

MÉTODOS AVANZADOS DE ECUACIONES INTEGRALES DE CONTORNO EN MECÁNICA DE LA FRACTURA

Rafael Gallego, Andrés Sáez y José Domínguez

*Escuela Superior de Ingenieros Industriales
Universidad de Sevilla
C/ Reina Mercedes s/n
E-41012 Sevilla*

Resumen El Método de los Elementos de Contorno (MEC), conocido también como el Método de la Ecuaciones Integrales de Contorno (MEIC) representa en la actualidad una alternativa competitiva frente al más difundido Método de los Elementos Finitos, en muchas ramas y ciencias de la ingeniería. En la presente comunicación se expone, en primer lugar, la metodología empleada con la formulación estándar del MEC para el cálculo de Factores de Intensidad de Tensión (FIT) en modos simples y mixtos. Se presenta a continuación la formulación más moderna del MEC basado en las llamadas Ecuaciones Integrales Hipersingulares de Contorno y su aplicación a la Mecánica de la Fractura. Para terminar se comparan ambos métodos resolviendo una serie de aplicaciones seleccionadas. Aunque estas aplicaciones se reducen a problemas bidimensionales estáticos, es posible la generalización a casos tridimensionales y/o dinámicos.

Abstract The Boundary Element Method (BEM) also known as the Boundary Integral Equation Method (BIEM) is now established in many engineering disciplines as an alternative numerical technique to the more widely used Finite Element Method. In this communication the calculation by the standard BEM formulation of Stress Intensity Factors (SIF) in cases of pure and mixed mode is presented. Next the newer BEM formulation based on the so called Hypersingular Boundary Integral Equations and its application to Fracture Mechanics is introduced. Finally, both approaches are compared solving a selected number of applications. Although only static two-dimensional applications are considered in this communication, the generalization to three-dimensional and/or dynamic problems is possible.

1. INTRODUCCIÓN

El Método de los Elementos de Contorno (MEC), conocido también como el Método de la Ecuaciones Integrales de Contorno (MEIC) representa en la actualidad una alternativa competitiva frente al más difundido Método de los Elementos Finitos (MEF), en muchas ramas y ciencias de la ingeniería. El atractivo del MEC puede atribuirse, en gran parte, a la reducción en la dimensionalidad del problema: es decir, para problemas de bidimensionales, únicamente es necesario discretizar el contorno monodimensional del dominio, mientras que para problemas tridimensionales sólo hay que discretizar la superficie del dominio. Otro aspecto a resaltar, y muy relevante para

el análisis preciso de los campos de tensiones en problemas de Mecánica de la Fractura, es que las tracciones en el contorno no son valores derivados de los desplazamientos, como ocurre en el MEF, sino que forman parte de las incógnitas primarias del problema. Esto permite obtener muy buenos resultados en el cálculo de los Factores de Intensidad de Tensiones (FIT) empleando mallas muy poco refinadas.

La formulación estándar del MEC, basado en la representación integral de los desplazamientos, ha sido empleada por diversos autores para la solución de problemas de Mecánica de la Fractura Elástica Lineal [1,3,9]. Sin embargo con esta formulación sólo pueden analizarse problemas simétricos empleando una única región. Para problemas más complicados

es necesario introducir contornos artificiales, que no están definidos de manera unívoca y que dificultan la resolución de problemas de propagación de grietas [6].

La necesidad de estos contornos artificiales desaparece cuando se utilizan las Ecuaciones Integrales de Contorno *Hipersingulares*, como se denomina a la representación integral de las tracciones en el contorno, debido al carácter de los núcleos implicados en ella. Esta ventaja sustancial y la precisión de los resultados obtenidos han hecho que se esté dedicando al desarrollo e implementación eficaz de esta técnica un creciente esfuerzo de investigación [11,14]. Mucho de este trabajo ha estado dedicado al desarrollo de técnicas eficaces de integración de los núcleos hipersingulares, problema que se ha abordado y resuelto de muy diversas maneras (ver [15] para una revisión muy actualizada).

En ambas formulaciones, la estándar y la mixta, que combina ecuaciones estándar e hipersingulares, se emplean elementos especiales, los denominados *elementos a un cuarto* para representar adecuadamente el comportamiento asintótico de los campos de desplazamientos y tensiones en las inmediaciones del vértice de una grieta. A partir de los desplazamientos o tracciones obtenidos en estos elementos se calculan de manera directa los FITs, sin ningún postproceso ulterior, a diferencia de lo que ocurre con otras técnicas basadas en integrales invariantes [12].

En esta comunicación se presentan y comparan el MEC estándar y mixto para el cálculo de FITs en problemas estáticos. Se resuelven unas aplicaciones seleccionadas con las que se muestra la precisión y estabilidad de la solución obtenida.

2. EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO ESTÁNDAR

En las dos siguientes secciones se resumen las ecuaciones principales del MEC estándar cuya exposición detallada puede encontrarse en [2]. Las ecuación integral de contorno en que se basa el MEC estándar se obtiene del Teorema de Reciprocidad de Betti establecido entre dos estados elástostáticos en equilibrio y compatibles $(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{b})$ y $(\mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*, \mathbf{b}^*)$ sobre un dominio Ω de contorno Γ : \mathbf{u} y \mathbf{u}^* son los desplazamientos, \mathbf{p} y \mathbf{p}^* las tracciones sobre el contorno y \mathbf{b} y \mathbf{b}^* las fuerzas por unidad volumen. El Teorema establece,

$$\int_{\Omega} b_k^* u_k d\Omega + \int_{\Gamma} p_k^* u_k d\Gamma = \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma \quad (1)$$

donde un índice repetido implica suma a todo el rango de dicho índice.

Aplicando dicho teorema entre el estado real que queremos resolver (que suponemos en lo que sigue libre de fuerzas de dominio, $\mathbf{b} = 0$) y uno particular debido a una fuerza unidad aplicada en un punto ξ , la llamada Solución de Fundamental del problema, se

llega a la identidad,

$$c_{ik} u_k(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi) p_k(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (2)$$

en la que $c_{ik} = \delta_{ik}$ si ξ está en el interior de Ω , $c_{ik} = \frac{1}{2}\delta_{ik}$ si ξ pertenece a Γ y el contorno en dicho punto es "suave", y $c_{ik} = 0$ en cualquier otro caso, es decir, si ξ es exterior a Ω . Las variables $p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi)$ y $u_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi)$ representan la componente k de las tracciones y desplazamientos en el punto $bf\mathbf{x}$, respectivamente, de la solución fundamental, cuando la carga puntual sobre ξ actúa en dirección l (ver [2]).

La ecuación (2) expresa los desplazamientos en un punto cualquiera ξ en función de los desplazamientos y tracciones a lo largo del contorno. Aplicando la identidad para puntos ξ del contorno se obtiene una ecuación integral en la que sólo intervienen las desplazamientos y tracciones a lo largo de Γ . Esta ecuación puede resolverse de forma aproximada tal y como se expone en la siguiente sección. Conociendo las variables en el contorno los desplazamientos en cualquier otro punto se calculan directamente con (2) sin necesidad de establecer ninguna nueva aproximación.

Es importante señalar lo siguiente: las funciones u_{ik}^* y p_{ik}^* son singulares en $r = 0$, siendo $r = |\mathbf{x} - \xi|$. Por una parte, la integral que contiene el núcleo u_{ik}^* existe en el sentido impropio pues la singularidad $O(\ln r)$ es débil. Sin embargo, la integral que contiene el núcleo p_{ik}^* que es singular de $O(1/r)$, no existe, ni siquiera como impropia. Un análisis detallado de la obtención de la ecuación (2) cuando el punto de colocación ξ tiende al contorno [2], demuestra, no obstante, que esta integral ha de entenderse en el sentido de valor principal de Cauchy, y que por lo tanto es calculable, siempre que la variable u_k que multiplica a este núcleo sea continua en el punto de colocación ξ .

3. RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

La ecuación (2) puede resolverse de manera aproximada mediante un método de colocación, es decir, obligando su cumplimiento en un conjunto de N nodos escogidos en el contorno. Para ello el contorno se subdivide en un conjunto de NE elementos, sobre los cuales se interpolan los desplazamientos y tracciones a partir de los valores de éstos en los nodos del elemento. Así, para un elemento cuadrático, una variable cualquiera en un punto del mismo se escribirá como,

$$u_k(\xi) = u_k^1 \Phi_1 + u_k^2 \Phi_2 + u_k^3 \Phi_3 \quad (3)$$

o en forma matricial, para las dos componentes de los desplazamientos o tracciones,

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{u}^j$$

siendo Φ_1, Φ_2 y Φ_3 las llamadas *funciones de forma* que dependen de una variable intrínseca ξ a lo largo del elemento; $\mathbf{u}^j = (u_1^j, u_2^j, u_1^j, u_2^j, u_1^j, u_2^j)^T$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ y Φ una matriz de 2×6 que contiene las funciones forma. La geometría se interpolará, para estos elementos, de manera análoga.

La ecuación (2) aplicada en un punto ξ^i del contorno queda entonces,

$$c^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{p}^j \quad (4)$$

donde \mathbf{p}^* y \mathbf{u}^* son matrices de 2×2 cuyos elementos son p_{ik}^* y u_{ik}^* respectivamente, y \mathbf{u}^i es el vector desplazamiento en el nodo del contorno ξ^i .

Planteando (4) en los N nodos del contorno se obtienen tantas ecuaciones como incógnitas llegando a un sistema de ecuaciones de la forma, $\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p}$ donde \mathbf{u} y \mathbf{p} son vectores de $2N$ componentes que agrupan los desplazamientos y tracciones en todos los nodos del contorno; \mathbf{H} y \mathbf{G} son matrices de $2N \times 2N$ que contienen las integrales sobre los elementos que figuran en la ecuación (4). El sistema anterior se resuelve suplementándolo con las condiciones de contorno en cada nodo.

4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MECÁNICA DE LA FRACTURA

Para la aplicación del procedimiento general descrito en la sección anterior a problemas de Mecánica de la Fractura es necesario incorporar al método algunos aspectos. En primer lugar, es necesario representar adecuadamente los campos de tensiones y desplazamientos en las inmediaciones del vértice de la grieta, que como es sabido, tienen una variación de $O(\sqrt{r})$ y $O(1/\sqrt{r})$, respectivamente. Es segundo lugar debido a que ambas caras de la grieta coinciden en el modelo idealizado de la misma, se produce un sistema de ecuaciones singular, por lo que es preciso idear una forma de evitar esta degeneración del sistema.

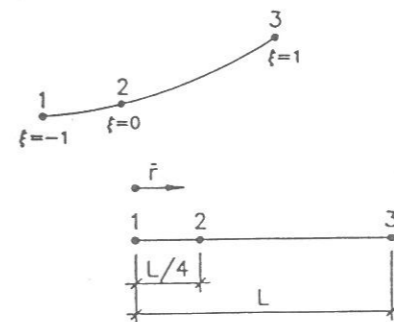


Figura 1: Elemento a un cuarto.

El denominado *elemento a un cuarto*, (E1/4 en lo que sigue) desarrollado inicialmente dentro del MEF, incorpora de manera muy simple la representación correcta del campo de desplazamientos alrededor del vértice de la grieta. El elemento a un cuarto es

un elemento cuadrático recto cuyo nodo medio no está centrado sino que se encuentra a un cuarto de la longitud del mismo (ver figura Fig. 1).

Los desplazamientos se interpolan mediante (3) pero teniendo en cuenta la relación entre la coordenada ξ del elemento y la distancia \bar{r} desde uno de los extremos (vease Fig. 1) se llega a la representación,

$$u_k = a_k^1 + a_k^2 \sqrt{\frac{\bar{r}}{l}} + a_k^3 \frac{\bar{r}}{l}$$

donde $a_k^1 = u_k^1$, $a_k^2 = -3f_k^1 + 4f_k^2 - f_k^3$ y $a_k^3 = 2f_k^1 - 4f_k^2 + 2f_k^3$, interpolación que incorpora los tres primeros términos del desarrollo asintótico de los desplazamientos.

Puesto que las tracciones y los desplazamientos son variables independientes en el MEC, la singularidad $O(1/\sqrt{r})$ de aquellas debe incorporarse en la representación de las mismas usando el llamado *elemento a un cuarto singular*, (E1/4S a partir de ahora) sobre el que se definen unas funciones de forma modificadas. Así,

$$p_k(\xi) = \bar{p}_k^1 \bar{\Phi}_1 + \bar{p}_k^2 \bar{\Phi}_2 + \bar{p}_k^3 \bar{\Phi}_3 \quad (5)$$

siendo $\bar{\Phi}_i = \sqrt{l/\bar{r}} \Phi_i$ funciones que incorporan el factor singular $1/\sqrt{r}$. Las variables \bar{p}_k^i no son ahora los valores de las tracciones en los nodos sino unas cantidades relacionadas con ellos. En concreto,

$$\bar{p}_k^1 = \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} p_k \sqrt{l/\bar{r}} \quad \bar{p}_k^2 = \frac{p_k^2}{2} \quad \bar{p}_k^3 = p_k^3$$

Si se expresa (5) en función de la distancia \bar{r} se obtiene,

$$p_k = \bar{a}_k^1 \sqrt{\frac{l}{\bar{r}}} + a_k^2 + a_k^3 \sqrt{\frac{\bar{r}}{l}}$$

donde \bar{a}_k^i se expresan en función de \bar{p}_k^i de forma análoga al caso anterior. La aproximación de las tracciones incorpora, por tanto, igualmente, los tres primeros términos de su desarrollo asintótico [3,9]. El objetivo de estos cálculos es obtener el FIT en una grieta sometida a sollicitación cualquiera. Para ello el último elemento junto al vértice sobre las caras de la misma será un E1/4, mientras que se colocará un E1/4S a partir del vértice hacia el interior del dominio. De los desplazamientos obtenidos en el E1/4 y las "tensiones" en el E1/4S (los valores \bar{p}_k^i) se obtienen los FITs mediante las siguientes fórmulas,

$$K_I = \bar{p}_y^1 \sqrt{2\pi l} \quad K_{II} = \frac{\mu}{2(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{l}} \Delta u_y^2$$

y expresiones similares para el FIT de modo II, siendo Δu_y^2 la apertura total de los labios de la grieta en el nodo 2 (ver Fig. 1), y l la longitud del elemento a un cuarto. Denominaremos K_t y K_u a las aproximaciones del FIT calculadas con cada una de estas dos fórmulas, respectivamente (t de *tracciones* y u por calcularse con un sólo punto).

El siguiente aspecto relevante a considerar es el de la imposibilidad de resolver problemas generales de un dominio con una grieta estableciendo la ecuación estándar del MEC (2) en ambas caras de la misma, pues es el sistema resultante es singular. Para superar esta dificultad Blandford *et al.* [3] propusieron dividir el dominio en dos subdominios o regiones, tal y como se muestra en la figura. Es las interfaces de ambas regiones se establecen ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos y equilibrio de tensiones. En la sección siguiente se presenta la formulación hipersingular del MEC que evita la necesidad de introducir estos contornos internos ficticios.

5. FORMULACIÓN HIPERSINGULAR DEL MEC

A partir de la representación integral de los desplazamientos dada por la ecuación estándar del MEC (2) puede derivarse una representación integral para las tracciones en el contorno, derivando la anterior para obtener las deformaciones, aplicando al ley de Hooke y finalmente el equilibrio en el contorno, llegándose finalmente a [8],

$$c'_{ik} p_k(\xi) + \int_{\Gamma} d'_{ik}(\mathbf{x}, \xi) p_k(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma} s'_{ik}(\mathbf{x}, \xi) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (6)$$

Los nuevos núcleos d'_{ik} y s'_{ik} de esta ecuación proceden de derivar los anteriores u'_{ik} y p'_{ik} , respectivamente. El orden de singularidad en $r = 0$ es por tanto mayor. Así, d'_{ik} es de $O(1/r)$ y s'_{ik} de $O(1/r^2)$.

Es importante señalar dos aspectos sobre la representación integral de las tracciones (6):

- Debido al orden las singularidades implicadas, cuando ξ pertenece al contorno Γ las integrales anteriores no existen en el sentido habitual. Un análisis detallado del proceso de límite al contorno [5] revela que la integral que contiene el núcleo d'_{ik} puede entenderse como valor principal de Cauchy, mientras que la integral de s'_{ik} ha de realizarse en el sentido de parte finita de Hadamard.
- El desplazamiento debe ser derivable en el punto de colocación ξ . Esta condición es muy importante a la hora de seleccionar el tipo de elemento a emplear en la discretización del contorno y la posición de los puntos de colocación.

A fin de satisfacer la condición anterior, la solución más utilizada es la de utilizar elementos de contorno discontinuos, aunque existen otras alternativas [7]. Con este tipo de elementos también es posible obtener una representación correcta de los desplazamientos en las inmediaciones de la grieta sin más que colocar el nodo central a un cuarto de un extremo. A partir de los desplazamientos obtenidos en este elemento puede obtenerse el FIT mediante fórmulas similares a las empleadas con la formulación estándar.

Tres fórmulas alternativas para esto son [13],

$$K_I = \frac{2\mu}{1-\nu} \sqrt{\frac{2\pi}{l}} \Delta u_y^1$$

$$K_I = \frac{\mu}{2(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{l}} \Delta u_y^2$$

$$K_I = \frac{\mu}{6(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{l}} (16\Delta u_y^1 - \Delta u_y^2)$$

Los FITs obtenidos a partir de ellas se denominarán K_{u1}^h , K_{u2}^h y K_d^h (h de hipersingular, u de un punto, y d de dos puntos)

La aplicación de la ecuación (6) permite evitar el artificio de las subregiones. Efectivamente, para resolver un problema dado, se establecerá la ecuación estándar en los nodos de una de las caras de la grieta y la ecuación hipersingular en la otra, de manera que el sistema resultante no es ya singular. En el resto del contorno, se establece la ecuación estándar. Esta formulación o procedimiento se denomina mixto pues combina ambos tipos de ecuaciones integrales. Conceptualmente la ecuación de las tracciones presenta más dificultades que la ecuación de los desplazamientos, la ecuación estándar. Los algoritmos de integración son también más complejos pues las singularidades involucradas son más severas y los puntos de colocación están en posiciones conflictivas (bastante cercanos a los extremos de los elementos, pero no en el mismo extremo) Sin embargo todas estas dificultades de desarrollo quedan ampliamente contrapesadas por las ventajas que esta formulación supone. Algunas de ellas son:

- Puesto que no es necesario incorporar contornos adicionales, el número de incógnitas es inferior que el que hace falta utilizar empleando únicamente la formulación estándar, a pesar de que el uso de elementos discontinuos en la formulación mixta incrementa en 3/2 el número de nodos.
- En la formulación mixta los campos en el interior del dominio son continuos y por tanto muy precisos en oposición a lo que ocurre en la formulación estándar, donde la existencia de contornos artificiales en el interior del dominio supone que en ellos los campos de tensiones y desplazamientos se calculan de forma discreta y aproximada.
- La ventaja más destacable se manifiesta en la resolución de problemas de propagación de grietas. Con la formulación mixta la necesidad de mallado se reduce al mínimo pues no hay más que crecer la grieta en la cantidad y dirección calculada añadiendo algún elemento adicional o bien agrandando los existentes.

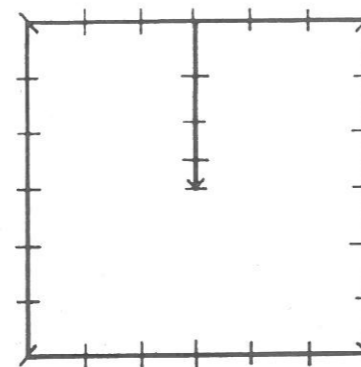


Figura 2: Discretización del problema con grieta de borde.

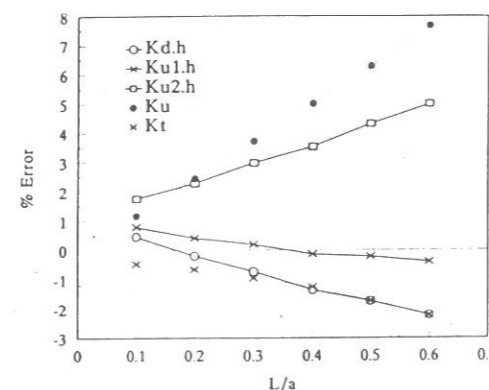


Figura 3: Error en el FIT para el problema de la grieta de borde.

6. APLICACIONES

A fin de ilustrar la aplicación de las distintas formulaciones integrales expuestas, para el cálculo de FITs se presentan en esta sección dos ejemplos en los que se analizan la precisión y estabilidad de las soluciones obtenidas con las diferentes alternativas. Los resultados obtenidos mediante la formulación mixta se han tomado de [13].

Grieta de borde Se trata de una placa cuadrada con una grieta de longitud a desde el centro de la misma hasta un borde, sometida a tracciones σ , uniformes en dos lados opuestos. Una de las discretizaciones usadas para este problema se representa en la figura Fig. 2. El contorno ficticio no es necesario emplearlo cuando se usa la formulación mixta. El FIT para este problema dado por Civelek *et al.* [4] es $K_I = 3.010\sigma\sqrt{\pi a}$, valor que se usará como referencia.

En la figura Fig. 3 se representa el error en el cálculo del FIT con las aproximaciones K_t , K_u , K_{u1}^h , K_{u2}^h y K_d^h , en función del cociente entre la longitud del E1/4 o E1/4S junto al vértice de la grieta y la longitud de la misma.

Puede observarse que los resultados son en general muy buenos. Para todas las aproximaciones, el error es menor del 8%, pero para K_t , K_{u1}^h y K_d^h éste se

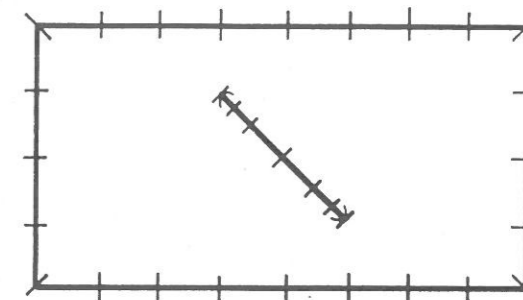


Figura 4: Discretización del problema de la grieta inclinada.

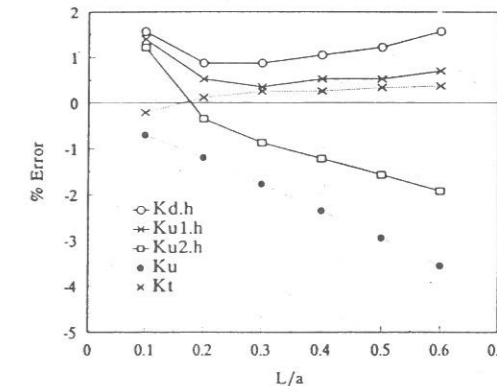


Figura 5: Error en el FIT de modo I para el problema de la grieta de inclinada.

mantiene en un rango inferior al 2%. Las aproximaciones más estables, es decir, con menor variación del error en todo el rango de l/a , son K_t y K_{u1}^h , aunque esta última resulta más precisa en este caso.

Grieta interna inclinada En este ejemplo se trata de una placa rectangular con una grieta centrada de longitud $2a$ inclinada 45° respecto al eje de la misma, sometida, igualmente a tracciones σ , uniformes en dos lados opuestos. Una de las discretizaciones empleadas se representa en la figura Fig. 4. Como en el problema anterior, los contornos ficticios no es necesario emplearlos cuando se usa la formulación mixta. Como valor de referencia de los FITs se utiliza los dados por Murakami [10] ($K_I = 0.572\sigma\sqrt{2a}$, $K_{II} = 0.529\sigma\sqrt{2a}$) que tienen un error menor del 0.5%.

En las figuras Fig. 5 y Fig. 6 se representa el error en el cálculo de los FITs con las mismas fórmulas que en el caso anterior. En esta ocasión el error es menor de 4% (excepto K_u para $l/a = 0.6$ donde es ligeramente superior). Para las aproximaciones K_t , K_{u1}^h y K_d^h el error es muy pequeño, siempre menor del 1%.

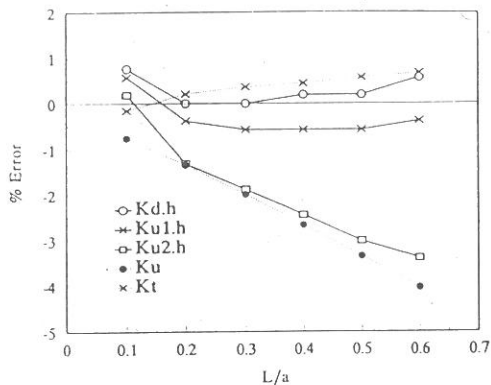


Figura 6: Error en el FIT de modo II para el problema de la grieta de inclinada.

7. CONCLUSIONES

El Método de los Elementos de Contorno es una técnica numérica muy adecuada para el cálculo de Factores de Intensidad de Tensiones, gracias a la precisión que se alcanza en los valores de los campos de desplazamientos y tensiones en las cercanías del vértice de la grieta.

Con la formulación estándar del MEC es posible obtener resultados muy precisos y estables para problemas de grietas de geometría y condiciones de carga cualesquiera, utilizando el procedimiento de las subregiones. Esto es necesario pues de otra forma el sistema resultante es singular.

La formulación mixta del MEC permite, sin embargo, evitar este artificio. Esta formulación se basa en combinar la ecuación estándar del MEC con la representación integral de las tracciones sobre el contorno, que se obtiene de la estándar mediante derivación, aplicación de la ley de Hooke y equilibrio en el contorno.

Las aplicaciones presentadas demuestran que la precisión y estabilidad de los resultados es excelente, tanto con la formulación estándar como con la mixta. Sin embargo, en general las aproximaciones del FIT K_{u1}^h y K_d^h obtenidas a partir de la formulación mixta alcanzan resultados más precisos que la mejor de las obtenidas a partir de la formulación estándar. La formulación mixta del Método de los Elementos de Contorno se perfila como una herramienta de gran potencia a la hora de resolver problemas generales de Mecánica de Fractura y de propagación de grietas en particular, pues gracias a la facilidad de remallado aventaja con mucho a otras técnicas numéricas alternativas. Su aplicabilidad no se restringe a los casos simples considerados en esta formulación, pues se puede extender a problemas más complejos, tridimensionales, dinámicos, etc.

8. REFERENCIAS

[1] Aliabadi M.H. y Rooke D.P., *Numerical Fracture Mechanics*, Computational Mechanical Publica-

tions, Southampton, and Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

- [2] Brebbia, C.A. y Domínguez, J., *Boundary Elements: An Introductory Course*, Computational Mechanics Publications-McGraw-Hill Book Company, 2ª Edición, 1992.
- [3] Blandford G.E., Ingraffea A.R. y Liggett J.A., "Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 17, pp.387-404, 1991.
- [4] Civelek M. B. y Erdogan F., "Crack problems for a rectangular sheet and an infinite strip", *Int. J. Fract.*, Vol. 19, pp.139-159, 1982.
- [5] Guiggiani M., Krishnasamy G., T.J. Rudolphi and F.J. Rizzo, "A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations", *J. Appl. Mech.*, Vol. 59, pp.604-614, 1992.
- [6] Gallego R. y Domínguez J., "Dynamic crack propagation analysis by moving singular boundary elements", *ASME, J. App. Mech.*, Vol. 59, pp.158-162, 1992.
- [7] Gallego R. y Domínguez J., "Hypersingular BEM for transient elastodynamics. Parts I and II", (enviado), 1994.
- [8] Martin P.A. y Rizzo F.J., "On boundary integral equations for crack problems", *Proc. Royal Soc. London*, Vol. A421, pp.341-355, 1989.
- [9] Martínez J. y Domínguez J., "On the use of quarter-point boundary elements for stress intensity factor computations", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 20, pp.1941-1950, 1984.
- [10] Murakami Y., *Stress Intensity Factors Handbook*, Pergamon Press, Oxford, 1987.
- [11] Polch E.Z., Cruse T.A. y Huang C.-J., "Traction BIE solutions for flat cracks", *Computational Mechanics*, Vol. 2, pp.253-267, 1987.
- [12] Portela A., Aliabadi M.H. y Rooke D.P., "The Dual Boundary Element Method: effective implementation for crack problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 33, pp.1269-1287, 1992.
- [13] Sáez A., Gallego R. y Domínguez J., "Hypersingular quarter-point Boundary Elements for cracks problems", Vol. 38, 1995.
- [14] Sládek V. y Sládek J., "Transient elastodynamic three-dimensional problems in cracked bodies", *Appl. Math. Modelling.*, Vol. 8, pp.2-10, 1984.
- [15] Tanaka M., Sládek V. y Sládek J., "Regularization techniques applied to boundary element methods", *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 47(10), pp.457-499, 1984.