

## FORMULACIÓN INTEGRAL DEL ANÁLISIS DINÁMICO DE MATERIALES TRANSVERSALMENTE ISÓTROPAS

Sáez Pérez, A.<sup>1</sup>; Gallego Sevilla, R.<sup>2</sup>; Domínguez Abascal, J.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Mecánica de Medios Continuos. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla  
Avda. Reina Mercedes s/n. E-41012 Sevilla. Tfno: 95-4556999. Fax: 95-4556997

<sup>2</sup> Dpto. de Ingeniería Civil. E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad de Granada. Colegio Máximo. Campus de Cartuja. E-18071 Granada. Tfno: 958-244149

**Resumen:** Muchos materiales compuestos pueden ser tratados a nivel macroscópico como medios homogéneos de comportamiento transversalmente isótropo. A su vez, el análisis de problemas dinámicos en medios homogéneos, isótropos o no, elástico-lineales puede formularse en términos de un conjunto de Ecuaciones Integrales de Contorno (EIC), fácilmente resolubles mediante el Método de los Elementos de Contorno (MEC). Para ello es necesario conocer la solución fundamental elastodinámica (i.e., la respuesta de un medio infinito a la aplicación de una carga puntual) en una forma relativamente sencilla. Partiendo de la solución fundamental propuesta por Wang y Achenbach (1995) para materiales transversalmente isótropos, se presenta aquí la formulación e implementación numérica de un código de Elementos de Contorno que permite el análisis dinámico de este tipo de medios.

**Abstract:** Many fiber reinforced composites can be idealized as being effectively homogeneous and having a transversely isotropic type of behavior. The formulation of the three-dimensional elastodynamic problem for linear homogeneous solids can be reduced to a set of Boundary Integral Equations (BIE's) for field quantities. These equations can be solved in a simple straightforward manner by the Boundary Element Method (BEM). For a successful implementation of this method, the elastodynamic fundamental solution (i.e., the response of an unbounded solid due to the application of a point force) must be known in a relatively simple form. In this work, the effective implementation of the fundamental solution proposed by Wang and Achenbach (1995) for transversely isotropic materials is studied in detail, enabling it for its use with a Boundary Element code for the dynamic analysis of transversely isotropic media.

### 1.- INTRODUCCIÓN

Si bien los materiales compuestos son en esencia heterogéneos, pueden ser modelados a nivel macroscópico como homogéneos mediante la definición de unas constantes elásticas equivalentes (Christensen, 1979). Este sería el caso, e.g., de un material compuesto reforzado por un sistema de fibras alineadas unidireccionalmente de forma aleatoria (figura 1). Medios de estas características presentan adicionalmente propiedades simétricas en el plano normal a la dirección de las fibras, denominándose por ello transversalmente isótropos.

Por otro lado, el análisis de problemas dinámicos en medios homogéneos elástico-lineales puede reducirse a un conjunto de Ecuaciones Integrales de Contorno (EIC), mediante la aplicación del Teorema de Reciprocidad de Betti-Rayleigh entre el estado elastodinámico en estudio y un estado definido por la solución fundamental (i.e., la respuesta de un medio infinito a la aplicación de una carga puntual dinámica). Estas ecuaciones pueden resolverse numéricamente mediante el Método de los Elementos de Contorno (MEC). El MEC representa una alternativa competitiva (Domínguez, 1993) frente a los métodos clásicos de dominio, tales como el Método de los Elementos Finitos o el Método de las Diferencias Finitas, en muchas ramas de la ciencia y la ingeniería. El atractivo del MEC puede atribuirse en gran medida a la reducción en la dimensionalidad del problema, ya que tan sólo es necesario discretizar los contornos existentes, de manera que una vez calculadas las variables sobre dichos contornos será posible determinarlas en cualquier otro punto del medio a través de la correspondiente Representación Integral. La implementación de este método requiere pues del conocimiento de la solución fundamental elastodinámica para medios transversalmente isótropos en una forma relativamente sencilla.

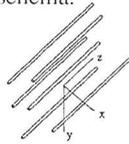


Figura 1: Sistema de fibras alineadas.

La técnica más empleada para la determinación de dicha solución fundamental se ha basado en la transformada de Fourier, pero si bien esta metodología proporciona expresiones explícitas para el caso isótropo, en casos de anisotropía generales la solución se obtiene en términos de integrales infinitas. Los primeros estudios sobre soluciones anisótropas mediante la transformada de Fourier se centraron en la determinación de soluciones asintóticas de campo lejano (Buchwald, 1959; Lighthill, 1960; Musgrave, 1961). Estas contribuciones fueron revisadas posteriormente por Kraut (1963) y Musgrave (1970) para casos de anisotropía general y por Payton (1983) para el caso transversalmente isótropo. Estudios más recientes corresponden a Tsvanskin y Chesnokov (1989) para el caso anisótropo y a Kazi-Aoual, Bonnet y Jouanna (1988) y Zhu (1992) para el caso transversalmente isótropo. Posteriormente, Wang y Achenbach (1995) presentaron un nuevo método basado en la transformada de Radon que permite la obtención de la solución fundamental elastodinámica 3-D en el dominio de la frecuencia para materiales anisótropos. Esta solución, que proporciona los desplazamientos en forma de integrales sobre la superficie de una esfera de radio unidad, ha sido empleada con éxito por Wang, Sáez y Achenbach (1995) para estudiar problemas de difracción de ondas en materiales transversalmente isótropos. Sin embargo, en dicho trabajo la evaluación numérica de la solución fundamental, i.e., de las integrales sobre la superficie de la esfera unidad, se hace mediante una cuadratura de Gauss 2-D (Stroud y Secrest, 1966), lo que redundaría en unos tiempos de computación elevados. En el presente trabajo se realiza un estudio más detallado de la solución fundamental, lo que conlleva su más eficiente evaluación.

## 2.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. FORMULACIÓN EN TÉRMINOS DE ECUACIONES INTEGRALES DE CONTORNO

Sea un cuerpo  $\Omega$  (de contorno  $\Gamma$ ) elástico-lineal, homogéneo y transversalmente

isótropo, libre de fuerzas de volumen y que se halla sometido a un movimiento armónico de frecuencia  $\omega$ , si bien el término  $e^{-i\omega t}$  se suprimirá en el siguiente análisis. Las ecuaciones de equilibrio vienen dadas por

$$\sigma_{ij,j} + \rho \omega^2 u_i = 0 \tag{1}$$

La ley de Hooke para un material transversalmente isótropo viene dada por (Green y Zerna, 1954)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= C_{11} \epsilon_{xx} + C_{12} \epsilon_{yy} + C_{13} \epsilon_{zz} \\ \sigma_{yy} &= C_{12} \epsilon_{xx} + C_{11} \epsilon_{yy} + C_{13} \epsilon_{zz} \\ \sigma_{zz} &= C_{13} \epsilon_{xx} + C_{13} \epsilon_{yy} + C_{33} \epsilon_{zz} \\ \sigma_{xz} &= C_{44} \epsilon_{xz} \quad ; \quad \sigma_{yz} = C_{44} \epsilon_{yz} \\ \sigma_{xy} &= \frac{1}{2} (C_{11} - C_{12}) \epsilon_{xy} \end{aligned} \tag{2}$$

donde el eje z del sistema de coordenadas cartesiano (x,y,z) se ha escogido coincidente con el eje de simetría del material.

La aplicación del teorema de reciprocidad de Betti-Rayleigh entre el estado elastodinámico bajo estudio y la solución fundamental dará como resultado

$$u_k(\mathbf{x}, \omega) + \int_{\Gamma} T_{ik}(y, \omega; \mathbf{x}) u_i(y, \omega) d\Gamma_y = \int_{\Gamma} U_{ik}(y, \omega; \mathbf{x}) t_i(y, \omega) d\Gamma_y \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{3}$$

donde  $\mathbf{x}$  es el vector de posición del punto de observación y  $U_{ik}(y, \omega; \mathbf{x})$  y  $T_{ik}(y, \omega; \mathbf{x})$  son los campos de desplazamientos y tracciones, respectivamente, de la solución fundamental, definidos como la componente i del desplazamiento/tracción en el punto y originado/a por la aplicación de una carga puntual en el punto  $\mathbf{x}$  en dirección k. Esta solución fundamental puede expresarse como  $U_{ik}(y, \omega; \mathbf{x}) = U_{ik}^S(y; \mathbf{x}) + U_{ik}^R(y, \omega; \mathbf{x})$ , donde  $U_{ik}^R(y, \omega; \mathbf{x}) \rightarrow 0$  cuando  $\omega \rightarrow 0$  representa la parte regular de la solución y  $U_{ik}^S(y; \mathbf{x})$  la parte singular, correspondiéndose esta última con la solución fundamental estática. Tomando el límite  $\mathbf{x} \in \Omega \rightarrow x_0 \in \Gamma$  en la ecuación (3) obtendremos la siguiente EIC

$$c_{ik}(x_0) u_i(x_0, \omega) + \int_{\Gamma} T_{ik}(y, \omega; x_0) u_i(y, \omega) d\Gamma_y = PV \int_{\Gamma} U_{ik}(y, \omega; x_0) t_i(y, \omega) d\Gamma_y \tag{4}$$

donde PV indica que la integral debe entenderse en el sentido de un Valor Principal de Cauchy y  $c_{ik}(x_0)$  es el denominado término libre (Brebbia y Domínguez, 1992). Una vez resuelta la EIC (4) y conocidas por tanto las variables sobre el contorno  $\Gamma$ , las variables en cualquier punto del dominio  $\Omega$  pueden calcularse mediante la ecuación (3).

### 3.- SOLUCION NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES INTEGRALES DE CONTORNO. EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

La EIC planteada en (4) puede resolverse mediante el MEC. Para un tratamiento detallado del MEC aplicado a problemas elastodinámicos, puede consultarse el libro de Domínguez (1993). Aquí tan sólo se resumen las ideas básicas:

El contorno del problema se subdivide en NE elementos sobre los cuales se interpolan desplazamientos y tracciones a partir de sus valores en los nodos de los elementos. Así, sobre un elemento j podremos escribir en forma matricial

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{u}^j ; \quad \mathbf{t} = \Phi \mathbf{t}^j \quad (5)$$

donde los vectores  $\mathbf{u}^j$  y  $\mathbf{t}^j$  contienen los valores de desplazamientos y tracciones, respectivamente, en los nodos del elemento  $j$  y  $\Phi$  es una matriz que contiene las funciones de forma. La geometría, en el caso de elementos isoparamétricos, se interpola de igual manera. Por tanto, la ecuación (4) aplicada en un punto  $\mathbf{x}_0$  del contorno quedará

$$\mathbf{c}^{\mathbf{x}_0} \mathbf{u}^{\mathbf{x}_0} + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{T} \Phi \, d\Gamma_j \right\} \mathbf{u}^j - \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{U} \Phi \, d\Gamma_j \right\} \mathbf{t}^j = 0 \quad (6)$$

donde  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{T}$  son matrices conteniendo las componentes  $U_{ik}$  y  $T_{ik}$  de la solución fundamental. Planteando (6) en los  $N$  nodos del contorno se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas de la forma  $\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{t}$ , que junto con las condiciones de contorno permite determinar los valores de los desplazamientos ( $\mathbf{u}$ ) y las tracciones ( $\mathbf{t}$ ) en todos los nodos del contorno.

#### 4.- EVALUACIÓN DE LA SOLUCIÓN FUNDAMENTAL

En este apartado se discute la implementación numérica de la solución fundamental elastodinámica propuesta por Wang y Achenbach (1995) para materiales transversalmente isotrópicos:

##### 4.1.- Parte Singular (Estática) de la Solución Fundamental

A pesar de disponerse de una solución estática explícita (Pan y Chou, 1976), aquí se ha optado, por congruencia y por no suponer un incremento en el tiempo de computación, por la solución de Wang y Achenbach (1995). Esta solución viene expresada en forma de una integral sobre la circunferencia del círculo unidad definido en la sección normal al vector de posición  $\mathbf{x}$  del punto de observación, de forma análoga a las soluciones fundamentales anisótropas propuestas por John (1955) y Synge (1957). Así, para los desplazamientos tendremos

$$U_{ik}^S(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi r^2} \int_{|d|=1} A_{ik}(d) \, dL(d) ; \quad r = |\mathbf{x}| \quad (7)$$

donde  $\mathbf{d}$  es la normal exterior al círculo unidad en su plano y las expresiones de los núcleos  $A_{ik}(\mathbf{d})$  se dan en el Apéndice A. Las tracciones se podrán obtener a partir de las derivadas de los desplazamientos mediante la ley de Hooke

$$\frac{\partial}{\partial x_p} U_{ik}^S(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^2 r^2} \int_{|d|=1} \left\{ \mathbf{e} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} \right\} \{ d_p A_{ik}(d) \} \, dL(d) \quad (8)$$

donde  $\mathbf{e}$  es un vector unitario en la dirección de  $\mathbf{x}$  (figura 2.(a)). Obsérvese que los integrandos en (7) y (8) tan sólo dependen de la orientación de  $\mathbf{x}$ , definida por dos ángulos  $\theta$  y  $\phi$  (figura 2.(a)), y no de su módulo. Es más, puesto que el ángulo  $\phi$  se define en el plano de isotropía ( $x, y$ ), dichos integrandos pueden ser obtenidos para un ángulo  $\phi_0$  arbitrario y girados posteriormente hasta el ángulo  $\phi$  en estudio. Ello nos permitirá, análogamente a lo realizado por Wilson y Cruse (1978), generar una base de datos con las integrales de (7) y (8) tabuladas para una serie de valores de  $\phi \in (0, \pi)$  y un  $\phi = \phi_0$  arbitrario para, posteriormente, efectuar una interpolación 1-D en  $\theta$ . Al igual que

Ishikawa (1990) se sugiere el empleo de un espaciado  $\Delta\phi = \pi/18$  entre los puntos de la base de datos.

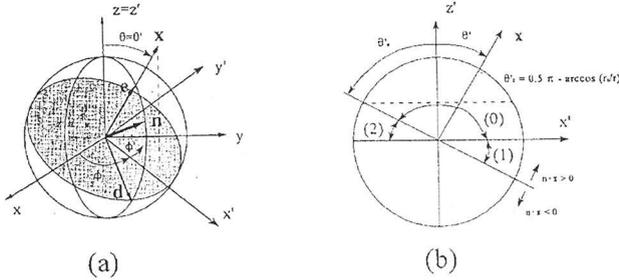


Figura 2: (a) Geometría de e, x, n y d en el sistema fijo de coordenadas (x,y,z). Definición del sistema de referencia auxiliar (x',y',z'); (b) Sección de la esfera unida por el plano (x',z').

4.2.- Parte Regular de la Solución Fundamental

La parte regular de la solución fundamental viene expresada en forma de integrales sobre la superficie de una esfera de radio unidad. Así, para los desplazamientos

$$U_{ik}^R(x, \omega) = \frac{i}{16\pi^2} \int_{|n|=1} \sum_{m=1}^3 B_{ik}^m(n, \omega) e^{ik_m |n \cdot x|} dS(n) \tag{9}$$

donde n es la normal exterior a la esfera unidad,  $k_m = \omega c_m$  es el número de onda,  $c_m$  ( $m=1,2,3$ ) son las velocidades de fase y las expresiones de los núcleos  $B_{ik}^m(n, \omega)$  se dan en el Apéndice A. Las tracciones se obtienen a partir de las derivadas de los desplazamientos mediante la ley de Hooke. La evaluación directa de las integrales en (9) mediante una cuadratura de Gauss 2-D se ha mostrado costosa en cuanto a tiempo de computación se refiere (Wang, Sáez y Achenbach, 1995), por lo que aquí se proponen algunas simplificaciones. Así, consideremos el sistema auxiliar de coordenadas (x',y',z') de la figura 2.(a), en el que el eje x' coincide con la proyección del vector de posición x sobre el plano (x,y) y z'=z. En la figura 2.(b) se muestra, sobre una sección de la esfera que contiene los ejes x' y z', el dominio de integración. Aprovechando las simetrías que el integrando en (9) presenta, podremos escribir

$$U_{ik}^R = \frac{2}{16\pi^2} \left( \int_{(0)} \sum_{m=1}^3 B_{ik}^m i e^{ik_m n \cdot x} + \int_{(2)} \sum_{m=1}^3 B_{ik}^m i e^{-ik_m n \cdot x} \right) dS(n) \tag{10}$$

donde los subdominios de integración (0) y (2) se muestran en la figura 2.(b). A su vez, podemos realizar la descomposición  $B_{ik}^m(n, \omega) = B_{ik}^{m\theta}(\theta, \omega) \cdot B_{ik}^{m\phi}(\phi', \omega)$  donde  $B_{ik}^{m\theta}$  no depende de las constantes elásticas del material. Esto nos permitirá reducir la parte imaginaria de (10) a una integral 1-D en la variable  $\theta'$

$$Im(U_{ik}^R) = \frac{2}{16\pi^2} \int_{\theta'=0}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{m=1}^3 B_{ik}^{m\theta} \left[ \int_{\phi'=-\pi}^{\pi} B_{ik}^{m\phi} \cos(a_m \cos \phi' + b_m) d\phi' \right] sen \theta' d\theta' \tag{11}$$

donde  $a_m = k_m sen \theta' (r_x^2 + r_y^2)^{0.5}$ ,  $b_m = k_m cos \theta' r_z$ ,  $x = (r_x, r_y, r_z)$  y las integrales en  $\phi'$  se pue-

den expresar como combinación lineal de funciones de Bessel, por lo que tan sólo es necesario evaluar numéricamente la integral en  $\theta'$ . Ello se hace mediante una cuadratura de Gauss I-D. En cuanto a la parte real de la solución

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(U_{ik}^R) = & \frac{2}{16\pi^2} \left[ \int_{\theta'=0}^{\theta'_0} \sum_{m=1}^3 B_{ik}^{m\theta} \left[ \int_{\phi'=-\pi}^{\pi} B_{ik}^{m\phi} \operatorname{sen}(a_m \cos \phi' + b_m) d\phi' \right] \operatorname{sen} \theta' d\theta' + \right. \\ & \left. + \int_{\theta'=0}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{m=1}^3 B_{ik}^{m\theta} [g(\theta')] \operatorname{sen} \theta' d\theta' \right] \quad \text{con} \quad g(\theta') = I_1(\theta') - I_2(\theta') \end{aligned} \quad (12)$$

donde

$$\begin{aligned} I_1(\theta') &= \int_{\phi'=-\alpha}^{\alpha} B_{ik}^{m\phi} \operatorname{sen}(a_m \cos \phi' + b_m) d\phi' \\ I_2(\theta') &= \int_{\phi'=\alpha}^{-\alpha} B_{ik}^{m\phi} \operatorname{sen}(a_m \cos \phi' + b_m) d\phi' \end{aligned} \quad (13)$$

En (12) la primera integral en  $\phi'$  es análoga a las que aparecían al evaluar la parte imaginaria, i.e., puede expresarse como una combinación de funciones de Bessel, reduciéndose por tanto a una integral I-D en  $\phi'$ , que puede ser efectuada mediante una cuadratura de Gauss I-D. En cuanto a la segunda integral en (12), puesto que  $I_1(\theta') + I_2(\theta')$  puede expresarse de nuevo como una combinación de funciones de Bessel, que denotaremos por  $J_{Cl}(\theta')$ , la función  $g(\theta')$  puede calcularse como  $2I_1(\theta') - J_{Cl}(\theta')$  para  $\alpha < \pi/2$  ó, alternativamente,  $J_{Cl}(\theta') - 2I_2(\theta')$  para  $\alpha > \pi/2$ , de manera que se minimiza el tamaño del intervalo de integración en  $\phi'$ , lo que supone una gran ventaja dado el carácter oscilatorio de los integrandos. En este sentido, cabe señalar que los intervalos de integración (tanto en  $\theta'$  como en  $\phi'$ ) se han dividido en una serie de subintervalos, en cada uno de los cuales se ha empleado una cuadratura de Gauss de 4 puntos. En cada caso, el número de subintervalos se estima en función del número de oscilaciones que el integrando presente. Así, a mayores frecuencias o mayores distancias al punto de observación, se hará necesario el empleo de un mayor número de subdivisiones. Finalmente, puede observarse que el cálculo de la parte regular se ha realizado en el sistema de coordenadas auxiliar ( $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ). En dicho sistema, los siguientes términos son nulos:  $U_{12}$ ,  $U_{23}$ ,  $U_{11,2}$ ,  $U_{12,1}$ ,  $U_{12,3}$ ,  $U_{22,2}$ ,  $U_{13,2}$ ,  $U_{23,1}$ ,  $U_{23,3}$  y  $U_{33,2}$  donde la " , " indica derivada espacial respecto de la variable que se indica tras ella. Para obtener los resultados en el sistema fijo ( $x, y, z$ ) bastará girar el ángulo  $\phi$  correspondiente, por ser el plano ( $x', y'$ ) de isotropía y coincidir con el ( $x, y$ ).

## 5.- CONCLUSIONES

El análisis de problemas elastodinámicos en medios homogéneos transversalmente isótropos se ha reducido a un conjunto de EIC para las variables de campo, fácilmente resolubles de forma numérica mediante el MEC. Para ello ha sido necesario evaluar, en la manera más eficiente posible, la solución fundamental elastodinámica. Aquí se ha detallado la implementación de la solución obtenida por Wang y Achenbach (1995). En otra de las comunicaciones a este Congreso ("Difracción de Ondas por Cavidades en

materiales Transversalmente Isótropos" por Sáez, Gallego y Domínguez) se aplican los principios aquí expuestos al caso particular de la difracción de ultrasonidos en este tipo de materiales.

## REFERENCIAS

- 1.- Brebbia, C.A. y Domínguez, J., *Boundary Elements: An Introductory Course*, Ed. CMP y McGraw-Hill, 1989.
- 2.- Buchwald, V.T., *Elastic Waves in Anisotropic Media*, *Proc. Roy. Soc. London*, **A 253**, pp 563-580, 1959.
- 3.- Christensen, R.M., *Mechanics of Composite Materials*, Ed. Wiley, 1979.
- 4.- Domínguez, J., *Boundary Elements in Dynamics*, Ed. CMP y Elsevier, 1993.
- 5.- Green, A.E. y Zerna, W., *Theoretical Elasticity*, Ed. Oxford University Press, 1968.
- 6.- Ishikawa, H., *Application of the Boundary Element Method to Anisotropic Crack Problems*, in *Advances in Boundary Element Methods for Fracture Mechanics*, (Ed. M.H. Aliabadi y C.A. Brebbia), Ed. CMP y Elsevier, 1993.
- 7.- John, F., *Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations*, Ed. Interscience, 1955.
- 8.- Kazi-Aoual, M.N., Bonet, G. y Jouanna, P., *Response of an Infinite Transversely Isotropic Elastic Medium to a Point Force*, *Geophys. J.*, **39**, pp 587-590, 1988.
- 9.- Kraut, E.A., *Advances in the Theory of Anisotropic Elastic Wave Propagation*, *Review of Geophysics*, **1**, pp 401-448, 1963.
- 10.- Lighthill, M.J., *Anisotropic Wave Motions*, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A252**, pp 397-470, 1960.
- 11.- Musgrave, M.J.P., *Prog. Solid. Mech.*, **2**, pp 64-85, 1961.
- 12.- Musgrave, M.J.P., *Crystal Acoustics*, Ed. Holden-Day, 1970.
- 13.- Pan, Y.-C. y Chou, T.W., *Point Force Solution for an Infinite Transversely Isotropic Solid*, *J. Appl. Mech.*, **43**, pp 608-612.
- 14.- Payton, R.G., *Elastic Wave Propagation in Transversely Isotropic Media*, Ed. Martinus Nijhoff, 1983.
- 15.- Stroud, A.H. y Secrest, D., *Gaussian Quadrature Formulas*, Ed. Prentice-Hall, 1966.
- 16.- Synge, J.L., *The Hypercircle in Mathematical Physics*, Ed. Cambridge University Press, 1957.
- 17.- Tsvankin, I.D. y Chesnokov, Y.M., *Wave Fields of Point Sources in Arbitrarily Anisotropic Media*, *Izvestiya. Earth Physics* **25**, **7**, pp 528-540, 1989.
- 18.- Wang C.-Y. y Achenbach, J.D., *3-D Time-Harmonic Elastodynamic Green's Functions for Anisotropic Solids*, *Proc. Roy. Soc. London*, En prensa.
- 19.- Wang C.-Y., Sáez, A. y Achenbach, J.D., *3-D Elastodynamic Green's Functions for BEM Applications to Anisotropic Solids*, (Ed. D.F. Parker y A.H. England), pp 307-320, *IUTAM Symposium on Anisotropy, Inhomogeneity and Nonlinearity in Solid Mechanics*, 1995.
- 20.- Wilson, R.B. y Cruse, T.A., *Efficient Implementation of Anisotropic Three Dimensional Boundary Integral Equation Stress Analysis*, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, pp 1383-1397, 1978.
- 21.- Zhu, H., *A Method to Evaluate Three Dimensional Time-Harmonic Elastodynamic Green's Functions in Transversely Isotropic Media*, *J. Appl. Mech.*, **59**, pp. S96-S101, 1992.