

Teoría de propagadores

Estudio de procesos electromagnéticos y débiles

Jesús Aguado López

Tutores: Juan Antonio Caballero Carretero y Guillermo D. Megías Vázquez



Trabajo de fin de grado realizado para la obtención del
título Doble Grado en Física y Matemáticas

Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear
Universidad de Sevilla

Agradecimientos

A mis tutores por su apoyo y guía, tanto aquí como en la distancia.

A Pedro, por hablarme de neutrinos y propagadores desde hace ya tiempo.

A mi madre, a mi padre y a mi hermano, por ser gente maravillosa.

Y a Lucía, por su cariño.

Teoría de propagadores

Estudio de procesos electromagnéticos y débiles

Jesús Aguado López

Abstract

Los propagadores son una herramienta matemática central en numerosas ramas de la física ya que permiten la resolución de algunas ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) de gran interés. En el contexto de la mecánica cuántica relativista y la teoría cuántica de campos los propagadores fueron interpretados de manera novedosa asociándolos a partículas mediadoras de interacción. Dicha interpretación ha trascendido este campo y se habla de partículas virtuales (fonones, plasmones) en otras áreas: todas estas interpretaciones tienen la base común en que tienen una EDP que caracteriza la dinámica del problema.

Este trabajo presenta una naturaleza dual debida a la doble titulación en la que ha sido desarrollada. En el primer capítulo se introduce la base matemática para una aproximación al estudio de propagadores basándose en herramientas del análisis funcional. El objetivo de dicho capítulo es construir un formalismo que permita llegar a expresar la probabilidad de transición de un estado (vector de un espacio de Hilbert de funciones) a otro a través de un operador de evolución (matriz S), basándose en el cálculo de propagadores para las ecuaciones de onda relativista que procedan según el tipo de partícula. Los capítulos dos y tres están enteramente dedicados a la aplicación de las herramientas matemáticas al caso de interacción electromagnética y débil. Se estudia la dispersión elástica electrón-protón en el marco de la electrodinámica cuántica de Feynman y Stückelberg, empleando diversas aproximaciones que incorporan el hecho de que el protón tiene estructura interna. Para terminar, se estudia el proceso débil en el que un neutrino (o antineutrino) interacciona con un neutrón (protón) a través de la corriente débil cargada W^\pm , modelando la estructura débil del nucleón para ello.

El caso de dispersión electrón-protón ha sido elegido para su estudio ya que permite una introducción escalonada en complejidad a la teoría de dispersión cuántica. Además, se enlazan los resultados analíticos obtenidos con el problema abierto de la determinación experimental del radio de carga del protón. El estudio de la interacción neutrino-nucleón está motivado por el interés de la determinación de sus propiedades en distintos experimentos en los que los neutrinos inciden sobre núcleos a distintas energías en el rango del GeV.

En ambos casos, el estudio experimental de las secciones eficaces permite un conocimiento más profundo de la estructura hadrónica ya sea mediante sondas débiles (neutrinos) o electromagnéticas (electrones).

Índice general

1. Introducción a la teoría de propagadores	1
1.1. Herramientas matemáticas	1
1.1.1. Solución fundamental de una ecuación en derivadas parciales	2
1.1.2. Solución fundamental al problema de Cauchy	3
1.2. Propagador libre G_0	3
1.2.1. Propagador libre para la ecuación de Schrödinger	4
1.2.2. Propagador libre para la ecuación de Dirac	4
1.3. Propagador con interacción	6
1.4. Matriz S	8
1.5. Matriz S para la QED	9
2. Interacción electrón-protón	12
2.1. Dispersión coulombiana	12
2.2. Dispersión electrón-protón sin estructura	15
2.3. Fórmula de Rosenbluth y factores de forma	20
2.4. El radio del protón	22
3. Interacción débil	26
3.1. Matriz S para procesos débiles	27
3.2. Cálculo de la amplitud invariante en $\nu_e + n \rightarrow e^- + p$	29
3.3. Sección eficaz diferencial	31
3.4. Sección eficaz para el proceso con antineutrinos	32
3.5. Factores de forma hadrónicos	32
3.6. Resultados	34
4. Conclusiones	39
A. Ecuación de Dirac	41
A.1. Soluciones libres	42
A.2. Transformaciones de Lorentz	42
B. Cálculos de trazas y amplitudes invariantes	43
B.1. Covariantes bilineales	43
B.2. Teoremas de traza	43
B.3. Más propiedades del álgebra de Dirac	44
B.4. Sumas de amplitudes sobre polarizaciones	45

C. Cálculo de tensores leptónico y hadrónico	48
C.1. Tensor hadrónico para la corriente EM del protón con estructura	48
C.2. Tensor leptónico para la corriente débil $\nu \rightarrow e^-$	49
C.3. Tensor hadrónico para corriente débil $n \rightarrow p$	50
C.4. Contracción de los tensores leptónico y hadrónico débil	53

Capítulo 1

Introducción a la teoría de propagadores

El objetivo en este capítulo es introducir el formalismo matemático necesario para estudiar procesos de dispersión en mecánica cuántica relativista. Para ello haremos uso de la imagen de la Electrodinámica Cuántica desarrollada por Feynman y Stückelberg. Este procedimiento, aún no siendo tan general como el lenguaje de la teoría cuántica de campos en el que se introducen operadores de campo no conmutativos y se construye el espacio de Fock, resulta más intuitivo y permite realizar cálculos de interés para procesos diversos. En este trabajo nos restringimos a la formulación de Feynman-Stückelberg, que está basada en la herramienta de los propagadores, y que sigue un paralelismo con la teoría cuántica de dispersión no relativista.

Como primer paso calcularemos los propagadores para las ecuaciones cuánticas de interés. En el caso de dispersión electrón-protón que consideramos en el siguiente capítulo, usaremos la ecuación de Dirac para partículas cargadas con espín 1/2. No obstante, todo el desarrollo es análogo para cualquier tipo de ecuación lineal. En líneas generales, un propagador G es un operador que permite calcular la función de onda en una posición e instante concretos a partir de la función de onda en un instante anterior (propagador) o posterior (retardador) de la siguiente manera:

$$\psi(\mathbf{x}', t') = i \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) d^3 \mathbf{x}.$$

1.1. Herramientas matemáticas

Comenzamos en esta sección construyendo formalmente el marco matemático general en que plantear y resolver las ecuaciones de la mecánica cuántica relativista. El espacio usual de funciones de cuadrado integrable sobre el espacio de Minkowski es demasiado rígido. Conviene ampliar nuestro espacio de funciones a uno más general, de distribuciones. Las distribuciones se definen como aplicaciones duales actuando sobre las funciones. Sea por ejemplo $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ el espacio de funciones infinitamente diferenciables sobre \mathbb{R}^4 de soporte compacto (i.e. que se anulan fuera de una región compacta acotada). Se dice que T es una distribución sobre $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ si es lineal $T[\alpha\phi + \beta\psi] = \alpha T[\phi] + \beta T[\psi] \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \phi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ y continua $T[\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} T[\phi_n]$.

Aunque el espacio $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ puede usarse como espacio de funciones dando lugar a las distribuciones $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$, podemos usar un espacio de funciones más grande, el conocido como espacio de Schwartz de funciones que van suficientemente rápido a cero, tanto ellas como todas sus derivadas:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^4) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^4) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x_k^m \partial_\alpha^{| \alpha |} f| = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}, \alpha \text{ multi-índice}, k = 1, \dots, 4\}.$$

Las aplicaciones lineales y continuas sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ son las llamadas distribuciones temperadas, denotadas por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$. Este es el espacio considerado en el estudio que sigue sobre las ecuaciones de la teoría cuántica relativista.

Un ejemplo paradigmático de distribución es la ubicua delta de Dirac. Esta se define por su actuación como $\delta(\psi) = \psi(0)$. Es evidentemente lineal sobre las funciones y continua. Sin embargo, no es una función en el sentido clásico: las distribuciones son más generales que las funciones. Es importante señalar que las funciones son asimismo distribuciones: si tenemos una función (localmente integrable) f , podemos definir su actuación como distribución sobre otra función a través de la integral:

$$f[\psi] = \int_{\mathbb{R}^4} f^* \psi d^4x.$$

Una propiedad clave que mantienen las distribuciones es la derivación. El concepto de derivada débil extiende la diferenciación de funciones a distribuciones. Restringida a las distribuciones que sí son funciones, la derivada débil coincide con la clásica. Su definición:

$$\partial_\mu T[\phi] = -T[\partial_\mu \phi].$$

Con esta definición es posible calcular la derivada débil de la función escalón en una dimensión, entendida como distribución:

$$\partial_x \theta(x)[\phi] = \theta(x)[- \partial_x \phi] = - \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) \partial_x \phi dx = - \int_0^{+\infty} \partial_x \phi dx = \phi(0) - \cancel{\phi(+\infty)} = \delta[\phi].$$

Luego la derivada de la función escalón de Heaviside coincide con la delta de Dirac, en el sentido de las distribuciones.

Un concepto importante en la teoría de distribuciones que ponemos en uso es el producto de convolución. Para funciones ϕ, ψ , se define como:

$$(\phi \star \psi)(y) := \int_{\mathbb{R}^4} \phi(y-x) \psi(x) d^4x.$$

Esta definición se extiende para convolucionar distribuciones T con funciones f de la manera siguiente:

$$T \star f[\psi] := T[\hat{P}f \star \psi],$$

donde $\hat{P}f(x) = f(-x)$, el operador paridad. Con estas herramientas es posible hablar de soluciones fundamentales de ecuaciones en derivadas parciales, lo que nos permitirá calcular propagadores de una manera especialmente sencilla, gracias a la transformada de Fourier. Una serie de propiedades serán clave en el desarrollo:

- $\delta \star f = f \quad \forall f$ función, donde δ es la delta de Dirac.
- $\partial_\mu(T \star f) = \partial_\mu T \star f$ para toda T distribución, f función.

1.1.1. Solución fundamental de una ecuación en derivadas parciales

Buscamos aplicar la teoría de distribuciones a la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales (EDP) de nuestro interés: las ecuaciones de onda relativista. Consideraremos en general soluciones a la ecuación que no sean necesariamente funciones sino distribuciones. En lo sucesivo, $L(\hat{D})$ será un operador diferencial de coeficientes constantes. Un ejemplo sería $\hat{L}(D) = -\frac{1}{i\hbar} \frac{\hbar}{2m} \nabla^2$ correspondiente al operador diferencial espacial

en la ecuación de Schrödinger. Otro, correspondiente a la ecuación de Dirac, sería $\hat{L}(D) = -\frac{1}{i\hbar} \alpha \cdot \nabla$.

Consideremos la siguiente ecuación diferencial: $\hat{L}(D)\psi = \rho$. Se dice que una distribución E es una solución fundamental a dicha ecuación si cumple la ecuación (entiéndanse las derivadas en el sentido distribucional):

$$\hat{L}(D)E = \delta. \quad (1.1)$$

Una vez que se obtiene una solución fundamental, es inmediato obtener la solución a la ecuación en ψ vía el producto de convolución. El resultado nos lo proporciona el siguiente teorema. La solución fundamental estará íntimamente ligada con el propagador G que buscamos para construir la teoría de dispersión cuántica.

Teorema 1.1. *Sea E una solución fundamental de la ecuación $\hat{L}(D)\psi = \rho$. Entonces, $\psi = E \star \rho$ es solución de la ecuación.*

Cuando la distribución E sea una función, el producto de convolución anterior es simplemente $(E \star \rho)(y) = \int_{\mathbb{R}^4} E(x-y)\rho(y)d^4x$. La base de la demostración es la propiedad ya enunciada: $\delta \star f = f \quad \forall f$. Este resultado puede consultarse en [1], referencia en la que se construye la teoría de distribuciones y desarrolla las aplicaciones en mecánica cuántica.

1.1.2. Solución fundamental al problema de Cauchy

Usualmente es más conveniente separar la dependencia temporal de la ecuación de la parte espacial. Un ejemplo es en la ecuación de Schrödinger, que se resuelve calculando el propagador en la sección 1.2.1. El siguiente teorema extiende el resultado anterior para el caso de ecuaciones de evolución con condiciones iniciales (problema de Cauchy).

Teorema 1.2. *Sea E una distribución que satisface:*

$$\begin{cases} \partial_t E - \hat{L}(D)E = 0 \quad \forall t > 0 \\ E(\mathbf{x}, t = 0) = \delta(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Entonces $\psi(\mathbf{x}', t') = \int_{\mathbb{R}^n} d^3\mathbf{x} \quad E(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, t' - t)f(\mathbf{x})$ es solución del problema:

$$\begin{cases} \partial_t \psi - \hat{L}(D)\psi = 0 \quad \forall t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \psi(\mathbf{x}, t = 0) = f(\mathbf{x}). \end{cases}$$

La demostración de este teorema puede consultarse en [1], página 58 (fundamental solution for Cauchy problems).

1.2. Propagador libre G_0

Los resultados anteriores permiten demostrar la existencia de propagadores para ecuaciones de onda lineales.

Como consecuencia inmediata del teorema 1.2 tenemos la ecuación integral que buscamos. Si fijamos el tiempo inicial t y consideramos $t' > t$, podemos dar como condición inicial la función de onda $\psi(\mathbf{x}, t)$. En tal caso, tenemos que la convolución $\int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} \quad E(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, t' - t)\psi(\mathbf{x}, t)$ es precisamente la solución de la ecuación de onda considerada, evaluada en \mathbf{x}', t' . Es decir:

$$\psi(\mathbf{x}', t') = \int d^3\mathbf{x} \quad E(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, t' - t)\psi(\mathbf{x}, t).$$

Basta definir $G_0(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) = -iE(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, t' - t)$ y obtenemos la ecuación clásica del propagador libre:

$$\psi(\mathbf{x}', t') = i \int d^3\mathbf{x} G_0(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t). \quad (1.2)$$

Podemos ya poner en marcha esta maquinaria para calcular los propagadores libres para las ecuaciones de onda que nos interesan.

1.2.1. Propagador libre para la ecuación de Schrödinger

Partimos de la ecuación de Schrödinger con condición inicial para la función de onda escalar ψ :

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi \\ \psi(\mathbf{x}, t=0) = \psi_0(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Escrita en la forma del teorema, la EDP es:

$$\partial_t\psi - \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\psi = 0.$$

La ecuación análoga para E :

$$\partial_tE - \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2E = 0,$$

y tomando la transformada de Fourier respecto de las variables espaciales, $\tilde{E} = \mathcal{F}(E)$, obtenemos

$$\partial_t\tilde{E} + \frac{i\hbar k^2}{2m}\tilde{E} = 0,$$

que tiene por solución inmediata:

$$\tilde{E} = c(\mathbf{k})e^{-i\frac{\hbar k^2}{2m}t}.$$

El coeficiente $c(\mathbf{k})$ se obtiene de la condición inicial:

$$c(\mathbf{k}) = \tilde{E}|_{t=0} = \mathcal{F}(E|_{t=0}) = \mathcal{F}(\delta) = 1.$$

Haciendo la transformada de Fourier inversa se obtiene:

$$E(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^4} d^3k e^{-i\frac{\hbar k^2 t}{2m}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{2m\pi}{i\hbar t}\right)^{3/2} \exp\left(i\frac{m\mathbf{x}^2}{2\hbar t}\right) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar t}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{im\mathbf{x}^2}{2\hbar t}\right).$$

El propagador que se obtiene es, para $t' > t$:

$$G_0(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t)^+ = -i \left(\frac{m}{2\pi i\hbar(t' - t)}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{im|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^2}{2\hbar(t' - t)}\right). \quad (1.3)$$

1.2.2. Propagador libre para la ecuación de Dirac

Podemos desarrollar un procedimiento similar para calcular el propagador libre para la ecuación de Dirac:

$$i\hbar\partial_t\psi - mc\psi = 0.$$

Para la distribución E :

$$\begin{cases} (i\hbar\partial_t - mc)E = \hbar\delta^4(x) \\ E(\mathbf{x}, t=0) = \delta^3(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (1.4)$$

En tal caso, la convolución de E con la función de onda de Dirac en el instante inicial es solución de la ecuación:

$$E \star_x \psi|_{t=0}(\mathbf{x}', t') = \int_{\mathbb{R}^3} E(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, t') \psi(\mathbf{x}, t=0) d^3\mathbf{x}.$$



Figura 1.1: Polos de integración asignados para un electrón

Nótese que la convolución anterior satisface la ecuación de Dirac para $t' > 0$ con la condición inicial:

$$E \star_x \psi|_{t=0}(\mathbf{x}', t' = 0) = \delta^3 \star_x \psi|_{t=0}(\mathbf{x}') = \psi|_{t=0}(\mathbf{x}').$$

Por simetría de traslación temporal, tenemos:

$$\psi(\mathbf{x}', t') = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} E(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, t' - t)\psi(\mathbf{x}, t) = i \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} G_0(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t)\psi(\mathbf{x}, t).$$

Finalmente, podemos calcular el propagador en el espacio de momentos aplicando la transformada de Fourier en la ecuación (1.4):

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu E - mcE = \hbar\delta^4 \implies i\hbar\gamma^\mu(-ik_\mu)\tilde{E} - mc\tilde{E} = \hbar\mathbb{1} \implies (\not{p} - mc)\tilde{E} = \hbar\mathbb{1}.$$

Usando $\gamma^\mu\hbar k_\mu = \not{p}$ y $\not{p}^2 = p^2 \equiv p^\mu p_\mu$, obtenemos, multiplicando a derecha por $(\not{p} + mc)$:

$$(p^2 - m^2c^2)\tilde{E} = \hbar(\not{p} + mc) \implies \tilde{E} = \hbar \frac{\not{p} + mc}{p^2 - m^2c^2}.$$

Haciendo uso del resultado previo, el propagador libre de Dirac en el espacio de momentos resulta:

$$G_0(p) \equiv S_F(p) = \hbar \frac{\not{p} + mc}{p^2 - m^2c^2}. \quad (1.5)$$

El propagador en el espacio de posiciones se obtiene con la transformada de Fourier inversa, teniendo en cuenta que hemos supuesto $t' > t$:

$$G_0(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t)^+ = \frac{\theta(t' - t)}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^4} \hbar \frac{\not{p} + mc}{p^2 - m^2c^2} \exp(-ik_\mu x^\mu) d^4k = \frac{\theta(t' - t)}{(2\pi\hbar)^4} \int_{\mathbb{R}^4} \hbar \frac{\not{p} + mc}{p^2 - m^2c^2} \exp\left(-\frac{ip_\mu x^\mu}{\hbar}\right) d^4p. \quad (1.6)$$

De manera análoga se obtiene una expresión similar para el retardador $G_0(\mathbf{x}', t', \mathbf{x}, t)^-$ como una transformada inversa de Fourier. La única diferencia radica en el proceso de integración que requiere asignar un valor principal a la integral. La integral en k_0 ha de hacerse a través del teorema de los residuos debido al comportamiento singular del denominador cuando $p^2 = m^2c^2$ (condición *on-shell*). Los polos de la integral se encuentran en $p_0 = \pm\sqrt{(mc)^2 + |\mathbf{p}|^2} := \pm E_p$.

El formalismo de Feynman-Stückelberg prescribe un procedimiento de integración en función de que el propagador se calcule hacia el futuro $t' > t$ (que se asocia a electrones, con energía positiva) o hacia el pasado $t' < t$ (que se asocia a positrones, con energía negativa). En el primer caso el contorno debe cerrarse por abajo incluyendo el polo de energía positiva $k_0 = +E_p$ y por arriba en el caso de positrones, con el polo de energía negativa $k_0 = -E_p$.

En principio, la expresión (1.6) permitiría, evaluando la integral, llegar a una expresión cerrada para G_0 . Estos cálculos con distintas aproximaciones se presentan en detalle en el capítulo 2 de la referencia [2]. Sin embargo, el conocimiento del propagador en el espacio de momentos es más que suficiente para obtener los resultados de interés en este trabajo.

1.3. Propagador con interacción

La determinación del propagador libre G_0 nos permite, conocida la función de onda en un instante dado, determinar su evolución temporal dictada por la ecuación de onda libre considerada. El objetivo es construir el propagador para el caso de interacción a partir del propagador libre, de manera que nos permita expresar la evolución de la función de onda en la forma genérica:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = i \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x}' G(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}', t'). \quad (1.7)$$

El siguiente desarrollo puede hacerse para ecuaciones escritas en forma Schrödinger.

$$i\hbar\partial_t\psi = \hat{H}_f\psi + V\psi. \quad (1.8)$$

Este es ciertamente el caso de la ecuación de Dirac con interacción electromagnética escrita en términos de las matrices α, β . Por el principio de sustitución mínima $p^\mu \rightarrow p^\mu - \frac{e}{c}A^\mu$:

$$(\not{p} - mc)\psi = 0 \rightarrow (\not{p} - \frac{e}{c}\not{A} - mc)\psi = 0,$$

que puede reescribirse como tipo Schrödinger de la manera:

$$i\hbar\partial_t\psi = -i\hbar\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla\psi + mc^2\beta\psi + \frac{e}{m}\boldsymbol{\beta}\not{A}\psi = \hat{H}_f\psi + V\psi. \quad (1.9)$$

Supongamos que en t_1 actúa un potencial de interacción pequeño comparado con la energía de la onda incidente. Esto permite obviar la creación de estados ligados en el proceso de dispersión. Para la función de onda total, la ecuación que ha de verificarse es la (1.8). En el proceso de dispersión que se produce entre t_1 y $t_1 + \Delta t$, se crea una onda dispersada $\Delta\psi$. Si ϕ es la onda libre que verifica

$$(i\hbar\partial_t - \hat{H}_f)\phi = 0, \quad (1.10)$$

podemos expresar $\psi = \phi + \Delta\psi$. Nótese que $\Delta\psi = 0$ para todo tiempo anterior a t_1 . Si sustituimos la expresión de ψ en (1.2.1), se tiene:

$$(i\hbar\partial_t - \hat{H}_f)\psi = \underbrace{(i\hbar\partial_t - \hat{H}_f)\phi}_{=0} + (i\hbar\partial_t - \hat{H}_f)\Delta\psi = V\phi + V\Delta\psi.$$

Obtenemos, despreciando el término de segundo orden $V\Delta\psi$ (interacción pequeña y pequeña corrección):

$$(i\hbar\partial_t - \hat{H}_f)\Delta\psi = V\phi.$$

Esta ecuación puede ser resuelta por integración directa:

$$i\hbar\Delta\psi(\mathbf{x}, t_1 + \Delta t) = \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} dt' \hat{H}_f\Delta\psi(\mathbf{x}, t') + V(\mathbf{x}, t')\phi(\mathbf{x}, t').$$

En primer orden, considerando despreciable la energía de la corrección de dispersión, obtenemos (para intervalos Δt pequeños):

$$\Delta\psi(\mathbf{x}, t_1 + \Delta t) = -\frac{i}{\hbar}V(\mathbf{x}, t_1)\phi(\mathbf{x}, t_1)\Delta t.$$

Tras este instante, la onda dispersada se propaga libremente, lo cual puede ser expresado en términos del propagador libre G_0 de la siguiente manera:

$$\Delta\psi(\mathbf{x}', t') = i \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x}_1 G_0(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}_1, t_1)\Delta\psi(\mathbf{x}_1, t_1) = i \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x}_1 G_0(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}_1, t_1) \frac{-i}{\hbar}V(\mathbf{x}_1, t_1)\phi(\mathbf{x}_1, t_1)\Delta t.$$

La función de onda total se expresa como suma de la libre y la creada por dispersión, $\psi = \phi + \Delta\psi$. Si usamos el propagador libre para la ϕ :

$$\phi(\mathbf{x}_1, t_1) = i \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} G_0(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}, t)\phi(\mathbf{x}, t),$$

la expresión resultante es:

$$\psi(\mathbf{x}', t') = i \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} G_0(\mathbf{x}', t', \mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t) + i \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x}_1 G_0(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}_1, t_1) \frac{1}{\hbar} V(\mathbf{x}_1, t_1) \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} G_0(\mathbf{x}_1, t_1, \mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t). \quad (1.11)$$

En la Figura 1.3 se observa la comparación cualitativa en un diagrama del proceso de interacción que produce la dispersión, y como los distintos puntos del espacio tiempo son conectados a través de los propagadores, con distinto número de vértices de interacción.

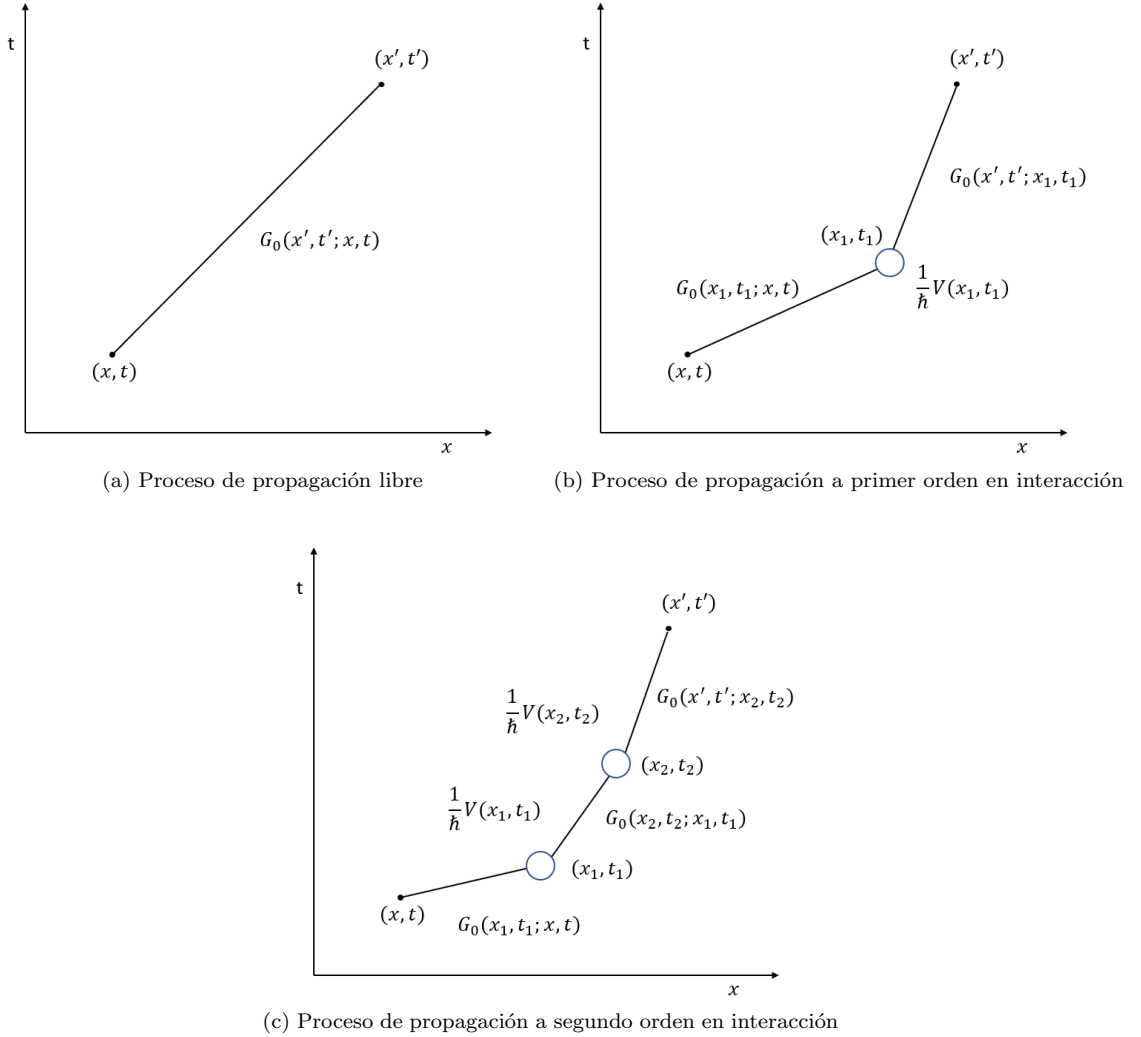


Figura 1.2: Proceso de dispersión múltiple en diagrama espacio-tiempo. Los propagadores libres conectan los distintos vértices de interacción.

Si consideramos un nuevo proceso de interacción para $t_2 > t_1$ durante un intervalo Δt_2 , podemos concluir inmediatamente la expresión para $\psi(\mathbf{x}', t')$. Para abreviar notación, usaremos $x = (\mathbf{x}, t)$ para denotar las coordenadas espacio-temporales:

$$\Delta\psi(x') = i \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_2 \Delta t_2 G_0(x'; x_2) \frac{V(x_2)}{\hbar} \left[G_0(x_2; x) + \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_1 \Delta t_1 G_0(x_2; x_1) \frac{V(x_1)}{\hbar} G_0(x_1; x) \right] \phi(x). \quad (1.12)$$

Es inmediato generalizar el proceso de múltiple dispersión producida en los tiempos $t_1 < t_2 < \dots < t_n$:

$$\begin{aligned}\psi(x') &= \phi(x') + \sum_i \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_i G_0(x'; x_i) \frac{V(x_i)}{\hbar} \phi(x_i) \\ &+ \sum_{i,j|t_i > t_j} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_i \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_j \Delta t_i \Delta t_j G_0(x'; x_i) \frac{V(x_i)}{\hbar} G_0(x_i; x_j) \frac{V(x_j)}{\hbar} \phi(x_j) \\ &+ \dots\end{aligned}$$

Lo que se traduce inmediatamente en una expresión en serie para el propagador:

$$\begin{aligned}G(x'; x) &= G_0(x'; x) + \sum_i \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_i G_0(x'; x_i) \frac{V(x_i)}{\hbar} G_0(x_i; x) \\ &+ \sum_{i,j|t_i > t_j} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_i \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_j \Delta t_i \Delta t_j G_0(x'; x_i) \frac{V(x_i)}{\hbar} G_0(x_i; x_j) \frac{V(x_j)}{\hbar} G_0(x_j; x) \\ &+ \dots\end{aligned}\tag{1.13}$$

Una vez que se reconoce el patrón de formación para 1,2,... procesos de dispersión, se puede sumar la serie identificando la recursividad. Tomando el límite del continuo de $\Delta t_k \rightarrow 0$, las sumas temporales ordenadas se convierten en integrales $\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \Delta t_{i_1} \dots \Delta t_{i_n} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dt_{i_1} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_{i_n}$. Este resultado se conoce como ecuación de Lippman-Schwinger, que expresamos aquí para el propagador:

$$G^+(x'; x) = G_0^+(x'; x) + \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_I G_0^+(x'; x_I) \frac{V(x_I)}{\hbar} G^+(x_I; x).\tag{1.14}$$

Nótese que esta es una ecuación integral para el propagador G^+ . La versión para la función de onda se deduce fácilmente:

$$\begin{aligned}\psi(x') &= \lim_{t \rightarrow -\infty} i \int_{\mathbb{R}^3} d^3x G(x'; x) \phi(x) \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} i \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[G_0^+(x'; x) + \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_I G_0^+(x'; x_I) \frac{V(x_I)}{\hbar} G^+(x_I; x) \right] \phi(x) \\ &= \phi(x') + \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_I G_0^+(x'; x_I) \frac{V(x_I)}{\hbar} i \int_{\mathbb{R}^3} d^3x G^+(x_I; x) \phi(x).\end{aligned}\tag{1.15}$$

Por tanto, obtenemos la ecuación integral que buscábamos para la función de onda ψ :

$$\psi(x') = \phi(x') + \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_I G_0^+(x'; x_I) \frac{V(x_I)}{\hbar} \psi(x_I).\tag{1.16}$$

1.4. Matriz S

En un problema de dispersión tenemos partículas entrando en una región donde se produce la interacción. Nuestra aproximación consiste en suponer que dicha interacción se produce en un intervalo de tiempo acotado. Nos interesará comparar los estados asintóticos entrantes y salientes en el proceso. Exponemos aquí el formalismo general que aplicaremos en el siguiente capítulo para el caso de la electrodinámica cuántica.

Suponemos que la onda entrante es aproximadamente una onda libre para $t \rightarrow -\infty$. En el futuro distante, el propagador nos da la onda saliente:

$$\psi^+(x') = \phi(x') + \int_{\mathbb{R}^4} d^4y G_0^+(x'; y) \frac{V(y)}{\hbar} \psi^+(y).$$

El índice + indica propagación hacia el futuro.

La matriz S se define como la proyección del estado entrante en el futuro ψ_i con el estado asintótico de interés ϕ_f :

$$\langle f | S | i \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \phi_f | \psi_i^+(t) \rangle. \quad (1.17)$$

La propagación hacia el futuro del estado entrante puede hacerse a través del operador de evolución temporal U que en nuestro formalismo está expresado directamente como el propagador. Así pues, podemos expresar la matriz de dispersión a partir de la función del estado libre ϕ_i :

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle \phi_f | U(+\infty; -\infty) | \phi_i \rangle = \lim_{t' \rightarrow \infty} \langle \phi_f(\mathbf{x}', t') | \psi^+(\mathbf{x}', t') \rangle \\ &= \lim_{t' \rightarrow \infty} \langle \phi_f(\mathbf{x}', t') | \phi_i(\mathbf{x}', t') \rangle + \lim_{t' \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{x}' \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \phi_f^*(\mathbf{x}', t') G_0(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) \frac{V(\mathbf{x}, t)}{\hbar} \psi_i(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

De la solución iterada (1.15) tenemos una expansión de S para distintos órdenes, lo que corresponde a considerar más vértices de interacción:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \delta_{fi} + \lim_{t' \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{x}' \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \phi_f^*(x') G_0^+(x'; x) \frac{V(x)}{\hbar} \phi_i(x) \\ &\quad + \lim_{t' \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{x}' \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y \phi_f^*(x') G_0^+(x', x) \frac{V(x)}{\hbar} G_0^+(x; y) \frac{V(y)}{\hbar} \phi_i(y) \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (1.18)$$

1.5. Matriz S para la QED

Nuestro objetivo en esta sección es deducir una expresión simple para la matriz S en el caso de partículas de Dirac. Haciendo uso del principio de sustitución mínima $p \rightarrow p - eA$, aplicamos la ecuación de Dirac para los propagadores. Llamaremos S_F^0 al propagador para la ecuación libre de Dirac y S_F al propagador general en caso de que haya interacción electromagnética. El propagador libre satisface la ecuación:

$$(i\hbar\partial - mc)S_F^0 = \hbar\delta^4.$$

Al aplicar la sustitución, la ecuación de Dirac para funciones se convierte en:

$$(i\hbar\partial - mc)\psi = e\mathcal{A}\psi. \quad (1.19)$$

Su versión para el propagador será:

$$(i\hbar\partial - mc)S_F = \hbar\delta^4 + e\mathcal{A}S_F. \quad (1.20)$$

Si proponemos una solución S_F que verifique la ecuación integral de convolución:

$$S_F(x'; x) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y S_F^0(x'; y) \left[\delta(y - x) + \frac{e}{\hbar} \mathcal{A}(y) S_F(y; x) \right],$$

la ecuación (1.20) se verifica automáticamente. Desarrollando, obtenemos una ecuación integral que será de mucha utilidad para expresar los distintos términos de dispersión de la matriz S :

$$S_F(x'; x) = S_F^0(x', x) + \frac{e}{\hbar} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y S_F^0(x'; y) \mathcal{A}(y) S_F(y; x). \quad (1.21)$$

En el caso de la función de onda, la ecuación resultante se expresa de la forma:

$$\psi(x') = \phi(x') + \frac{e}{\hbar} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y S_F^0(x'; y) \mathcal{A}(y) \psi(y). \quad (1.22)$$

Esta ecuación puede ser iterada para llegar a una expresión análoga a (1.13) para el caso de la electrodinámica:

$$\begin{aligned} S_F(x'; x) &= S_F^0(x', x) + \frac{e}{\hbar} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y S_F^0(x'; y) \mathcal{A}(y) S_F^0(y; x) \\ &\quad + \left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y_1 \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y_2 S_F^0(x', y_1) \mathcal{A}(y_1) S_F^0(y_1; y_2) \mathcal{A}(y_2) S_F^0(y_2; x) \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (1.23)$$

La misma ecuación, pero para funciones de onda queda:

$$\begin{aligned}\psi(x') &= \phi(x') + \frac{e}{\hbar} \int_{\mathbb{R}^4} d^4y S_F^0(x'; y) \mathcal{A}(y) \phi(y) \\ &+ \left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^4} d^4y_1 \int_{\mathbb{R}^4} d^4y_2 S_F^0(x', y_1) \mathcal{A}(y_1) S_F^0(y_1; y_2) \mathcal{A}(y_2) \phi(y_2) \\ &+ \dots\end{aligned}\tag{1.24}$$

Es importante recalcar cómo en los términos sucesivos aparecen las potencias de e/\hbar . Cuando se ajustan convenientemente las constantes, dichos coeficientes son proporcionales a la constante de estructura fina $\alpha \approx 1/137$, lo que indica que la convergencia del desarrollo perturbativo es rápida.

Existe una representación especialmente útil para el propagador libre, que permite distinguir la evolución temporal de electrones (energías positivas) y positrones (energías negativas). Más detalles sobre el desarrollo que sigue pueden encontrarse en el capítulo 2 de [2]. El propagador S_F puede expresarse de forma general:

$$S_F(x'; x) = -i\theta(t' - t) \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{p} \sum_{r=1}^2 \psi_p^r(x') \bar{\psi}_p^r(x) + i\theta(t - t') \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{p} \sum_{r=3}^4 \psi_p^r(x') \bar{\psi}_p^r(x),\tag{1.25}$$

donde ψ_p^r es la base de espinores de Dirac con energías positivas ($r = 1, 2$) y negativas ($r = 3, 4$). De esta expresión se deriva, usando la ecuación (1.22) la siguiente representación:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \phi(x) - \frac{ie}{\hbar} \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \theta(t' - t) \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{p} \sum_{r=1}^2 \psi_p^r(x) \bar{\psi}_p^r(y) \mathcal{A}(y) \psi(y) \\ &+ \frac{ie}{\hbar} \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \theta(t' - t) \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{p} \sum_{r=3}^4 \psi_p^r(x) \bar{\psi}_p^r(y) \mathcal{A}(y) \psi(y).\end{aligned}$$

Para construir la matriz S basta insertar esta representación de la onda dispersada en:

$$S_{fi} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \langle \phi(\mathbf{x}, t) | \psi_i(\mathbf{x}, t) \rangle.$$

El límite $t \rightarrow +\infty$ se toma para electrones y el límite $t \rightarrow -\infty$ para positrones, ya que estos tienen un factor de evolución temporal negativo:

$$\begin{aligned}S_{fi} &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \langle \phi_f(x) | \phi_i(x) \rangle + \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left\langle \phi_f(x) \left| -\frac{ie}{\hbar} \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \theta(t' - t) \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{p} \sum_{r=1}^2 \psi_p^r(x) \bar{\psi}_p^r(y) \mathcal{A}(y) \psi(y) \right. \right\rangle \\ &+ \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left\langle \phi_f(x) \left| \frac{ie}{\hbar} \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \theta(t' - t) \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{p} \sum_{r=3}^4 \psi_p^r(x) \bar{\psi}_p^r(y) \mathcal{A}(y) \psi(y) \right. \right\rangle.\end{aligned}$$

El producto escalar implica una integral $\int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x}$. Este producto proyecta solo los estados cuyos números cuánticos coinciden con los de ϕ_f : el resto de términos en $\int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{p} \sum_r$ no contribuye. Normalmente consideramos por separado la suma en energías positivas y negativas según sea el estado inicial (electrones o positrones). Así, la expresión de S para electrones y positrones:

$$S_{fi} = \delta_{fi} - \frac{ie}{\hbar} \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \bar{\phi}_f(y) \mathcal{A}(y) \psi_i(y) \quad (\text{electrones}),\tag{1.26}$$

$$S_{fi} = \delta_{fi} + \frac{ie}{\hbar} \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \bar{\phi}_f(y) \mathcal{A}(y) \psi_i(y) \quad (\text{positrones}).\tag{1.27}$$

Cabe destacar que ψ_i sigue siendo la función de onda total, no es el estado asintótico entrante (que es una onda libre, ϕ_i). Así, para efectuar cálculos hay que desarrollar perturbativamente S utilizando la forma iterativa (1.5). Dejando de lado el término δ_{fi} que no describe dispersión, obtenemos una expresión para la S a distintos órdenes de interacción:

$$S_{fi}^n = \mp i \left(\frac{e}{\hbar}\right)^n \int_{\mathbb{R}^{4n}} d^4y_1 \cdots d^4y_n \bar{\phi}_f(y_n) \mathcal{A}(y_n) S_F(y_n; y_{n-1}) \cdots S_F(y_2; y_1) \mathcal{A}(y_1) \phi_i(y_1).$$

Usualmente trabajaremos a primer orden, con lo que nos basta con la expresión:

$$S_{fi} \approx \mp \frac{ie}{\hbar} \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \bar{\phi}_f(y) \mathcal{A}(y) \phi_i(y) \quad (1.28)$$

donde ahora sí tenemos el estado entrante ϕ_i .

Capítulo 2

Interacción electrón-protón

En este capítulo calcularemos secciones eficaces de procesos de dispersión de electrones contra protones. El proceso queda esquemáticamente representado en la Figura 2.1. En primer lugar consideramos el protón como un centro de fuerza coulombiano, fijado en su posición. Después consideraremos el protón como partícula de Dirac sin estructura, lo que introducirá la posibilidad de retroceso en el mismo. Para terminar, modelaremos el protón como una partícula con estructura interna, a través de los factores de forma. Esto permitirá deducir una sección eficaz que será válida para regímenes de energías más altas. Estos resultados se relacionarán con un problema abierto de física actual, la determinación del radio del protón, ya que el proceso de dispersión electrón-protón es uno de los medios experimentales para acceder a dicho radio.

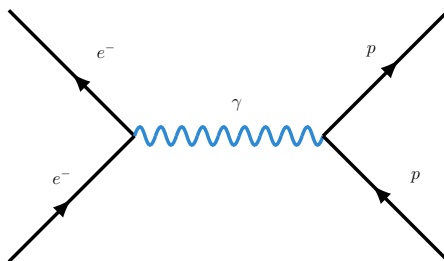


Figura 2.1: Diagrama de Feynman de un proceso de dispersión $e^- - p$

2.1. Dispersión coulombiana

Empezamos estudiando la dispersión de un electrón contra un potencial coulombiano. Siendo $e < 0$ la carga elemental del electrón, el potencial coulombiano corresponde a:

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{x}|}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad A^\mu \equiv \left(\frac{1}{c}\Phi(x), \mathbf{0} \right) \implies \mathcal{A} = -\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \gamma^0.$$

Este proceso puede ser representado con el diagrama de Feynman de la Figura 2.2.

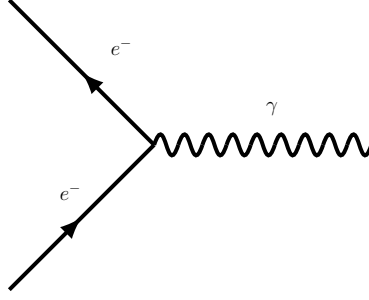


Figura 2.2: Diagrama de Feynman de un proceso de dispersión e^- con un potencial de Coulomb

A partir de la ecuación (1.28) podemos calcular la sección eficaz del proceso a primer orden. Los estados asintóticos entrante y saliente con momento, energía y polarización correspondientes $p_i, E_i, s_i; p_f, E_f, s_f$ son:

$$\psi_i = \sqrt{\frac{mc^2}{E_i V}} u(p_i, s_i) \exp(-ip_i^\mu x_\mu / \hbar)$$

$$\psi_f = \sqrt{\frac{mc^2}{E_f V}} u(p_f, s_f) \exp(-ip_f^\mu x_\mu / \hbar).$$

El elemento de la matriz de amplitud S es:

$$S_{fi} = -i \frac{e}{\hbar} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y \bar{\psi}_f(y) \hat{A} \psi_i(y) = + \frac{iZ e^2}{4\pi \epsilon_0 \hbar c} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y \frac{mc^2}{V} \frac{1}{\sqrt{E_i E_f}} \bar{u}_f \gamma^0 u_i \exp\left(-i \frac{(p_i - p_f)^\mu y_\mu}{\hbar}\right).$$

Podemos identificar inmediatamente la constante de estructura fina: $\alpha = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$. La integral en y_0 contribuye a una delta en la energía, lo que está relacionado con la conservación de la energía en el proceso:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy^0 \exp[+i(E_f - E_i)y^0 / \hbar c] = \hbar c \int_{-\infty}^{+\infty} d(t/\hbar) \exp[+i(E_f - E_i)t/\hbar] = 2\pi \hbar c \delta(E_f - E_i).$$

La integral en el espacio puede hacerse por integración por partes dos veces teniendo en cuenta que no hay frontera. Para ello definimos el momento transferido $\mathbf{q} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$, y deducimos:

$$\exp[-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{y} / \hbar] = -\frac{\hbar^2}{|\mathbf{q}|^2} \nabla^2 \exp[-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{y} / \hbar].$$

Con la expresión anterior y usando $\nabla^2(1/|\mathbf{x}|^2) = -4\pi \delta^3(\mathbf{x})$ obtenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{y} \exp\left[-i \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{y}}{\hbar}\right] \frac{1}{|\mathbf{y}|} = \frac{-\hbar^2}{|\mathbf{q}|^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{y} \nabla^2 \left(e^{-i \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{y}}{\hbar}} \right) \frac{1}{|\mathbf{y}|} = \frac{-\hbar^2}{|\mathbf{q}|^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{y} e^{-i \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{y}}{\hbar}} \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{y}|} \right) = \frac{4\pi \hbar^2}{|\mathbf{q}|^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{y} e^{-i \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{y}}{\hbar}} \delta^3(\mathbf{y}).$$

El elemento de matriz queda expresado de la siguiente manera:

$$S_{fi} = iZ\alpha \frac{mc^2}{V \sqrt{E_i E_f}} 2\pi \hbar c \delta(E_f - E_i) \frac{4\pi \hbar^2}{|\mathbf{q}|^2} \bar{u}_f \gamma^0 u_i. \quad (2.1)$$

La probabilidad de tránsito del estado ψ_i al estado ψ_f es el módulo al cuadrado de dicho elemento de matriz:

$$|S_{fi}|^2 = (4\pi\alpha)^2 \frac{m^2 c^4}{V^2 E_i E_f} |\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2 (2\pi \hbar c \delta(E_f - E_i))^2 \left(\frac{\hbar}{|\mathbf{q}|^2} \right)^4.$$

Como nos interesa medir la probabilidad de que el estado final tenga un momento lineal \mathbf{p}_f , hay que multiplicar esta probabilidad por la densidad de estados en momento final, que es:

$$dN_f = \frac{V}{(2\pi \hbar)^3} d^3 \mathbf{p}_f.$$

La densidad de probabilidad de transición del estado ψ_i a un estado con momento \mathbf{p}_f es:

$$|S_{fi}|^2 dN_f = (4\pi\alpha)^2 \frac{m^2 c^4}{V^2 E_i E_f} |\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2 (2\pi\hbar c \delta(E_f - E_i))^2 \left(\frac{\hbar}{|\mathbf{q}|^2} \right)^4 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d^3 \mathbf{p}_f.$$

Formalmente, el cuadrado de la delta en energía es complicado de evaluar. A través de un proceso de paso al límite se puede justificar el cambio:

$$(2\pi\hbar c \delta(E_f - E_i))^2 = 2\pi\hbar c^2 T \delta(E_f - E_i),$$

donde T es el tiempo en el cual se produce el proceso. Esto está justificado para el límite $T \rightarrow +\infty$ lo cual está en consonancia con la física del proceso: estamos comparando estados muy alejados en el tiempo. El cálculo a través de un proceso de límite puede consultarse en el capítulo 3 de la referencia [2]. La sección eficaz diferencial se define como la probabilidad de transición por unidad de tiempo y corriente. Calculamos la corriente para cualquier elección de la polarización, tomando sin pérdida de generalidad el eje z):

$$J_i^\mu = c\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \implies J_i^3 = c\bar{\psi}\gamma^3\psi = c \frac{mc^2}{E_i V} \bar{u}_i \gamma^3 u_i = c \frac{mc^2}{E_i V} \frac{E_i + mc^2}{2mc^2} \frac{pc}{E_i + mc^2} = c \frac{pc}{E_i V} = \frac{v}{V}.$$

La sección eficaz diferencial se expresa entonces como sigue:

$$d\sigma = \frac{|S_{fi}|^2 dN_f}{JT} = \frac{4Z^2 \alpha^2 m^2 c^4}{v E_i E_f} |\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2 \hbar c^2 \frac{\mathcal{X} \delta(E_f - E_i)}{\mathcal{X}} \left(\frac{\hbar}{|\mathbf{q}|} \right)^4 \frac{d^3 \mathbf{p}}{\hbar^3}. \quad (2.2)$$

Un análisis dimensional permite comprobar que las unidades de $d\sigma$ son de área, tal y como corresponde. Dividiendo por la unidad de ángulo sólido sabiendo que $d^3 \mathbf{p}_f = |\mathbf{p}_f|^2 d|\mathbf{p}_f| d\Omega \equiv p_f^2 dp_f d\Omega$, tenemos:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z^2 \alpha^2 m^2 c^4 (\hbar c)^2}{E_i E_f v_i |\mathbf{q}|^4} \delta(E_f - E_i) |\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2 p_f^2 dp_f. \quad (2.3)$$

Considerando la ecuación relativista para energía y momento $E_f^2 = c^2 p_f^2 + m^2 c^4 \implies p_f dp_f = E_f dE_f$ podemos llevar a cabo la integral evaluando la delta que impone la conservación de la energía:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\delta(E_f - E_i) p_f^2}{E_f E_i v_i} dp_f = \int_0^{+\infty} \frac{\delta(E_f - E_i) p_f dE_f}{E_i E_f v_i c^2} = \frac{1}{c^2} \frac{p_i}{E_i v_i} = \frac{1}{c^2}.$$

Por tanto:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z^2 \alpha^2 (mc^2)^2 (\hbar c)^2}{|c\mathbf{q}|^4} |\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2. \quad (2.4)$$

Solo resta evaluar el factor de los espinores. Usualmente se suele promediar en las polarizaciones iniciales ya que no se prepara el estado inicial en ninguna dirección preferente. En los estados finales se detectan todas las posibles polarizaciones. Por tanto podemos reemplazar:

$$|\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2 \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} |\bar{u}(p_f, s_f) \gamma^0 u(p_i, s_i)|^2.$$

La evaluación de una suma de este tipo puede realizarse con los teoremas de traza. Los detalles del cálculo se basan en los resultados expuestos en el apéndice B.2. En general, se tiene:

$$|\bar{u}_f \Gamma u_i|^2 = (\bar{u}_f \Gamma u_i) (\bar{u}_i \bar{\Gamma} u_i).$$

con $\bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$. El resultado final para nuestra suma en polarizaciones es:

$$\frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} |\bar{u}(p_f, s_f) \gamma^0 u(p_i, s_i)|^2 = \frac{E^2 + c^2 \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f + (mc^2)^2}{(mc^2)^2}.$$

Con el ángulo de dispersión θ podemos expresar el momento transferido en función del momento inicial: $|\mathbf{q}| = 2|\mathbf{p}|\sin(\theta/2)$. La expresión que queda para la sección eficaz coulombiana es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z^2 \alpha^2 (mc^2)^2 (\hbar c)^2}{16|c\mathbf{p}|^4 \sin^4(\theta/2)} \frac{E^2 + c^2 \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f + (mc^2)^2}{(mc^2)^2} = \frac{Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{|c\mathbf{p}|^4 \sin^4(\theta/2)} E^2 (1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)).$$

La expresión simplificada, con el factor relativista $\beta = v/c$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{\text{Mott}} = \frac{Z^2\alpha^2(\hbar c)^2}{4\beta^2|c\mathbf{p}|^2 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left[1 - \beta^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]. \quad (2.5)$$

Este resultado se conoce como sección eficaz diferencial de Mott. Podemos compararla con la sección eficaz diferencial de Rutherford:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{\text{Ruth}} = \frac{Z^2\alpha^2(\hbar c)^2}{4\beta^2|c\mathbf{p}|^2 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (2.6)$$

La sección de Mott generaliza a la de Rutherford, tratando el espín de los electrones de una manera intrínsecamente relativista a través de las funciones de onda de Dirac. Puede observarse que la sección de Mott tiene la de Rutherford como límite no relativista. Para el límite ultrarrelativista tenemos que $\beta \rightarrow 1$, $E_i \approx c|\mathbf{p}_i|$ y la sección eficaz para este límite se aproxima por:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{\text{Mott}} = \frac{Z^2\alpha^2(\hbar c)^2 \cos^2(\theta/2)}{4E_i^2 \sin^4(\theta/2)}. \quad (2.7)$$

2.2. Dispersión electrón-protón sin estructura

Estudiamos ahora el caso de dispersión de un electrón y un protón libres. Nos interesa obtener la sección eficaz del proceso en la escala de altas energías, y es por ello que tomaremos el límite ultrarrelativista para el electrón a la hora de obtener la amplitud del proceso de dispersión. En este caso ya no tenemos un potencial de Coulomb fijo, y esperamos encontrar una contribución significativa del retroceso del protón. Nuestra aproximación consiste en modelar el protón como un fermión de espín 1/2 sin estructura, descrito por la ecuación de Dirac. Para calcular el proceso a primer orden partimos del elemento de matriz S :

$$S_{fi} = -ie \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \bar{\psi}_i(y) A(y) \psi_f(y).$$

Conocer la corriente que induce el protón requiere resolver formalmente las ecuaciones de Maxwell. Por comodidad elegimos el gauge de Lorenz. En esta sección adoptamos el sistema natural de unidades, donde $\hbar = c = 1$. En el gauge seleccionado obtenemos:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu \implies \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu \partial_\nu A^\mu = 4\pi J^\nu.$$

Aplicando las técnicas desarrolladas para soluciones fundamentales de EDPs obtenemos la ecuación para el propagador D_F , que resolvemos en el espacio de momentos a través de la transformada de Fourier:

$$\partial_\mu \partial^\mu D_F = 4\pi\delta \implies -q_\mu q^\mu \tilde{D}_F = 4\pi \implies \tilde{D}_F = -\frac{4\pi}{q_\mu q^\mu} \implies D_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^4} d^4q e^{-iq_\mu x^\mu} \frac{-4\pi}{q_\mu q^\mu}.$$

El potencial creado por la corriente es por tanto:

$$A^\mu(x) = (D_F \star J^\mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4y D_F(x-y) J^\mu(y).$$

Obtenemos así el elemento de matriz en términos de las llamadas corrientes de transición:

$$S_{fi} = -i \int_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} d^4x d^4y [e\bar{\psi}_f \gamma_\mu \psi_i](x) D_F(x-y) J^\mu(y).$$

Si consideramos el electrón como el creador de la corriente y el protón como estado entrante y saliente encontramos una expresión completamente análoga. El término $e\bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_i(x)$ es la corriente de transición del electrón. La forma final que usaremos para calcular el elemento de matriz la obtenemos introduciendo la corriente del protón, que por simetría ha de tener la misma forma que la del electrón: $J_p^\mu(y) = (-e)\bar{\Psi}_f \gamma^\mu \Psi_i(y)$. Introducimos la representación en el espacio de momentos del propagador:

$$S_{fi} = -i \int_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} d^4x \frac{d^4q}{(2\pi)^4} d^4y J_\mu^i(x) \tilde{D}_f(q) J_p^\mu(y) e^{iq \cdot (x-y)}. \quad (2.8)$$

Para esclarecer la notación usamos minúsculas para las variables asociadas al electrón y mayúsculas para las del protón. Las funciones de onda para el protón:

$$\begin{aligned}\Psi_i(y) &= \sqrt{\frac{M}{E_i V}} U(P_i, S_i) \exp[-iP_i^\mu y_\mu] \\ \Psi_f(y) &= \sqrt{\frac{M}{E_f V}} U(P_f, S_f) \exp[-iP_f^\mu y_\mu].\end{aligned}$$

Las funciones de onda del electrón:

$$\begin{aligned}\psi_i(x) &= \sqrt{\frac{m}{\epsilon_i V}} u(p_i, s_i) \exp[-ip_i^\mu x_\mu] \\ \psi_f(x) &= \sqrt{\frac{m}{\epsilon_f V}} u(p_f, s_f) \exp[-ip_f^\mu x_\mu].\end{aligned}$$

Por simplificar la notación, abreviaremos los espinores de la siguiente manera:

$$U(P_f, S_f) = U_f \quad U(P_i, S_i) = U_i \quad u(p_f, s_f) = u_f \quad u(p_i, s_i) = u_i.$$

El elemento de matriz, sustituyendo las corrientes y el propagador fotónico \tilde{D}_F :

$$\begin{aligned}S_{fi} &= ie^2 \frac{mM}{(2\pi)^4 V^2 \sqrt{\epsilon_i \epsilon_f E_i E_f}} \int_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} d^4 x d^4 y d^4 q (\bar{u}_f \gamma_\mu u_i) (\bar{U}_f \gamma^\mu U_i) \frac{-4\pi}{q^2} e^{i(p_f - p_i - q)^\mu x_\mu} e^{i(P_f - P_i + q)^\mu y_\mu} \\ &= ie^2 \frac{mM}{V^2 \sqrt{\epsilon_i \epsilon_f E_i E_f}} (\bar{u}_f \gamma_\mu u_i) (\bar{U}_f \gamma^\mu U_i) (2\pi)^4 \int_{\mathbb{R}^4} d^4 q \delta^4(p_f - p_i - q) \delta^4(P_f - P_i + q) \frac{-4\pi}{q^2} \\ &= \frac{ie^2}{V^2} \frac{mM}{\sqrt{\epsilon_i \epsilon_f E_i E_f}} (\bar{u}_f \gamma_\mu u_i) (\bar{U}_f \gamma^\mu U_i) (2\pi)^4 \left(-\frac{4\pi}{(p_f - p_i)^2} \right) \delta^4(P_f + p_f - P_i - P_i).\end{aligned}$$

Aquí la variable $q = p_f - p_i = P_i - P_f = (\omega, \mathbf{q})$ se denomina 4-momento transferido, que transfiere el fotón virtual mediador del electrón al protón. Puede comprobarse que la energía ω y momento \mathbf{q} transferidos por el fotón virtual satisfacen $\omega < |\mathbf{q}|$. Nótese que para un fotón real se verifica $q^2 = \omega^2 - |\mathbf{q}|^2 = 0$. Las deltas aseguran la conservación del 4-momento total para el sistema completo electrón y protón.

Para calcular la sección eficaz del proceso, calculamos la probabilidad de transición entre los estados por unidad de tiempo y volumen ($W_{fi} = |S_{fi}|^2 / (VT)$) y multiplicamos por la densidad de estados finales. Llamamos *amplitud invariante* a la magnitud:

$$M_{fi} = (\bar{u}_f \gamma_\mu u_i) \frac{4\pi e e_p}{q^2} (\bar{U}_f \gamma^\mu U_i). \quad (2.9)$$

Para el cuadrado de la distribución delta hacemos una sustitución similar a la que hicimos en el caso de dispersión con potencial coulombiano:

$$[(2\pi)^4 \delta^4(P_f + p_f - p_i - P_i)]^2 \rightarrow TV (2\pi)^4 \delta^4(P_f + p_f - p_i - P_i).$$

Así, la probabilidad de transición por unidad de tiempo y volumen queda:

$$W_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(P_f + p_f - p_i - P_i) \frac{m^2 M^2}{V^4 \epsilon_i \epsilon_f E_i E_f} |M_{fi}|^2, \quad (2.10)$$

siendo la densidad de estados finales:

$$dN_f = V^2 \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{d^3 P_f}{(2\pi)^3}.$$

Finalmente, para obtener la sección eficaz hay que dividir por el flujo de eventos:

$$d\sigma = \left[\frac{m}{\epsilon_i} \frac{M}{E_i} \frac{1}{|J|V} \right] |M_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_f + p_f - p_i - P_i) \frac{m d^3 p_f}{\epsilon_f (2\pi)^3} \frac{M d^3 P_f}{E_f (2\pi)^3}. \quad (2.11)$$

El término entre corchetes es conocido como factor de flujo F y tiene en cuenta la cantidad de eventos de colisión que hay por unidad de tiempo. El término $|M_{fi}|^2$ es el que describe la interacción en el proceso más allá de la pura cinemática. La delta asegura la conservación del momento total, y los últimos factores son la versión invariante de la densidad de estados finales. Desarrollaremos cada uno de estos factores citados en distintos pasos.

Densidad de estados

La densidad de estados finales del protón admite una reescritura que hace más fácil la integración respecto P_f usando la función escalón de Heaviside θ :

$$\frac{M d^3 \mathbf{P}_f}{E_f} = 2M \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 P_f \delta(P_f^2 - M^2) \theta(P_f^0).$$

Con el cambio de variable $d^3 \mathbf{p}_f = |\mathbf{p}_f|^2 d^3 |\mathbf{p}_f| d\Omega = |\mathbf{p}_f| \epsilon_f d\epsilon_f d\Omega$ e integrando (2.11) sobre el momento final del protón y la energía del electrón:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= F \int_0^\infty d\epsilon_f \int_{\mathbb{R}^4} d^4 P_f \frac{2M}{(2\pi)^2} |M_{fi}|^2 \delta(P_f + p_f - p_i - P_i) |\mathbf{p}_f| \delta(P_f^2 - M^2) \theta(P_f^0) \\ &= F \frac{M}{2\pi^2} \int_0^\infty d\epsilon_f |M_{fi}|^2 |\mathbf{p}_f| \theta(P_i^0 + p_i^0 - p_f^0) \delta((P_i + p_i - p_f)^2 - M^2) \\ &= F \frac{M}{2\pi^2} \int_m^{M+\epsilon_i} d\epsilon_f |M_{fi}|^2 \delta(2m^2 - 2M(\epsilon_f - \epsilon_i) - 2\epsilon_i \epsilon_f + 2|\mathbf{p}_i| |\mathbf{p}_f| \cos(\theta)). \end{aligned}$$

En los límites de integración hemos usado la función escalón para el límite superior, y sabiendo que siempre $\epsilon_f \geq m$. Tras un cálculo cuidadoso con la delta que se obtiene, la expresión resultante es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{FmM}{4\pi^2} |\mathbf{p}_f| \frac{|M_{fi}|^2}{M + \epsilon_i - \epsilon_f \frac{|\mathbf{p}_i|}{|\mathbf{p}_f|} \cos(\theta)}. \quad (2.12)$$

La condición de conservación de energía de la delta implica que:

$$\epsilon_f(M + \epsilon_i) - |\mathbf{p}_i| |\mathbf{p}_f| \cos(\theta) = \epsilon_i M + m^2. \quad (2.13)$$

Amplitud invariante

Calculamos ahora el factor $|M_{fi}|^2$. Normalmente no se conocen las polarizaciones iniciales ni se miden las polarizaciones finales. Por tanto lo usual es promediar en s_i, S_i y sumar en s_f, S_f , obteniendo así:

$$|M_{fi}|^2 \rightarrow \overline{|M_{fi}|^2} = \frac{1}{4} \sum_{s_i, s_f, S_i, S_f} |(\bar{u}_f \gamma_\mu u_i) \frac{4\pi e e_p}{q^2} (\bar{U}_f \gamma^\mu U_i)|^2 = \frac{(4\pi)^2 e^2 e_p^2}{(q^2)^2} L^{\mu\nu} H_{\mu\nu},$$

donde $L^{\mu\nu}$ y $H_{\mu\nu}$ son los tensores leptónico y hadrónico. Se puede demostrar calculando la suma anterior (ver teorema B.11 en el apéndice B.4) que en el caso de electrón y protón sin estructura los tensores se escriben como:

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{p}_f + m}{2m} \gamma^\mu \frac{\not{p}_i + m}{2m} \gamma^\nu \right], \\ H_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{P}_f + M}{2M} \gamma_\mu \frac{\not{P}_i + M}{2M} \gamma_\nu \right]. \end{aligned}$$

Con los teoremas de traza se obtiene, tras algunas manipulaciones, que:

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2m^2} \left[p_i^\mu p_f^\nu + p_f^\mu p_i^\nu - g^{\mu\nu} (p_i \cdot p_f - m^2) \right], \quad (2.14)$$

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{2M^2} \left[P_i^\mu P_f^\nu + P_f^\mu P_i^\nu - g^{\mu\nu} (P_i \cdot P_f - M^2) \right]. \quad (2.15)$$

La contracción de estos dos tensores es un cálculo largo pero sencillo, que resulta en una expresión para $\overline{|M_{fi}|^2}$ una vez se realiza la contracción aplicando linealidad:

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \left(\frac{4\pi e^2}{mMq^2} \right)^2 \frac{1}{2} [(p_i \cdot P_i)(p_f \cdot P_f) + (p_f \cdot P_i)(p_i \cdot P_f) - (p_i \cdot p_f)M^2 - (P_i \cdot P_f)m^2 + 2m^2M^2]. \quad (2.16)$$

Esta amplitud invariante la vamos a evaluar en el sistema de referencia en el que el protón constituye un blanco en reposo, es decir:

$$\begin{cases} P_i = (M, \mathbf{0}), \\ p_i = (\epsilon_i, \mathbf{p}_i), \\ p_f = (\epsilon_f, \mathbf{p}_f), \\ P_f = P_i + p_i - p_f = (M + \epsilon_i - \epsilon_f, \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f). \end{cases}$$

Relacionemos el momento transferido con los anteriores:

$$q^2 = (p_f - p_i)^2 = 2m^2 - 2p_f \cdot p_i = 2(m^2 - \epsilon_f \epsilon_i - \mathbf{p}_f \cdot \mathbf{p}_i) = 2(m^2 - \epsilon_f \epsilon_i - |\mathbf{p}_f| |\mathbf{p}_i| \cos(\theta)). \quad (2.17)$$

Desarrollando los productos de los cuadvectores momento en este sistema de referencia, el corchete en (2.16) resulta:

$$\begin{aligned} \overline{|M_{fi}|^2} &\propto \epsilon_i M p_f \cdot (P_i + p_i - p_f) + \epsilon_f M p_i \cdot (P_i + p_i - p_f) - M^2 (p_i \cdot p_f) - m^2 M (M + \epsilon_i - \epsilon_f) + 2m^2 M^2 \\ &= \epsilon_i M (\epsilon_f M + p_i \cdot p_f - m^2) + \epsilon_f M (\epsilon_i M + m^2 - p_i \cdot p_f) - M^2 p_i \cdot p_f - m^2 M^2 - m^2 M \epsilon_i + m^2 M \epsilon_f + 2M^2 M^2 \\ &= [2\epsilon_i \epsilon_f M^2 - p_i \cdot p_f (M^2 + M(\epsilon_f - \epsilon_i)) + 2m^2 M (\epsilon_f - \epsilon_i)], \end{aligned}$$

de donde obtenemos:

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \left(\frac{4\pi e^2}{q^2} \right) \frac{1}{2m^2 M^2} [2\epsilon_i \epsilon_f M^2 - p_i \cdot p_f (M^2 + M(\epsilon_f - \epsilon_i)) + 2m^2 M (\epsilon_f - \epsilon_i)].$$

Esta expresión puede ponerse en términos de q^2 , ya que de (2.17) se deduce $p_f \cdot p_i = m^2 - q^2/2$, resultando:

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \left(\frac{4\pi e^2}{q^2} \right) \frac{\epsilon_f \epsilon_f}{m^2} \left[1 + \frac{q^2}{4\epsilon_f \epsilon_i} \left(1 + \frac{\epsilon_f - \epsilon_i}{M} \right) - \frac{m^2}{2\epsilon_f \epsilon_i} \frac{\epsilon_f - \epsilon_i}{M} \right].$$

Ahora tomamos el límite ultrarrelativista en la energía del electrón incidente, en el cual:

$$\frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} \rightarrow \frac{\epsilon_f}{\epsilon_i}.$$

El momento transferido simplifica:

$$q^2 = 2(m^2 - \epsilon_f \epsilon_i - |\mathbf{p}_f| |\mathbf{p}_i| \cos(\theta)) \approx -2\epsilon_f \epsilon_i (1 - \cos(\theta)) = -4\epsilon_f \epsilon_i \sin^2(\theta/2).$$

Luego en el límite ultrarrelativista para el electrón:

$$\begin{cases} q^2 \approx -4\epsilon_f \epsilon_i \sin^2(\theta/2), \\ p_f \cdot p_i \approx -\frac{q^2}{2}. \end{cases}$$

La condición de conservación de la energía (2.13) simplifica drásticamente:

$$\begin{aligned} \epsilon_f (M + \epsilon_i) - |\mathbf{p}_f| |\mathbf{p}_i| \cos(\theta) &= \epsilon_i M + m^2 \\ \epsilon_f \epsilon_i - |\mathbf{p}_f| |\mathbf{p}_i| \cos(\theta) - m^2 &= (\epsilon_i - \epsilon_f) M \\ \epsilon_f \epsilon_i (1 - \cos(\theta)) &\approx (\epsilon_i - \epsilon_f) M \\ \frac{\epsilon_f - \epsilon_i}{M} &\approx -\frac{2\epsilon_f \epsilon_i}{M^2} \sin^2(\theta/2) \left(\approx \frac{q^2}{2M^2} \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

En particular, se deduce la importante relación:

$$\epsilon_i = \epsilon_f + 2\frac{\epsilon_i\epsilon_f}{M} \sin^2(\theta/2) \implies \frac{\epsilon_i}{\epsilon_f} = 1 + \frac{2\epsilon_i}{M} \sin^2(\theta/2). \quad (2.19)$$

Basta sustituir las expresiones de q^2 y $\frac{\epsilon_f - \epsilon_i}{M}$ en $|\overline{M_{fi}}|^2$ para obtener, despreciando el término proporcional a m^2/M^2 :

$$\begin{aligned} |\overline{M_{fi}}|^2 &= \left(\frac{4\pi e^2}{q^2}\right)^2 \frac{\epsilon_f \epsilon_i}{m^2} \left[1 + \frac{q^2}{4\epsilon_f \epsilon_i} - \frac{q^2}{M^2} \sin^2(\theta/2) + \frac{m^2}{M^2} \sin^2(\theta/2)\right] \\ &\approx \left(\frac{4\pi e^2}{q^2}\right)^2 \frac{\epsilon_f \epsilon_i}{m^2} \left[1 - \sin^2(\theta/2) - \frac{q^2}{M^2} \sin^2(\theta/2)\right] \\ &= \left(\frac{4\pi e^2}{q^2}\right)^2 \frac{\epsilon_f \epsilon_i}{m^2} \left[\cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2(\theta/2)\right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} &\approx \left(\frac{4\pi e^2}{-4\epsilon_i \epsilon_f \sin^2(\theta/2)}\right)^2 \frac{\epsilon_f \epsilon_i}{m^2} \left[\cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2(\theta/2)\right] \\ &= \frac{\pi^2 e^4}{\epsilon_f \epsilon_i \sin^4(\theta/2)} \frac{1}{m^2} \left[\cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2(\theta/2)\right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Factor de flujo

Bajo la hipótesis de colisión colineal se obtiene una expresión sencilla para el factor de flujo (véase [2], ecuación 3.78) a partir de la expresión $J = \frac{|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i|}{V}$ en función de la velocidad relativa entre ambas partículas:

$$F = \frac{mM}{\sqrt{(p_i \cdot P_i)^2 - m^2 M^2}}.$$

Esta expresión es invariante Lorentz y puede evaluarse en el mismo sistema de referencia que elegimos anteriormente, en el que el protón es el blanco en reposo, resultando:

$$F = \frac{mM}{\sqrt{\epsilon_i^2 M^2 - m^2 M^2}} = \frac{m}{|\mathbf{p}_i|}. \quad (2.22)$$

Sección eficaz diferencial

Haciendo uso de los resultados anteriores puede obtenerse la expresión de la sección eficaz diferencial en la aproximación ultrarrelativista para el electrón. Insertamos la amplitud invariante (2.20), el factor de flujo (2.22) en la expresión con la densidad de estados ya integrada (2.12):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} &= \frac{m^2 M}{4\pi^2} \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} \frac{1}{M + \epsilon_i - \epsilon_f} \frac{|\mathbf{p}_i|}{|\mathbf{p}_f|} \frac{\pi^2 e^4}{\cos(\theta) \epsilon_f \epsilon_i \sin^4(\theta/2)} \frac{1}{m^2} \left[\cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2(\theta/2)\right] \\ &\approx \frac{M}{4} \frac{\epsilon_f}{\epsilon_i} \frac{1}{M + \epsilon_i(1 - \cos(\theta))} \frac{\alpha^2}{\epsilon_f \epsilon_i \sin^4(\theta/2)} \left[\cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2(\theta/2)\right] \\ &= \frac{\alpha^2}{4\epsilon_i^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{\left[\cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2(\theta/2)\right]}{1 + 2\frac{\epsilon_i}{M} \sin^2(\theta/2)}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Comparando con la sección eficaz de Mott se observa la aparición de un factor en el denominador. Teniendo en cuenta la relación entre energía incidente y saliente del electrón dada por (2.19) identificamos este factor como el retroceso $f_{\text{rec}} \equiv \epsilon_i/\epsilon_f$, que cuantifica cuánto momento se lleva el protón blanco. La sección eficaz diferencial que resulta es:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4\epsilon_i^2 \sin^4(\theta/2)} f_{\text{rec}}^{-1} \left[\cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2(\theta/2)\right]. \quad (2.24)$$

Para rescatar las unidades en el sistema internacional bastaría multiplicar por $(\hbar c)^2$ y obtener así dimensiones de área. Además de un término de retroceso que no aparecía cuando modelábamos el protón como un centro

coulombiano, el término en corchete es debido a que ambas partículas en colisión son fermiones con espín: a altas velocidades el espín de una es sentido por la otra como un campo magnético que actúa sobre una carga en movimiento, y de ahí la nueva dependencia angular.

2.3. Fórmula de Rosenbluth y factores de forma

El anterior resultado tiene limitaciones: para electrones de altas energías, comienza a jugar un papel importante la estructura interna del protón, que en nuestro tratamiento hemos considerado una partícula de Dirac sin estructura.

Para enfrentarnos a ese problema, modelaremos la corriente del protón de una manera más general, introduciendo los llamados factores de forma del protón. Estos describen la distribución de carga y magnetización del nucleón, introduciendo términos adicionales de interacción con el electrón incidente que modifican la sección eficaz para los rangos de energías superiores. Comenzamos proponiendo un cambio en la corriente:

$$J_p^\mu = e_p \bar{U}(P_f, S_f) \gamma^\mu U(P_i, S_i) \implies J_p^\mu = e_p \bar{U}(P_f, S_f) \Gamma^\mu U(P_i, S_i).$$

Imponiendo condiciones de covarianza Lorentz, hermiticidad e invariancia gauge de la corriente, obtenemos que la expresión más general que existe para el operador de vértice Γ_μ es:

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu F_1 + \frac{i}{2M} F_2 \sigma_{\mu\nu} q^\nu, \quad (2.25)$$

donde q^ν es el 4-momento transferido. Los factores $F_1(q^2)$ y $F_2(q^2)$ son los llamados factores de forma de Pauli y Dirac, respectivamente, y dependen del escalar $q^2 = q_\mu q^\mu$, el único escalar cinemático independiente. A pesar de que no lo hagamos explícito, tanto F_1, F_2 , como Γ dependen de q^2 . El uso de factores de forma fue introducido por R. Hofstadter [3] precisamente para explicar los resultados experimentales de la dispersión de electrones con núcleos.

A pesar de haber cambiado el operador espinorial de la corriente, la misma derivación para el elemento de matriz S_{fi} que se hizo en la sección 2.2 es válida aquí, con la conveniente sustitución $\bar{U}_f \gamma^\mu U_i \implies \bar{U}_f \Gamma^\mu U_i$:

$$S_{fi} = \frac{ie^2}{V^2} \frac{mM}{\sqrt{\epsilon_i \epsilon_f E_i E_f}} (\bar{u}_f \gamma^\mu u_i) (\bar{U}_f \Gamma^\mu U_i) (2\pi)^4 \left(-\frac{4\pi}{q^2} \right) \delta^4(P_f + p_f - P_i - P_i).$$

De hecho, el único término que se ve modificado en la fórmula para la sección eficaz diferencial dada por (2.12) es la amplitud invariante M_{fi} , que es donde está contenida la evaluación de los covariantes bilineales. De nuevo, esta amplitud invariante la promediaremos sobre los estados de polarización entrantes y la sumaremos sobre los estados de polarización salientes:

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{1}{4} \sum_{s_i, s_f, S_i, S_f} \left| \bar{u}_f \gamma^\mu u_i \frac{4\pi e^2}{q^2} \bar{U}_f \Gamma_\mu U_i \right|^2. \quad (2.26)$$

Gracias a la descomposición de Gordon (B.1) podemos utilizar una expresión equivalente para $\bar{U}_f \hat{\Gamma}^\mu U_i$ y eliminar $\sigma_{\mu\nu}$:

$$\bar{U}_f \Gamma_\mu U_i = \bar{U}_f \left(\gamma_\mu F_1 + \frac{i}{2M} F_2 \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right) U_i = \bar{U}_f \left((F_1 + F_2) \gamma_\mu - \frac{F_2}{2M} (P_f + P_i)_\mu \right) U_i.$$

Por tanto, podemos reescribir el operador Γ como:

$$\Gamma_\mu = (F_1 + F_2) \gamma_\mu - \frac{F_2}{2m} (P_f + P_i)_\mu \mathbb{1}.$$

Con esta expresión es fácil comprobar que $\bar{\Gamma} = \Gamma$. Utilizando el teorema B.12 podemos desarrollar la suma (2.26) en función de los tensores leptónico y hadrónico. Este último es el que incorpora los nuevos factores de forma, mientras que el primero permanece inalterado.

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \left(\frac{4\pi e^2}{q^2} \right)^2 L^{\mu\nu} H_{\mu\nu},$$

donde los tensores leptónico hadrónico se calculan como:

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{p}_f + m}{2m} \gamma^\mu \frac{\not{p}_i + m}{2m} \gamma^\nu \right] \quad H_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{P}_f + M}{2M} \Gamma_\mu \frac{\not{P}_i + M}{2M} \Gamma_\nu \right].$$

El nuevo tensor hadrónico se expresa como sigue:

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{P}_f + M}{2M} \Gamma_\mu \frac{\not{P}_i + M}{2M} \Gamma_\nu \right] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{P}_f + M}{2M} \Gamma_\mu \frac{\not{P}_i + M}{2M} \Gamma_\nu \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{P}_f + M}{2M} \left((F_1 + F_2) \gamma_\mu - \frac{F_2}{2M} (P_f + P_i)_\mu \right) \frac{\not{P}_i + M}{2M} \left((F_1 + F_2) \gamma_\nu - \frac{F_2}{2M} (P_f + P_i)_\nu \right) \right] \\ &= \frac{1}{8M^2} \text{Tr} \left[(\not{P}_f + M) \left((F_1 + F_2) \gamma_\mu - \frac{F_2}{2M} (P_f + P_i)_\mu \right) (\not{P}_i + M) \left((F_1 + F_2) \gamma_\nu - \frac{F_2}{2M} (P_f + P_i)_\nu \right) \right]. \end{aligned}$$

El desarrollo del tensor hadrónico a través de esta traza es un cálculo laborioso que precisa un manejo adecuado de todos los teoremas de traza. En el cálculo, que se adjunta en el apéndice C.1, resultan 16 términos de los cuales se anulan la mitad. El resultado final es el siguiente:

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} &= (F_1 + F_2)^2 \left\{ \frac{1}{2M^2} [P_\mu^i P_\nu^f + P_\mu^f P_\nu^i - (P_i \cdot P_f - M^2) g_{\mu\nu}] \right\} \\ &+ \frac{1}{8M^2} \left[F_2^2 \left(\frac{P_i \cdot P_f}{M^2} + 1 \right) - 4F_2(F_1 + F_2) \right] (P_i + P_f)_\mu (P_i + P_f)_\nu \equiv H_{\mu\nu}^{(1)} + H_{\mu\nu}^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Este tensor contiene un primer término que coincide con el tensor hadrónico en el caso sin estructura, multiplicado por el factor $(F_1 + F_2)^2$. El tensor leptónico tiene la misma expresión que en el apartado anterior (2.14), y solo resta calcular la contracción de ambos tensores para evaluar la amplitud invariante:

$$H_{\mu\nu} L^{\mu\nu} = H_{\mu\nu}^{(1)} L^{\mu\nu} + H_{\mu\nu}^{(2)} L^{\mu\nu}.$$

Calculamos las contracciones tensoriales involucradas en $H_{\mu\nu}^{(2)} L^{\mu\nu}$ usando conservación de energía-momento $P_i + p_i = P_f + p_f$, además de la expresión explícita de los vectores en el sistema de referencia laboratorio análoga al caso sin estructura, y la aproximación ultrarrelativista para el electrón:

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^{(2)} L^{\mu\nu} &\propto 2(P_i + P_f) \cdot p_i (P_i + P_f) \cdot p_f - (P_i + P_f) \cdot (P_i + P_f) (p_i \cdot p_f - m^2) \\ &= 2(2P_i + p_i - p_f) \cdot p_i (2P_i + p_i - p_f) \cdot p_f - (P_i \cdot P_i + P_f \cdot P_f + 2P_i \cdot P_f) (p_i \cdot p_f - m^2) \\ &\approx 8P_i \cdot p_i P_i \cdot p_f - (M^2 + M^2 - P_i \cdot (P_i + p_i - p_f)) p_i \cdot p_f \\ &\approx 8M^2 \epsilon_i \epsilon_f - 4M^2 (\epsilon_i \epsilon_f - |\mathbf{p}_i| |\mathbf{p}_f| \cos(\theta)) \\ &\approx 8M^2 \epsilon_i \epsilon_f - 4M^2 \epsilon_i \epsilon_f (1 - \cos(\theta)) = 4M^2 \epsilon_f \epsilon_i (1 + \cos(\theta)) \\ &= 8M^2 \epsilon_i \epsilon_f \cos^2(\theta/2). \end{aligned}$$

Con el mismo desarrollo de cinemática ultrarrelativista que en la sección anterior podemos usar (2.18) para expresar:

$$P_i \cdot P_f = P_i \cdot (2P_i + p_i - p_f) = 2M^2 + M(\epsilon_i - \epsilon_f) \approx M^2 \left(1 - \frac{q^2}{2M^2} \right).$$

Y así obtenemos que el nuevo término en la amplitud invariante:

$$\begin{aligned}
\overline{|M_{fi}^{(2)}|^2} &= \left(\frac{4\pi e^2}{q^2}\right)^2 H_{\mu\nu}^{(2)} L^{\mu\nu} \approx \left(\frac{4\pi e^2}{q^2}\right)^2 \frac{1}{16m^2} \left[F_2^2 \left(\frac{P_i \cdot P_f}{M^2} + 1 \right) - 4F_2(F_1 + F_2) \right] 8\epsilon_i \epsilon_f \cos^2(\theta/2) \\
&= \left(\frac{4\pi e^2}{q^2}\right)^2 \frac{1}{2} \frac{\epsilon_i \epsilon_f}{m^2} \cos^2(\theta/2) \left[F_2^2 \left(2 - \frac{q^2}{2M^2} \right) - 4F_2(F_1 + F_2) \right] \\
&= \left(\frac{4\pi e^2}{q^2}\right)^2 \frac{1}{2} \frac{\epsilon_i \epsilon_f}{m^2} \cos^2(\theta/2) \left[2F_2^2 \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} \right) - 4F_2(F_1 + F_2) \right].
\end{aligned}$$

La amplitud total resulta de sumar el término anterior con el original dado por el caso sin estructura (2.20), multiplicado por $(F_1 + F_2)^2$:

$$\begin{aligned}
\overline{|M_{fi}|^2} &= \overline{|M_{fi}^{(1)}|^2} + \overline{|M_{fi}^{(2)}|^2} \\
&= \left(\frac{4\pi e^2}{q^2}\right)^2 \frac{\epsilon_f \epsilon_i}{m^2} \left\{ \left[(F_1 + F_2)^2 \cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2(\theta/2) \right] + \frac{1}{2} \cos^2(\theta/2) \left[2F_2^2 \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} \right) - 4F_2(F_1 + F_2) \right] \right\} \\
&= \left(\frac{4\pi e^2}{q^2}\right)^2 \frac{\epsilon_f \epsilon_i}{m^2} \left\{ \left(F_1^2 - \frac{q^2}{4M^2} F_2^2 \right) \cos^2(\theta/2) - (F_1 + F_2)^2 \frac{q^2}{2M^2} \sin^2(\theta/2) \right\} \\
&\approx \frac{\pi^2 \alpha^2}{\epsilon_f \epsilon_i \sin^4(\theta/2) m^2} \left\{ \left(F_1^2 - \frac{q^2}{4M^2} F_2^2 \right) \cos^2(\theta/2) - (F_1 + F_2)^2 \frac{q^2}{2M^2} \sin^2(\theta/2) \right\}.
\end{aligned}$$

Esta amplitud invariante puede ser ya introducida en la sección eficaz diferencial dada por (2.12) y así obtener la fórmula de Rosenbluth de dispersión con estructura:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4\epsilon_i^2 \sin^4(\theta/2)} f_{\text{rec}}^{-1} \left\{ \left(F_1^2 - \frac{q^2}{4M^2} F_2^2 \right) \cos^2(\theta/2) - (F_1 + F_2)^2 \frac{q^2}{2M^2} \sin^2(\theta/2) \right\}. \quad (2.28)$$

A la hora de estudiar la estructura interna del protón suelen introducirse los llamados factores de forma de Sachs. Estos están relacionados con la transformada de Fourier de la distribución eléctrica y magnética de carga del protón, y en términos de los factores de Pauli y Dirac tienen la siguiente expresión:

$$\begin{cases} G_E(q^2) = F_1(q^2) - \tau F_2(q^2) \\ G_M(q^2) = F_1(q^2) + F_2(q^2) \\ \tau = -\frac{q^2}{4M^2}. \end{cases} \implies \begin{cases} F_1^2 - \frac{q^2}{4M^2} F_2^2 = \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \\ -(F_1 + F_2)^2 \frac{q^2}{2M^2} = 2\tau G_M^2. \end{cases}$$

Estos factores de forma fueron introducidos en el artículo de M.N. Rosenbluth [4], permitiendo reducir la sección eficaz a la expresión conocida como *fórmula de Rosenbluth*:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4\epsilon_i^2 \sin^4(\theta/2)} \cos^2(\theta/2) f_{\text{rec}}^{-1} \left\{ \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2 \tan^2(\theta/2) \right\}. \quad (2.29)$$

donde podemos identificar de nuevo la sección de Mott como prefactor, junto con el factor de retroceso. En el artículo [5] se detalla la interpretación y relación de los factores de forma de Sachs con la densidad de carga y magnetización del protón. La determinación experimental de estos factores de forma $G_E(q)$ y $G_M(q)$ es posible a través de un ajuste, a 4-momento transferido fijo, de la sección eficaz anterior dividida por la sección de Mott, ajustando linealmente frente a $2\tau \tan^2(\theta/2)$.

2.4. El radio del protón

Con el desarrollo teórico obtenido en la sección anterior es posible realizar una incursión en un tema de investigación activo, que es la determinación efectiva del radio eléctrico del protón. Para ello, debemos relacionar los factores de forma estudiados en la sección anterior con la distribución de densidad del protón. El radio

del protón es una magnitud de capital importancia para los tests de precisión de la electrodinámica cuántica, e interviene asimismo en la determinación precisa de la constante de Rydberg.

En la dispersión de ondas no relativistas los factores de forma aparecen al describir procesos de dispersión por partículas con estructura interna en lugar de elementales (puntuales), a través de la siguiente relación:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{\text{Estructura}} = \frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{\text{Puntual}} \times |F(\mathbf{q})|^2.$$

En estos casos el factor de forma es simplemente la transformada de Fourier de la densidad dispersora:

$$F(\mathbf{q}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}.$$

En cierta medida esto es lo que representan los factores de forma de Sachs eléctrico y magnético del protón que aparecen en la fórmula de Rosenbluth (2.29). No obstante, estamos en un contexto relativista y la interpretación como transformada de Fourier sólo puede realizarse en el llamado sistema de referencia de *Breit*, en el cual el protón no adquiere energía, lo cual está descrito equivalentemente por:

$$q^0 = 0 \iff \begin{cases} P_i = (E, +\mathbf{P}) \\ P_f = (E, -\mathbf{P}). \end{cases}$$

Los datos experimentales para los factores de forma que se obtienen de [6] a partir de la sección eficaz de dispersión elástica electrón-protón se representan en la Figura 2.3 y sugieren un buen ajuste de los factores de forma por la distribución dipolar:

$$G_D(q^2) = \frac{1}{\left(1 + \frac{|q^2|}{Q^2}\right)^2},$$

con el parámetro de ajuste $Q^2 = 0,71 \text{ GeV}^2 = 18,2 \text{ fm}^{-2}$.

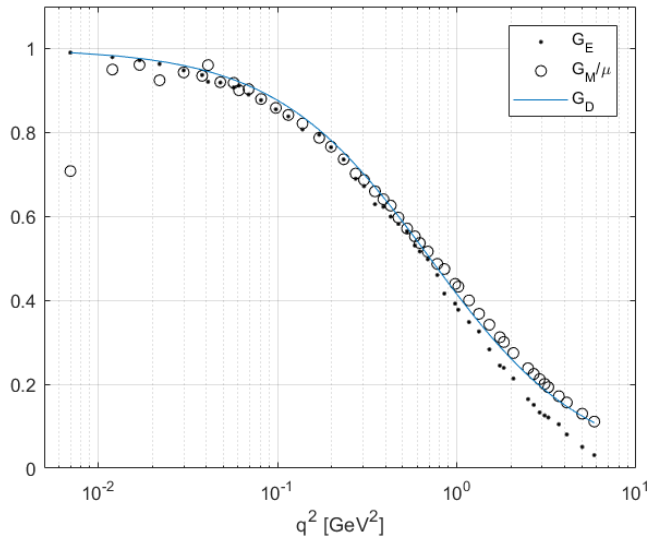


Figura 2.3: Factores de forma eléctrico, magnético normalizado a μ_p y factor de forma dipolar frente a cuadrado momento transferido [6].

Con la interpretación en el sistema de referencia de Breit ($|q^2| = |\mathbf{q}|^2$), podemos usar la transformada inversa de Fourier para obtener la distribución de densidad del protón asociada al factor de forma (normalizada a 1):

$$\rho(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} G_D(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left(1 + \frac{|\mathbf{q}|^2}{Q^2}\right)^{-2} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = \frac{Q^3}{8\pi} e^{-Q|\mathbf{x}|}.$$

Esta distribución permite estimar el radio cuadrático medio del protón:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} \frac{Q^3}{8\pi} e^{-Q|\mathbf{x}|} |\mathbf{x}|^2 = \frac{Q^3 4\pi}{8\pi} \int_0^\infty r^4 e^{-Qr} dr = \frac{Q^3}{2} \frac{4!}{Q^5} = \frac{12}{Q^2}.$$

Con el parámetro Q^2 ajustado anteriormente obtenemos una primera aproximación:

$$r_{\text{RCM}} = \sqrt{12/Q^2} \approx 0,81 \text{ fm}$$

Este resultado constituye más bien una estimación del orden de magnitud debido a la aproximación involucrada en la distribución dipolar.

Hasta 2010 el análisis de los factores de forma del protón obtenidos por dispersión $e^- - p$ eran la manera prevalente de obtener el radio del protón. En general, si no se supone una distribución tipo dipolar, el radio cuadrático medio se obtiene como el segundo momento de la transformada de Fourier inversa de $G_E(q)$, que a su vez se escribe como:

$$r_{\text{RCM}} = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = -6 \left. \frac{dG_E(q)}{dq} \right|_{q=0}$$

La presencia de la derivada evaluada en $q = 0$ hace imprescindible obtener datos de dispersión electrón-protón a bajo momento transferido, siendo imposible realizar colisiones a $q = 0$. Hasta 2010, el valor CODATA recomendado del radio del protón estaba determinado mayormente por datos de dispersión electrón-protón, con un valor de 0.8775(51) fm [7].

En 2010, R.Pohl y A.Antognini publicaron un artículo [8] en el cual se obtenía el radio del protón por un método diferente. Midieron el corrimiento Lamb de la transición 1S-2S en hidrógenos muónicos $\mu - p$. En estos átomos, la función de onda del muón solapa mucho más con el protón y la corrección Lamb por polarización del vacío y la corrección por tamaño finito del protón son mucho más apreciables que en el hidrógeno electrónico. El valor que obtuvieron a partir de la corrección en energía de la transición fue de 0.84184(67) fm, con una incertidumbre mucho menor que el resultado obtenido a través de dispersión elástica $e^- - p$. Es importante notar que se desviaba en 5σ del valor recomendado CODATA 2010. En 2013 se refinaron estos resultados por espectroscopía muónica con un nuevo valor aún más pequeño de 0.84087(39) fm [9].

Esta incompatibilidad manifiesta de ambos resultados con los obtenidos por dispersión $e - p$ han llevado a que la determinación del radio del protón siga siendo a día de hoy un tema de investigación activo. La edición de 2014 de valores recomendados de constantes fundamentales CODATA no incluía el valor obtenido por espectroscopía de hidrógeno muónico.

Algunas propuestas activas de investigación sugieren soluciones exóticas (tales como que la interacción muón-protón difiera de la electrón-protón), mientras que otras proponen análisis más complejos de los datos ya presentes (considerando intercambio de dos fotones o extrapolando G_E a $q = 0$ con extensiones analíticas en el plano complejo). En [10] puede encontrarse una presentación en la cual se propone este acercamiento a la resolución del problema.

Una propuesta de solución parcial fue dada en 2015 por Donnelly, Hasell y Milner en el artículo [11], donde se analiza la necesidad de realizar una transformación de Lorentz de vuelta al sistema laboratorio de las distribuciones y los factores de forma, ya que su interpretación como transformadas de Fourier de las densidades de carga y magnetización solo es válida en el sistema de referencia de Breit introducido anteriormente. El valor del radio cuadrático medio corregido con este método es menor que el convencional, aunque aún dista de los resultados de espectroscopía muónica.

En 2018, un nuevo valor para el radio del protón a partir de dispersión $e - p$ fue publicado [12] con el resultado de 0.887(12) fm, aún claramente incompatible con el obtenido por espectroscopía muónica.

Año/fuente	2010 CODATA [7]	2010 (espect. μ) [8]	2013 (espect. μ) [9]	2014 CODATA [13]	2015 [11]	2018 [12]
r_p/fm	0,8775(51)	0,84184(67)	0,84087(39)	0,8751(61)	0,860(8)	0,887(12)

Cuadro 2.1: Valores del radio eléctrico del protón. Los obtenidos por espectroscopía de hidrógeno muónico son más precisos y se desvían notoriamente de los establecidos por dispersión $e - p$

Capítulo 3

Interacción débil

En este último capítulo pretendemos estudiar procesos de interacción débil utilizando el mismo formalismo de propagadores, centrandó nuestro interés en la interacción del neutrino electrónico con los nucleones.

El neutrino, que fue postulado por Pauli en 1930 para explicar el decaimiento beta nuclear, no fue detectado hasta 1953 por Cowan y Reines [14]. El estudio experimental de los neutrinos es complejo debido a que sólo interactúan débilmente con la materia, y sin embargo es de crucial importancia conocer sus propiedades, algunas de ellas aún hoy bastante desconocidas. El Modelo Estándar contempla tres generaciones de neutrinos, uno por cada sabor de su leptón correspondiente (neutrino electrónico, ν_e ; muónico ν_μ y tauónico ν_τ ; en general lo denotamos como ν_l donde l indica el sabor), todos ellos sin masa en este marco teórico. Sin embargo, la confirmación experimental de la oscilación de neutrinos [15] implica que estos tienen masa no nula y que pueden cambiar de sabor. A día de hoy tampoco se sabe si los neutrinos son su propia antipartícula, y se están realizando investigaciones sobre la existencia de decaimiento doble beta sin emisión de neutrinos que implicaría que los neutrinos son fermiones de Majorana: sus propias antipartículas. Una revisión detallada de la física de neutrinos puede encontrarse en el artículo [16], donde en la sección 1.1 se discute en detalle la problemática de la masa de los neutrinos y su carácter de partículas de Dirac o Majorana.

Una descripción detallada sobre cómo son dispersados los neutrinos por los nucleones es el primer paso para describir la interacción de estos con la materia, lo cual es crucial para el diseño de experimentos y la caracterización de las propiedades de estas partículas. En ese sentido, el trabajo de fin de máster [17] trata en detalle la dispersión de neutrinos por nucleones como paso preliminar al posterior estudio de la dispersión de neutrinos por núcleos, sistema de muchos nucleones ligados por la interacción fuerte.

En este trabajo nos centramos en el estudio de la interacción neutrino-neutrón (antineutrino-protón) mediada por corrientes cargadas: $\nu_l + n \rightarrow l^- + p$ ($\bar{\nu}_l + p \rightarrow l^+ + n$). En este proceso se produce un leptón cargado del mismo sabor que el neutrino (antineutrino) incidente. En experimentos como Super-Kamiokande se detecta gracias a la radiación Cherenkov la presencia de estos leptones finales de alta energía producto de la dispersión de neutrinos con los núcleos del material activo. La dependencia angular con el ángulo cenital permite demostrar la oscilación en el sabor de los neutrinos atmosféricos. Un estudio de la interacción de neutrinos con núcleos de ^{12}C se puede encontrar en [18]. Este estudio es particularmente interesante pues muchos detectores usan material activo basado en aceites orgánicos ricos en carbono.

3.1. Matriz S para procesos débiles

A lo largo de este capítulo nos centraremos en procesos de interacción de neutrinos con nucleones mediados por corrientes cargadas. Esto implica que las partículas entrantes y salientes del proceso no son las mismas. El ejemplo con el que empezaremos está representado en la Figura 3.1: un neutrino incide sobre un neutrón y como producto resultan un leptón del mismo sabor y un protón. Más adelante particularizaremos para el caso de neutrinos electrónicos, lo que permitirá simplificar las expresiones bajo un límite ultrarrelativista que está justificado en el caso electrónico pero no muónico. También consideraremos el proceso en el cual un antineutrino incide sobre un protón y se obtiene un neutrón y un antileptón como productos.

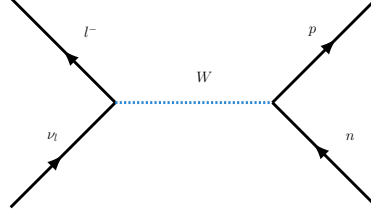


Figura 3.1: Diagrama de Feynman de un proceso de dispersión ν_l con neutrón

En el capítulo 1 dedujimos una expresión para el elemento de matriz S a primer orden en teoría de perturbaciones, dado por (1.28):

$$S_{fi} \approx \mp i \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \bar{\phi}_f(y) A(y) \phi_i(y).$$

En el capítulo 2, dependiendo del proceso, desarrollamos el término potencial bien en términos de la expresión coulombiana o en términos de la corriente de la otra partícula puesta en juego en el proceso, a través del propagador fotónico $D_F(x-y)$. Este propagador lo obteníamos a través de una transformada de Fourier y una convolución:

$$D_{\mu\nu}(x-y) = \frac{g_{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^4} d^4q e^{iq \cdot (x-y)} \left(-\frac{4\pi}{q^2} \right).$$

La expresión que obteníamos para el elemento de matriz era:

$$S_{fi} = -i \int_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} d^4x \frac{d^4q}{(2\pi)^4} d^4y J_l^\mu(x) \tilde{D}_{\mu\nu}(q) J_p^\nu(y) e^{iq \cdot (x-y)}. \quad (3.1)$$

En este capítulo seguimos un procedimiento similar para el campo de interacción débil. Al igual que en el caso electromagnético, tendremos un bosón mediador, también asociado a un campo vectorial. De modo similar al fotón γ , asociado al campo electromagnético A_μ , en el caso de interacción débil, tenemos el bosón W^\pm asociado al campo complejo $W_\mu^\pm = \sqrt{\frac{1}{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)$. Siendo bosones vectoriales, ambos tienen espín 1. No obstante, en el caso de la interacción débil, el bosón es masivo, con $M_W = 80,379(12) \text{ GeV}/c^2$. En el caso electromagnético, interacción con análogo clásico, pudimos expresar el campo a través de la corriente resolviendo las ecuaciones de Maxwell para obtener el propagador fotónico. La expresión para el propagador del bosón W es algo más complicada, resultando finalmente (detalles sobre la deducción del propagador débil pueden encontrarse en [19]):

$$\tilde{D}_{\alpha\beta}(q) = \frac{-g_{\alpha\beta} + q_\alpha q_\beta / M_W^2}{q^2 - M_W^2}.$$

En nuestro caso de interés, las energías involucradas son significativamente menores que la masa del bosón W; por consiguiente, el propagador puede aproximarse por la expresión (límite estático):

$$D_{\alpha\beta}(q) \approx \frac{g_{\alpha\beta}}{M_W^2}. \quad (3.2)$$

La enorme masa del bosón W es la que determina la baja intensidad de la interacción débil, así como su corto alcance. Si bien es cierto que la constante de acoplamiento débil g es mucho mejor que la constante electromagnética,

si esta fuese la única diferencia ambas interacciones se harían comparables a energías superiores a la masa del bosón W. Puede consultarse más información referente a la teoría de interacción débil en los capítulos [20].

Procedemos ahora a fijar la notación para los 4-momentos puestos en juego en nuestro proceso. Por simplicidad suponemos casi iguales las masas del neutrón y del protón: $m_p \approx m_n \equiv M$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Neutrino: } k_{\nu_l} = (\epsilon_{\nu_l}, \mathbf{k}_{\nu_l}). \\ \text{Neutrón: } P_n = (E_n, \mathbf{P}_n). \\ \text{Protón: } P_p = (E_p, \mathbf{P}_p). \\ \text{Leptón: } k_l = (\epsilon_l, \mathbf{k}_l). \end{array} \right.$$

De nuevo el 4-momento transferido es $q = k_{\nu_l} - k_l$. El papel de la carga del electrón lo juega la constante de acoplo débil g que introduciremos como factor de proporcionalidad para las corrientes débiles. Si bien las corrientes en electrodinámica son puramente vectoriales (dependencia con γ^μ) las corrientes débiles presentan una parte vectorial y otra axial (dependencia con $\gamma^\mu \gamma^5$). La introducción de este término axial es crucial en la interacción débil pues lleva a la rotura de simetría que involucra la violación de la paridad y de la conjugación de carga. La demostración experimental de la violación de paridad tuvo lugar en 1956 en un experimento en el que se estudiaba la distribución angular de los electrones emitidos por decaimiento β del ^{60}Co . Se observó una fuerte asimetría en el ángulo que forman el momento de los electrones emitidos y la orientación del momento angular del núcleo padre, polarizado por un campo magnético intenso [21].

Las expresiones que usaremos para la corriente leptónica y hadrónica se pueden consultar en *Quarks and leptons* [20] capítulo 12:

$$(J_l^\alpha)^\dagger(x) = \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\psi}_l(x) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_l}(x). \quad (3.3)$$

Esta corriente se dice *charge-raising* pues aumenta la carga del estado final con respecto del inicial, y de ahí el símbolo \dagger . Usamos para los índices de Lorentz las letras α y β para no confundir el neutrino ν con ningún índice tensorial. Podemos desarrollar las funciones de onda del neutrino y el leptón y obtener:

$$(J_l^\alpha)^\dagger(x) = \frac{g}{2V\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m_l m_{\nu_l}}{\epsilon_l \epsilon_{\nu_l}}} \{ \bar{u}(k_l, s_l) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) u(k_{\nu_l}, s_{\nu_l}) \}^\dagger e^{i(k_l - k_{\nu_l}) \cdot x}. \quad (3.4)$$

Esta corriente leptónica modela los leptones entrantes y salientes como partículas puntuales y sin estructura. Esto no sería adecuado para modelar los nucleones involucrados en el proceso, y análogamente a cómo procedimos en la sección 2.3 introducimos factores de forma para parametrizar el desconocimiento exacto de la estructura interna débil de protón y neutrón:

$$J_N^\beta(y) = \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\Psi}_p(y) \Gamma^\beta \Psi_n(y). \quad (3.5)$$

La función del vértice hadrónico la expresamos en términos de los factores de forma vector F_1^V, F_2^V , axial G_A y pseudoescalar G_P :

$$\Gamma^\beta = \underbrace{F_1^V \gamma^\beta + i \frac{F_2^V}{2M} \sigma^{\beta\lambda} q_\lambda}_{\Gamma_V^\beta} + \underbrace{G_A \gamma^\mu \gamma^5 + \frac{G_P}{2M} q^\beta \gamma^5}_{\Gamma_A^\beta}. \quad (3.6)$$

Esta corriente también podemos desarrollarla en términos de espinores de Dirac y obtener:

$$J_N^\beta(y) = \frac{g}{2V\sqrt{2}} \frac{M}{\sqrt{E_p E_n}} \bar{U}_p(P_p, S_p) \Gamma^\beta \bar{U}_n(P_n, S_n) e^{i(P_n - P_p) \cdot y}. \quad (3.7)$$

Ahora insertamos las corrientes leptónica (3.4) y hadrónica (3.7) en la expresión para el elemento de matriz

(3.1) junto con el propagador del bosón W (3.2):

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= -i \int d^4x \frac{d^4q}{(2\pi)^4} d^4y \frac{g^2 M}{8V^2} \sqrt{\frac{m_l m_{\nu_l}}{\epsilon_{\nu_l} \epsilon_l E_p E_n}} [\bar{u}_l \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) u_{\nu_l}]^\dagger \frac{g_{\alpha\beta}}{M_W^2} [\bar{U}_p \Gamma^\beta U_n] e^{i(k_l - k_{\nu_l} + q) \cdot x} e^{i(P_p - P_n - q) \cdot y} \\
&= -i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{g^2 M}{8M_W^2 V^2} \sqrt{\frac{m_l m_{\nu_l}}{\epsilon_{\nu_l} \epsilon_l E_p E_n}} [\bar{u}_l \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) u_{\nu_l}]^\dagger [\bar{U}_p \Gamma^\alpha U_n] (2\pi)^4 \delta^4(k_l - k_{\nu_l} + q) (2\pi)^4 \delta^4(P_p - P_n - q) \\
&= -i \frac{g^2 M}{8M_W^2 V^2} \sqrt{\frac{m_l m_{\nu_l}}{\epsilon_{\nu_l} \epsilon_l E_p E_n}} [\bar{u}_l \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) u_{\nu_l}]^\dagger [\bar{U}_p \Gamma^\alpha U_n] (2\pi)^4 \delta^4(P_p - P_n - k_{\nu_l} + k_l).
\end{aligned}$$

Podemos reescribirlo usando la constante de Fermi introducida en su teoría de la desintegración beta ($\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}$):

$$S_{fi} = -i \frac{G_F M}{V^2 \sqrt{2}} \sqrt{\frac{m_l m_{\nu_l}}{\epsilon_{\nu_l} \epsilon_l E_p E_n}} [\bar{u}_l \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) u_{\nu_l}]^\dagger [\bar{U}_p \Gamma^\alpha U_n] (2\pi)^4 \delta^4(P_p - P_n - k_{\nu_l} + k_l).$$

3.2. Cálculo de la amplitud invariante en $\nu_e + n \rightarrow e^- + p$

Nos centramos en lo que sigue en los procesos con sabor electrónico. Para no sobrecargar la notación, entendemos tanto aquí como en los apéndices referenciados que la etiqueta ν identifica siempre a neutrinos electrónicos (y $\bar{\nu}$ a antineutrinos electrónicos). Debido a la baja masa del leptón saliente (el electrón), podremos tomar un límite ultrarrelativista en la región cinemática que nos interesa simplificando considerablemente los cálculos.

Obtendremos la sección eficaz diferencial a partir de S_{fi} , calculando primero la probabilidad de transición por unidad de volumen y tiempo, desarrollando el cuadrado de la delta con el mismo razonamiento que en el capítulo anterior: $|(2\pi)^4 \delta^4|^2 \rightarrow (2\pi)^4 VT \delta^4$.

$$W_{fi} = \frac{|S_{fi}|^2}{VT} = \frac{G_F^2 M^2 m_\nu m_l}{2\epsilon_{\nu} \epsilon_l E_p E_n V^4} (2\pi)^4 \delta^4(P_p - P_n - k_\nu + k_l) \left| [\bar{u}_l \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) u_\nu]^\dagger [\bar{U}_p \Gamma^\alpha U_n] \right|^2. \quad (3.8)$$

El producto de espinores conforma la amplitud invariante M_{fi} . Siguiendo un procedimiento similar al usado en la descripción del proceso de dispersión $e - p$, promediamos su cuadrado sobre las polarizaciones entrantes y sumamos sobre las polarizaciones salientes. El resultado es la ya conocida contracción de tensores leptónico y hadrónico tal y como demuestra el teorema B.12 del apéndice B.4. Esta sección está dedicada al cálculo de esta amplitud invariante a través de la determinación de los tensores leptónico y hadrónico y su posterior contracción. Más detalles sobre los cálculos se muestran en el apéndice C. El promedio de la amplitud se expresa como:

$$|M_{fi}|^2 \rightarrow \overline{|M_{fi}|^2} = \frac{1}{4} \sum_{s_\nu, s_l, s_p, s_n} \left| (\bar{u}_l \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) u_\nu)^\dagger (\bar{U}_p \Gamma^\alpha U_n) \right|^2 = \tilde{L}_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta}$$

La expresión de los tensores leptónico y hadrónico los da el mismo teorema donde tenemos que tener cuidado de usar el adjunto de Dirac de los operadores de corriente. Absorbiendo las masas de los leptones dentro del tensor leptónico, y teniendo en cuenta que $\overline{\gamma_\alpha (1 - \gamma^5)} = \gamma_\alpha (1 - \gamma^5)$, tenemos:

$$L_{\alpha\beta} = m_l m_\nu \tilde{L}_{\alpha\beta} = \frac{m_l m_\nu}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{k}_l + m_l}{2m_l} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \frac{\not{k}_\nu + m_\nu}{2m_\nu} \overline{\gamma_\beta (1 - \gamma^5)} \right] = \frac{1}{8} \text{Tr}[(\not{k}_l + m_l) \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) (\not{k}_f + m_f) \gamma_\beta (1 - \gamma^5)].$$

El desarrollo del tensor leptónico se detalla en el apéndice C.2, resultando:

$$L_{\alpha\beta} = k_\alpha^l k_\beta^\nu + k_\beta^l k_\alpha^\nu - k^l \cdot k^\nu g_{\alpha\beta} + i \epsilon_{\alpha\beta\lambda\rho} k_l^\lambda k_\nu^\rho. \quad (3.9)$$

Podemos demostrar que la contracción del tensor leptónico con el 4-momento transferido $q^\alpha L_{\alpha\beta}$ tiende a cero en el límite ultrarrelativista. Por tanto, términos proporcionales a q^α en la corriente hadrónica no contribuirán

a la contracción $L_{\alpha\beta}H^{\alpha\beta}$. Así pues, el término $\frac{G_P}{2M}q^\beta\gamma^5$ en (3.6) no contribuirá si consideramos el leptón saliente ultrarrelativista. La contracción se descompone en dos partes de simetría definida:

$$q^\alpha L_{\alpha\beta} = \underbrace{q^\alpha k_\alpha^l k_\beta^\nu + q^\alpha k_\alpha^\nu k_\beta^l - k_l \cdot k_\nu g_{\alpha\beta} q^\alpha}_{\text{Parte simétrica}} + \underbrace{i\epsilon_{\alpha\beta\lambda\rho} k_l^\lambda k_\nu^\rho q^\alpha}_{\text{Parte antisimétrica}}.$$

La parte antisimétrica es inmediatamente nula, ya que el tensor de Levi Civita se anula cuando se contrae con vectores linealmente dependientes. Este es el caso, ya que $q = k_\nu - k_l$. La parte simétrica la calculamos usando la definición de q :

$$\begin{aligned} q^\alpha L_{\alpha\beta} &= q \cdot k_l k_\beta^\nu + q \cdot k_\nu k_\beta^l - k_l \cdot k_\nu q_\beta \\ &= (k_\nu - k_l) \cdot k_l k_\beta^\nu + (k_\nu - k_l) \cdot k_\nu k_\beta^l - (k_l \cdot k_\nu) q_\beta \\ &= (k_\nu \cdot k_l) k_\beta^\nu - k_l^2 k_\beta^\nu + k_\nu^2 k_\beta^l - (k_l \cdot k_\nu) k_\beta^l - (k_l \cdot k_\nu) q_\beta \\ &= -m_l^2 k_\beta^\nu + m_\nu^2 k_\beta^l + (k_\nu \cdot k_l)(k_\beta^\nu - k_\beta^l) - (k_l \cdot k_\nu) q_\beta \\ &= m_\nu^2 k_\beta^l - m_l^2 k_\beta^\nu. \end{aligned}$$

En el proceso considerado en este trabajo, el electrón se describe en el límite ultrarrelativista, despreciando su masa frente a las energías y momentos involucrados. Por otra parte, los neutrinos los describimos como partículas de masa nula. Así pues, $q^\alpha L_{\alpha\beta} \approx 0$.

Teniendo en cuenta el resultado previo, el estudio que sigue se centra en el cálculo del tensor hadrónico eliminando el término pseudoescalar, usando el operador de vértice:

$$\Gamma^\beta = F_1^V \gamma^\beta + i \frac{F_2^V}{2M} \sigma^{\beta\lambda} q_\lambda + G_A \gamma^\mu \gamma^5 + \frac{G_P}{2M} \not{q} \gamma^5.$$

Los cálculos se desarrollan en el apéndice C.3 debido a su longitud. Algunos aspectos claves en el desarrollo son las propiedades de las matrices gamma y los teoremas de traza que se exponen en el apéndice B.2, además del cálculo efectivo del adjunto de Dirac para los términos vectoriales y axiales, tales y como se detallan en el lema B.4. El tensor hadrónico resultante es:

$$H^{\alpha\beta} = -W_1 g^{\alpha\beta} + W_2 \frac{P_n^\alpha P_n^\beta}{M^2} + i W_3 \epsilon^{\alpha\beta\rho\lambda} P_\rho^n q_\lambda + W_4 q^\alpha q^\beta + W_5 \frac{P_n^\alpha q^\beta + P_n^\beta q^\alpha}{2M^2}, \quad (3.10)$$

donde los coeficientes (que dependen del 4-momento transferido) son:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{|q^2|}{4M^2} [(F_1^V + F_2^V)^2 + G_A^2] + G_A^2 \\ W_2 &= (F_1^V)^2 + \frac{|q^2|}{4M^2} (F_2^V)^2 + G_A^2 \\ W_3 &= 2G_A (F_1^V + F_2^V) \\ W_4 &= \frac{F_2^V}{4M^2} \left(\frac{|q^2|}{4M^2} - 1 \right) - \frac{F_1^V F_2^V}{2M^2} + \frac{G_A^2}{|q^2|} + 2 \frac{G_A}{M^2} (F_1^V + F_2^V) \\ W_5 &= (F_1^V)^2 + \frac{|q^2|}{4M^2} (F_2^V)^2 + G_A^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

La contracción de los tensores permite calcular la amplitud invariante necesaria para proseguir en el cálculo de la sección eficaz. Este desarrollo se detalla en el apéndice C.4. De la ecuación (C.6) obtenemos:

$$m_l m_\nu \overline{|M_{fi}|^2} = 2W_1 \epsilon_l \epsilon_\nu (1 - \cos(\theta)) + W_2 \epsilon_l \epsilon_\nu (1 + \cos(\theta)) - W_3 \frac{\epsilon_l + \epsilon_\nu}{M} (\epsilon_l \epsilon_\nu) (1 - \cos(\theta)),$$

donde las funciones $W_i(q^2)$ son las recogidas en (3.11). Usando las relaciones del ángulo mitad tenemos:

$$m_l m_\nu \overline{|M_{fi}|^2} = 2\epsilon_l \epsilon_\nu \left[2W_1 \sin^2(\theta/2) + W_2 \cos^2(\theta/2) - W_3 \frac{\epsilon_l + \epsilon_\nu}{M} \sin^2(\theta/2) \right] \quad (3.12)$$

3.3. Sección eficaz diferencial

A partir de la amplitud invariante podemos calcular la sección eficaz diferencial. Partiendo de la tasa de transición por unidad de volumen (3.8):

$$W_{fi} = \frac{|S_{fi}|^2}{VT} = \frac{G_F^2 M^2 m_\nu m_l}{2\epsilon_\nu \epsilon_l E_p E_n V^4} (2\pi)^4 \delta^4(P_p - P_n - k_\nu + k_l) |M_{fi}|^2,$$

la sección eficaz diferencial se calcula como:

$$d\sigma = \underbrace{\frac{|S_{fi}|^2}{TV}}_{W_{fi}} \frac{V}{J} \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{k}_l \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{P}_p,$$

donde J es el flujo incidente. Introduciendo la tasa de transición anterior W_{fi} se obtiene:

$$d\sigma = \frac{G_F^2}{2} \frac{1}{4\pi^2} \delta^4(P_p - P_n - k_\nu + k_l) \frac{1}{V J \epsilon_\nu \epsilon_l} m_l m_\nu |M_{fi}|^2 M^2 \frac{d^3\mathbf{k}_l}{\epsilon_l} \frac{d^3\mathbf{P}_p}{E_p}. \quad (3.13)$$

Tal y como se dedujo en el estudio del proceso electromagnético, el factor de flujo puede reescribirse de una manera sencilla bajo la hipótesis de colisión colineal:

$$\frac{1}{V J \epsilon_\nu \epsilon_l} \approx \frac{1}{\sqrt{k_\nu \cdot P_n - m_\nu M^2}} \approx \frac{1}{M \epsilon_\nu}.$$

Hemos hecho uso de la aproximación $m_\nu \approx 0$ para la masa del neutrino, y hemos usado de forma explícita la forma del momento del neutrón en el sistema laboratorio, en el que está en reposo $P_n = (M, \mathbf{0})$. De esta forma:

$$d\sigma = \left(\frac{G_F^2}{2} \frac{1}{4\pi^2} \right) \delta^4(P_p - P_n - k_\nu + k_l) \frac{1}{M \epsilon_\nu} m_l m_\nu |M_{fi}|^2 \frac{M^2}{\epsilon_l E_p} d^3\mathbf{k}_l d^3\mathbf{P}_p. \quad (3.14)$$

Esta expresión es totalmente análoga a la derivada en el caso de dispersión electrón-protón. Es necesario integrar la delta que implica la conservación de la energía global en el proceso, y tomar el límite ultrarrelativista para el neutrino y el electrón saliente:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{G_F^2}{8\pi^2} \frac{1}{M \epsilon_\nu} m_\nu m_l M^2 |M_{fi}|^2 \frac{|\mathbf{k}_l|}{M + \epsilon_\nu - \epsilon_l \frac{|\mathbf{k}_\nu|}{|\mathbf{k}_l|} \cos(\theta)} \\ &\approx \frac{G_F^2}{8\pi^2} \frac{\epsilon_l}{\epsilon_\nu} m_\nu m_l |M_{fi}|^2 \frac{M}{M + \epsilon_\nu - \epsilon_\nu \cos(\theta)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Para proseguir debemos considerar las polarizaciones. La partícula que es detectada en este proceso es usualmente el leptón saliente. Por tanto promediamos sobre su polarización y promediamos sobre el resto. La consecuencia es reemplazar $m_l m_\nu |M_{fi}|^2$ por $m_l m_\nu \overline{|M_{fi}|^2}$, término que fue calculado por el método de las trazas como contracción del tensor hadrónico y el leptónico. Así, tenemos la sección eficaz diferencial escrita de forma compacta:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{G_F^2}{8\pi^2} \frac{\epsilon_l}{\epsilon_\nu} L_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta} \frac{M}{M + \epsilon_\nu - \epsilon_\nu \cos(\theta)}. \quad (3.16)$$

La contracción de los tensores leptónico y hadrónica fue ya calculada (3.12) y podemos introducirla llegando así a una expresión cerrada para la sección eficaz diferencial para el proceso $\nu_l + n \rightarrow l + p$

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{G_F^2 \epsilon_l^2}{4\pi^2} \frac{M}{M + \epsilon_\nu - \epsilon_\nu \cos(\theta)} \left\{ 2W_1 \sin^2(\theta/2) + W_2 \cos^2(\theta/2) - W_3 \frac{\epsilon_l + \epsilon_\nu}{M} \sin^2(\theta/2) \right\}. \quad (3.17)$$

Recordamos que solo dos de las tres variables cinemáticas $(\epsilon_\nu, \epsilon_l, \theta)$ son independientes: están ligadas por la mismas relaciones cinemáticas que exponíamos en el estudio de la dispersión electrón-protón, que recogemos a continuación:

$$\begin{aligned} \epsilon_l &\approx \frac{\epsilon_\nu}{1 + 2 \frac{\epsilon_\nu}{M} \sin^2(\theta/2)} \\ q^2 &= -2M\omega = 2M(\epsilon_l - \epsilon_\nu) \approx -4\epsilon_\nu \epsilon_l \sin^2(\theta/2). \end{aligned}$$

Podemos además identificar el factor de retroceso $f_{\text{rec}}^{-1} = \epsilon_\nu/\epsilon_l$ y escribir la sección eficaz de la manera compacta:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{G_F^2 \epsilon_l^2}{4\pi^2} f_{\text{rec}}^{-1} \frac{L_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta}}{\epsilon_\nu \epsilon_l} \Big|_{q^2 = -2M\omega}. \quad (3.18)$$

3.4. Sección eficaz para el proceso con antineutrinos

Resulta interesante considerar qué modificaciones serían necesarias para el proceso con antineutrinos, en cuyo caso los papeles de nucleones inicial y final deben intercambiarse para respetar la conservación de la carga. La reacción sería:

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$$

La corriente hadrónica no se vería modificada ya que los factores de forma isovectores (de los que hablaremos en detalla en la siguiente sección) son iguales para ambos nucleones. Sin embargo, la corriente leptónica ha de verse modificada teniendo en cuenta la proyección en helicidad positiva, para antineutrinos:

$$(J_l^\alpha)^\dagger(x) = \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\psi}_l(x) \gamma^\alpha (1 + \gamma^5) \psi_\nu(x).$$

Implementando esta sustitución del signo a lo largo del cálculo del tensor leptónico se observa que sólo afecta a la parte antisimétrica del tensor:

$$L_{\alpha\beta} = k_\alpha^l k_\beta^\nu + k_\beta^l k_\alpha^\nu - k^l \cdot k^\nu g_{\alpha\beta} \pm i\epsilon_{\alpha\beta\lambda\rho} k_l^\lambda k_\nu^\rho.$$

Aquí + es el signo para el proceso con neutrinos y – es el signo para el proceso con antineutrinos. En la amplitud invariante, este cambio en la parte antisimétrica solo influye a la hora de contraer con la parte antisimétrica del tensor hadrónico, que es el que está expresado en términos de la función $W_3(q^2)$. Así, la única diferencia en la sección eficaz diferencial es el intercambio de signo en W_3 . Llegamos por tanto a la expresión más general posible en la aproximación ultrarrelativista:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{G_F^2 \epsilon_l^2}{4\pi^2} f_{\text{rec}}^{-1} \left\{ 2W_1 \sin^2(\theta/2) + W_2 \cos^2(\theta/2) \pm W_3 \frac{\epsilon_l + \epsilon_\nu}{M} \sin^2(\theta/2) \right\}. \quad (3.19)$$

3.5. Factores de forma hadrónicos

Para proseguir en el análisis de las secciones eficaces de ambos procesos es necesario el conocimiento de la estructura débil del nucleón. En el capítulo 3 de [17] se exponen de manera detallada varias parametrizaciones de los factores de forma del nucleón F_1^V, F_2^V y G_A basados en resultados experimentales. En este trabajo optamos por una parametrización sencilla que es válida para valores no muy altos del 4-momento transferido: la parametrización dipolar. No obstante, señalamos aquí que otras parametrizaciones más complejas son posibles permitiendo extender de manera más consistente los resultados a regímenes de energía y 4-momento transferido más altos.

Para los factores isovectores usamos la siguiente representación en términos de los factores de forma electromagnéticos del protón y del neutrón G_E y G_M . Denotando $\tau = \frac{|q^2|}{4M^2}$:

$$\begin{cases} F_1^V(Q^2) = \frac{1}{1+\tau} [(G_E^p - G_E^n) + \tau(G_M^p - G_M^n)] \\ F_2^V(Q^2) = \frac{1}{1+\tau} [(G_M^p - G_M^n) - (G_E^p - G_E^n)]. \end{cases} \quad (3.20)$$

Es la llamada *conservación de la corriente vector* la que permite expresar los factores de forma vectoriales débiles en términos de los electromagnéticos. La conservación de la corriente electromagnética implica la conservación de la parte vectorial de la corriente débil, y esto permite relacionar la estructura vectorial débil con

la electromagnética.

Para los factores de Sachs utilizamos nuevamente la parametrización dipolar:

$$G_D(q^2) = \frac{1}{\left(1 + \frac{|q^2|}{Q^2}\right)^2},$$

con $Q^2 = 0,71 \text{ GeV}^2$. Los factores de forma eléctrico y magnético del protón fueron ya utilizados en el capítulo 2. Para el neutrón, anulamos el factor eléctrico y normalizamos el magnético al momento magnético del neutrón. Tomando los valores de los momentos magnéticos $\mu_n = -1,913$, $\mu_p = 2,793$ tenemos:

$$\begin{cases} G_E^p(q^2) = G_D(q^2) & G_E^n(q^2) = 0 \\ G_M^p(q^2) = \mu_p G_D(q^2) & G_M^n(q^2) = \mu_n G_D(q^2). \end{cases} \quad (3.21)$$

3.6. Resultados

Fijadas las parametrizaciones a usar podemos representar gráficamente la sección eficaz diferencial frente a ángulo para neutrinos y antineutrinos. Para ello se han tomado distintas energías del neutrino incidente, motivadas por las energías relevantes en varios experimentos de neutrinos: MiniBooNE [22],[23] (0.7 GeV), T2K [24] (1 GeV), MINER ν A [25](3 GeV) y el futuro experimento DUNE [26] (7 GeV). Una diferencia crucial frente a los experimentos de dispersión de electrones es que el haz de neutrinos incidentes presenta una distribución en energías y que, al contrario de lo que pasa con las partículas cargadas, no se puede seleccionar una energía concreta. Por ello, nuestros resultados son una primera aproximación a un estudio específico que requiere convolucionar la sección eficaz que hemos obtenido con la distribución en energías que ofrece cada distinto experimento para así poder comparar con los datos experimentales, así como considerar los efectos asociados al medio nuclear.

Los resultados para la dispersión elástica neutrino-nucleón se recogen en la Figura 3.2, representando la sección eficaz diferencial frente al ángulo de dispersión a distintas energías. Se aprecia que la sección eficaz para neutrinos es siempre mayor que para antineutrinos, si bien tienen a igualarse conforme crece la energía ϵ_ν .

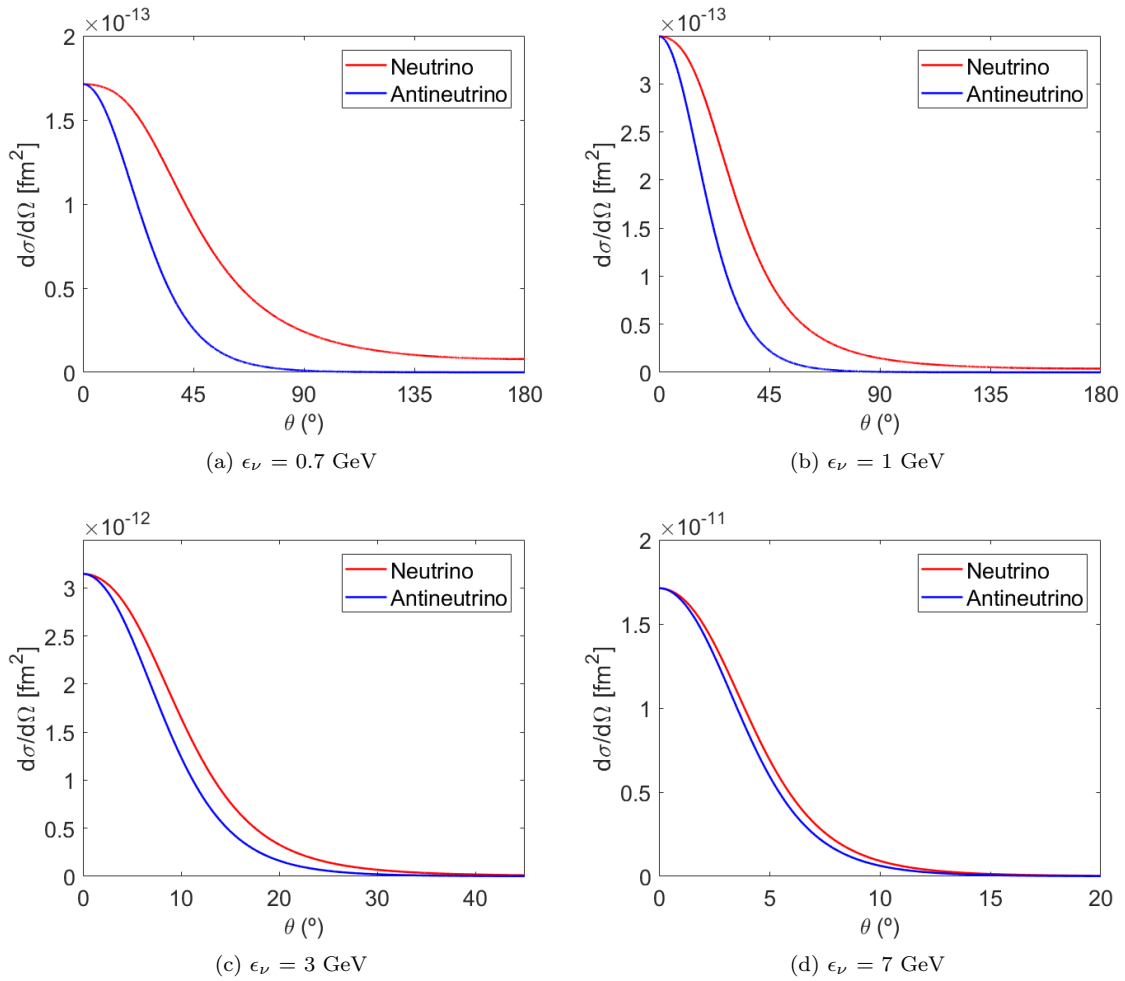


Figura 3.2: Sección eficaz diferencial para distintas energías del neutrino incidente.

La asimetría entre neutrinos y antineutrinos se hace patente si representamos el cociente $R = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_\nu / \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\bar{\nu}}$. Los resultados para las distintas energías de interés se pueden observar en la Figura 3.3. Observamos que esta

asimetría decrece conforme aumenta la energía de la partícula incidente. El término axial que cambia de signo en la sección eficaz diferencial es $W_3(q^2) \frac{\epsilon_\nu + \epsilon_l}{M} \sin^2(\theta/2)$ y su dependencia en $|q^2|$ se representa en la Figura 3.4, donde se observa que efectivamente esta función es menor para valores crecientes de la energía de incidencia ϵ_ν . Teniendo en cuenta la expresión general de la sección eficaz diferencial (3.19) podemos escribir el cociente de asimetría:

$$R = \frac{\frac{d\sigma}{d\Omega}\bigg|_\nu}{\frac{d\sigma}{d\Omega}\bigg|_{\bar{\nu}}} = \frac{2W_1 \sin^2(\theta/2) + W_2 \cos^2(\theta/2) - W_3 \frac{\epsilon_l + \epsilon_\nu}{M} \sin^2(\theta/2)}{2W_1 \sin^2(\theta/2) + W_2 \cos^2(\theta/2) + W_3 \frac{\epsilon_l + \epsilon_\nu}{M} \sin^2(\theta/2)}, \quad (3.22)$$

donde recordamos que las funciones W_1, W_2 y W_3 dependen del ángulo a través de q^2 . Es el factor proporcional a W_3 y su cambio de signo relativo el responsable de esta diferencia. Recordamos que dicho cambio de signo está ligado al hecho de que la corriente del neutrino se expresa con el operador $\gamma^\mu(1 - \gamma^5)$ proyectando en helicidad negativa y la corriente del antineutrino proyecta en helicidad positiva a través del operador $\gamma^\mu(1 + \gamma^5)$. Para ángulos próximos a cero obtenemos $R = 1$, ya que en (3.22) se anularían los términos que van con el seno, en particular el término axial que lleva W_3 y es el responsable de la asimetría.

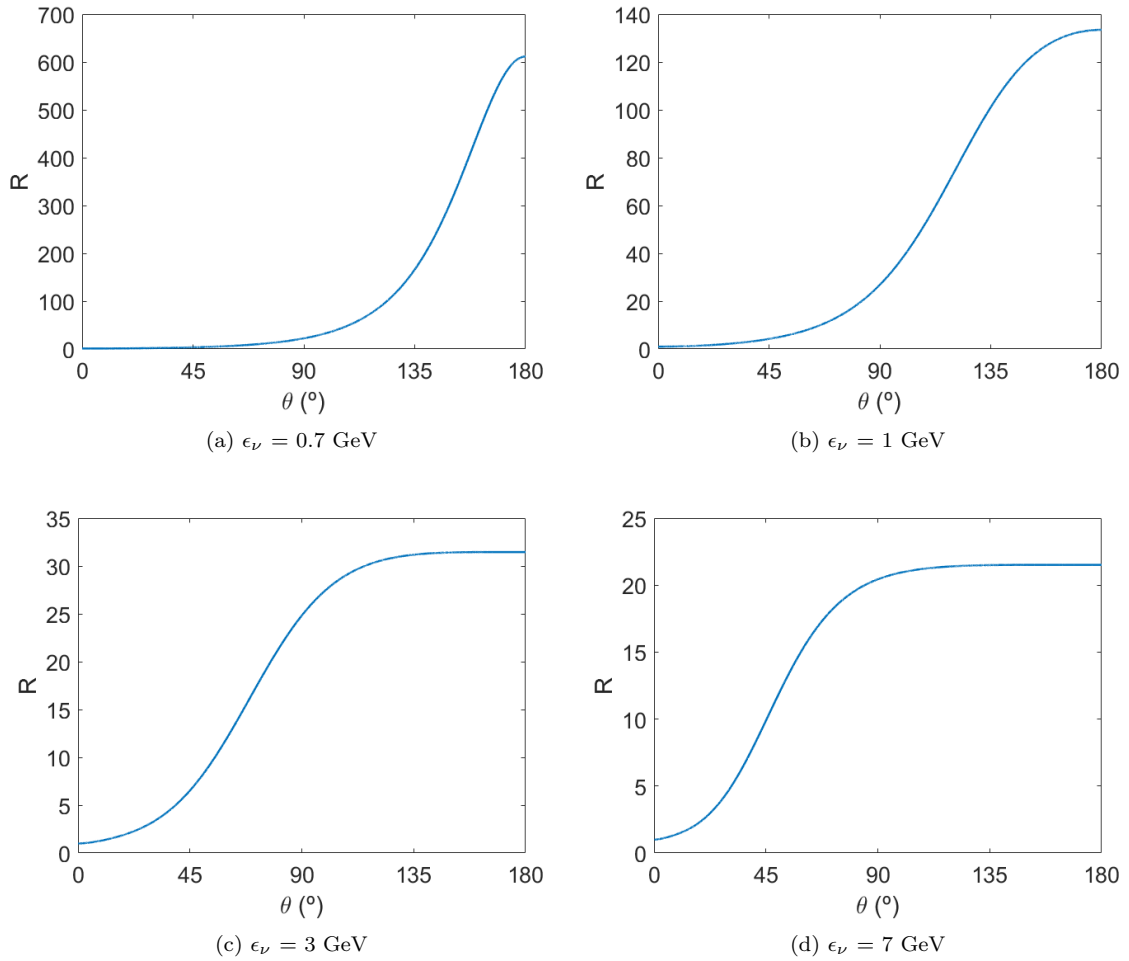


Figura 3.3: Cociente entre las secciones eficaces diferenciales de neutrino y antineutrino para distintas energías de incidencia ϵ_ν .

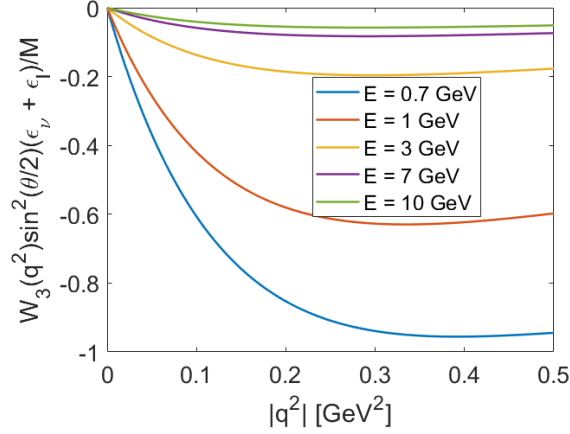


Figura 3.4: Dependencia en $|q^2|$ del término axial para distintas energías de incidencia ϵ_ν .

La sección eficaz total o integrada puede obtenerse a partir de la diferencial integrando en todo el ángulo sólido:

$$\sigma = \int_{\mathbb{S}^2} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin(\theta) d\theta.$$

A partir de la dependencia angular de la sección eficaz diferencial es fácil integrar numéricamente y obtener secciones eficaces totales en el rango de energías de interés. Algunos valores para las energías recaladas anteriormente se recogen en el Cuadro 3.6. La representación en un rango amplio de energías de la sección diferencial integrada se muestra en la Figura 3.5. De nuevo observamos cómo la sección eficaz para el proceso con neutrinos es mayor que la correspondiente para antineutrinos, si bien ambos valores se aproximan conforme nos movemos a cinemáticas más altas, ya que el término axial decrece para energías más altas, como muestra la Figura 3.4.

ϵ_ν [GeV]	0.7	1.0	3.0	7.0
$\sigma(\nu)$ [10^{-13} fm^2]	5.39	5.80	5.55	5.20
$\sigma(\bar{\nu})$ [10^{-13} fm^2]	1.68	2.20	3.69	4.317

Cuadro 3.1: Sección eficaz total para neutrinos y antineutrinos a distintas energías de incidencia.

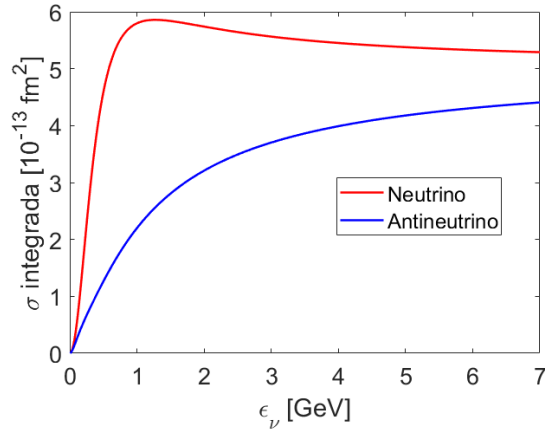


Figura 3.5: Sección eficaz integrada en el rango de energías de incidencia 0 - 7 GeV para neutrinos y antineutrinos.

Podemos comparar nuestro modelo de dispersión elástica neutrino-nucleón con resultados de experimentos de neutrinos. Es importante señalar que estos experimentos se realizan con blancos nucleares, lo cual limita la comparación pues nuestro modelo es válido para dispersión elástica con nucleones libres. El proceso de detección del neutrino se realiza de manera indirecta en grandes cámaras que contienen material activo que hace de blanco para los neutrinos. Al producirse el leptón cargado con alta energía, este emite radiación Cherenkov al atravesar el material activo del detector. Esta radiación, que se produce por partículas cargadas que viajan a mayor velocidad que la de la luz en el material, es detectada con fotomultiplicadores que recogen la información cinemática del leptón. Como material activo pueden usarse compuestos con núcleos ligeros como el deuterón 2H presente en el agua pesada. Los compuestos utilizados como blanco más usuales en experimentos modernos son aceites minerales (tanto en MiniBooNE, MINER ν A como T2K), formados principalmente por carbono ${}^{12}C$ e hidrógeno 1H . En el caso de dispersión con antineutrinos habría que considerar la contribución a la sección eficaz del proceso de interacción del antineutrino con el protón del 1H , para el cual sí es adecuado nuestro modelo elástico al no haber estructura nuclear.

Elegimos datos experimentales antiguos de secciones eficaces totales para neutrinos y antineutrinos de experimentos que utilizan como blancos núcleos ligeros. Estos datos proceden de experimentos en el Brookhaven National Laboratory [27], Argonne National Laboratory [28],[29], de la SKAT Collaboration [30] y de la Gargamelle Collaboration [31]. Para la producción de un haz de neutrinos es necesario un acelerador que haga incidir un haz de protones sobre un blanco. Como productos se obtienen piones cargados y kaones que posteriormente decaen en muones y neutrinos muónicos. Esto ya marca una diferencia con el modelo que hemos desarrollado, pues hemos usado la aproximación ultrarrelativista y esto puede no ser adecuado para describir la dispersión de neutrinos muónicos a bajas energías. En la Tesis Doctoral [32] se hace un estudio intensivo de la dispersión de neutrinos muónicos con núcleos, y se demuestra que para energías ϵ_ν menores a 0.5 GeV la diferencia de las secciones eficaces para neutrinos muónicos y electrónicos es considerable, siendo mayor la sección eficaz electrónica. El análisis para estas energías bajas es por tanto cuestionable no solo por tratarse de datos de dispersión con núcleos sino por el diferente comportamiento para cada sabor. No obstante, esta diferencia disminuye conforme crece la energía y para ϵ_ν superior a 1 GeV las diferencias son mínimas.

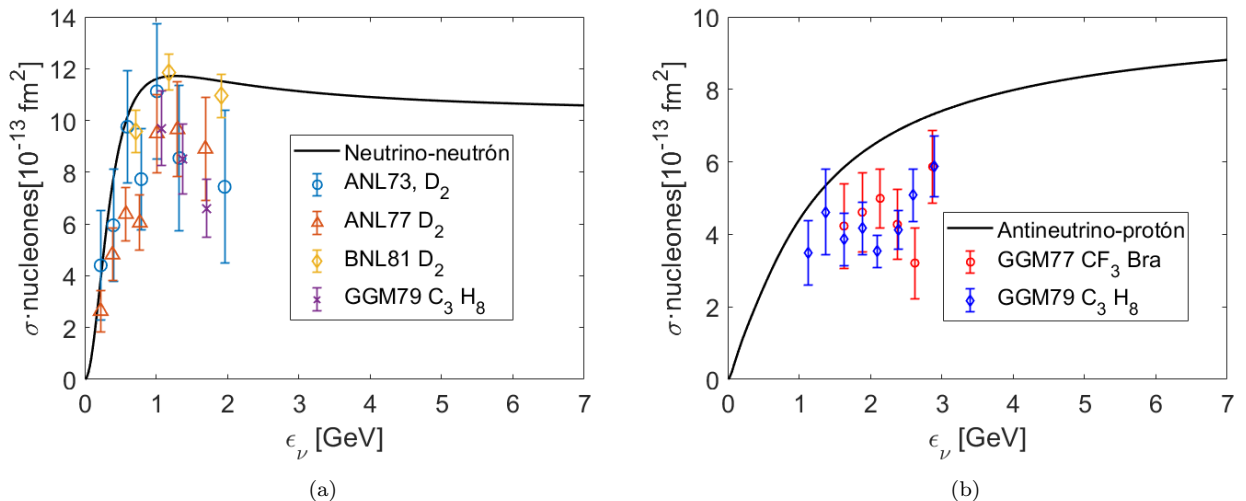


Figura 3.6: Sección eficaz total para neutrinos (a) y antineutrinos (b) y comparación con datos experimentales procedentes de los experimentos BNL (1981) [27], [28], ANL (1973) [29], GGM (1979) [30] y GGM (1977) [31],

En la Figura 3.6 se puede observar cómo los resultados de los experimentos son consistentes con nuestro modelo de dispersión elástica neutrino-nucleón. El ajuste es mejor para los datos con deuterón que para los de

aceites minerales, ya que el núcleo de deuterio es más ligero y los efectos derivados de la interacción nuclear son menos acusados que en el caso del ^{12}C .

Por completitud, representamos en la Figura 3.6 las secciones eficaces con datos experimentales más recientes, del experimento MiniBooNE [22], cuyo detector opera con aceite mineral como blanco.

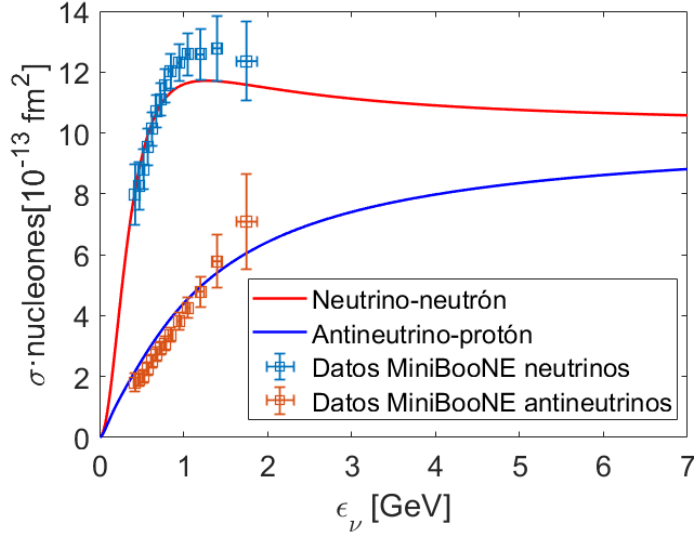


Figura 3.7: Sección eficaz total y datos experimentales del experimento MiniBooNE [22],[23] en el rango de 0 a 7 GeV de energía de incidencia.

Para estudiar en profundidad la dispersión con el ^{12}C hay que tener en cuenta dos contribuciones a la sección eficaz. En primer lugar, existe el proceso cuasielástico en el cual el protón final queda desligado del núcleo de carbono, produciéndose una reacción dada por $\nu + ^{12}\text{C} \rightarrow l^- + p + ^{11}\text{C}$. Esta contribución es estudiada en [32], y da como resultado una sección eficaz menor a la elástica. Como segundo factor, para núcleos pesados o intermedios aparece un posible estado final en el cual se emiten dos nucleones mediada por el intercambio de mesones. Esta contribución es estudiada en el capítulo 4 de [32].

Dado que la sección eficaz para neutrinos (y antineutrinos) electrónicos es ligeramente superior que la correspondiente para el sabor muónico, las contribuciones anteriores, no consideradas en nuestro modelo teórico, son compensadas de manera casual por esta diferencia respecto a los casos electrónico y muónico, y esto resulta en un ajuste relativamente bueno de los datos de dispersión de neutrinos muónicos de MiniBooNE con el modelo de dispersión elástica de neutrinos electrónicos que hemos desarrollado en este trabajo.

Un análisis más consistente requeriría la aplicación de modelos nucleares para la descripción del proceso teniendo en cuenta las contribuciones adicionales destacadas anteriormente.

Capítulo 4

Conclusiones

El presente trabajo hace un recorrido introductorio al cálculo de procesos de dispersión comenzando desde la propia base matemática. En primer lugar se ha expuesto el formalismo de la teoría de propagadores necesario para calcular la matriz de dispersión en el contexto de la mecánica cuántica relativista.

Este desarrollo teórico ha permitido el cálculo efectivo de la sección eficaz en procesos que son de relevancia. El primer caso de estudio ha sido la dispersión de electrones por protones. Se ha efectuado el cálculo de la sección eficaz en distintas aproximaciones para la descripción del protón. Para la aproximación en la cual el protón es tratado como un centro dispersor inmóvil hemos obtenido la sección eficaz de Mott, generalizando la expresión de la dispersión de Rutherford. Posteriormente hemos modelado el protón como un fermión de espín $1/2$ ya que era necesario un tratamiento relativista, describiendo adecuadamente la posibilidad de retroceso del blanco. A altas energías ha sido necesario considerar el protón como una partícula compuesta y esto nos ha llevado a estudiar la estructura electromagnética, siendo de especial interés la determinación del radio del protón a partir de los datos de dispersión con electrones. Se ha deducido la expresión de la sección eficaz de Rosenbluth en términos de unos factores de forma que describen la distribución de carga y magnetización del protón, en el régimen de electrones ultrarrelativistas.

El segundo caso de aplicación se ha centrado en la dispersión de neutrinos (y antineutrinos) por nucleones. Se ha considerado el nucleón como una partícula compuesta con estructura interna, y esto ha sido descrito en términos de los factores de forma débiles del nucleón. Mientras que el proceso electromagnético era puramente vectorial, los nuevos términos axiales en las corrientes han dado lugar a unos tensores leptónicos y hadrónicos con términos antisimétricos. Estos términos son los responsables de la diferencia de resultados para neutrinos y antineutrinos. El modelo de dispersión elástica neutrino-nucleón obtenido ha sido contrastado con resultados experimentales de dispersión de neutrinos con núcleos ligeros. La comparación detallada con los datos experimentales pone de manifiesto los posibles efectos asociados a la estructura nuclear, no considerados en este trabajo.

Este trabajo fin de grado presenta un estudio en detalle de procesos de dispersión de electrones (corriente electromagnética) y neutrinos (corriente débil) por nucleones. La extensión natural del mismo sería la incorporación de un modelo nuclear que permita estudiar en profundidad experimentos donde la interacción del leptón ocurra con un blanco con estructura nuclear. El formalismo requerido sería similar al utilizado en el presente trabajo, aunque la determinación del tensor nuclear requeriría conocer la estructura y dinámica del sistema nuclear involucrado en el proceso de dispersión. Asimismo, puede profundizarse el análisis de la interacción leptón-nucleón considerando términos de orden superior en el desarrollo del elemento de matriz S .

En el caso electromagnético son relevantes las correcciones radiativas y los procesos mediados por intercambio de más de un fotón, especialmente para análisis precisos de datos experimentales que permitan en el futuro resolver el problema abierto de la determinación del radio del protón. Otro aspecto general que sería de interés para el estudio de ambos procesos requeriría el uso de la cromodinámica cuántica (QCD) para describir de manera precisa y consistente la estructura hadrónica tanto electromagnética como débil.

Tanto los procesos de interacción débil como los electromagnéticos podrían tener gran relevancia para la comprensión de la estructura interna del nucleón, así como para el análisis del fenómeno de oscilaciones de neutrinos. La dispersión neutrino-núcleo es hoy día la única forma de analizar las propiedades de estas partículas tan esquivas, y la principal fuente de incertidumbre en el campo de las oscilaciones de neutrinos.

Apéndice A

Ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac es una ecuación relativista cuántica que cumple las siguientes propiedades:

1. Pone espacio y tiempo en pie de igualdad.
2. Es manifiestamente covariante Lorentz.
3. Implica la relación energía-momento relativista $E^2 = (pc)^2 + m^2c^4$.

La ecuación de Dirac permite describir partículas elementales de espín 1/2. Escrita de distintas maneras, puede encontrarse bajo cualquiera de las siguientes formas:

$$\begin{aligned}(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi, \\ (i\hbar\hat{\not{D}} - mc)\psi = 0, \\ (\hat{\not{p}} - mc)\psi = 0.\end{aligned}$$

También puede escribirse en forma hamiltoniana:

$$i\hbar\partial_t\psi = (-i\hbar\alpha_k\partial_k + \beta mc^2)\psi \equiv \hat{H}_f\psi.$$

El aspecto clave de la ecuación de Dirac es que para representar la relación energía-momento relativista, los coeficientes deben ser no conmutativos (*q-numbers* en términos del propio Dirac). Las matrices α, β, γ son de dimensión 4×4 , verifican la condición que hemos impuesto y cumplen las relaciones algebraicas siguientes:

$$\begin{aligned}\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1}, \quad \alpha_k = \gamma^0\gamma^k, \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0, \\ \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}, \quad \beta = \gamma^0, \quad \alpha_i^2 = \beta^2 = \mathbb{1}.\end{aligned}$$

Las matrices $\alpha, \beta = \gamma^0$ son hermiticas y unitarias, mientras que las γ^k son unitarias y antihermiticas. En la representación de Dirac, tenemos una base de este álgebra de Clifford:

$$\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Para las matrices α tenemos:

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

A la ecuación de Dirac corresponde una corriente (de carga):

$$J^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad (\text{A.3})$$

donde $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$.

A.1. Soluciones libres

Las soluciones libres a la ecuación de Dirac se expresan de la forma:

$$\psi_{p,\lambda} = N \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \begin{pmatrix} u \\ \frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{mc^2+\lambda E_p} u \end{pmatrix} \exp [i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - \lambda E_p t)/\hbar], \quad (\text{A.4})$$

donde $\lambda = \pm 1$, $E_p = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$. Las energías correspondientes a cada tipo de solución son $\epsilon = \lambda E_p = \pm E_p$. Aquí u es un espinor de dos dimensiones. Existe una representación más conveniente que permite distinguir las polarizaciones:

$$\psi_p^{1,2} = w^{1,2}(p) \exp [i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - E_p t)/\hbar] \quad (\text{A.5})$$

$$\psi_p^{3,4} = w^{3,4}(p) \exp [i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + E_p t)/\hbar] \quad (\text{A.6})$$

Una representación aún más conveniente para hablar de electrones y positrones es la siguiente. Los positrones se corresponden con las soluciones de energía negativa, propagándose *hacia el pasado* y con un momento opuesto al del factor exponencial. Con dichos cambios, y con las polarizaciones de espín $+s$ y $-s$:

$$\begin{aligned} u(p, +s) &= w^1(p) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \chi_\uparrow \\ \frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{mc^2+\lambda E_p} \chi_\uparrow \end{pmatrix}, \\ u(p, -s) &= w^2(p) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \chi_\downarrow \\ \frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{mc^2+\lambda E_p} \chi_\downarrow \end{pmatrix}, \\ v(p, +s) &= w^4(-p) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} -\frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{mc^2+\lambda E_p} \chi_\uparrow \\ \chi_\uparrow \end{pmatrix}, \\ v(p, -s) &= w^3(-p) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} -\frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{mc^2+\lambda E_p} \chi_\downarrow \\ \chi_\downarrow \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A.2. Transformaciones de Lorentz

Si se aplica una transformación de Lorentz en las coordenadas espacio-temporales:

$$y^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

debe haber una manera de asignar una transformación en los espinores. Matemáticamente, esto corresponde a elegir una representación $\hat{S}(\Lambda)$ del grupo de Lorentz sobre el grupo de matrices 4 por 4 unitarias. El resultado puede consultarse en el capítulo 3 de [33]. Si la transformación sobre espinores es:

$$\psi'(y^\mu) = \hat{S}(\Lambda)\psi(\Lambda^\mu_\nu x^\nu)$$

entonces la representación $\hat{S}(\Lambda)$ satisface la relación fundamental:

$$\hat{S}^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu\hat{S}(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu\gamma^\nu.$$

Para la componente continua del grupo de Lorentz (boosts y rotaciones), hay una representación del grupo en términos de los generadores del álgebra de Lie correspondiente:

$$\hat{S}(\Lambda) = \exp \left(-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \right) \quad (\text{A.7})$$

donde los generadores son $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ y los $\omega_{\mu\nu}$ son los coeficientes correspondientes a cada generador.

Apéndice B

Cálculos de trazas y amplitudes invariantes

En los cálculos de secciones eficaces es siempre indispensable calcular términos de la forma espinor \times matriz \times espinor, calcular módulos al cuadrado y promediar sobre las polarizaciones. En este apéndice se detallan los desarrollos matemáticos necesarios para efectuar estos cálculos de manera efectiva.

B.1. Covariantes bilineales

Los observables que pueden construirse a partir de los espinores son del tipo $\bar{\psi}\Gamma\psi$ y son catalogados de forma completa a través del teorema fundamental de Pauli, que puede consultarse en [33].

- Escalar: $\Gamma_S = \mathbb{1}$.
- Vector: $\Gamma_V^\mu = \gamma^\mu$.
- Tensorial: $\Gamma_T^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.
- Pseudoescalar: $\Gamma_P = \gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.
- Pseudovector o axial: $\Gamma_A^\mu = \gamma^5\gamma^\mu$.

Los nombres que reciben responden a la transformación que corresponde a cada operador cuando se realizan transformaciones de Lorentz sobre la cantidad $\bar{\psi}\Gamma\psi$. Mientras que en los tres primeros casos el observable se transforma como escalar, vector y tensor respectivamente, en los dos últimos casos hay un cambio de signo para el caso de transformaciones de Lorentz impropias (de determinante -1), como por ejemplo bajo transformación de paridad o de inversión temporal.

La descomposición de Gordon nos permite relacionar la evaluación de las γ_μ con la de las $\sigma_{\mu\nu}$:

$$\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p) = \frac{1}{2m}(p+p')_\mu \bar{u}(p')u(p) + \frac{i}{2m}(p-p')^\nu \bar{u}(p')\sigma_{\mu\nu}u(p) \quad (\text{B.1})$$

B.2. Teoremas de traza

Estos resultados nos permiten calcular fácilmente trazas de observables tales como: $a_1 a_2 \cdots a_n$ donde a_i son 4-vectores.

Teorema B.1. *La traza de un número impar de matrices γ es nulo.*

Teorema B.2.

$$\text{Tr}[\not{a}\not{b}] = 4a_\mu b^\mu \equiv 4a \cdot b.$$

Teorema B.3.

$$\text{Tr}[\not{a}_1 \cdots \not{a}_n] = a_1 \cdot a_2 \text{Tr}[\not{a}_3 \cdots \not{a}_n] - a_1 \cdot a_3 \text{Tr}[\not{a}_2 \not{a}_4 \cdots \not{a}_n] + \dots a_1 \cdot a_n \text{Tr}[\not{a}_2 \cdots \not{a}_{n-1}].$$

Teorema B.4.

$$\text{Tr}[\gamma^5] = 0.$$

Teorema B.5.

$$\text{Tr}[\gamma^5 \not{a}\not{b}\not{c}\not{d}] = -4i\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} a_\alpha b_\beta c_\mu d_\nu = +4i\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta.$$

Teorema B.6.

$$\text{Tr}[\not{a}_1 \cdots \not{a}_{2n}] = \text{Tr}[\not{a}_{2n} \cdots \not{a}_1].$$

Teorema B.7. *Se cumplen las siguientes identidades:*

1. $\gamma_\mu \gamma^\mu = 4 \cdot \mathbb{1}$.
2. $\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2\not{a}$.
3. $\gamma_\mu \not{a}\not{b} \gamma^\mu = 4a \cdot b \mathbb{1}$.
4. $\gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c} \gamma^\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a}$.
5. $\gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c}\not{d} \gamma^\mu = 2\not{d}\not{a}\not{b}\not{c} + 2\not{c}\not{b}\not{d}\not{a}$.

Teorema B.8.

$$\text{Tr}[\sigma^{\mu\lambda} \sigma^{\nu\rho}] = 4g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} - 4g^{\mu\rho} g^{\lambda\nu}.$$

Teorema B.9.

$$\text{Tr}[\gamma^\alpha \sigma^{\mu\nu} \gamma^\beta] = 4i(g^{\alpha\mu} g^{\nu\beta} - g^{\alpha\nu} g^{\mu\beta}).$$

B.3. Más propiedades del álgebra de Dirac

De las propiedades del álgebra de las matrices gamma se deducen una serie de consecuencias que nos facilitarán los cálculos evaluando covariantes bilineales espinoriales. Recordemos que $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ para demostrar los siguientes resultados.

Lema B.1.

- (a) $(\gamma^0 \gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu$.
- (b) $(\gamma^5 \gamma^i)^\dagger = \gamma^5 \gamma^i$.
- (c) $(\gamma^5 \gamma^0)^\dagger = -\gamma^5 \gamma^0$.

Demostración.

(a): lo hacemos por casos. Si $\mu = 0$, ya sabemos que γ^0 es hermítica luego $(\gamma^0 \gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \gamma^0$. Si $\mu = i \in \{1, 2, 3\}$, entonces usamos que $\gamma^0 \gamma^i = -\gamma^i \gamma^0$ y que γ^i es antihermítica para deducir $(\gamma^0 \gamma^i)^\dagger = (\gamma^i)^\dagger \gamma^0 = -\gamma^i \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^i$.

(b) Sabiendo $\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu$, tenemos $(\gamma^5 \gamma^i)^\dagger = (\gamma^i)^\dagger (\gamma^5)^\dagger = -\gamma^i \gamma^5 = \gamma^5 \gamma^i$.

(c) Tanto γ^0 como γ^5 son hermíticas y anticonmutan. Entonces: $(\gamma^5 \gamma^0)^\dagger = (\gamma^0)^\dagger (\gamma^5)^\dagger = \gamma^0 \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^0 \quad \square$

Es de interés saber calcular $|\bar{u}\Gamma v|^2$ para cualquier operador Γ . Esta clase de cálculos es recurrente en el desarrollo de amplitudes invariantes. Los dos siguientes resultados van en esta dirección.

Lema B.2. Sea Γ un operador espinorial cualquiera, entonces se tiene:

$$(\bar{u}\Gamma v)^* = \bar{v}\bar{\Gamma}u$$

donde $\bar{\Gamma} = \gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0$. Esta operación es la llamada conjugación de Dirac para operadores, generalizando el complejo-conjugado \dagger al espacio de espinores.

Demostración.

$$(\bar{u}\Gamma v)^* = (u^\dagger\gamma^0\Gamma u)^\dagger = v^\dagger(\gamma^0\Gamma)^\dagger u = v^\dagger \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_1 \Gamma \underbrace{(\gamma^0)^\dagger}_{\gamma^0} u = \bar{v}\bar{\Gamma}u$$

□

Lema B.3. Sea Γ un operador espinorial cualquiera, entonces se tiene:

$$|\bar{u}\Gamma v|^2 = (\bar{u}\Gamma v)(\bar{v}\bar{\Gamma}u)$$

Demostración. Basta usar que $|z|^2 = zz^*$ y utilizar el lema anterior:

$$|\bar{u}\Gamma v|^2 = (\bar{u}\Gamma v)(\bar{u}\Gamma v)^* = (\bar{u}\Gamma v)(\bar{v}\bar{\Gamma}u)$$

□

A la vista de estos lemas, resulta imprescindible conocer los adjuntos de Dirac de diversos operadores. Esto queda recogido en el siguiente resultado.

Lema B.4.

- (a) $\overline{\gamma^\mu} = \gamma^\mu$.
- (b) $\overline{\gamma^5} = -\gamma^5$.
- (c) $\overline{\Gamma_1\Gamma_2} = \Gamma_2 \overline{\Gamma_1}$.
- (d) $\overline{\not{a}\not{b}\dots\not{z}} = \not{z}\dots\not{b}\not{a}$.
- (e) $\overline{\sigma^{\mu\nu}} = \sigma^{\mu\nu}$.

Demostración. (a) De nuevo por casos. Si $\mu = 0 \implies \overline{\gamma^0} = \gamma^0(\gamma^0)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^0\gamma^0 = \gamma^0$. Si $\mu = k$ tenemos antihermiticidad y $\overline{\gamma^k} = \gamma^0(\gamma^k)^\dagger\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^k\gamma^0 = +\gamma^k\gamma^0\gamma^0 = \gamma^k$.

(b) Por definición: $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ por tanto $\overline{\gamma^5} = \overline{i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3} = -i\gamma^0(\gamma^3)^\dagger(\gamma^2)^\dagger(\gamma^1)^\dagger(\gamma^0)^\dagger\gamma^0 = +i\gamma^0\gamma^3\gamma^2\gamma^1\cancel{\gamma^0\gamma^0} = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\gamma^5$ gracias a la anticonmutación de γ^i, γ^j .

(c) $\overline{\Gamma_1\Gamma_2} = \gamma^0(\Gamma_1\Gamma_2)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\Gamma_2^\dagger\Gamma_1^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\Gamma_2^\dagger\gamma^0\gamma^0\Gamma_1^\dagger\gamma^0 = \Gamma_2 \overline{\Gamma_1}$.

(d) Podemos demostrarlo para dos elementos y luego iterar: $\overline{\not{a}\not{b}} = a_\mu b_\nu \overline{\gamma^\mu\gamma^\nu} = a_\mu b_\nu \overline{\gamma^\nu} \overline{\gamma^\mu} = a_\mu b_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu = \not{b}\not{a}$.

(e) Usamos la definición de $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \implies \overline{\sigma^{\mu\nu}} = \frac{i}{2}(\overline{\gamma^\mu\gamma^\nu} - \overline{\gamma^\nu\gamma^\mu}) = -\frac{i}{2}(\overline{\gamma^\nu} \overline{\gamma^\mu} - \overline{\gamma^\mu} \overline{\gamma^\nu}) = -\frac{i}{2}(\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\nu) = \sigma^{\mu\nu}$. □

B.4. Sumas de amplitudes sobre polarizaciones

Los teoremas de traza y las propiedades anteriores deducidas para matrices y covariantes bilineales pueden utilizarse para calcular sumas de la forma $\sum_{s_i, s_f} |\bar{u}_f \hat{\Gamma} u_i|^2$, que son usuales en el cálculo de amplitudes invariantes de procesos donde no medimos las polarizaciones iniciales ni finales.

Exponemos aquí tres resultados que nos permiten expresar las sumas de amplitudes al cuadrado sobre polarizaciones en términos de trazas (que se identificarán con los tensores leptónico y hadrónico en cada caso). Este primer resultado es la versión básica para calcular dichas sumas.

Teorema B.10.

$$\sum_{s_i, s_f} |\bar{u}_f \Gamma u_i|^2 = \text{Tr} \left[\Gamma \frac{\not{p}_i c + mc^2}{2mc^2} \bar{\Gamma} \frac{\not{p}_f c + mc^2}{2mc^2} \right].$$

Demostración. Usaremos las expresiones para los proyectores $\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \frac{\not{p} + m}{2m}$

$$\begin{aligned} \sum_{s_i, s_f} |\bar{u}_f \Gamma u_i|^2 &= \sum_{s_i, s_f} (\bar{u}_f \Gamma u_i) (\bar{u}_f \Gamma u_i)^\dagger = \sum_{s_i, s_f} (\bar{u}_f \Gamma u_i) (\bar{u}_i \bar{\Gamma} u_f) = \sum_{s_f} \bar{u}_f \Gamma \left(\sum_{s_i} u_i \bar{u}_i \right) \bar{\Gamma} u_f \\ &= \sum_{s_f} \bar{u}_f \Gamma \frac{\not{p}_i + m}{2m} \bar{\Gamma} u_f = \sum_{s_f} \bar{u}_f \Gamma \frac{\not{p}_i + m}{2m} \bar{\Gamma} u_f = \sum_{s_f} \Gamma \frac{\not{p}_i + m}{2m} \bar{\Gamma} u_f \bar{u}_f \\ &= \sum_{s_f} \left(\Gamma \frac{\not{p}_i + m}{2m} \bar{\Gamma} \right)_{\alpha\beta} (u_f \bar{u}_f)_{\beta\alpha} = \left(\Gamma \frac{\not{p}_i + m}{2m} \bar{\Gamma} \right)_{\alpha\beta} \left(\frac{\not{p}_f + m}{2m} \right)_{\beta\alpha} = \text{Tr} \left[\Gamma \frac{\not{p}_i + m}{2m} \bar{\Gamma} \frac{\not{p}_f + m}{2m} \right]. \end{aligned}$$

□

Sin embargo, a veces estamos interesados en sumas sobre polarizaciones donde el covariante bilineal es vectorial (como en el caso de interacción electrón-protón sin estructura). Esto implica una suma sobre los índices de Lorentz dentro del cuadrado del módulo, que requiere una descomposición cuidadosa antes de factorizar como el producto de dos trazas. Usaremos de manera crucial los lemas B.2 y B.4.

Teorema B.11.

$$\sum_{s_i, s_f, S_i, S_f} |(\bar{u}(p_f, s_f) \gamma^\mu u(p_i, s_i)) (\bar{U}(P_f, S_f) \gamma_\mu U_i(P_i, S_i))|^2 = 4L^{\mu\nu} H_{\mu\nu},$$

donde los tensores leptónicos y hadrónicos se calculan como:

$$\begin{cases} L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{p}_i + m}{2m} \gamma^\mu \frac{\not{p}_f + m}{2m} \gamma^\nu \right] \\ H_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{P}_i + M}{2M} \gamma_\mu \frac{\not{P}_f + M}{2M} \gamma_\nu \right]. \end{cases}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \sum_{s_i, s_f, S_i, S_f} |(\bar{u}_f \gamma^\mu u_i) (\bar{U}_f \gamma_\mu U_i)|^2 &= \sum_{s_i, s_f, S_i, S_f} [(\bar{u}_f \gamma^\mu u_i) (\bar{U}_f \gamma_\mu U_i)]^\dagger [(\bar{u}_f \gamma^\nu u_i) (\bar{U}_f \gamma_\nu U_i)] \\ &= \sum_{s_i, s_f, S_i, S_f} (\bar{u}_i \gamma^\mu u_f \bar{U}_i \gamma_\mu U_f) (\bar{u}_f \gamma^\nu u_i \bar{U}_f \gamma_\nu U_i) \\ &= \sum_{s_i, S_i} \bar{u}_i \gamma^\mu \left(\sum_{s_f} u_f \bar{u}_f \right) \gamma^\nu u_i \bar{U}_i \gamma_\mu \left(\sum_{S_f} U_f \bar{U}_f \right) \gamma_\nu U_i \\ &= \sum_{s_i, S_i} \left[\bar{u}_i \gamma^\mu \frac{\not{p}_f + m}{2m} \gamma^\nu u_i \right] \left[\bar{U}_i \gamma_\mu \frac{\not{P}_f + M}{2M} \gamma_\nu U_i \right] \\ &= \left[\sum_{s_i} (u_i \bar{u}_i)_{\alpha\beta} \left(\gamma^\mu \frac{\not{p}_f + m}{2m} \gamma^\nu \right)_{\beta\alpha} \right] \left[\sum_{S_i} (U_i \bar{U}_i)_{\alpha\beta} \left(\gamma_\mu \frac{\not{P}_f + M}{2M} \gamma_\nu \right)_{\beta\alpha} \right] \\ &= \text{Tr} \left[\frac{\not{p}_i + m}{2m} \gamma^\mu \frac{\not{p}_f + m}{2m} \gamma^\nu \right] \text{Tr} \left[\frac{\not{P}_i + M}{2M} \gamma_\mu \frac{\not{P}_f + M}{2M} \gamma_\nu \right] = 2L^{\mu\nu} 2H_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

□

Para terminar, calculamos la suma en polarizaciones cuando tenemos un covariante vertical con un índice de Lorentz como el de Rosenbluth o para neutrinos, conteniendo términos vectoriales, axiales y pseudoescalares.

Del lema B.4 se deduce que operadores vectoriales, tensoriales y axiales son autoadjuntos de Dirac, mientras que los pseudoescalares no. Consideramos que un operador es axial si es proporcional a $\gamma^\mu \gamma^5$, mientras que los del tipo $A^\mu \gamma^5$ con A^μ un cuadvivector, se transforma como pseudoescalar al tener el índice no espinorial. Se tiene:

$$\begin{cases} \overline{\gamma^\mu} = \gamma^\mu \\ \overline{\sigma^{\mu\nu}} = \sigma^{\mu\nu} \\ \overline{\gamma^\mu \gamma^5} = \overline{\gamma^5} \overline{\gamma^\mu} = -\gamma^5 \gamma^\mu = +\gamma^\mu \gamma^5 \\ \overline{\gamma^5} = -\gamma^5 \end{cases} \implies \begin{cases} \overline{\Gamma_V^\mu} = \Gamma_V^\mu \\ \overline{\Gamma_T^{\mu\nu}} = \Gamma_T^{\mu\nu} \\ \overline{\Gamma_A^\mu} = \Gamma_A^\mu \\ \overline{\Gamma_P} = -\Gamma_P \end{cases}$$

El siguiente resultado resuelve de manera completa el problema, englobando los casos de corriente tanto electromagnética como débil para leptones y nucleones.

Teorema B.12. *Sean dos operadores verticales con un índice de Lorentz, $\Gamma_1^\mu, \Gamma_2^\nu$ actuando sobre estados leptónicos (inicial y final, en general distintos quizás incluso en masa) y estados hadrónicos (también posiblemente distintos). Se tiene entonces:*

$$\sum_{s_i, s_f, S_i, S_f} |(\overline{u}_f \Gamma_1^\mu u_i)(\overline{U}_f \Gamma_{2,\mu} U_i)|^2 = \text{Tr} \left[\frac{\not{p}_f + m_f}{2m_f} \Gamma_1^\mu \frac{\not{p}_i + m_i}{2m_i} \Gamma_1^\mu \right] \times \text{Tr} \left[\frac{\not{P}_f + M_f}{2M_f} \Gamma_{2,\mu} \frac{\not{P}_i + M_i}{2M_i} \Gamma_{2,\nu} \right].$$

Demostración. Usaremos el resultado B.2 para calcular los conjugados. Tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{s_i, s_f, S_i, S_f} |\overline{u}_f \Gamma_1^\mu u_i \overline{U}_f \Gamma_{2,\nu} U_i|^2 &= \sum_{s_i, s_f, S_i, S_f} [\overline{u}_f \Gamma_1^\mu \overline{U}_f \Gamma_{2,\mu} U_i] [\overline{u}_f \Gamma_1^\mu \overline{U}_f \Gamma_{2,\mu} U_i]^\dagger \\ &= \sum_{s_i, s_f, S_i, S_f} [\overline{u}_f \Gamma_1^\mu \overline{U}_f \Gamma_{2,\mu} U_i] [\overline{u}_i \Gamma_1^\mu \overline{U}_i \Gamma_{2,\mu} U_f] \\ &= \left(\sum_{s_f} \overline{u}_f \Gamma_1^\mu \left(\sum_{s_i} u_i \overline{u}_i \right) \overline{\Gamma_1^\mu} u_f \right) \left(\sum_{S_f} \overline{U}_f \Gamma_{2,\nu} \left(\sum_{S_i} U_i \overline{U}_i \right) \overline{\Gamma_{2,\nu}} U_f \right) \\ &= \left(\sum_{s_f} \overline{u}_f \Gamma_1^\mu \frac{\not{p}_i + m_i}{2m_i} \overline{\Gamma_1^\nu} u_f \right) \left(\sum_{S_f} \overline{U}_f \Gamma_{2,\nu} \frac{\not{P}_i + M_i}{2M_i} \overline{\Gamma_{2,\nu}} U_f \right) \\ &= \left(\sum_{s_f} (u_f \overline{u}_f)_{\lambda\delta} \left(\Gamma_1^\mu \frac{\not{p}_i + m_i}{2m_i} \overline{\Gamma_1^\nu} \right)_{\delta\lambda} \right) \left(\sum_{S_f} (U_f \overline{U}_f)_{\beta\alpha} \left(\Gamma_{2,\nu} \frac{\not{P}_i + M_i}{2M_i} \overline{\Gamma_{2,\nu}} \right)_{\alpha\beta} \right) \\ &= \text{Tr} \left[\frac{\not{p}_f + m_f}{2m_f} \Gamma_1^\mu \frac{\not{p}_i + m_i}{2m_i} \overline{\Gamma_1^\mu} \right] \times \text{Tr} \left[\frac{\not{P}_f + M_f}{2M_f} \Gamma_{2,\mu} \frac{\not{P}_i + M_i}{2M_i} \overline{\Gamma_{2,\nu}} \right]. \end{aligned}$$

□

Apéndice C

Cálculo de tensores leptónico y hadrónico

Recogemos aquí los cálculos relacionados con la determinación de los tensores hadrónico y leptónico en los casos de corriente electromagnética y débil.

C.1. Tensor hadrónico para la corriente EM del protón con estructura

Partimos de la expresión para el tensor hadrónico del protón con estructura, tal y como está expuesto en la sección 2.3.

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{8M^2} \text{Tr} \left[(\not{P}_i + M) \left((F_1 + F_2)\gamma_\mu - \frac{F_2}{2M}(P_f + P_i)_\mu \right) (\not{P}_f + M) \left((F_1 + F_2)\gamma_\nu - \frac{F_2}{2M}(P_f + P_i)_\nu \right) \right].$$

Desarrollamos usando la linealidad de la traza. Teniendo en cuenta las propiedades de las matrices de Dirac B.2, solo tenemos que hacer trazas de un número par de matrices gamma. Luego la mitad de los 16 términos que surgen del producto de los 4 binomios se anulan. El desarrollo resulta:

$$\begin{aligned} 8M^2 H_{\mu\nu} &= (F_1 + F_2)^2 \text{Tr}[\not{P}_i \gamma_\mu \not{P}_f \gamma_\nu] + \left(\frac{F_2}{2M} \right)^2 (P_f + P_i)_\mu (P_f + P_i)_\nu \text{Tr}[\not{P}_i \not{P}_f] \\ &\quad - \frac{F_2}{2M} (P_f + P_i)_\mu M (F_1 + F_2) \text{Tr}[\not{P}_i \gamma_\nu] - (F_1 + F_2) M \frac{F_2}{2M} (P_f + P_i)_\nu \text{Tr}[\not{P}_i \gamma_\mu] \\ &\quad - M (F_1 + F_2) \frac{F_2}{2M} (P_f + P_i)_\nu \text{Tr}[\gamma_\mu \not{P}_f] + M (F_1 + F_2) M (F_1 + F_2) \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu] \\ &\quad - M \frac{F_2}{2M} (P_f + P_i)_\mu \text{Tr}[\not{P}_f \gamma_\nu] + M^2 \left(\frac{F_2}{2M} \right)^2 (P_f + P_i)_\mu (P_f + P_i)_\nu \text{Tr}[\mathbb{1}]. \end{aligned}$$

Ahora calculamos las trazas con solo dos matrices involucradas. De los teoremas de traza:

$$\text{Tr}[\not{A} \not{B}] = 4A \cdot B \equiv 4A_\mu B^\mu$$

$$\text{Tr}[\not{A} \gamma_\mu \not{B} \gamma_\nu] = 4(A_\mu B_\nu + A_\nu B_\mu - g_{\mu\nu} A \cdot B).$$

Ya podemos desarrollar las trazas en cada término:

$$\begin{aligned}
8M^2 H_{\mu\nu} = & 4(F_1 + F_2)^2 [P_\mu^i P_\nu^f + P_\nu^i P_\mu^f - g_{\mu\nu} P_f \cdot P_i] + \frac{F_2^2}{4M^2} (P_f + P_i)_\mu 4(P_i \cdot P_f) \\
& - \frac{F_2}{2} (F_1 + F_2) (P_f + P_i)_\mu 4P_\nu^i - \frac{F_2}{2} (F_1 + F_2) (P_f + P_i)_\nu 4P_\mu^i \\
& - \frac{F_2}{2} (F_1 + F_2) (P_f + P_i)_\nu 4P_\mu^f + 4M^2 (F_1 + F_2)^2 g_{\mu\nu} \\
& - \frac{F_2}{2} (F_1 + F_2) (P_f + P_i)_\mu 4P_\nu^f + \frac{F_2^2}{4} (P_f + P_i)_\mu (P_f + P_i)_\nu 4.
\end{aligned}$$

Ahora se pueden agrupar los términos tensorialmente semejantes.

$$\begin{aligned}
8M^2 H_{\mu\nu} = & 4(F_1 + F_2)^2 [P_\mu^i P_\nu^f + P_\nu^i P_\mu^f - (P_i \cdot P_f - M^2) g_{\mu\nu}] \\
& + \frac{F_2^2}{M^2} [(P_f + P_i)_\mu (P_i + P_f)_\nu] (P_i \cdot P_f) \\
& - 2F_2 (F_1 + F_2) (P_i + P_f)_\mu (P_i + P_f)_\nu \\
& - 2F_2 (F_1 + F_2) (P_i + P_f)_\mu (P_i + P_f)_\nu \\
& + F_2^2 (P_f + P_i)_\mu (P_f + P_i)_\nu.
\end{aligned}$$

Sumando obtenemos:

$$\begin{aligned}
8M^2 H_{\mu\nu} = & 4(F_1 + F_2)^2 [P_\mu^i P_\nu^f + P_\nu^i P_\mu^f - g_{\mu\nu} (P_i \cdot P_f - M^2)] \\
& + \left[F_2^2 \left(\frac{P_i \cdot P_f}{M^2} + 1 \right) - 4F_2 (F_1 + F_2) \right] (P_i + P_f)_\mu (P_i + P_f)_\nu.
\end{aligned}$$

Lo que permite obtener el resultado final usado en el capítulo 2:

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu} = & \frac{1}{2M^2} [(F_1 + F_2)^2 \{ P_\mu^i P_\nu^f + P_\nu^i P_\mu^f - (P_i \cdot P_f - M^2) g_{\mu\nu} \}] \\
& + \frac{1}{8M^2} \left[F_2^2 \left(\frac{P_i \cdot P_f}{M^2} + 1 \right) - 4F_2 (F_1 + F_2) \right] (P_i + P_f)_\mu (P_i + P_f)_\nu.
\end{aligned}$$

C.2. Tensor leptónico para la corriente débil $\nu \rightarrow e^-$

Partimos de la expresión del tensor leptónico dada por el teorema B.12. Nos preocupamos de la parte de la traza, dada por:

$$\text{Tr} [(k_l + m_l) \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) (k_\nu + m_\nu) \gamma_\beta (1 - \gamma^5)].$$

En virtud de los teoremas de traza, solo consideramos trazas de número par de matrices γ_μ . Recordamos que γ^5 no contabiliza para este cómputo. Así, desarrollando obtenemos:

$$L_{\alpha\beta} \propto \text{Tr} [k_l \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) k_\nu \gamma_\beta (1 - \gamma^5)] + \text{Tr} [m_l \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) m_\nu \gamma_\beta (1 - \gamma^5)]. \quad (\text{C.1})$$

Desarrollamos el primer término en (C.1). Para ello anticonmutaremos las matrices γ^5 con el resto de matrices involucradas. Recordemos $\not{k} = k^\lambda \gamma_\lambda$. Denotamos $A^\rho = \delta_\alpha^\rho, B^\lambda = \delta_\beta^\lambda$ de tal manera que $\not{A} = \gamma_\alpha, \not{B} = \gamma_\beta$.

$$\begin{aligned}
\text{Tr} [\not{k}_l \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \not{k}_\nu \gamma_\beta (1 - \gamma^5)] &= \text{Tr} [\not{k}_l \gamma_\alpha \not{k}_\nu \gamma_\beta] - \text{Tr} [\not{k}_l \gamma_\alpha \gamma^5 \not{k}_\nu \gamma_\beta] - \text{Tr} [\gamma^5 \not{k}_l \gamma_\alpha \not{k}_\nu \gamma_\beta] + \text{Tr} [\not{k}_l \gamma_\alpha \gamma^5 \not{k}_\nu \gamma_\beta \gamma^5] \\
&= \text{Tr} [\not{k}_l \gamma_\alpha \not{k}_\nu \gamma_\beta] - \text{Tr} [\gamma^5 \not{k}_l \gamma_\alpha \not{k}_\nu \gamma_\beta] - \text{Tr} [\not{k}_l \gamma_\alpha \not{k}_\nu \gamma_\beta \gamma^5] + \text{Tr} [\not{k}_l \gamma_\alpha \not{k}_\nu \gamma_\beta \cancel{\gamma^5} \gamma^5] \quad \mathbb{1} \\
&= 2 \{ \text{Tr} [\not{k}_l \gamma_\alpha \not{k}_\nu \gamma_\beta] - \text{Tr} [\gamma^5 \not{k}_l \gamma_\alpha \not{k}_\nu \gamma_\beta] \} \\
&= 2 \{ \text{Tr} [\not{k}_l \not{A} \not{k}_\nu \not{B}] - \text{Tr} [\gamma^5 \not{k}_l \not{A} \not{k}_\nu \not{B}] \} \\
&= 2 \{ k_l \cdot A \text{Tr} [\not{k}_\nu \not{B}] - k_l \cdot k_\nu \text{Tr} [\not{A} \not{B}] + k_l \cdot B \text{Tr} [\not{A} \not{k}_\nu] - 4i \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} k_l^{\alpha_1} A^{\alpha_2} k_\nu^{\alpha_3} B^{\alpha_4} \} \\
&= 2 \left\{ k_\alpha^l 4k_\nu \cdot B - k_l \cdot k_\nu 4A \cdot B + k_\beta^l A \cdot k_\nu - 4i \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} k_l^{\alpha_1} \delta_{\alpha_2}^{\alpha_3} k_\nu^{\alpha_4} \delta_\beta^{\alpha_4} \right\} \\
&= 2 \{ 4k_\alpha^l k_\beta^\nu - k_l \cdot k_\nu g_{\alpha\beta} + 4k_\beta^l k_\alpha^\nu - 4i \epsilon_{\lambda\alpha\rho\beta} k_l^\lambda k_\nu^\rho \} \\
&= 8 \{ k_\alpha^l k_\beta^\nu + k_\beta^l k_\alpha^\nu - k_l \cdot k_\nu g_{\alpha\beta} + i \epsilon_{\alpha\beta\lambda\rho} k_l^\lambda k_\nu^\rho \}.
\end{aligned}$$

El segundo término resultará ser nulo. Lo desarrollamos:

$$\begin{aligned}
\text{Tr} [m_l \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) m_\nu \gamma_\beta (1 - \gamma^5)] &= m_l m_\nu \text{Tr} [\gamma_\alpha \gamma_\beta] - m_l m_\nu \text{Tr} [\gamma_\alpha \gamma^5 \gamma_\beta] - m_l m_\nu \text{Tr} [\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma^5] + m_l m_\nu \text{Tr} [\gamma_\alpha \gamma^5 \gamma_\beta \gamma^5] \\
&= m_l m_\nu \text{Tr} [\gamma_\alpha \gamma_\beta] + m_l m_\nu \text{Tr} [\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma^5] - m_l m_\nu \text{Tr} [\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma^5] - m_l m_\nu \text{Tr} [\gamma_\alpha \gamma_\beta \cancel{\gamma^5} \gamma^5] \quad \mathbb{1} = 0.
\end{aligned}$$

Concluimos que el tensor leptónico queda determinado por:

$$L_{\alpha\beta} = \frac{1}{m_l m_\nu} [k_\alpha^l k_\beta^\nu + k_\beta^l k_\alpha^\nu - k_l \cdot k_\nu g_{\alpha\beta} + i \epsilon_{\alpha\beta\lambda\rho} k_l^\lambda k_\nu^\rho]. \quad (\text{C.2})$$

C.3. Tensor hadrónico para corriente débil $n \rightarrow p$

Calculamos ahora el tensor hadrónico a partir de la expresión que nos da el teorema B.12 tal y como exponemos en la sección 3.2. Partimos de la corriente descartando el término pseudoescalar pues ya sabemos que su contracción con el tensor leptónico no contribuirá en el límite ultrarrelativista:

$$\Gamma^\alpha = F_1^V \gamma^\alpha + \frac{iF_2^V}{2M} \sigma^{\alpha\rho} q_\rho + \frac{G_P}{2M} \cancel{\gamma^5} q^\alpha + G_A \gamma^\alpha \gamma^5.$$

Dicho operador es la suma de uno con carácter vectorial y otro axial. Además podemos calcular sus adjuntos de Dirac a partir de los resultados de la sección B.4.

$$\Gamma^\alpha = \Gamma_V^\alpha + \Gamma_A^\alpha \implies \begin{cases} \Gamma_V^\alpha = F_1^V \gamma^\alpha + \frac{iF_2^V}{2M} \sigma^{\alpha\rho} q_\rho \\ \Gamma_A^\alpha = G_A \gamma^\alpha \gamma^5 \end{cases} \implies \begin{cases} \overline{\Gamma}_V^\alpha = F_1^V \gamma^\alpha - \frac{iF_2^V}{2M} \sigma^{\alpha\rho} q_\rho \neq \Gamma_V^\alpha \\ \overline{\Gamma}_A^\alpha = G_A \gamma^\alpha \gamma^5 = \Gamma_A^\alpha. \end{cases}$$

Como el tensor hadrónico se calcula como la traza

$$H^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{P}_p + M}{2M} \Gamma^\alpha \frac{\not{P}_n + M}{2M} \overline{\Gamma}^\beta \right],$$

podemos descomponer dicho tensor en tres términos: el puramente vectorial, el puramente axial y el vectorial.

$$H^{\alpha\beta} = H_V^{\alpha\beta} + H_A^{\alpha\beta} + H_{AV}^{\alpha\beta}.$$

Procedemos a calcular cada uno de ellos.

Parte vectorial del tensor hadrónico

Eligiendo la parte vectorial tanto de Γ^α como de $\overline{\Gamma}^\alpha$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
H_V^{\alpha\beta} &= \frac{1}{8M^2} \text{Tr} \left[(\not{P}_p + M) \left(F_1^V \gamma^\alpha + \frac{iF_2^V}{2M} \sigma^{\alpha\rho} q_\rho \right) (\not{P}_n + M) \left(F_1^V \gamma^\alpha - \frac{iF_2^V}{2M} \sigma^{\alpha\rho} q_\rho \right) \right] \\
&= \frac{1}{8M^2} \left\{ f_{VV}^{\alpha\beta} (F_1^V)^2 + f_{MM}^{\alpha\beta} \frac{1}{4M^2} (F_2^V)^2 + \frac{i}{2M} f_{VM}^{\alpha\beta} F_1^V F_2^V \right\},
\end{aligned}$$

donde introducimos las funciones auxiliares $f_V V, f_M M, f_V M$ que son a su vez trazas obtenibles fácilmente con los teoremas de la sección B.2.

$$f_{VV}^{\alpha\beta} = \text{Tr} [(\not{P}_p + M)\gamma^\alpha(\not{P}_n + M)\gamma^\beta] = 4[P_p^\alpha P_n^\beta + P_p^\beta P_n^\alpha - g^{\alpha\beta}(P_p \cdot P_n - M^2)].$$

Usando el teorema de trazas para $\sigma^{\mu\nu}$ y desarrollando trazas solo de número par de matrices gamma obtenemos:

$$\begin{aligned} f_{MM}^{\alpha\beta} &= \text{Tr}[(\not{P}_p + M)\sigma^{\alpha\rho}q_\rho(\not{P}_n + M)\sigma^{\beta\lambda}q_\lambda] \\ &= -4 [q^2(P_p^\alpha P_n^\beta + P_p^\beta P_n^\alpha) - P_p \cdot q(P_n^\alpha q^\beta + P_n^\beta q^\alpha) - P_n \cdot q(P_p^\alpha q^\beta + P_p^\beta q^\alpha)] \\ &\quad - 4 [+q^\alpha q^\beta(P_p \cdot P_n + M^2) + g^{\alpha\beta} \{2P_p \cdot q P_p \cdot q - q^2 P_p \cdot P_n + M^2\}]. \end{aligned}$$

Para la última función auxiliar se toman términos mezclados de σ y γ , obteniendo dos trazas muy similares entre sí. Además usamos el teorema B.9 para trazas del tipo $\text{Tr}[\not{A}\sigma^{\alpha\rho}\not{B}]$:

$$\begin{aligned} f_{VM}^{\alpha\beta} &= \text{Tr}[(\not{P} + M)\sigma^{\alpha\rho}q_\rho(\not{P}_n + M)\gamma^\beta] - \text{Tr}[(\not{P}_p + M)\gamma^\alpha(\not{P}_n + M)\sigma^{\beta\lambda}q_\lambda] \\ &= 4iM[P_p^\alpha q^\beta + P_p^\beta q^\alpha 2g^{\alpha\beta}P_p \cdot q - P_n^\alpha q^\beta - P_n^\beta q^\alpha + 2g^{\alpha\beta}P_n \cdot q]. \end{aligned}$$

Parte axial del tensor hadrónico

Ahora tomamos el término axial para calcular la traza. De nuevo desarrollamos solo considerando combinaciones con producto par de matrices gamma. La anticonmutación de γ^5 con γ^μ y por tanto con cualquier \not{P} es usada extensivamente.

$$\begin{aligned} H_A^{\alpha\beta} &= \frac{1}{8M^2} \text{Tr} [(\not{P}_p + M)G_A\gamma^\alpha\gamma^5(\not{P}_n + M)G_A\gamma^\beta\gamma^5] \\ &= \frac{G_A^2}{8M^2} \{ \text{Tr}[\not{P}_p\gamma^\alpha\gamma^5\not{P}_n\gamma^\beta\gamma^5] + \text{Tr}[M\gamma^\alpha\gamma^5M\gamma^\beta\gamma^5] \} \\ &= \frac{G_A^2}{8M^2} \{ \text{Tr}[\not{P}_p\gamma^\alpha\not{P}_n\gamma^\beta\cancel{\gamma^5\cancel{\gamma^5}}] + M^2 \text{Tr}[\gamma^\alpha\gamma^5\gamma^\beta\gamma^5] \} \\ &= \frac{G_A^2}{8M^2} \{ 4P_p^\alpha P_n^\beta + 4P_p^\beta P_n^\alpha - 4P_p \cdot P_n g^{\alpha\beta} - M^2 \text{Tr}[\gamma^\alpha\gamma^\beta\cancel{\gamma^5\cancel{\gamma^5}}] \} \\ &= \frac{G_A}{2M^2} [P_p^\alpha P_n^\beta + P_p^\beta P_n^\alpha - g^{\alpha\beta}(P_p \cdot P_n + M^2)] \equiv \frac{G_A}{2M^2} f_{AA}^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Parte axial-vector del tensor hadrónico

Consideramos ahora los términos cruzados del operador vectorial con el axial conjugado y viceversa.

$$\begin{aligned} H_{VA}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{8M^2} \text{Tr} \left[(\not{P}_p + M)G_A\gamma^\alpha\gamma^5(\not{P}_n + M) \left(F_1^V\gamma^\beta - \frac{iF_2^V}{2M}\sigma^{\beta\lambda}q_\lambda \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{8M^2} \text{Tr} \left[(\not{P}_p + M) \left(F_1^V\gamma^\alpha + \frac{iF_2^V}{2M}\sigma^{\alpha\rho}q_\rho \right) (\not{P}_n + M)G_A\gamma^\beta\gamma^5 \right] \\ &= \frac{1}{8M^2} \left[g_{VA}^{\alpha\beta}F_1^V G_A + g_{MA}^{\alpha\beta} \frac{iF_2^V}{2M} G_A \right]. \end{aligned}$$

Calculamos las funciones auxiliares introducidas g_{VA}, g_{MA} . Subimos las etiquetas de los momentos del protón y neutrón para que no coincidan con las etiquetas de Lorentz covariantes. Con el teorema de traza para γ^5 por gammas, y conmutando signos en el tensor antisimétrico obtenemos:

$$\begin{aligned} g_{VA}^{\alpha\beta} &= \text{Tr}[\not{P}_p\gamma^\alpha\gamma^5\not{P}_n\gamma^\beta] + \text{Tr}[\not{P}_p\gamma^\alpha\not{P}_n\gamma^\beta\gamma^5] \\ &= 2 \text{Tr}[\gamma^5\not{P}_p\gamma^\alpha\not{P}_n\gamma^\beta] = 2 \times (-4i)\epsilon^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} P_{\alpha_1}^p(\gamma^\alpha)_{\alpha_2} P_{\alpha_3}^n(\gamma^\beta)_{\alpha_4} \\ &= -8i\epsilon^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta} P_{\alpha_1}^p P_{\alpha_3}^n = +8i\epsilon^{\alpha\beta\alpha_1\alpha_3} P_{\alpha_1}^p P_{\alpha_3}^n \equiv 8i\epsilon_{\alpha\beta\rho\delta} P_\rho^p P_\delta^n. \end{aligned}$$

Para la otra función auxiliar:

$$\begin{aligned}
g_{MA}^{\alpha\beta} &= -\frac{i}{2M} \text{Tr}[(\not{P}_p + M)\gamma^\alpha\gamma^5(\not{P}_n + M)\sigma^{\beta\lambda}q_\lambda] + \frac{i}{2M} \text{Tr}[(\not{P}_p + M)\sigma^{\alpha\rho}q_\rho(\not{P}_n + M)\gamma^\beta\gamma^5] \\
&= 8M[\epsilon^{\delta\alpha\beta\lambda}P_\rho^p q_\lambda - \epsilon^{\alpha\delta\beta\lambda}P_\delta^n q_\lambda] \\
&= 8M[\epsilon^{\alpha\beta\lambda\rho}P_\lambda^n q_\rho + \epsilon^{\alpha\beta\lambda\rho}P_\lambda^p q_\rho] \\
&= 16M\epsilon^{\alpha\beta\lambda\rho}P_\lambda^n P_\rho^p.
\end{aligned}$$

Con un cambio de variable pueden compactificarse todas las funciones auxiliares anteriormente expuestas.

$$\begin{aligned}
q = P_p - P_n &\implies P_n \cdot q = P_n \cdot P_p - P_n^2 = P_p \cdot P_n - M^2 \\
&\implies |q^2| = -q^2 = -(P_p^2 + P_n^2 - 2P_p \cdot P_n) = 2(M^2 - P_p \cdot P_n) \\
&\implies \frac{P_n \cdot q}{|q^2|} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Definimos entonces:

$$X = P_n + \frac{P_n \cdot q}{|q^2|}q = P_n + \frac{1}{2}q,$$

y sustituyendo en las funciones auxiliares llegamos a estas nuevas expresiones:

$$\begin{aligned}
f_{VV}^{\alpha\beta} &= -2|q^2| \left(g^{\alpha\beta} + \frac{q^\alpha q^\beta}{|q^2|} \right) + 8X^\alpha X^\beta \\
f_{VM}^{\alpha\beta} &= 8iM|q^2| \left(g^{\alpha\beta} + \frac{q^\alpha q^\beta}{|q^2|} \right) \\
f_{MM}^{\alpha\beta} &= -8M^2|q^2| \left(g^{\alpha\beta} + \frac{q^\alpha q^\beta}{|q^2|} \right) + 8|q^2|X^\alpha X^\beta \\
f_{AA}^{\alpha\beta} &= -2|q^2| \left(g^{\alpha\beta} + \frac{q^\alpha q^\beta}{|q^2|} \right) + 8X^\alpha X^\beta - 8g^{\alpha\beta}M^2 \\
g_{VA}^{\alpha\beta} &= 8i\epsilon^{\alpha\beta\rho\lambda}P_\rho^n q_\lambda \\
g_{MA}^{\alpha\beta} &= 16M\epsilon_{\alpha\beta\rho\lambda}P_\rho^n q_\lambda.
\end{aligned}$$

Unificando todos estos resultados en el tensor hadrónico completo tenemos:

$$H^{\alpha\beta} = -W_1 g^{\alpha\beta} + W_2 \frac{P_n^\alpha P_n^\beta}{M^2} + iW_3 \epsilon^{\alpha\beta\rho\lambda} P_\rho^n q_\lambda + W_4 q^\alpha q^\beta + W_5 \frac{P_n^\alpha q^\beta + P_n^\beta q^\alpha}{2M^2}, \quad (\text{C.3})$$

donde los coeficientes (que dependen del cuadrimomento transferido) son:

$$\begin{aligned}
W_1 &= \frac{|q^2|}{4M^2} [(F_1^V + F_2^V)^2 + G_A^2] + G_A^2 \\
W_2 &= (F_1^V)^2 + \frac{|q^2|}{4M^2} (F_2^V)^2 + G_A^2 \\
W_3 &= 2G_A(F_1^V + F_2^V) \\
W_4 &= \frac{F_2^V}{4M^2} \left(\frac{|q^2|}{4M^2} - 1 \right) - \frac{F_1^V F_2^V}{2M^2} + \frac{G_A^2}{|q^2|} + 2\frac{G_A}{M^2} (F_1^V + F_2^V) \\
W_5 &= (F_1^V)^2 + \frac{|q^2|}{4M^2} (F_2^V)^2 + G_A^2
\end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

O de forma alternativa en términos de la variable X :

$$H^{\alpha\beta} = -W'_1 \left(g^{\alpha\beta} + \frac{q^\alpha q^\beta}{|q^2|} \right) + \frac{W'_2}{M^2} X^\alpha X^\beta + i\frac{W'_3}{M^2} \epsilon^{\alpha\beta\rho\lambda} P_\rho^n q_\lambda + \frac{W'_4}{M^2} q^\alpha q^\beta, \quad (\text{C.5})$$

lo que permitirá simplificar los cálculos de la contracción. Los nuevos coeficientes son:

$$\begin{aligned} W'_1 &= W_1 \\ W'_2 &= W_2 \\ W'_3 &= W_3/2 \\ W'_4 &= M^2 W_4 + \frac{M^2}{|q^2|} W_1 - \frac{W_2}{4} = \frac{M^2}{|q^2|} G_A^2 \end{aligned}$$

C.4. Contracción de los tensores leptónico y hadrónico débil

Calculamos aquí la contracción de los tensores de interacción débil para el estudio de $\nu + n \rightarrow e^- + p$. Utilizamos los tensores leptónico y hadrónico dados por (3.9) y (C.5) respectivamente. Ambos pueden descomponerse en parte simétrica y antisimétrica. Para el leptónico:

$$L_{\alpha\beta} = \underbrace{k_\alpha^l k_\beta^\nu + k_\beta^l k_\alpha^\nu - (k_l \cdot k_\nu) g_{\alpha\beta}}_{L_{\alpha\beta}^S} + \underbrace{i\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} k_l^\gamma k_\nu^\delta}_{L_{\alpha\beta}^A}.$$

Ahora contraeremos cada una de estas partes con cada tipo de términos del hadrónico. Solo debemos contrar parte simétrica con simétrica y antisimétrica con antisimétrica: el resto de términos son trivialmente nulos efectuada la contracción. Además, tomamos la aproximación ultrarrelativista tanto para electrones como para los neutrinos

Término $L_{\alpha\beta}^S q^\alpha q^\beta$

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta}^S q^\alpha q^\beta &= (k_\alpha^l k_\beta^\nu + k_\beta^l k_\alpha^\nu - (k_l \cdot k_\nu) g_{\alpha\beta}) q^\alpha q^\beta = 2(k_l \cdot q)(k_\nu \cdot q) - (k_l \cdot k_\nu) q^2 \\ &= 2[k_l \cdot (k_\nu - \cancel{k_l})][k_\nu \cdot (\cancel{k_\nu} - k_l)] - (k_l \cdot k_\nu)(\cancel{k_l}^2 + \cancel{k_\nu}^2 - 2k_l \cdot k_\nu) \\ &\approx -2(k_\nu \cdot k_l)^2 + 2(k_\nu \cdot k_l)^2 = 0. \end{aligned}$$

Término $L_{\alpha\beta}^S g^{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta}^S g^{\alpha\beta} &= (k_\alpha^l k_\beta^\nu + k_\beta^l k_\alpha^\nu - (k_l \cdot k_\nu) g_{\alpha\beta}) g^{\alpha\beta} = k_l \cdot k_\nu + k_l \cdot k_\nu - (k_l \cdot k_\nu) \underbrace{g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}}_4 \\ &= -2k_l \cdot k_\nu = -2(\epsilon_l \epsilon_\nu - \epsilon_\nu |\mathbf{k}_l| \cos(\theta)) \approx -2\epsilon_l \epsilon_\nu (1 - \cos(\theta)). \end{aligned}$$

Término $L_{\alpha\beta}^S X^\alpha X^\beta$

Recordando que $X = P_n + \frac{1}{2}Q$ obtenemos tres términos: uno de ellos es del tipo del primero calculado. Tengamos en cuenta que usamos el sistema de referencia donde $P_n = (M, \mathbf{0})$, por lo tanto $P_n \cdot k_l = m_l M \approx 0$ y $P_n \cdot k_\nu = m_\nu \approx 0$ en el límite ultrarrelativista

$$L_{\alpha\beta}^S X^\alpha X^\beta = \underline{L_{\alpha\beta}^S q^\alpha q^\beta} + L_{\alpha\beta}^S P_n^\alpha P_n^\beta + \frac{1}{2} L_{\alpha\beta}^S (P_n^\alpha q^\beta + P_n^\beta q^\alpha).$$

El segundo término resulta:

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta}^S P_n^\alpha P_n^\beta &= (k_\alpha^l k_\beta^\nu + k_\beta^l k_\alpha^\nu - k_l \cdot k_\nu g_{\alpha\beta}) P_n^\alpha P_n^\beta \\ &= 2k_l \cdot P_n k_\nu \cdot P_n - k_l \cdot k_\nu P_n^2 \approx 2\epsilon_l M \epsilon_\nu M - \epsilon_l \epsilon_\nu (1 - \cos(\theta)) M^2 \\ &= \epsilon_l \epsilon_\nu M^2 (1 + \cos(\theta)). \end{aligned}$$

El tercer término se anula en el límite ultrarrelativista:

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta}^S(P_\alpha^n q_\beta + P_\beta^n q_\alpha) &= (k_\alpha^l k_\beta^\nu + k_\beta^l k_\alpha^\nu - k_l \cdot k_\nu g_{\alpha\beta})(P_\alpha^n q_\beta + P_\beta^n q_\alpha) \\
&= 2(k_l \cdot P_n)(k_\nu \cdot q) + 2(k_l \cdot q)(k_\nu \cdot P_n) - 2(k_l \cdot k_\nu)(P_n \cdot q) \\
&= 2M\epsilon_l(m_\nu^2 - k_l \cdot k_\nu) + 2(k_l \cdot k_\nu - m_l^2)M\epsilon_\nu - 2k_l \cdot k_\nu(M\epsilon_\nu - M\epsilon_l) \\
&= 2M(\epsilon_l m_\nu^2 - \epsilon_\nu m_l^2) \approx 0.
\end{aligned}$$

Término antisimétrico-antisimétrico

Para la contracción de los tensores de Levi-Civita que comparten dos índices hay dos posibilidades: que los otros dos sean los mismos en el mismo orden o en el contrario. Así, tomando el límite ultrarrelativista donde $k_l \cdot k_\nu \approx \epsilon_l \epsilon_\nu (1 - \cos(\theta))$, tenemos:

$$\begin{aligned}
H_{\alpha\beta}^A L_A^{\alpha\beta} &= (i\epsilon_{\alpha\beta\lambda\delta} k_l^\lambda k_\nu^\delta) \left(\frac{iW_3'}{M^2} \epsilon^{\alpha\beta\rho\gamma} P_\rho^n q_\gamma \right) \\
&= -\frac{W_3'}{M^2} (\epsilon_{\alpha\beta\lambda\delta} \epsilon^{\alpha\beta\lambda\delta}) (k_l^\sigma k_\nu^\gamma P_\sigma^n q_\gamma) - \frac{W_3'}{M^2} (\epsilon_{\alpha\beta\lambda\delta} \epsilon^{\alpha\beta\delta\lambda}) (k_l^\sigma k_\nu^\gamma P_\gamma^n q_\sigma) \\
&= -\frac{W_3'}{M^2} (\epsilon_{\alpha\beta\lambda\delta} \epsilon^{\alpha\beta\lambda\delta}) (k_l \cdot P_n)(k_\nu \cdot q) + \frac{W_3'}{M^2} (\epsilon_{\alpha\beta\lambda\delta} \epsilon^{\alpha\beta\lambda\delta}) (k_l \cdot q)(k_\nu \cdot P_n) \\
&= \frac{W_3'}{M^2} (\epsilon_{\alpha\beta\lambda\delta} \epsilon^{\alpha\beta\lambda\delta}) [(k_l \cdot (k_\nu - k_l))(k_\nu \cdot P_n) - (k_l \cdot P_n)(k_\nu \cdot (k_\nu - k_l))] \\
&\approx -\frac{2W_3'}{M^2} [k_l \cdot k_\nu M\epsilon_\nu + k_l \cdot k_\nu M\epsilon_l] \approx -\frac{2W_3'}{M} (\epsilon_l + \epsilon_\nu)(\epsilon_l \epsilon_\nu)(1 - \cos(\theta)).
\end{aligned}$$

Agrupando todos los términos y recordando la relación $W_1' = W_1, W_2' = W_2, W_3' = W_3/2$ tenemos que la contracción resulta, en la aproximación ultrarrelativista:

$$\begin{aligned}
H^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} &\approx W_1' 2\epsilon_l \epsilon_\nu (1 - \cos(\theta)) + W_2' \epsilon_l \epsilon_\nu (1 + \cos(\theta)) - 2\frac{W_3'}{M} (\epsilon_l + \epsilon_\nu)(\epsilon_l \epsilon_\nu)(1 - \cos(\theta)) \\
&= 2W_1 \epsilon_l \epsilon_\nu (1 - \cos(\theta)) + W_2 \epsilon_l \epsilon_\nu (1 + \cos(\theta)) - \frac{W_3}{M} (\epsilon_l + \epsilon_\nu)(\epsilon_l \epsilon_\nu)(1 - \cos(\theta)). \quad (C.6)
\end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] D. Eceizabarrena, “Distribution theory and fundamental solutions of differential operators,” B.S. Thesis, Universidad del País Vasco, 2015.
- [2] W. Greiner, J. Reinhardt, and D. Bromley, *Quantum Electrodynamics*. Physics and astronomy online library, Springer, 2003.
- [3] R. Hofstadter, “Electron scattering and nuclear structure,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 28, no. 3, p. 214, 1956.
- [4] M. Rosenbluth, “High energy elastic scattering of electrons on protons,” *Physical Review*, vol. 79, no. 4, p. 615, 1950.
- [5] R. Hofstadter, F. Bumiller, and M. Yearian, “Electromagnetic structure of the proton and neutron,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 30, no. 2, p. 482, 1958.
- [6] J. Arrington, W. Melnitchouk, and J. A. Tjon, “Global analysis of proton elastic form factor data with two-photon exchange corrections,” *Physical Review C*, vol. 76, 9 2007.
- [7] P. J. Mohr, B. N. Taylor, and D. B. Newell, “Codata recommended values of the fundamental physical constants: 2010,” *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, vol. 84, no. 4, p. 1527, 2012.
- [8] R. Pohl, A. Antognini, F. Nez, F. D. Amaro, F. Biraben, J. M. Cardoso, D. S. Covita, A. Dax, S. Dhawan, L. M. Fernandes, *et al.*, “The size of the proton,” *Nature*, vol. 466, no. 7303, p. 213, 2010.
- [9] A. Antognini, F. Kottmann, F. Biraben, P. Indelicato, F. Nez, and R. Pohl, “Theory of the 2s–2p lamb shift and 2s hyperfine splitting in muonic hydrogen,” *Annals of Physics*, vol. 331, 4 2013.
- [10] G. Paz, “The proton radius puzzle. Perimeter Institute Recorded Seminar Archive.” <https://www.perimeterinstitute.ca/videos/proton-radius-puzzle>, 2017. [Recurso online, accedido en marzo de 2019].
- [11] T. Donnelly, D. Hasell, and R. Milner, “Interpretations of elastic electron scattering,” *arXiv preprint arXiv:1505.04723*, 2015.
- [12] I. Sick, “Proton charge radius from electron scattering,” *Atoms*, vol. 6, no. 1, p. 2, 2018.
- [13] P. J. Mohr, D. B. Newell, and B. N. Taylor, “Codata recommended values of the fundamental physical constants: 2014,” *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, vol. 45, no. 4, p. 043102, 2016.
- [14] F. Reines and C. Cowan Jr, “Detection of the free neutrino,” *Physical Review*, vol. 92, no. 3, p. 830, 1953.
- [15] Y. Fukuda, T. Hayakawa, E. Ichihara, K. Inoue, K. Ishihara, H. Ishino, Y. Itow, T. Kajita, J. Kameda, S. Kasuga, *et al.*, “Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos,” *Physical Review Letters*, vol. 81, no. 8, p. 1562, 1998.

- [16] R. Mohapatra, S. Antusch, K. Babu, G. Barenboim, M.-C. Chen, A. De Gouvêa, P. De Holanda, B. Dutta, Y. Grossman, A. Josphipura, *et al.*, “Theory of neutrinos: a white paper,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 70, no. 11, p. 1757, 2007.
- [17] G. D. M. Vázquez, “Interacción neutrino núcleo mediada por corrientes cargadas,” Master’s thesis, Universidad de Sevilla, 2012.
- [18] G. Megias, J. Amaro, M. B. Barbaro, J. Caballero, T. Donnelly, and I. R. Simo, “Charged-current neutrino-nucleus reactions within the superscaling meson-exchange current approach,” *Physical Review D*, vol. 94, no. 9, p. 093004, 2016.
- [19] M. E. Peskin, *An introduction to quantum field theory*. CRC Press, 2018.
- [20] F. Halzen and A. D. Martin, *Quark & Leptons: An Introductory Course In Modern Particle Physics*. John Wiley & Sons, 2008.
- [21] C.-S. Wu, E. Ambler, R. Hayward, D. Hoppes, and R. P. Hudson, “Experimental test of parity conservation in beta decay,” *Physical review*, vol. 105, no. 4, p. 1413, 1957.
- [22] A. Aguilar-Arevalo, C. Anderson, A. Bazarko, S. Brice, B. Brown, L. Bugel, J. Cao, L. Coney, J. Conrad, D. Cox, *et al.*, “First measurement of the muon neutrino charged current quasielastic double differential cross section,” *Physical Review D*, vol. 81, no. 9, p. 092005, 2010.
- [23] A. Aguilar-Arevalo, B. Brown, L. Bugel, G. Cheng, E. Church, J. Conrad, R. Dharmapalan, Z. Djurcic, D. Finley, R. Ford, *et al.*, “First measurement of the muon antineutrino double-differential charged-current quasielastic cross section,” *Physical Review D*, vol. 88, no. 3, p. 032001, 2013.
- [24] K. Abe, N. Abgrall, H. Aihara, T. Akiri, J. Albert, C. Andreopoulos, S. Aoki, A. Ariga, T. Ariga, S. Assylbekov, *et al.*, “Measurement of the inclusive $\nu \mu$ charged current cross section on carbon in the near detector of the t2k experiment,” *Physical Review D*, vol. 87, no. 9, p. 092003, 2013.
- [25] G. Fiorentini, D. Schmitz, P. Rodrigues, L. Aliaga, O. Altinok, B. Baldin, A. Baumbaugh, A. Bodek, D. Boehnlein, S. Boyd, *et al.*, “Measurement of muon neutrino quasielastic scattering on a hydrocarbon target at $e \nu$ 3.5 gev,” *Physical review letters*, vol. 111, no. 2, p. 022502, 2013.
- [26] R. Acciarri, M. Acero, M. Adamowski, C. Adams, P. Adamson, S. Adhikari, Z. Ahmad, C. Albright, T. Alion, E. Amador, *et al.*, “Long-baseline neutrino facility (lbnf) and deep underground neutrino experiment (dune) conceptual design report, volume 4 the dune detectors at lbnf,” *arXiv preprint arXiv:1601.02984*, 2016.
- [27] N. Baker, A. Cnops, P. Connolly, S. Kahn, H. Kirk, M. Murtagh, R. Palmer, N. Samios, and M. Tanaka, “Quasielastic neutrino scattering: A measurement of the weak nucleon axial-vector form factor,” *Physical Review D*, vol. 23, no. 11, p. 2499, 1981.
- [28] S. Barish, J. Campbell, G. Charlton, Y. Cho, M. Derrick, R. Engelmann, L. Hyman, D. Jankowski, A. Mann, B. Musgrave, *et al.*, “Study of neutrino interactions in hydrogen and deuterium: Description of the experiment and study of the reaction $\nu + d \rightarrow \mu^- + p + p$ s,” *Physical Review D*, vol. 16, no. 11, p. 3103, 1977.
- [29] W. Mann, U. Mehtani, B. Musgrave, Y. Oren, P. Schreiner, R. Singer, H. Yuta, R. Ammar, S. Barish, Y. Cho, *et al.*, “Study of the reaction $\nu + n \rightarrow \mu^- + p$,” *Physical Review Letters*, vol. 31, no. 13, p. 844, 1973.

- [30] M. Pohl, M. Dewit, D. Haidt, C. Matteuzzi, B. Degrange, T. François, M. Jaffré, C. Longuemare, S. Ciampolillo, G. Miari, *et al.*, “Experimental study of the reaction $nn \rightarrow m\text{-}p$,” *Lettere Al Nuovo Cimento (1971–1985)*, vol. 26, no. 11, pp. 332–336, 1979.
- [31] S. Bonetti, G. Carnesecchi, D. Cavalli, P. Negri, A. Pullia, M. Rollier, F. Romano, and R. Schira, “Study of quasi-elastic reactions of ν and $\bar{\nu}$ in gargamelle,” *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, vol. 38, no. 3, pp. 260–270, 1977.
- [32] G. D. Megías Vázquez, *Charged-current neutrino interactions with nucleons and nuclei at intermediate energies*. PhD thesis, Universidad de Sevilla, 2017.
- [33] W. Greiner and D. Bromley, *Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations*. Springer, 2000.