

José Dominguez Abascal y Rafael Gallego Sevilla

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales  
Av.Reina Mercedes s/n, 41012-Sevilla

**Resumen:** Se presenta un modelo que haciendo uso del Método de los Elementos de Contorno permite estudiar la propagación dinámica de grietas en cuerpos elásticos de forma arbitraria. Se ha desarrollado para ello una técnica de remallado y un elemento móvil que incluye la singularidad de las tensiones del vértice de la grieta. El método se aplica a un problema de propagación dinámica de una grieta en una placa rectangular. Los resultados se comparan con otros ya existentes obtenidos por procedimientos menos ventajosos.

**Abstract:** A model for the dynamic analysis of crack propagation in arbitrary shape finite bodies is presented. The procedure is based on the Boundary Element Method. A remeshing technique and a moving singular element has been developed. The method is applied to a problem of dynamic crack propagation in a rectangular plate. The obtained results are compared with available solutions computed using more involved or less general procedures.

## 1. INTRODUCCION:

El método de los Elementos de Contorno (MEC) se ha revelado como una alternativa muy ventajosa para los problemas de mecánica de la fractura. Este método parece ser más ventajoso que el de los Elementos Finitos para los problemas elástico-lineales. Entre las ventajas del MEC para problemas de mecánica de fractura están el hecho de que la discretización se restringe al contorno y que el concepto de elemento singular resulta más simple.

La dinámica de la fractura en particular, se dedica a aquellos problemas de la mecánica de la fractura en los que los efectos de inercia son importantes y no pueden ser despreciados. En este caso los métodos numéricos requieren de una formulación que tenga en cuenta los efectos de inercia y de una modificación de la discretización (remallado) a lo largo del proceso de propagación. Este remallado es sin duda más simple en el MEC que en los métodos de dominio (Elementos Finitos, Diferencias Finitas).

La formulación directa del MEC en combinación con un elemento singular con nodo a un cuarto (SNC) fue utilizada para problemas elastoestáticos de mecánica de la

fractura por Blandford et al. (1981) y Martínez y Dominguez (1984) quienes mostraron que se obtenían resultados muy precisos del Factor de Intensidad de Tensión (FIT) con discretizaciones muy simples. Chirino y Dominguez (1989) usaron el mismo tipo de elemento SNC para calcular FIT dinámicos en grietas estacionarias sometidas a solicitaciones dinámicas; todo ello trabajando en el dominio de la frecuencia. Más recientemente Dominguez y Gallego (1991) han utilizado la formulación dinámica del MEC en el dominio del tiempo en combinación con un elemento SNC para calcular FIT de grietas estacionarias sometidas a cargas dinámicas transitorias.

En la presente comunicación se emplea la formulación directa del MEC en el dominio del tiempo en combinación con el elemento SNC para estudiar problemas de propagación dinámica de grietas. Para ello ha sido preciso desarrollar la formulación del elemento SNC móvil además de una técnica de remallado para representar la grieta según avanza a lo largo del tiempo. Los estudios previos de otros autores dedicados a la propagación dinámica de grietas haciendo uso de métodos basados en ecuaciones integrales están limitados a dominios infinitos y emplean formulaciones particulares. La que

aquí se presenta es muy general y permite el estudio de grietas propagándose a gran velocidad en dominios acotados de forma arbitraria.

Se presenta primero la formulación directa del MEC en el dominio del tiempo y la del elemento SNC. A continuación se describe la técnica de remallado y la formulación del elemento móvil singular. Por último se estudia el caso de una grieta centrada en una placa rectangular sometida a una tracción uniforme sobre dos lados opuestos que varía en el tiempo como una función de Heaviside. La grieta permanece estacionaria hasta un instante  $t_0$  a partir del cual se propaga en sus dos extremos a una velocidad constante previamente establecida. Los resultados se comparan con los obtenidos por otros autores usando procedimientos menos ventajosos. El ejemplo ilustra la sencillez y precisión del modelo propuesto.

## 2. FORMULACION BASICA

La representación integral del desplazamiento de un punto dentro de un cuerpo elástico, o en su contorno, puede ser escrita en la forma (vease por ejemplo Gallego, 1990):

$$c_{ij} u_j = \int_{\Gamma} \left[ \int_0^{t^*} u_{ij}^* p_j dt \right] d\Gamma - \int_{\Gamma} \left[ \int_0^{t^*} (z_{ij}^* u_j - w_{ij}^* u_j) dt \right] d\Gamma \quad (1)$$

donde  $u_j$  y  $p_j$  representan componentes del desplazamiento y las tracciones respectivamente,  $c_{ij} = \delta_{ij}$  para puntos del interior y  $c_{ij} = 1/2 \delta_{ij}$  para puntos del contorno,  $p_{ij}^*$  es el tensor de tracciones obtenido por derivación del de desplazamientos  $u_{ij}^*$  correspondiente a la carga impulso unidad. El límite superior  $t^*$  se emplea para evitar el finalizar las integrales sobre el pico de una función delta. Las expresiones de  $z_{ij}^*$  y  $w_{ij}^*$  pueden encontrarse en el artículo de Antes (1985).

La solución numérica de la ecuación (1) se lleva a cabo mediante la discretización del tiempo en pasos iguales de tamaño  $\Delta t$  y del contorno en trozos de línea. Desplazamientos y tracciones son aproximados mediante funciones de interpolación.

$$u_j = \sum_q \sum_m \varphi^q(r) \eta^m(\tau) u_j^{mq} \quad (2)$$

$$p_j = \sum_q \sum_m \psi^q(r) \mu^m(\tau) p_j^{mq}$$

siendo  $u_j^{mq}$  y  $p_j^{mq}$  valores de la componente  $j$  del desplazamiento y la tracción respectivamente, en el nodo  $q$  en el instante  $t_m = m \Delta t$ . Las funciones  $\varphi^q(r)$  y  $\psi^q(r)$  son funciones de interpolación en el espacio mientras que  $\mu^m(\tau)$  y  $\eta^m(\tau)$  son funciones de interpolación en el tiempo.

La aproximación de las velocidades es tomada de forma congruente con la de los desplazamientos.

$$\dot{u}_j = \sum_q \sum_m \dot{\varphi}^q(r) \dot{\eta}^m(\tau) u_j^{mq} \quad (3)$$

Las funciones de interpolación  $\mu^m(\tau)$  y  $\eta^m(\tau)$  se suponen constantes a trozos y lineales a trozos respectivamente. Esta elección se basa en los estudios de estabilidad y precisión llevados a cabo por Mansur (1983) y por Dominguez y Gallego (1990).

Tras la discretización se obtiene un sistema de ecuaciones de la forma

$$\sum_{m=1}^n H^{nm} u^m = \sum_{m=1}^n G^{nm} p^m \quad (4)$$

donde  $u^m$  y  $p^m$  incluyen las dos componentes de los desplazamientos y tracciones nodales en el paso  $m$ .

El sistema de ecuaciones (4) permite resolver para los valores de  $u$  y  $p$  desconocidos en el paso  $n$  a partir de los ya calculados en pasos anteriores y los prescritos en el propio instante. Las expresiones de los términos del sistema de ecuaciones pueden encontrarse en el trabajo de Gallego (1990).

Los elementos de contorno empleados contienen tres nodos y proporcionan por tanto una aproximación cuadrática. El dominio en estudio es subdividido en regiones con un contorno que atraviesa a lo largo de la grieta o grietas. El elemento en contacto con el vértice de la grieta y que se adentra en el material es un elemento singular con nodo a un cuarto. Esto implica que representa las tracciones con una función del tipo  $1/r^{1/2}$ , siendo  $r$  la distancia al vértice, la cual permite reproducir los tres primeros términos del

desarrollo en serie de la solución analítica. A partir de esta representación se calcula el factor de Intensidad de Tensión.

En el artículo de Martinez y Dominguez (1984) se encuentra descrita con detalle la formulación del elemento SNC y el cálculo de los FIT directamente a partir del valor nodal de las tracciones en el vértice de la grieta mediante la expresión:

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{2}} (2\pi l)^{1/2} \quad (5)$$

$$K_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}} (2\pi l)^{1/2}$$

## 3. ELEMENTO MOVIL

Sea un dominio plano en el cual existe una grieta que se propaga a una velocidad  $c$  según una trayectoria conocida que supondremos rectilínea. Supongase un contorno que subdivide el dominio en dos trozos pasando a lo largo de la grieta y siguiendo la dirección de propagación. En un instante  $t$ , la posición de la grieta y la discretización de la zona adyacente es la de la Figura 1.a. Tras un incremento de tiempo  $\Delta t$ , el vértice se ha movido  $c\Delta t$  (Figura 1.b.). Según avanza el vértice, los elementos a la izquierda aumentan de tamaño y los de la derecha disminuyen. Los dos elementos inmediatamente antes e inmediatamente después del vértice son excluidos de este proceso y mantienen su tamaño, si bien se trasladan con el vértice de la grieta. Estos elementos que se trasladan únicamente son SNC. El resto de elementos incluyendo aquellos que cambian de tamaño y se trasladan son elementos regulares de tipo cuadrático. Cuando los elementos hacia delante del vértice de la grieta (derecha en la Figura 1) son mucho menores que los existentes hacia atrás (3/5), el número de elementos hacia atrás es aumentado en uno mientras que el número hacia delante es disminuido en uno. Se redefine pues la discretización a ambos lados del vértice de la grieta (Figura 1.d.).

En caso de emplear la discretización espacial y temporal definida por la ecuación (2) para elementos móviles, los resultados obtenidos resultan muy pobres. Esto es debido a que las variaciones espacial y temporal no están ahora desacopladas ya que las funciones aproximantes en el espacio (cuadráticas o singulares) se desplazan con el transcurso del tiempo. Por lo tanto, desplazamientos y tracciones son representados en la forma

$$u_j = \sum_q \sum_m \varphi^q(x, \tau) \eta^m(\tau) u_j^{mq}$$

$$p_j = \sum_q \sum_m \psi^q(x, \tau) \mu^m(\tau) u_j^{mq} \quad (6)$$

y las velocidades,

$$\dot{u}_j = \sum_q \sum_m [\dot{\varphi}^q(x, \tau) \eta^m(\tau) + \varphi^q(x, \tau) \dot{\eta}^m(\tau)] u_j^{mq} \quad (7)$$

La representación integral, una vez discretizadas las variables, será:

$$c_{ij}^p u_j^{mp} = \sum_{m=1}^n \sum_{q=1}^Q \left\{ \left[ \int_{\Gamma_q} \int_{t_{m-1}}^{t_m^*} u_{ij}^* \mu^m \psi^q dt d\Gamma \right] p_j^{mq} - \left[ \int_{\Gamma_q} \int_{t_{m-1}}^{t_m^*} (z_{ij}^* \eta^m \varphi^q) dt d\Gamma - \int_{\Gamma_q} \int_{t_{m-1}}^{t_m^*} (w_{ij}^* \eta^m \varphi^q + w_{ij}^* \eta^m \varphi^q) dt d\Gamma \right] u_j^{mq} \right\} \quad (8)$$

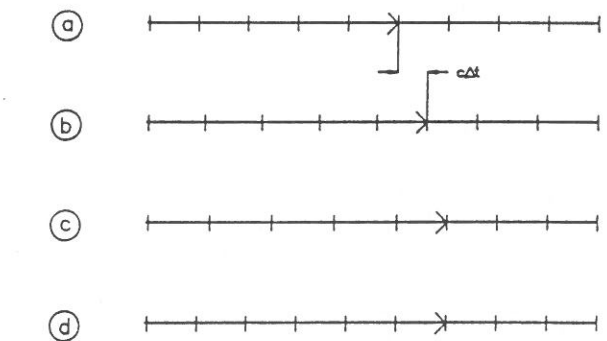


Fig.1 Movimiento de los elementos y proceso de remallado.

En orden a desacoplar nuevamente las variables espacio y tiempo y poder realizar una integración sucesiva en ambas variables, las funciones de forma que dependen de las dos se aproximan haciendo uso de su desarrollo en serie. Así,

$$\psi^q(r, \tau) = \psi^q(r, \tau_{m-1}) + (\tau - \tau_{m-1}) \dot{\psi}^q(r, \tau_{m-1}) \quad (9)$$

$$\phi^q(r, \tau) = \phi^q(r, \tau_{m-1}) + (\tau - \tau_{m-1}) \dot{\phi}^q(r, \tau_{m-1})$$

Con la sustitución de (9) en (8) pueden realizarse sucesivamente la integración temporal y espacial. La primera de ellas puede realizarse analíticamente mientras que la segunda es realizada numéricamente. En este último caso aparecen singularidades de orden  $-3/2$ , ya que se emplean derivadas de las funciones de forma singular que eran de orden  $-1/2$ . Este hecho obliga a emplear el concepto de parte finita de la integral y a utilizar las fórmulas numéricas dadas para este tipo de integrales por (Kutt, 1975). Las expresiones obtenidas tras la integración temporal analítica y los detalles de la integración numérica pueden verse en la Tesis Doctoral de Gallego (1990).

**4. GRIETA PROPAGANDOSE A VELOCIDAD CONSTANTE EN UNA PLACA RECTANGULAR.**

Para demostrar la aplicabilidad del método propuesto, a problemas de propagación de grietas en cuerpos finitos sometidos a sollicitaciones dinámicas, se presenta a continuación el estudio de un problema de este tipo que fue analizado por Nishioka y Atluri (1980) usando un elemento finito singular móvil desarrollado por ellos mismos. Se trata de una placa rectangular que contiene una grieta centrada en la misma (Figura 2) y que se encuentran sometida a una tracción uniforme sobre dos lados opuestos. La tracción se aplica súbitamente en el instante  $t = 0$ . Las propiedades del material son: Módulo de elasticidad transversal,  $\mu = 2.94 \times 10^9$  Pa, Módulo de Poisson  $\nu = 0.286$  y densidad  $\rho = 2450$  Kg/m<sup>3</sup>. La grieta tiene una longitud inicial de 24mm y permanece quieta hasta que para  $t = t_0 = 4.4$   $\mu$ s comienza a propagarse con una velocidad constante  $C = 1000$  m/seg.

Teniendo en cuenta la simetría del problema, se ha discretizado únicamente un cuarto de la placa. En la Figura 3 se muestra la discretización para la fase inicial en que la grieta mantiene una longitud de 24mm. Los dos elementos adyacentes al vértice son elementos móviles SNC mientras que el resto son elementos normales de tipo cuadrático cuyo tamaño se va reajustando en el proceso de propagación. Los elementos SNC se trasladan pero no cambian de tamaño. El paso de tiempo empleado es  $\Delta t = 0.34$   $\mu$ s lo cual corresponde a un avance de las ondas P para cada paso igual en 1.08 veces la distancia entre nodos de los elementos que forman la mayor parte de la malla.

En la Figura 4 se muestra el FIT de modo-I a lo largo del tiempo, normalizado respecto a  $\sigma(\pi a)^{1/2}$ . Los resultados de elementos de contorno, que se indican por  $K_t$ , son comparados con los exactos debidos a Freund (1973) y los obtenidos mediante Elementos Finitos por Nishioka y Atluri (1980). Debe indicarse que la solución exacta de Freund (1973) corresponde a una grieta semi-infinita en un medio infinito. Por lo tanto, esos resultados son válidos para el problema que aquí se estudia únicamente en los instantes previos y primeros de la propagación, antes de que tenga lugar interacción con un vértice de la grieta de las ondas emitidas por el otro o reflejadas en el contorno. Los resultados obtenidos con el método aquí propuesto muestran un buen acuerdo con los exactos, para los tiempos en que estos son válidos, y con los obtenidos numéricamente por Nishioka y Atluri con un procedimiento numérico que implica un proceso de remallado claramente más complejo que el que aquí se produce.

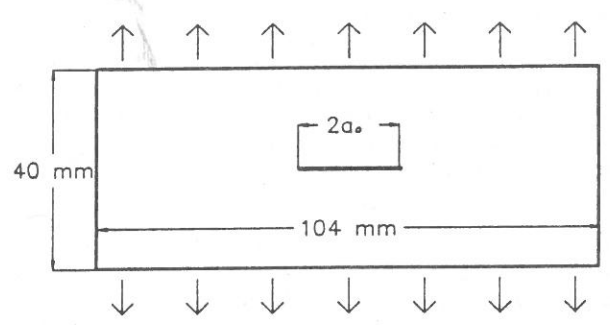


Fig. 2. Placa rectangular con grieta sujeta a carga subita.

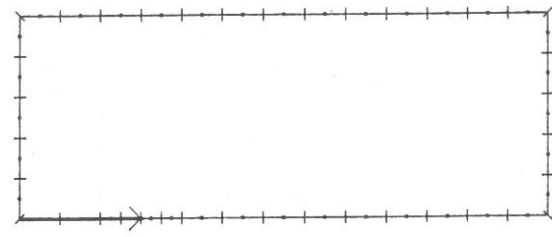


Fig.3. Discretización inicial para placa rectangular con grieta.

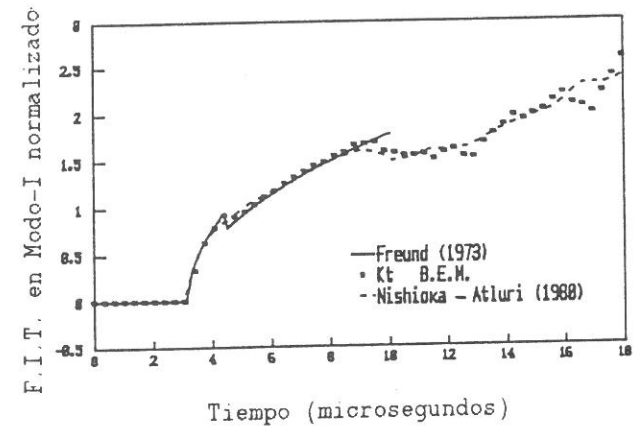


Fig.4. Variación temporal del factor de intensidad de tensiones pa grieta propagandose en la placa rectangular.

**5. CONCLUSIONES.**

En el presente artículo se ha presentado un procedimiento para el analisis dinámico de propagación de grietas en medios de geometría arbitraria. Se ha desarrollado un elemento de contorno singular móvil en combinación con una técnica de remallado. Se emplea todo ello dentro del contexto de la formulación general MEC en el dominio del tiempo.

Los resultados obtenidos para una aplicación están de acuerdo con los obtenidos por otros autores empleando procedimientos más complejos y menos versátiles. Todo el estudio muestra la buena precisión y amplias posibilidades del modelo para el estudio en general de propagación dinámica de grietas.

**6. AGRADECIMIENTOS.**

Los autores de este trabajo quieren agradecer su ayuda financiera a la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología.

**7. REFERENCIAS.**

1. H.Antes, 1985, "A boundary element procedure for transient wave propagations in two-dimensional isotropic elastic media", Finite Elem.Anal.Des., Vol.1, 313-322.
2. G.E.Blandford, A.R.Ingraffea and J.A.Liggett, 1981, "Two-dimensional stress intensity factor computations using the Boundary Element Method."Int.J. Num.Meth.Eng., Vol.17, pp. 387-404.
3. F.Chirino and J.Dominguez, 1989, "Dynamic analysis of crack using Boundary Element Method", Eng.Fract.Mech., Vol.34, 1051-1061.

4. J.Dominguez and R.Gallego, 1990, "On time domain Boundary Element Method for elastodynamics", Mathematical and Comp.Modelling, (En prensa).
5. J.Dominguez, J.Gallego,R., 1991, "Time domain boundary element method for dynamic stress intensity factor computations", Int.J.Numer.Meth.Eng., (En prensa).
6. Freund,L.B., 1973, Crack Propagation in an elastic solid subjected to general loading-III: Stress wave loading, J.Mech.Phys.Solids, Vol.21, pp.47-61.
7. R.Gallego, 1990, "Estudios Numericos de Problemas de Fractura Elastodinamica", Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla.
8. Kutt,H.R., 1975, "Quadrature formulae for finite-part integrals", CSIR Specia Report, WISK 178, National Research Institute for Mathematical Sciences, Pretoria, Republic of South Africa.
9. W.J.Mansur, 1983, "A time-stepping technique to solve wave propagation problems using the boundary element method", Ph.D.Thesis, University of Southampton, U.K.
10. J.Martinez and J.Dominguez, 1984, "On the use of quarter-point boundary elements for stress intensity factor computations", Int.J.Num.Meth.Eng. Vol. 20, pp.1941-1950.
11. Nishioka,T., Atluri,S.N., 1980, "Numerical modelling of dynamic crack propagation in finite bodies by moving singular element, Part I: Formulation; Part II: Results, J.Appl.Mech, Vol.47, pp.570-576 & pp.577-582.