

# Problemas antiplanos de mecánica de la fractura en materiales anisótropos

F. García Sánchez, (1) A. Sáez Pérez, (1) J. Domínguez Abascal

*Departamento de Ingeniería Civil, de Materiales y Fabricación  
Universidad de Málaga, Plaza de El Ejido s/n, 29013 Málaga  
e-mail: fgsanchez@uma.es*

*(J)Departamento de Mecánica de Medios Continuos, Teoría de Estructuras e I. T.  
Universidad de Sevilla, Camino de los Descubrimientos s/n, 41092 Sevilla  
e-mail: andrE.5@us.es y iose@us.es*

## Resumen

Se presenta la formulación mixta del Método de los Elementos de Contorno (MEC) para problemas de mecánica de fractura antiplanos en medios anisótropos. Se implementan las ecuaciones integrales (EI) en desplazamientos y en tracciones. Las integrales hipersingulares asociadas a la EI en tracciones se evalúan mediante un cambio de variable que permite su descomposición en integrales singulares con solución analítica conocida e integrales regulares de fácil integración numérica. Se consideran las soluciones fundamentales para plano completo y para semiplano.

**Palabras Claves:** Método de elementos de contorno, factor de intensidad de tensiones, anisotropía, antiplano, hipersingular

## Abstract

This paper discuss on the implementation of the mixed formulation of the Boundary Element Method for antiplane fracture mechanics problems in anisotropic media. The formulation makes use of both the displacement and the traction integral equations. The hypersingular kernels appearing in the traction equation are computed by transformation of the integrals into regular ones, which are calculated numerically, plus simple singular integrals with known analytical solutions. Full-plane and half-plane fundamental solutions are considered.

**Keywords:** Boundary element method, stress intensity factor, anisotropy, antiplane, hypersingular

## 1. Introducción

Es bien conocida la importancia que la determinación del factor de intensidad de tensiones (FIT) tiene en situaciones ingenieriles con presencia de grietas. La determinación de este factor ha sido abordada en la literatura mediante diferentes métodos por multitud de autores, e. g. (7, 8, 10, 12). Estos estudios se han extendido al campo del

comportamiento anisótropo con el uso progresivo de materiales que muestran este comportamiento. En este trabajo se aplica el MEC, en su formulación mixta, al análisis de problemas antiplanos anisótropos para la determinación del FIT. Esta formulación implica el tratamiento de integrales hipersingulares que son resueltas aquí mediante un sencillo cambio de variable que posibilita la descomposición de estas integrales en

suma de integrales de solución analítica conocida más una integral regular. Este es un procedimiento más general que los existentes en la literatura [11, 6].

2. Formulación del problema

2.1 Formulación mixta del MEC

La formulación mixta del MEC para fuerzas de volumen nulas se basa en (e.g. [1]):

- Ecuación integral en desplazamientos (§ pertenece a r e):

$$c(x)u(x) + \int_{\Gamma_e} p_j(x, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma^+} p_{ij}^*(x, x) \Delta u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(x, x) p_j(x) d\Gamma(x) \quad (1)$$

- Ecuación integral en tracciones (§ pertenece a f+):

$$P_i(x) + N(x) \int_{\Gamma_e} s_k(x, x) u_k(x) dr(x) + N(x) \int_{\Gamma^+} s_k(x, x) u_k(x) dr(x) = N_i(x) \int_{\Gamma_e} d_k(x, x) p_k(x) dr(x) \quad (2)$$

donde  $\Gamma_e$ ,  $\Gamma^+$  y  $\Gamma^-$  son los contornos del problema (fig. 1a);  $P_i = p_i + p_i$  y  $u_i = u_i - u_i$ ;  $x = (x_1, x_2)$  y  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  son, respectivamente, los puntos de colocación y observación (fig. 1b);  $N$  es la normal exterior en el punto de colocación. Se ha considerado el caso frecuente de que  $P_i = 0$ .  $u$  y  $p$  son las soluciones fundamentales en desplazamientos y tracciones y  $s_k$  y  $d:k$  están relacionados con las derivadas de las anteriores a través

de las constantes del material.

2.2 Solución fundamental caso antiplano

Los problemas bidimensionales anisótropos se desacoplan, si el plano del dominio es de simetría elástica, en un problema plano más uno antiplano. Llamando  $x_1-x_2$  a ese plano, la ecuación de comportamiento en el caso antiplano puede escribirse como

$$C_{ij} J = \begin{pmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} U_3 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

y la solución fundamental tiene la siguiente expresión (e.g. [6]):

$$u_i(x, s) = 2 \text{Re} \{ P_n [A_{13} \ln(z' - z^1) - a E_{11} A_{ii} \ln(z' - z^1)] \} \\ p_{ij}(x, s) = 2 \text{Re} \left\{ Q_{ij} \left[ \frac{A_{ij}}{z' - z^f} (\mu n_1 - n_2) - a \frac{E_{ii} A_{ij}}{z' - z^f} (\mu n_1 - n_2) \right] \right\} \quad (4)$$

donde  $a=0$  para plano completo,  $a=1$  para semiplano,  $n = (n_1, n_2)$  es la normal exterior al contorno en el punto de observación (fig. 1b) y los términos  $P_{33}$ ,  $Q_{33}$ ,  $A_{33}$  y  $E_{33}$ , dependen de las propiedades del material.  $z'$  y  $z^x$  son, respectivamente, el punto de colocación y el de observación en el plano complejo, definidos mediante:  $z' = g_1 + \mu g_2$ ,  $z^x = x_1 + \mu x_2$  con  $\mu = -(C_{45} + i C_{44} C_{55} - C_{55}) / C_{44}$ , véase [2].

Con todo lo anterior, tras discretizar los contornos del dominio, las expresiones (1) y (2) forman un sistema de ecuaciones para el cálculo de los desplazamientos y tracciones sobre  $\Gamma_e$  y de los incrementos de desplazamiento sobre  $\Gamma^+$ .

2.3 Integración hipersingular

En las expresiones (1) y (2) aparecen integrandos de distinto orden de

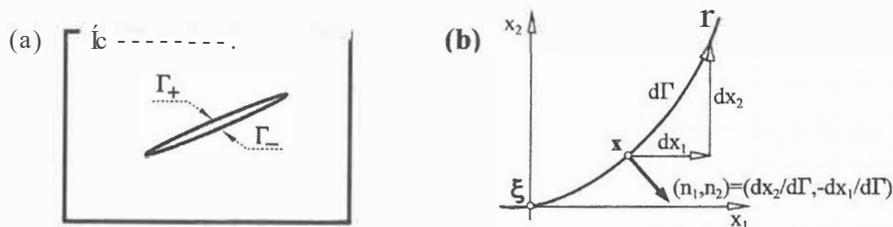


Figura 1. (a) Denominación de los contornos para un dominio con grieta. (b) Normal unitaria exterior en el punto de observación

singularidad: débil, en los términos  $u$ , que se integran mediante cuadraturas de Gauss con ponderación logarítmica; fuerte, en los términos  $p$ , cuya integración puede obviarse con la condición de movimiento de sólido rígido; e hipersingular, debido a los términos  $s_k$  que han sido integrados como se indica a continuación.

Las integrales hipersingulares tienen la forma

$$\int_{\Gamma_e} \frac{\mu n_1 - n_2}{r.Cz^x - z^{\xi}} d\Gamma \quad (5)$$

donde  $Q_i$  son las funciones de forma que en este trabajo han sido funciones cuadráticas. Mediante el cambio de variable  $r = z^x - z^f$  podemos escribir (ver fig. 1b)

$$\frac{dr}{dx_1} + \frac{dr}{dx_2} = \mu n_1 - n_2 \quad (6)$$

Por otra parte, desarrollando en serie de Taylor las funciones de forma tenemos

$$Q_i(r) = p_i(r=0) + L:4' ] - \dots + \dots, r + c \{r\} \quad (7)$$

Llevando la expresión (6) y los dos primeros términos del desarrollo en serie (7) a (5), las integrales hipersingulares pueden ser

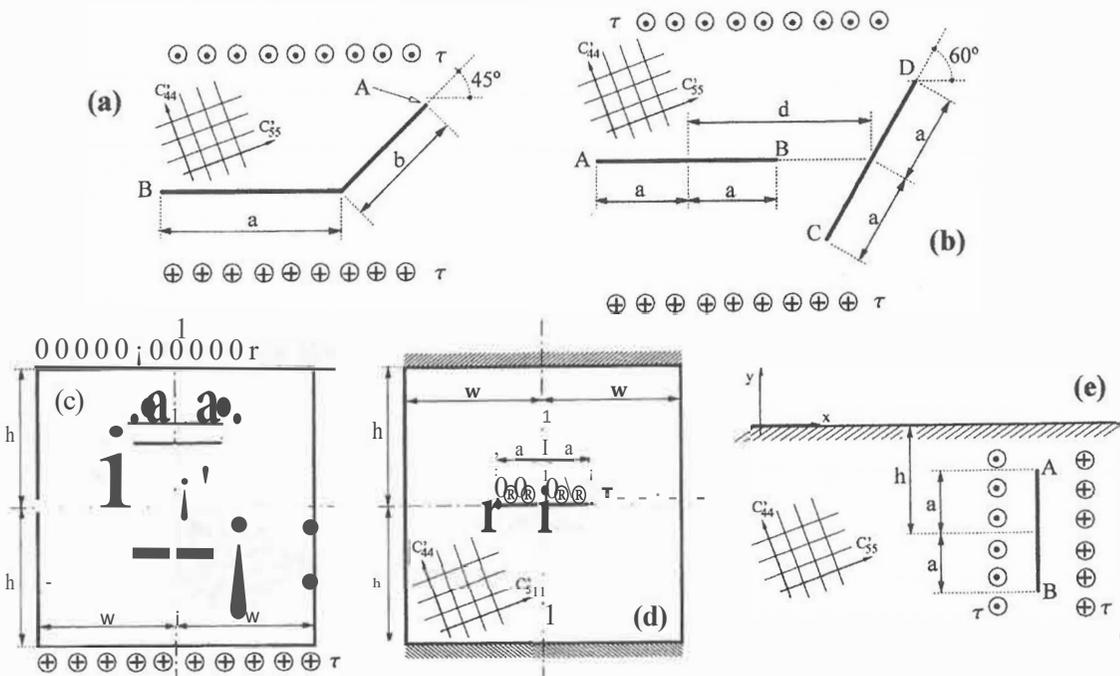


Figura 2. Ejemplos resueltos: (a, b) dominio infinito, (c, d) dominio finito, (e) semiespacio

descompuestas en suma de integrales de solución analítica conocida más una integral regular fácilmente calculable mediante cuadraturas ordinarias de Gauss:

$$\int_{\Gamma_e} \frac{\mu n_1 - n_2}{(z^x - z^{\xi})^2} \phi_q d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \frac{1}{r^2} \phi_q dr = \int_{\Gamma_e} \frac{1}{r^2} (\phi_q - \phi_{q0} - \phi'_{q0} r) dr + \phi_{q0} \int_{\Gamma_e} \frac{1}{r^2} dr + \phi'_{q0} \int_{\Gamma_e} \frac{1}{r} dr \quad (8)$$

2.4 Determinación del factor de intensidad de tensiones

Para la determinación del FIT emplearemos la expresión que lo relaciona con los desplazamientos de los contornos de la grieta (e.g. [10])

$$K_m = - \frac{\dots}{\text{Im} \{1/(C_{45} + \mu C_{44})\}} \dots \quad (9)$$

donde el asterisco indica el nodo más cercano al vértice de grieta y, como habitualmente,  $r$  indica distancia desde el vértice. Para el elemento del vértice de grieta se utiliza un elemento recto, a un cuarto, discontinuo, que representa el comportamiento  $J_i$  de los desplazamientos en el entorno del vértice de grieta [8].

3. Ejemplos Numéricos

A continuación se presentan los FIT normalizados ( $K_m = K_m/t (rea)^{-0.5}$ ) obtenidos para los problemas que se ilustran en la fig. 2. Se han considerado tanto un material cuasi-isótropo, que permite comparar nuestros resultados con los existentes en la literatura, como un material ortótropo (grafito-epoxy:  $C_{44} = 3.5$  GPa,  $C_{55} = 7.07$  GPa,  $C_{45} = 0$  GPa).

3.1 Ejemplos de dominio infinito (figuras 2a y 2b)

La concordancia entre los resultados obtenidos para el caso cuasi-isótropo y los de las referencias ([9], [6]) se pone de manifiesto en la figura 3 y en la tabla 1. Las mallas empleadas para el caso de la fig. 2a ha sido de 10 elementos para el segmento horizontal y de 2 a 6 elementos para el oblicuo según su longitud. Para el caso de la Fig. 2b se ha usado una malla de 10 elementos.

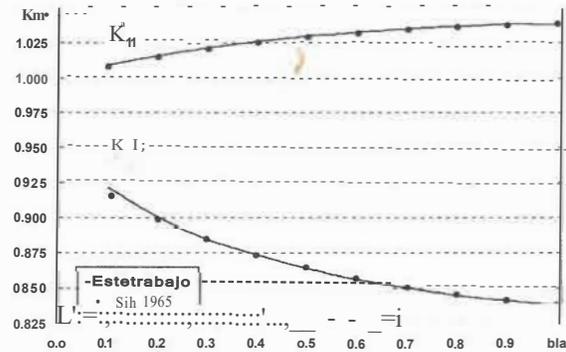


Figura 3.  $K \cdot w$  para grieta bilineal (fig. 2j)

Tabla 1.  $K \cdot m$  para grietas vecinas en dominio infinito (fig. 2b,  $a = 0.45 d$ )

Vértice:	A	B	e	D
Este trabajo	1.0179	1.0290	0.4836	0.5591
E. Pan (1997) [6]	1.0160	1.0269	0.4830	0.5580

3.2 Ejemplos de dominio finito (figuras 2c y 2d)

Para caso cuasi-isótropo la tabla 2 muestra, nuevamente, la concordancia de nuestros resultados y los existentes en la literatura [3, 4, 5, 6]. La figura 4 muestra los resultados para caso anisótropo en función del ángulo entre las direcciones de ortotropía y el

sistema de referencia,  $\phi$ . Este ángulo provoca una matriz de comportamiento anisótropa aunque el material sea ortótropo. La malla empleada en ambos casos consta de 24 elementos en el contorno exterior y 6 elementos para definir la grieta.

Tabla 2.  $K \cdot w$  para placa cuadrada (figs. 2c y 2d)

Ejemplo	e/w	Este trabajo	Maet al. (1997) [6]	Pan (1997) [6]
Fig. 2c	0	1.1311	1.130 (3)	1.1276
	0.5	1.1542	1.178 (5)	1.154
Fig. 2d	0	0.9232	0.923 (4)	0.9231

Tabla 3.  $K \cdot w$  para grieta vertical en semiespacio (fig. 2e,  $h = 2a$ )

Vértice:	A	B
Este trabajo	1.0499	1.0299
an (1997) [6]	1.0487	1.0287

3.3 Ejemplo de semiespacio (figura 2e)

Nuevamente puede apreciarse la exactitud de los resultados para el caso cuasi-isótropo en la comparación de la tabla 3. La malla empleada tiene 14 elementos para definir la grieta. La superficie libre no es necesario mallarla usando la solución de semiplano.

4. Conclusiones

Se ha presentado la implementación de la formulación nuxta del MEC para el estudio de problemas antiplanos de mecánica de la fractura en medios anisótropos. Las integraciones hipersingulares implícitas en la EI en tracciones se han resuelto mediante un sencillo proceso de regularización con la ayuda de un cambio de variable y del desarrollo en serie de Taylor de las funciones de forma en el entorno del punto de colocación. La generalidad del procedimiento de integración permite el empleo de elementos discontinuos a un cuarto que modelan el comportamiento del sólido en los alrededores del vértice de una

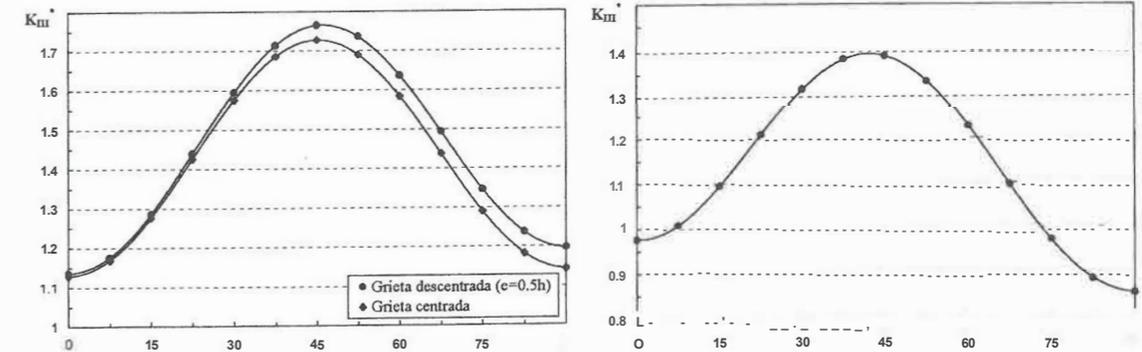


Figura 4.  $K \cdot m$  frente al ángulo de las direcciones de ortotropía con el sistema de referencia,  $\phi$ . Izda: caso de fig. 2c. Dcha: caso de fig. 2d

grieta. Los FIT se evalúan directamente a partir de los desplazamientos calculados para el nodo más cercano al vértice de grieta. De la comparación de los resultados obtenidos con los existentes en la literatura se deduce la eficacia y precisión del método expuesto.

5. Referencias

1. F. García, A. Sáez, J. Domínguez, Actas Mét. Num. Ing. V, Madrid, (2002) 170.
2. S.G. Lekhnitskii, Th. elast. anis. el. body, Holden-Day, San Francisco, (1963).
3. S.W. Ma, Eng. Frac. Mech., Vol. 30, (1988) 435.
4. S.W. Ma, Int. J. Frac., Vol. 39, (1989) 323.
5. S.W. Ma, L.X. Zhang, Eng. Frac. Mech., Vol. 40, (1991) 1.
6. E. Pan, Int. J. Frac., Vol. 88, (1997) 41.

7. E. Pan, C.-S. Chen, B. Amadei, Eng. Anal. Bound. El., Vol. 20, (1997) 185.
8. A. Sáez, R. Gallego, J. Domínguez, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 38, (1995) 1861.
9. G.C. Sih, Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., Vol. 32, (1965) 51.
10. G.C. Sih, P.C. Paris, G.R. Irwin, Int. J. Frac. Mech., Vol. 1, (1965) 189.
11. P. Sollero, M.H. Aliabadi, Int. J. Frac., Vol. 64, (1993) 269.
12. P. Sollero, M.H. Aliabadi, Comp. Struc., Vol. 31, (1995) 229.

6. Agradecimientos

Los autores expresan su agradecimiento al Ministerio de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico recibido a través del proyecto DPI2000-1217-C02-01.