volterra de 1ª especie* a

$$\int_0^x K(x, y) \phi(y) dy = f(x) \quad (6.6)$$

Si en una ecuación de primera especie

$$\int_0^x K(x, y) \phi(y) dy = f(x) \quad 0 \leq x \leq h$$

la diagonal $K(x, x)$ no se anula en el intervalo $(0, h)$ y las derivadas

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x), \quad \frac{\partial K}{\partial x} \equiv K'_x(x, y), \quad \frac{\partial K}{\partial y} \equiv K'_y(x, y)$$

existen y son continuas, la ecuación puede reducirse a una de segunda especie mediante dos formas:

- La primera forma sería derivar la ecuación respecto de x

$$K(x, x)\phi(x) + \int_0^x \frac{\partial K(x, y)}{\partial x} \phi(y) dy = f'(x) \quad (6.7)$$

Luego dividiendo por $K(x, x)$

$$\phi(x) + \int_0^x \frac{K'_x(x, y)}{K(x, x)} \phi(y) dy = \frac{f'(x)}{K(x, x)}$$

- La segunda forma es utilizando integración por partes

Tomando $\Phi(x) = \int_0^x \phi(y) dy$

$$\begin{aligned} \int_0^x K(x, y)\phi(y) dy &= K(x, y)\Phi(y)|_{y=0}^{y=x} - \int_0^x \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \Phi(y) dy \\ &= K(x, x)\Phi(x) - \int_0^x K'_y(x, y)\Phi(y) dy = f(x) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Dividiendo por $K(x, x)$

$$\Phi(x) - \int_0^x \frac{K'_y(x, y)}{K(x, x)} \Phi(y) dy = \frac{f(x)}{K(x, x)}$$

Para esta segunda forma parece ser que no es necesario imponer que $f(x)$ sea derivable. Sin embargo, la función $\phi(x)$ será calculada finalmente derivando $\Phi(x)$ que vendrá dada por la fórmula

$$\Phi(x) = \frac{f(x)}{K(x, x)} - \int_0^x \tilde{H}(x, y; 1) \frac{f(y)}{K(y, y)} dy$$

donde $\tilde{H}(x, y; 1)$ es el núcleo resolvente correspondiente a $\frac{K'_y(x, y)}{K(x, x)}$. Por realizar esto, $f(x)$ debe ser derivable.

La condición más importante es la relativa a la diagonal $K(x, x)$ ya que si $K(x, x)$ se anula en algunos puntos de $(0, h)$, por ejemplo, $x = 0$, las ecuaciones (6.7) y (6.8) tienen un carácter peculiar, esencialmente diferente de las ecuaciones de segunda especie. Estas ecuaciones son denominadas por *Picard*, **ecuaciones de tercera especie**.

Desde otro punto de vista, la anulación de $K(x, x)$ es una complicación similar a la anulación del primer coeficiente de una EDO lineal. Este caso singular fue estudiado por *Lalesco* (véase [8]).

6.3. Ecuaciones de Fredholm de primera especie con núcleo simétrico

Queremos resolver la ecuación de Fredholm de primera especie

$$\int_0^1 K(x, y)\phi(y) dy = f(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (6.9)$$

cuyo núcleo $K(x, y)$ es simétrico.

Por el **Teorema 4.20**, sabemos que existe una base ortonormal de autofunciones $\{\phi_h\}$ en L^2 , por tanto, cualquier función de L^2 se puede expresar como combinación lineal de los elementos de dicha base.

Por tanto, buscamos la solución $\phi(x)$ de (6.9) como desarrollo en autofunciones ϕ_h

$$\phi(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \alpha_h \phi_h(x)$$

con $\alpha_h = \int_0^1 \phi(x)\phi_h(x) dx$.

Sustituyendo esta expresión en (6.9)

$$\int_0^1 K(x, y)\phi(y) dy = \sum_{h=1}^{\infty} \int_0^1 K(x, y)\alpha_h \phi_h(y) dy = \sum_{h=1}^{\infty} \alpha_h \int_0^1 K(x, y)\phi_h(y) dy$$

Al ser ϕ_h una autofunción, verifica que

$$\phi_h(x) - \lambda_h \int_0^1 K(x, y)\phi_h(y) dy = 0 \quad (6.10)$$

donde λ_h es el autovalor asociado a la autofunción ϕ_h .

Por tanto, usando (6.10)

$$\sum_{h=1}^{\infty} \alpha_h \int_0^1 K(x, y)\phi_h(y) dy = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\alpha_h}{\lambda_h} \phi_h(x) \quad (6.11)$$

Por otro lado, suponiendo que $f(x)$ es una función de L^2 , entonces

$$f(x) = \sum_{h=1}^{\infty} a_h \phi_h(x) \quad (6.12)$$

con $a_h = \int_0^1 f(x) \phi_h(x) dx$.

Luego, de (6.11) y (6.12) concluimos que

$$a_h = \frac{\alpha_h}{\lambda_h} \Rightarrow \boxed{\alpha_h = \lambda_h a_h}$$

Hay, por tanto, dos posibilidades,

1. La serie infinita

$$\|\phi\|_{L^2}^2 = \sum_{h=1}^{\infty} a_h^2 \lambda_h^2 \quad (6.13)$$

diverge y por tanto la ecuación (6.9) no tiene solución en L^2 .

2. La serie (6.13) converge y hay al menos una solución $\phi_0(x)$ de L^2 , la cual puede ser calculada como

$$\phi_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^n a_h \lambda_h \phi_h(x)$$

Si el sistema de autofunciones $\{\phi_h(x)\}$ es cerrado, es decir, si el núcleo $K(x, y)$ es cerrado, entonces la función $\phi_0(x)$ es la única solución de (6.9). Sin embargo, si $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots$ son funciones no nulas ortogonales a todas las funciones $\{\phi_h(x)\}$, entonces la función $\phi_0(x) + C_1 \Phi_1(x) + C_2 \Phi_2(x) + \dots$ donde los C_i son constantes arbitrarias, es también solución de (6.9).

Ejemplo 6.1. Sea la ecuación de primera especie

$$\int_0^1 T(x, y) \phi(y) = f(x), \quad (6.14)$$

donde $T(x, y)$ es el núcleo triangular

$$T(x, y) = \begin{cases} (1-x)y & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ x(1-y) & 0 \leq x \leq y \leq 1 \end{cases}$$

La correspondiente ecuación homogénea sería

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 T(x, y)\phi(y) dy = 0$$

o lo que es lo mismo

$$\phi(x) - \lambda \int_0^x (1-x)y\phi(y) dy - \lambda \int_x^1 x(1-y)\phi(y) dy = 0$$

Luego, derivando con respecto a x obtenemos

$$\phi'(x) + \lambda \int_0^x y\phi(y) dy - \lambda(1-x)x\phi(x) - \lambda \int_x^1 (1-y)\phi(y) dy + \lambda x(1-x)\phi(x) = 0$$

Volviendo a derivar con respecto a x

$$\phi''(x) + \lambda x\phi(x) + \lambda(1-x)\phi(x) = 0$$

Luego,

$$\phi''(x) + \lambda\phi(x) = 0$$

Al ser $T(0, y) = 0, T(1, y) = 0$, entonces $\phi(0) = 0$ y $\phi(1) = 0$ sustituyendo en la ecuación integral homogénea.

Por tanto, hemos llegado al problema diferencial

$$\begin{cases} \phi''(x) + \lambda\phi(x) = 0 \\ \phi(0) = 0 \\ \phi(1) = 0 \end{cases} \quad (6.15)$$

Vamos a calcular los autovalores y autofunciones de este problema y por tanto de $T(x, y)$

Resolviendo la ecuación, $r^2 + \lambda = 0$, luego $r = \pm\sqrt{-\lambda}$

- si $\lambda = 0$, entonces $r = 0$ doble, luego la solución de (6.15) viene dada por

$$\phi(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

Al ser

$$\begin{aligned}\phi(0) = 0 &\Rightarrow C_1 = 0 \\ \phi(1) = 0 &\Rightarrow C_2 e = 0 \Rightarrow C_2 = 0\end{aligned}$$

- si $\lambda < 0$, la solución de (6.15) viene dada por

$$\phi(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

Al ser

$$\begin{aligned}\phi(0) = 0 &\Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \\ \phi(1) = 0 &\Rightarrow C_1 e^{\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0\end{aligned}$$

Como el determinante de la matriz de coeficientes es no nula, la única solución de ese sistema es $C_1 = C_2 = 0$.

- si $\lambda > 0$, entonces $r = \pm\sqrt{\lambda}i$, luego la solución de (6.15) viene dada por

$$\phi(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Al ser

$$\begin{aligned}\phi(0) = 0 &\Rightarrow C_1 = 0 \\ \phi(1) = 0 &\Rightarrow C_2 \sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \stackrel{C_2 \neq 0}{\Rightarrow} \sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Por tanto los autovalores vienen dados por $\lambda_k = k^2\pi^2$ y las autofunciones por $\phi(x) = C_2 \sin(k\pi x)$.

En conclusión, la ecuación (6.14) tiene una única solución de clase $L^2(0,1)$, si y sólo si, la serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} a_h^2 \lambda_h^2 = \pi^2 \sum_{h=1}^{\infty} (h^2 a_h)^2$$

donde

$$a_h = C_2 \int_0^1 f(x) \sin(h\pi x) dx$$

converge.

7. Aplicaciones

En este capítulo, trataremos de ver algunas aplicaciones que presentan las ecuaciones integrales.

En primer lugar, veremos que el problema de Sturm-Liouville es equivalente a una ecuación integral cuyo núcleo es simétrico, por lo que podremos caracterizar la solución de tal ecuación. En segundo lugar, estudiaremos diferentes ejemplos físicos que se modelan mediante una ecuación integral. Por último, analizaremos dos formas diferentes de reducir una edo de segundo orden a una ecuación integral o un sistema de ecuaciones integrales. Para todo ello nos apoyaremos fundamentalmente en los libros [10] y [12].

7.1. Problemas de contorno que conducen a ecuaciones de Fredholm: el problema de Sturm-Liouville.

Consideramos la ecuación de tipo canónico Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}[p(x)\phi'] + q(x)\phi = f(x) \Leftrightarrow L(\phi) = f(x) \quad (7.1)$$

donde suponemos que $p > 0$ en $[0, 1]$ y $p \in C^1([0, 1])$, $q, f \in C^0([0, 1])$ y añadimos además las condiciones de contorno

$$\phi(0) = 0 \quad \phi(1) = 0 \quad (7.2)$$

Gracias al teorema de Peano (A.1), este problema posee solución de clase $C^2([0, 1])$.

Pasando a sistema la ecuación $p'(x)\phi' + p(x)\phi'' + q(x)\phi = f(x)$

$$\begin{cases} \phi_1 = \phi \\ \phi_2 = \phi' = \phi_1' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_1' = \phi_2 \\ \phi_2' = -\frac{1}{p(x)}[p'\phi_2 + q\phi_1] + \frac{f(x)}{p(x)} \end{cases}$$

Entonces, expresándolo en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{q}{p} & -\frac{p'}{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f}{p} \end{bmatrix}$$

La solución de la ecuación no homogénea es la solución de la homogénea más una solución particular.

Por tanto, supongamos conocidas $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ soluciones de la ecuación homogénea tales que $\varphi_1(0) = 0$ y $\varphi_2(1) = 0$ y cuyo wronskiano $W(x) \neq 0$, entonces una solución particular sería

$$\phi_p(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x)$$

donde $c_1(x)$ y $c_2(x)$ son soluciones del sistema

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f}{p} \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \varphi_1 c_1' + \varphi_2 c_2' = 0 \\ \varphi_1' c_1 + \varphi_2' c_2 = \frac{f}{p} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema mediante la *regla de Cramer*

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \varphi_2 \\ \frac{f}{p} & \varphi_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix}} = \frac{-\varphi_2(x)f(x)}{W(x)p(x)}, \quad c_2' = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1 & 0 \\ \varphi_1' & \frac{f}{p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix}} = \frac{\varphi_1(x)f(x)}{W(x)p(x)}$$

Por lo que integrando, obtenemos

$$c_1(x) = -\int_1^x \frac{\varphi_2(s)f(s)}{W(s)p(s)} ds, \text{ ya que } \varphi_2(1) = 0 \Rightarrow c_1(x) = \int_x^1 \frac{\varphi_2(s)f(s)}{W(s)p(s)} ds$$

y

$$c_2(x) = \int_0^x \frac{\varphi_1(s)f(s)}{W(s)p(s)} ds, \text{ ya que } \varphi_1(0) = 0$$

Por tanto, la solución particular que buscábamos es

$$\phi_p(x) = \left(\int_x^1 \frac{\varphi_2(s)f(s)}{W(s)p(s)} ds \right) \varphi_1(x) + \left(\int_0^x \frac{\varphi_1(s)f(s)}{W(s)p(s)} ds \right) \varphi_2(x)$$

Veamos ahora que dicha solución particular verifica las condiciones de contorno

$$\phi_p(0) = c_1(0)\varphi_1(0) + c_2(0)\varphi_2(0) = 0$$

pues $\varphi_1(0) = 0$ por hipótesis y $c_2(0) = 0$ por definición.

$$\phi_p(1) = c_1(1)\varphi_1(1) + c_2(1)\varphi_2(1) = 0$$

pues $\varphi_2(1) = 0$ por hipótesis y $c_1(1) = 0$ por definición.

Llegamos por tanto, a que la solución de (7.1) viene dada de la forma

$$\phi(x) = K_1\varphi_1(x) + K_2\varphi_2(x) + \phi_p(x)$$

Imponiendo las condiciones de contorno deducimos que

$$\phi(0) = K_1\varphi_1(0) + K_2\varphi_2(0) + \phi_p(0) = 0 \Leftrightarrow K_2\varphi_2(0) = 0 \Rightarrow K_2 = 0$$

$$\phi(1) = K_1\varphi_1(1) + K_2\varphi_2(1) + \phi_p(1) = 0 \Leftrightarrow K_1\varphi_1(1) = 0 \Rightarrow K_1 = 0$$

En conclusión, la solución de (7.1) viene dada por

$$\phi(x) = \left(\int_x^1 \frac{\varphi_2(s)f(s)}{W(s)p(s)} ds \right) \varphi_1(x) + \left(\int_0^x \frac{\varphi_1(s)f(s)}{W(s)p(s)} ds \right) \varphi_2(x) \quad (7.3)$$

Es decir,

$$\phi(x) = \int_0^1 G(x,s)f(s) ds \text{ donde} \quad (7.4)$$

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{\varphi_1(s)\varphi_2(x)}{W(s)p(s)} & 0 \leq s \leq x \\ \frac{\varphi_2(s)\varphi_1(x)}{W(s)p(s)} & x \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (7.5)$$

$G(x, s)$ se conoce como **función de Green**.

Veamos algunas *propiedades* de la función de Green:

1. La función de Green considerada como función de x verifica las condiciones de contorno (7.2) y la ecuación homogénea de (7.1). *En efecto*,

$$G(0, s) = \frac{\varphi_1(0)\varphi_2(0)}{p(0)W(0)} = 0 \text{ ya que } \varphi_1(0) = 0 \text{ por hipótesis.}$$

$$G(1, s) = \frac{\varphi_1(1)\varphi_2(1)}{p(1)W(1)} = 0 \text{ ya que } \varphi_2(1) = 0 \text{ por hipótesis.}$$

Luego $G(x, \cdot)$ verifica las condiciones de contorno.

Sea $y(x) = G(x, s)$

$$q(x)y(x) = \begin{cases} \frac{q(x)\varphi_1(s)\varphi_2(x)}{W(s)p(s)} & 0 \leq s \leq x \\ \frac{q(x)\varphi_2(s)\varphi_1(x)}{W(s)p(s)} & x \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$p(x)y'(x) = \begin{cases} \frac{p(x)\varphi_2'(x)\varphi_1(s)}{W(s)p(s)} & 0 \leq s \leq x \\ \frac{p(x)\varphi_2(s)\varphi_1'(x)}{W(s)p(s)} & x \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'(x)] = \begin{cases} \frac{\varphi_1(s)}{W(s)p(s)}[\varphi_2''(x)p(x) + \varphi_2'(x)p'(x)] & 0 \leq s \leq x \\ \frac{\varphi_2(s)}{W(s)p(s)}[\varphi_1''(x)p(x) + \varphi_1'(x)p'(x)] & x \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'(x)] + q(x)y(x) = \begin{cases} \frac{\varphi_1(s)}{W(s)p(s)} \left[\frac{d}{dx}[\varphi_2'(x)p(x)] + q(x)\varphi_2(x) \right] = 0 & 0 \leq s \leq x \\ \frac{\varphi_2(s)}{W(s)p(s)} \left[\frac{d}{dx}[\varphi_1'(x)p(x)] + q(x)\varphi_1(x) \right] = 0 & x \leq s \leq 1 \end{cases}$$

pues φ_1 y φ_2 son soluciones de la ecuación homogénea (7.1) por hipótesis.

Pero

$$y'(s) = \partial_x G(s, s) = \begin{cases} \frac{\varphi_2'(s)\varphi_1(s)}{W(s)p(s)} & 0 \leq s \\ \frac{\varphi_1'(s)\varphi_2(s)}{W(s)p(s)} & s \leq 1 \end{cases}$$

no es continua en general.

Por tanto,

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'(x)] + q(x)y(x) = 0 \text{ en } [0, 1] \text{ excepto en } x=s.$$

2. La función de Green es *simétrica* en (x, s) . En efecto, sean φ_1 y φ_2 dos soluciones de la ecuación homogénea de (7.1), luego se tiene que

$$p\varphi_1'' + p'\varphi_1' + q\varphi_1 = 0 \quad (7.6)$$

$$p\varphi_2'' + p'\varphi_2' + q\varphi_2 = 0 \quad (7.7)$$

Multiplicando (7.6) por $-\varphi_2$ y (7.7) por φ_1 y sumando ambas ecuaciones, obtenemos

$$p[\varphi_2''\varphi_1 - \varphi_1''\varphi_2] + p'[\varphi_2'\varphi_1 - \varphi_1'\varphi_2] + q[\varphi_2\varphi_1 - \varphi_1\varphi_2] = 0$$

Teniendo en cuenta que $W = -\varphi_1'\varphi_2$, $W' = \varphi_1'\varphi_2' + \varphi_1\varphi_2'' - \varphi_1''\varphi_2$ llegamos a,

$$pW' + p'W = 0$$

Resolviendo la EDO,

$$W' = \frac{p'}{p}W$$

integrando,

$$\begin{aligned} \int \frac{W'}{W} &= \int \frac{-p'}{p} \Leftrightarrow \log(W) = -\log(p) + C \\ &\Leftrightarrow W = \frac{1}{p}e^C \Leftrightarrow pW = e^C = cte \end{aligned}$$

Por tanto,

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{\varphi_2(x)\varphi_1(s)}{e^C} & 0 \leq s \leq x \\ \frac{\varphi_1(x)\varphi_2(s)}{e^C} & 0 \leq s \leq x \end{cases} = G(s, x)$$

Consideramos ahora el problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[p(x)\phi'] + (q(x) - \lambda r(x))\phi = f(x) \text{ donde } r(x) > 0, \lambda \in \mathbb{R} \\ \phi(0) = 0 \\ \phi(1) = 0 \end{cases} \quad (7.8)$$

Si φ_1 , φ_2 , W y $G(x, s)$ siguen significando lo mismo que antes, entonces la solución de (7.8) tiene que verificar la solución de antes sustituyendo $f(x)$ por $f(x) + \lambda r\phi$:

$$\phi(x) = \lambda \int_0^1 r(s)G(x, s)\phi(s) ds + \int_0^1 G(x, s)f(s) ds \quad (7.9)$$

Observamos que la relación de antes es una **ecuación integral de Fredholm de segunda especie** pues la segunda integral es conocida.

Veamos ahora el recíproco, es decir, toda solución de la ecuación integral (7.9) de $C^1([a, b])$ verifica el problema (7.8).

■ *Condición de contorno:*

$$\phi(0) = \lambda \int_0^1 r(s)G(0, s)\phi(s) ds + \int_0^1 G(0, s)f(s) ds = 0 \text{ pues } G(0, s) = 0$$

$$\phi(1) = \lambda \int_0^1 r(s)G(1, s)\phi(s) ds + \int_0^1 G(1, s)f(s) ds = 0 \text{ pues } G(1, s) = 0$$

■ *Ecuación:*

Denotando $L(y) = \frac{d}{dx}(py') + qy$, se tiene que:

$$y_1L(y_2) - y_2L(y_1) = y_1 \left[\frac{d}{dx}(py_2') + qy_2 \right] - y_2 \left[\frac{d}{dx}(py_1') + qy_1 \right] =$$

$$= \frac{d}{dx} [p(y_1 y_2' - y_2 y_1')] = \frac{d}{dx} [pW(y_1, y_2)]$$

Aplicado a $y_1(x) = G(x, s)$, considerando G como una función de x , y $y_2(x) = \phi(x)$ solución de (7.9) de $C^1(0, 1)$, obtenemos

$$GL(\phi) - \underbrace{\phi L(G)}_0 = \frac{d}{dx} [p(G\phi' - \phi G')]$$

de donde

$$\int_0^s GL[\phi] dx = p(G\phi' - \phi G') \Big|_0^{s^-} \quad \text{y} \quad \int_s^1 GL[\phi] dx = p(G\phi' - \phi G') \Big|_{s^+}^1$$

Sumando,

$$\begin{aligned} & p(s^-)[G(s^-, s)\phi'(s^-) - \phi(s^-)G'(s^-, s)] - p(0)\underbrace{[G(0, s)\phi'(0) - \phi(0)G'(0, s)]}_0 \\ & + p(1)\underbrace{[G(1, s)\phi'(1) - \phi(1)G'(1, s)]}_0 - p(s^+)[G(s^+, s)\phi'(s^+) - \phi(s^+)G'(s^+, s)] \\ & = \underbrace{p(s^-)G(s^-, s)\phi'(s^-) - p(s^+)G(s^+, s)\phi'(s^+)}_{=0 \text{ pues } p, G, \phi' \text{ son continuas}} - p(s^-)\phi(s^-)G'(s^-, s) + \\ & p(s^+)\phi(s^+)G'(s^+, s) \quad \underbrace{=}_{p, \phi \text{ continuas}} \quad p(s)\phi(s)[G'(s^+, s) - G'(s^-, s)] \end{aligned} \quad (7.10)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} G'(s^+, s) - G'(s^-, s) &= \frac{\varphi_2'(s^+)\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\varphi_1'(s^-)}{W(s)p(s)} \\ &\underbrace{=}_{\varphi_1', \varphi_2' \text{ son continuas}} \frac{W(s)}{W(s)p(s)} = \frac{1}{p(s)} \end{aligned}$$

luego,

$$(7.10) = p(s)\phi(s)\frac{1}{p(s)} = \phi(s)$$

En conclusión,

$$\int_0^1 G(x, s)L[\phi] dx = \phi(s) \quad (7.11)$$

Por (7.9), permutando x y s tenemos

$$\int_0^1 G(s, x)[f(x) + \lambda r(x)\phi(x)] dx = \phi(s) \quad (7.12)$$

Como $G(x, s)$ es simétrica, restando (7.11) y (7.12)

$$\int_0^1 G(x, s)[L[\phi] - f(x) - \lambda r(x)\phi(x)] dx = 0$$

Por tanto,

$$G(x, s)[L[\phi] - f(x) - \lambda r(x)\phi(x)] = 0 \text{ en casi todo } (0, 1)$$

Entonces,

$$L[\phi] - f(x) - \lambda r(x)\phi(x) = 0 \text{ en casi todo } (0, 1)$$

pues $G(x, s)$ es no nula en $(0, 1)$. Luego llegamos a que

$$\frac{d}{dx}[p(x)\phi'(x)] + q(x)\phi(x) = \lambda r(x)\phi(x) + f(x)$$

Observar que el núcleo de (7.9) es *asimétrico*, pues $K(x, s) = r(s)G(x, s) \neq K(s, x)$

Pero, si multiplicamos (7.9) por $\sqrt{r(x)}$, llamando $Y(x) = \sqrt{r(x)}\phi(x)$

$$Y(x) = \lambda \int_0^1 r(s)\sqrt{r(x)}G(x, s)\phi(s)ds + \int_0^1 \sqrt{r(x)}G(x, s)f(s)ds$$

\Leftrightarrow

$$Y(x) = \lambda \int_0^1 \sqrt{r(s)}\sqrt{r(x)}G(x, s)\sqrt{r(s)}\phi(s)ds + \int_0^1 \sqrt{r(x)}G(x, s)f(s)ds$$

\Leftrightarrow

$$Y(x) = \lambda \int_0^1 \sqrt{r(s)}\sqrt{r(x)}G(x, s)Y(s)ds + \underbrace{\int_0^1 \sqrt{r(x)}G(x, s)f(s)ds}_{g(x)}$$

Ahora el núcleo $K(x, s) = \sqrt{r(s)}\sqrt{r(x)}G(x, s)$ es *simétrico*.

Vemos que si la ecuación diferencial es homogénea ($f(x) = 0$), entonces la ecuación integral también será homogénea ($g(x) = 0$).

En conclusión, partiendo del problema de contorno (7.1) hemos llegado a la resolución de una ecuación integral del tipo Fredholm de segunda especie con núcleo simétrico.

Nota 9. El problema de Sturm-Liouville también se puede tratar como un problema de autovalores y autofunciones donde el operador es diferencial: $A\phi = -[p(x)\phi']' + q(x)\phi$. A dicho operador se le denomina **operador autoadjunto de Sturm-Liouville de segundo orden**.

Por tanto, el problema a resolver sería

$$\begin{cases} A\phi = \lambda\phi \\ \phi(0) = \phi(1) = 0 \end{cases}$$

Atendiendo a los resultados del capítulo 4, no sería más que un operador autoadjunto, lineal y continuo. Por tanto se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 7.1. Sea $p \in C^1([0, 1])$ con $p \geq \alpha > 0$ en $(0, 1)$ y $q \in C([0, 1])$. Entonces existe una sucesión $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ de números reales y una base Hilbertiana $(e_n)_{n \geq 1}$ de $L^2(0, 1)$ tales que $e_n \in C^2([0, 1])$ y

$$\begin{cases} -(pe'_n)' + qe_n = \lambda_n e_n \text{ en } (0, 1) \\ e_n(0) = e_n(1) = 0. \end{cases} \quad (7.13)$$

Además $\lambda_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Los valores (λ_n) serán los autovalores del operador diferencial $A\phi$ con la condición Dirichlet y (e_n) las autofunciones asociadas.

7.2. Ejemplos físicos conducentes a ecuaciones integrales

1. Cuerda tensa con carga continua

Consideremos una cuerda horizontal de longitud l , de peso despreciable, tensa entre dos puntos A y B fijados, de manera que no quede sensiblemente modificada por la aparición de un peso P en un punto M a distancia ξ de A , lo que implica, naturalmente, una modificación muy leve de la forma de la cuerda.

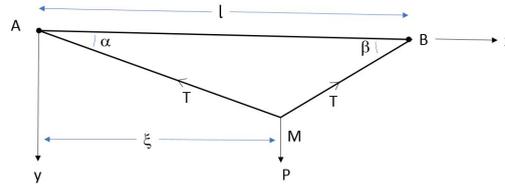


FIGURA 7.1: Gráfico de cuerda tensa con carga continua

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(\alpha) &= \frac{y}{\xi} \rightarrow y = \xi \operatorname{tg}(\alpha) \\
 \operatorname{tg}(\beta) &= \frac{y}{l - \xi} \rightarrow y = (l - \xi) \operatorname{tg}(\beta) \quad \Rightarrow \\
 \frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{l - \xi} &= \frac{\operatorname{tg}(\beta)}{\xi} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\beta)}{l - \xi + \xi} = \frac{T(\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\beta))}{Tl}
 \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se ha usado:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} &\leftrightarrow \begin{cases} c(b+d) = d(a+c) \\ ad = bc \end{cases} \Rightarrow cb + cd = da + dc
 \end{aligned} \right\}$$

Al haber una leve modificación $\operatorname{tg}(\alpha) \approx \operatorname{sen}(\alpha)$ ya que $\cos(\alpha) \approx 1$, luego

$$\frac{T(\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\beta))}{Tl} \approx \frac{T(\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta))}{Tl} = \frac{P}{Tl}$$

por ser $T \operatorname{sen}(\alpha)$, $T \operatorname{sen}(\beta)$ las componentes verticales de la tensión MA, MB.

Por tanto, tenemos

$$y(x) = x \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{P}{Tl} x(l - \xi) \quad \text{a la izquierda de } P$$

$$y(x) = (l - x) \operatorname{tg}(\beta) = \frac{P}{Tl} \xi(l - x) \quad \text{a la derecha de } P$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{P}{T} K(x, \xi) \quad \text{donde } K(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x(l - \xi)}{l} & \text{para } x \leq \xi \\ \frac{\xi(l - x)}{l} & \text{para } x \geq \xi \end{cases} \quad (7.14)$$

Si ahora suponemos una carga continua distribuida a lo largo de la cuerda, según la ley de densidad, en cada elemento $d\xi$ hay una carga elemental $p(\xi)d\xi$, aplicando

el principio de superposición obtenemos que la forma de la cuerda viene dada por

$$y(x) = \frac{1}{T} \int_0^l p(\xi)K(x, \xi) d\xi \quad (7.15)$$

Si conocemos $p(\xi)$, el cálculo de la forma $y(x)$ vendría dado por el cálculo de la integral. En cambio, si queremos hallar la ley de carga $p(x)$ capaz de producir una determinada deformación, obtenemos una *ecuación integral de primera especie de Fredholm* donde $K(x, \xi)$ va a ser el núcleo triangular de la ecuación (lo denominamos triangular por la forma de la cuerda para una carga).

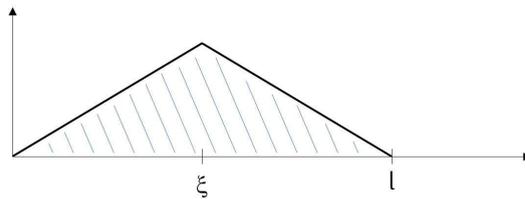


FIGURA 7.2: Núcleo triangular

Vemos que este núcleo es simétrico pero no tiene derivada continua

$$\partial_x K(x, \xi) = \begin{cases} \frac{l - \xi}{l} & x \leq \xi \\ -\frac{\xi}{l} & x \geq \xi \end{cases} \quad \text{en } x = \xi \text{ no coinciden.}$$

2. *Cuerda giratoria*

En este caso tenemos la fuerza centrífuga en $d\xi$, que vale $\rho\omega^2 y d\xi$ donde ρ es la densidad lineal y ω la velocidad angular, y por tanto obtenemos

$$y(x) = \frac{\rho\omega^2}{T} \int_0^l K(x, \xi)y(\xi) d\xi$$

Ecuación integral de segunda especie de Fredholm homogénea cuyo núcleo es simétrico si suponemos que ρ es la densidad uniforme de la cuerda. En cambio, si la densidad fuese variable, tendríamos un núcleo $\bar{K}(x, \xi) = \rho(\xi)K(x, \xi)$ asimétrico.

3. *Cuerda vibrante*

Supongamos ahora que la cuerda realiza ciertas oscilaciones. Sea $y(x, t)$ la posición en el momento t de aquel punto de la cuerda cuya abscisa es x y sea ρ la densidad lineal de la cuerda. Entonces, sobre un elemento de la cuerda actúa una fuerza de inercia igual a $-\rho \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial t^2}$

Sustituyendo en (7.15), obtenemos

$$y(x, t) = \frac{-\rho}{T} \int_0^l \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial t^2} K(x, \xi) d\xi$$

Supongamos que la cuerda realiza oscilaciones armónicas, es decir, buscamos soluciones de la forma $y(x, t) = Y(x)\cos(\omega t + \theta)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= Y(x)[-sen(\omega t + \theta)\omega] \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -Y(x)\omega^2 \cos(\omega t + \theta) \Rightarrow \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial t^2} = -Y(\xi)\omega^2 \cos(\omega t + \theta) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} Y(x)\cos(\omega t + \theta) &= \frac{\rho}{T} \int_0^l Y(\xi)\omega^2 \cos(\omega t + \theta) K(x, \xi) d\xi \\ \Rightarrow Y(x) &= \frac{\rho\omega^2}{T} \int_0^l Y(\xi) K(x, \xi) d\xi \end{aligned}$$

Al ser $\rho, T > 0$, haciendo $\frac{T}{\rho} = a^2$,

$$Y(x) = \frac{\omega^2}{a^2} \int_0^l Y(\xi) K(x, \xi) d\xi \quad (7.16)$$

Veamos que las soluciones de esta ecuación de segunda especie son las mismas que las de la ecuación diferencial de segundo orden de la ecuación de la cuerda vibrante

$$a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (7.17)$$

En efecto, notemos que

$$\frac{\partial y}{\partial x} = Y'(x)\cos(\omega t + \theta) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = Y''(x)\cos(\omega t + \theta)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &\Leftrightarrow a^2 Y''(x) \cos(\omega t + \theta) = -Y(x) \omega^2 \cos(\omega t + \theta) \\ &\Leftrightarrow Y''(x) = \frac{-\omega^2}{a^2} Y(x) \\ &\Leftrightarrow Y''(x) + \frac{\omega^2}{a^2} Y(x) = 0 \end{aligned}$$

Considerando $Y(0) = Y(l) = 0$, obtenemos que:

$$y(0, t) = Y(0) \cos(\omega t + \theta) = 0$$

$$y(l, t) = Y(l) \cos(\omega t + \theta) = 0$$

Por tanto, como lo buscamos para cualquier t , vamos a tomar

$$\begin{cases} Y(0) = 0 \\ Y(l) = 0 \end{cases}$$

En conclusión,

$$\begin{cases} Y'' + \frac{\omega^2}{a^2} Y = 0 \\ Y(0) = 0 \\ Y(l) = 0 \end{cases} \quad (7.18)$$

Veamos que toda solución de (7.18) es solución de (7.16)

Partimos de (7.18),

$Y''(\xi) + \frac{\omega^2}{a^2} Y(\xi) = 0$, multiplicando por $K(x, \xi)$ e integrando entre 0 y l

$$\int_0^l Y''(\xi) K(x, \xi) d\xi + \frac{\omega^2}{a^2} \int_0^l K(x, \xi) Y(\xi) d\xi = 0$$

Formalmente, integrando por partes y teniendo en cuenta (7.14)

$$\begin{aligned} \int_0^l Y''(\xi)K(x, \xi) d\xi &= K(x, \xi)Y'(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=l} - \int_0^l \partial_\xi K(x, \xi)Y'(\xi) d\xi \\ &= \underbrace{K(l, \xi)}_0 Y'(l) - \underbrace{K(0, \xi)}_0 Y'(0) - \int_0^l \partial_\xi K(x, \xi)Y'(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (7.19)$$

Volviendo a integrar por partes

$$\begin{aligned} - \int_0^l \partial_\xi K(x, \xi)Y'(\xi) d\xi &= -\partial_\xi K(x, \xi)Y(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=l} + \int_0^l \partial_{\xi\xi}^2 K(x, \xi)Y(\xi) d\xi \\ &= -\partial_\xi K(x, \xi)\underbrace{Y(l)}_0 + \partial_\xi K(x, \xi)\underbrace{Y(0)}_0 \\ &\quad + \int_0^l \partial_{\xi\xi}^2 K(x, \xi)Y(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (7.20)$$

Usando la teoría de distribuciones, sea $\varphi \in \mathcal{D}(0, l)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \partial_\xi K(x, \xi), \varphi(\xi) \rangle &= - \langle K(x, \xi), \varphi'(\xi) \rangle = - \int_0^l K(x, \xi)\varphi'(\xi) d\xi \\ &= - \int_0^x \frac{\xi(l-x)}{l}\varphi'(\xi) d\xi - \int_x^l \frac{x(l-\xi)}{l}\varphi'(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned} \langle \partial_\xi K(x, \xi), \varphi(\xi) \rangle &= - \frac{\xi(l-x)}{l}\varphi(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=x} + \int_0^x \left(\frac{l-x}{l}\right)\varphi(\xi) d\xi \\ &\quad - \frac{x(l-\xi)}{l}\varphi(\xi)\Big|_{\xi=x}^{\xi=l} + \int_x^l \left(\frac{-x}{l}\right)\varphi(\xi) d\xi \\ &= \frac{-x(l-x)}{l}\varphi(x) + \int_0^x \left(\frac{l-x}{l}\right)\varphi(\xi) d\xi \\ &\quad + \frac{x(l-x)}{l}\varphi(x) + \int_x^l \left(\frac{-x}{l}\right)\varphi(\xi) d\xi \\ &= \int_0^x \frac{(l-x)}{l}\varphi(\xi) d\xi + \int_x^l \left(\frac{-x}{l}\right)\varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\partial_\xi K(x, \xi) = \begin{cases} \frac{l-x}{l} & \xi < x \\ \frac{-x}{l} & x < \xi \end{cases}$$

Del mismo modo, donde x está fijada:

$$\begin{aligned}
\langle \partial_{\xi\xi}^2 K(x, \xi), \varphi(\xi) \rangle &= - \langle \partial_{\xi} K(x, \xi), \varphi'(\xi) \rangle \\
&= - \int_0^l \partial_{\xi} K(x, \xi) \varphi'(\xi) d\xi \\
&= - \int_0^x \partial_{\xi} K(x, \xi) \varphi'(\xi) d\xi - \int_x^l \partial_{\xi} K(x, \xi) \varphi'(\xi) d\xi \\
&= - \int_0^x \left(\frac{l-x}{l} \right) \varphi'(\xi) d\xi + \int_x^l \frac{x}{l} \varphi'(\xi) d\xi \\
&= - \left(\frac{l-x}{l} \right) \int_0^x \varphi'(\xi) d\xi + \frac{x}{l} \int_x^l \varphi'(\xi) d\xi \\
&= - \left(\frac{l-x}{l} \right) [\varphi(x) - \underbrace{\varphi(0)}_0] + \frac{x}{l} [\underbrace{\varphi(l)}_0 - \varphi(x)] \\
&= \varphi(x) \left[-\frac{l-x}{l} - \frac{x}{l} \right] = -\varphi(x)
\end{aligned}$$

Luego, $\langle \partial_{\xi\xi}^2 K(x, \xi), \varphi(\xi) \rangle = -\varphi(x) = - \langle \delta_x, \varphi \rangle \Rightarrow \partial_{\xi\xi}^2 K(x, \xi) = -\delta_x$

De (7.19) y (7.20), llegamos entonces a

$$\begin{aligned}
\int_0^l Y''(\xi) K(x, \xi) d\xi &= \int_0^l \partial_{\xi\xi}^2 K(x, \xi) Y(\xi) d\xi = \int_0^l -\delta_x(\xi) Y(\xi) d\xi \\
&= \langle \delta_x, Y \rangle = -Y(x)
\end{aligned}$$

En conclusión,

$$-Y(x) + \frac{\omega^2}{a^2} \int_0^l K(x, \xi) Y(\xi) d\xi \Rightarrow Y(x) = \frac{\omega^2}{a^2} \int_0^l K(x, \xi) Y(\xi) d\xi$$

Veamos ahora el recíproco, toda solución de (7.16) es solución de (7.18)

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(0, l)$, vamos a calcular $\partial_x K(x, \xi)$

$$\begin{aligned}
\langle \partial_x K(x, \xi), \varphi(x) \rangle &= - \langle K(x, \xi), \varphi'(x) \rangle = - \int_0^l K(x, \xi) \varphi'(x) d\xi \\
&= \int_0^{\xi} \frac{x(l-\xi)}{l} \varphi'(x) dx - \int_{\xi}^l \frac{\xi(l-x)}{l} \varphi'(x) dx
\end{aligned}$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned}
 \langle \partial_x K(x, \xi), \varphi(x) \rangle &= - \frac{x(l-\xi)}{l} \varphi(x) \Big|_{x=0}^{x=\xi} + \int_0^\xi \frac{(l-\xi)}{l} \varphi(x) dx \\
 &\quad - \frac{\xi(l-x)}{l} \varphi(x) \Big|_{x=\xi}^{x=l} + \int_\xi^l \left(-\frac{\xi}{l}\right) \varphi(x) dx \\
 &= \int_0^\xi \frac{l-\xi}{l} \varphi(x) dx + \int_\xi^l \left(-\frac{\xi}{l}\right) \varphi(x) dx
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\partial_x K(x, \xi) = \begin{cases} 1 - \frac{\xi}{l} & \xi > x \\ -\frac{\xi}{l} & x > \xi \end{cases}$$

Ahora calculamos $\partial_{\xi\xi}^2 K(x, \xi)$ usando que φ es una función de soporte compacto en $(0, l)$ y por tanto $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(l) = 0$.

$$\begin{aligned}
 \langle \partial_{\xi\xi}^2 K(x, \xi), \varphi(x) \rangle &= - \langle \partial_x K(x, \xi), \varphi'(x) \rangle \\
 &= - \int_0^\xi \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) \varphi'(x) dx + \int_\xi^l \frac{\xi}{l} \varphi'(x) dx \\
 &= - \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) \varphi(x) \Big|_{x=0}^{x=\xi} + \frac{\xi}{l} \varphi(x) \Big|_{x=\xi}^{x=l} \\
 &= - \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) \varphi(\xi) + \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) \varphi(0) + \frac{\xi}{l} \varphi(l) - \frac{\xi}{l} \varphi(\xi) \\
 &= \left[-1 + \frac{\xi}{l} - \frac{\xi}{l}\right] \varphi(\xi) \\
 &= -\varphi(\xi) = \langle -\delta_{x=\xi}, \varphi \rangle.
 \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\partial_{\xi\xi}^2 K(x, \xi) = -\delta_{x=\xi}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 Y''(x) &= \frac{\omega^2}{a^2} \int_0^l Y(\xi) \partial_{\xi\xi}^2 K(x, \xi) d\xi \\
 &= \frac{\omega^2}{a^2} \int_0^l -\delta_{\xi=x} Y(\xi) d\xi \\
 &= \frac{-\omega^2}{a^2} \langle \delta_{x=\xi}, Y \rangle = \frac{-\omega^2}{a^2} Y(x)
 \end{aligned}$$

por tanto, $Y'' + \frac{\omega^2}{a^2}Y = 0$.

Además, usando la definición del núcleo $K(x, \xi)$ en (7.14), tenemos que:

$$Y(l) = \frac{\omega^2}{a^2} \int_0^l \underbrace{K(l, \xi)}_0 Y(\xi) d\xi = 0$$

$$Y(0) = \frac{\omega^2}{a^2} \int_0^l \underbrace{K(0, \xi)}_0 Y(\xi) d\xi = 0$$

Este ejemplo nos muestra la equivalencia que hay entre los problemas de contorno y las ecuaciones integrales, pero además nos da las soluciones de una ecuación integral de tipo Fredholm homogénea de segunda especie con núcleo triangular.

Si resolvemos

$$Y'' + \lambda Y = 0, \lambda > 0 \quad (7.21)$$

la ecuación característica sería $r^2 + \lambda = 0$, luego $r^2 = -\lambda$. Tomando $\lambda = a^2$ con $a > 0$, la solución fundamental de (7.21) vendría dada por

$$Y(x) = C_1 \cos(ax) + C_2 \sin(ax)$$

Al ser $Y(0) = 0$ y $Y(l) = 0$, se deduce que $C_1 = 0$ y $C_2 \sin(al) = 0$ respectivamente. Como buscamos soluciones no nulas, entonces $\sin(al) = 0$ luego $al = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, y por tanto $a = \frac{k\pi}{l}$ con $k \geq 0$ ya que $a > 0$.

En consecuencia, la sucesión de valores propios sería $\lambda_k = \frac{(k\pi)^2}{l^2}$ y la sucesión de soluciones propias $Y_k(x) = C \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$

En conclusión, las soluciones de (7.21) son la solución nula y, tomando un representante, la sucesión de soluciones propias

$$Y_k(x) = \sqrt{\lambda_k} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) = \frac{k\pi}{l} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

7.3. Ecuaciones integrales de Volterra y ecuaciones diferenciales lineales

La solución de una ecuación diferencial del tipo

$$\frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x) u = F(x) \quad (7.22)$$

con coeficientes continuos, junto con las condiciones iniciales

$$u(0) = c_0, u'(0) = c_1, \dots, u^{(n-1)}(0) = c_{n-1} \quad (7.23)$$

se puede reducir a la solución de una cierta ecuación integral de Volterra de segunda especie

$$\phi(x) + \int_0^x K(x, y) \phi(y) dy = f(x). \quad (7.24)$$

Con el fin de lograrlo, fijamos

$$D^n u \equiv \frac{d^n u}{dx^n} = \phi(x) \quad (7.25)$$

por lo que, utilizando el teorema de Fubini (ver Teorema [A.10](#))

$$\begin{aligned} D^{-1}\phi &= \int_0^x \phi(y) dy \\ D^{-2}\phi &= D^{-1}(D^{-1}\phi) = \int_0^x D^{-1}\phi(y) dy \\ &= \int_0^x \left(\int_0^y \phi(s) ds \right) dy = \int_0^x \left(\phi(s) \int_s^x dy \right) ds \\ &= \int_0^x \phi(s)(x-s) ds = \int_0^x \phi(y)(x-y) dy \end{aligned}$$

En general,

$$D^{-n}\phi = D^{-1}(D^{-n+1}\phi) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-y)^{n-1} \phi(y) dy$$

ya que, si lo probamos por inducción en n

- Caso $n=1$

$$D^{-1}\phi = D^{-1}(D^{-1+1}\phi) = D^{-1}\phi$$

- Supuesto cierto para n , veamoslo para $n + 1$

$$\begin{aligned} D^{-(n+1)}\phi &= D^{-1}(D^{-n}\phi) = \int_0^x D^{-n}\phi(y) dy \\ &= \int_0^x \left(\frac{1}{(n-1)!} \int_0^y (y-s)^{n-1} \phi(s) ds \right) dy \\ &= \int_0^x \left(\frac{1}{(n-1)!} \phi(s) \int_s^x (y-s)^{n-1} dy \right) ds \\ &= \int_0^x \frac{1}{(n-1)!} \phi(s) \frac{(x-s)^n}{n} ds \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^x (x-s)^n \phi(s) ds. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno (7.23)

$$\frac{d^n u}{dx^n} = u^{(n)}(x) = \phi(x)$$

Integrando entre 0 y x ,

$$\int_0^x u^{(n)}(y) dy = \int_0^x \phi(y) dy \Rightarrow u^{(n-1)}(x) - u^{(n-1)}(0) = D^{-1}\phi$$

Por tanto,

$$u^{(n-1)}(x) = c_{n-1} + D^{-1}\phi$$

Si volvemos a integrar de nuevo entre 0 y x ,

$$u^{(n-2)}(x) = c_{n-1}x + c_{n-2} + D^{-2}\phi$$

Por tanto, en general,

$$u(x) = c_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_{n-2} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + c_1 x + c_0 + D^{-n}\phi \quad (7.26)$$

Volviendo a la ecuación diferencial (7.22), vemos que se puede expresar mediante una ecuación integral de la forma (7.24) si tomamos

$$K(x, y) = \sum_{h=1}^n a_n \frac{(x-y)^{h-1}}{(h-1)!} \quad (7.27)$$

y

$$f(x) = F(x) - c_{n-1}a_1(x) - (c_{n-1}x + c_{n-2})a_2(x) - \dots - \left(c_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + c_1x + c_0 \right) a_n(x) \quad (7.28)$$

Por el contrario, resolviendo (7.24) con $K(x, y)$ y $f(x)$ dado por (7.27) y (7.28) y sustituyendo el valor obtenido de $\phi(x)$ en (7.26), obtenemos la única solución de (7.22) verificando las condiciones iniciales (7.23).

Si el coeficiente líder en (7.22) no es la unidad, sino $a_0(x)$, entonces la ecuación integral (7.24) sería

$$a_0(x)\phi(x) + \int_0^x K(x, y)\phi(y) dy = f(x) \quad (7.29)$$

donde $K(x, y)$ y $f(x)$ sigue viniendo dado por (7.27) y (7.28) respectivamente. Si $a_0(x) \neq 0$ en el intervalo considerado, no cambia nada. Sin embargo, si $a_0(x)$ se anula en algunos puntos, vemos que la ecuación de tipo (7.29) es equivalente a una ecuación diferencial lineal singular, al menos cuando $K(x, y)$ es un polinomio en y .

Existen otros métodos de reducir una EDO lineal a una ecuación integral de Volterra. Entre estos, consideraremos el **método de Fubini** basado en el *método de variación de constantes de Lagrange* (Véase [3]).

Para ello, vamos a tomar la ecuación homogénea de segundo orden separando los coeficientes en dos sumandos, es decir

$$u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u = A(x)u'' + B(x)u' + c(x)u. \quad (7.30)$$

Naturalmente, esta descomposición se puede hacer en un número infinito de maneras, pero vamos a elegir uno en la cuál nos permita encontrar explícitamente la solución general de la ecuación

$$u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u = 0 \quad (7.31)$$

en un forma simple. Además, necesitamos que el coeficiente líder $1 - A(x)$ de (7.30) no se anule en el intervalo considerado.

Conocidos $F_1(x), F_2(x)$ dos soluciones independientes de (7.31), es decir, dos soluciones cuyo wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} F_1(x) & F_2(x) \\ F_1'(x) & F_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Buscamos una solución de (7.30) de la forma

$$u(x) = C_1(x)F_1(x) + C_2(x)F_2(x) \quad (7.32)$$

donde $C_1(x)$ y $C_2(x)$ verifican que

$$C_1'(x)F_1(x) + C_2'(x)F_2(x) = 0 \quad (7.33)$$

Sustituyendo (7.32) en (7.30) y utilizando (7.33), obtenemos

$$\begin{aligned} C_1'(x)F_1'(x) + C_2'(x)F_2'(x) &= \frac{A(x)F_1''(x) + B(x)F_1'(x) + C(x)F_1(x)}{1 - A(x)}C_1(x) \\ &+ \frac{A(x)F_2''(x) + B(x)F_2'(x) + C(x)F_2(x)}{1 - A(x)}C_2(x) \end{aligned} \quad (7.34)$$

Finalmente, resolviendo (7.33) y (7.34) simultáneamente

$$\begin{cases} C_1'(x)F_1(x) + C_2'(x)F_2(x) = 0 \\ C_1'(x)F_1'(x) + C_2'(x)F_2'(x) = \Phi_1(x)W(x)C_1(x) + \Phi_2(x)W(x)C_2(x) \end{cases}$$

donde,

$$\Phi_h(x) = \frac{A(x)F_h''(x) + B(x)F_h'(x) + C(x)F_h(x)}{1 - A(x)W(x)}$$

- Multiplicando la primera ecuación por $F_2'(x)$ y la segunda por $F_2(x)$ y restando ambas ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} C_1'(x)F_1(x)F_2'(x) - C_1'(x)F_1'(x)F_2(x) &= -\Phi_1(x)W(x)F_2(x)C_1(x) \\ &\quad -\Phi_2(x)W(x)F_2(x)C_2(x) \\ \Rightarrow C_1'(x) &= -(\Phi_1(x)C_1(x) + \Phi_2(x)C_2(x))F_2(x) \end{aligned} \quad (7.35)$$

- Multiplicando la primera ecuación por $F_1'(x)$ y la segunda por $F_1(x)$ y restando ambas ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} C_2'(x)F_2(x)F_1'(x) - C_2'(x)F_2'(x)F_1(x) &= -\Phi_1(x)W(x)F_1(x)C_1(x) \\ &\quad -\Phi_2(x)W(x)F_1(x)C_2(x) \\ \Rightarrow C_2'(x) &= (\Phi_1(x)C_1(x) + \Phi_2(x)C_2(x))F_1(x) \end{aligned} \quad (7.36)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales (7.35) y (7.36) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones integrales (integrando entre x_0 y x):

$$\begin{cases} C_1(x) = C_1(x_0) - \int_{x_0}^x [C_1(y)\Phi_1(y) + C_2(y)\Phi_2(y)]F_2(y) dy \\ C_2(x) = C_2(x_0) - \int_{x_0}^x [C_1(y)\Phi_1(y) + C_2(y)\Phi_2(y)]F_1(y) dy \end{cases} \quad (7.37)$$

Las constantes $C_1(x_0) = \gamma_1$ y $C_2(x_0) = \gamma_2$ pueden ser determinadas resolviendo el sistema

$$\begin{cases} \gamma_1 F_1(x_0) + \gamma_2 F_2(x_0) = u(x_0) \\ \gamma_1 F_1'(x_0) + \gamma_2 F_2'(x_0) = u'(x_0) \end{cases}$$

conocidos los valores $u(x_0)$ y $u'(x_0)$.

Queremos transformar el sistema de ecuaciones integrales (7.37) en una única ecuación integral, para ello establecemos $\psi(x) = C_1(x)\Phi_1(x) + C_2(x)\Phi_2(x)$ y multiplicamos la primera ecuación de (7.37) por $\Phi_1(x)$ y la segunda por $\Phi_2(x)$. Sumando ambas expresiones, obtenemos:

$$\gamma_1 \Phi_1(x) - \int_{x_0}^x \Phi_1(x)\psi(y)F_2(y) dy + \gamma_2 \Phi_2(x) - \int_{x_0}^x \Phi_2(x)\psi(y)F_1(y) dy = \psi(x)$$

Por tanto, obtenemos la ecuación integral de segunda especie

$$\psi(x) - \int_{x_0}^x K(x, y)\psi(y) dy = f(x)$$

con

$$K(x, y) = \begin{vmatrix} F_1(y) & F_2(y) \\ \Phi_1(x) & \Phi_2(x) \end{vmatrix}, \quad f(x) = \gamma_1\Phi_1(x) + \gamma_2\Phi_2(x)$$

Para evitar tener las constantes γ_1 y γ_2 en la ecuación integral, consideramos $\psi(x) = \gamma_1\psi_1(x) + \gamma_2\psi_2(x)$

$$\gamma_1\psi_1(x) + \gamma_2\psi_2(x) = \gamma_1\Phi_1(x) + \gamma_2\Phi_2(x) + \int_{x_0}^x K(x, y)[\gamma_1\psi_1(x) + \gamma_2\psi_2(x)] dy$$

Luego obtenemos las dos ecuaciones integrales separables

$$\psi_h(x) = \Phi_h(x) + \int_{x_0}^x K(x, y)\psi_h(y) dy \quad h = 1, 2$$

Por último, veamos que la solución buscada de (7.30) en función de $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$ viene dada de la forma

$$U(x) = \gamma_1(x)U_1(x) + \gamma_2(x)U_2(x)$$

con

$$U_h(x) = F_h(x) + \int_{x_0}^x \begin{vmatrix} F_1(y) & F_2(y) \\ \Phi_1(x) & \Phi_2(x) \end{vmatrix} \psi_h(y) dy$$

En efecto,

$$\begin{aligned} U(x) &= \gamma_1 U_1(x) + \gamma_2(x) U_2(x) \\ &= \gamma_1 F_1(x) + \gamma_1 \int_{x_0}^x \begin{vmatrix} F_1(y) & F_2(y) \\ \Phi_1(x) & \Phi_2(x) \end{vmatrix} \psi_1(y) dy \\ &\quad + \gamma_2 F_2(x) + \gamma_2 \int_{x_0}^x \begin{vmatrix} F_1(y) & F_2(y) \\ \Phi_1(x) & \Phi_2(x) \end{vmatrix} \psi_2(y) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma_1 F_1(x) + \gamma_2 F_2(x) \\
&+ \int_{x_0}^x \left[\gamma_1 \begin{vmatrix} F_1(y) & F_2(y) \\ \Phi_1(x) & \Phi_2(x) \end{vmatrix} \psi_1(y) + \gamma_2 \begin{vmatrix} F_1(y) & F_2(y) \\ \Phi_1(x) & \Phi_2(x) \end{vmatrix} \psi_2(y) \right] dy \\
&= \gamma_1 F_1(x) + \gamma_2 F_2(x) + \int_{x_0}^x \begin{vmatrix} F_1(y) & F_2(y) \\ \Phi_1(x) & \Phi_2(x) \end{vmatrix} \psi(y) dy \\
&= \gamma_1 F_1(x) + \gamma_2 F_2(x) + \int_{x_0}^x (F_1(y)F_2(x)\psi(y) - F_1(x)F_2(y)\psi(y)) dy \\
&= F_1(x) \left[\gamma_1 - \int_{x_0}^x F_2(y)\psi(y) dy \right] + F_2(x) \left[\gamma_2 - \int_{x_0}^x F_1(y)\psi(y) dy \right] \\
&\stackrel{(7.37)}{=} F_1(x)C_1(x) + F_2(x)C_2(x). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Anexo A. Resultados utilizados

Teorema A.1 (Teorema de Peano). (véase [3])

Se considera el problema

$$(PC) \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

donde $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ y $(t_0, y_0) \in \Omega$. Existen $\delta > 0$ y una función $\varphi : I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \mapsto \mathbb{R}$ que es solución en I_δ del problema (PC). Además, se puede tomar $\delta \leq \min\{a, b/M\}$, donde:

$$K = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(y_0; b) \subset \Omega, \quad M = \max_{(t,y) \in K} |f(t, y)|$$

Definición A.2. (véase [11])

Supongamos que f es una función compleja definida en Ω . Si $z_0 \in \Omega$ y si existe

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{A.1}$$

denotaremos a este límite mediante $f'(z_0)$ y lo llamaremos **derivada de f** en z_0 . Si existe $f'(z_0)$ para todo $z_0 \in \Omega$, decimos que f es **holomorfa** (o **analítica**) en Ω . La clase de todas las funciones holomorfas en Ω se denotará mediante $H(\Omega)$.

Definición A.3. (véase [11])

Una función se dice **entera** si es holomorfa en todo el plano.

Definición A.4. (véase [11])

A cada serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad (\text{A.2})$$

le corresponde un número $R \in [0, \infty]$ tal que la serie converge absoluta y uniformemente en $\overline{D}(a; r)$ para todo $r < R$, y diverge si $z \notin \overline{D}(a; r)$. El \ll radio de convergencia \gg , R , viene dado por el criterio de la raíz:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}.$$

Decimos que una función f definida en Ω es **representable mediante series de potencias en Ω** si a todo disco $D(a; r) \subset \Omega$ le corresponde una serie (A.2) que converge a $f(z)$ para todo $z \in D(a; r)$

Teorema A.5. (véase [11])

Si f es representable mediante series de potencias en Ω , entonces $f \in H(\Omega)$ y f' es también representable mediante series de potencias en Ω . De hecho, si

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad (\text{A.3})$$

para $z \in D(a; r)$, para estos z tenemos también

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n(z-a)^{n-1} \quad (\text{A.4})$$

Teorema A.6 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). (véase [4])

Sea H un espacio vectorial y (\cdot, \cdot) un producto escalar definido en H . Entonces se tiene que

$$|(u, v)|^2 \leq (u, u)(v, v) \quad \forall u, v \in H.$$

Nota 10. Durante todo el trabajo hemos utilizado el espacio de Hilbert $H = L^2(0, 1)$. Por tanto, la desigualdad de Cauchy-Schwarz sería:

$$\left[\int_0^1 u(x)v(x) dx \right]^2 \leq \int_0^1 u^2(x) dx \int_0^1 v^2(x) dx \quad \forall u, v \in L^2(0, 1).$$

Teorema A.7 (Teorema de Egoroff-Severini). (véase [11])

Sea $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles sobre el conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^n$ de medida Lebesgue finita. Supongamos que $x \in E$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$, donde $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ es una función finita en casi todo. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, \exists cerrado $F \subset E$ tal que $f_n|_F \rightarrow f|_F$ uniformemente y $\mathcal{L}(E \setminus F) < \varepsilon$.

Teorema A.8 (Principio de Prolongación analítica). (véase [11])

Supongamos que dos dominios D_1 y D_2 contengan ambos a un tercer dominio D . Sea $f_1(z)$ una función analítica en D_1 . Entonces, existe a lo sumo una función $f_2(z)$ que sea analítica en D_2 y que coincida con f_1 sobre el dominio común D .

Teorema A.9 (Criterio de Tonelli). (véase [4])

Sea $F(x, y) : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible que satisfice:

- $\int_{\Omega_2} |F(x, y)| d\mu_2 < \infty$ e.c.t. $x \in \Omega_1$
- $\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |F(x, y)| d\mu_2 \right) d\mu_1 < \infty$

Entonces, $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Teorema A.10 (Teorema de Fubini). (véase [4])

Supongamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Entonces, para casi todo $x \in \Omega_1$, $F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2)$ y $\int_{\Omega_2} F(x, y) d\mu_2 \in L^1_x(\Omega_1)$. De forma similar, para casi todo $y \in \Omega_2$, $F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1)$ y $\int_{\Omega_1} F(x, y) d\mu_1 \in L^1_y(\Omega_2)$.

Además, se tiene que:

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} F(x, y) d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} F(x, y) d\mu_1 \right) d\mu_2 = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) d\mu_1 d\mu_2.$$

Teorema A.11 (Teorema de Ascoli-Arzelá). (véase [9])

Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado de \mathbb{R} , $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ o \mathbb{C} una sucesión de funciones uniformemente acotadas y equicontinuas. Entonces la sucesión $\{f_n\}_{n \geq 1}$ contiene una subsucesión uniformemente convergente.

Teorema A.12. (véase [9])

Sean H un espacio de Hilbert y $M \subset H$ un subespacio vectorial. En tal caso M es denso en H si y sólo si $M^\perp = \{0\}$, es decir,

$$\overline{M} = H \Leftrightarrow \text{Dado } x \in H \text{ tal que } (x, m) = 0 \forall m \in M, \text{ forzosamente } x = 0.$$

Teorema A.13 (Criterio del cociente). (véase [1])

Dada una serie $\sum a_n$ de términos complejos no nulos, sea

$$r = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \quad R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

1. La serie $\sum a_n$ converge absolutamente si $R < 1$.
2. La serie $\sum a_n$ diverge si $r > 1$.
3. El criterio no permite llegar a ninguna conclusión si $r \leq 1 \leq R$.

Teorema A.14 (Condición necesaria de convergencia). (véase [1])

Si $\sum a_n$ es una serie convergente entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Teorema A.15 (Teorema de Beppo-Levi). (véase [5])

Si $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ es la suma puntual de una serie de funciones medibles no negativas, entonces f es medible no negativa y

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \, d\mu.$$

Teorema A.16 (Desigualdad de Hölder). (véase [9])

Si $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^{p'}(\Omega)$, con $p \in [1, \infty]$ y p' el exponente conjugado de p , es decir, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, entonces el producto $uv \in L^1(\Omega)$ con

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| \, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Bibliografía

- [1] Apostol T.M., *Análisis Matemático*, Editorial:Reverté, 1976.
- [2] Apuntes del grupo B de la asignatura de licenciatura Matemática del curso 2010/2011, *Ecuaciones en derivadas parciales y Análisis Funcional* (Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico).
- [3] Apuntes de la asignatura del grado en Matemáticas, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* <http://departamento.us.es/edan/php/asig/GRAMAT/GMEDO/ApuntesEDO.pdf>
- [4] Brézis Haim, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Editorial:Springer, 2011.
- [5] Freniche Ibáñez Francisco José, *Series de funciones e integral de Lebesgue*, 16 de octubre de 2014. <https://personal.us.es/freniche/documentos/sfil/teoria.pdf>
- [6] https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Integral_equation
- [7] Kondo J., *Integral Equations*, Editorial:Kondansha/Oxford, 1991.
- [8] Lalesco T., *Introduction à la théorie des équations intégrales*, Editorial: Gauthier-Villars, Paris, 1922.
- [9] Martín Gómez Jose D. y Real Anguas José, *Ecuaciones en derivadas parciales y Análisis Funcional*, Grupo A. Curso 2010/2011. <http://departamento.us.es/edan/php/asig/LICMAT/LMEDPAF/ApuntesEDPAFGrupoA1011.pdf>
- [10] Puig Adam P., *Curso teórico-Práctico de ecuaciones diferenciales aplicado a la física y técnica*, Editorial: Madrid, Biblioteca Matemática, 1965.

- [11] Rudin Walter, *Análisis real y complejo*, Editorial: Alhambra, 1985. Traducido por Alfonso Casal Piga.

- [12] Tricomi F.G., *Integral Equations*, Editorial:New York Interscience Publishers, 1957.