

DIFRACCIÓN DE ONDAS POR CAVIDADES EN MATERIALES TRANSVERSALMENTE ISÓTROPAS

Sáez Pérez, A.¹; Gallego Sevilla, R.²; Domínguez Abascal, J.¹

¹ Dpto. de Mecánica de Medios Continuos. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla. Avda. Reina Mercedes s/n. E-41012 Sevilla. Tfno: 95-4556999. Fax: 95-4556997

² Dpto. de Ingeniería Civil. E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos Universidad de Granada. Colegio Máximo. Campus de Cartuja. E-18071 Granada. Tfno: 958-244149

Resumen: El problema de la difracción de ondas por un defecto existente en un medio transversalmente isótropo infinito puede expresarse en función de un conjunto de Ecuaciones Integrales de Contorno (EIC) para las variables de campo sobre la superficie del defecto. Este conjunto de ecuaciones puede resolverse mediante el Método de los Elementos de Contorno (MEC) de manera que, una vez conocidos los campos de desplazamientos y tracciones sobre dicha superficie, los campos en cualquier otro punto del medio pueden determinarse a través de la correspondiente Representación Integral. Aquí se presentan resultados numéricos para el caso de la difracción de ondas originada por una cavidad esférica libre de tracciones superficiales inmersa en: (a) un medio cuasi-isótropo, lo cual proporciona una solución con la que validar los resultados, y (b) un medio transversalmente isótropo (un material compuesto grafito-epoxy). Estos resultados son de especial relevancia para su aplicación al campo de los ensayos no destructivos mediante ultrasonidos.

Abstract: The formulation of three-dimensional elastodynamic scattering problems can be reduced to a set of Boundary Integral Equations (BIE's) for field quantities on the surface of the scatterer. These equations can be solved in a straightforward manner by the Boundary Element Method (BEM). Once the displacements and tractions on the surface of the scatterer are obtained, the fields elsewhere in the solid can be determined by the use of an appropriate Integral Representation. Numerical results are obtained for scattering by a traction-free spherical cavity in: (a) a quasi-isotropic solid, so that they are compared with an available analytical solution, and (b) a transversely isotropic solid (a graphite-epoxy composite). These results are of special relevance for non-destructive evaluation applications.

1.- INTRODUCCIÓN

En muchas aplicaciones un material compuesto puede ser modelado como un medio homogéneo con un cierto grado de anisotropía mediante la definición de unas constantes elásticas equivalentes (Christensen, 1979). Para problemas de propagación de ondas ultrasónicas esta aproximación será válida si la longitud de onda dominante de la señal es mucho

mayor que la mayor de las longitudes características de la microestructura del composite.

La formulación del problema de difracción de ondas originado por un defecto (e.g., una cavidad, una inclusión o una grieta) existente en un medio homogéneo infinito puede reducirse a un conjunto de Ecuaciones Integrales de Contorno (EIC) para los campos de movimientos y tracciones sobre la superficie del defecto. Estas ecuaciones pueden resolverse numéricamente mediante el Método de los Elementos de Contorno (MEC). El MEC representa una alternativa muy competitiva (Domínguez, 1993) frente a los métodos clásicos de dominio, tales como el Método de los Elementos Finitos o el Método de las Diferencias Finitas, cuando se trata con problemas de Elastodinámica lineal en regiones infinitas. La razón es doble: por una parte la dimensionalidad del problema se reduce, ya que tan sólo es necesario discretizar los contornos internos existentes; y por otra, las condiciones de radiación en el infinito se satisfacen automáticamente. Adicionalmente, una vez que se conocen las variables sobre la superficie del defecto, es posible determinar los campos de movimientos y tensiones en cualquier otro punto del medio a través de la correspondiente Representación Integral. Para poder implementar este método, la solución fundamental elastodinámica (función de Green), i.e., los campos de tensiones y desplazamientos en un medio infinito transversalmente isótropo originados por la aplicación de una fuerza puntual dinámica, deben conocerse en una forma relativamente sencilla. En este estudio se ha empleado la solución fundamental 3-D en el dominio de la frecuencia propuesta por Wang y Achenbach (1995). Esta solución proporciona los desplazamientos en forma de integrales sobre la superficie de una esfera de radio unidad, que pueden ser evaluadas numéricamente. Si bien esta solución ha sido empleada con éxito por Wang, Sáez y Achenbach (1995), en dicho trabajo se utilizan elementos constantes para modelar los contornos internos del problema, y la evaluación numérica de la solución fundamental, i.e., de las integrales sobre la superficie de la esfera unidad, se hace mediante una cuadratura 2-D de Gauss (Stroud y Secrest, 1966). El primer aspecto mencionado implica una representación demasiado simplificada de las variables del problema, por lo que en el presente estudio se adoptan elementos cuadráticos. En cuanto al segundo aspecto, redunda en unos tiempos de computación elevados, por lo que aquí se emplea el esquema de evaluación de la solución fundamental propuesto en otra de las comunicaciones de este Congreso ("Formulación Integral del Análisis Dinámico de Materiales Transversalmente Isótropos", por Sáez, Gallego y Domínguez).

2.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. FORMULACIÓN EN TÉRMINOS DE ECUACIONES INTEGRALES DE CONTORNO

Sea un cuerpo Ω tridimensional infinito, elástico-lineal, homogéneo y transversalmente isótropo que contiene un defecto Ω^c de contorno Γ en su seno y se halla sometido a un movimiento armónico de frecuencia ω , si bien el término $e^{-i\omega t}$ se suprimirá en el siguiente análisis. La ley de Hooke para un material transversalmente isótropo viene dada por (Green y Zerna, 1954)

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= C_{11} \varepsilon_{xx} + C_{12} \varepsilon_{yy} + C_{13} \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{yy} &= C_{12} \varepsilon_{xx} + C_{11} \varepsilon_{yy} + C_{13} \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{zz} &= C_{13} \varepsilon_{xx} + C_{13} \varepsilon_{yy} + C_{33} \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{xz} &= C_{44} \varepsilon_{xz} \quad ; \quad \sigma_{yz} = C_{44} \varepsilon_{yz} \\ \sigma_{xy} &= \frac{1}{2} (C_{11} - C_{12}) \varepsilon_{xy}\end{aligned}\tag{1}$$

donde el eje z del sistema de coordenadas cartesiano (x,y,z) se ha escogido coincidente con el eje de simetría del material.

El problema de la difracción de una onda elástica incidente sobre un defecto se esquematiza en la figura 1. Así, como consecuencia de la interacción de un campo incidente conocido u^{in} con el defecto Ω^c se genera un campo difractado u^{dif} , de manera que el campo total de movimientos en el medio infinito Ω viene dado por la superposición de ambos

$$u_i = u_i^{in} + u_i^{dif} \tag{2}$$

donde el campo difractado satisface las condiciones de radiación. El campo total de desplazamientos u admite la siguiente representación integral (Kitahara, Hirose y Achenbach, 1992)

$$c_{ik}(x)u_i(x,\omega) + \int_{\Gamma} T_{ik}(y,\omega;x)u_i(y,\omega)d\Gamma_y - \int_{\Gamma} U_{ik}(y,\omega;x)t_i(y,\omega)d\Gamma_y = u_k^{in}(x,\omega) \ ; \ c_{ik} = \delta_{ik} \ \text{si} \ x \in \Omega \tag{3}$$

donde t_i son las tracciones sobre el contorno Γ , $c_{ik}(x)$ es el denominado término libre (Brebba y Domínguez, 1992) y $U_{ik}(y,\omega;x)$ y $T_{ik}(y,\omega;x)$ son los campos de desplazamientos y tracciones, respectivamente, de la solución fundamental, definidos como la componente i del desplazamiento/tracción en el punto y originado/a por la aplicación de una carga puntual en el punto x en dirección k. La EIC (3) puede resolverse numéricamente mediante el MEC, de manera que una vez conocidas las variables en el contorno, el campo difractado en cualquier punto del dominio Ω podrá calcularse mediante la ecuación (3) con $c_{ik} = \delta_{ik}$. Para más detalles sobre el proceso de resolución, nos remitimos a la comunicación "Formulación Integral del Análisis Dinámico de Materiales Transversalmente Isótropos" presentada a este Congreso por Sáez, Gallego y Domínguez.

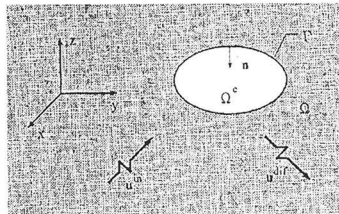


Figura 1. Difracción de una onda por un defecto

3.- DIFRACCIÓN DE ONDAS ELÁSTICAS POR UNA CAVIDAD. RESULTADOS NUMÉRICOS.

La formulación presentada en la sección anterior es válida para cualquier tipo de defecto, de forma geométrica arbitraria. Aquí se presentan los resultados para una cavidad esférica libre de tracciones superficiales (i.e., $t_i=0$ en (3)). La cavidad se modela mediante 24 elementos cuadráticos, tal como se muestra en la figura 2. Se ha escogido el número de onda adimensional $aK_L = a\omega/c_L$ para caracterizar las frecuencias en estudio, donde a es el radio de la cavidad y c_L la velocidad de fase de las ondas casilongitudinales. Se han obtenido resultados para dos materiales:

- (i) un material cuasi-isótropo, de constantes elásticas próximas a las del acero:

$$C_{11} = 283 \quad C_{12} = 121 \quad C_{13} = 121 \quad C_{33} = 283 \quad C_{44} = 85 \text{ en GPa}$$

y densidad $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$. Debe mencionarse que la solución fundamental empleada es capaz de representar el caso isotrópico sin más que dar la combinación adecuada de constantes elásticas.

(ii) un material transversalmente isotrópico, cuyas constantes elásticas representan un composite grafito-epoxy:

$$C_{11} = 13.92 \quad C_{12} = 6.92 \quad C_{13} = 6.44 \quad C_{33} = 160.7 \quad C_{44} = 7.07 \text{ en GPa}$$

y densidad $\rho = 1700 \text{ Kg/m}^3$. Las velocidades de fase de las ondas cuasi-longitudinales, cuasi-transversales y puramente transversales se muestran en la figura 3.(a).

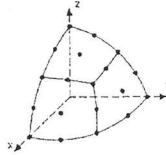


Figura 2: Discretización de un octavo de la cavidad esférica

En ambos casos se considera una onda plana longitudinal que incide según el eje z de simetría del material (figura 3.(b)). Los resultados presentados corresponden a las amplitudes de los desplazamientos totales sobre la superficie de la cavidad y del campo difractado en el medio infinito que la rodea, normalizados con la amplitud del campo incidente. En (i) los resultados se comparan con la solución analítica obtenida por Pao y Mow (1973) para el caso isotrópico, y en (ii) se comparan con los obtenidos por Wang, Sáez y Achenbach (1995) utilizando elementos constantes.

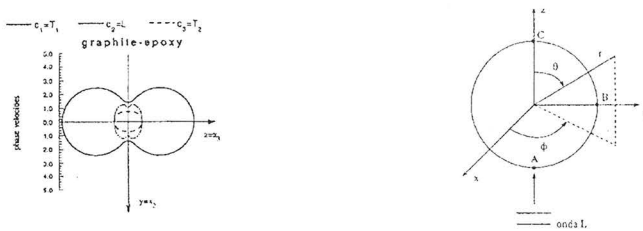


Figura 3: (a) Sección de la superficie de velocidades de fase para un material compuesto grafito-epoxy. Las ondas cuasi-longitudinales, cuasi transversales y puramente transversales se denotan por L , T_2 y T_1 , respectivamente. La superficie de velocidades se obtiene por rotación en torno al eje z de simetría del material.

(b) Onda plana longitudinal incidente sobre una cavidad esférica según el eje z .

En la figura 4 se muestran los desplazamientos totales en direcciones radial y circunferencial sobre la superficie de la cavidad, en el plano (x,z) , para el material cuasi-isotrópico y un número de onda $aK_L = 1$. Se observa como el acuerdo con la solución de Pao y Mow (1973) es muy bueno. Los cálculos efectuados para el campo difractado en el medio infinito arrojaron idénticas conclusiones.

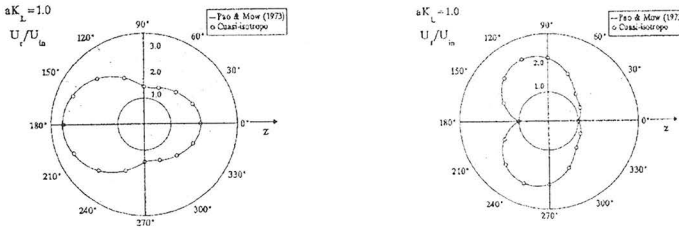


Figura 4: Material cuasi-isótropo. Desplazamientos totales sobre la superficie de la cavidad en direcciones radial y circunferencial.

Las figuras 5, 6 y 7 corresponden al material compuesto grafito-epoxy. En la figura 5 se muestran los desplazamientos totales en direcciones radial y circunferencial sobre la superficie de la cavidad, en el plano (x,z) , para un número de onda $aK_L = 1$. Estos resultados concuerdan con los obtenidos por Wang, Sáez y Achenbach (1995). En la figura 6 se muestra, para idéntico número de onda, el campo difractado en el medio infinito que rodea la cavidad. Finalmente, en la figura 7 se muestra la evolución de los desplazamientos totales sobre la superficie de la cavidad al variar la frecuencia. Puesto que la onda incidente es puramente longitudinal (se propaga según el eje de simetría del material), los resultados obtenidos presentan una gran similitud con los observados en el caso isótropo, manteniéndose por ejemplo la simetría radial en torno al eje z .

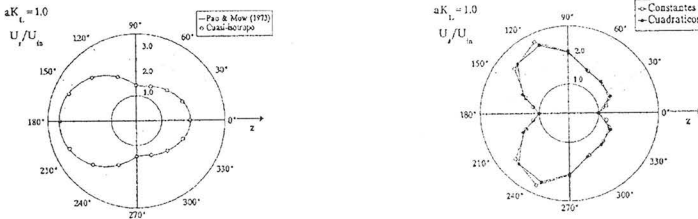


Figura 5: Grafito-epoxy. Desplazamientos totales sobre la superficie de la cavidad en direcciones radial y circunferencial.

4.-CONCLUSIONES

El Método de los Elementos de Contorno es una técnica numérica de gran potencial para el estudio de problemas de difracción de ondas en medios infinitos. La obtención de una solución fundamental elastodinámica para medios transversalmente isótropos en forma de integrales sobre un dominio finito, así como su eficiente evaluación, suponen un gran avance, pues posibilitan su implementación en un código de Elementos de Contorno. Aquí se han obtenido resultados para una cavidad esférica sobre la que incide una onda longitudinal. Sin embargo, el MEC permite resolver todo tipo de configuraciones geométricas y ondas incidentes (i.e. cuasi-longitudinales, cuasi-transversales y puramente transversales).

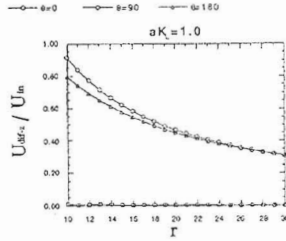


Figura 6: Grafito-poxy. Campo difractado en dirección z.

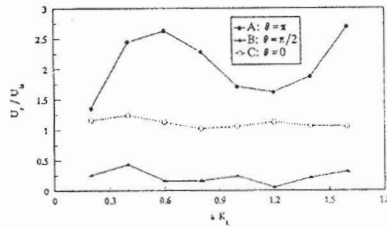


Figura 7: Grafito-epoxy. Evolución con la frecuencia de la componente radial del desplazamiento total sobre la superficie de la esfera.

REFERENCIAS

- 1.- Brebbia, C.A. y Domínguez, J., *Boundary Elements. An Introductory Course*, Ed. CMP y McGraw-Hill, 1989.
- 2.- Christensen, R.M., *Mechanics of Composite Materials*, Ed. Wiley, 1979.
- 3.- Domínguez, J., *Boundary Elements in Dynamics*, Ed. CMP y Elsevier, 1993.
- 4.- Green, A. E. y Zerna, W., *Theoretical Elasticity*, Ed. Oxford University Press, 1968.
- 5.- Kitahara, M., Hirose, S. y Achenbach, J. D., *Transient Elastodynamic Analysis for Three-Dimensional Configurations*, in *Developments in Boundary Element Methods 7*, Ed. P.K. Banerjee y S. Kobayashi, Ed. Elsevier, 1992.
- 6.- Pao, Y.-H. y Mow, C.-C., *Diffraction of Elastic Waves in Dynamic Stress Concentrations*, Ed. Crane-Russak, 1973.
- 7.- Stroud, A.H. y Secrest, D., *Gaussian Quadrature Formulas*, Ed. Prentice -Hall, 1966.
- 8.- Wang C.-Y. y Achenbach, J.D., *3-D Time-Harmonic Elastodynamic Green's Functions for Anisotropic Solids*, *Proc. Roy. Soc London*, En prensa.
- 9.- Wang C.-Y., Sáez, A. y Achenbach, J.D., *3-D Elastodynamic Green's Functions for BEM Applications to Anisotropic Solids*, (Ed. D.F. Parker y A.H. England), pp 307-320, *IUTAM Symposium on Anisotropy, Inhomogeneity and Nonlinearity in Solid Mechanics*, 1995.